



**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

DPTO. TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES

**TESIS DOCTORAL**

**Algoritmos para la reducción de los picos de potencia en los  
sistemas OFDM**

Autora: **MARTHA CECILIA PAREDES PAREDES**

Directora: **Dra. MARÍA JULIA FERNÁNDEZ-GETINO GARCÍA**

*Leganés, diciembre 2014*



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR  
DPTO. TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES

**TESIS DOCTORAL**

**Algoritmos para la reducción de los picos de potencia en los  
sistemas OFDM**

Autora: MARTHA CECILIA PAREDES PAREDES

Directora: Dra. MARÍA JULIA FERNÁNDEZ-GETINO GARCÍA

El tribunal nombrado para juzgar la Tesis arriba indicada, compuesto por los siguientes  
Doctores:

Presidente: \_\_\_\_\_

Secretario: \_\_\_\_\_

Vocal: \_\_\_\_\_

acuerdan otorgarle la

Calificación: \_\_\_\_\_

En Leganés, a \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2014.



La modulación OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) es una técnica de transmisión multiportadora, que debido a sus grandes ventajas se utiliza en numerosos estándares de comunicaciones de banda ancha. Sin embargo, uno de los principales inconvenientes que presenta la modulación OFDM, en el lado transmisor, es la presencia ocasional de grandes picos en su potencia instantánea con respecto a su potencia media, conocido en la literatura como el problema de la PAPR (*Peak-to-Average Power Ratio*) de los sistemas OFDM.

Al pasar la señal con PAPR elevada por el amplificador de alta potencia (HPA - *High Power Amplifier*) se produce saturación del dispositivo, provocando radiación fuera de banda, que afecta a las bandas adyacentes, y radiación dentro de banda, que produce rotación, atenuación y desplazamiento de la señal, provocando un incremento en la tasa de error de bit (BER - *Bit Error Rate*). Para contrarrestar estos efectos, se debe reducir la PAPR de la señal OFDM transmitida con algún tipo de manipulación en la señal.

Una de las técnicas de reducción de la PAPR más prometedoras es la técnica CE (*Constellation Extension*), que mueve inteligentemente ciertos puntos externos de la constelación del símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia, de tal forma que la señal en el dominio del tiempo tenga una PAPR menor. La extensión de la constelación de esta forma no afecta a la distancia mínima de la constelación y, consecuentemente, no se experimenta degradación en la BER del sistema. Además, no hay pérdida en la tasa de transmisión de datos porque no se requiere la transmisión de información de control. Sin embargo, se introduce un incremento de la energía por símbolo.

El objetivo principal de esta Tesis es proponer varios algoritmos de reducción de la PAPR, basados en técnicas CE. Por un lado, como primer objetivo (capítulo 4) se presentan algoritmos eficientes en energía, que se consiguen al combinar adecuadamente un esquema CE, basado en métrica, con secuencias piloto. Dicha combinación deja tres posibles arquitecturas de implementación dependiendo del orden en que se usa cada algoritmo. Se determina la arquitectura que proporciona un compromiso adecuado entre reducción de la PAPR y complejidad, esta última medida en términos del número de ciclos adicionales del procesador (que se traducen en energía consumida) que se requieren para procesar la reducción de la PAPR. Además, se demuestra que las tres arquitecturas propuestas demandan una energía por símbolo menor que otras técnicas CE, si se insertan adecuadamente las secuencias piloto en el símbolo OFDM

Por otro lado, como segundo objetivo se presentan los esquemas de reducción de la PAPR, basados en técnicas CE, que se formulan como problemas de optimización (capítulo 5). Se propone una solución óptima, en términos de reducción de la PAPR, llamada algoritmo GBDCE (*Generalized Benders Decomposition for Constellation Extension*), el cual se plantea como un problema no lineal mixto-entero (MINLP - *Mixed Integer Non-Linear Programming*) y que sirve como cota inferior de referencia para comparar con otras técnicas CE. Además, se proponen los algoritmos subóptimos: BBCE (*Branch-and-Bound for Constellation Extension*) que se formula como un problema de programación entera, y DCE (*Dynamic Constellation Extension*) que combina un esquema BBCE con un algoritmo basado en métrica. El objetivo de ambos algoritmos subóptimos es reducir la complejidad del algoritmo óptimo.

OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) modulation is a multicarrier transmission technique that, due to its important advantages, has been widely used in many wideband communication standards. However, one of the major drawbacks of the transmitted OFDM signal is the infrequent high peak power with respect to average power, which is known in the literature as the PAPR (Peak-to-Average Power Ratio) problem in OFDM systems.

When the signal with high PAPR passes through an HPA (High Power Amplifier), it suffers from saturation, which causes both out-of-band radiation, that affects the adjacent channels, and in-band radiation, which produces rotation, attenuation and shift of the signal, that increases the BER (Bit Error Rate). In order to address the PAPR problem, the OFDM signal must be manipulated.

One of the most promising PAPR techniques is CE (Constellation Extension), that intelligently moves certain outer constellation points of the OFDM signal in the frequency domain, in such way that the OFDM signal in the time domain has a lower PAPR. The constellation extension in this way does not affect the minimum distance of the constellation, and BER degradation is not consequently experienced by the system. Moreover, there is no user's data rate loss because these methods do not require side information. Nevertheless, they introduce an increase in the energy per symbol.

The main aim of this Thesis is to propose several PAPR reduction algorithms, based on CE techniques. On one side, the first objective (chapter 4) is to present an energy efficient algorithm, which consists in the adequate combination of a metric-based CE technique with

pilot sequences. The combination allows three possible implementation architectures, depending on the order of use of the algorithms. It has been determined the architecture that provides an adequate trade-off between PAPR reduction and complexity, the latter measured in number of additional CPU cycles (which translates into energy consumption) needed to perform the PAPR reduction. Moreover, the three proposed architectures require less energy per symbol than other CE techniques, if the pilot sequences are appropriately inserted in the OFDM symbol.

On the other side, the second objective is to present CE based algorithms, which are formulated as an optimization problem (chapter 5). The optimal solution, in terms of PAPR reduction is called GBDCE (Generalized Benders Decomposition for Constellation Extension) algorithm. GBDCE is formulated as a MINLP (Mixed Integer Non-Linear Programming) problem, and it turns out to be a lower bound for CE schemes and provides a benchmark to compare with other CE technique. Moreover, two suboptimal algorithms are proposed: BBCE (Branch-and-Bound for Constellation Extension), which is formulated as Integer Programming, and DCE (Dynamic Constellation Extension), that combines a BBCE scheme with a metric-based algorithm. The objective of both suboptimal algorithms is to reduce the GBDCE complexity.



DEDICATORIA

*A mi familia.*

*A Diego Rafael, que con su inocencia llena de luz cada instante de mi vida.*

*A Diego, por su apoyo incondicional en todos los aspectos de nuestra vida juntos.*

*A mis padres y mis hermanos, porque me han apoyado todos los días en esta aventura lejos  
de casa.*



## AGRADECIMIENTOS

Para mí es un verdadero placer utilizar este espacio para expresar mis más sinceros agradecimientos a las personas e instituciones que de forma directa e indirecta han hecho posible que esta Tesis Doctoral llegue a un feliz término.

A la Dra. María Julia Fernández-Getino García, como directora de esta Tesis le debo de forma directa la realización de este trabajo. Quiero darle las gracias por su aportación invaluable, su capacidad para guiar las ideas por un camino acertado y la formación de investigadora que me ha proporcionado. Además, por la confianza que ha depositado en mí, la libertad que siempre me ha concedido, su preocupación sincera por mí, mi familia y mi trabajo, así como su disposición y su tiempo siempre que se lo he requerido.

Al Dr. Joaquín Escudero Garzás por su importante aportación y su colaboración en la realización de esta Tesis. No cabe duda que su participación ha enriquecido el trabajo realizado, además de su disposición y todo su soporte profesional para alcanzar los objetivos.

Al Grupo de Comunicaciones del Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones, y en especial a mis compañeros del laboratorio que me brindaron su ayuda en las labores del día a día.

Por supuesto, un agradecimiento profundo y sentido va para mi familia. Sin su apoyo, colaboración e inspiración habría sido imposible llevar a cabo esta ardua tarea. A Diego, por su apoyo incondicional y sobretodo porque dejó muchas cosas en Ecuador para embarcarse en esta aventura de vivir muy lejos de casa. A mis padres: Edmundo y Jeaneth, a mis hermanos: Marcela, Santiago y Luis ya que su ayuda, apoyo y confianza son fundamentales en todos los

## *AGRADECIMIENTOS*

---

aspectos de mi vida, especialmente estando lejos de casa.

A mis amigos que han compartido conmigo en el plano personal esta estancia en la ciudad de Madrid y también a mis amigos en Ecuador, que en la distancia me han brindado su apoyo y han estado pendientes de mí y mi familia.

Finalmente, debo agradecer la financiación a la Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación (SENESCYT) de Ecuador, Fundación Carolina (España) y al Proyecto Nacional de España GRE3N-SYST (TEC2011-29006-C03-03). A la SENESCYT por haber financiado la mayor parte de mis estudios de Doctorado en Multimedia y Comunicaciones, otorgándome una beca de la convocatoria del programa de becas para el fortalecimiento y desarrollo del talento humano en Ciencia y Tecnología 2010. A la Fundación Carolina por la financiación para realizar el Máster Oficial en Multimedia y Comunicaciones, a través de una beca de la convocatoria 2008 - 2009, de donde surgieron las primeras ideas.

## ÍNDICE GENERAL

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Índice general</b>	<b>XIV</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>XV</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>XXI</b>
<b>Acrónimos y abreviaturas</b>	<b>XXIII</b>
<b>Notación</b>	<b>XXIX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación y objetivos . . . . .	1
1.2. Estructura y contribuciones científicas asociadas a la Tesis . . . . .	5
<b>2. Principios de OFDM</b>	<b>9</b>
2.1. Revisión histórica . . . . .	10
2.2. Modulación multiportadora . . . . .	12
2.3. Modulador y demodulador OFDM en tiempo continuo . . . . .	16

2.3.1. Modulador OFDM . . . . .	16
2.3.2. Prefijo cíclico . . . . .	19
2.3.3. Demodulador OFDM . . . . .	21
2.4. Modulador y demodulador OFDM en tiempo discreto . . . . .	22
2.5. Limitaciones de OFDM . . . . .	25
2.5.1. Sincronización tiempo-frecuencia . . . . .	26
2.5.2. PAPR elevada . . . . .	28
2.5.2.1. Fluctuaciones de la envolvente de la señal OFDM . . . . .	28
2.5.2.2. Estadística de la señal OFDM . . . . .	31
2.6. Estandarización . . . . .	32
<b>3. Estado del arte en reducción de la PAPR</b>	<b>37</b>
3.1. Métricas de cuantificación de los picos de la señal OFDM . . . . .	37
3.1.1. PAPR ( <i>Peak-to-Average Power Ratio</i> ) . . . . .	38
3.1.1.1. PAPR de la señal paso banda . . . . .	38
3.1.1.2. PAPR y sobremuestreo . . . . .	39
3.1.1.3. Función de distribución de la PAPR . . . . .	40
3.1.2. CF ( <i>Crest Factor</i> ) . . . . .	41
3.1.3. CM ( <i>Cubic Metric</i> ) . . . . .	42
3.2. Clasificación de las técnicas de reducción de la PAPR . . . . .	43
3.2.1. Técnicas con distorsión de la señal . . . . .	43
3.2.1.1. Técnicas CAF . . . . .	43
3.2.1.2. Técnicas PW . . . . .	46
3.2.1.3. Técnicas CTs . . . . .	48
3.2.2. Técnicas sin distorsión de la señal . . . . .	49
3.2.2.1. Con información adicional . . . . .	50
3.2.2.2. Sin información adicional . . . . .	58
3.3. Técnicas CE ( <i>Constellation Extension</i> ) . . . . .	64
3.3.1. ACE ( <i>Active Constellation Extension</i> ) . . . . .	65
3.3.2. Basadas en métrica . . . . .	66
3.3.3. ACE-IPM . . . . .	67

3.4. Comparativa de las diferentes técnicas . . . . .	68
<b>4. Técnicas de extensión de la constelación basadas en métrica combinada con pilotos</b>	<b>71</b>
4.1. LC-OPS ( <i>Low-Complex Orthogonal Pilot Sequences</i> ) . . . . .	72
4.2. Arquitecturas propuestas . . . . .	74
4.2.1. Esquema A: OPS-SAP . . . . .	75
4.2.2. Esquema B: SAP-OPS . . . . .	76
4.2.3. Esquema C: SOPP . . . . .	80
4.3. Análisis de la energía transmitida . . . . .	80
4.4. Análisis del coste de energía computacional . . . . .	83
4.4.1. Operaciones adicionales totales . . . . .	84
4.4.2. Ciclos adicionales totales . . . . .	89
4.4.3. Coste de energía computacional . . . . .	91
4.5. Evaluación y resultados . . . . .	92
4.5.1. Reducción de la PAPR . . . . .	92
4.5.2. Energía transmitida . . . . .	98
4.5.3. Coste de energía computacional . . . . .	100
<b>5. Algoritmos de extensión de la constelación mediante optimización</b>	<b>105</b>
5.1. Formulación del problema . . . . .	106
5.1.1. Minimización de la PAPR como un problema mixto-entero . . . . .	108
5.2. Algoritmo óptimo GBDCE . . . . .	110
5.2.1. Convergencia del algoritmo GBDCE . . . . .	113
5.3. Algoritmo subóptimo BBCE . . . . .	114
5.4. Análisis de la complejidad de GBDCE y BBCE . . . . .	115
5.4.1. Análisis del tiempo de ejecución . . . . .	116
5.4.2. Complejidad computacional . . . . .	118
5.5. Algoritmo subóptimo DCE . . . . .	120
5.5.1. Diseño práctico del algoritmo DCE . . . . .	123
5.5.1.1. Diseño basado en restricciones de tiempo . . . . .	125
5.5.1.2. Diseño basado en rendimiento . . . . .	126

5.5.2. Análisis de la complejidad de DCE . . . . .	127
5.6. Evaluación y resultados . . . . .	128
5.6.1. Evaluación de los algoritmos GBDCE y BBCE . . . . .	129
5.6.2. Evaluación del algoritmo DCE . . . . .	136
5.6.2.1. Diseño basado en restricciones de tiempo . . . . .	137
5.6.2.2. Diseño basado en rendimiento . . . . .	139
<b>6. Conclusiones y líneas futuras de investigación</b>	<b>149</b>
6.1. Conclusiones generales . . . . .	149
6.2. Líneas futuras de investigación . . . . .	152
<b>APÉNDICES</b>	<b>155</b>
<b>A. Amplificadores de alta potencia</b>	<b>157</b>
A.1. SSPA . . . . .	157
A.2. TWTA . . . . .	158
<b>B. Métodos de optimización</b>	<b>161</b>
B.1. Programación entera . . . . .	161
B.1.1. Método BB ( <i>Branch-and-Bound</i> ) . . . . .	162
B.2. Programación no lineal mixta-entera . . . . .	162
B.2.1. Método GBD ( <i>Generalized Benders Decomposition</i> ) . . . . .	163
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>167</b>



## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Concepto de partición del canal, donde los símbolos son transmitidos simultáneamente usando varias subportadoras . . . . .	12
2.2. Estructura básica de un sistema de comunicación multiportadora . . . . .	14
2.3. Modulador OFDM en tiempo continuo . . . . .	18
2.4. Espectro de las funciones base . . . . .	19
2.5. Prefijo Cíclico, donde las últimas muestras son copiadas al inicio del símbolo OFDM . . . . .	20
2.6. Sistema OFDM en tiempo continuo como un conjunto de canales gaussianos paralelos, llamado modelo multiplicativo complejo . . . . .	23
2.7. Transmisor y receptor OFDM en tiempo discreto implementado a través de operaciones FFT . . . . .	25
2.8. Características típicas de entrada-salida de un HPA . . . . .	30
2.9. PSD de la señal OFDM con $N = 256$ subportadoras y modulación 16-QAM, se consideran los valores de $IBO = \{5, 9, 11\}$ [dB]. . . . .	31
2.10. Parte real, imaginaria y la magnitud con sus correspondientes distribuciones para un sistema OFDM con $N = 16$ subportadoras y modulación QPSK . . . . .	33
3.1. CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con diferente número de subportadoras . . . . .	42
3.2. Clasificación de las técnicas de reducción de la PAPR . . . . .	44

3.3. CCDF y BER de la señal OFDM con $N = 128$ subportadoras y modulación QPSK con técnica CAF . . . . .	47
3.4. Diagrama de bloques del transmisor OFDM con la técnica PTS . . . . .	52
3.5. CCDF de la PAPR con el esquema PTS para un sistema OFDM con $N = 256$ subportadoras y modulación 16-QAM . . . . .	54
3.6. Diagrama de bloques del transmisor OFDM con la técnica SLM . . . . .	54
3.7. CCDF de la PAPR con técnica SLM para un sistema OFDM con $N = 256$ subportadoras y modulación QPSK . . . . .	56
3.8. Regiones de extensión permitidas para la técnica CE . . . . .	61
3.9. CCDF de la PAPR con técnica OPS para un sistema OFDM con $N = 256$ subportadoras y modulación 16-QAM . . . . .	65
3.10. CCDF de la PAPR con técnica SAP para un sistema OFDM con $N = 128$ subportadoras y modulación 16-QAM . . . . .	68
4.1. Diagrama de bloques de la técnica OPS . . . . .	73
4.2. Diagrama de bloques de la técnica LC-OPS . . . . .	74
4.3. Diagrama de bloques de la técnica OPS-SAP . . . . .	78
4.4. Diagrama de bloques de la técnica SAP-OPS . . . . .	79
4.5. Diagrama de bloques de la técnica SOPP . . . . .	82
4.6. CCDF de la PAPR del esquema OPS-SAP para un sistema OFDM con $N = 64$ subportadoras con $M = 8$ y $N_p = 8$ ( $N_f = 8$ ). . . . .	94
4.7. CCDF de la PAPR del esquema OPS-SAP para un sistema OFDM con $N = 256$ subportadoras con $M = 8$ y $N_p = 8$ ( $N_f = 32$ ). . . . .	94
4.8. CCDF de la PAPR del esquema OPS-SAP para un sistema OFDM con $N = 256$ subportadoras con $M = N_p$ y $N_p = 32$ ( $N_f = 8$ ). . . . .	95
4.9. CCDF de la PAPR del esquema SAP-OPS para un sistema OFDM con $N = 64$ subportadoras con $M = 8$ y $N_p = 8$ ( $N_f = 8$ ). . . . .	95
4.10. CCDF de la PAPR del esquema SAP-OPS para un sistema OFDM con $N = 256$ . con $M = 8$ y $N_p = 8$ ( $N_f = 32$ ). . . . .	96
4.11. CCDF de la PAPR del esquema SAP-OPS para un sistema OFDM con $N = 256$ con $M = 8$ y $N_p = 32$ ( $N_f = 8$ ). . . . .	97

