

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Ingeniería Mecánica.

Trabajo Fin de Grado

**Estudio numérico del mecanismo
de apertura-cierre de un eje
rotatorio fisurado**

Autora: Andrea Rivas Pérez

Tutora: M^a Belén Muñoz Abella

Leganés, Junio 2013

Índice general

Capítulo 1: Introducción.....	6
1.1. Motivación.....	6
1.2. Objetivos.....	7
1.3. Estructura del documento.....	7
Capítulo 2: Antecedentes.....	9
2.1. Estudio teórico del comportamiento de un eje fisurado.....	9
2.1.1. Formulación del problema.....	9
2.1.2. Coeficientes de flexibilidad.....	10
2.1.3. Fisuras en ejes.....	12
2.1.3.1. Obtención de las ecuaciones para el desplazamiento vertical de la viga	12
2.1.3.2. Aplicación de las condiciones de contorno y compatibilidad.....	15
2.2. Método de elementos finitos.....	18
2.2.1. Introducción al MEF.....	18
2.2.2. Introducción a ABAQUS.....	19
Capítulo 3: Modelo numérico.....	22
3.1. Introducción.....	22
3.2. Desarrollo del modelo.....	22
Capítulo 4: Resultados y validación del modelo.....	30
4.1. Resultados y discusión.....	30
4.2. Validación del modelo.....	35
Capítulo 5: Obtención de la ecuación empírica.....	42
Capítulo 6: Conclusiones y desarrollos futuros.....	47
6.1. Conclusiones.....	47
6.2. Desarrollos futuros.....	47
Bibliografía.....	48
Anexos: Resultados de simulación.....	50
Para $\alpha=0,1$	50
Para $\alpha=0,2$	54
Para $\alpha=0,3$	58
Para $\alpha=0,4$	62
Para $\alpha=0,5$	66

Índice de figuras

Capítulo 2

Figura 2.1: eje fisurado sometido a flexión.	9
Figura 2.2: Geometría transversal de la fisura de frente elíptico [7].	10
Figura 2.3: Representación del eje biapoyado.	13

Capítulo 3

Figura 3.1: Representación esquemática del eje con fisura.	22
Figura 3.2: Particiones del eje.	23
Figura 3.3: Selección del área fisurada para $\alpha=0,1$	24
Figura 3.4: Selección del área fisurada para $\alpha=0,5$	24
Figura 3.5: Partes del eje de estudio.	25
Figura 3.6: Contacto entre superficies para unir las dos partes del eje.	25
Figura 3.7: Contacto entre las dos superficies de la fisura.	26
Figura 3.8: Posiciones angulares de las cargas.	26
Figura 3.9: Aplicación de cargas y condiciones de contorno para la fisura a un ángulo de 30°	27
Figura 3.10: Aplicación de cargas y condiciones de contorno para la fisura a un ángulo de 120°	27
Figura 3.11: Eje biapoyado.	28
Figura 3.12: Mallado del eje.	29
Figura 3.13: Mallado transversal del eje.	29

Capítulo 4

Figura 4.1: Cálculo para obtener ejes reales (cambio del sistema de referencia).	30
Figura 4.2: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,1$	31
Figura 4.3: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,2$	31
Figura 4.4: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,3$	32

Figura 4.5: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,4$.	32
Figura 4.6: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,5$.	32
Figura 4.7: Desplazamientos verticales máximos en función del ángulo (θ).	34
Figura 4.8: Desplazamientos verticales máximos en función de la longitud característica de la fisura (α).	34
Figura 4.9: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,1$ y 0° .	36
Figura 4.10: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,1$ y 180° .	36
Figura 4.11: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,2$ y 0° .	36
Figura 4.12: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,2$ y 180° .	37
Figura 4.13: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,3$ y 0° .	37
Figura 4.14: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,3$ y 180° .	37
Figura 4.15: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,4$ y 0° .	38
Figura 4.16: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,4$ y 180° .	38
Figura 4.17: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,5$ y 0° .	38
Figura 4.18: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,5$ y 180° .	39
Figura 4.19: Desplazamientos máximos en función de la profundidad de la fisura (α), (analíticos y numéricos).	40
Figura 4.20: Errores en función de la longitud característica de la fisura (α).	41

Capítulo 5

Figura 5.1: y adim en función de α y θ .	43
Figura 5.2: Desplazamientos adimensionales máximos en función de θ .	44

Figura 5.3: Desplazamientos adimensionales máximos en función de α	44
Figura 5.4: Comparación de los resultados numéricos y los de la ecuación en función de α	45
Figura 5.5: Comparación de los resultados numéricos y los de la ecuación en función de θ	45
Figura 5.6: Errores en función de θ	46

Índice de tablas

Capítulo 2

Tabla 2.1: Coeficientes del ajuste polinómico C_{ij}^{mm} para flexión [7]..... 12

Capítulo 3

Tabla 3.1: Propiedades del aluminio. 23

Tabla 3.2: Valores de las fuerzas..... 28

Capítulo 4

Tabla 4.1: Valores máximos de los desplazamientos (datos numéricos). 33

Tabla 4.2: Valores máximos de los desplazamientos con errores (datos numéricos y analíticos)..... 39

Capítulo 5

Tabla 5.1: Coeficientes de ajuste para y adim C_{ij}^{cc} 42

Tabla 5.2: Valores máximos adimensionales de los desplazamientos adimensionales para α y θ 43

Tabla 5.3: Errores de la comparación entre los valores numéricos y analíticos..... 45

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Dentro de la industria se pueden encontrar elementos mecánicos que contienen defectos o fisuras de diferentes tipos y tamaños. Dichos defectos se producen debido a las condiciones de trabajo a las que se somete el componente mecánico, tales como cargas variables en el tiempo, que acortan su vida en servicio.

En la actualidad se ha avanzado en gran medida en las técnicas de detección e identificación de fisuras en elementos mecánicos, cuyo objetivo principal es alargar su vida y reducir el elevado coste que supone reemplazar dichos elementos para evitar la rotura súbita de los mismos.

En el caso de elementos rotatorios, éstos se ven sometidos a fatiga como consecuencia de los esfuerzos cíclicos que soportan, lo que puede producir desperfectos en forma de fisuras en planos perpendiculares a la dirección de los mismos.

La presencia de fisuras en elementos mecánicos, como los ejes, provoca un aumento de la flexibilidad local del mismo. De esta forma, se producen cambios en su comportamiento elástico y dinámico que se puede traducir en incrementos de los desplazamientos o disminución de las frecuencias de vibración, entre otros.

Además, hay que tener en cuenta que durante el giro de un eje fisurado, la fisura se abre y se cierra alternativamente, dependiendo de si se encuentra sometida a esfuerzos de tracción o de compresión. Cuando la fisura se encuentra completamente abierta, la flexibilidad local del elemento es igual a la calculada asimilando la fisura a un resorte. Sin embargo, cuando está completamente cerrada, el eje se comporta como si no estuviese dañado. Este fenómeno, denominado “breathing”, está provocado por cargas estáticas, como el peso, y dinámicas, como las debidas al descentramiento o las fuerzas

de inercia, pero cuando las fuerzas estáticas predominan sobre las dinámicas, el grado de apertura de la fisura básicamente es función del ángulo de giro del eje.

La mayoría de trabajos estudian la deformación, desplazamientos y presencia de fisuras en ejes, suponiendo que la fisura está completamente abierta o completamente cerrada. Sin embargo, es necesario estudiar el desarrollo que se produce desde un punto a otro, es decir, cuando la fisura se encuentra parcialmente abierta o cerrada.

1.2. Objetivos

El objetivo principal de este proyecto es realizar un estudio de los desplazamientos verticales que se producen en un eje rotatorio fisurado de sección circular, sometido a esfuerzos de flexión y con distintas profundidades de fisura. Se observará la evolución que se produce en el desplazamiento vertical del eje cuando la fisura está completamente abierta, completamente cerrada y en los puntos intermedios.

Para cumplir con el objetivo principal se deben desarrollar los siguientes objetivos parciales:

- Desarrollar diferentes modelos numéricos del eje fisurado, mediante un programa de elementos finitos, de los que se obtendrán resultados que se puedan comparar con datos analíticos de la bibliografía.
- Obtener una ecuación empírica mediante la herramienta Matlab que permita conocer los desplazamientos de un eje rotatorio fisurado en función del ángulo de giro y de la profundidad de la fisura.

1.3. Estructura del documento

En primer lugar, se mostrarán los conceptos teóricos en los cuales se ha cimentado este proyecto, definición de los parámetros característicos, obtención de la ecuación de la deformada para la viga e introducción al método de elementos finitos y al programa Abaqus (capítulo2).

En el capítulo 3 se explica la realización y desarrollo del modelo numérico que se va a ensayar mediante el programa Abaqus.

Una vez realizado el modelo de elementos finitos, se analizan los desplazamientos verticales que se obtienen de la simulación del modelo (capítulo 4). En este mismo capítulo se comparan los resultados numéricos, con los datos analíticos que se obtienen con la herramienta Matlab.

En el capítulo 5 se obtiene una ecuación empírica que obtiene el desplazamiento vertical del eje en función de la profundidad de la fisura y el ángulo de giro en el que se encuentra.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Estudio teórico del comportamiento de un eje fisurado

2.1.1. Formulación del problema

Los cambios en el comportamiento mecánico de un elemento fisurado se producen como consecuencia de una pérdida de rigidez en la sección fisurada o de un aumento de su flexibilidad.



Figura 2.1: eje fisurado sometido a flexión.

La presencia de una fisura en un elemento sometido a flexión, M , como se observa en la figura 2.1, se puede modelizar admitiendo discontinuidades de los giros $\Delta\theta$ en la sección fisurada, que se relacionan con los esfuerzos transmitidos mediante:

$$\Delta\theta = \lambda_{mm}M \quad (2.1)$$

Donde λ_{mm} es el coeficiente de flexibilidad a flexión y donde

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (2.2)$$

Siendo θ_1 el giro de la sección a la izquierda de la fisura y θ_2 el giro de la sección de la derecha de la figura

Para abordar de manera simplificada el estudio del comportamiento de los ejes fisurados y la obtención de la flexibilidad, la mayoría de los autores consideran que las

fisuras de fatiga en un eje, presentan frente recto. Aunque esta hipótesis es válida y conduce a resultados conservadores, no representa la realidad de los ejes giratorios fisurados, en los que la fisura presenta un frente aproximadamente elíptico, como se puede observar en la Figura 2.2.

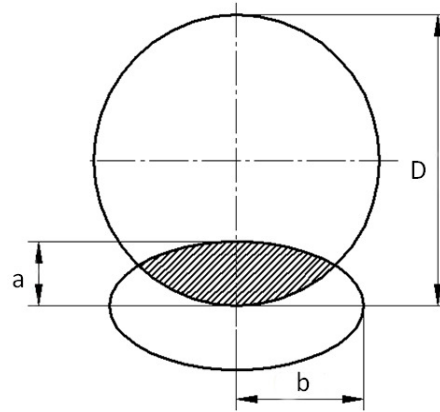


Figura 2.2: Geometría transversal de la fisura de frente elíptico [7].

Los parámetros característicos de la fisura elíptica son los siguientes:

- Longitud característica de la fisura:

$$\alpha = \frac{a}{D} \quad (2.3)$$

Donde a es el semieje menor del frente semielíptico y D el diámetro del eje.

- Factor de forma de la fisura:

$$\beta = \frac{a}{b} \quad (2.4)$$

Siendo b el semieje mayor del frente semielíptico. ($\beta=1$ se corresponde con una fisura de frente semicircular y $\beta=0$ de frente recto).

2.1.2. Coeficientes de flexibilidad

Los coeficientes de flexibilidad de un elemento mecánico fisurado se pueden obtener a partir de las expresiones que relacionan la tasa de liberación de energía, G , con factor de intensidad de tensiones (FIT), K_I en modo 1, que en condiciones de deformación plana tiene la forma:

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} K_I^2 = \frac{M^2}{2} \frac{d\lambda_{mm}}{dA} \quad (2.5)$$

Donde E y ν son el Módulo de Young y el coeficiente de Poisson, respectivamente, del material y dA es el diferencial de área de la fisura. Integrando la ecuación (2.5) se obtiene el coeficiente de flexibilidad para esfuerzos a flexión:

$$\lambda_{mm} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \int_A \left(\frac{K_I}{M} \right)^2 dA \quad (2.6)$$

El valor del coeficiente de flexibilidad se calcula a partir de la ecuación (2.6), y de la expresión del FIT, que se debe expresar también en función de la geometría del frente elíptico.

$$K_I = K_I(\alpha, \beta) \quad (2.7)$$

Diversos autores han estudiado el problema, obteniendo diferentes expresiones para el factor de intensidad de tensiones, como Astriz [4], o Couroneau [5]. Particularmente Shin y Cai [6] obtienen expresiones polinómicas y mejoradas de trabajos anteriores, según las cuales:

$$K_I = F_I \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi\alpha} \quad (2.8)$$

Siendo σ la tensión máxima en la sección fisurada debida al esfuerzo de flexión. Los valores de F_I se pueden encontrar en el trabajo de Shin y Cai [6].

Una vez conocido el valor del factor de intensidad de tensiones, se puede obtener el valor del coeficiente de flexibilidad a flexión (λ_{mm}) como se muestra a continuación.

La tensión máxima en la sección circular debida al momento flector se puede escribir como:

$$\sigma = \frac{M \cdot \frac{D}{2}}{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot D^3} \quad (2.9)$$

Sustituyendo (2.8) y (2.9) se obtiene el coeficiente de flexibilidad a flexión como:

$$\lambda_{mm} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \int_A \frac{32^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{\pi^2 \cdot D^6} \cdot F_I^2 dA \quad (2.10)$$

Por último, tomando como base los ajustes polinómicos del factor de intensidad de tensiones [6], se pueden calcular las expresiones de la flexibilidad de un eje con fisura elíptica en función del tamaño (α) y de la forma de la misma (β) [7].

$$\lambda_{mm} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^7 C_{ij}^{mm} \cdot \alpha^i \cdot \beta^j \quad (2.11)$$

Donde C_{ij}^{mm} son los coeficientes de los ajustes de la flexibilidad adimensional para flexión, calculados para valores de α de hasta 0,3 mostrados en la tabla 2.1.

C_{ij}^{mm}	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0.0012	-0.0085	0.02784	-0.0328	-0.0056	0.0350	-0.0171
1	0.0014	-0.0313	0.2073	-0.7672	1.2435	-0.6587	-0.2349	0.2397
2	0.0557	-0.0843	0.7227	-3.8517	11.3679	-18.9255	15.9576	-5.2378
3	0.2236	-1.4211	11.1389	-41.8703	82.4508	-86.3086	44.4635	-8.5512

Tabla 2.1: Coeficientes del ajuste polinómico C_{ij}^{mm} para flexión [7].

2.1.3. Fisuras en ejes

Toda la formulación que se desarrolla en este apartado está basada en el proyecto de fin de carrera de Javier Álvarez del Teso [9].

La presencia de la fisura en un eje produce un aumento de la flexibilidad del mismo, que conlleva a un aumento del desplazamiento vertical del eje que se traduce en un incremento de giro en la sección donde se encuentra la fisura. Dicho giro dependerá del tipo de frente que presente la fisura, β , la profundidad que alcanza la misma, α , y del momento flector al que se encuentra sometida la sección fisurada.

Para poder obtener la relación entre todos los factores comentados y el desplazamiento vertical, se dividirá el eje en tramos y se hallará el desplazamiento en cada uno de ellos.

Una vez obtenidos los desplazamientos en cada uno de los tramos se utilizarán las condiciones de contorno y de compatibilidad entre los diversos tramos para darle continuidad a la deformada.

2.1.3.1. Obtención de las ecuaciones para el desplazamiento vertical de la viga

Para comenzar la resolución, se divide el eje que se muestra en la figura 2.3, en tramos.

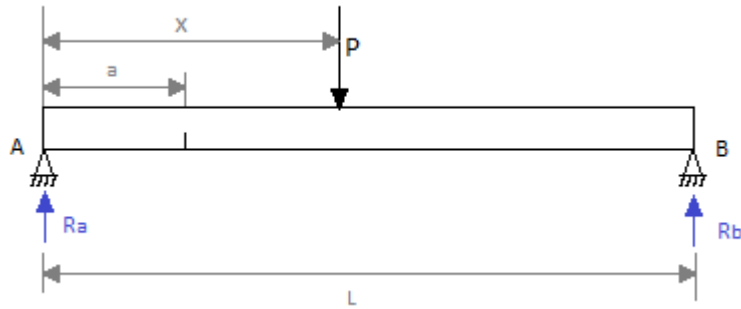


Figura 2.3: Representación del eje biapoyado.

- Primer tramo $0 \leq z \leq a$:

En primer lugar se hallará la reacción en el apoyo de la izquierda (apoyo A):

$$R_a = \frac{P}{L}(L - x) \quad (2.12)$$

Donde x es la distancia a la que se coloca la carga con respecto al apoyo A.

El momento que soporta la viga en este primer tramo, en función de su longitud, es el siguiente:

$$M = \frac{P}{L}(L - x) \cdot z \quad (2.13)$$

Donde z es la distancia desde el apoyo A a un punto cualquiera de este primer tramo.

La relación entre el desplazamiento vertical y el momento aplicado es el siguiente:

$$\frac{M}{E \cdot I} = \frac{dy^2}{dz^2} \quad (2.14)$$

Donde E es el módulo de Young del material de la viga e I corresponde al momento de inercia de la sección.

Integrando la ecuación (2.14) se obtienen las ecuaciones (2.15) y (2.16) para el giro (y'_1) y el desplazamiento horizontal de la viga (y_1) en este primer tramo:

$$y'_1 = \frac{P}{L}(L - x) \frac{z^2}{2 \cdot E \cdot I} + C_1 \quad (2.15)$$

$$y_1 = \frac{P}{L}(L - x) \frac{z^3}{6 \cdot E \cdot I} + C_1 \cdot z + C_2 \quad (2.16)$$

Donde C_1 y C_2 corresponden a las constantes de integración.

○ Segundo tramo $a \leq z \leq x$:

El momento que soporta la viga es igual que en el primer tramo pero, debido a la fisura, se produce un aumento del giro en el eje ($\Delta\theta$) lo que produce un aumento del momento que se traduce a la suma del momento M_2 .

$$M = \frac{P}{L}(L - x)z + M_2 \quad (2.17)$$

Integrando de nuevo la ecuación (2.24) se obtienen las siguientes ecuaciones para el giro (y'_2) y el desplazamiento vertical de la viga (y_2):

$$y'_2 = \frac{P}{L}(L - x)\frac{z^2}{2 \cdot E \cdot I} + C_3 + \Delta\theta \quad (2.18)$$

$$y_2 = \frac{P}{L}(L - x)\frac{z^3}{6 \cdot E \cdot I} + C_3 \cdot z + \Delta\theta \cdot z + C_4 \quad (2.19)$$

Siendo C_3 y C_4 las constantes de integración e $\Delta\theta$ el incremento del giro debido a la fisura.

○ Tercer tramo $x \leq z \leq L$:

Se obtiene la reacción en el apoyo de la derecha que es:

$$R_b = \frac{P \cdot x}{L} \quad (2.20)$$

El momento que soporta la viga en este tramo es:

$$M = \frac{Px}{L}(L - z) + M_2 \quad (2.21)$$

Donde M_2 corresponde al aumento del giro ($\Delta\theta$), debido a la fisura.

Integrando la ecuación (2.14) se obtiene de nuevo el giro (y'_3) y el desplazamiento vertical (y_3) de la viga en el tercer tramo:

$$y'_3 = \frac{P \cdot x \cdot z}{E \cdot I} - \frac{P \cdot x \cdot z^2}{2 \cdot L \cdot E \cdot I} + C_5 + \Delta\theta \quad (2.22)$$

$$y_3 = \frac{P \cdot x \cdot z^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{P \cdot x \cdot z^3}{6 \cdot L \cdot E \cdot I} + C_5 \cdot z + \Delta\theta \cdot z + C_6 \quad (2.23)$$

Donde C_5 y C_6 corresponden a las constantes de integración.