4.12. CCDF de la PAPR del esquema SOPP para un sistema OFDM con $N = 64$ subportadoras, $M = 8$ y $N_p = 8$ ( $N_f = 8$ ). . . . .	97
4.13. CCDF de la PAPR del esquema SOPP para un sistema OFDM con $N = 256$ subportadoras, $M = 8$ y $N_p = 8$ ( $N_f = 32$ ). . . . .	98
4.14. CCDF de la PAPR del esquema SOPP para un sistema OFDM con $N = 256$ subportadoras, $M = N_p$ y $N_p = 32$ ( $N_f = 8$ ). . . . .	99
4.15. CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con $N = 64$ subportadoras. En la etapa LC-OPS con parámetros $M = 8$ y $N_p = 8$ ( $N_f = 8$ ), y para la etapa SAP $\{\alpha = 1.55, L = 26\}$ y $\{\alpha = 1.3, L = 40\}$ . . . . .	100
4.16. CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con $N = 256$ subportadoras, y con $M = 8$ y $N_p = 8$ ( $N_f = 32$ ) para la etapa LC-OPS y para la etapa SAP $\{\alpha = 1.55, L = 26\}$ y $\{\alpha = 1.3, L = 40\}$ . . . . .	101
4.17. CCDF de la PAPR para la señal OFDM con $N = 256$ subportadoras y modulación QPSK, donde se han extendido $L = 40$ símbolos complejos tanto en SAP como en OPS-SAP. OPS-SAP con diferentes valores de $\alpha$ , $M = 8$ , $N_p = 16$ .102	
4.18. Para un valor fijo de $\alpha$ en la técnica SAP (leyenda), la diferencia entre el rendimiento, en términos de reducción de la PAPR, de OPS-SAP y SAP dado en [dB] (eje y) para un valor variable de $\alpha$ en OPS-SAP (eje x). Valores negativos de $\Delta$ son descartados. El sistema OFDM analizado corresponde a $N = 256$ subportadoras con $L = 40$ . . . . .	102
4.19. Coste de energía computacional para cada técnica. . . . .	103
5.1. Regiones de extensión permitida en una modulación 16-QAM. . . . .	110
5.2. Diagrama de bloques del algoritmo óptimo de reducción de la PAPR: GBDCE	111
5.3. Convergencia del algoritmo GBDCE: diferencia entre los límites superior e inferior para cada iteración para sistemas OFDM con $N = \{16, 32, 64\}$ subportadoras y modulación QPSK. . . . .	113
5.4. Diagrama de bloques del algoritmo subóptimo BBCE. . . . .	115
5.5. Distribución Rayleigh del tiempo de ejecución de las técnicas GBDCE y BBCE para un sistema OFDM con $N = 16$ subportadoras y modulación QPSK (a través de simulaciones en Matlab). . . . .	117

5.6. Distribución Rayleigh del tiempo de ejecución de la técnica GBDCE para un sistema OFDM con  $N = 32$  subportadoras (a través de simulaciones en Matlab).117

5.7. Diagrama de bloques del esquema DCE, donde se considera que las  $Q$  ramas del algoritmo BBCE están implícitas en la caja de la rama BBCE. . . . . 123

5.8. Distribución Rayleigh del tiempo de ejecución del algoritmo BBCE, donde el valor que tome  $t_\gamma$  determina las prestaciones del sistema. Si  $t_\gamma$  se mueve cerca del cero, significa que DCE conmutará con mayor frecuencia a la rama SAP. . 124

5.9. CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 16$  suportadoras y modulación QPSK. Los parámetros del esquema SAP son  $\{L = 10, \alpha = 2\}$ . BBCE con  $\delta = \{0.05, 0.1, 0.25\}$ . . . . . 130

5.10. CCDF de la PAPR para un sistema OFDM  $N = 32$  subportadoras. SAP con parámetros  $\{L = 10, \alpha = 2\}$  y  $\{L = 26, \alpha = 1.55\}$ , BBCE con  $\delta = 0.25$ . . . . 131

5.11. CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras. SAP con  $\{L = 10, \alpha = 2\}$ ,  $\{L = 26, \alpha = 1.55\}$  y  $\{L = 40, \alpha = 1.3\}$ . BBCE con  $\delta = 0.25$ . . . . . 132

5.12. CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 128$ . SAP con  $\{L = 10, \alpha = 2\}$ ,  $\{L = 26, \alpha = 1.55\}$  y  $\{L = 40, \alpha = 1.3\}$ . BBCE con  $\delta = 0.25$ . . . . . 133

5.13. CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 256$  y modulación QPSK. SAP con los parámetros  $\{L = 10, \alpha = 2\}$ ,  $\{L = 26, \alpha = 1.55\}$  y  $\{L = 40, \alpha = 1.3\}$ . BBCE con  $\delta = 0.25$ . . . . . 134

5.14. PSD a la salida del SSPA con IBO= $\{5, 8, 15\}$  [dB] para el esquema BBCE con  $N = 64$  subportadoras,  $J = 4$  y  $\delta = 0.25$ . . . . . 135

5.15. BER del esquema BBCE con  $N = 64$  subportadoras,  $J = 4$  y  $\delta = 0.25$  sobre un canal AWGN en presencia de un SSPA con IBO= $\{5, 8, 15\}$  [dB]. . . . . 141

5.16. Comparación con las técnicas CSS. BBCE con  $\delta = 0.25$ , EVM-IPM y EVM-SDR con una tolerancia en EVM de  $-25$  [dB] y la potencia de las subportadoras libres es 0.15 [Wang et al., 2011]. . . . . 142

5.17. Porcentaje de ahorro del tiempo consumido  $T_c$  requerido para sistemas OFDM con  $N = \{16, 32, 64\}$  subportadoras y modulación QPSK para diferentes valores de  $t_\gamma$ . . . . . 143

5.18. CCDF de la PAPR con el algoritmo DCE para un sistema OFDM con $N = 16$ subportadoras y modulación QPSK. Se considera para DCE $t_\gamma = \{1.5, 2.59, 10, 40\}$ [s].	143
5.19. CCDF de la PAPR con el algoritmo DCE para un sistema OFDM con $N = 64$ subportadoras. Para evaluar el algoritmo DCE se proporciona un conjunto de valores de $t_\gamma$ .	144
5.20. CCDF de la PAPR a través del algoritmo DCE para un sistema OFDM con $N = 16$ subportadoras y modulación QPSK.	145
5.21. CCDF de la PAPR a través del algoritmo DCE para un sistema OFDM con $N = 32$ subportadoras y modulación QPSK.	145
5.22. CCDF de la PAPR a través del algoritmo DCE para un sistema OFDM con $N = 64$ subportadoras. Se evalúa el algoritmo DCE para diferentes valores de $p$ .	146
5.23. CCDF de la distribución Rayleigh del tiempo de ejecución para sistemas OFDM con $N = \{16, 32, 64\}$ subportadoras y modulación QPSK.	147
A.1. Característica AM/AM para un SSPA con diferentes valores de $s$ .	158
A.2. Características AM/AM y AM/PM para TWTA.	159



3.1. Comparación de las técnicas de reducción de la PAPR en los sistemas OFDM	70
4.1. Parámetros del DSP de coma fija . . . . .	84
4.2. Operaciones adicionales en el transmisor para los algoritmos: SAP, LC-OPS y BSLM . . . . .	86
4.3. Operaciones adicionales en el transmisor para las arquitecturas: A, B y C . .	87
4.4. Operaciones adicionales en el receptor para los algoritmos: SAP, LC-OPS y BSLM . . . . .	88
4.5. Operaciones adicionales en el receptor para las arquitecturas: A, B y C . . . .	88
5.1. Parámetros de la distribución Rayleigh para un sistema OFDM con $N =$ $\{16, 32\}$ subportadoras . . . . .	118
5.2. Análisis del tiempo consumido ( $T_c$ ) cuando $t_\gamma$ es fijo, para $N = 16$ subportadoras	138
5.3. Análisis de $t_\gamma$ en función la probabilidad dada para la rama BBCE ( $p$ ) . . . .	139





## ACRÓNIMOS Y ABREVIACIONES

A lo largo de esta Tesis se mantendrán en su forma original aquellos acrónimos derivados de una expresión inglesa cuyo uso se encuentre extendido en la literatura científica, y para estos términos se ha empleado caracteres en cursiva. Por otro lado, aunque ciertos acrónimos son traducidos, se ha optado por acompañarlos entre paréntesis del acrónimo original, también en cursiva

### Acrónimos

**2D-PSAM**    *Two-Dimensional Pilot-Symbol Assisted Modulation*

**ACE**        *Active Constellation Extension*

**ANSI**        *American National Standards Institute*

**AWGN**       *Additive White Gaussian Noise*

**BB**           *Branch-and-Bound*

**BBCE**       *Branch-and-Bound for Constellation Extension*

**BCH**        *Bose-Ray CHaudhuri*

**BER**        *Bit Error Rate*

**BRAN**       *Broadband Radio Access Network*

**BSLM**       *Blind - SeLected Mapping*

<b>CAF</b>	<i>Clipping and Filtering</i>
<b>CBC</b>	<i>Complementary Block Codes</i>
<b>CCDF</b>	<i>Cumulative Complementary Distribution Function</i>
<b>CCS</b>	<i>Constrained Constellation Shapping</i>
<b>CDF</b>	<i>Cumulative Distribution Function</i>
<b>CE</b>	<i>Constellation Extension</i>
<b>CF</b>	Factor de Cresta ( <i>Crest Factor</i> )
<b>CFO</b>	<i>Carrier Frequency Offset</i>
<b>CM</b>	Métrica Cúbica ( <i>Cubic Metric</i> )
<b>CP</b>	Prefijo Cíclico ( <i>Cyclic Prefix</i> )
<b>CS</b>	<i>Constellation Shapping</i>
<b>CSP</b>	<i>Complex Symbol Predistortion</i>
<b>CSS</b>	<i>Constrained Constellation Shapping</i>
<b>CTs</b>	<i>Companding Transforms</i>
<b>DAB</b>	<i>Digital Audio Broadcasting</i>
<b>DAC</b>	<i>Digital-to-Analog Converter</i>
<b>DCE</b>	<i>Dynamic Constellation Extension</i>
<b>DFT</b>	Transformada Discreta de Fourier ( <i>Discrete Fourier Transform</i> )
<b>DHT</b>	<i>Discrete Hartley Transform</i>
<b>DMB-TH</b>	<i>Terrestrial Digital Multimedia Television and Handheld Broadcasting</i>
<b>DMT</b>	Modulación Multitono Discreto ( <i>Discrete Multitone</i> )
<b>DSL</b>	<i>Digital Subscriber Line</i>
<b>DSP</b>	<i>Digital Signal Processor</i>
<b>DVB-H</b>	<i>Digital Video Broadcasting - Handheld</i>
<b>DVB-T</b>	<i>Digital Video Broadcasting - Terrestrial</i>
<b>DWMT</b>	<i>Vector Discrete Wavelet Multitone modulation</i>
<b>ETSI</b>	<i>European Telecommunications Standards Institute</i>
<b>EVM</b>	<i>Error Vector Magnitude</i>

## ACRÓNIMOS Y ABREVIATURAS

---

<b>FDM</b>	Multiplexación por División de Frecuencias ( <i>Frequency Division Multiplexing</i> )
<b>FIR</b>	Respuesta al Impulso Finita ( <i>Finite Impulse Response</i> )
<b>GBD</b>	<i>Generalized Benders Decomposition</i>
<b>GBDCE</b>	<i>Generalized Benders Decomposition for Constellation Extension</i>
<b>GCS</b>	Secuencias Complementarias Golay ( <i>Golay Complementay Sequences</i> )
<b>GI</b>	<i>Guard Interval</i>
<b>G-IPM</b>	<i>Generalized IPM-based method</i>
<b>HF</b>	<i>High Frequency</i>
<b>HPA</b>	<i>High Power Amplifier</i>
<b>IBO</b>	<i>Input Back-Off</i>
<b>ICI</b>	<i>Inter Carrier Interference</i>
<b>IDFT</b>	Trasformada Discreta de Fourier ( <i>Inverse Discrete Fourier Transform</i> )
<b>IEEE</b>	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
<b>IPM</b>	<i>Interior Point Method</i>
<b>ISI</b>	<i>Inter Symbol Interference</i>
<b>LAST</b>	<i>Linear Asymmetrical Transform</i>
<b>LBC</b>	Códigos Bloque Lineales ( <i>Linear Block Codes</i> )
<b>LC-OPS</b>	<i>Low Complex - Ortogonal Pilot Sequences</i>
<b>LDPC</b>	<i>Low Density Parity Check</i>
<b>LP</b>	Programación Lineal ( <i>Linear Programming</i> )
<b>LST</b>	<i>Linear Symmetrical Transform</i>
<b>LTE</b>	<i>Long Term Evolution</i>
<b>LTI</b>	<i>Linear and Time Invariant</i>
<b>MAP</b>	<i>Multilevel Amplitude Predistortion</i>
<b>MBWA</b>	<i>Mobile Broadband Wireless Access</i>

<b>MIMO</b>	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
<b>MINLP</b>	Programación No Lineal Mixta-Entera ( <i>Mixed Integer Non-Linear Programming</i> )
<b>MIT</b>	<i>Massachusetts Institute of Technology</i>
<b>ML</b>	Máxima verosimilitud ( <i>Maximum Likelihood</i> )
<b>NLCT</b>	<i>NonLinear Companding Transforms</i>
<b>OFDMA</b>	<i>Orthogonal Frequency Division Multiple Access</i>
<b>OFDM</b>	<i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i>
<b>OPS</b>	<i>Orthogonal Pilot Sequences</i>
<b>OQAM</b>	<i>Offset Quadrature Amplitude Modulation</i>
<b>PAPR</b>	<i>Peak-to-Average Power Ratio</i>
<b>PDF</b>	<i>Probability Distribution Function</i>
<b>POCS</b>	<i>Projection onto Convex Sets</i>
<b>PRC</b>	<i>Peak Reduction Carriers</i>
<b>PSD</b>	<i>Power Spectral Density</i>
<b>PTS</b>	<i>Partial Transmit Sequences</i>
<b>PW</b>	<i>Peak Windowing</i>
<b>QAM</b>	<i>Quadrature Amplitude Modulation</i>
<b>QCQP</b>	<i>Quadratically Constrained Quadratic Program</i>
<b>QP</b>	<i>Quadratic Program</i>
<b>SAP</b>	<i>Simple Amplitude Predistortion</i>
<b>SBC</b>	<i>Sub-Block Coding</i>
<b>SC-FDMA</b>	<i>Single Carrier - Frequency Division Multiple Access</i>
<b>SDR</b>	<i>SemiDefinite Relaxation</i>
<b>SGP</b>	<i>Smart Gradient Project</i>
<b>SLM</b>	<i>SeLected Mapping</i>
<b>SNR</b>	<i>Signal-to-Noise Ratio</i>

## ACRÓNIMOS Y ABREVIATURAS

---

<b>SOCP</b>	<i>Second Order Cone Program</i>
<b>SOPP</b>	<i>SAP and LC-OPC Parallel</i>
<b>SSPA</b>	<i>Solid State Power Amplifier</i>
<b>STO</b>	<i>Symbol Time Offset</i>
<b>TC</b>	<i>Turbo Códigos (Turbo Codes)</i>
<b>TI</b>	<i>Tone Injection</i>
<b>TR</b>	<i>Tone Reservation</i>
<b>TWTA</b>	<i>Traveling Wave Tube Amplifier</i>
<b>UMB</b>	<i>Ultra Mobile Broadband</i>
<b>UWB</b>	<i>UltraWideBand</i>
<b>WiFi</b>	<i>Wireless Fidelity</i>
<b>WiMAX</b>	<i>Worldwide Interoperability for Microwave Access</i>
<b>WLAN</b>	<i>Wireless Local Area Network</i>
<b>WMAN</b>	<i>Wireless Metropolitan Area Network</i>
<b>WPAN</b>	<i>Wireless Personal Area Network</i>

## Abreviaturas

<b>ch.</b>	canal
<b>dB</b>	decibelios
<b>ec.</b>	ecuación
<b>fig.</b>	figura
<b>Hz.</b>	herzios
<b>i.i.d.</b>	independientes e idénticamente distribuidas
<b>W</b>	vatio ( <i>Watt</i> )
<b>s</b>	segundo
<b>s.t.</b>	sujeto a ( <i>subject to</i> )
<b>V</b>	voltio



Letras minúsculas denotan escalares, letras minúsculas en negrita denotan vectores columna, letras mayúsculas en negrita denotan matrices, letras con tipo caligráfico denotan conjuntos.

<b>A</b>	Matriz
<b>a</b>	Vector
<i>a</i>	Escalar
$\mathcal{A}$	Conjunto A
$ \cdot $	Valor absoluto ó cardinalidad de un conjunto
$\ \cdot\ $	Norma euclídea
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Producto escalar
$(\cdot)^T$	Transpuesto de una matriz o vector
$(\cdot)^H$	Transpuesto conjugado (hermítico) de una matriz o vector
IDFT{·}	Operación IDFT
$E\{\cdot\}$	Esperanza matemática
<i>k</i>	Índice de las subportadoras en el dominio de la frecuencia
<i>n</i>	Índice de las subportadoras en el dominio del tiempo
$\tilde{x}(k)$	Símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia sobre la subportadora <i>k</i> -ésima
$\tilde{x}'(k)$	Símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia modificado sobre la subportadora <i>k</i> -ésima
$x[n]$	Símbolo OFDM en el dominio del tiempo

$x'[n]$	Símbolo OFDM en el dominio del tiempo modificado
$\Re\{\cdot\}$	Parte real
$\Im\{\cdot\}$	Parte imaginaria
$\mathbb{R}$	Reales
$\mathbb{C}$	Complejos
$\mathbb{Z}$	Enteros



El objetivo principal de esta Tesis es buscar técnicas de reducción de la PAPR<sup>1</sup> (*Peak-to-Average Power Ratio*) en los sistemas OFDM<sup>2</sup> (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*). Con esta finalidad se derivarán algunos algoritmos basados en la extensión de cierto puntos externos de la constelación que forman el símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia de tal manera que la PAPR se reduzca. El presente capítulo muestra, por una parte las razones que motivan esta investigación, los objetivos a lograr, así como los antecedentes y trabajos previos relacionados con el problema aquí analizado. Por otra parte, se describe la estructura de esta Tesis y sus principales contribuciones.

## 1.1. Motivación y objetivos

La modulación OFDM es una técnica de transmisión multiportadora, que debido principalmente a sus grandes ventajas como son, la robustez frente al multitrayecto, sencillez en el receptor y su alta eficiencia espectral, es extensamente utilizada en varios estándares de comunicaciones de banda ancha, tales como la televisión (DVB-T - *Digital Video Broadcasting - Terrestrial*) y audio digital (DAB - *Digital Audio Broadcasting*), en comunicaciones inalámbricas como WiFi (*Wireless Fidelity*) y WiMAX (*Worldwide Interoperability for Mi-*

---

<sup>1</sup>El acrónimo PAPR, que se utiliza extensamente en la literatura, puede traducirse del inglés como Relación Potencia Pico - Potencia Promedio

<sup>2</sup>El acrónimo OFDM se traduce del inglés como Multiplexación por División en Frecuencia Ortogonal

*crowave Access*), en comunicaciones móviles como LTE (*Long Term Evolution*) y también es parte del conjunto de tecnologías de transmisión DSL (*Digital Subscriber Line*). En los últimos años, todo este conjunto de tecnologías han ido transformando la calidad de vida de la sociedad en general, ya que permiten la conexión de millones de personas en todo el mundo, ayudan al desarrollo del capital humano, mejoran la asistencia sanitaria, y además, permiten el uso de servicios multimedia a gran velocidad, entre otros. Sin embargo, uno de los principales inconvenientes que presenta la modulación OFDM en el lado transmisor es la presencia ocasional de grandes picos en su potencia instantánea con respecto a su potencia media, que se conoce en la literatura como el problema de la PAPR. Dicho problema se debe a que las subportadoras con idéntica fase podrían llegar a sumarse.

Al pasar la señal con PAPR elevada por el amplificador de alta potencia (HPA - *High Power Amplifier*) se produce saturación del dispositivo, provocando radiación fuera de banda, que afecta a las bandas adyacentes, y radiación dentro de banda, que resulta en rotación, atenuación y desplazamiento de la señal, provocando un incremento en la tasa de error de bit (BER - *Bit Error Rate*). Para contrarrestar estos efectos, la solución convencional es hacer trabajar al HPA por debajo de su punto de saturación, lo que se traduce en pérdidas en la eficiencia del terminal ó que dicho dispositivo tenga un margen dinámico mayor, que resulta en equipos de coste mayor. Por tanto, evitar que aparezca dicha radiación reduciendo la PAPR de la señal OFDM transmitida con algún tipo de manipulación en la señal es un campo de estudio importante.

En la literatura se ha discutido ampliamente la reducción de la PAPR a través de técnicas que podrían o no involucrar distorsión de la señal. La técnica más simple e intuitiva es Recorte y Filtrado (CAF - *Clipping and Filtering*), que consiste en recortar y filtrar varias veces la señal antes de ser amplificada. Sin embargo, este procedimiento es un proceso no lineal que introduce distorsiones indeseables en la señal. Como mejoras a este esquema se han propuesto PW (*Peak Windowing*) y CTs (*Comanding Transforms*), que son técnicas también consideradas como procesos no lineales. Todas éstas técnicas pueden reducir la PAPR, pero al realizar procesos no lineales introducen radiación dentro y fuera de banda, degradando la tasa de error de bit.

Por otro lado, existen técnicas sin distorsión de la señal que consisten en procesar la señal OFDM para crear un conjunto de secuencias que representan la misma información

pero con una PAPR menor. Dentro de este grupo se incluyen técnicas como SLM (*SeLected Mapping*), PTS (*Partial Transmit Sequences*), TR (*Tone Reservation*), TI (*Tone Injection*) y Codificación (*Coding*), que son esquemas que podrían requerir la transmisión de información adicional hacia el receptor para control, lo que se deriva en una disminución indeseable en la tasa de transmisión de datos. Además, es imprescindible la protección de dicha información de control en su transporte. En el caso de los métodos de Codificación, éstos demandan una gran carga computacional para efectuar la búsqueda de la palabra código adecuada y, además, requieren grandes tablas de almacenamiento para la codificación y decodificación. Dentro de esta categoría de técnicas sin distorsión, también se hallan los esquemas que buscan modificar los puntos de la constelación de la señal en el dominio de la frecuencia, llamados en esta Tesis técnicas CS (*Constellation Shapping*), de manera que los picos se reduzcan. En este caso no hay pérdida en la tasa de información, pero pueden introducir un incremento en la energía de bit por símbolo. Finalmente, se tiene el esquema OPS (*Orthogonal Pilot Sequences*) que usa la rejilla 2D-PSAM (*Two-Dimensional Pilot-Symbol Assisted Modulation*) que se emplea usualmente en la estimación de canales OFDM coherentes. Las secuencias piloto se usan tanto para estimar el canal como para reducir los picos de la señal.

En las técnicas CS, se pueden mover los puntos de la constelación de diferentes formas, dando como resultado dos categorías diferentes. Primero, están aquellos esquemas que mueven los puntos de la constelación dentro de un error permitido, llamados en la literatura como técnicas CCS (*Constrained Constellation Shapping*); estas propuestas consiguen una buena reducción de la PAPR a costa de degradar la BER. En segundo lugar, están los esquemas CE (*Constellation Extension*) que desplazan hacia afuera solamente los puntos externos de la constelación para evitar un incremento en la BER. Por este motivo, estas técnicas CE son muy atractivas.

La clave de las técnicas CE es mover inteligentemente ciertos puntos externos de la constelación del símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia, de tal forma que la señal en el dominio del tiempo tenga una PAPR menor. Este procedimiento no afecta a la distancia mínima de la constelación y, por tanto, no se experimenta degradación en la BER. Además no hay pérdida en la tasa de transmisión de datos porque no se requiere la transmisión de información de control. Sin embargo, incrementan la energía de bit por símbolo.

A la vista de lo anterior, esta Tesis se enmarca dentro de las técnicas CE, que solamente

mueven los puntos externos de la constelación para no degradar la BER. En este sentido, se plantea como objetivo principal desarrollar diferentes algoritmos, basados en la extensión de los puntos externos de la constelación, para la reducción de la PAPR de los sistemas OFDM. Este objetivo general se concreta en dos objetivos que se detallan a continuación.

El primer objetivo de esta Tesis es proponer nuevas técnicas basada en CE eficiente en energía, que se consiguen al combinar adecuadamente un esquema CE, basado en métrica, con secuencias piloto. Dicha combinación dan lugar a tres posibles arquitecturas de implementación dependiendo del orden en que se usa cada algoritmo. Cada una de las arquitecturas propuestas se evalúa en términos de reducción de la PAPR y de complejidad desde el punto de vista de las operaciones adicionales que se realizan en el procesador para llevar a cabo el algoritmo de reducción de la PAPR. Se determina la arquitectura que proporciona un compromiso adecuado entre reducción de la PAPR y complejidad. Además, en la propuesta se considera la eficiencia energética desde dos puntos de vista: primero, debido a que se obtiene una reducción de la energía transmitida, comparado con otras técnicas CE, si se insertan adecuadamente las secuencias piloto en el símbolo OFDM; y, segundo, porque se demuestra que dos de las arquitecturas propuestas consiguen emplear un número de ciclos de procesador menor (que se traducen en menor energía consumida) que otras técnicas conocidas como por ejemplo BSLM (*Blind- SLM*).

Como segundo objetivo se presentan varios esquemas de reducción de la PAPR, basados en técnicas CE, cuyas soluciones se formulan como problemas de optimización. Por un lado, se presenta una solución óptima, en términos de reducción de la PAPR, llamado algoritmo GBDCE (*Generalized Benders Decomposition for Constellation Extension*), el cual se plantea como un problema No Lineal Mixto-Entero (MINLP - *Mixed Integer Non-Linear Programming*) y que sirve como cota inferior de referencia para comparar con otras técnicas CE. Además, se proponen los algoritmos subóptimos: BBCE (*Branch-and-Bound for Constellation Extension*) y DCE (*Dynamic Constellation Extension*) que buscan reducir la complejidad del algoritmo óptimo.

## 1.2. Estructura y contribuciones científicas asociadas a la Tesis

La presente Tesis se articula en torno a cinco capítulos. Tras concluir el que ahora ocupa, en el capítulo 2 se realiza una revisión de conceptos básicos relacionados con la modulación OFDM, los cuales resultan de especial relevancia para entender los siguientes capítulos de este trabajo, como son: las características de la transmisión y recepción de las señales OFDM, las limitaciones de esta modulación y finalmente, los estándares que consideran a la modulación OFDM como parte de su capa física.

En el capítulo 3 se hace hincapié en el problema de la PAPR de los sistemas OFDM, se detallan las diferentes métricas de evaluación de los picos de potencia presentes actualmente; inmediatamente, se presenta el estado del arte con una completa revisión de todos los esquemas existentes en la literatura para la reducción de la PAPR de los sistemas OFDM, donde en cada uno de ellos, se enumerarán sus ventajas e inconvenientes, además de sus últimos avances.

Las principales contribuciones se exponen en los capítulos 4 y 5, en los cuales se plantean diferentes algoritmos de reducción de la PAPR, basados en la extensión de la constelación. Las aportaciones en cada uno de ellos se explican a continuación en un breve resumen:

- Capítulo 4

Este capítulo considera la extensión de ciertos símbolos del conjunto que forman la constelación ayudada por secuencias piloto ortogonales, para conseguir una propuesta eficiente en energía. Primero, se plantea un esquema OPS (*Orthogonal Pilot Sequences*) de baja complejidad en su implementación, llamado LC-OPS (*Low-Complex Orthogonal Pilot Sequences*), que se consigue al trasladar el procesado de OPS al dominio del tiempo, con lo que el transmisor OFDM evita el cálculo de  $(M - 1)$  operaciones IDFTs (*Inverse Discrete Fourier Transform*) comparado con la técnica original OPS. Segundo, en la propuesta del esquema eficiente en energía, se usa un esquema CE simple, basado en el cálculo de una métrica, llamado SAP (*Simple Amplitude Predistortion*), y ayudado por el algoritmo LC-OPS. De esta combinación se obtienen tres arquitecturas diferentes de implementación dependiendo del orden en que se usa cada algoritmo (SAP

y LC-OPS). Se analiza cada arquitectura en términos de la reducción de la PAPR y de la complejidad adicional introducida al procesar un esquema de reducción de la PAPR. La finalidad es determinar la arquitectura que proporciona un mejor rendimiento con menor complejidad. Además, se demuestra que las tres arquitecturas son eficientes en energía transmitida, ya que con la ayuda de las secuencias piloto se requiere un factor de extensión de menor valor, lo que se traduce en menor energía transmitida por símbolo OFDM; asimismo dos de las arquitecturas propuestas son eficientes en coste computacional, ya que el número de operaciones adicionales que se llevan a cabo tanto en el lado del transmisor como del receptor, al procesar la técnica de reducción de la PAPR, es menor que otros algoritmos como BSLM.

Las publicaciones que se han derivado de esta investigación son:

- Martha C. Paredes Paredes, M. Julia Fernández-Getino García, “Energy Efficient Peak Power Reduction in OFDM with Amplitude Predistortion aided by Orthogonal Pilots”, *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol.59, no.1, pp.45-53, Febrero 2013.
- Martha C. Paredes Paredes, M. Julia Fernández-Getino García, “Comparison of Architectures for PAPR reduction in OFDM combining Pilot Symbols with Constellation Extension”, *IEEE European Conference, EUROCON 2013*, pp.391-398, Zagreb (Croacia), 1-4 Julio 2013.

#### ■ Capítulo 5

En el capítulo 5, se presenta un novedoso esquema de reducción de la PAPR basado en la extensión de ciertos puntos externos del conjunto que forman la constelación del símbolo OFDM. Aquí, la reducción de la PAPR se considera como un problema de minimización, que se formula como un problema No Lineal Mixto-Entero (MINLP - *Mixed Integer Non-Linear Programming*), donde la solución óptima consiste en encontrar (1) aquellos símbolos en el dominio de la frecuencia que se deben extender y (2) el correspondiente factor de extensión para todo el conjunto de puntos extendidos.

Para resolver el problema MINLP formulado, se usa el método GBD (*Generalized Benders Decomposition*), que consiste en generar dos secuencias de actualización que con-

vergen dentro de un valor predeterminado, una de las secuencias resuelve el problema para la variable continua, fijando las variables enteras, mientras que la otra secuencia busca resolver el problema de las variables enteras, fijando la variable continua dada en la secuencia anterior. El algoritmo óptimo propuesto se denomina GBDCE (*Generalized Benders Decomposition Constellation Extension*) y su finalidad es proporcionar un cota inferior de comparación con otras técnicas CE, que no estaba disponible hasta ahora.

A pesar de que GBDCE es un algoritmo con una significativa reducción de la PAPR, éste presenta una complejidad considerable debido principalmente a su proceso secuencial, motivo por el cual, se plantean los esquemas subóptimos: BBCE (*Branch-and-Bound for Constellation Extension*) y DCE (*Dynamic Constellation Extension*).

El algoritmo BBCE transforma el problema MINLP en un problema de programación entero (IP - *Integer Programming*) para lo cual se restringe los valores del factor de extensión a un conjunto finito de valores. El problema se resuelve a través del método BB (*Branch-and-Bound*).

El esquema DCE busca un compromiso adecuado entre reducción de la PAPR y tiempo de procesamiento a través del uso de un algoritmo de dos ramas. Hace uso del algoritmo BBCE, pero en el caso poco probable de que éste presente una lenta convergencia, DCE conmuta a la otra rama, donde se ejecuta un algoritmo menos eficiente en términos de reducción de la PAPR pero con mucho menor tiempo de procesamiento. Así, se consigue reducir el tiempo de procesamiento y obtener una buena reducción de la PAPR. El diseño de DCE se realiza desde dos puntos de vista: primero basándose en restricciones en el tiempo de procesamiento dado por las limitaciones prácticas y, segundo, basado en restricciones en la reducción de la PAPR.

Como resultado de esta investigación, se presentan las siguientes publicaciones:

- Martha C. Paredes Paredes, J. Joaquín Escudero-Garzás and M. Julia Fernández-Getino García, “PAPR reduction via Constellation Extension in OFDM systems using Generalized Benders Decomposition and Branch and Bound techniques”, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, en proceso de revisión, 2014.
- Martha C. Paredes Paredes, J. Joaquín Escudero-Garzás and M. Julia Fernández-Getino García, “Dynamic Constellation Extension based on Branch and Bound

algorithm for PAPR reduction in an OFDM signal”, *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, enviado, 2014.

Para finalizar, en el capítulo 6 se resumen las principales conclusiones que se extraen de la Tesis y las líneas futuras de investigación.

Adicionalmente, los apéndices completan algunos aspectos relevantes de esta Tesis.



## CAPÍTULO 2

## PRINCIPIOS DE OFDM

Las técnicas de modulación multiportadora (*multicarrier*) tienen su origen en el concepto de partición de canal, que consiste en dividir el canal de banda ancha en un conjunto de varios subcanales paralelos de banda estrecha idealmente independientes.

OFDM es un caso especial de las modulaciones multiportadora, ampliamente utilizado en muchos estándares de comunicaciones debido a que ofrece varias ventajas como son: la flexibilidad, sencillez y robustez. Pero la señal transmitida, adolece de grandes fluctuaciones en su envolvente, lo que ocasiona una reducción del rendimiento de los amplificadores de alta potencia (HPA - *High Power Amplifier*).

Este capítulo presenta una breve revisión de los sistemas OFDM. Se inicia con una rápida descripción histórica de las modulaciones multiportadora y su evolución hacia OFDM, seguidamente se presenta el concepto de partición del canal y después los principios básicos de transmisión y recepción. Además, se analizan las limitaciones que presenta la señal OFDM. Finalmente, se comentan los diferentes estándares que consideran a OFDM como parte de su capa física.

Con este capítulo se pretende describir conceptos básicos de OFDM que servirán para entender los capítulos siguientes; si se desea conocer más detalles de la información proporcionada se puede continuar en las referencias citadas.

## 2.1. Revisión histórica

Se presume que la idea de OFDM nace con la técnica Multiplexación por División en Frecuencia (FDM - *Frequency Division Multiplexing*), cuando las compañías de telegrafía buscaban la transmisión de forma simultánea de varios canales de información sin interferencia.

Los primeros sistemas que utilizaron una modulación multiportadora (de forma muy rudimentaria) fueron los sistemas militares en comunicaciones con enlaces de HF (*High Frequency*) a finales de los años 50 y principios de los 60. En 1958, el módem *Kineplex*, desarrollado por Collins Radio Co. [Doelz et al., 1957], presentó un esquema de 20 tonos que se espaciaban a intervalos de frecuencia casi iguales a la tasa de la señal, para que la separación en el receptor fuera más fácil de realizar. El módem *Kineplex* fue seguido por el AN/GSC-10, también conocido como módem *Kathryn*, desarrollado por General Atronics Corp. [Zimmerman and Kirsch, 1967], cuyo diseño permitía ajustar diferentes esquemas de codificación y modulación en las diferentes subportadoras. En 1965, P. Bello describió la respuesta del módem *Kathryn* para canales deficientes incluyendo el uso de un intervalo de tiempo de guarda [Bello, 1965].

En 1964, J. Holsinger, en un informe técnico del Laboratorio de Investigación Electrónica del MIT (*Massachusetts Institute of Technology*), propuso un módem que se aproximaba a la capacidad descrita por Shannon, mediante el “*water-pouring*” [Holsinger, 1964]. Posteriormente, R. Gallager, también del MIT, agregó el rigor matemático necesario y lo popularizó bajo el término de “*water-filling*” [Gallager, 1968].

La primera publicación oficial de una transmisión multiportadora OFDM data de 1966, cuando R. Chang de Laboratorios Bell, publicó su trabajo “*Synthesis of band-limited orthogonal signals for multichannel data transmission*” [Chang, 1966], que luego fue patentado en 1970 [Chang, 1970]. Chang presentó un nuevo esquema para conseguir la transmisión simultánea de señales a través de canales de banda limitada sin reducir la velocidad de los datos y cancelando completamente la interferencia entre símbolos (ISI - *Inter Symbol Interference*) y la interferencia inter subportadora (ICI - *Inter Carrier Interference*). Un año más tarde Saltzberg exploró los resultados de Chang y los extendió para los datos complejos OQAM (*Offset Quadrature Amplitude Modulation*) [Saltzberg, 1967].

Pocos años después de estas publicaciones S. B. Weinstein y P. M. Ebert de Laboratorios Bell, hicieron una gran contribución en el desarrollo de OFDM. Probaron que, tanto la modulación como la demodulación multiportadora puede ser obtenida usando la Transformada Discreta de Fourier (DFT - *Discrete Fourier Transform*) [Weinstein and Ebert, 1971]. Con esto se consiguió una implementación en banda base completamente digital, eliminando los bancos de osciladores de cada subportadora tanto del transmisor como del receptor. Así, se redujo significativamente la complejidad en la implementación superando las dificultades físicas como: sincronización de todos los osciladores, ruido de fase, etc. Para combatir la ISI e ICI, los autores sugirieron usar tanto un intervalo de guarda como un enventanado de tipo coseno alzado.

Otro gran escalón en la historia de OFDM se dio en 1980, cuando Peled y Ruiz de IBM resolvieron el problema de la ortogonalidad introduciendo una extensión cíclica del símbolo OFDM [Peled and Ruiz, 1980], actualmente conocida como prefijo cíclico (CP - *Cyclic Prefix*). La propuesta consiste en sustituir las bandas de guarda vacías por la extensión cíclica. Con esto se consigue convertir la convolución lineal del canal en una convolución circular; así se mantiene la ortogonalidad de las subportadoras cuando la señal atraviesa un canal cuya duración es menor a la extensión cíclica.

Durante estos años, se han presentado varias contribuciones como la de Keasler de la Universidad de Illinois, bajo la licencia de Gandalf Technologies en 1970, Hirosaki de NEC en 1987, en los años 90 las contribuciones de Baran de Telebit y, de Mallory y Chaffee de IMC [Cioffi, 2001]. En 1985, L. Cimini de Laboratorios Bell puso en práctica un transmisor OFDM sobre canales de radio móviles con desvanecimiento rápido [Cimini, 1985].

El último impulso que popularizó las transmisiones multiportadora se dio a comienzos de 1990, cuando se abordaron muchos problemas prácticos propios de la técnica multiportadora con una solución digitalmente implementable bajo el nombre de Modulación Multitono Discreto (DMT - *Discrete MultiTone*). DMT fue creado por un grupo de investigadores de la Universidad de Stanford y Amati Communications Corp. bajo la dirección de John Cioffi [Cioffi, 2001]. Varias compañías de telecomunicaciones y el ANSI (*American National Standards Institute*) organizaron unas olimpiadas para decidir el mejor método de transmisión para la Línea Digital del Abonado (DSL - *Digital Subscriber Line*). El ganador fue DMT, la tecnología de múltiples portadoras, que resultó ser más rápida y más eficiente que otras

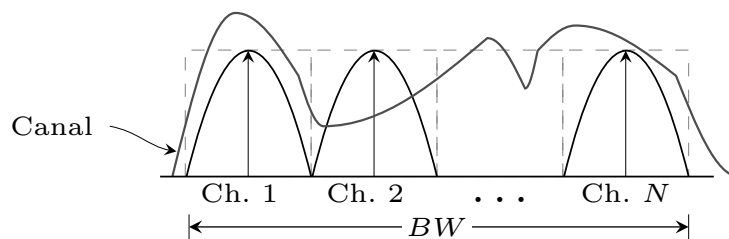
técnicas. Finalmente, DMT fue puesto en marcha a las 4:10 pm del 10 de marzo de 1993 sobre casi mil millones de líneas telefónicas de par de cobre para transportar un gran flujo de señales digitales [Cioffi, 2001].