2.1.3.2. Aplicación de las condiciones de contorno y compatibilidad

- Primera condición de contorno: el desplazamiento vertical en el apoyo A es nulo, lo que se traduce analíticamente como:

$$y_1(z = 0) = 0 \rightarrow y_1(0) = 0 \quad (2.24)$$

$$y_1(0) = \frac{P}{L}(L-x) \frac{0^3}{6 \cdot E \cdot I} + C_1 \cdot 0 + C_2 \quad (2.25)$$

$$C_2 = 0 \quad (2.26)$$

- Primera condición de compatibilidad: el desplazamiento vertical en el punto donde se encuentra la fisura, es el mismo a ambos lados de la misma; esto debe ocurrir para garantizar la continuidad de la deformada.

$$y_1(a) = y_2(a) \quad (2.27)$$

$$y_1(a) = \frac{P}{L}(L-x) \frac{a^3}{6 \cdot E \cdot I} + C_1 \cdot a + C_2 \quad (2.28)$$

$$y_2(a) = \frac{P}{L}(L-x) \frac{a^3}{6 \cdot E \cdot I} + C_3 \cdot a + \Delta\theta \cdot a + C_4 \quad (2.29)$$

Con la condición anterior de $C_2 = 0$ se obtiene:

$$C_4 = (C_1 - C_3 - \Delta\theta) \cdot a \quad (2.30)$$

- Segunda condición de compatibilidad: en la sección donde se encuentra la fisura, (a una distancia a del apoyo de la izquierda) se produce un aumento de giro ($\Delta\theta$) que se representa como:

$$y_1'(a) + \Delta\theta = y_2'(a) \quad (2.31)$$

$$y_1'(a) + \Delta\theta = \frac{P}{L}(L-x) \frac{a^2}{2 \cdot E \cdot I} + C_1 + \Delta\theta \quad (2.32)$$

$$y_2'(a) = \frac{P}{L}(L-x) \frac{a^2}{2 \cdot E \cdot I} + C_3 + \Delta\theta \quad (2.33)$$

Aplicando las ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.33) se obtiene:

$$C_1 = C_3 \quad (2.34)$$

- Tercera condición de compatibilidad: el giro en el punto donde se encuentra aplicada la carga debe ser el mismo a ambos lados del mismo; lo que analíticamente se traduce como:

$$y_2'(x) = y_3'(x) \quad (2.35)$$

$$y_2'(x) = \frac{P}{L}(L-x) \frac{x^2}{2 \cdot E \cdot I} + C_3 + \Delta\theta \quad (2.36)$$

$$y_3'(x) = \frac{P \cdot x^2}{E \cdot I} - \frac{P \cdot x^3}{2 \cdot L \cdot E \cdot I} + C_5 + \Delta\theta \quad (2.37)$$

De las ecuaciones (2.35), (2.36) y (2.37) se obtiene:

$$C_3 - C_5 = \frac{P \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot I} \quad (2.38)$$

- Cuarta condición de compatibilidad: como se ha explicado con anterioridad la deformada debe ser continua, es decir, el valor de la deformada en el segundo y tercer tramo tiene que ser el mismo.

$$y_2(x) = y_3(x) \quad (2.39)$$

$$y_2(x) = \frac{P}{L}(L-x) \frac{x^3}{6 \cdot E \cdot I} + C_3 \cdot x + \Delta\theta \cdot x + C_4 \quad (2.40)$$

$$y_3(x) = \frac{P \cdot x^3}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{P \cdot x^4}{6 \cdot L \cdot E \cdot I} + C_5 \cdot x + \Delta\theta \cdot x + C_6 \quad (2.41)$$

Con las ecuaciones (2.39), (2.40) y (2.41) se obtiene:

$$(C_3 - C_5) \cdot x + C_4 - C_6 = \frac{P \cdot x^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (2.42)$$

- Segunda condición de contorno: El desplazamiento vertical en el apoyo de la derecha tiene que ser nulo, al igual que en el apoyo A.

$$y_3(L) = 0 \quad (2.43)$$

$$y_3(L) = \frac{P \cdot x \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{P \cdot x \cdot L^3}{6 \cdot L \cdot E \cdot I} + C_5 \cdot L + \Delta\theta \cdot L + C_6 \quad (2.44)$$

De las ecuaciones (2.43) y (2.44) se obtiene:

$$\frac{P \cdot x \cdot L^2}{3 \cdot E \cdot I} = -L \cdot (C_5 + \Delta\theta) - C_6 \quad (2.45)$$

A partir de este punto se pueden conocer todas las constantes de integración, C_2 ya es conocida de la ecuación (2.26).

De las ecuaciones (2.30) y (2.34) se obtiene:

$$C_4 = -\Delta\theta a \quad (2.46)$$

De las ecuaciones (2.38) y (2.42):

$$C_6 = \frac{P \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \Delta\theta a \quad (2.47)$$

De la ecuación (2.45):

$$C_5 = \Delta\theta \left(\frac{a}{L} - 1 \right) - \frac{P \cdot x}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} (2L^2 + x^2) \quad (2.48)$$

De la ecuación (2.38):

$$C_3 = \frac{P \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot I} + \Delta\theta \left(\frac{a}{L} - 1 \right) - \frac{P \cdot x}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} (2L^2 + x^2) \quad (2.49)$$

De la ecuación (2.34):

$$C_1 = \frac{P \cdot x^2}{2 \cdot E \cdot I} + \Delta\theta \left(\frac{a}{L} - 1 \right) - \frac{P \cdot x}{6 \cdot E \cdot I \cdot L} (2L^2 + x^2) \quad (2.50)$$

Con todas las constantes de integración calculadas, se puede decir que las ecuaciones del desplazamiento vertical a lo largo del eje en los tramos en que se ha dividido son:

Para $0 \leq z \leq a$	$y_1 = \frac{P}{L} (L - x) \frac{z^3}{6 \cdot E \cdot I} + C_1 \cdot z + C_2$	(2.51)
------------------------	---	--------

Para $a \leq z \leq x$	$y_2 = \frac{P}{L} (L - x) \frac{z^3}{6 \cdot E \cdot I} + C_3 \cdot z + \Delta\theta \cdot z + C_4$	(2.52)
------------------------	--	--------

Para $x \leq z \leq L$	$y_3 = \frac{P \cdot x \cdot z^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{P \cdot x \cdot z^3}{6 \cdot L \cdot E \cdot I} + C_5 \cdot z + \Delta\theta \cdot z + C_6$	(2.53)
------------------------	--	--------

Para obtener el incremento de giro de la sección donde se encuentra la fisura ($\Delta\theta$), se debe saber el momento flector de la sección fisurada que es:

$$M = \frac{P}{L} (L - x) \cdot z \quad (2.54)$$

Con este momento y aplicando la ecuación (2.1) se obtiene el incremento de giro en la sección fisurada que es:

$$\Delta\theta = \lambda_{mm} \cdot \frac{P}{L} (L - x) \cdot z \quad (2.55)$$

2.2. Método de elementos finitos

2.2.1. Introducción al MEF

El método de elementos finitos (MEF) se utiliza en la actualidad para resolver considerables problemas numéricos dentro del campo de la ingeniería. El MEF es una de las herramientas más potentes y es aplicable a diversos campos, como el análisis de esfuerzos y deformaciones de automóviles, edificios y estructuras. Al igual que los estudios en mecánica de fluidos o transferencia de calor.

La gran ventaja que tiene la utilización de este método es que no se ensayan elementos reales, lo que proporciona un amplio abanico de posibilidades para la resolución de un problema ingenieril. Se debe tener en cuenta que el MEF no es un método exacto, es decir una vez que se obtienen los resultados es necesario analizarlos detenidamente y establecer si son coherentes o no.

El método de elementos finitos se basa en la transformación de un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado. Esta transformación se denomina discretización del modelo. Dicho modelo se divide en un número finito de partes denominadas elementos, que están interconectadas entre sí por una serie de puntos llamados nodos.

El método de elementos finitos puede dividirse en tres etapas [8]:

- ❖ Preproceso: consiste en la preparación del modelo para el cálculo. En esta etapa se realizan las operaciones de:
 - Dibujo de la geometría del modelo.
 - Selección de las propiedades de los materiales.
 - Aplicación de cargas exteriores y condiciones de contorno.
 - Discretización del modelo en elementos finitos.
- ❖ Resolución: es la etapa en la que se realizan todos los cálculos y se generan las soluciones. En ella se realizan las operaciones de:
 - Selección del tipo de cálculo a realizar.
 - Configuración de los parámetros de cálculo, intervalos de tiempo y número de iteraciones.

- Transferencia de las cargas al modelo, generación de funciones de forma, ensamblaje de la matriz de rigidez, resolución de sistemas de ecuaciones y obtención de la solución.
- ❖ Postproceso. Es la etapa en la que se realiza la representación gráfica de los resultados, así como la obtención de resultados indirectos operando las soluciones del modelo.

2.2.2. Introducción a ABAQUS

Abaqus es un software para el análisis de elementos finitos que se utiliza en la actualidad para resolver grandes y complicados problemas de ingeniería. Fue desarrollado a finales de la década de los setenta por David Hibbitt, Dr. Bengt Karlsson y P. Sorensen.

Abaqus está estructurado en tres grandes bloques, en correspondencia con las tres etapas en las que se divide un problema al ser analizado por el método de elementos finitos (preproceso, resolución y postproceso).

Abaqus se encuentra dividido en cuatro módulos [8]:

- ❖ ABAQUS/Standard: Se utiliza para la resolución de problemas de propósito general. Incluye todas las posibilidades de análisis excepto el análisis dinámico.
- ❖ ABAQUS/Explicit: Se utiliza para resolución de problemas de tipo dinámico. Es poderoso por su eficiencia computacional en grandes modelos, y altamente efectivo para aplicaciones cuasi-estáticas.
- ❖ ABAQUS/CAE: Es un módulo interactivo para la creación de modelos de elementos finitos. A través de este módulo se puede implementar un modelo de forma sencilla y rápida.
- ❖ ABAQUS/Viewer: Es el módulo de visualización de soluciones. Muestra los resultados obtenidos una vez resuelto el problema.

Para resolver un problema mediante ABAQUS 6.11 se deben introducir los datos de entrada que necesita el programa. Esta etapa se corresponde con la etapa de preproceso del MEF.

Los datos de entrada se introducen en el programa a través de un archivo de texto (*input file*) que contiene toda la información necesaria para realizar la simulación. Este archivo de texto, también denominado “archivo de entrada”, se puede crear de forma

interactiva utilizando ABAQUS/CAE, que genera internamente el archivo de texto. O mediante un editor de texto, donde el archivo es escrito directamente por el usuario.

Los datos que se introducen en el archivo de texto (*input file*) son de dos tipos, *model data* e *history data*. Los *model data* que se utilizan para definir el modelo de elementos finitos son:

- ❖ Características geométricas: La geometría es lo primero que se introduce y debe ser lo más exacta posible al cuerpo real que se va a estudiar. ABAQUS permite realizar modelos de geometría muy compleja, mediante el módulo ABAQUS/CAE. La geometría, así como el mallado de un modelo, se define mediante los elementos y sus nodos.
- ❖ Características del material: El modelo que se va a implementar puede estar formado de varios materiales. Se deben definir las propiedades de los distintos materiales de los que está formado el modelo y, posteriormente, asociarlos con las partes de la geometría que correspondan.
- ❖ Partes y ensamblaje: La geometría del modelo se puede definir organizándola en partes, es decir, hay que introducir en el archivo de entrada la relación que existe entre esas partes y la posición relativa de unas con respecto de las otras. Esto se lleva a cabo a través de un procedimiento conocido como ensamblaje (resolución en MEF).
- ❖ Condiciones iniciales: Se especifican las condiciones iniciales del modelo. En ocasiones, es necesario especificar condiciones iniciales distintas de cero para tensiones, temperaturas, velocidades, etc.
- ❖ Condiciones de contorno: El modelo puede estar sometido a ciertas imposiciones o restricciones por parte de su entorno que deben ser especificadas en el archivo de entrada. Se pueden imponer restricciones del movimiento, valores de desplazamientos y de carga o rotaciones.
- ❖ Mallado: Es un proceso mediante el cual el modelo de estudio se divide en diferentes elementos en los que se resuelven las ecuaciones de campo.

Después de introducir el “archivo de entrada” en el programa, se procede a la resolución del modelo. Esta fase es interna, y en ella Abaqus no interacciona con el usuario. Una vez que Abaqus ha resuelto el modelo, los resultados de la simulación se ven a través del módulo de visualización, que lee el archivo de datos de salida (*output file*), y es capaz de crear animaciones de la simulación, gráficos, tablas de resultados,

etc. La visualización de los resultados se corresponde con la etapa de postproceso del método de elementos finitos.

Capítulo 3

Modelo numérico

3.1. Introducción

Para conseguir el objetivo planteado en este trabajo se ha realizado la simulación de un eje cilíndrico de rotación mediante el método de elementos finitos. Se ha utilizado el programa Abaqus 6.11.

El propósito de modelizar mediante el Método de los Elementos Finitos ha sido crear un modelo sencillo (simplificado), que fuera capaz de representar el comportamiento real de un eje sometido a flexión.

3.2. Desarrollo del modelo

Para crear el modelo se siguen los siguientes pasos:

- ❖ Características geométricas del eje:

En primer lugar, se define la geometría del modelo. Se trata de un eje cilíndrico de aluminio de 900 mm de longitud y 20 mm de diámetro. Contiene una fisura transversal de frente recto en su sección central, al igual que una carga puntual de valor 500 N en el mismo punto (ver figura 3.1).

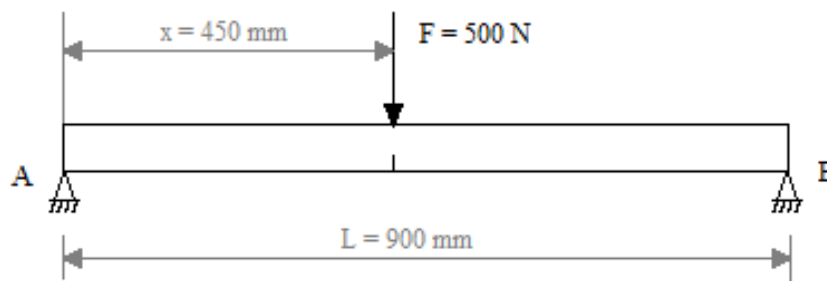


Figura 3.1: Representación esquemática del eje con fisura.

❖ Características del material:

El material elegido para el eje es el aluminio. En la tabla 3.1 se muestran sus propiedades.

Densidad (ρ)	2800 Kg/m ³
Módulo de Young (E)	72 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3

Tabla 3.1: Propiedades del aluminio.

❖ Características geométricas de la fisura:

En los apartados anteriores se ha explicado los distintos factores de la fisura recta y elíptica. Sin embargo, a lo largo de todo este proyecto se va a usar una fisura de frente recto, por lo que el factor de forma de la fisura (β) es igual a cero. La longitud característica de la fisura (α) toma valores desde 0,1 hasta 0,5 a intervalos de 0,1 según sea la profundidad de la fisura (a) en cada caso. Por lo tanto, la profundidad de la fisura toma cinco valores desde 2 mm hasta 10 mm en correspondencia con la longitud característica de la figura mencionada con anterioridad.

❖ Características geométricas del eje y de la fisura, modeladas en Abaqus:

Para realizar mejor el modelo, es necesario crear una serie de particiones a lo largo del eje, a partir de las cuales se modelará la presencia de la fisura. Dichas particiones facilitarán un mallado más fino en la zona de mayor interés (zona donde se encuentra la fisura) y permitirán una mejor simulación de la rotación del eje durante su estudio, ya que se giran los apoyos y no la fisura (ver figura 3.2). El dibujo de las particiones se lleva a cabo en una de las caras de los extremos de la viga, y posteriormente se extienden a lo largo del eje de la misma.

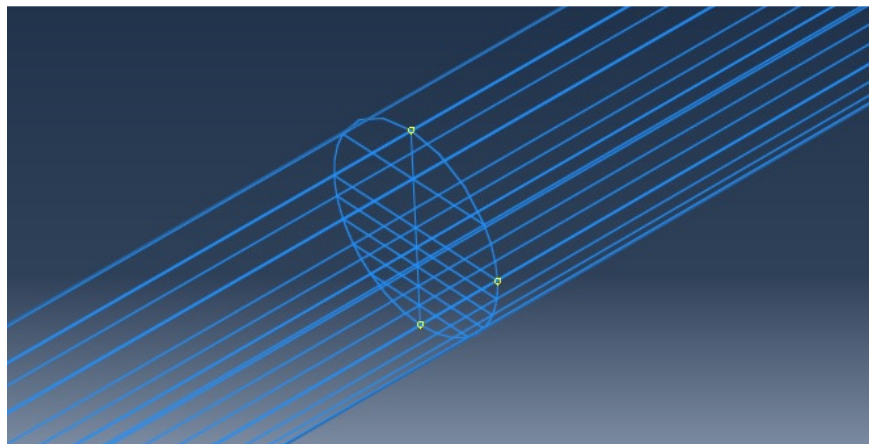


Figura 3.2: Particiones del eje.

En la figura 3.3 se muestra cual es la selección que se realiza en Abaqus para la fisura de menor profundidad ($\alpha=0,1$)

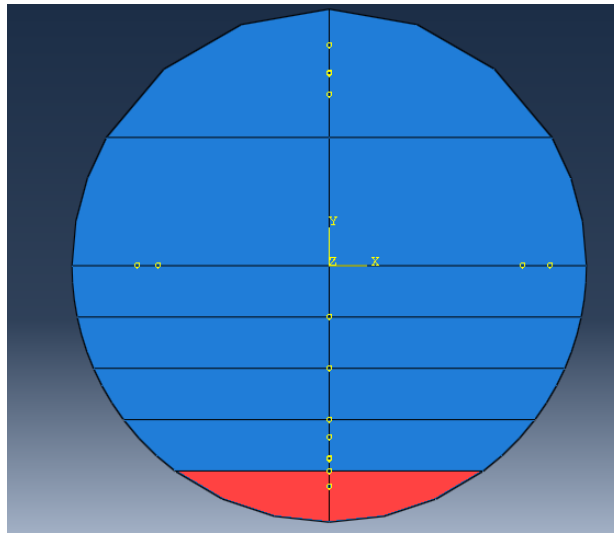


Figura 3.3: Selección del área fisurada para $\alpha=0,1$.

A medida que aumenta la longitud de la fisura, la profundidad va siendo mayor, como se explica en el capítulo 2. Por lo que, para la fisura de mayor profundidad ($\alpha=0,5$), se deben seleccionar las particiones hasta la mitad del eje, tal y como se muestra en la figura 3.4.

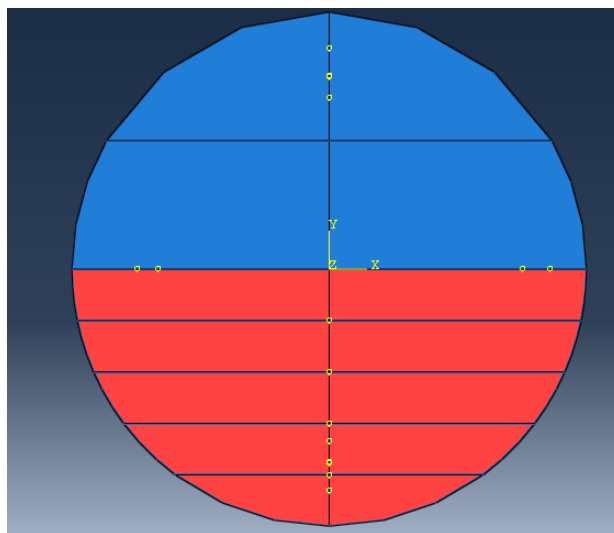


Figura 3.4: Selección del área fisurada para $\alpha=0,5$.

El modelo consta de dos partes (*part*). Cada una de ellas mide 450 mm y se unen mediante una unión entre superficies, formando el eje de estudio (ver figura 3.5). Dicha condición se establece para toda la sección transversal del eje, exceptuando la zona donde se encuentra la fisura.

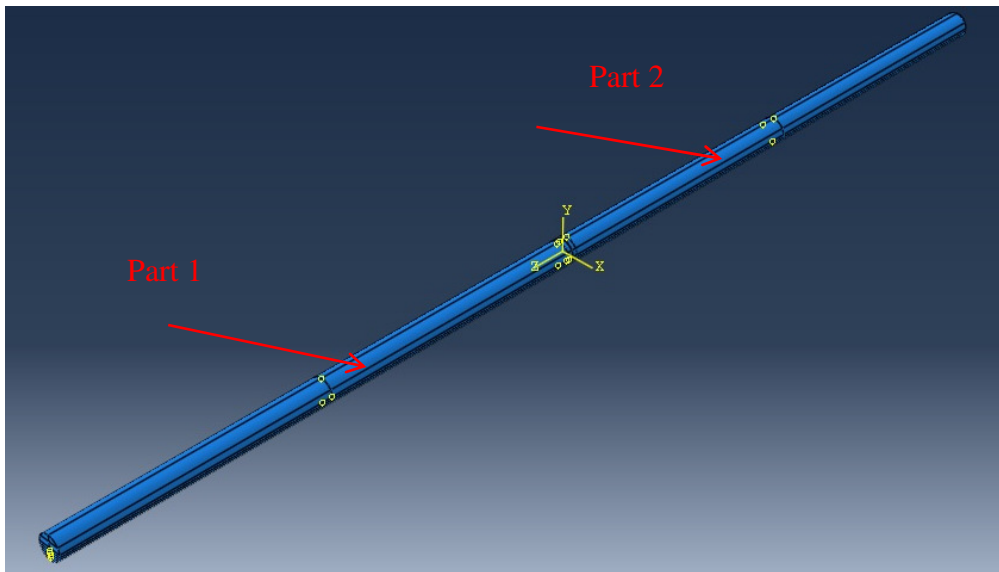


Figura 3.5: Partes del eje de estudio.

Para formar la unión entre superficies se utiliza una unión “Constraint Tie”, la cual permite restringir los grados de libertad entre las dos partes del modelo, impidiendo el desplazamiento relativo entre ellas. En la figura 3.6 se puede observar la unión entre superficies.

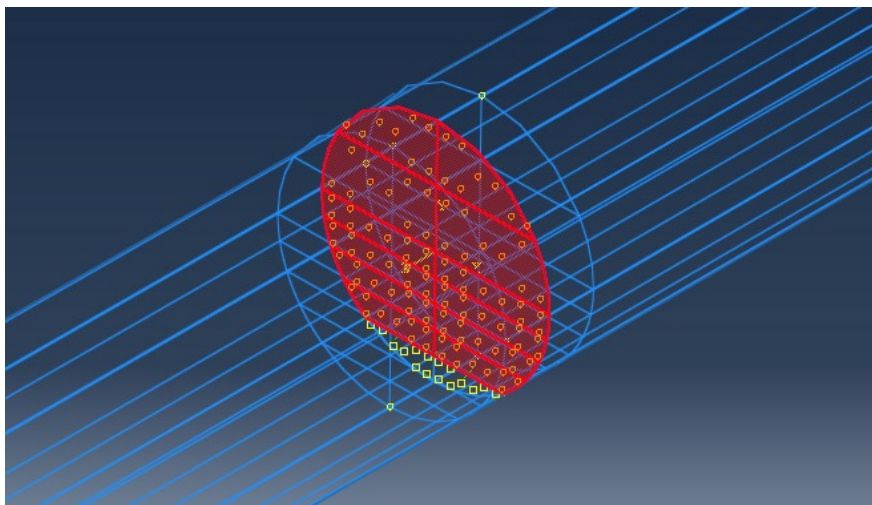


Figura 3.6: Contacto entre superficies para unir las dos partes del eje.

En la parte donde se encuentra la fisura se define un contacto entre superficies. Con ello se impide que, en el momento en que la fisura se encuentre cerrada, una de las caras de la fisura penetre dentro de la otra. Para ello se utiliza una interacción (interaction) entre superficies, que permite definir el comportamiento tangencial (la fricción y deslizamiento elástico) y el comportamiento normal (contacto duro, blando o de amortiguamiento). Se emplea un comportamiento tangencial tipo “rough” mediante el

cual se especifica un coeficiente de rozamiento infinito. Y comportamiento normal tipo “Hard Contact”, que permite que las superficies no transmitan presión de contacto a menos que los nodos de una de ellas estén en contacto con la otra, es decir, permite la separación de las superficies después del contacto. En la figura 3.7 se observa el contacto entre las dos superficies de la fisura.

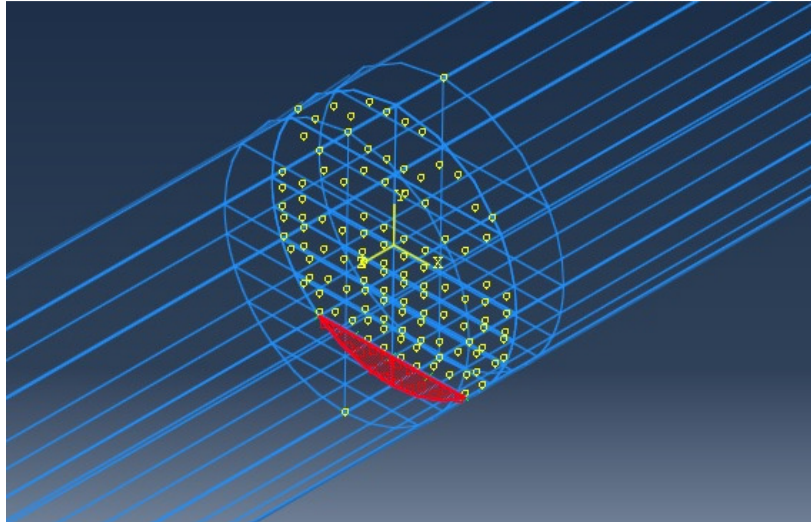


Figura 3.7: Contacto entre las dos superficies de la fisura.

❖ Condiciones de carga:

El eje soporta una carga puntual de F igual a 500 N. Para simular la rotación del eje, la carga se mantiene constante en su magnitud, pero se modifica la dirección de la misma. Para este caso en concreto se van a estudiar siete supuestos, es decir, se observarán los ángulos con un intervalo de 30° . En la figura 3.8 se puede observar las posiciones angulares (θ) que se han considerado en este modelo de desarrollo.

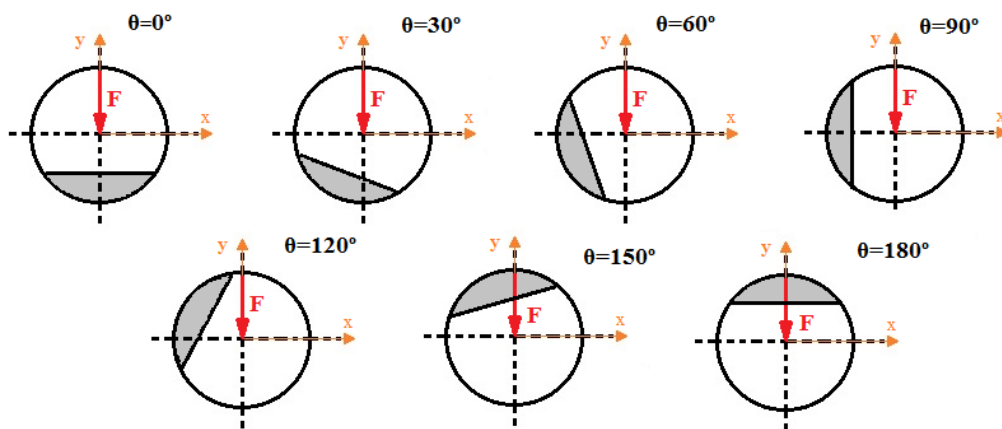


Figura 3.8: Posiciones angulares de las cargas.

Para implementarlo en Abaqus, además de cambiar la posición de la carga, es necesario cambiar la posición de los apoyos. Como se muestra en la figura 3.9 y 3.10.

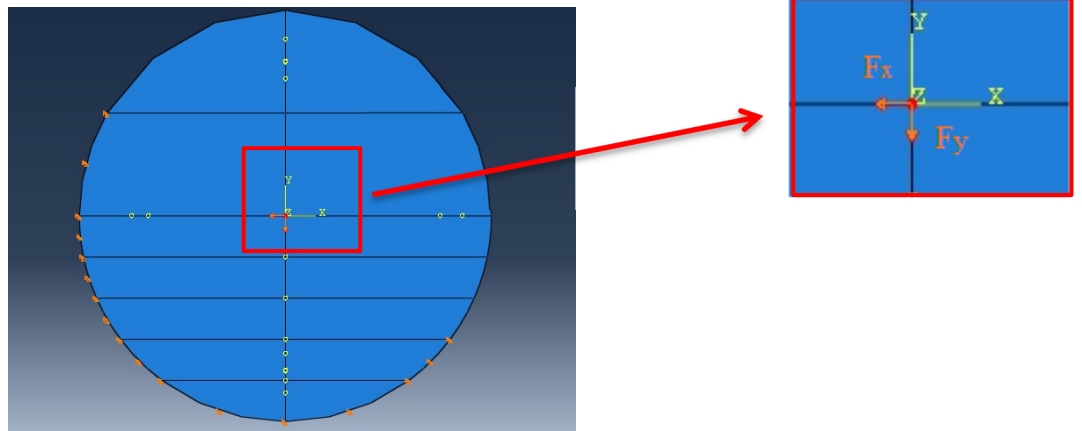


Figura 3.9: Aplicación de cargas y condiciones de contorno para la fisura a un ángulo de 30°.

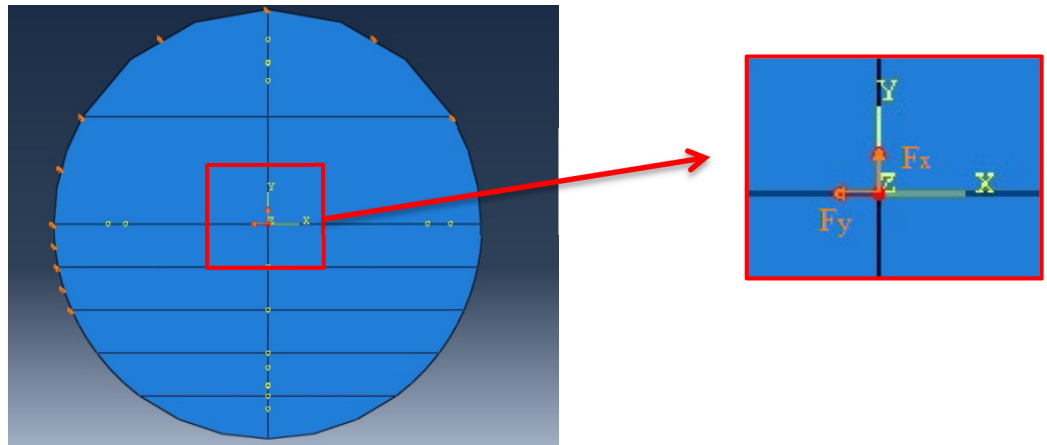


Figura 3.10: Aplicación de cargas y condiciones de contorno para la fisura a un ángulo de 120°.

En algunos ángulos, la carga no coincide necesariamente con los ejes de referencia, con lo cual, en dichos casos se descompone la carga en la componente x e y, según los ejes de referencia. Los valores de las cargas según el ángulo en el que se encuentran se muestran en la tabla 3.2.

Ángulo (°)	f_x (N)	f_y (N)
0°	0	-550
30°	-250	-433
60°	-433	-250

Ángulo (°)	f_x (N)	f_y (N)
90°	-500	0
120°	-433	250
150°	-250	433
180°	0	500

Tabla 3.2: Valores de las fuerzas.

❖ Condiciones de contorno:

El eje modelado requiere de unas condiciones de contorno para poder realizar su análisis, para lo cual se restringirán 2 GDL (U_x , U_y) en los extremos. De esta forma queda el eje biapoyado, tal y como se puede apreciar en la Figura 3.11.

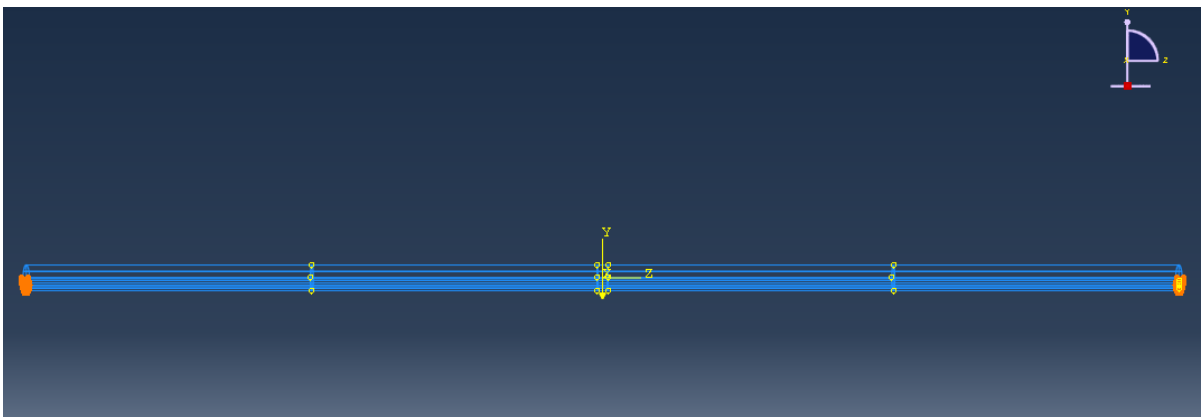


Figura 3.11: Eje biapoyado

❖ Mallado:

El mallado del modelo se ha realizado de manera que todos los elementos que lo componen tengan las mismas divisiones transversales. De esta forma, se puede asegurar que la comunicación de los valores de tensión se produce entre nodos.

Se seleccionan elementos de tipo hexaédrico, después se toma como criterio un total de 8 nodos por cada segmento que forma las particiones, así como una profundidad de elemento de 3 mm. Con todo esto, el aspecto del modelo una vez mallado aparece en la figura 3.12.

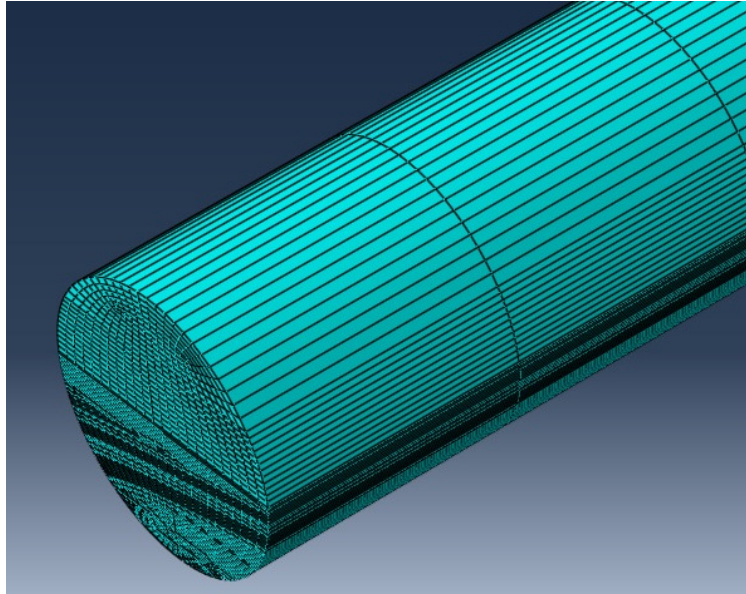


Figura 3.12: Mallado del eje.

Las divisiones de la sección transversal se han hecho de forma que en la zona donde se encuentra la fisura sea de mayor densidad de nodos para poder tener una mayor precisión de los resultados, como se puede apreciar en la Figura 3.13.

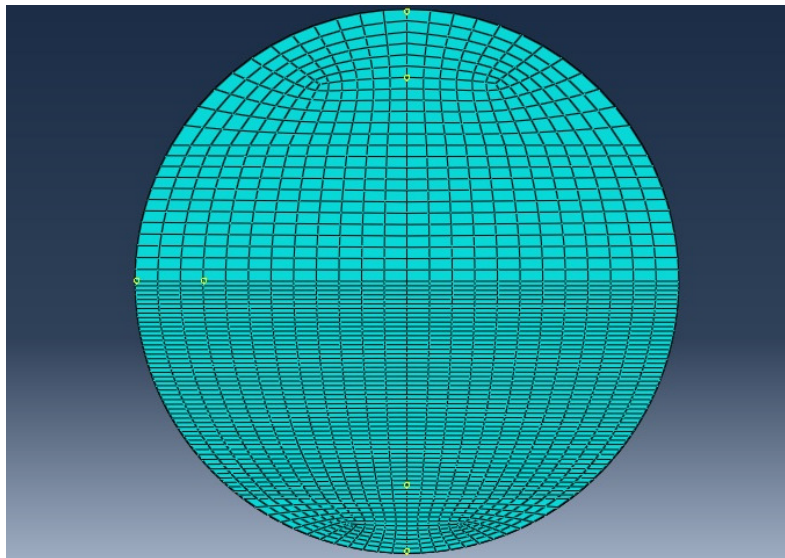


Figura 3.13: Mallado transversal del eje.

Capítulo 4

Resultados y validación del modelo

4.1. Resultados y discusión

Para poder examinar los datos de la simulación que se obtienen del programa Abaqus es necesario cambiar los ejes de referencia. Para realizar la simulación dentro del programa se gira la carga y el apoyo, por lo que los desplazamientos que se obtienen están por consiguiente girados. Para obtener los desplazamientos en los ejes reales (x_r, y_r) se procede según se explica en la figura 4.1.

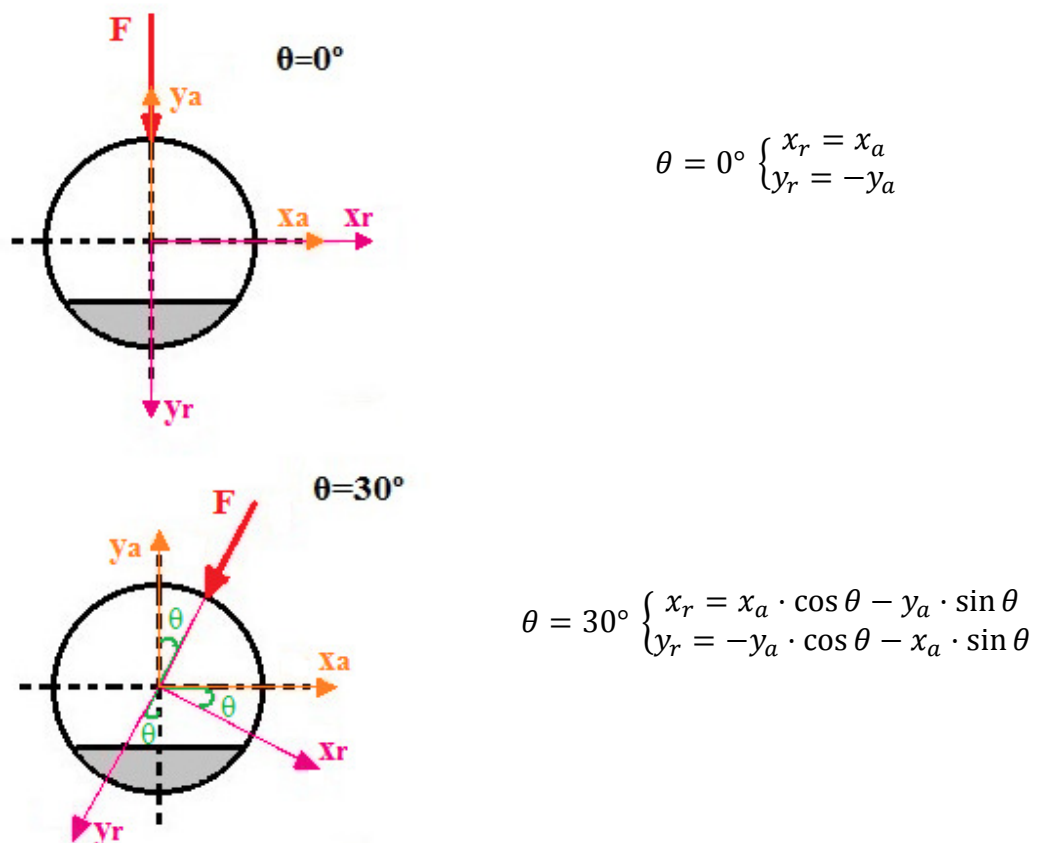


Figura 4.1: Cálculo para obtener ejes reales (cambio del sistema de referencia).

Donde x_a e y_a son los ejes de referencia dentro del programa Abaqus, es decir, los datos que tomamos directamente del programa son con respecto a dichos ejes.

Siendo θ el ángulo de giro.

Una vez que se realiza el determinado cambio de sistema de referencia, se obtienen los datos del anexo A. Dichos datos son los desplazamientos del eje tomados en la fibra superior de la misma. Para analizarlos se realizan una serie de gráficas del desplazamiento vertical adimensionalizado del eje, mediante la ecuación 4.1, en función del eje z.

$$y (adim) = \frac{y_r}{y_t} \quad (4.1)$$

Donde y_t es el desplazamiento vertical máximo de un eje sin fisura.

Se obtienen cinco gráficas para las cinco profundidades de la fisura y diferentes ángulos de giro (Figuras 4.2 a 4.6).