A partir de ese momento, compañías de todo el mundo han lanzado soluciones basadas en modulaciones multiportadora DMT y OFDM. Actualmente, existen múltiples estándares en los que se utiliza alguna modulación multiportadora como se revisará brevemente en el apartado 2.6.

Cabe aclarar que se han acuñado dos nomenclaturas diferentes para las modulaciones multiportadora, a saber: OFDM y DMT. El primero es la versión de modulaciones multiportadora usado en sistemas radio, mientras que el segundo, DMT, es usado para transmisiones a través de medios guiados.

## 2.2. Modulación multiportadora

Todas las modulaciones multiportadora se fundamentan en el concepto de partición del canal (*channel partitioning*), cuya idea se ilustra en la Fig. 2.1. Aquí, el ancho de banda disponible,  $BW$  [Hz], se divide en un conjunto de  $N$  subcanales paralelos, teóricamente independientes entre sí [Cioffi, 2001], de forma que el flujo de bits se reparte entre dichos subcanales (a los que en la literatura se denomina **subportadoras** (*subcarriers*) [Bingham, 1990]) que modulan su información de forma separada.



**Figura 2.1:** Concepto de partición del canal, donde los símbolos son transmitidos simultáneamente usando varias subportadoras.

La partición del canal óptima, en tiempo continuo, usa un conjunto de autofunciones ortonormales (*orthonormal eigenfunction*) [Cioffi, 2001] como funciones base que son generalmente difíciles de calcular para periodos de símbolo finitos y no se usan en aplicaciones prácticas, por lo que a continuación se describe la partición del canal en tiempo discreto, asumiendo para

este caso que los efectos combinados de los filtros de transmisión/recepción y del canal pueden ser aproximados mediante un filtro de Respuesta al Impulso Finita (FIR - *Finite Impulse Response*). Esta descripción no es exacta, pero puede ser una consideración cercana siempre que el número de muestras a la entrada y salida del canal sean suficientemente grandes, que permitan alcanzar una buena estimación en tiempo y frecuencia [Schmidl and Cox, 1997] y [Moose, 1994].

Se puede considerar al esquema de la Fig. 2.2 como una estructura básica de una comunicación multiportadora, de longitud finita (número de subportadoras finito). Se asume un canal invariante en el tiempo. Usualmente, en los sistemas de comunicaciones prácticos la transmisión se lleva a cabo de una manera continua; cada símbolo de  $N$  muestras es seguido por otro de  $N$  y así sucesivamente, por lo tanto el superíndice  $(\cdot)^\ell$  indica que el símbolo  $\ell$ -ésimo es transmitido. Una vez que los datos a ser transmitidos se transforman de serie a paralelo (S/P), cada bloque de datos se mapea en un vector de  $N$  símbolos complejos, pertenecientes a una constelación con densidad  $B = 2^b$ , donde  $b$  indica el número de bits por símbolo. Estos símbolos complejos se pueden expresar como un vector en el dominio de la frecuencia,  $\tilde{\mathbf{x}}^\ell = [\tilde{x}^\ell(0), \dots, \tilde{x}^\ell(N-1)]^T$ , donde el superíndice  $(\cdot)^T$  significa transpuesto y  $\tilde{x}^\ell(k)$  denota el símbolo complejo en la subportadora  $k$ -ésima ( $0 \leq k \leq N-1$ ) transmitido en el bloque  $\ell$ -ésimo. El vector de la señal modulada  $\mathbf{x}^\ell = [x^\ell[0], \dots, x^\ell[N-1]]^T$ , en el dominio del tiempo, está dado por la expresión,

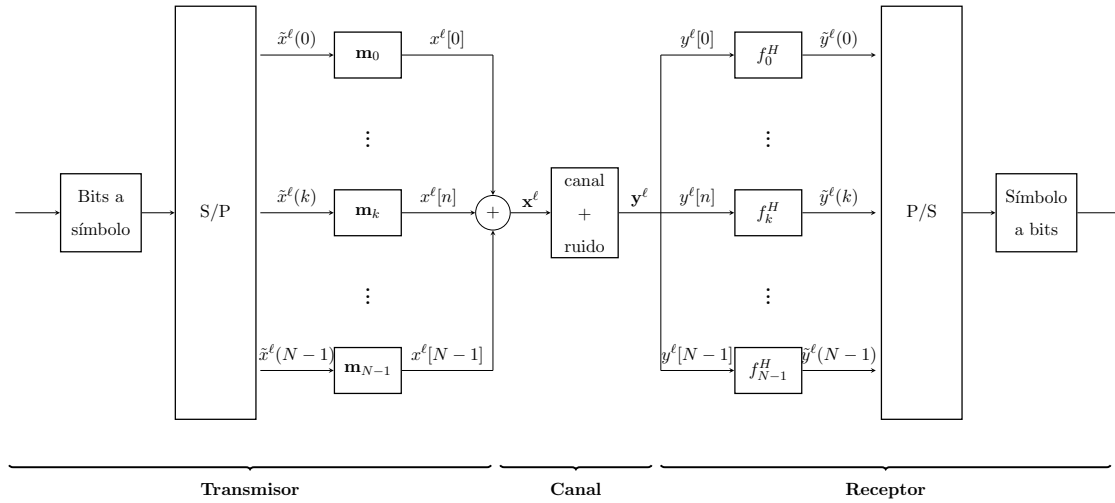
$$\mathbf{x}^\ell = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{m}_k \tilde{x}^\ell(k) = \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}^\ell \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{M}$  es una matriz de tamaño  $N \times N$  construida a partir del conjunto de vectores base de transmisión (*transmit basis vectors*)  $\mathbf{m}_k$  como columnas con  $k = \{0, \dots, N-1\}$ .

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}_0 \dots \mathbf{m}_k \dots \mathbf{m}_{N-1}] \quad (2.2)$$

El vector de datos transmitidos  $\mathbf{x}^\ell$ , agrupa las muestras en un vector de tamaño  $1 \times (N+v)$ , donde  $v$  es la duración de la respuesta al impulso del canal. Entonces,  $\mathbf{x}^\ell = [x^\ell[-v], \dots, x^\ell[-1], x^\ell[0], \dots, x^\ell[N-1]]^T$ , donde las muestras de datos son  $x^\ell[0], \dots, x^\ell[N-1]$  y las  $v$  muestras  $x^\ell[-v], \dots, x^\ell[-1]$  se añaden al inicio del símbolo de datos como Intervalo de Guarda (GI - *Guard Interval*).

En el receptor, el vector recibido en el dominio del tiempo,  $\mathbf{y}^\ell = [y^\ell[0], \dots, y^\ell[n-1]]^T$ , representa la relación entrada-salida a través de un canal de comunicaciones, la cual se puede



**Figura 2.2:** Estructura básica de un sistema de comunicación multiportadora.

expresar de la siguiente forma matricial,

$$\mathbf{y}^\ell = \mathbf{H}\mathbf{x}^\ell + \mathbf{w}^\ell \quad (2.3)$$

donde

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_v & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_v & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_0 & h_1 & \dots & h_v \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

es la matriz del canal invariante en el tiempo, en tiempo discreto, de tamaño  $N \times (N + v)$  construida a partir de  $\mathbf{h} = [h_0, \dots, h_v]^T$  que representa la respuesta al impulso del canal en representación compleja banda base. El ruido introducido por el canal se representa por el vector de  $N \times 1$  muestras,  $\mathbf{w}^\ell = [w^\ell[0], \dots, w^\ell[N - 1]]^T$ .

En el receptor, las primeras  $v$  muestras recibidas,  $y^\ell[-v], \dots, y^\ell[-1]$ , se ignoran debido a que son corrompidas por las últimas  $v$  muestras del bloque anterior, y las siguientes  $N$  muestras  $y^\ell[0], \dots, y^\ell[N - 1]$  se almacenan en un vector de  $N \times 1$  muestras,  $\mathbf{y}^\ell = [y^\ell[0], \dots, y^\ell[N - 1]]^T$ , para ser demoduladas utilizando la expresión (2.5), y obtener la señal en el dominio de la frecuencia.

$$\tilde{\mathbf{y}}^\ell = \mathbf{F}^H \mathbf{y}^\ell \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{F}^H$  es una matriz construida a partir de los vectores base de recepción (*receive basis vectors*)  $\mathbf{f}_k^H$ ,  $k = \{0, \dots, N - 1\}$  como fila, donde el superíndice  $(\cdot)^H$  significa Hermítica y  $\tilde{\mathbf{y}}^\ell$

es un vector de tamaño  $N \times 1$  que recoge las muestras de la señal recibida en el dominio de la frecuencia.

$$\mathbf{F}^H = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0^H \\ \mathbf{f}_1^H \\ \cdots \\ \mathbf{f}_k^H \\ \cdots \\ \mathbf{f}_{N-1}^H \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La representación completa de la relación entrada-salida, en el dominio de la frecuencia, que se ilustra en la Fig. 2.2, está dada por la siguiente ecuación,

$$\tilde{\mathbf{y}}^\ell = \mathbf{F}^H \mathbf{y}^\ell = \mathbf{F}^H (\mathbf{H} \mathbf{x}^\ell + \mathbf{w}^\ell) = \mathbf{F}^H \mathbf{H} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{x}}^\ell + \mathbf{F}^H \mathbf{w}^\ell \quad (2.7)$$

Existen diferentes formas de construir las matrices  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{F}$ , lo que deja varias posibilidades de estructuras multiportadora. El principal objetivo es obtener una división del canal perfecta, lo que significa crear los  $N$  canales independientes, es decir, que el vector recibido en el dominio de la frecuencia  $\tilde{\mathbf{y}}^\ell$  pueda ser expresado en función del vector de transmisión, también en el dominio de la frecuencia,  $\tilde{\mathbf{x}}^\ell$  y por tanto la ec. (2.7) pueda ser simplificada a  $N$  ecuaciones escalares. Para el caso simple de un canal sin memoria,  $\mathbf{h} = [h_0, 0, \dots, 0]$ , escoger  $\mathbf{M}$  como una matriz ortogonal resulta en una partición del canal perfecta, esto es,  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^H$  y  $\mathbf{F} = \mathbf{M}$ , como se puede observar en (2.8), donde las muestras de ruido  $w^\ell(k)$  son muestras gaussianas independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.).

$$\tilde{y}^\ell(k) = h_0 \tilde{x}^\ell(k) + w^\ell(k), \quad k = \{0, \dots, N-1\} \quad (2.8)$$

Para canales no triviales, se han propuesto una gran variedad de estructuras multiportadora, cada una con diferentes vectores base. Existen dos estructuras asintóticamente óptimas llamadas Vector Coding [Kasturia et al., 1990] y DMT/OFDM [Peled and Ruiz, 1980], [Cimini, 1985], [Bingham, 1990], [Ruiz et al., 1992] y [Zou and Wu, 1995]. Otras estructuras incluyen a vectores base DHT (*Discrete Hartley Transform*) [Dudevoir, 1989] y la modulación DWMT (*Discrete Wavelet MultiTone*) [Tzannes et al., 1994].

DMT y OFDM son los métodos más comunes de partición del canal, añadiendo un prefijo

cíclico<sup>1</sup> en cada símbolo OFDM transmitido. Con esta restricción la complejidad del transmisor y receptor es mucho menor que en el caso de partición del canal con VC. Las técnicas multiportadora DMT y OFDM usan la misma matriz de partición del canal y sólo difieren en el cálculo del vector de transmisión  $\tilde{\mathbf{x}}^\ell$ . En los moduladores OFDM todos los componentes del vector de datos transmitidos  $\tilde{x}^\ell(k)$ ,  $k = \{0, \dots, N - 1\}$  se seleccionan con la misma distribución. Sin embargo, DMT optimiza la cantidad de energía y la de bits de cada subportadora para mejorar el rendimiento de todo el sistema; esta optimización se llama “*bit-loading*” [Cioffi, 2001].

Como se ha mencionado previamente, DMT hace referencia a los esquemas multiportadora para sistemas que usan como medio de transmisión el cable, mientras que OFDM es empleado en sistemas de comunicaciones a través de radio. Sin embargo, DMT y OFDM son conceptualmente lo mismo, su utilización para diferentes aplicaciones es arbitrario y se ha ido adoptando su significado por el ámbito de la aplicación más que por diferencias en su diseño.

## 2.3. Modulador y demodulador OFDM en tiempo continuo

Los primeros sistemas OFDM no empleaban ni modulación ni demodulación digital. Por ello, el modelo en tiempo continuo (a través de banco de modulares analógicos, tal como se realizaba en los primeros sistemas) de OFDM puede considerarse como el sistema ideal, que en la práctica es sintetizado digitalmente. Se iniciará este apartado describiendo el modelo OFDM en tiempo continuo y, a partir de él se deducirá el modelo en tiempo discreto para dejar claro la partición del canal realizada con OFDM.

### 2.3.1. Modulador OFDM

Como se ha mencionado, OFDM divide el ancho de banda  $BW$  [Hz] disponible en  $N$  subportadoras paralelas de igual ancho de banda  $BW/N$  [Hz], cada una de ellas asociada a una frecuencia  $f_k$ ,  $k = \{0, \dots, N - 1\}$  de tal manera que  $f_0$  es la frecuencia más baja. La separación entre las subportadoras consecutivas es  $\Delta f = BW/N$  [Hz]. El resto de valores de las frecuencias se obtiene mediante la expresión (2.9). Para garantizar la ortogonalidad, la duración del tiempo de símbolo OFDM, denotado por  $T$  [s] viene dado por la relación

<sup>1</sup>El concepto de prefijo cíclico se revisará en la sección 2.3.2



$T = 1/\Delta f = N/BW$  [s] o un múltiplo de éste.

$$f_k = f_0 + \frac{k}{T} = f_0 + \frac{BW}{N}k, \quad k = \{0, \dots, N-1\} \quad (2.9)$$

Las funciones base que usa el transmisor son funciones ortogonales dadas por  $\phi_k^\ell(t) = g_T(t - \ell T)$ , las cuales pueden ser descritas como,

$$g_k(t) = \begin{cases} g_T(t)e^{j2\pi f_k t}, & \text{si } t \in [0, T] \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (2.10)$$

donde  $g_T(t)$  representa el filtro de transmisión con respuesta al impulso de duración  $T$  [s] y es transmitido en las diferentes subportadoras. Para el caso de la señal compleja banda base, si se considera la ecuación (2.9), las funciones base se pueden reescribir como,

$$g_k(t) = \begin{cases} g_T(t)e^{j2\pi \frac{BW}{N}kt}, & \text{si } t \in [0, T] \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (2.11)$$

Para simplificar las expresiones, normalmente se suele considerar el filtro  $g_T(t)$  como un pulso rectangular conformando la señal de cada una de las subportadoras, siendo

$$g_T(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (2.12)$$

La ortogonalidad de las funciones base se debe garantizar para  $\forall \ell$ , cumpliéndose que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_k(t) (\phi_{k'}(t))^* dt = 0; \quad k \neq k' \quad (2.13)$$

y su norma está dada por  $\int_{-\infty}^{\infty} \|\phi_k(t)\|^2 dt = T$ . Para obtener las funciones base ortonormales, se redefine (2.11) a,

$$\hat{g}_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}}e^{j2\pi \frac{BW}{N}kt}, & \text{si } t \in [0, T] \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (2.14)$$

entonces  $\hat{\phi}_k^\ell(t) = \hat{g}_T(t - \ell T)$ , cumpliendo  $\int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{\phi}_k^\ell(t)\|^2 dt = 1$ .

La generación de la señal compleja en banda base  $x(t)$  es la suma de las contribuciones de las  $N$  ramas paralelas, donde cada una de las funciones base se genera modulado una subportadora compleja con el pulso rectangular  $g_T(t)$ , siendo este formato de modulación la conocida como OFDM. Se debe notar que, para modular la señal OFDM se puede utilizar

cualquiera de las dos funciones base: ortogonales ( $\phi_k^\ell$ ) u ortonormales ( $\hat{\phi}_k^\ell$ ). Matemáticamente la señal compleja banda base  $x(t)$  se puede expresar como

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{x}^\ell(k) e^{j2\pi \frac{BW}{N} k(t-\ell T)}, \quad (2.15)$$

donde se han usado las funciones base ortonormales<sup>2</sup>,  $\tilde{x}^\ell(k)$  representa un símbolo complejo del conjunto que forman la constelación, transportado en la subportadora  $k$ -ésima del símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo.

Para el símbolo  $\ell$ -ésimo, la señal OFDM banda base  $x^\ell(t)$  viene dado por,

$$x^\ell(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}^\ell(k) e^{j2\pi \frac{BW}{N} k(t-\ell T)}. \quad (2.16)$$

La expresión más general de la señal OFDM paso banda transmitida  $x_{\text{PB}}^\ell(t)$ , en función de su envolvente compleja  $x^\ell(t)$  viene dada por

$$\begin{aligned} x_{\text{PB}}^\ell(t) &= \Re\{x^\ell(t) e^{j2\pi f_c t}\} \\ &= \Re\{x^\ell(t) \cos(2\pi f_c t)\} - \Im\{x^\ell(t) \sin(2\pi f_c t)\} \\ &= x_R^\ell(t) \cos(2\pi f_c t) - x_I^\ell(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

siendo  $f_c$  la frecuencia de la portadora,  $\Re\{\cdot\}$  y  $\Im\{\cdot\}$  denotan, respectivamente, la parte real e imaginaria de la señal .

El esquema de la Fig. 2.3 representa la estructura general de un modulador OFDM en tiempo continuo, que reúne cada uno de los procesos mencionados en los párrafos previos.

La ortogonalidad entre las funciones base garantiza que no exista ISI e ICI, y por tanto, el espectro de cada una de las subportadoras<sup>3</sup>  $|\Phi_k(f)|$  se solapan en frecuencia como se indica en la Fig. 2.4, donde cada uno de ellos está centrado a la frecuencia  $f_k$  correspondiente. En recepción la información que lleva cada subportadora puede ser recuperada debido a la ortogonalidad de las funciones base.

<sup>2</sup>La señal  $x(t)$  cuando se usa las funciones base ortogonales, esta dada por

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{x}_k^\ell e^{j2\pi \frac{BW}{N} k(t-\ell T)}$$

<sup>3</sup>Dado por el módulo de la Transformada de Fourier de las funciones base dadas de (2.14) en términos de la función sinc( $x$ )

$$|\Phi_k(f)| = \text{sinc}(f - f_k) T = \text{sinc}\left[\left(f - \frac{k}{T}\right) T\right]$$

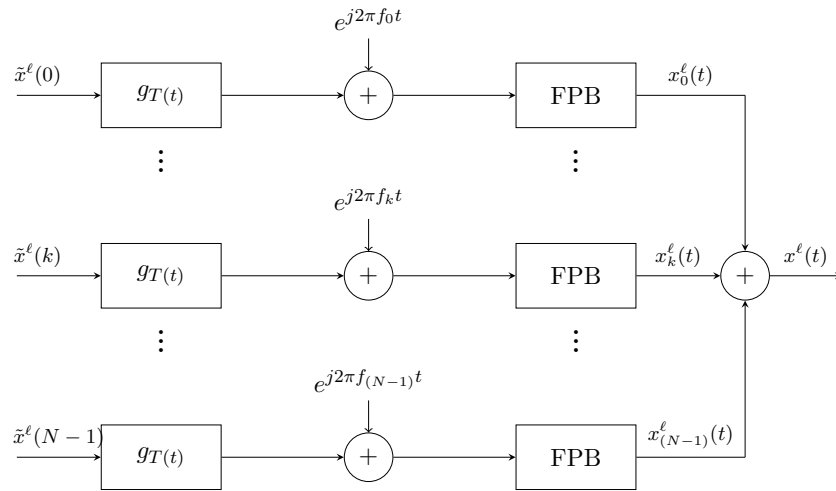


Figura 2.3: Modulador OFDM en tiempo continuo.