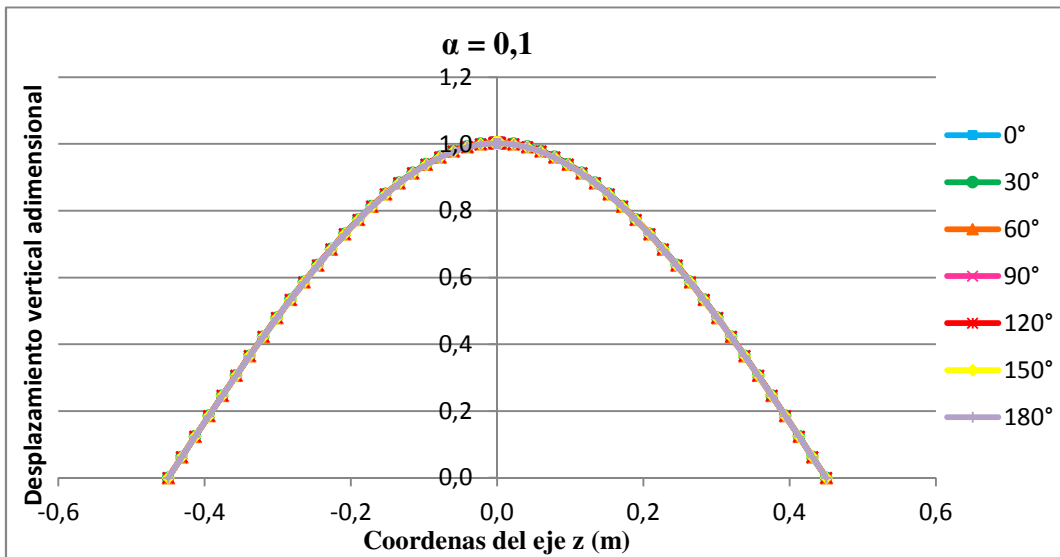


Figura 4.2: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,1$.

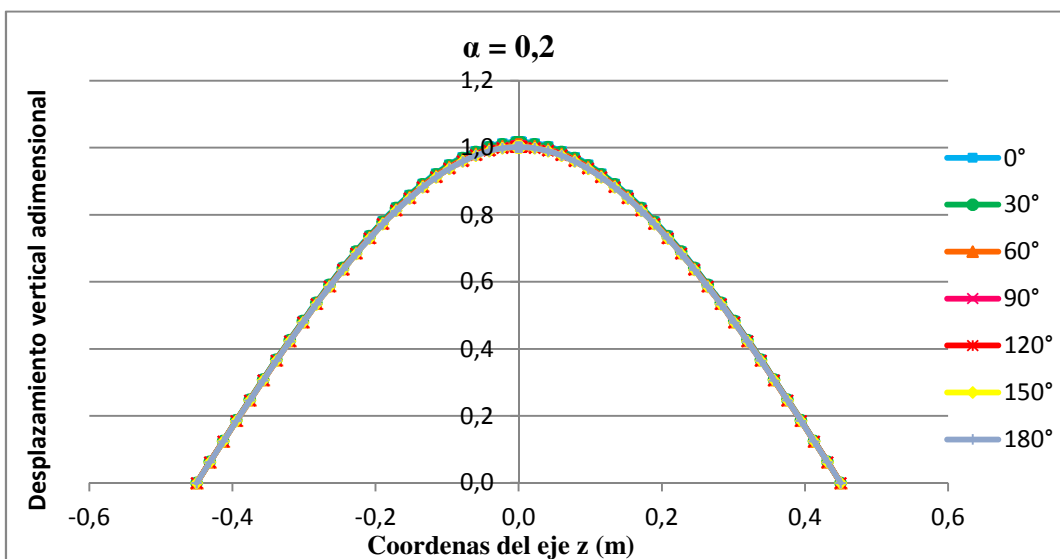


Figura 4.3: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,2$.

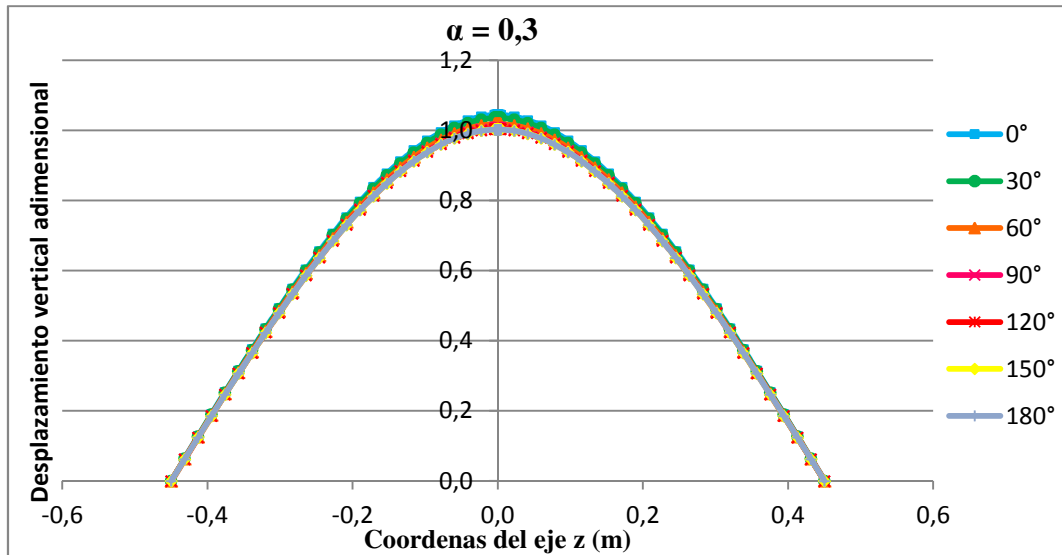


Figura 4.4: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,3$.

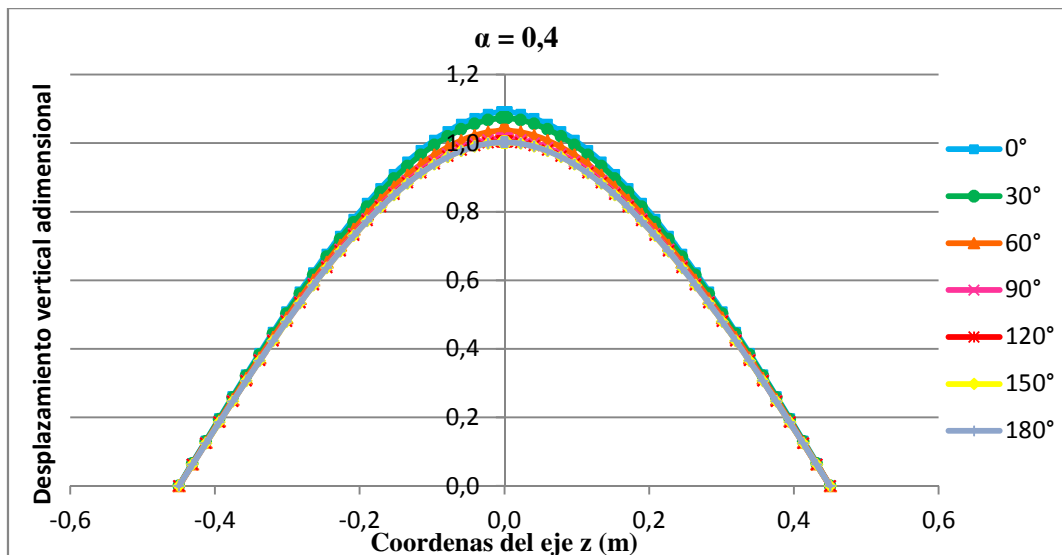


Figura 4.5: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,4$.

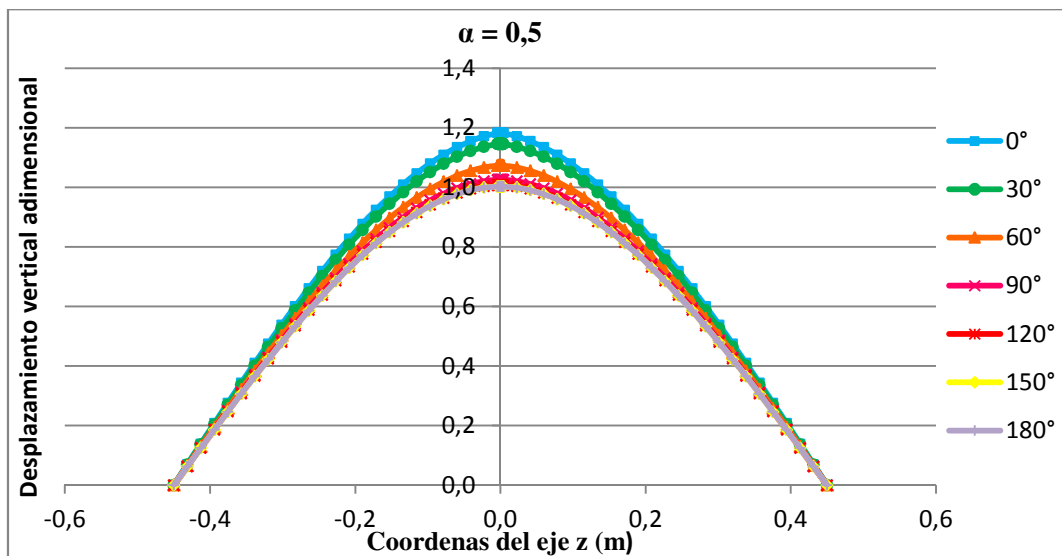


Figura 4.6: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,5$.

Si se analiza la figura 4.2, se puede observar que las diferencias entre los desplazamientos a diferentes ángulos de giro son muy pequeñas. Esto se debe a que la fisura sólo tiene una profundidad de 2 mm en comparación con los 20 mm de diámetro que contiene el eje.

Como se observa en la figura 4.4, hay una ligera diferencia entre los diferentes ángulos en los que se sitúa la fisura, ya que, la profundidad de la fisura es mayor. A medida que la longitud característica de la fisura aumenta, la diferencia entre los ángulos también se incrementa.

Como se observa en la figura 4.6 la diferencia de desplazamientos entre todos los ángulos a los que se gira el eje es notable. La mayor diferencia se ve entre el ángulo de 0° y el de 180°, es decir, si se sigue aumentando la profundidad de la fisura la diferencia entre todos los ángulos será claramente notable. También cabe mencionar que entre los ángulos de 120°, 150° y 180° no hay casi diferencia.

❖ Valores máximos

En la tabla 4.1 se muestran todos los valores máximos de los desplazamientos adimensionales verticales, con su correspondiente ángulo y longitud característica de la fisura.

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\alpha=0,1$	1,005	1,005	1,004	1,004	1,003	1,003	1,002
$\alpha=0,2$	1,018	1,015	1,008	1,004	1,003	1,003	1,002
$\alpha=0,3$	1,044	1,036	1,018	1,007	1,003	1,003	1,002
$\alpha=0,4$	1,093	1,074	1,037	1,013	1,005	1,003	1,002
$\alpha=0,5$	1,183	1,146	1,073	1,026	1,008	1,003	1,002

Tabla 4.1: Valores máximos de los desplazamientos (datos numéricos).

Para analizar mejor los datos de la tabla 4.1, se disponen dichos datos en dos gráficas diferentes, por un lado en función del ángulo (ver figura 4.7) y por otro lado en función de la profundidad de la fisura (ver figura 4.8).

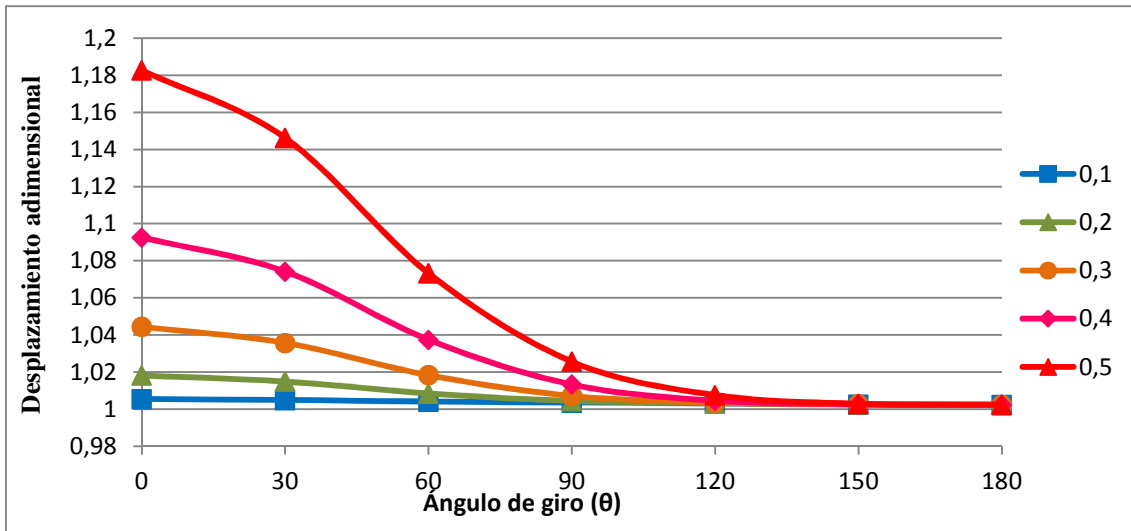


Figura 4.7: Desplazamientos verticales máximos en función del ángulo (θ).

Según se observa en la figura 4.7, los desplazamientos para todas las longitudes características de la fisura a partir de 120° son prácticamente iguales. Esto es debido a que se acercan a un eje con la fisura cerrada, es decir, un eje nuevo. También se distingue la gran diferencia que existe en el desplazamiento vertical del eje cuando la fisura está completamente abierta, ya que para una profundidad de 10 mm ($\alpha=0,5$) el desplazamiento es mucho mayor que para la profundidad de 2mm ($\alpha=0,1$).

Entre la longitud característica de $\alpha= 0,1$ y $\alpha= 0,2$, la diferencia entre los valores máximos de desplazamiento es muy pequeña, en cambio a partir de ese valor la diferencia es mayor. Es decir, para valores de α mayores de 0,3 los desplazamientos verticales se incrementan en mayor medida como se puede ver en la figura 4.7 y en la figura 4.8.

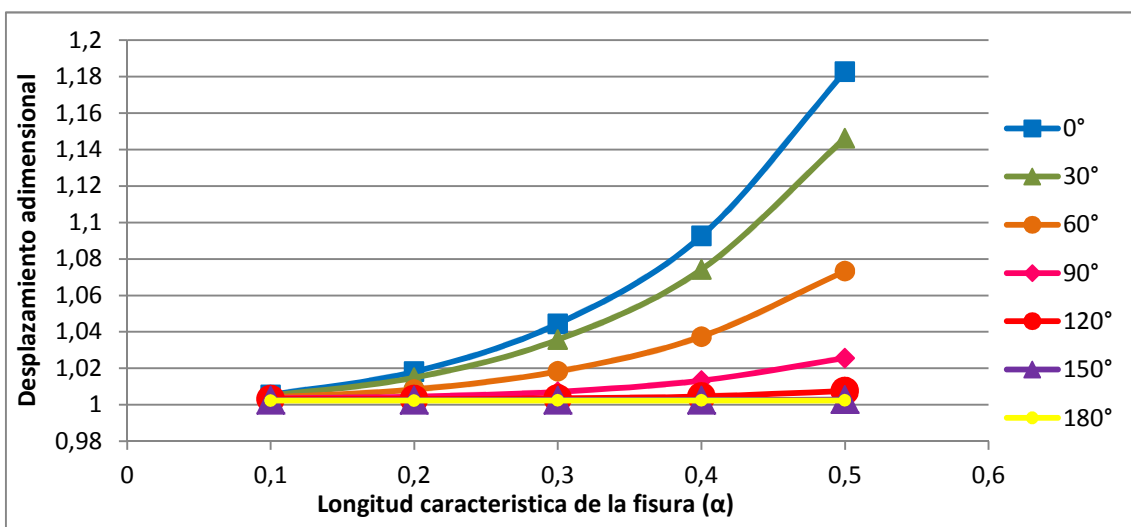


Figura 4.8: Desplazamientos verticales máximos en función de la longitud característica de la fisura (α).

En la figura 4.8, se observan los valores de los desplazamientos verticales máximos según la profundidad de la fisura, de esta forma se distingue más claramente la diferencia que existe entre las distintas posiciones de la fisura a medida que se aumenta la longitud característica de la misma.

Para una longitud característica de $\alpha= 0,1$ la diferencia en el desplazamiento máximo para todos los ángulos es mínima, en cambio para la de $\alpha= 0,5$ se ve claramente que la diferencia es muy grande. También se puede destacar, que desde que la fisura está completamente abierta hasta que se da un cuarto de vuelta (90°) las diferencias entre los desplazamientos verticales son mayores, pero después de ese valor la diferencia es mucho más pequeña. Es decir, para la mitad de medio eje (segundo cuarto de vuelta) la diferencia entre los desplazamientos verticales es prácticamente inexistente. Esta diferencia se distingue claramente en la figura 4.8 para el valor de $\alpha= 0,5$ en el ángulo de 180° , aunque en la figura 4.6 y 4.7 también es apreciable.

4.2. Validación del modelo

Para validar los resultados de la simulación se utiliza el software de cálculo Matlab. Mediante el cual se implementan las rutinas desarrolladas en el proyecto de fin de carrera de Javier Álvarez del Teso [9]. Si se varían determinados parámetros del eje como α o β (en este caso $\beta=0$), se pueden obtener datos analíticos de los desplazamientos verticales, del coeficiente de flexibilidad adimensional a flexión (λ_{mm}) y de la identificación de la posición de la fisura.

En este proyecto los datos analíticos que se necesitan son únicamente los desplazamientos verticales. Se toman los datos para fisura completamente abierta (0°) en todos los casos estudiados y para completamente cerrada, que en el programa es como un eje sin fisura. Por lo tanto, para dicho caso (180°), serán los mismos datos analíticos, en todas las longitudes características de la fisura estudiadas.

Para analizar los datos y poderlos comparar con los resultados numéricos descritos en el apartado 4.1 de este mismo capítulo, se realizan una serie de gráficas. Dichas gráficas muestran los desplazamientos verticales del eje en función de su directriz. En una sola gráfica se muestran los resultados numéricos para 0° y los analíticos para el mismo ángulo, se sigue el mismo procedimiento para 180° con todas las profundidades de fisura que se analizan en el presente trabajo.

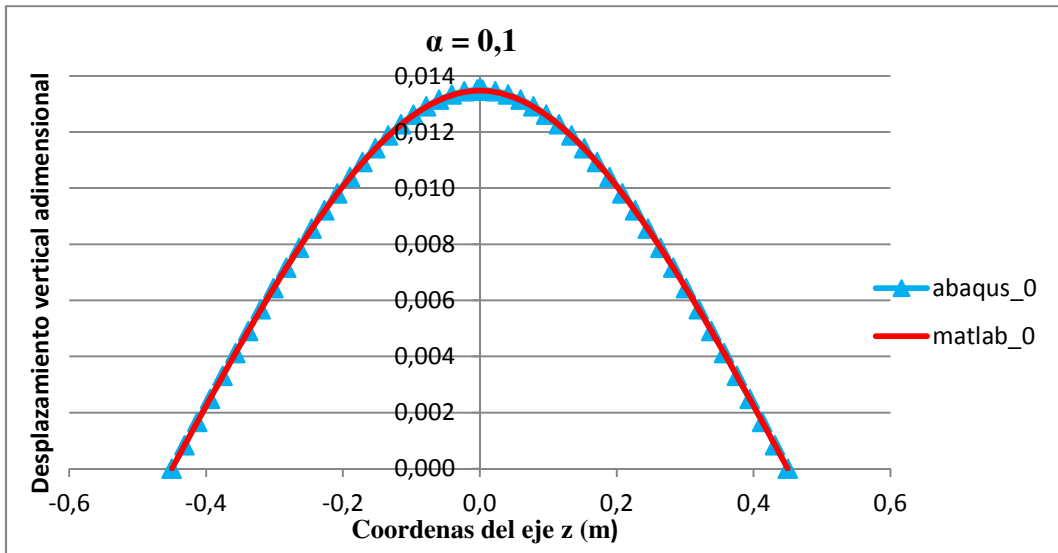


Figura 4.9: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,1$ y 0° .

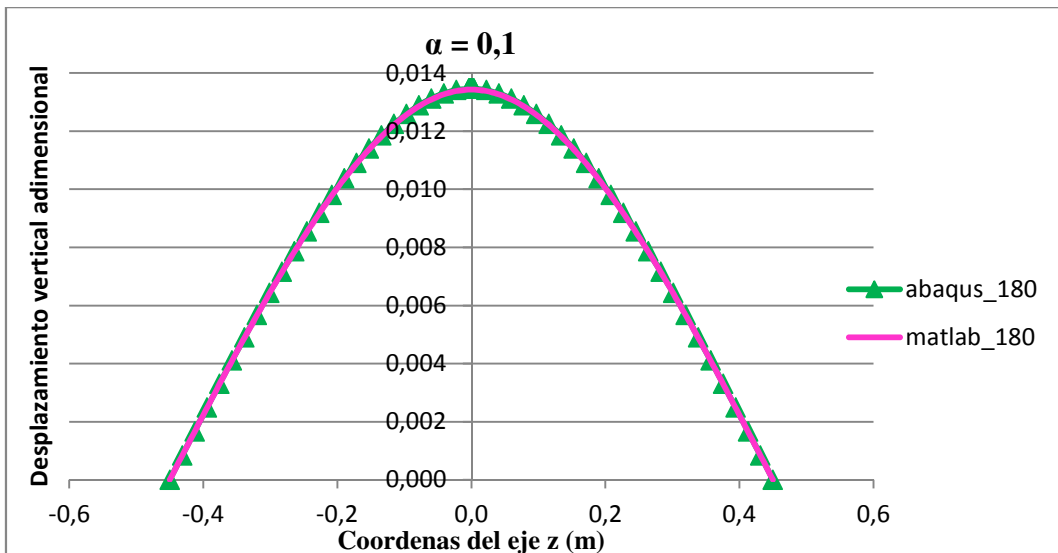


Figura 4.10: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,1$ y 180° .

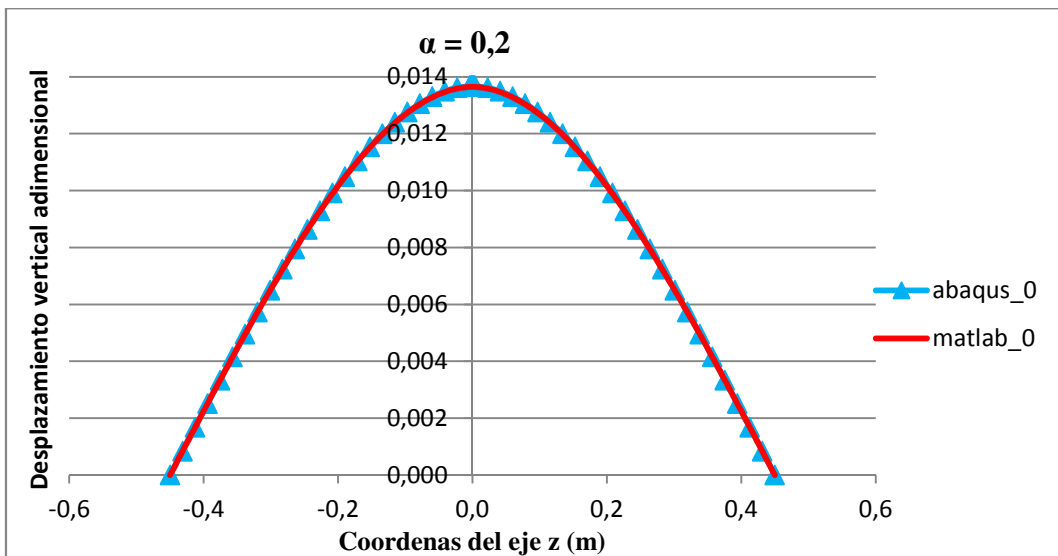


Figura 4.11: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,2$ y 0° .

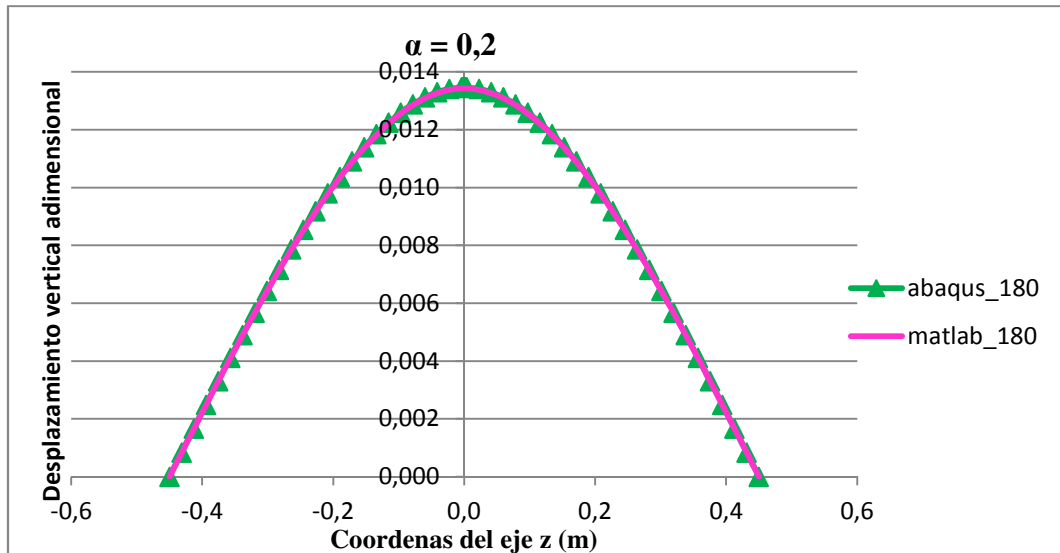


Figura 4.12: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,2$ y 180° .

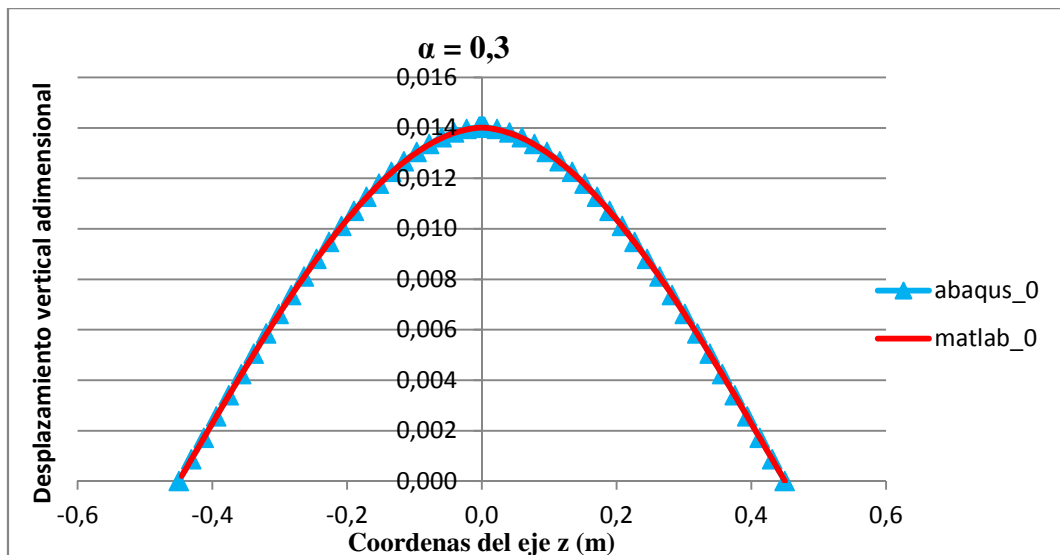


Figura 4.13: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,3$ y 0° .

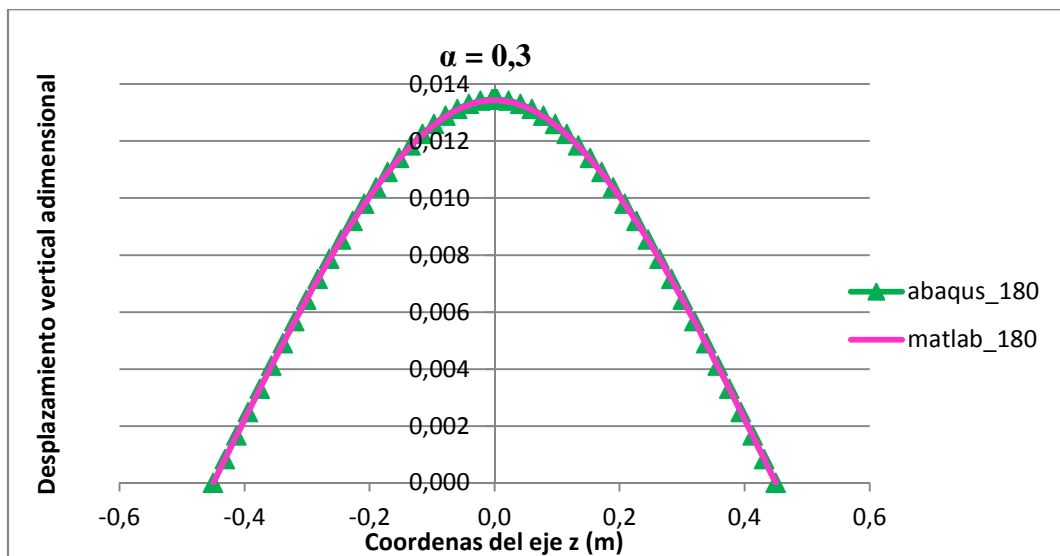


Figura 4.14: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,3$ y 180° .

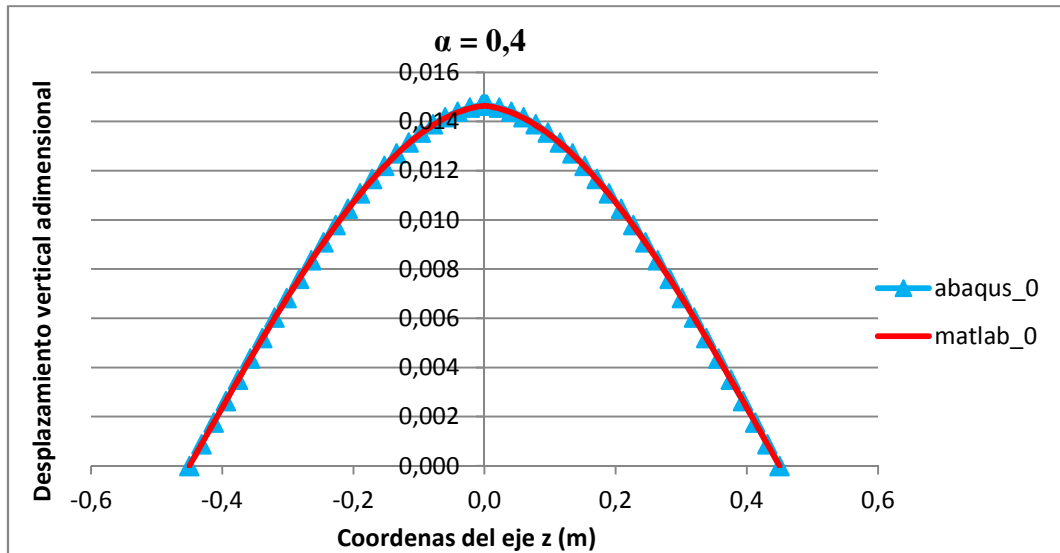


Figura 4.15: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,4$ y 0° .

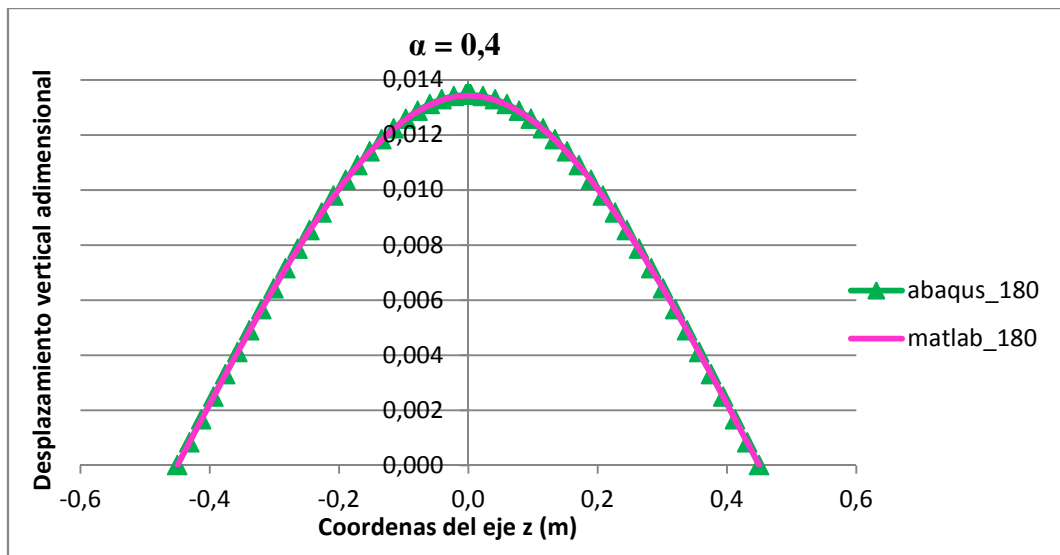


Figura 4.16: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,4$ y 180° .

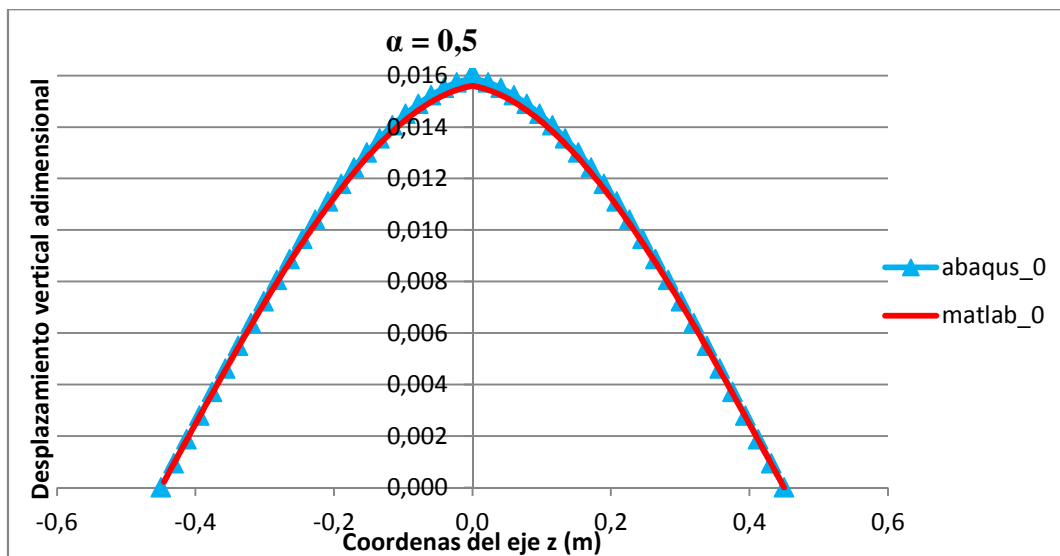


Figura 4.17: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,5$ y 0° .

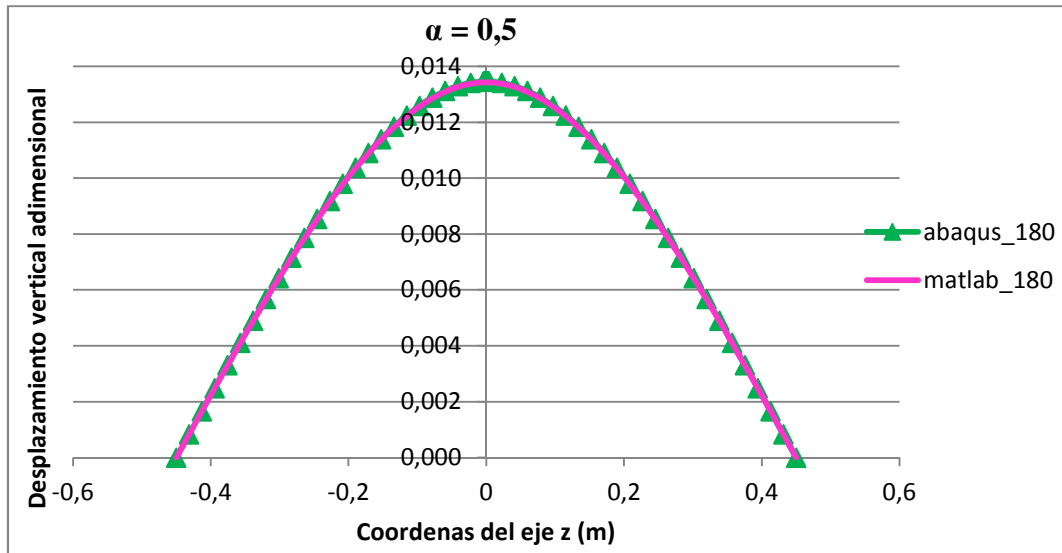


Figura 4.18: Desplazamiento vertical adimensional en función de la coordenada z para $\alpha=0,5$ y 180° .

Si se observa desde la figura 4.9 a la figura 4.18, se ve que las gráficas coinciden en casi toda su totalidad. Por lo que se deduce que los resultados obtenidos en el estudio numérico son correctos.

❖ Valores máximos

Se comparan los valores máximos de los desplazamientos adimensionales numéricos con los analíticos. Dichos datos se muestran en la tabla 4.2 con los errores que existen entre ambos calculados mediante la ecuación (4.2).

$$error = \frac{y(adim) - y_M}{y(adim)} \cdot 100 \quad (4.2)$$

Siendo y_M el desplazamiento vertical adimensional analítico e $y(adim)$ el desplazamiento vertical adimensional numérico.

	Matlab		Abaqus		error	
	0°	180°	0°	180°	0°	180°
$\alpha=0,1$	1,003	1,000	1,005	1,002	0,218	0,236
$\alpha=0,2$	1,016	1,000	1,018	1,002	0,189	0,242
$\alpha=0,3$	1,043	1,000	1,044	1,002	0,114	0,244
$\alpha=0,4$	1,090	1,000	1,093	1,002	0,237	0,246
$\alpha=0,5$	1,161	1,000	1,183	1,002	1,793	0,246

Tabla 4.2: Valores máximos de los desplazamientos con errores (datos numéricos y analíticos).

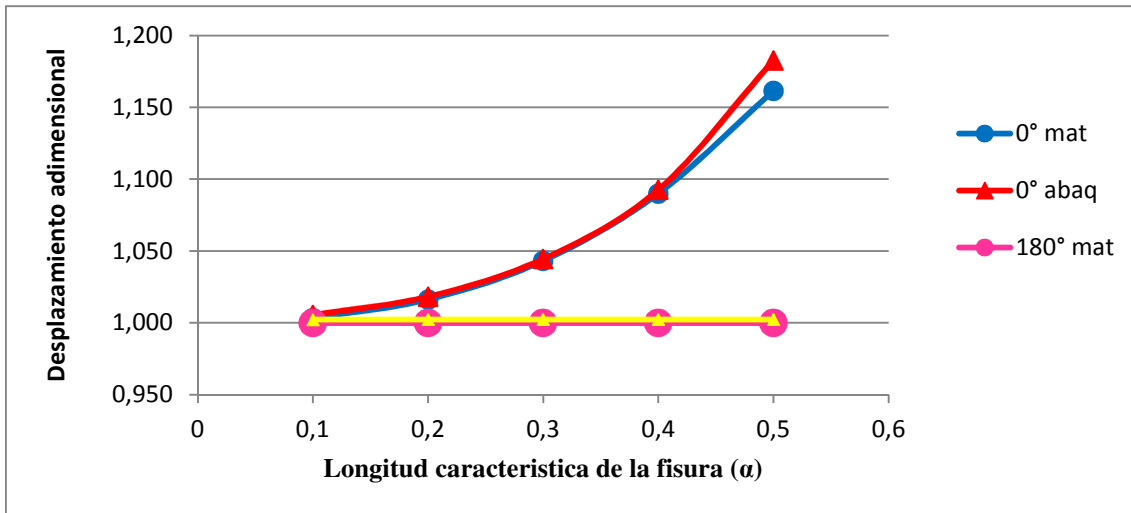


Figura 4.19: Desplazamientos máximos en función de la profundidad de la fisura (α), (analíticos y numéricos).

En la figura 4.19 se muestran los valores máximos de los desplazamientos, analíticos y numéricos, para 0° y 180° en función de la longitud característica de la fisura. Con dicha figura y la tabla 4.2 se ve que los resultados numéricos y analíticos son prácticamente iguales.

En el apartado 4.1 se menciona que a partir de un ángulo de 90° , la diferencia entre los desplazamientos verticales es prácticamente inexistente. En la figura 4.19, eso se distingue claramente, ya que para un ángulo de 180° la diferencia entre los valores de los desplazamientos verticales es indetectable. Esta es otra de las razones por las que los valores analíticos para un ángulo de 180° , indistintamente de cual se la profundidad de la fisura, sean los mismos.

También se realiza una gráfica con los errores (ver figura 4.20). En dicha gráfica, se muestra claramente la diferencia que existe para una longitud característica de la fisura de $\alpha=0,5$ y para un ángulo de 0° . Aunque exista diferencia entre esos dos valores el dato del error es válido. Los demás errores son muy bajos y por tanto aceptables igualmente.