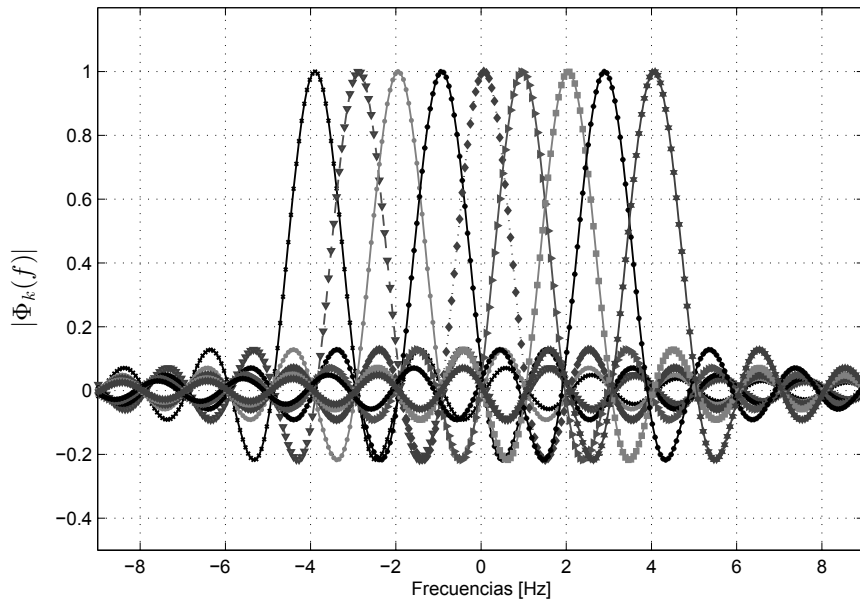


Figura 2.4: Espectro de las funciones base correspondientes a las subportadoras  $k = \{0, \dots, 9\}$ , donde se puede observar el solapamiento espectral.

### 2.3.2. Prefijo cíclico

Para obtener una alta eficiencia espectral, es necesario mantener la ortogonalidad entre las subportadoras a lo largo de toda la transmisión. La ortogonalidad se ve afectada cuando la señal OFDM pasa por un canal dispersivo y con propagación multitrayecto, características

típicas de las comunicaciones inalámbricas, apareciendo las indeseadas ISI e ICI.

Para que la ISI sea nula [Weinstein and Ebert, 1971] propone el uso de una banda de guarda al principio de cada uno de los símbolos, y así se evitaría que la cola de un símbolo se solape con la del siguiente. Sin embargo, si la banda de guarda se deja vacía, no se consigue mitigar la ICI, debido a que no existe diferencia entera dentro del tiempo de datos entre las subportadoras del símbolo OFDM enviado. En [Peled and Ruiz, 1980] se presentó el concepto del Prefijo Cíclico (CP - *Cyclic Prefix*) o extensión cíclica que consiste en rellenar la banda de guarda con una copia de las últimas  $v$  muestras del símbolo OFDM, satisfaciendo la condición,

$$x_{-n}^{\ell} = x_{N-n}^{\ell}, \quad n = \{1, \dots, v\} \quad \forall \ell \quad (2.18)$$

con esto se consigue una perfecta partición del canal DMT/ODFM, como se ha visto en la sección 2.2.

Con la inserción del CP se logra transformar la convolución lineal del canal en una convolución cíclica. Con esto se mantiene la ortogonalidad siempre que la duración de éste sea mayor que la longitud del canal.

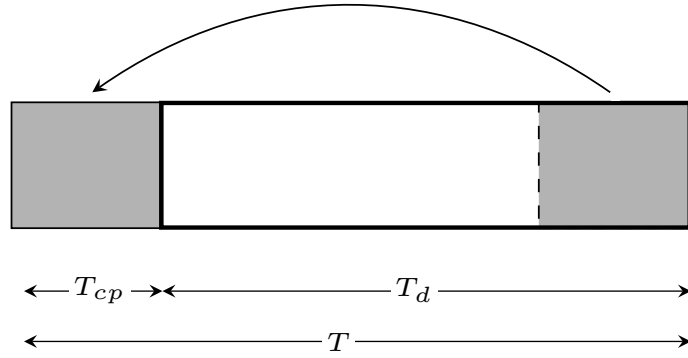
En el modelo de tiempo continuo, el símbolo OFDM de duración  $T_d$  [s] (anteriormente descrito como  $T$ ) se ve incrementado por la duración de la extensión cíclica  $T_{cp}$  [s], siendo el nuevo símbolo OFDM de duración  $T$  [s] la suma de  $T_d + T_{cp}$ ; dicha idea se ilustra en la Fig. 2.5. La inserción del prefijo cíclico se puede expresar matemáticamente redefiniendo las funciones base ortonormales de (2.14) como,

$$\hat{g}_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T-T_{cp}}} e^{j2\pi f_k t}, & \text{si } t \in [0, T_s] \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (2.19)$$

donde  $T = N/BW + T_{cp}$  [s].

### 2.3.3. Demodulador OFDM

La respuesta al impulso del canal, definida por la función  $h(\tau, t)$ , es la respuesta que experimenta una señal impulso, transmitida en el instante de tiempo  $t$ , a través del canal. Esta función caracteriza completamente al canal, que es variante en el tiempo, debido principalmente al desplazamiento que sufren los terminales y que considera el efecto del multitrayecto para un valor concreto de  $t$ , mediante  $\tau$ . Este modelo de canal fue introducido por [Bello, 1963].



**Figura 2.5:** Prefijo Cíclico, donde las últimas muestras son copiadas al inicio del símbolo OFDM.

Para un modelo general, variante en el tiempo, la señal recibida en tiempo continuo  $y(t)$  está dada por la convolución de la respuesta al impulso del canal y la señal enviada  $x(t)$  a la que se le añade ruido  $w(t)$ .

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau, t)x(t - \tau)d\tau + w(t) \quad (2.20)$$

donde el superíndice  $\ell$  ha sido omitido por simplicidad. Generalmente, se asume que el canal es fijo durante el intervalo de símbolo OFDM  $[0, T]$ ; por tanto, la respuesta al impulso del canal se simplifica  $h(\tau, t) = h(\tau)$ , y así el canal es LTI (*Linear and Time Invariant*). Además, se asume que el ruido añadido a la señal recibida es ruido aditivo, blanco y gaussiano (AWGN - *Additive White Gaussian Noise*).

El receptor OFDM consiste en un banco de filtros, dado por

$$\hat{\Psi}_k(t) = \begin{cases} \hat{\phi}_k^*(T - t), & t \in [0, T - T_{cp}] \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (2.21)$$

donde se asume que el prefijo cíclico ya ha sido eliminado previo a la demodulación. La señal recibida en el dominio de la frecuencia  $\tilde{y}(t)$  está dada por

$$\tilde{y}(k) = \sum_{k'=0}^{N-1} \tilde{x}(k') \int_{T_{cp}}^T \left( \int_0^{T_{cp}} h(\tau) \hat{\phi}_{k'}(t - \tau) d\tau \right) \hat{\phi}_k^*(t) dt + \int_{T_{cp}}^T w(T - t) \hat{\phi}_k^*(t) dt \quad (2.22)$$

La integral interior se puede escribir de la siguiente forma [Edfors et al., 1996],

$$\int_0^{T_{cp}} h(\tau) \hat{\phi}_{k'}(t - \tau) d\tau = \frac{e^{j2\pi \frac{Bw}{N} k' (t - T_{cp})}}{\sqrt{T - T_{cp}}} \int_{T_{cp}}^T h(\tau) e^{-j2\pi \frac{Bw}{N} k' \tau} d\tau \quad (2.23)$$

donde la parte final de esta ecuación se corresponde con la expresión muestreada de la respuesta en frecuencia del canal en la subportadora  $k'$ -ésima dada por:

$$H_k = H \left( k' \frac{BW}{N} \right) = \int_0^{T_{cp}} h(\tau) e^{-j2\pi \frac{BW}{N} k' \tau} d\tau \quad (2.24)$$

donde  $H(f)$  es la transformada de Fourier de  $h(t)$ . Haciendo algunas transformaciones (para más detalle se puede consultar en [Edfors et al., 1996]), la señal recibida se puede escribir como,

$$\tilde{y}(k) = \sum_{k'=0}^{N-1} \tilde{x}(k') H_{k'} \int_{T_{cp}}^T \hat{\phi}_{k'}(t) \hat{\phi}_k^*(t) dt + \int_{T_{cp}}^T w(T-t) \hat{\phi}_k^*(t) dt \quad (2.25)$$

Dado que  $\hat{\phi}_k(t)$  son ortonormales, entonces

$$\int_{T_{cp}}^T \hat{\phi}_{k'}(t) \hat{\phi}_k^*(t) dt = \delta[k - k'] \quad (2.26)$$

donde  $\delta[k]$  es la delta de Kronecker<sup>4</sup>.

Si se denota  $w(k)$  a la integral  $\int_{T_{cp}}^T w(T-t) \hat{\phi}_k^*(t) dt$  que es AWGN, la expresión de la señal recibida puede simplificarse a

$$\tilde{y}(k) = H_k \tilde{x}(k) + w(k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2.27)$$

Se reescribe (2.27) de forma más compacta usando notación matricial, resultando

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{w} \quad (2.28)$$

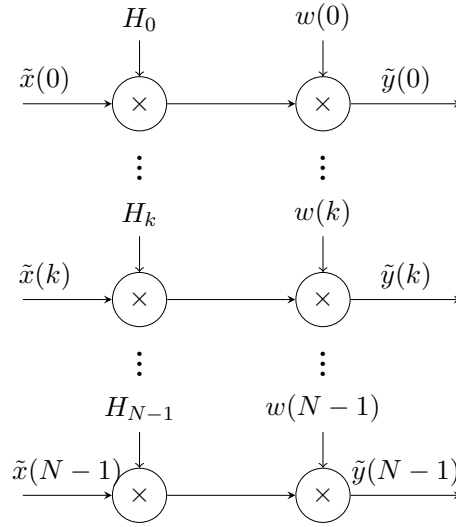
donde  $\tilde{\mathbf{y}}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}$  y  $\mathbf{w}$  son vectores de tamaño  $N \times 1$ , en el dominio de la frecuencia y  $\mathbf{H}$  es una matriz de tamaño  $N \times N$  que contiene las muestras de la respuesta en frecuencia del canal en su diagonal principal. Por este motivo, OFDM puede ser visto como un conjunto de  $N$  canales paralelos, como se muestra en la Fig. 2.6, que corresponde a un modelo multiplicativo complejo y permite una ecualización extremadamente simple con una sola etapa del canal y obteniéndose así una partición del canal perfecta.

## 2.4. Modulador y demodulador OFDM en tiempo discreto

Para deducir el modelo en tiempo discreto se partirá del modelo en tiempo continuo, donde la señal  $x^\ell(t)$  se muestrea a la tasa de Nyquist, donde se considera  $T = NT_s = N(1/BW)$ ,

---

<sup>4</sup> $\delta[k - k'] = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq k' \\ 1 & \text{si } k = k' \end{cases}$



**Figura 2.6:** Sistema OFDM en tiempo continuo como un conjunto de canales gaussianos paralelos, llamado modelo multiplicativo complejo.

donde  $T_s$  representa el periodo de muestreo tomando  $N$  muestras por símbolo OFDM. Cuando no se considera sobremuestreo, el exponente de las funciones base se puede desarrollar como,

$$j2\pi k\left(\frac{BW}{N}t\right) \rightarrow j2\pi k\left(\frac{BW}{N}nT_s\right) = j2\pi k\left(\frac{BW}{N}\frac{1}{BW}\right) = j\frac{2\pi}{N}kn \quad (2.29)$$

obteniéndose así la versión discreta de las funciones base ortogonales  $\phi_k^\ell[n]$  como,

$$\phi_k^\ell[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = \{0, \dots, N-1\} \quad (2.30)$$

Utilizando estas funciones base se puede obtener el equivalente discreto de la señal en banda base, denotado por  $x^\ell[n]$ ,

$$\begin{aligned} x^\ell[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{x}^\ell(k) \phi_k^\ell[n - \ell N] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{x}^\ell(k) e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-\ell N)}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Normalmente, en la literatura se utiliza la expresión de un solo símbolo OFDM, obviándose el superíndice  $\ell$ . Así, la ec. (2.31) para el símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo es,

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (2.32)$$

La ventaja del modelo discreto se debe principalmente a que la parte derecha de la ecuación (2.32) se puede identificar como la IDFT (*Inverse Discrete Fourier Transform*) [Weinstein and Ebert, 1971], lo que permite cálculos eficientes, especialmente si el número de subportadoras  $N$  es potencia de 2.

Análogamente, en el lado del receptor se calcula la DFT de  $N$  puntos para demodular. Hay que notar que previo a la demodulación hay que eliminar la extensión cíclica para conservar la ortogonalidad de las funciones base.

Equivalentemente, se puede representar la IDFT y la DFT de forma matricial como,

$$\mathbf{x}^\ell = \mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{x}}^\ell \quad (2.33)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}^\ell = \mathbf{Q} \mathbf{y}^\ell \quad (2.34)$$

respectivamente, donde  $\mathbf{Q}$  es la matriz DFT, ortonormal y de tamaño  $N \times N$  con elementos  $q_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ , es decir,

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}1 \cdot 1} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}1(N-1)} & \dots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

y  $\mathbf{Q}^H$  es la matriz IDFT.

Si se selecciona las columnas de  $\mathbf{Q}^H$  como los vectores base de transmisión (vistas en la sección 2.2), a saber,  $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^H$  y las columnas de  $\mathbf{Q}$  como los vectores base de recepción, esto es,  $\mathbf{F}^H = \mathbf{Q}$ , entonces, la relación entrada-salida del canal puede escribirse como un conjunto de  $N$  ecuaciones escalares.

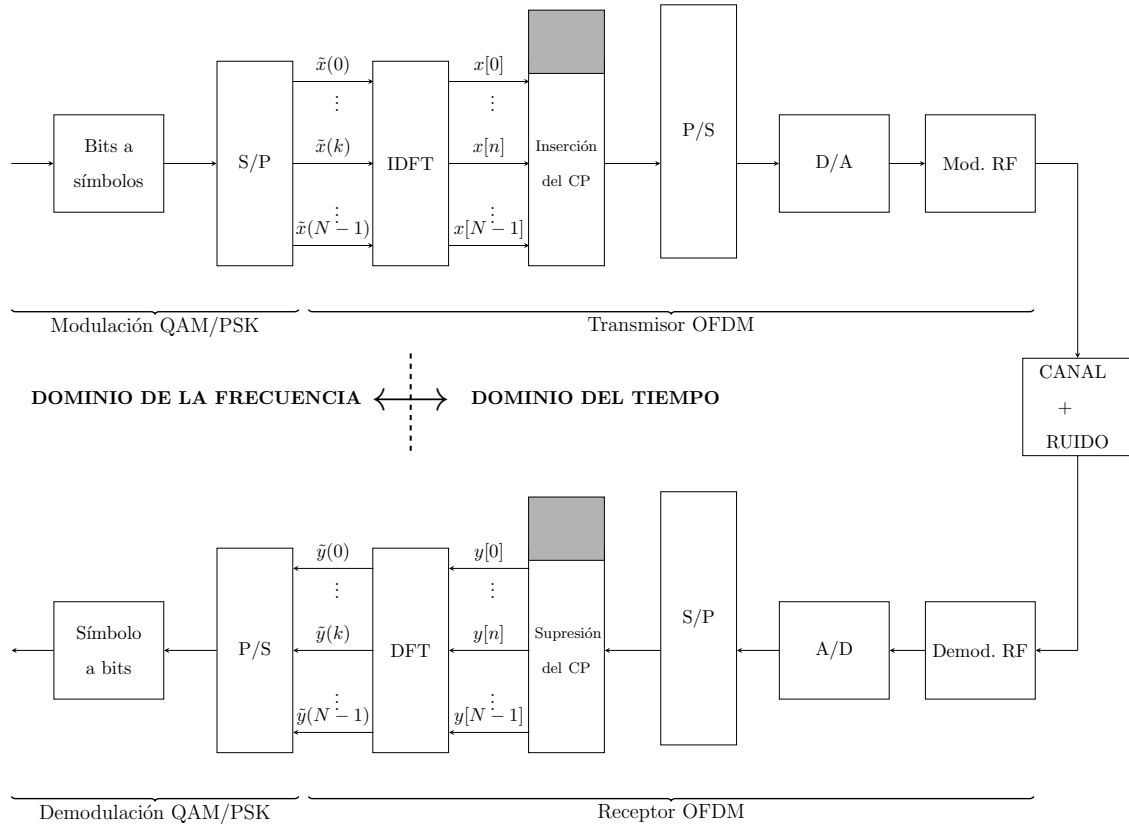
$$\tilde{y}^\ell(k) = H_k \tilde{x}^\ell(k) + w^\ell(k), \quad k = \{0, \dots, N-1\} \quad (2.36)$$

donde nuevamente el canal se divide en  $N$  canales independientes AWGN.

El esquema completo de un modulador y demodulador OFDM se muestra en la Fig. 2.7, donde se incluyen, respectivamente las operaciones IDFT/DFT para la modulación y demodulación OFDM. Se representa la interpretación que se suele hacer en los sistemas de comunicaciones multiportadora donde se puede asociar cada símbolo complejo  $\tilde{x}(k)$ ,  $k = \{0, \dots, N-1\}$  a una subportadora en el dominio de la frecuencia, pues no hay que olvidar



que el significado físico de una IDFT es pasar del dominio de la frecuencia al del tiempo. Además, este modelo en tiempo discreto es el que se usará en el resto de la Tesis, debido a que es el modelo utilizado en la implementación de sistemas prácticos.



**Figura 2.7:** Transmisor y receptor OFDM en tiempo discreto implementado a través de operaciones FFT.

## 2.5. Limitaciones de OFDM

La modulación OFDM tiene grandes ventajas (ampliamente descritas en la literatura [Asif, 2011] y [Wu and Zou, 1995]), por ejemplo: su resistencia contra el desvanecimiento y la interferencia, su alta eficiencia espectral y la estructura simple de su ecualizador. Sin embargo, hay tres inconvenientes que hay que destacar: dos de ellas son los estrictos niveles de precisión de sincronismo en tiempo, *STO* (*Symbol Time Offset*), y en frecuencia, *CFO* (*Carrier Frequency Offset*) que se requieren para mantener la ortogonalidad entre las subportadoras [Cho et al., 2010] y, la tercera, frecuentemente citada como el mayor problema de los sistemas

OFDM, es la presencia de fluctuaciones grandes en la envolvente de la señal en el dominio del tiempo. Este problema de las fluctuaciones grandes también se conoce como el problema de la PAPR (*Peak-to-Average Power Ratio*) de los sistemas OFDM, la cual se define como la relación entre la potencia máxima instantánea y la potencia media [Tellado, 2002].

### 2.5.1. Sincronización tiempo-frecuencia

Las ventajas de OFDM pueden conservarse sólo cuando la ortogonalidad de las subportadas se mantiene a lo largo de la comunicación, por tanto, hay que evitar la aparición de la ICI e ISI contando con una buena sincronismo tanto en tiempo (STO) como en frecuencia (CFO)

#### (a) Sincronización en tiempo

La IDFT y DFT son respectivamente, las operaciones fundamentales para la modulación y demodulación OFDM. Con el fin de realizar la DFT de  $N$  puntos en el receptor, se necesita conocer las muestras exactas del símbolo OFDM transmitido, en otras palabras, se debe realizar una sincronización en tiempo, para encontrar el inicio de cada símbolo OFDM. Dependiendo de la localización estimada de inicio del símbolo OFDM, *i.e.*, o del desajuste temporal de  $\delta_t$  muestras, se producirán o no errores de sincronización del símbolo OFDM, dejando cuatro casos diferentes de desajustes, como se explica a continuación [Cho et al., 2010].

- **Caso I:** En el caso en que la sincronización coincide exactamente con el punto de inicio del símbolo ( $\delta_t = 0$ ), se conserva la ortogonalidad entre las subportadoras. En este caso el símbolo OFDM se recupera perfectamente sin ningún tipo de interferencia.
- **Caso II:** Cuando el punto de inicio estimado del símbolo OFDM es antes del punto exacto, pero después del final de la respuesta del canal del símbolo OFDM anterior, *i.e.*  $\delta_t$  es un número negativo pequeño, el símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo no se solapa con el símbolo OFDM  $(\ell - 1)$ -ésimo ya que se toman las muestras del prefijo cíclico; por tanto, se tendrá una rotación de los datos. Además, puesto que después de la etapa de sincronización existe una estimación de canal, el hecho de que se hayan tomado

muestras del prefijo cíclico y, por tanto, se haya producido esta rotación, podría ser corregida por el algoritmo de estimación de canal. En ese caso, las prestaciones no se ven afectadas, y, a efectos prácticos, se obtienen resultados muy similares a los que resultarían si la sincronización hubiese sido perfecta.

- **Caso III:** Cuando el inicio del símbolo OFDM es estimado antes del final de la respuesta del canal del símbolo OFDM previo, *i.e.*  $\delta_t$  es un valor negativo grande, la sincronización se realiza demasiado pronto para evitar la ISI; en este caso, se destruye la ortogonalidad entre las subportadoras por la ISI y además aparece ICI.
- **Caso IV:** Cuando la estimación del punto de inicio es después del punto exacto, *i.e.*  $\delta_t$  es un número positivo de muestras, en lugar de realizar la DFT sobre los datos del símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo, parte de ellos serán muestras del prefijo cíclico del símbolo  $(\ell+1)$ -ésimo y por tanto, no sólo se producirá una rotación, sino que además existirá interferencia entre símbolos OFDM, puesto que parte de la información se estará tomando del símbolo OFDM siguiente. En este caso, la degradación es mucho mayor.

#### (b) Sincronización en frecuencia

En general, el desplazamiento de frecuencia se debe a un desajuste de frecuencia entre los osciladores locales del transmisor y del receptor que se manifiesta en banda base como una rotación adicional de la fase y una atenuación de la amplitud [Hanzo et al., 2000], [Cho et al., 2010].

Cuando las subportadoras están correctamente sincronizadas y se muestrea a la frecuencia óptima  $f_k$ , las subportadoras son ortogonales. Sin embargo, cuando en recepción existe un desplazamiento en frecuencia  $\delta_f$ , ya no se muestrea en la frecuencia óptima sino en  $f_k + \delta_f$ , generando un desplazamiento del espectro recibido. Si el error es un múltiplo de la separación entre sub-portadoras  $\Delta f$ , las subportadoras seguirán siendo ortogonales entre sí, pero sin embargo la comunicación no será posible debido a que la información se ha desplazado, aumentando la probabilidad de error. Por otra parte, si ese desplazamiento no es un múltiplo de la separación entre subportadoras (que será la situación más habitual), entonces éstas dejarán de ser ortogonales entre sí y se producirá la ICI.

En lo referente a la sincronización en OFDM, la literatura es muy extensa. Para la sincronización en tiempo o en frecuencia existen varios algoritmos que pueden implementarse tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia. Para STO y CFO, la sincronización en el dominio del tiempo se puede realizar usando el CP o a través de símbolos de entrenamiento [Cho et al., 2010].

### 2.5.2. PAPR elevada

Otra limitación de OFDM que se da en el lado del transmisor, es la PAPR elevada que se produce cuando la señal en el dominio del tiempo llega a tener picos de potencia instantánea muy altos con respecto a su potencia media, debido a la posibilidad de que todas las subportadoras se puedan sumar con idéntica fase en un momento dado, consiguiendo así, una contribución de potencia muy importante. Si bien es muy improbable que se produzca una coincidencia en fase tan mayoritaria de todas las subportadoras, la probabilidad de que aparezca un pico de magnitud elevada es motivo suficiente para disparar las fluctuaciones grandes en la envolvente de la señal OFDM [Tellado, 2002].

Los elevados picos que presenta la señal conducen a que ciertos componentes de hardware como los conversores Digital a Analógica (DAC - *Digital-to-Analog Converter*) y los Amplificadores de Alta Potencia (HPA - *High Power Amplifier*) tengan un comportamiento por debajo de su rendimiento máximo.

La eficiencia de potencia es muy necesaria en las comunicaciones inalámbricas (móviles) ya que se aprovecha de mejor manera el área de cobertura, hay ahorro en el consumo de potencia que permite terminales más pequeños, etc. Es, por tanto, importante que la operación del HPA sea eficiente en potencia, la cual se ve afectada por los picos de la señal que al pasar por el HPA producen problemas de radiación tanto dentro como fuera de banda, lo que resulta en una degradación de las prestaciones del sistema. Tratar de prevenir la ocurrencia de dicha interferencia reduciendo la PAPR de la señal transmitida con algún tipo de manipulación en la señal aún se considera como un área de investigación muy activa. *Este problema es el área de investigación de esta Tesis y se trata con más detalle en los siguientes capítulos.*

### 2.5.2.1. Fluctuaciones de la envolvente de la señal OFDM

La mayoría de los sistemas radio emplean, en el transmisor, HPAs para obtener una suficiente potencia de transmisión, los cuales operan cerca del punto de saturación, como se ilustra en la Fig. 2.8, para aprovechar su máximo rendimiento. Además, en los sistemas prácticos el HPA es un dispositivo limitado en potencia y muy sensible a la variación de la amplitud de la señal. Por tanto, la señal OFDM con fluctuaciones grandes en su envolvente ocasiona que el dispositivo se sature, provocando radiación fuera de banda, que afecta a las bandas adyacentes, y radiación dentro de banda, que resulta en la rotación, atenuación y desplazamiento de la señal recibida, incrementando la tasa de error de bit [Han and Hong, 2005] y [Tellado, 2002]. Para evitar estos inconvenientes, el HPA se ve forzado a trabajar por debajo del punto de saturación (lo que en la literatura anglosajona se denomina *back-off*), lo que reduce su eficiencia, o el dispositivo es obligado a operar con un margen dinámico muy grande que incrementa el coste del terminal.

Para evaluar la cantidad de distorsión introducida por el HPA en la señal OFDM se definen los términos IBO (*Input Back-Off*) y OBO (*Output Back-Off*), matemáticamente definidos como [Litsyn, 2007]

$$\text{IBO} = 10 \log_{10} \frac{P_{in}^{max}}{P_{in}} [\text{dB}] \quad (2.37)$$

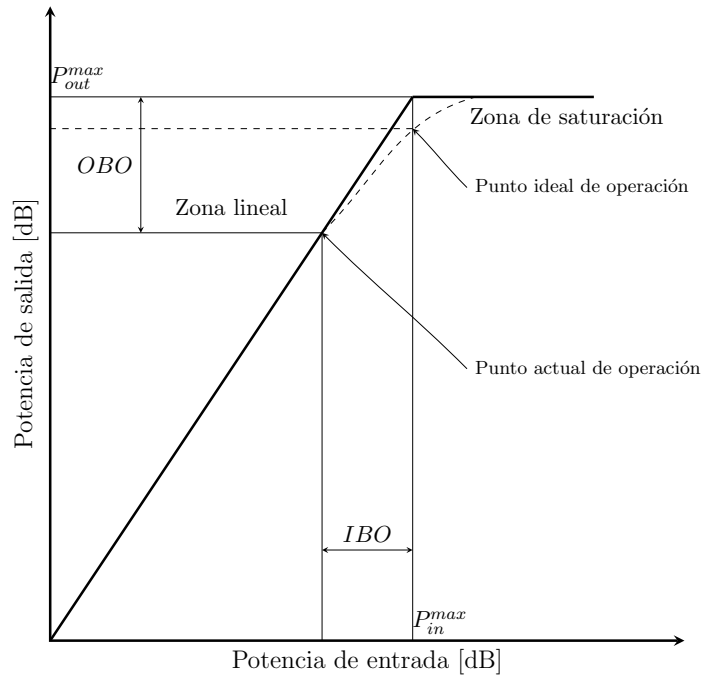
$$\text{OBO} = 10 \log_{10} \frac{P_{out}^{max}}{P_{out}} [\text{dB}] \quad (2.38)$$

donde  $P_{in}^{max}$  y  $P_{out}^{max}$  son, respectivamente, la potencia máxima instantánea de entrada y salida del HPA, y  $P_{in}$  y  $P_{out}$  son, respectivamente, la potencia media de entrada y salida del HPA.

Las fluctuaciones grandes halladas en la señal OFDM obligan a que el IBO se desplace hacia la izquierda (véase Fig. 2.8), para asegurar que la señal no exceda el punto de saturación.

De forma general, modelar los amplificadores de potencia suele ser complicado, pero un enfoque común es modelarlos como dispositivos no lineales sin memoria con respuesta en frecuencia no selectiva [Rowe, 1982]. En el apéndice A se dan más detalles sobre los amplificadores de potencia.

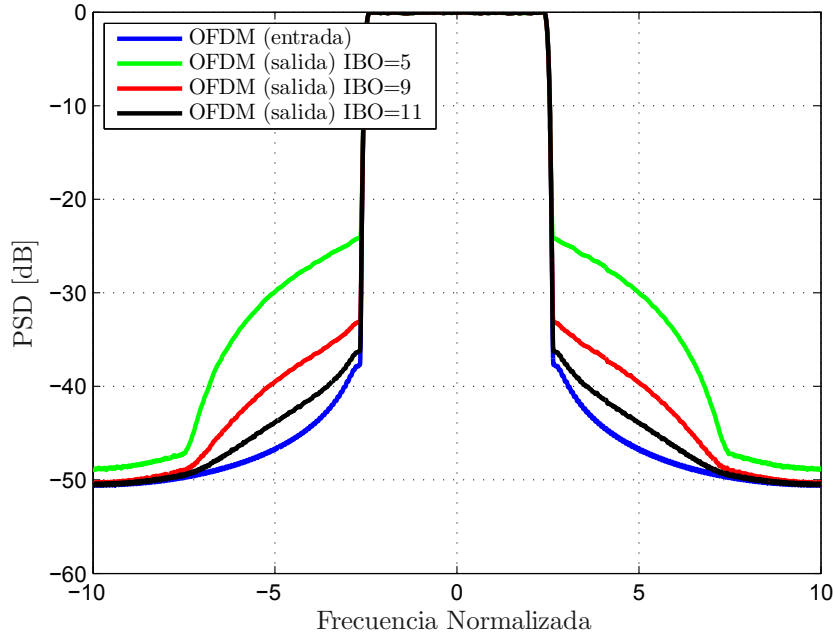
En la Fig. 2.9, se ilustran los efectos ocasionados en un sistema OFDM con PAPR elevada al pasar a través de un HPA; específicamente se ha considerado el modelo modificado de



**Figura 2.8:** Características típicas de entrada-salida de un HPA

Rapp (véase apéndice A) con  $s = 2$ . Se considera un sistema OFDM con 256 subportadoras, modulación 16-QAM y un factor de sobremuestreo  $J = 4$ . Se presentan los espectros (PSD - *Power Spectral Density*) de la señal a la entrada y a la salida del HPA para analizar el efecto ocasionado por el HPA cuando se consideran diferentes valores de  $IBO = \{5, 9, 11\}$  [dB]. En esta figura se puede observar claramente que la señal con PAPR elevada experimenta un ensanchamiento espectral debido a las no linealidades del dispositivo. Mientras más pequeño es el valor de IBO, mayor es el ensanchamiento espectral lo que ocasiona interferencia entre las bandas adyacentes de la señal OFDM. Sin embargo, a mayor IBO (mayor margen dinámico) el rendimiento del HPA se ve comprometido [Jiang and Wu, 2008]. Para asegurar que los picos amplificadas de la señal OFDM no excedan el punto de saturación del HPA, el IBO debe ser al menos igual a la PAPR de la señal [Rahmatallah and Mohan, 2013].

En lo referente al DAC, los picos elevados demandan que estos dispositivos tengan un gran margen dinámico. Existen conversores de alta precisión que suelen soportar la PAPR alta con una cantidad razonable de ruido, pero estos dispositivos podrían ser demasiado caros. Por otro lado, en los DACs de bajo coste, la cantidad de ruido introducida podría ser significativa cuando el margen dinámico se ve incrementado para soportar la PAPR elevada de la señal,



**Figura 2.9:** PSD de la señal OFDM con  $N = 256$  subportadoras y modulación 16-QAM, se consideran los valores de  $\text{IBO} = \{5, 9, 11\}$  [dB].

dando como resultado una reducción de la SNR (*Signal-to-Noise Ratio*).

Por consiguiente, la mejor solución es reducir la PAPR antes de que la señal OFDM pase por el HPA y el DAC.

### 2.5.2.2. Estadística de la señal OFDM

Si se considera la señal discreta banda base del símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo (definida en (2.32)), como  $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]$ , cuyas muestras se obtienen a partir de

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (2.39)$$

siendo, respectivamente,  $k$  y  $n$  los índices en frecuencia y tiempo y  $\tilde{x}(k)$  el símbolo complejo sobre la subportadora  $k$ -ésima,  $k = \{0, \dots, N-1\}$ , como la suma de  $N$  señales independientes moduladas en cada subportadora, donde cada uno de los símbolos complejos en el dominio de la frecuencia  $\tilde{x}(k)$ ,  $k = \{0, \dots, N-1\}$  se consideran como variables aleatorias complejas gaussianas, independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) con media cero y varianza igual a la unidad, entonces, las muestras de  $\mathbf{x}$  son también variables aleatorias gaussianas,

i.i.d. con media cero y varianza igual a la unidad [Tellado, 2002].

Si  $N$  es suficientemente grande ( $N > 32$ , suele ser suficiente), basado en el Teorema del límite central [Jiang and Wu, 2008] la parte real  $\Re\{\mathbf{x}\}$  e imaginaria  $\Im\{\mathbf{x}\}$  de la señal en el dominio del tiempo se distribuyen según una gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , mientras que su envolvente  $|\mathbf{x}|$  se distribuye según una Rayleigh [Cho et al., 2010], cuya Función de Distribución de Probabilidad (PDF - *Probability Distribution Function*), está dada por [Ochi, 1990],

$$R = |\mathbf{x}| \sim f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (2.40)$$

siendo  $\sigma^2$  la varianza de las componentes real e imaginaria de  $\mathbf{x}$ . La media y la varianza de una variable aleatoria Rayleigh vienen dadas, respectivamente por [Ochi, 1990]

$$E[R] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \quad (2.41)$$

$$V[R] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2 \quad (2.42)$$

En la Fig. 2.10 se representan por un lado, la parte real, imaginaria y la envolvente de la señal  $\mathbf{x}$  y por otro lado se ilustran las correspondientes distribuciones, con lo que se deduce que en amplitud aparecerán ocasionalmente picos grandes respecto a la media de la señal a lo largo del tiempo.

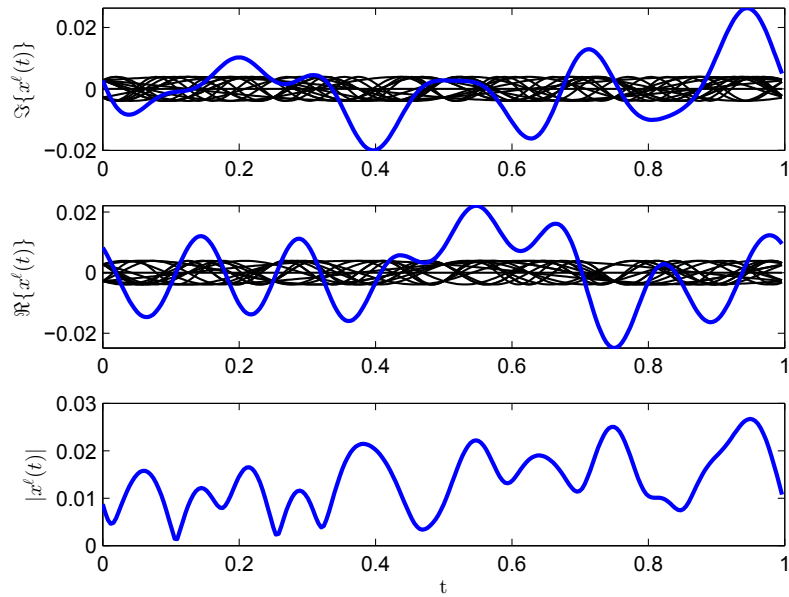
## 2.6. Estandarización

OFDM es una técnica multiportadora que ha sido adoptada como esquema de modulación en diferentes escenarios de comunicaciones inalámbricos, debido principalmente a sus grandes ventajas como son la robustez frente al desvanecimiento multitrajecto y su alta eficiencia espectral. A continuación se presenta una rápida revisión de los sistemas y/o estándares que emplean esta técnica de transmisión.

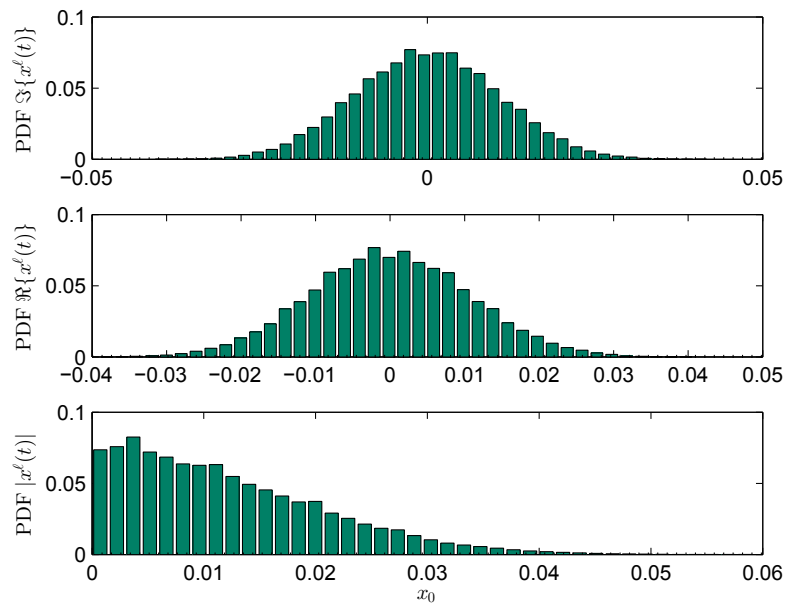
OFDM ha sido estandarizada como parte de las redes WLAN (*Wireless Local Area Network*), en estándares del IEEE (*Institute of Electrical and Electronics Engineers*) y del ETSI (*European Telecommunications Standards Institute*). Los estándares IEEE que emplean OFDM es su capa física son 802.11a/g/n [IEEE 802.11, 2012]<sup>5</sup> y se conoce comercialmente

<sup>5</sup>Este estándar es una revisión de la versión publicada en el 2007, el cual incorpora el estándar original publicado en 1999 (IEEE 802.11-1999) y reafirmado en 2003, y además incluye las enmiendas: IEEE 802.11a-1999, 802.11b-1999, 802.11b-1999/corrección 1-2001, 802.11g-2003, entre otros.