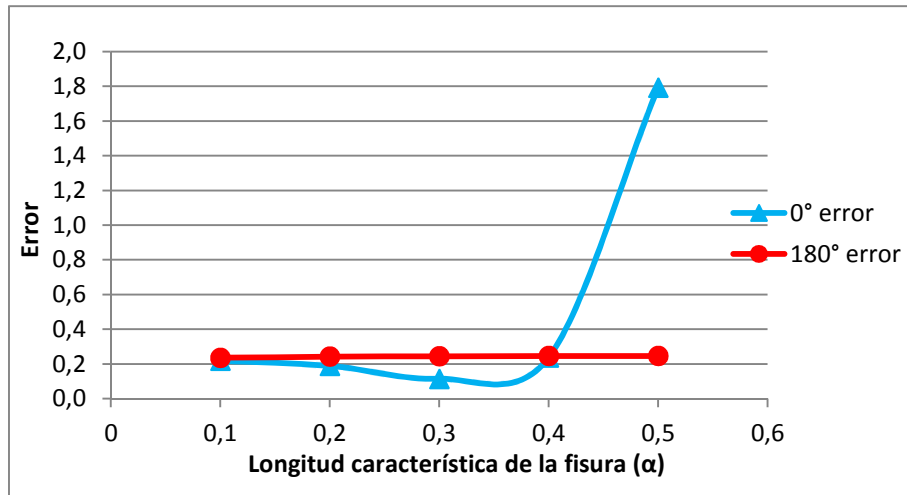


Figura 4.20: Errores en función de la longitud característica de la fisura (α).

Con todos los datos y conclusiones que se han explicado durante este capítulo que puede decir que el modelo numérico realizado es válido.

Capítulo 5

Obtención de la ecuación empírica

En este capítulo, se va a obtener una ecuación de ajuste para hallar el desplazamiento vertical adimensional (y_{adim}) en función de la longitud característica de la fisura (α) y del ángulo de giro (θ). Para obtenerla se lleva a cabo un ajuste polinomial según la ecuación (5.1).

$$y_{adim} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q C_{ij}^{cc} \cdot \alpha^i \cdot \theta^j \quad (5.1)$$

Donde C_{ij}^{cc} son los coeficientes de ajuste para los desplazamientos adimensionales. Además, p es el grado polinomial de α , longitud característica de la fisura y q es el grado polinomial de θ , ángulo en el que se coloca la fisura. Los coeficientes de ajuste se calculan con la herramienta Matlab.

Para estas condiciones que se tienen en dicho trabajo, el mejor ajuste se alcanza con grado 4 ($p = 4$) polinomial en α y con grado 4 ($q = 4$) en θ , con un coeficiente $R^2 = 0,994$ para el desplazamiento adimensional. Los coeficientes de ajuste para los desplazamientos adimensionales se muestran en la tabla 5.1

$p \setminus q$	0	1	2	3	4
0	1,002	3,324E-04	-1,386E-05	1,481E-07	-0,442
1	3,04E-04	2,147E-03	-3,137E-05	7,15E-08	0
2	0,2582	-4,198E-03	5,099E-05	0	0
3	0,1775	-0,01384	0	0	0
4	1,569	0	0	0	0

Tabla 5.1: Coeficientes de ajuste para y_{adim} (C_{ij}^{cc}).

En la figura 5.1 se muestra la representación gráfica del desplazamiento vertical adimensional en función de α y θ .

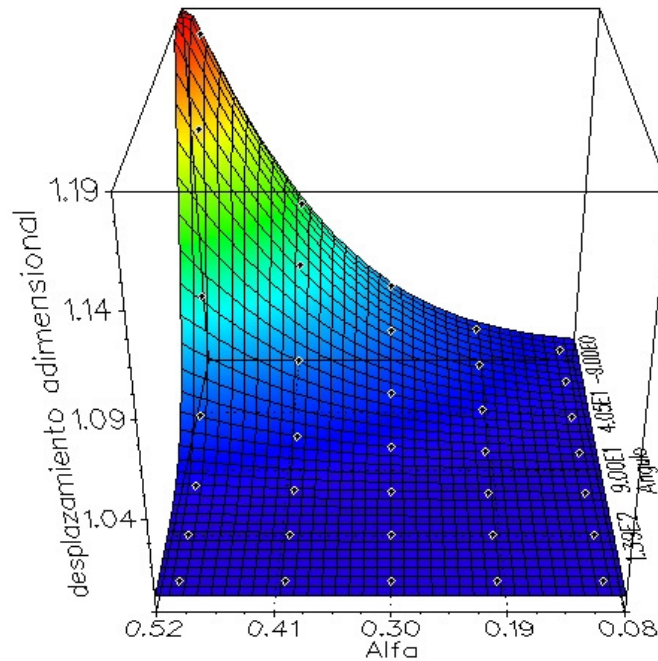


Figura 5.1: y adim en función de α y θ .

Una vez que se obtiene la ecuación de ajuste polinomial, se obtienen los valores del desplazamiento vertical en función de α y θ mediante dicha ecuación polinomial (ver tabla 5.2).

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\alpha=0,1$	1,005	1,009	1,003	1,000	1,003	1,008	1,001
$\alpha=0,2$	1,016	1,019	1,010	1,003	1,003	1,006	1,000
$\alpha=0,3$	1,043	1,037	1,020	1,006	1,002	1,005	1,003
$\alpha=0,4$	1,095	1,072	1,040	1,014	1,002	1,002	1,004
$\alpha=0,5$	1,187	1,135	1,078	1,032	1,006	1,000	1,004

Tabla 5.2: Valores máximos adimensionales de los desplazamientos adimensionales para α y θ .

En las figuras 5.2 y 5.3 se representan los desplazamientos adimensionales en función del ángulo de giro (θ) y en función de la profundidad de la fisura (α) respectivamente, calculados con la ecuación de ajuste polinomial.

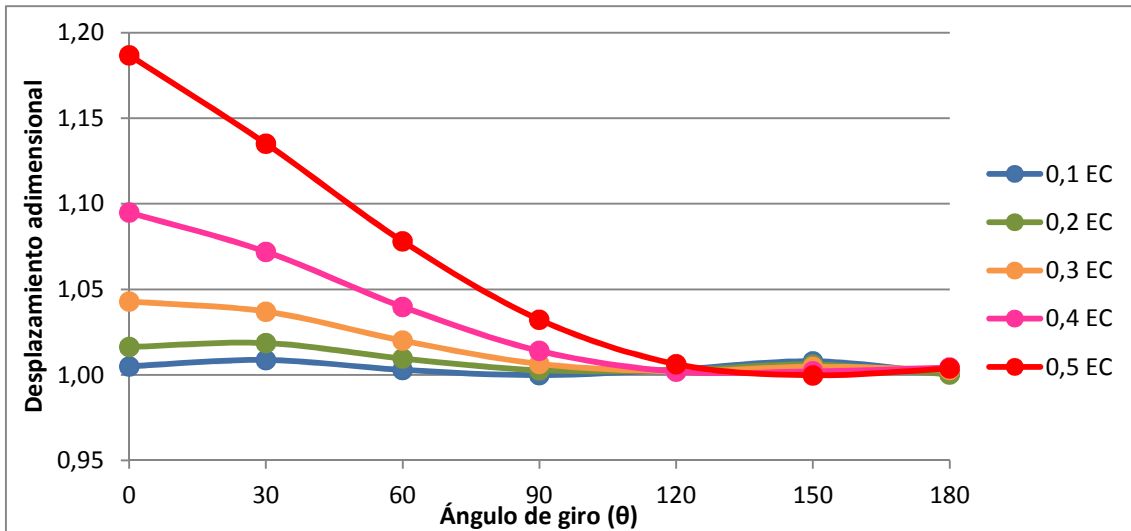


Figura 5.2: Desplazamientos adimensionales máximos en función de θ .

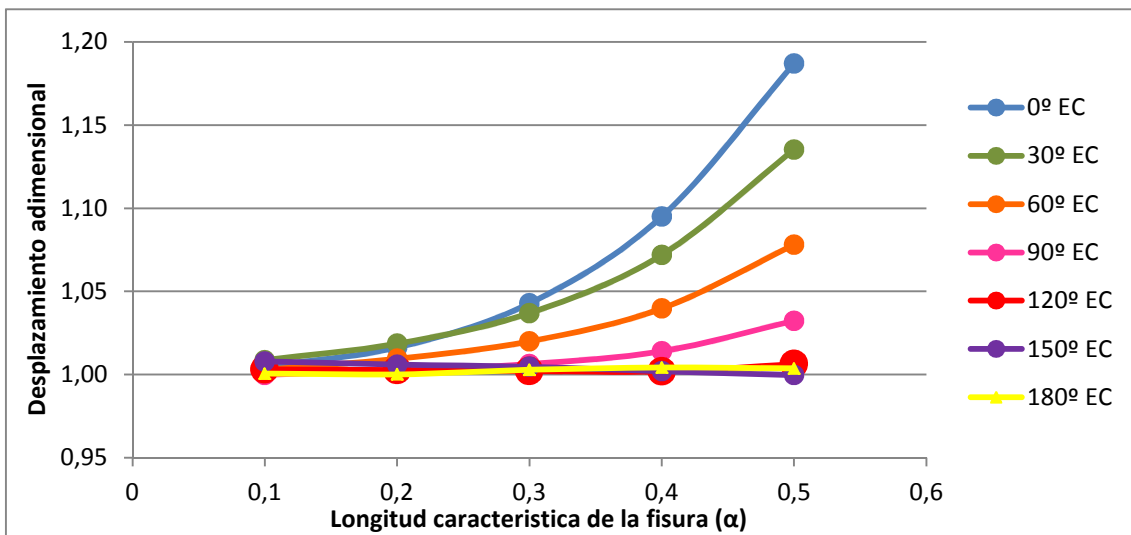


Figura 5.3: Desplazamientos adimensionales máximos en función de α .

Como se observa en las figuras 5.2 y 5.3, para un ángulo de 120° en adelante el desplazamiento adimensional prácticamente no cambia, al igual que ocurría con los datos numéricos obtenidos del programa Abaqus.

Una vez obtenidos estos valores, se comparan con los datos numéricos que se muestran en la tabla 4.1 del capítulo número 4. Ambos valores se representan en las figuras 5.4 y 5.5 en función de α y en función de θ respectivamente.

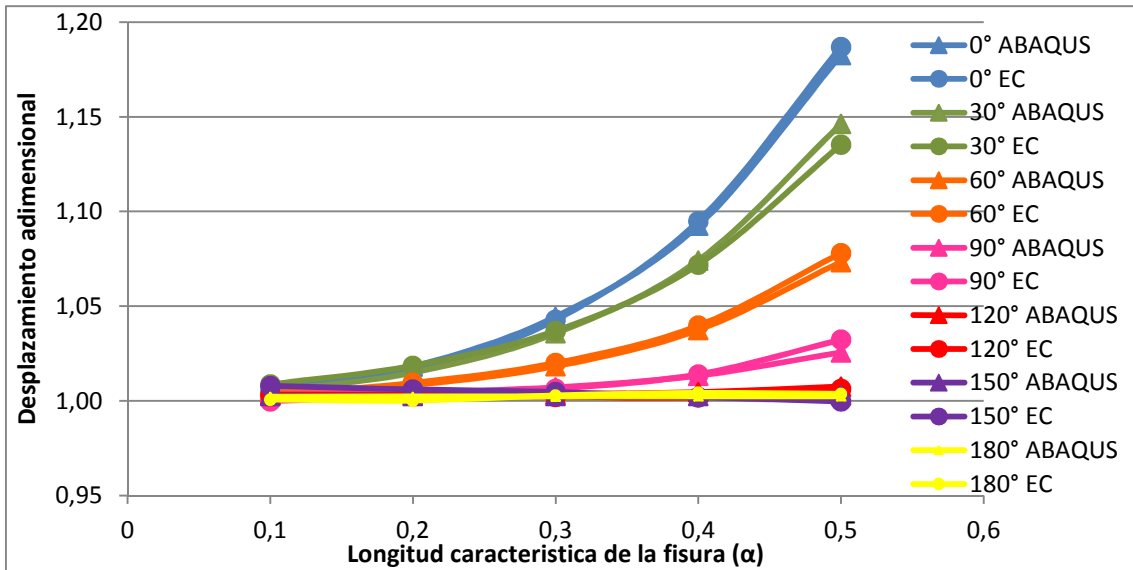


Figura 5.4: Comparación de los resultados numéricos y los de la ecuación en función de α .

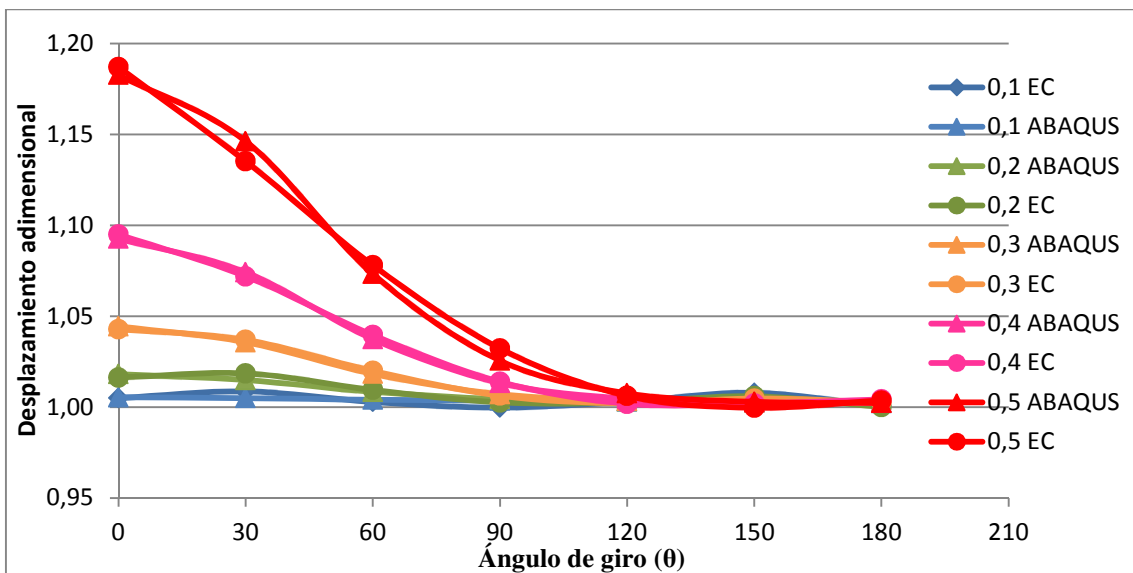


Figura 5.5: Comparación de los resultados numéricos y los de la ecuación en función de θ .

Se puede observar en las dos gráficas que los valores son muy ajustados entre sí. Sin embargo, para asegurar que los valores analíticos que se obtienen con la ecuación polinomial son correctos, se calculan los errores que se muestran en la tabla 5.3.

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\alpha=0,1$	0,049	-0,368	0,123	0,378	0,005	-0,532	0,164
$\alpha=0,2$	0,182	-0,359	-0,108	0,180	0,050	-0,339	0,217
$\alpha=0,3$	0,154	-0,122	-0,162	0,078	0,135	-0,207	-0,050
$\alpha=0,4$	-0,217	0,208	-0,221	-0,068	0,269	0,066	-0,190
$\alpha=0,5$	-0,361	0,959	-0,441	-0,651	0,131	0,322	-0,131

Tabla 5.3: Errores de la comparación entre los valores numéricos y analíticos.

En la tabla 5.3 se ve que los errores no llegan a la unidad, es decir, son valores aceptables. Dichos errores se representan en la figura 5.6 en función de su sección característica de la fisura.

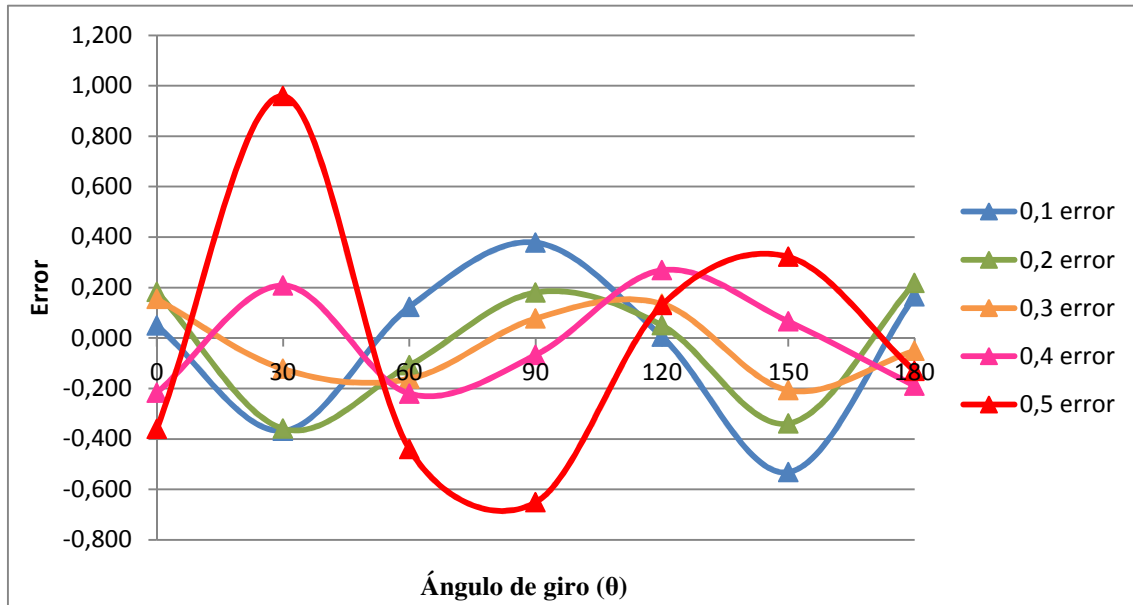


Figura 5.6: Errores en función de θ .

En la figura 5.6 se puede observar que el error mayor se comete para un valor de $\theta=30^\circ$ y $\alpha=0,5$ y también para esa misma longitud característica de fisura el error es mayor. Se podría decir que para $\alpha=0,5$ los errores son mayores y para $\alpha=0,1$ los errores son menores.

Capítulo 6

Conclusiones y desarrollos futuros.

6.1. Conclusiones

En el presente trabajo de fin de grado se ha desarrollado un modelo numérico cuasiestático de un eje rotatorio fisurado mediante el programa Abaqus 6.11. Con dicho modelo se han calculado los desplazamientos verticales que sufre el eje en función de la profundidad de la fisura y del ángulo de giro en el que se encuentra. Dicho modelo ha sido validado para los casos de fisura completamente abierta y completamente cerrada mediante expresiones analíticas obtenidas en trabajos previos.

De los datos obtenidos del modelo numérico se puede concluir que, como era previsible, por un lado a mayor profundidad de fisura se obtiene mayor desplazamiento vertical; y, por otro lado, la deflexión del eje es máxima cuando la fisura está completamente abierta y mínima para el caso en el que se encuentre completamente cerrada.

Por último, se ha obtenido una expresión analítica que permite calcular el desplazamiento para cualquier profundidad de fisura y ángulo de giro, y que, además proporciona información de cómo es la variación de los desplazamientos en la zona de transición entre los estados límites (completamente abierto y cerrado).

6.2. Desarrollos futuros

Como posibles trabajos futuros se puede proponer:

- ✓ Realizar un modelo similar a éste pero con una fisura de frente elíptico.
- ✓ Comparar los resultados obtenidos con datos experimentales.

Bibliografía

- [1] A.D. Dimarogonas, C.Papadopoulos, Vibrations of cracked shafts in bending, Journal of sound and vibration 91, pp. 583-593, 1983.
- [2] C.A. Papadopoulos, A.D. Dimarogonas, Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack, Journal of sound and vibration 117(1), pp. 81-93, 1987.
- [3] Y-S. Shih, J-J. Chen, Análisis of fatigue crack growth on a cracked shaft, International journal of fatigue 19, pp. 477-485, 1997.
- [4] M.A. Astiz, An incompatible singular elastic element of two- and three-dimensional crack problems, International journal of Fracture 31, pp. 105-124, 1986.
- [5] Couroneau, J. Royer, Simplified model for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars under mode 1, International Journal of Fatigue 20, pp. 711-718, 1998.
- [6] C.S. Shin, C.Q. Cai, Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending. Int J Fracture, vol. 129 (2004), 239-264.
- [7] Rubio L, Muñoz Abella B “Detección e identificación de fisuras de frente semielíptico en ejes mediante la aplicación de algoritmos genéticos”. Anales de Ingeniería Mecánica, 17, 2010.
- [8] ABAQUS User’s manual, Version 6.11. Hibbit Karlsson & Sorensen. Inc. 1997.
- [9] Álvarez del Teso, Javier. “Estudio analítico del comportamiento de una viga fisurada de sección circular con diferentes condiciones de apoyo”. Proyecto de fin de carrera. Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Ingeniería Mecánica, Noviembre 2008.
- [10] Rodríguez Rodríguez, Victor. “Análisis del comportamiento estático de ejes con fisuras de frente elíptico”. Proyecto de fin de carrera. Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Ingeniería Mecánica, Septiembre 2009.

- [11] Ruiz Ayuso, María. “Estudio del comportamiento a flexión de ejes con fisuras de frente semielíptico”. Proyecto de fin de carrera. Universidad Carlos III de Madrid, Departamento de Ingeniería Mecánica, Octubre 2010.