(a) Señal en el dominio del tiempo



(b) Distribuciones de la señal

**Figura 2.10:** Parte real, imaginaria y la magnitud con sus correspondientes distribuciones para un sistema OFDM con  $N = 16$  subportadoras y modulación QPSK.

como WiFi (*Wireless Fidelity*). El número de subportadoras utilizado es 64, de las cuales 48 son para datos y 4 son símbolos piloto, los esquemas de modulación especificados en este estándar son: BPSK, QPSK, 16-QAM y 64-QAM, dependiendo del modo seleccionado por la capa física. Por otro lado el ETSI ha desarrollado, dentro del proyecto BRAN (*Broadband Radio Access Network*), el estándar HIPERLAN/2 [ETSI Hyperlan/2, 2001] que también emplea OFDM como técnica de transmisión de banda ancha en su capa física, con los mismos esquemas de modulación y número de subportadoras que el estándar IEEE 802.11-2012 arriba mencionado.

En las redes inalámbricas de área metropolitana (WMAN - *Wireless Metropolitan Area Network*), OFDM también ha sido seleccionada para formar parte de la capa física del estándar IEEE 802.16-2012 [IEEE 802.16, 2012]<sup>6</sup> y se conoce comercialmente como WiMAX (*Worldwide Interoperability for Microwave Access*). El estándar IEEE 802.16-2012 puede trabajar tanto con OFDM como OFDMA (*Orthogonal Frequency Division Multiple Access*); ambas técnicas operan en conexiones sin línea de visión directa (NLOS - *Non Line of Sight*) y en la banda de frecuencia por debajo de 11 [GHz]. Con OFDM se emplean 256 subportadoras de las cuales 200 son usadas para transmitir datos. OFDMA permite hasta 2048 subportadoras y, para proporcionar compatibilidad con la versión anterior del estándar IEEE 802.16-2004, soporta 1024, 512, y 128 subportadas.

Dentro de las redes inalámbricas de área personal (WPAN - *Wireless Personal Area Network*), Multiband OFDM (MB-OFDM) fue propuesto como la técnica de modulación para la capa física de los sistemas UWB (*UltraWideBand*) [Batra et al., 2004] y [Batra et al., 2005]. La idea básica de MB-OFDM es dividir el espectro en diferentes subbandas, donde los datos de cada subbanda son transmitidos con OFDM de 128 subportadoras. El estándar inicialmente considerado para redes WPAN de alta velocidad fue el IEEE 802.15.3a, sin embargo, se ha retirado.

OFDM y OFDMA también han sido especificados como parte de la capa física del estándar IEEE 802.20, conocido como MBWA (*Mobile Broadband Wireless Access*) [IEEE 802.20, 2008], para proporcionar acceso a Internet a través de los teléfonos móviles, y comercialmente es conocido como *MobileFi*. El número de subportadoras que se pueden considerar son 128, 256,

---

<sup>6</sup>IEEE 802.16-2012 es una revisión del estándar IEEE 802.16-2009, el cual consolidaba el IEEE 802.16-2004, IEEE 802.16e entre otros

512, 1024 ó 2048.

OFDM es una tecnología extensamente utilizada en la transmisión de audio y vídeo digital. El primer estándar que utilizó OFDM fue creado por el ETSI para la difusión de audio digital (DAB - *Digital Audio Broadcasting*) [ETSI ETS 300 401, 1995] en 1995. En cuanto a la difusión de vídeo digital, se utiliza OFDM en el DVB-T (*Digital Video Broadcasting - Terrestrial*) [ETSI ETS 300 477, 1997] publicado en 1997. En 2004 el DVB-H (*Digital Video Broadcasting - Handheld*) fue propuesto como el estándar Europeo para la televisión digital [ETSI EN 300 744, 2001] y [ETSI EN 302 304, 2004]. En la República China, el estándar DMB-TH (*Terrestrial Digital Multimedia Television and Handheld Broadcasting*) [Zheng et al., 2003] y [GB 20600-2006, 2006] también fue propuesto para la difusión de televisión digital usando la modulación OFDM.

El sistema 3GPP2 (*3rd Generation Partnership Project 2*) estandarizó UMB (*Ultra Mobile Broadband*), cuyo diseño incluye técnicas de modulación avanzadas como la modulación OFDM [Wang, 2008] para obtener acceso móvil de banda ancha, alta eficiencia espectral y bajas latencias. Actualmente, el principal patrocinador de UMB, Qualcomm, anunció que ponía fin al desarrollo de esta tecnología favoreciendo el apoyo de LTE (*Long Term Evolution*).

Dentro de las nuevas tecnologías para comunicaciones móviles, el estándar del 3GPP, LTE [3GPP, a] y [3GPP, b], proporciona alta eficiencia espectral al usar en su capa física técnicas de modulación y múltiple acceso como OFDM, en el enlace descendente y SC-FDMA (*Single Carrier - Frequency Division Multiple Access*) en el ascendente. Además, aprovecha la propagación multitrayecto empleando la técnica MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*) [Zyren and McCoy, 2007].



## CAPÍTULO 3

# ESTADO DEL ARTE EN REDUCCIÓN DE LA PAPR

Este capítulo provee una revisión sobre las métricas usadas para evaluar la PAPR y sobre todo se exploran las diferentes técnicas de reducción de la PAPR en los sistemas OFDM propuestas en la literatura.

Cabe señalar que a partir de aquí, el superíndice  $\ell$  se omite en las expresiones matemáticas por simplicidad.

### 3.1. Métricas de cuantificación de los picos de la señal OFDM

Para evaluar los efectos ocasionados por los picos elevados de potencia de las señales OFDM, en la literatura se han definido algunas métricas como son: la Relación de potencia pico - potencia promedio (PAPR - *Peak-to-Average Power Ratio*) [Litsyn, 2007] y [Tellado, 2002], Factor de Cresta (CF - *Crest Factor*) [Cho et al., 2010] y Métrica Cúbica (CM - *Cubic Metric*) [3GPP, 2004] y [3GPP, 2006].

La métrica clásica y más extensamente utilizada es la PAPR, por lo que el problema de los picos de potencia también se conoce como el problema de la PAPR de los sistemas OFDM.

A continuación se presenta, cada una de estas métricas, aunque la PAPR se revisará con más detalle por ser la que se empleará en los siguientes capítulos de la Tesis.

### 3.1.1. PAPR (*Peak-to-Average Power Ratio*)

La relación de potencia pico a potencia media, conocida como PAPR y que se denotará por  $\chi$ , es la métrica más utilizada para cuantificar la excursión de la envolvente de la señal. Clásicamente, la definición matemática de la PAPR de la señal en tiempo continuo  $x(t)$  viene dada por la siguiente expresión [Tellado, 2002]

$$\chi = \text{PAPR} \{x(t)\} = \frac{\max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^2}{E \{|x(t)|^2\}}, \quad (3.1)$$

donde  $\max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^2$  denota la máxima potencia instantánea,  $E \{|x(t)|^2\}$  es la potencia promedio de la señal,  $|\cdot|$  es la operación módulo y  $E \{\cdot\}$  es la esperanza matemática.

En los sistemas prácticos OFDM, se implementa el modelo en tiempo discreto, por tanto, es más conveniente trabajar con la PAPR en tiempo discreto. Así, la PAPR de la señal  $x[n] = [x[0], \dots, x[N-1]]$  se define como,

$$\chi = \text{PAPR} \{x[n]\} = \frac{\max_{0 \leq n \leq N-1} |x[n]|^2}{E \{|x[n]|^2\}}. \quad (3.2)$$

Una forma matemática alternativa que se usa para definir la PAPR es [Tellado, 2002]

$$\chi = \text{PAPR} \{\mathbf{x}\} = \frac{\|\mathbf{x}\|_{\infty}^2}{E \{\|\mathbf{x}\|_2^2\} / N}, \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{x} = [x[0] \dots x[N-1]]$  es un vector de  $1 \times N$  que recoge las muestras de la señal en el dominio del tiempo, y  $\|\cdot\|_p$  denota la norma- $p$ . Ambas definiciones (3.2) y (3.3) son equivalentes.

#### 3.1.1.1. PAPR de la señal paso banda

La señal OFDM paso banda  $x_{\text{PB}}(t)$  definida en (2.17), es usualmente transmitida a una frecuencia mucho mayor que el ancho de banda de cada subportadora de la señal banda base, *i.e.*,  $f_c \gg \Delta f$ , siendo  $f_c$  la frecuencia de la portadora; consecuentemente, el máximo de la señal paso banda es aproximadamente igual al máximo de la señal banda base en tiempo continuo [Tellado, 2002], [Ochiai and Imai, 2001] esto es,

$$\max |x_{\text{PB}}(t)| \approx \max |x(t)|. \quad (3.4)$$

Por otro lado, la potencia promedio de la señal paso banda es

$$\begin{aligned}
 E \{ |x_{\text{PB}}(t)|^2 \} &= E \left\{ |\Re \{ x(t) e^{j2\pi f_c t} \}|^2 \right\} \\
 &= E \left\{ |x_R(t) \cos(2\pi f_c t) - x_I(t) \sin(2\pi f_c t)|^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} E \{ |x(t)|^2 \}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por tanto, la PAPR de la señal compleja paso banda  $\chi_{\text{PB}}$  se puede aproximar por

$$\chi_{\text{PB}} \approx 2\chi. \tag{3.6}$$

### 3.1.1.2. PAPR y sobremuestreo

La PAPR de la señal discreta banda base  $x[n]$  definida en (3.2) podría no ser la misma PAPR de la señal continua banda base  $x(t)$ , de hecho se cumple que

$$\text{PAPR} \{ x[n] \} \leq \text{PAPR} \{ x(t) \} \tag{3.7}$$

debido a que la señal  $x[n]$  al discretizarse podría no contener todos los picos de la señal  $x(t)$  [Ochiai and Imai, 2000a]. En la práctica, la PAPR de la señal continua banda base puede calcularse sólo después de una implementación de hardware concreta, incluido el DAC, lo que resulta complejo de implementar. Afortunadamente, se sabe que la PAPR de la señal discreta banda base podría llegar a tener la misma PAPR de la señal continua banda base si se sobremuestra la señal  $x[n]$ . Así mientras más grande es el factor de sobremuestreo, denotado por  $J$ , menor será el error cometido. En [Han and Hong, 2005] y [Cho et al., 2010] recomiendan que con  $J \geq 4$  es suficiente para aproximarse a la PAPR de la señal continua.

Para implementar sobremuestreo en la señal  $x[n]$ , se suele interpolar la señal compleja a la entrada de la IDFT; así para el símbolo  $\ell$ -ésimo, en el dominio del tiempo, la versión de la señal interpolada (con un factor de sobremuestreo  $J$ )  $x_J[n]$  es

$$x_J[n] = \frac{1}{\sqrt{NJ}} \sum_{k=0}^{NJ-1} \tilde{x}_J(k) e^{j \frac{2\pi}{NJ} kn}, \quad 0 \leq n \leq NJ-1 \tag{3.8}$$

siendo la señal OFDM en el dominio de la frecuencia  $\tilde{x}_J(k)$  definida por

$$\tilde{x}_J(k) = \begin{cases} \tilde{x}(k), & 0 \leq k < N/2 \quad \text{y} \quad NJ - N/2 < k \leq NJ \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \tag{3.9}$$

donde  $\tilde{x}(k)$ , con  $k = \{0, \dots, N - 1\}$ , es la señal original en el dominio del tiempo sobre la subportadora  $k$ -ésima.

Consecuentemente, la PAPR para la señal sobremuestreada con un factor  $J$ , se redefine como

$$\chi = \text{PAPR} \{x_J[n]\} = \frac{\max_{0 \leq n \leq NJ-1} |x_J[n]|^2}{E \{ |x_J[n]|^2 \}} \quad (3.10)$$

### 3.1.1.3. Función de distribución de la PAPR

Considerando la PAPR de la señal discreta banda base  $\chi$  dada por (3.2) como una variable aleatoria, la probabilidad de que la PAPR de dicha señal sea menor o igual que el umbral  $\chi_0$  está dada por la Función de Distribución (CDF - *Cumulative Distribution Function*), denotada como  $F_\chi(\chi)$ , siendo

$$F_\chi(\chi) = \Pr \{ \chi \leq \chi_0 \}, \quad (3.11)$$

que equivale a que todas y cada una de las muestras que forman el símbolo OFDM  $x[n]$  cumplan con dicha condición, debido a la propiedad de independenciam. Por tanto, la ec. (3.11) se puede expresar como la probabilidad conjunta

$$\begin{aligned} F_\chi(\chi) &= \Pr \{ \chi \leq \chi_0 \} \\ &= \Pr \left\{ \frac{\max |x[0]|^2}{E \{ |x[0]|^2 \}} \leq \chi_0, \frac{\max |x[1]|^2}{E \{ |x[1]|^2 \}} \leq \chi_0, \dots, \frac{\max |x[N-1]|^2}{E \{ |x[N-1]|^2 \}} \leq \chi_0 \right\} \\ &= \left( \Pr \left\{ \frac{\max |x[n]|^2}{E \{ |x[n]|^2 \}} \leq \chi_0 \right\} \right)^N. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si se considera el término entre paréntesis como

$$\begin{aligned} \Pr \left\{ \frac{\max |x[n]|^2}{E \{ |x[n]|^2 \}} \leq \chi_0 \right\} &= \Pr \{ |x[n]|^2 \leq \chi_0 E \{ |x[n]|^2 \} \} \\ &= \Pr \left\{ |x[n]| \leq \sqrt{E \{ |x[n]|^2 \} \chi_0} \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

y si se tiene en cuenta la media y la varianza de la distribución Rayleigh de la envolvente de la señal dadas en (2.41) y (2.42) respectivamente, entonces  $E \{ |x[n]|^2 \} = 2\sigma^2$ , con lo que la ecuación (3.13) se puede escribir como

$$\Pr \left\{ |x[n]| \leq \sqrt{E \{ |x[n]|^2 \} \chi_0} \right\} = \Pr \{ |x[n]| \leq \sqrt{2\chi_0\sigma} \} \quad (3.14)$$



donde

$$\Pr \left\{ R \leq \sqrt{2\chi_0}\sigma \right\} = \int_0^{\sqrt{2\chi_0}\sigma} \frac{R}{\sigma^2} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} dR = 1 - e^{-\chi_0^2} \quad (3.15)$$

siendo  $R = |x[n]|$ , y finalmente se obtiene la expresión final de la CDF de la PAPR

$$F_\chi(\chi) = \Pr\{\chi \leq \chi_0^2\} = \left(1 - e^{-\chi_0^2}\right)^N. \quad (3.16)$$

La probabilidad de que la PAPR supere el umbral  $\chi_0$ , viene dada por la probabilidad complementaria (CCDF - *Cumulative Complementary Distribution Function*). De ahí, la CCDF de la PAPR para la señal discreta banda base viene dada por

$$\text{CCDF}\{\chi\} = \Pr\{\chi \geq \chi_0\} = 1 - \left(1 - e^{-\chi_0^2}\right)^N. \quad (3.17)$$

Las ecuaciones (3.16) y (3.17) se derivan bajo la suposición de que las  $N$  muestras son independientes y  $N$  es suficientemente grande. Por tanto, no se aplica a señales OFDM con banda limitada que se obtiene mediante simulaciones [Shepherd et al., 1998], incluso si el valor de  $N$  es grande. Ésto debido al hecho de que en el análisis convencional produce la muestra máxima de la señal, pero no necesariamente contiene el máximo pico de la señal OFDM de banda limitada, aunque podría acercarse al pico [Ochiai and Imai, 2001]. Por tanto, es difícil derivar la CDF exacta para una señal OFDM de banda limitada, la siguiente expresión se ha determinado empíricamente [Van Nee and de Wild, 1998],

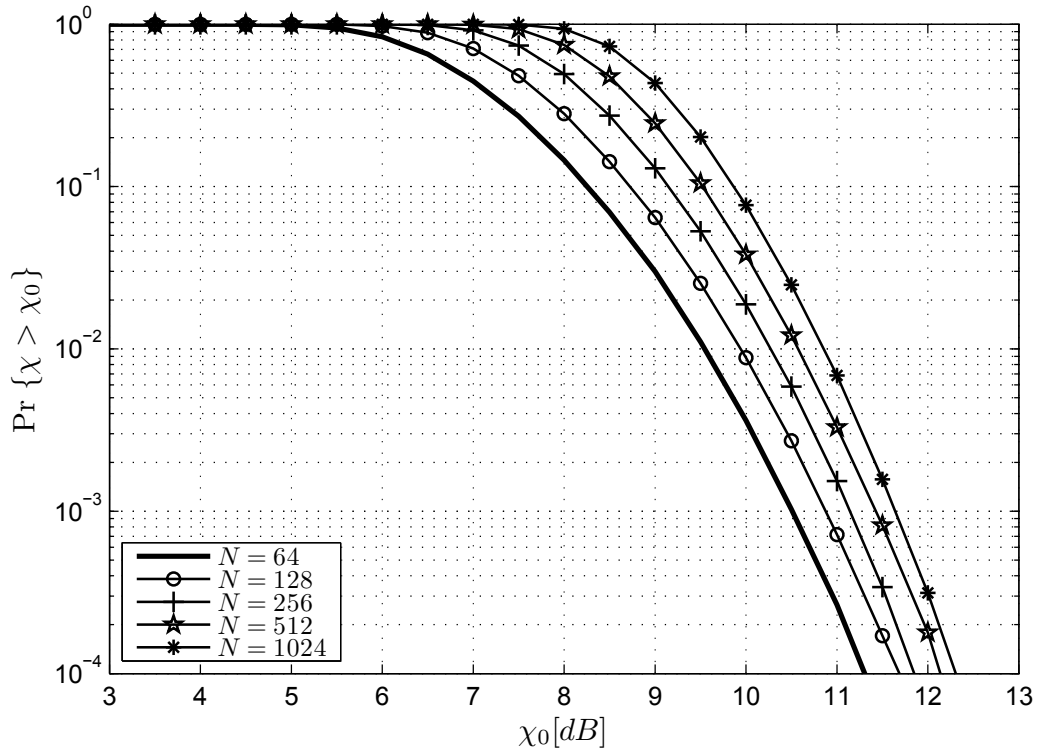
$$F_\chi(\chi) \approx \left(1 - e^{-\chi_0^2}\right)^{\alpha N} \quad (3.18)$$

donde  $\alpha = 2.8$  es un parámetro determinado mediante simulaciones. Como se ha demostrado [Ochiai and Imai, 2001] esta aproximación no sólo carece de justificación teórica, sino que también produce algunas discrepancias con los resultados de simulación para valores de  $N$  grandes.

En la Fig. 3.1 se puede observar el comportamiento estadístico de la PAPR, a través de la CCDF de sistemas OFDM con  $N = \{64, 128, 256, 512, 1024\}$  subportadoras y con modulación QPSK. Se puede observar que la probabilidad de que la PAPR supere el umbral  $\chi_0$  aumenta a medida que crece el valor de  $N$ .

### 3.1.2. CF (*Crest Factor*)

El factor de cresta denotado por  $\mathcal{F}_C$ , es una métrica que puede describir las grandes fluctuaciones en términos de magnitud (no de potencia) y se define como la raíz cuadrada de



**Figura 3.1:** CCDF de la PAPR para la señal OFDM banda base en tiempo discreto, donde se considera  $N = \{64, 128, 256, 512, 1024\}$  subportadoras y modulación QPSK.

la PAPR [Cho et al., 2010], entonces

$$\mathcal{F}_C = \sqrt{\chi} \quad (3.19)$$

siendo  $\chi$  la PAPR de la señal OFDM en el dominio del tiempo.