Anexos

Resultados de simulación

Para $\alpha=0,1$

0°			30°		60°		90°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim		yr adim
part1	-4,50E-01	3,61E-05		4,11E-05		6,54E-05		2,11E-34
	-4,31E-01	6,22E-02		6,22E-02		6,22E-02		6,22E-02
	-4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	-3,94E-01	1,86E-01		1,86E-01		1,86E-01		1,86E-01
	-3,76E-01	2,47E-01		2,47E-01		2,46E-01		2,46E-01
	-3,57E-01	3,07E-01		3,07E-01		3,06E-01		3,06E-01
	-3,38E-01	3,66E-01		3,66E-01		3,65E-01		3,65E-01
	-3,20E-01	4,23E-01		4,23E-01		4,23E-01		4,23E-01
	-3,01E-01	4,80E-01		4,79E-01		4,79E-01		4,79E-01
	-2,83E-01	5,34E-01		5,34E-01		5,34E-01		5,34E-01
	-2,64E-01	5,87E-01		5,87E-01		5,86E-01		5,86E-01
	-2,46E-01	6,37E-01		6,37E-01		6,37E-01		6,37E-01
	-2,27E-01	6,86E-01		6,85E-01		6,85E-01		6,85E-01
	-2,08E-01	7,31E-01		7,31E-01		7,31E-01		7,30E-01
	-1,90E-01	7,74E-01		7,74E-01		7,73E-01		7,73E-01
	-1,71E-01	8,14E-01		8,14E-01		8,13E-01		8,13E-01
	-1,53E-01	8,51E-01		8,51E-01		8,50E-01		8,50E-01
	-1,34E-01	8,84E-01		8,84E-01		8,83E-01		8,83E-01
	-1,16E-01	9,14E-01		9,14E-01		9,13E-01		9,13E-01
	-9,69E-02	9,40E-01		9,40E-01		9,39E-01		9,39E-01
	-7,83E-02	9,62E-01		9,62E-01		9,61E-01		9,60E-01
	-5,97E-02	9,80E-01		9,79E-01		9,79E-01		9,78E-01
	-4,12E-02	9,93E-01		9,93E-01		9,92E-01		9,91E-01
	-2,26E-02	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-4,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

0°			30°		60°		90°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim		yr adim
	-1,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-6,67E-04	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-04	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	0,00E+00	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
part2	0,00E+00	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-04	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	6,67E-04	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	4,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,26E-02	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	4,12E-02	9,93E-01		9,93E-01		9,92E-01		9,91E-01
	5,97E-02	9,80E-01		9,79E-01		9,79E-01		9,78E-01
	7,83E-02	9,62E-01		9,62E-01		9,61E-01		9,60E-01
	9,69E-02	9,40E-01		9,40E-01		9,39E-01		9,39E-01
	1,16E-01	9,14E-01		9,14E-01		9,13E-01		9,13E-01
	1,34E-01	8,84E-01		8,84E-01		8,83E-01		8,83E-01
	1,53E-01	8,51E-01		8,51E-01		8,50E-01		8,50E-01
	1,71E-01	8,14E-01		8,14E-01		8,13E-01		8,13E-01
	1,90E-01	7,74E-01		7,74E-01		7,73E-01		7,73E-01
	2,08E-01	7,31E-01		7,31E-01		7,31E-01		7,30E-01
	2,27E-01	6,86E-01		6,85E-01		6,85E-01		6,85E-01
	2,46E-01	6,37E-01		6,37E-01		6,37E-01		6,37E-01
	2,64E-01	5,87E-01		5,87E-01		5,86E-01		5,86E-01
	2,83E-01	5,34E-01		5,34E-01		5,34E-01		5,34E-01
	3,01E-01	4,80E-01		4,79E-01		4,79E-01		4,79E-01
	3,20E-01	4,23E-01		4,23E-01		4,23E-01		4,23E-01
	3,38E-01	3,66E-01		3,66E-01		3,65E-01		3,65E-01
	3,57E-01	3,07E-01		3,07E-01		3,06E-01		3,06E-01
	3,76E-01	2,47E-01		2,47E-01		2,46E-01		2,46E-01
	3,94E-01	1,86E-01		1,86E-01		1,86E-01		1,86E-01
	4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	4,31E-01	6,22E-02		6,22E-02		6,22E-02		6,22E-02
	4,50E-01	3,61E-05		4,11E-05		6,54E-05		4,59E-34

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

120°			150°		180°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim
part1	-4,50E-01	1,57E-34		2,01E-34		2,01E-34
	-4,31E-01	6,21E-02		6,21E-02		6,21E-02
	-4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	-3,94E-01	1,85E-01		1,85E-01		1,85E-01
	-3,76E-01	2,46E-01		2,46E-01		2,46E-01
	-3,57E-01	3,06E-01		3,06E-01		3,06E-01
	-3,38E-01	3,65E-01		3,65E-01		3,65E-01
	-3,20E-01	4,23E-01		4,23E-01		4,22E-01
	-3,01E-01	4,79E-01		4,79E-01		4,79E-01
	-2,83E-01	5,33E-01		5,33E-01		5,33E-01
	-2,64E-01	5,86E-01		5,86E-01		5,85E-01
	-2,46E-01	6,36E-01		6,36E-01		6,36E-01
	-2,27E-01	6,84E-01		6,84E-01		6,84E-01
	-2,08E-01	7,30E-01		7,30E-01		7,29E-01
	-1,90E-01	7,73E-01		7,72E-01		7,72E-01
	-1,71E-01	8,13E-01		8,12E-01		8,12E-01
	-1,53E-01	8,49E-01		8,49E-01		8,49E-01
	-1,34E-01	8,83E-01		8,82E-01		8,82E-01
	-1,16E-01	9,12E-01		9,12E-01		9,12E-01
	-9,69E-02	9,38E-01		9,38E-01		9,37E-01
	-7,83E-02	9,60E-01		9,60E-01		9,59E-01
	-5,97E-02	9,78E-01		9,77E-01		9,77E-01
	-4,12E-02	9,91E-01		9,90E-01		9,90E-01
	-2,26E-02	9,99E-01		9,99E-01		9,99E-01
	-4,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-6,67E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	0,00E+00	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
part2	0,00E+00	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	6,67E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

120°			150°		180°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim
	2,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	4,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,26E-02	9,99E-01		9,99E-01		9,99E-01
	4,12E-02	9,91E-01		9,90E-01		9,90E-01
	5,97E-02	9,78E-01		9,77E-01		9,77E-01
	7,83E-02	9,60E-01		9,60E-01		9,59E-01
	9,69E-02	9,38E-01		9,38E-01		9,37E-01
	1,16E-01	9,12E-01		9,12E-01		9,12E-01
	1,34E-01	8,83E-01		8,82E-01		8,82E-01
	1,53E-01	8,49E-01		8,49E-01		8,49E-01
	1,71E-01	8,13E-01		8,12E-01		8,12E-01
	1,90E-01	7,73E-01		7,72E-01		7,72E-01
	2,08E-01	7,30E-01		7,30E-01		7,29E-01
	2,27E-01	6,84E-01		6,84E-01		6,84E-01
	2,46E-01	6,36E-01		6,36E-01		6,36E-01
	2,64E-01	5,86E-01		5,86E-01		5,85E-01
	2,83E-01	5,33E-01		5,33E-01		5,33E-01
	3,01E-01	4,79E-01		4,79E-01		4,79E-01
	3,20E-01	4,23E-01		4,23E-01		4,22E-01
	3,38E-01	3,65E-01		3,65E-01		3,65E-01
	3,57E-01	3,06E-01		3,06E-01		3,06E-01
	3,76E-01	2,46E-01		2,46E-01		2,46E-01
	3,94E-01	1,85E-01		1,85E-01		1,85E-01
	4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	4,31E-01	6,21E-02		6,21E-02		6,21E-02
	4,50E-01	1,69E-34		2,26E-34		2,01E-34

Para $\alpha=0,2$

0°			30°		60°		90°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim		yr adim
part1	-4,50E-01	3,61E-05		4,11E-05		6,54E-05		2,11E-34
	-4,31E-01	6,27E-02		6,26E-02		6,24E-02		6,22E-02
	-4,13E-01	1,25E-01		1,25E-01		1,24E-01		1,24E-01
	-3,94E-01	1,87E-01		1,87E-01		1,86E-01		1,86E-01
	-3,76E-01	2,49E-01		2,48E-01		2,47E-01		2,46E-01
	-3,57E-01	3,09E-01		3,09E-01		3,07E-01		3,07E-01
	-3,38E-01	3,69E-01		3,68E-01		3,66E-01		3,65E-01
	-3,20E-01	4,27E-01		4,26E-01		4,24E-01		4,23E-01
	-3,01E-01	4,84E-01		4,83E-01		4,81E-01		4,79E-01
	-2,83E-01	5,39E-01		5,38E-01		5,35E-01		5,34E-01
	-2,64E-01	5,92E-01		5,91E-01		5,88E-01		5,86E-01
	-2,46E-01	6,43E-01		6,42E-01		6,39E-01		6,37E-01
	-2,27E-01	6,92E-01		6,90E-01		6,87E-01		6,85E-01
	-2,08E-01	7,38E-01		7,36E-01		7,33E-01		7,31E-01
	-1,90E-01	7,82E-01		7,80E-01		7,76E-01		7,74E-01
	-1,71E-01	8,22E-01		8,20E-01		8,16E-01		8,14E-01
	-1,53E-01	8,59E-01		8,57E-01		8,53E-01		8,50E-01
	-1,34E-01	8,93E-01		8,91E-01		8,86E-01		8,84E-01
	-1,16E-01	9,24E-01		9,21E-01		9,16E-01		9,13E-01
	-9,69E-02	9,50E-01		9,47E-01		9,42E-01		9,39E-01
	-7,83E-02	9,73E-01		9,70E-01		9,64E-01		9,61E-01
	-5,97E-02	9,91E-01		9,88E-01		9,82E-01		9,79E-01
	-4,12E-02	1,00E+00		1,00E+00		9,96E-01		9,92E-01
	-2,26E-02	1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-4,00E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-3,67E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-3,33E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-3,00E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-2,67E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-2,33E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-2,00E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-1,67E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-1,33E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-1,00E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-6,67E-04	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-3,33E-04	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	0,00E+00	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
part2	0,00E+00	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

0°			30°		60°		90°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim		yr adim
	3,33E-04	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	6,67E-04	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	1,00E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	1,33E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	1,67E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	2,00E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	2,33E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	2,67E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	3,00E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	3,33E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	3,67E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	4,00E-03	1,02E+00		1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00
	2,26E-02	1,01E+00		1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	4,12E-02	1,00E+00		1,00E+00		9,96E-01		9,92E-01
	5,97E-02	9,91E-01		9,88E-01		9,82E-01		9,79E-01
	7,83E-02	9,73E-01		9,70E-01		9,64E-01		9,61E-01
	9,69E-02	9,50E-01		9,47E-01		9,42E-01		9,39E-01
	1,16E-01	9,24E-01		9,21E-01		9,16E-01		9,13E-01
	1,34E-01	8,93E-01		8,91E-01		8,86E-01		8,84E-01
	1,53E-01	8,59E-01		8,57E-01		8,53E-01		8,50E-01
	1,71E-01	8,22E-01		8,20E-01		8,16E-01		8,14E-01
	1,90E-01	7,82E-01		7,80E-01		7,76E-01		7,74E-01
	2,08E-01	7,38E-01		7,36E-01		7,33E-01		7,31E-01
	2,27E-01	6,92E-01		6,90E-01		6,87E-01		6,85E-01
	2,46E-01	6,43E-01		6,42E-01		6,39E-01		6,37E-01
	2,64E-01	5,92E-01		5,91E-01		5,88E-01		5,86E-01
	2,83E-01	5,39E-01		5,38E-01		5,35E-01		5,34E-01
	3,01E-01	4,84E-01		4,83E-01		4,81E-01		4,79E-01
	3,20E-01	4,27E-01		4,26E-01		4,24E-01		4,23E-01
	3,38E-01	3,69E-01		3,68E-01		3,66E-01		3,65E-01
	3,57E-01	3,09E-01		3,09E-01		3,07E-01		3,07E-01
	3,76E-01	2,49E-01		2,48E-01		2,47E-01		2,46E-01
	3,94E-01	1,87E-01		1,87E-01		1,86E-01		1,86E-01
	4,13E-01	1,25E-01		1,25E-01		1,24E-01		1,24E-01
	4,31E-01	6,27E-02		6,26E-02		6,24E-02		6,22E-02
	4,50E-01	3,61E-05		4,11E-05		6,54E-05		4,59E-34

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

120°			150°		180°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim
part1	-4,50E-01	1,57E-34		2,01E-34		2,01E-34
	-4,31E-01	6,21E-02		6,21E-02		6,21E-02
	-4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	-3,94E-01	1,85E-01		1,85E-01		1,85E-01
	-3,76E-01	2,46E-01		2,46E-01		2,46E-01
	-3,57E-01	3,06E-01		3,06E-01		3,06E-01
	-3,38E-01	3,65E-01		3,65E-01		3,65E-01
	-3,20E-01	4,23E-01		4,23E-01		4,22E-01
	-3,01E-01	4,79E-01		4,79E-01		4,79E-01
	-2,83E-01	5,33E-01		5,33E-01		5,33E-01
	-2,64E-01	5,86E-01		5,86E-01		5,86E-01
	-2,46E-01	6,36E-01		6,36E-01		6,36E-01
	-2,27E-01	6,85E-01		6,84E-01		6,84E-01
	-2,08E-01	7,30E-01		7,30E-01		7,30E-01
	-1,90E-01	7,73E-01		7,72E-01		7,72E-01
	-1,71E-01	8,13E-01		8,12E-01		8,12E-01
	-1,53E-01	8,49E-01		8,49E-01		8,49E-01
	-1,34E-01	8,83E-01		8,82E-01		8,82E-01
	-1,16E-01	9,12E-01		9,12E-01		9,12E-01
	-9,69E-02	9,38E-01		9,38E-01		9,38E-01
	-7,83E-02	9,60E-01		9,60E-01		9,59E-01
	-5,97E-02	9,78E-01		9,77E-01		9,77E-01
	-4,12E-02	9,91E-01		9,90E-01		9,90E-01
	-2,26E-02	9,99E-01		9,99E-01		9,99E-01
	-4,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-6,67E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	0,00E+00	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
part2	0,00E+00	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	6,67E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

120°			150°		180°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim
	1,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	4,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,26E-02	9,99E-01		9,99E-01		9,99E-01
	4,12E-02	9,91E-01		9,90E-01		9,90E-01
	5,97E-02	9,78E-01		9,77E-01		9,77E-01
	7,83E-02	9,60E-01		9,60E-01		9,59E-01
	9,69E-02	9,38E-01		9,38E-01		9,38E-01
	1,16E-01	9,12E-01		9,12E-01		9,12E-01
	1,34E-01	8,83E-01		8,82E-01		8,82E-01
	1,53E-01	8,49E-01		8,49E-01		8,49E-01
	1,71E-01	8,13E-01		8,12E-01		8,12E-01
	1,90E-01	7,73E-01		7,72E-01		7,72E-01
	2,08E-01	7,30E-01		7,30E-01		7,30E-01
	2,27E-01	6,85E-01		6,84E-01		6,84E-01
	2,46E-01	6,36E-01		6,36E-01		6,36E-01
	2,64E-01	5,86E-01		5,86E-01		5,86E-01
	2,83E-01	5,33E-01		5,33E-01		5,33E-01
	3,01E-01	4,79E-01		4,79E-01		4,79E-01
	3,20E-01	4,23E-01		4,23E-01		4,22E-01
	3,38E-01	3,65E-01		3,65E-01		3,65E-01
	3,57E-01	3,06E-01		3,06E-01		3,06E-01
	3,76E-01	2,46E-01		2,46E-01		2,46E-01
	3,94E-01	1,85E-01		1,85E-01		1,85E-01
	4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	4,31E-01	6,21E-02		6,21E-02		6,21E-02
	4,50E-01	1,69E-34		2,26E-34		2,01E-34

Para $\alpha=0,3$

0°			30°		60°		90°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim		yr adim
part1	-4,50E-01	3,61E-05		4,11E-05		6,54E-05		2,11E-34
	-4,31E-01	6,38E-02		6,35E-02		6,28E-02		6,23E-02
	-4,13E-01	1,27E-01		1,27E-01		1,25E-01		1,24E-01
	-3,94E-01	1,91E-01		1,89E-01		1,87E-01		1,86E-01
	-3,76E-01	2,53E-01		2,52E-01		2,49E-01		2,47E-01
	-3,57E-01	3,15E-01		3,13E-01		3,09E-01		3,07E-01
	-3,38E-01	3,75E-01		3,73E-01		3,69E-01		3,66E-01
	-3,20E-01	4,35E-01		4,32E-01		4,27E-01		4,24E-01
	-3,01E-01	4,93E-01		4,90E-01		4,84E-01		4,80E-01
	-2,83E-01	5,49E-01		5,46E-01		5,39E-01		5,35E-01
	-2,64E-01	6,03E-01		5,99E-01		5,92E-01		5,88E-01
	-2,46E-01	6,55E-01		6,51E-01		6,43E-01		6,38E-01
	-2,27E-01	7,05E-01		7,01E-01		6,92E-01		6,86E-01
	-2,08E-01	7,52E-01		7,48E-01		7,38E-01		7,32E-01
	-1,90E-01	7,97E-01		7,92E-01		7,82E-01		7,75E-01
	-1,71E-01	8,38E-01		8,33E-01		8,22E-01		8,15E-01
	-1,53E-01	8,77E-01		8,71E-01		8,59E-01		8,52E-01
	-1,34E-01	9,12E-01		9,06E-01		8,93E-01		8,85E-01
	-1,16E-01	9,43E-01		9,37E-01		9,24E-01		9,15E-01
	-9,69E-02	9,71E-01		9,64E-01		9,50E-01		9,41E-01
	-7,83E-02	9,94E-01		9,87E-01		9,73E-01		9,63E-01
	-5,97E-02	1,01E+00		1,01E+00		9,91E-01		9,81E-01
	-4,12E-02	1,03E+00		1,02E+00		1,00E+00		9,94E-01
	-2,26E-02	1,04E+00		1,03E+00		1,01E+00		1,00E+00
	-4,00E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-3,67E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-3,33E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-3,00E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-2,67E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-2,33E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-2,00E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-1,67E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-1,33E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-1,00E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-6,67E-04	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	-3,33E-04	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	0,00E+00	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
part2	0,00E+00	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

0°			30°		60°		90°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim		yr adim
	3,33E-04	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	6,67E-04	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	1,00E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	1,33E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	1,67E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	2,00E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	2,33E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	2,67E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	3,00E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	3,33E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	3,67E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	4,00E-03	1,04E+00		1,04E+00		1,02E+00		1,01E+00
	2,26E-02	1,04E+00		1,03E+00		1,01E+00		1,00E+00
	4,12E-02	1,03E+00		1,02E+00		1,00E+00		9,94E-01
	5,97E-02	1,01E+00		1,01E+00		9,91E-01		9,81E-01
	7,83E-02	9,94E-01		9,87E-01		9,73E-01		9,63E-01
	9,69E-02	9,71E-01		9,64E-01		9,50E-01		9,41E-01
	1,16E-01	9,43E-01		9,37E-01		9,24E-01		9,15E-01
	1,34E-01	9,12E-01		9,06E-01		8,93E-01		8,85E-01
	1,53E-01	8,77E-01		8,71E-01		8,59E-01		8,52E-01
	1,71E-01	8,38E-01		8,33E-01		8,22E-01		8,15E-01
	1,90E-01	7,97E-01		7,92E-01		7,82E-01		7,75E-01
	2,08E-01	7,52E-01		7,48E-01		7,38E-01		7,32E-01
	2,27E-01	7,05E-01		7,01E-01		6,92E-01		6,86E-01
	2,46E-01	6,55E-01		6,51E-01		6,43E-01		6,38E-01
	2,64E-01	6,03E-01		5,99E-01		5,92E-01		5,88E-01
	2,83E-01	5,49E-01		5,46E-01		5,39E-01		5,35E-01
	3,01E-01	4,93E-01		4,90E-01		4,84E-01		4,80E-01
	3,20E-01	4,35E-01		4,32E-01		4,27E-01		4,24E-01
	3,38E-01	3,75E-01		3,73E-01		3,69E-01		3,66E-01
	3,57E-01	3,15E-01		3,13E-01		3,09E-01		3,07E-01
	3,76E-01	2,53E-01		2,52E-01		2,49E-01		2,47E-01
	3,94E-01	1,91E-01		1,89E-01		1,87E-01		1,86E-01
	4,13E-01	1,27E-01		1,27E-01		1,25E-01		1,24E-01
	4,31E-01	6,38E-02		6,35E-02		6,28E-02		6,23E-02
	4,50E-01	3,61E-05		4,11E-05		6,55E-05		4,59E-34

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

120°			150°		180°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim
part1	-4,50E-01	1,57E-34		2,01E-34		2,01E-34
	-4,31E-01	6,22E-02		6,21E-02		6,21E-02
	-4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	-3,94E-01	1,85E-01		1,85E-01		1,85E-01
	-3,76E-01	2,46E-01		2,46E-01		2,46E-01
	-3,57E-01	3,06E-01		3,06E-01		3,06E-01
	-3,38E-01	3,65E-01		3,65E-01		3,65E-01
	-3,20E-01	4,23E-01		4,23E-01		4,22E-01
	-3,01E-01	4,79E-01		4,79E-01		4,79E-01
	-2,83E-01	5,34E-01		5,33E-01		5,33E-01
	-2,64E-01	5,86E-01		5,86E-01		5,86E-01
	-2,46E-01	6,37E-01		6,36E-01		6,36E-01
	-2,27E-01	6,85E-01		6,84E-01		6,84E-01
	-2,08E-01	7,30E-01		7,30E-01		7,30E-01
	-1,90E-01	7,73E-01		7,73E-01		7,72E-01
	-1,71E-01	8,13E-01		8,12E-01		8,12E-01
	-1,53E-01	8,50E-01		8,49E-01		8,49E-01
	-1,34E-01	8,83E-01		8,82E-01		8,82E-01
	-1,16E-01	9,13E-01		9,12E-01		9,12E-01
	-9,69E-02	9,38E-01		9,38E-01		9,38E-01
	-7,83E-02	9,60E-01		9,60E-01		9,59E-01
	-5,97E-02	9,78E-01		9,77E-01		9,77E-01
	-4,12E-02	9,91E-01		9,90E-01		9,90E-01
	-2,26E-02	1,00E+00		9,99E-01		9,99E-01
	-4,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-6,67E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	0,00E+00	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
part2	0,00E+00	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	6,67E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

120°			150°		180°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim
	1,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	4,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,26E-02	1,00E+00		9,99E-01		9,99E-01
	4,12E-02	9,91E-01		9,90E-01		9,90E-01
	5,97E-02	9,78E-01		9,77E-01		9,77E-01
	7,83E-02	9,60E-01		9,60E-01		9,59E-01
	9,69E-02	9,38E-01		9,38E-01		9,38E-01
	1,16E-01	9,13E-01		9,12E-01		9,12E-01
	1,34E-01	8,83E-01		8,82E-01		8,82E-01
	1,53E-01	8,50E-01		8,49E-01		8,49E-01
	1,71E-01	8,13E-01		8,12E-01		8,12E-01
	1,90E-01	7,73E-01		7,73E-01		7,72E-01
	2,08E-01	7,30E-01		7,30E-01		7,30E-01
	2,27E-01	6,85E-01		6,84E-01		6,84E-01
	2,46E-01	6,37E-01		6,36E-01		6,36E-01
	2,64E-01	5,86E-01		5,86E-01		5,86E-01
	2,83E-01	5,34E-01		5,33E-01		5,33E-01
	3,01E-01	4,79E-01		4,79E-01		4,79E-01
	3,20E-01	4,23E-01		4,23E-01		4,22E-01
	3,38E-01	3,65E-01		3,65E-01		3,65E-01
	3,57E-01	3,06E-01		3,06E-01		3,06E-01
	3,76E-01	2,46E-01		2,46E-01		2,46E-01
	3,94E-01	1,85E-01		1,85E-01		1,85E-01
	4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	4,31E-01	6,22E-02		6,21E-02		6,21E-02
	4,50E-01	1,69E-34		2,26E-34		2,01E-34

Para $\alpha=0,4$

0°			30°		60°		90°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim		yr adim
part1	-4,50E-01	3,62E-05		4,11E-05		6,54E-05		2,11E-34
	-4,31E-01	6,58E-02		6,51E-02		6,36E-02		6,26E-02
	-4,13E-01	1,31E-01		1,30E-01		1,27E-01		1,25E-01
	-3,94E-01	1,97E-01		1,94E-01		1,90E-01		1,87E-01
	-3,76E-01	2,61E-01		2,58E-01		2,52E-01		2,48E-01
	-3,57E-01	3,25E-01		3,21E-01		3,13E-01		3,08E-01
	-3,38E-01	3,87E-01		3,83E-01		3,74E-01		3,68E-01
	-3,20E-01	4,49E-01		4,43E-01		4,33E-01		4,26E-01
	-3,01E-01	5,09E-01		5,03E-01		4,90E-01		4,82E-01
	-2,83E-01	5,67E-01		5,60E-01		5,46E-01		5,37E-01
	-2,64E-01	6,23E-01		6,15E-01		6,00E-01		5,90E-01
	-2,46E-01	6,77E-01		6,69E-01		6,52E-01		6,41E-01
	-2,27E-01	7,29E-01		7,20E-01		7,02E-01		6,90E-01
	-2,08E-01	7,78E-01		7,68E-01		7,49E-01		7,36E-01
	-1,90E-01	8,25E-01		8,14E-01		7,93E-01		7,79E-01
	-1,71E-01	8,68E-01		8,57E-01		8,34E-01		8,19E-01
	-1,53E-01	9,09E-01		8,97E-01		8,72E-01		8,56E-01
	-1,34E-01	9,46E-01		9,33E-01		9,07E-01		8,90E-01
	-1,16E-01	9,79E-01		9,66E-01		9,38E-01		9,20E-01
	-9,69E-02	1,01E+00		9,94E-01		9,65E-01		9,46E-01
	-7,83E-02	1,03E+00		1,02E+00		9,89E-01		9,68E-01
	-5,97E-02	1,06E+00		1,04E+00		1,01E+00		9,87E-01
	-4,12E-02	1,07E+00		1,06E+00		1,02E+00		1,00E+00
	-2,26E-02	1,09E+00		1,07E+00		1,03E+00		1,01E+00
	-4,00E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-3,67E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-3,33E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-3,00E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-2,67E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-2,33E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-2,00E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-1,67E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-1,33E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-1,00E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-6,67E-04	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	-3,33E-04	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	0,00E+00	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
part2	0,00E+00	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

0°			30°		60°		90°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim		yr adim
	3,33E-04	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	6,67E-04	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	1,00E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	1,33E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	1,67E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	2,00E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	2,33E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	2,67E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	3,00E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	3,33E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	3,67E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	4,00E-03	1,09E+00		1,07E+00		1,04E+00		1,01E+00
	2,26E-02	1,09E+00		1,07E+00		1,03E+00		1,01E+00
	4,12E-02	1,07E+00		1,06E+00		1,02E+00		1,00E+00
	5,97E-02	1,06E+00		1,04E+00		1,01E+00		9,87E-01
	7,83E-02	1,03E+00		1,02E+00		9,89E-01		9,68E-01
	9,69E-02	1,01E+00		9,94E-01		9,65E-01		9,46E-01
	1,16E-01	9,79E-01		9,66E-01		9,38E-01		9,20E-01
	1,34E-01	9,46E-01		9,33E-01		9,07E-01		8,90E-01
	1,53E-01	9,09E-01		8,97E-01		8,72E-01		8,56E-01
	1,71E-01	8,68E-01		8,57E-01		8,34E-01		8,19E-01
	1,90E-01	8,25E-01		8,14E-01		7,93E-01		7,79E-01
	2,08E-01	7,78E-01		7,68E-01		7,49E-01		7,36E-01
	2,27E-01	7,29E-01		7,20E-01		7,02E-01		6,90E-01
	2,46E-01	6,77E-01		6,69E-01		6,52E-01		6,41E-01
	2,64E-01	6,23E-01		6,15E-01		6,00E-01		5,90E-01
	2,83E-01	5,67E-01		5,60E-01		5,46E-01		5,37E-01
	3,01E-01	5,09E-01		5,03E-01		4,90E-01		4,82E-01
	3,20E-01	4,49E-01		4,43E-01		4,33E-01		4,26E-01
	3,38E-01	3,87E-01		3,83E-01		3,74E-01		3,68E-01
	3,57E-01	3,25E-01		3,21E-01		3,13E-01		3,08E-01
	3,76E-01	2,61E-01		2,58E-01		2,52E-01		2,48E-01
	3,94E-01	1,97E-01		1,94E-01		1,90E-01		1,87E-01
	4,13E-01	1,31E-01		1,30E-01		1,27E-01		1,25E-01
	4,31E-01	6,58E-02		6,51E-02		6,36E-02		6,26E-02
	4,50E-01	3,62E-05		4,11E-05		6,54E-05		4,59E-34

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

120°			150°		180°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim
part1	-4,50E-01	1,57E-34		2,01E-34		2,01E-34
	-4,31E-01	6,22E-02		6,21E-02		6,21E-02
	-4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	-3,94E-01	1,86E-01		1,85E-01		1,85E-01
	-3,76E-01	2,46E-01		2,46E-01		2,46E-01
	-3,57E-01	3,07E-01		3,06E-01		3,06E-01
	-3,38E-01	3,65E-01		3,65E-01		3,65E-01
	-3,20E-01	4,23E-01		4,23E-01		4,22E-01
	-3,01E-01	4,79E-01		4,79E-01		4,79E-01
	-2,83E-01	5,34E-01		5,33E-01		5,33E-01
	-2,64E-01	5,87E-01		5,86E-01		5,86E-01
	-2,46E-01	6,37E-01		6,36E-01		6,36E-01
	-2,27E-01	6,85E-01		6,84E-01		6,84E-01
	-2,08E-01	7,31E-01		7,30E-01		7,30E-01
	-1,90E-01	7,74E-01		7,73E-01		7,72E-01
	-1,71E-01	8,14E-01		8,12E-01		8,12E-01
	-1,53E-01	8,50E-01		8,49E-01		8,49E-01
	-1,34E-01	8,84E-01		8,82E-01		8,82E-01
	-1,16E-01	9,13E-01		9,12E-01		9,12E-01
	-9,69E-02	9,39E-01		9,38E-01		9,38E-01
	-7,83E-02	9,61E-01		9,60E-01		9,59E-01
	-5,97E-02	9,79E-01		9,77E-01		9,77E-01
	-4,12E-02	9,92E-01		9,90E-01		9,90E-01
	-2,26E-02	1,00E+00		9,99E-01		9,99E-01
	-4,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-6,67E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	0,00E+00	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
part2	0,00E+00	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	6,67E-04	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

120°			150°		180°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim
	1,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,67E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	4,00E-03	1,00E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,26E-02	1,00E+00		9,99E-01		9,99E-01
	4,12E-02	9,92E-01		9,90E-01		9,90E-01
	5,97E-02	9,79E-01		9,77E-01		9,77E-01
	7,83E-02	9,61E-01		9,60E-01		9,59E-01
	9,69E-02	9,39E-01		9,38E-01		9,38E-01
	1,16E-01	9,13E-01		9,12E-01		9,12E-01
	1,34E-01	8,84E-01		8,82E-01		8,82E-01
	1,53E-01	8,50E-01		8,49E-01		8,49E-01
	1,71E-01	8,14E-01		8,12E-01		8,12E-01
	1,90E-01	7,74E-01		7,73E-01		7,72E-01
	2,08E-01	7,31E-01		7,30E-01		7,30E-01
	2,27E-01	6,85E-01		6,84E-01		6,84E-01
	2,46E-01	6,37E-01		6,36E-01		6,36E-01
	2,64E-01	5,87E-01		5,86E-01		5,86E-01
	2,83E-01	5,34E-01		5,33E-01		5,33E-01
	3,01E-01	4,79E-01		4,79E-01		4,79E-01
	3,20E-01	4,23E-01		4,23E-01		4,22E-01
	3,38E-01	3,65E-01		3,65E-01		3,65E-01
	3,57E-01	3,07E-01		3,06E-01		3,06E-01
	3,76E-01	2,46E-01		2,46E-01		2,46E-01
	3,94E-01	1,86E-01		1,85E-01		1,85E-01
	4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	4,31E-01	6,22E-02		6,21E-02		6,21E-02
	4,50E-01	1,69E-34		2,26E-34		2,01E-34

Para $\alpha=0,5$

0°			30°		60°		90°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim		yr adim
part1	-4,50E-01	3,63E-05		4,11E-05		6,54E-05		2,12E-34
	-4,31E-01	6,96E-02		6,81E-02		6,50E-02		6,31E-02
	-4,13E-01	1,39E-01		1,36E-01		1,30E-01		1,26E-01
	-3,94E-01	2,08E-01		2,03E-01		1,94E-01		1,88E-01
	-3,76E-01	2,76E-01		2,70E-01		2,58E-01		2,50E-01
	-3,57E-01	3,44E-01		3,36E-01		3,21E-01		3,11E-01
	-3,38E-01	4,10E-01		4,01E-01		3,83E-01		3,71E-01
	-3,20E-01	4,75E-01		4,64E-01		4,43E-01		4,29E-01
	-3,01E-01	5,39E-01		5,26E-01		5,02E-01		4,86E-01
	-2,83E-01	6,01E-01		5,87E-01		5,60E-01		5,42E-01
	-2,64E-01	6,61E-01		6,45E-01		6,15E-01		5,95E-01
	-2,46E-01	7,18E-01		7,02E-01		6,68E-01		6,47E-01
	-2,27E-01	7,74E-01		7,56E-01		7,19E-01		6,96E-01
	-2,08E-01	8,27E-01		8,07E-01		7,68E-01		7,42E-01
	-1,90E-01	8,77E-01		8,56E-01		8,14E-01		7,86E-01
	-1,71E-01	9,25E-01		9,02E-01		8,56E-01		8,27E-01
	-1,53E-01	9,69E-01		9,45E-01		8,96E-01		8,64E-01
	-1,34E-01	1,01E+00		9,84E-01		9,32E-01		8,99E-01
	-1,16E-01	1,05E+00		1,02E+00		9,65E-01		9,29E-01
	-9,69E-02	1,08E+00		1,05E+00		9,94E-01		9,56E-01
	-7,83E-02	1,11E+00		1,08E+00		1,02E+00		9,79E-01
	-5,97E-02	1,13E+00		1,10E+00		1,04E+00		9,97E-01
	-4,12E-02	1,15E+00		1,12E+00		1,05E+00		1,01E+00
	-2,26E-02	1,17E+00		1,14E+00		1,07E+00		1,02E+00
	-4,00E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-3,67E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-3,33E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-3,00E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-2,67E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-2,33E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-2,00E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-1,67E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-1,33E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-1,00E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-6,67E-04	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	-3,33E-04	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	0,00E+00	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
part2	0,00E+00	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

0°			30°		60°		90°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim		yr adim
	3,33E-04	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	6,67E-04	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	1,00E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	1,33E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	1,67E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	2,00E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	2,33E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	2,67E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	3,00E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	3,33E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	3,67E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	4,00E-03	1,18E+00		1,15E+00		1,07E+00		1,03E+00
	2,26E-02	1,17E+00		1,14E+00		1,07E+00		1,02E+00
	4,12E-02	1,15E+00		1,12E+00		1,05E+00		1,01E+00
	5,97E-02	1,13E+00		1,10E+00		1,04E+00		9,97E-01
	7,83E-02	1,11E+00		1,08E+00		1,02E+00		9,79E-01
	9,69E-02	1,08E+00		1,05E+00		9,94E-01		9,56E-01
	1,16E-01	1,05E+00		1,02E+00		9,65E-01		9,29E-01
	1,34E-01	1,01E+00		9,84E-01		9,32E-01		8,99E-01
	1,53E-01	9,69E-01		9,45E-01		8,96E-01		8,64E-01
	1,71E-01	9,25E-01		9,02E-01		8,56E-01		8,27E-01
	1,90E-01	8,77E-01		8,56E-01		8,14E-01		7,86E-01
	2,08E-01	8,27E-01		8,07E-01		7,68E-01		7,42E-01
	2,27E-01	7,74E-01		7,56E-01		7,19E-01		6,96E-01
	2,46E-01	7,18E-01		7,02E-01		6,68E-01		6,47E-01
	2,64E-01	6,61E-01		6,45E-01		6,15E-01		5,95E-01
	2,83E-01	6,01E-01		5,87E-01		5,60E-01		5,42E-01
	3,01E-01	5,39E-01		5,26E-01		5,02E-01		4,86E-01
	3,20E-01	4,75E-01		4,64E-01		4,43E-01		4,29E-01
	3,38E-01	4,10E-01		4,01E-01		3,83E-01		3,71E-01
	3,57E-01	3,44E-01		3,36E-01		3,21E-01		3,11E-01
	3,76E-01	2,76E-01		2,70E-01		2,58E-01		2,50E-01
	3,94E-01	2,08E-01		2,03E-01		1,94E-01		1,88E-01
	4,13E-01	1,39E-01		1,36E-01		1,30E-01		1,26E-01
	4,31E-01	6,96E-02		6,81E-02		6,50E-02		6,31E-02
	4,50E-01	3,63E-05		4,12E-05		6,55E-05		4,58E-34

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

120°			150°		180°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim
part1	-4,50E-01	1,57E-34		2,01E-34		2,01E-34
	-4,31E-01	6,23E-02		6,21E-02		6,21E-02
	-4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	-3,94E-01	1,86E-01		1,85E-01		1,85E-01
	-3,76E-01	2,47E-01		2,46E-01		2,46E-01
	-3,57E-01	3,07E-01		3,06E-01		3,06E-01
	-3,38E-01	3,66E-01		3,65E-01		3,65E-01
	-3,20E-01	4,24E-01		4,23E-01		4,22E-01
	-3,01E-01	4,80E-01		4,79E-01		4,79E-01
	-2,83E-01	5,35E-01		5,33E-01		5,33E-01
	-2,64E-01	5,88E-01		5,86E-01		5,86E-01
	-2,46E-01	6,38E-01		6,36E-01		6,36E-01
	-2,27E-01	6,87E-01		6,84E-01		6,84E-01
	-2,08E-01	7,32E-01		7,30E-01		7,30E-01
	-1,90E-01	7,75E-01		7,73E-01		7,72E-01
	-1,71E-01	8,15E-01		8,13E-01		8,12E-01
	-1,53E-01	8,52E-01		8,49E-01		8,49E-01
	-1,34E-01	8,86E-01		8,82E-01		8,82E-01
	-1,16E-01	9,16E-01		9,12E-01		9,12E-01
	-9,69E-02	9,42E-01		9,38E-01		9,38E-01
	-7,83E-02	9,64E-01		9,60E-01		9,59E-01
	-5,97E-02	9,82E-01		9,77E-01		9,77E-01
	-4,12E-02	9,95E-01		9,91E-01		9,90E-01
	-2,26E-02	1,00E+00		9,99E-01		9,99E-01
	-4,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-2,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-1,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-6,67E-04	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	-3,33E-04	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	0,00E+00	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
part2	0,00E+00	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-04	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	6,67E-04	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00

Estudio numérico del mecanismo de apertura-cierre de un eje rotatorio fisurado

120°			150°		180°	
	z	yr adim		yr adim		yr adim
	1,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	1,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,33E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	3,67E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	4,00E-03	1,01E+00		1,00E+00		1,00E+00
	2,26E-02	1,00E+00		9,99E-01		9,99E-01
	4,12E-02	9,95E-01		9,91E-01		9,90E-01
	5,97E-02	9,82E-01		9,77E-01		9,77E-01
	7,83E-02	9,64E-01		9,60E-01		9,59E-01
	9,69E-02	9,42E-01		9,38E-01		9,38E-01
	1,16E-01	9,16E-01		9,12E-01		9,12E-01
	1,34E-01	8,86E-01		8,82E-01		8,82E-01
	1,53E-01	8,52E-01		8,49E-01		8,49E-01
	1,71E-01	8,15E-01		8,13E-01		8,12E-01
	1,90E-01	7,75E-01		7,73E-01		7,72E-01
	2,08E-01	7,32E-01		7,30E-01		7,30E-01
	2,27E-01	6,87E-01		6,84E-01		6,84E-01
	2,46E-01	6,38E-01		6,36E-01		6,36E-01
	2,64E-01	5,88E-01		5,86E-01		5,86E-01
	2,83E-01	5,35E-01		5,33E-01		5,33E-01
	3,01E-01	4,80E-01		4,79E-01		4,79E-01
	3,20E-01	4,24E-01		4,23E-01		4,22E-01
	3,38E-01	3,66E-01		3,65E-01		3,65E-01
	3,57E-01	3,07E-01		3,06E-01		3,06E-01
	3,76E-01	2,47E-01		2,46E-01		2,46E-01
	3,94E-01	1,86E-01		1,85E-01		1,85E-01
	4,13E-01	1,24E-01		1,24E-01		1,24E-01
	4,31E-01	6,23E-02		6,21E-02		6,21E-02
	4,50E-01	1,70E-34		2,26E-34		2,01E-34