### 3.1.3. CM (*Cubic Metric*)

La métrica cúbica (CM - *Cubic Metric*) es una medida nueva definida por el 3GPP [3GPP, 2004], que refleja la potencia de la señal a la tercera potencia debido al hecho de que la mayor distorsión introducida por el HPA es causada por el producto de intermodulación de tercer orden. Matemáticamente se define como [3GPP, 2006],

$$\mathcal{C}_M = \frac{\mathcal{C}_{M_{\text{net}}} - \mathcal{C}_{M_{\text{ref}}}}{K} [\text{dB}], \quad (3.20)$$

donde  $\mathcal{C}_{M_{\text{net}}}$  es la CM neta de la señal, dada en [dB]. Si se considera la señal discreta banda base en el dominio del tiempo  $x[n]$ , entonces la  $\mathcal{C}_{M_{\text{net}}}$  viene definida por,

$$\mathcal{C}_{M_{\text{net}}}\{x[n]\} = 20 \log_{10} \left( \sqrt{E \left\{ \left( \frac{x[n]}{\sqrt{E\{x[n]\}}} \right)^3 \right\}} \right) \text{ [dB]}, \quad (3.21)$$

$\mathcal{C}_{M_{\text{ref}}}$  es la CM de la señal de referencia y  $K$  es una constante. Para enlaces LTE descendentes se considera  $\mathcal{C}_{M_{\text{ref}}} = 1.52$  [dB] y  $K = 1.56$  [Deumal et al., 2011].

## 3.2. Clasificación de las técnicas de reducción de la PAPR

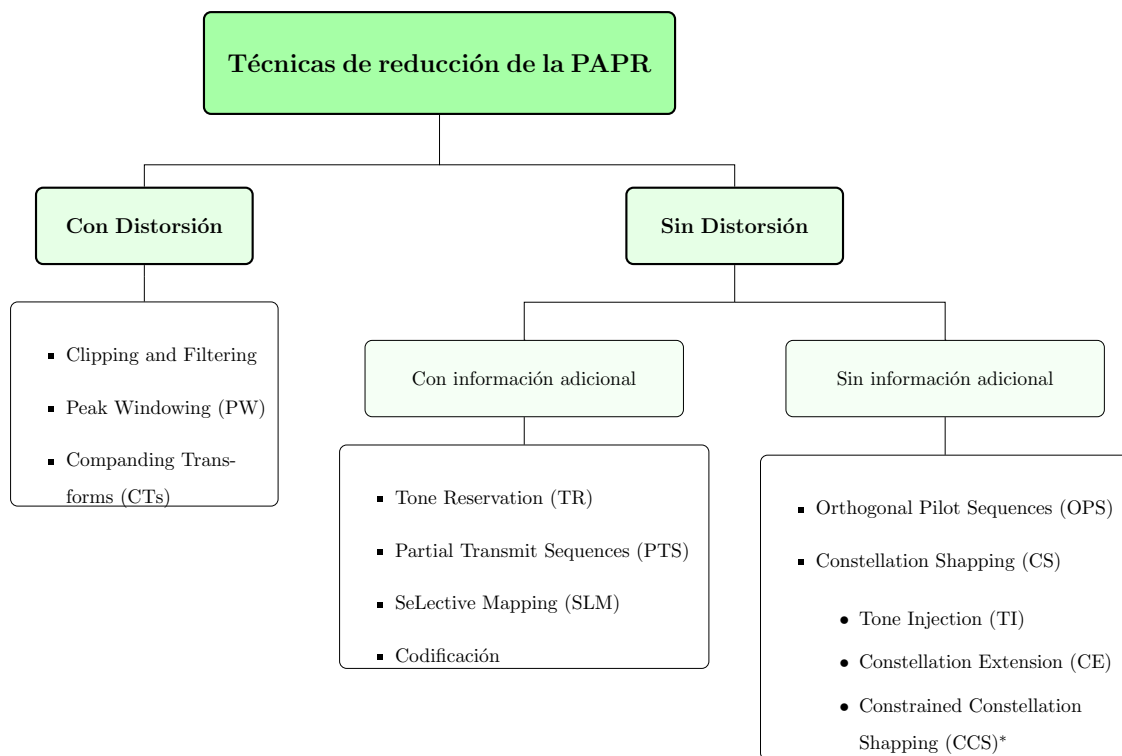
En la literatura se han propuesto varias técnicas para la reducción de la PAPR de los sistemas OFDM. Estas técnicas se clasifican en dos grandes grupos (véase Fig. 3.2) (1) con distorsión, que se considera a aquellas técnicas que introducen distorsión en la señal, y (2) las técnicas que no introducen distorsión y que buscan representar de forma distinta la señal de tal forma que su PAPR sea menor. Cada una de las diferentes técnicas se presenta a continuación, donde se describe su funcionamiento, sus ventajas e inconvenientes y las publicaciones más destacadas relacionadas con cada una de ellas. Se hace énfasis en las técnicas CE (*Constellation Extension*) que son las que se abordarán como solución en los siguientes capítulos.

### 3.2.1. Técnicas con distorsión de la señal

Las técnicas con distorsión reducen significativamente la PAPR, pero al distorsionar la señal transmitida antes de que ésta pase por el HPA, introducen radiación fuera y dentro de banda, y por lo tanto, provocan un incremento en la BER. Dentro de esta categoría, el método de reducción de la PAPR más simple es Recorte y Filtrado (CAF - *Clipping and Filtering*) y como mejoras a esta técnica se han propuesto los esquemas: *Peak Windowing* (PW) y *Companding Transforms* (CTs).

#### 3.2.1.1. Técnicas CAF

El esquema CAF es considerado como la técnica más simple de reducción de la PAPR con distorsión de la señal. Consiste básicamente en recortar o limitar las partes de la señal



**Figura 3.2:** Clasificación de las técnicas de reducción de la PAPR.

\*La técnica CSS es estrictamente una técnica con distorsión en la señal, pero por la forma en que se lleva a cabo se ha puesto dentro de este grupo de esquemas, para una mejor organización.

que están por encima de un nivel permitido, para de esta manera, evitar las no linealidades provocadas por la saturación del HPA [O’neill and Lopes, 1995].

El vector  $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]$  recoge las muestras de la señal compleja banda base que se obtiene a la salida del modulador OFDM, la cual se recorta por encima de un umbral  $A_c$  predeterminado; así las muestras de la señal recortada se agrupan en el vector  $\mathbf{x}' = [x'[0], \dots, x'[N-1]]$ , que se define como

$$x'[n] = \begin{cases} x[n] & |x[n]| \leq A_c \\ Ae^{j\varphi(x[n])}, & |x[n]| > A_c \end{cases} \quad (3.22)$$

donde  $\varphi(x[n])$  es la fase de  $x[n]$ .

Varios autores utilizan un umbral de recorte normalizado, denominado Tasa de Recorte (*Clipping Ratio*), que se denota como  $CR$  y se define como

$$\begin{aligned} CR &= \frac{A_c}{E\{x[n]\}} \\ &= 20 \log_{10} \frac{A_c}{E\{x[n]\}} \text{ [dB]} \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde  $A_c$  es el umbral de recorte, y  $E\{x[n]\}$  es la potencia media de la señal OFDM  $x[n]$ .

Los efectos de recortar la amplitud de la señal se han estudiado en diferentes trabajos. Así, por ejemplo [Bahai and Saltzberg, 1999] considera el recorte como una fuente de ruido aditivo gaussiano que produce radiaciones dentro y fuera de banda. Ahora, si se considera sobremuestrear la señal antes de que sea recortada, se consigue una comprensión del espectro, y de esta manera se consigue disminuir los efectos ocasionados por la distorsión dentro de banda [Ochiai and Imai, 2000a]. Por otro lado, la radiación fuera de banda puede eliminarse si se coloca un filtro después de recortar la señal [Ochiai and Imai, 2000b] para mejorar la BER. Sin embargo, esta práctica puede dar lugar a la regeneración de los picos en la envolvente de la señal. Los trabajos presentados en [Armstrong, 2002], [Leung et al., 2002], [Wang and Tellambura, 2005] proponen repetir varias veces el procedimiento “recorte-filtrado” para reducir la reaparición de los picos. En [Wang and Luo, 2011], se desarrolla un método de optimización convexa para que el proceso iterativo de recorte y filtrado se determine de forma óptima, donde la respuesta en frecuencia del filtro para cada iteración es la función objetivo, de tal manera que el filtro se diseña para minimizar las distorsiones y de esta modo conseguir que la PAPR se encuentre por debajo de un umbral fijado.

En la Fig. 3.3 se ilustra la reducción de la PAPR y la BER de una señal OFDM con  $N = 128$  subportadoras y modulación QPSK. Se considera un conjunto de valores de  $CR = \{0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6\}$ . En estas figuras la letra “C” denota el caso donde sólo se recorta la amplitud y “CF” con recorte y filtrado de la señal. En la Fig. 3.3a se observa que la PAPR de la señal decrece significativamente después de recortar la amplitud, pero se observa que se incrementa un poco después del filtrado. Además, se puede notar que mientras más pequeño es el valor de  $CR$ , más grande será la reducción de la PAPR. En la Fig. 3.3b se presentan los resultados de la BER, que muestra que la tasa de error de bit empeora a medida que el valor de  $CR$  decrece.

### 3.2.1.2. Técnicas PW

A diferencia de la técnica CAF, donde los picos se recortan estrictamente cuando superan un determinado umbral, de forma general, el método  $PW^1$  (*Peak Windowing*) limita los picos elevados de la señal OFDM en el dominio del tiempo  $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N - 1]]$  multiplicándolos por una función de pesos, llamada en la literatura como función ventana [Van Nee and de Wild, 1998]. Así las muestras de la nueva señal OFDM en el dominio del tiempo  $\mathbf{x}' = [x'[0], \dots, x'[N - 1]]$  se define por

$$x'[n] = x[n]f_w[n] \quad (3.24)$$

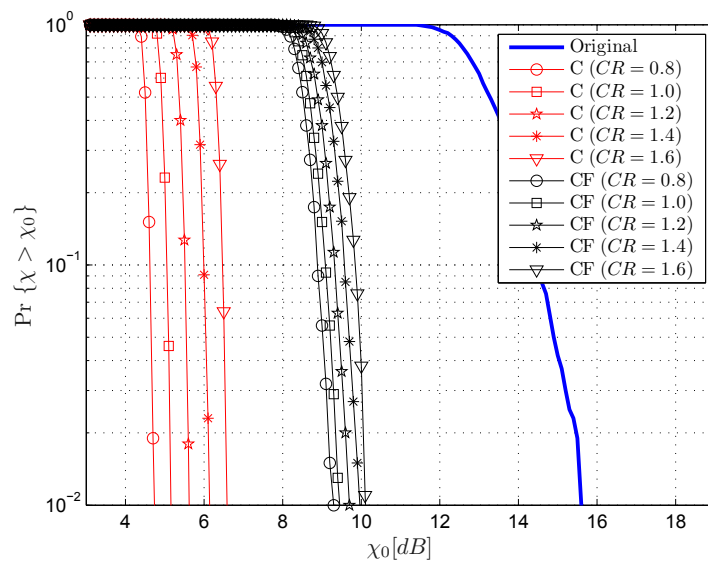
siendo  $f_w[n]$  la función ventana. Ejemplos de estas funciones son ventanas de tipo: *Kaiser*, *Hanning* y *Hanning* [Pauli and Kuchenbecker, 1998].

Para reducir la PAPR, la función ventana se debe alinear con las muestras de señal de tal forma que su valle se multiplica por los picos de la señal, mientras que sus amplitudes más largas se multiplican por las muestras de la señal de amplitud menor. Esta acción atenúa los picos de la señal de una manera más suave que simplemente recortando la señal, teniendo como resultado una disminución en las distorsiones introducidas que son propias del esquema PW.

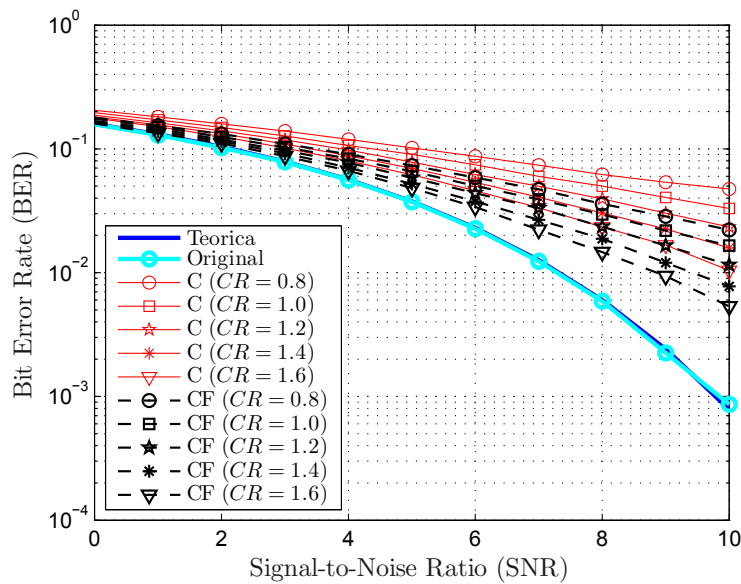
En los sistemas prácticos, cuando la señal tiene varios picos sucesivos de tamaño menor a un medio del tamaño de la ventana, desafortunadamente las ventanas se superponen, lo que

---

<sup>1</sup>Traducido al español como “pico enventanado”



(a) CCDF de la señal OFDM con  $N = 128$  subportadoras y modulación QPSK



(b) BER de la señal OFDM con  $N = 128$  subportadoras y modulación QPSK

**Figura 3.3:** CCDF y BER de la señal OFDM con  $N = 128$  subportadoras y modulación QPSK con técnica CAF para reducir la PAPR. Se consideran los valores  $CR = \{0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6\}$ .

conlleva que los picos sean atenuados muy por debajo del nivel requerido, degradando aún más la BER. Como solución a este efecto [Vaananen et al., 2002] y [Cha et al., 2008] proponen el

uso de filtros con estructura de realimentación, que es referenciada en la literatura como FPW (*Feedback-Structured Peak Windowing*).

### 3.2.1.3. Técnicas CTs

El esquema de reducción de los picos de potencia, llamado CTs<sup>2</sup> (*Companding Transforms*) es típicamente utilizado en señales de voz para optimizar el número de bits por muestra. Debido a que OFDM y las señales de voz se comportan de forma similar, en el sentido de que los picos elevados ocurren de forma infrecuente, la misma técnica CTs puede ser extrapolada para reducir la PAPR de los sistemas OFDM [Wang et al., 1999].

El objetivo de la técnica CTs es convertir la señal OFDM en el dominio del tiempo  $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]$ , según sea la distribución de potencia de dicha señal, para conseguir que se atenúen las partes de la señal con picos elevados, mientras que las zonas con amplitudes bajas se amplifican [Huang et al., 2001a] y [Huang et al., 2001b]. A pesar que el esquema CTs tiene una buena prestación en reducción de la PAPR, aumenta la BER ya que introduce distorsión en la señal transmitida; además, al intentar recuperar la señal original (*decomponder*) en el lado del receptor se podría también expandir el ruido del canal.

La señal OFDM transformada  $\mathbf{x}' = [x'[0], \dots, x'[N-1]]$  se define como

$$\mathbf{x}' = CT(\mathbf{x}) \quad (3.25)$$

donde  $CT(\cdot)$  denota la transformada de compansión que debe satisfacer las siguientes condiciones:

- $E\{|CT(\mathbf{x})|^2\} = E\{|\mathbf{x}|^2\}$ ,
- $\begin{cases} |CT(\mathbf{x})| \geq |\mathbf{x}|, & \text{si } |\mathbf{x}| \leq m \\ |CT(\mathbf{x})| < |\mathbf{x}|, & \text{resto} \end{cases}$

donde  $m$  denota el valor de inflexión de la transformada y  $E\{\cdot\}$  es la esperanza matemática.

De forma general, la literatura clasifica en tres clases al esquema CTs, según el tipo de transformada que se utilice, a saber, LST (*Linear Symmetrical Transform*), LAST (*Linear Asymmetrical Transform*) y NLCT (*NonLinear Companding Transforms*) [Huang et al., 2001a].

---

<sup>2</sup>Traducida al español como “Transformadas de Compansión”, en donde la palabra compansión está formada de compresión y expansión



Sin embargo, en [Rahmatallah et al., 2013] se demuestra que los esquemas NLCT pueden degradar en menor proporción la BER que otras clases de CTs, alcanzando el mismo nivel de reducción de la PAPR.

Una de las primeras técnicas no lineales propuestas para reducir la PAPR de los sistemas OFDM, fue  $\mu$ -law CTs, ampliamente estudiado en los trabajos [Wang et al., 1999], [Huang et al., 2001b], [Wang et al., 2003], [Pratt et al., 2006] y [Hsu and Liao, 2012]. La técnica  $\mu$ -law CTs mantiene los picos de la señal, pero aumenta las partes con amplitudes más bajas, obteniéndose así una señal con una potencia media menor, lo que conduce a una PAPR más baja. En el receptor, la señal debe ser recuperada antes de la demodulación.

En [Jiang and Zhu, 2004] se plantea un esquema NLCT, donde la transformada de compansión es una función de error, que transforma la distribución Gaussiana de la señal en una distribución cuasi-uniforme. Por otro lado, el trabajo [Jiang et al., 2007] propone transformar la distribución Rayleigh de la envolvente compleja en una distribución uniforme. Trabajos similares se tienen en [Hou et al., 2009] y [Jeng and Chen, 2011], los cuales proponen transformar la distribución de la señal en una distribución trapezoide; de hecho la propuesta [Hou et al., 2009] es un caso más general del trabajo presentado por [Jiang et al., 2007]. Se han propuesto técnicas NLCT con diferentes tipos de transformadas para reducir la PAPR: exponenciales [Jiang et al., 2005a] y [Jiang et al., 2005b], logarítmicas [Gong et al., 2005], tangentes hiperbólicas [Yang et al., 2007] y [Lowe and Huang, 2007] y transformadas con expansión a trozos [Hou et al., 2010].

### 3.2.2. Técnicas sin distorsión de la señal

Como alternativa para combatir el problema de la PAPR en los sistemas OFDM, se han propuesto varias técnicas sin distorsión en la literatura. Estos métodos consisten en procesar la señal OFDM con un conjunto de secuencias distintas que representen la misma información pero con una PAPR menor. Las técnicas que caen dentro de esta categoría pueden o no requerir la transmisión de información adicional hacia el receptor. Además, se debe proteger dicha información de control para conseguir una demodulación correcta de la señal. La principal característica de estos esquemas es que no introducen una distorsión adicional en la señal OFDM, y por tanto, no incrementan la tasa de error de bit. Estos métodos se clasifican en los siguientes grupos:

- Técnicas con información adicional
- Técnicas sin información adicional

### 3.2.2.1. Con información adicional

Dentro de este grupo se revisan aquellos esquemas de reducción de la PAPR que requieren la transmisión de información adicional hacia el receptor, con la finalidad de que la señal recibida pueda ser recuperada correctamente antes de ser demodulada. El transporte de esta información adicional conlleva una pérdida desfavorable de la velocidad de transmisión de los datos. Entre los esquemas más reconocidos están:

- Técnica TR (*Tone Reservation*)
- Técnica PTS (*Partial Transmit Sequences*)
- Técnica SLM (*SeLected Mapping*)
- Técnicas de codificación

#### (a) Técnica TR

El esquema TR (*Tone Reservation*) fue propuesto en [Tellado-Mourello, 1999] y consiste en reservar un subconjunto de ciertos tonos para reducir la PAPR. Estos tonos usualmente no llevan información de datos y son de baja SNR.

Se define un vector  $\mathbf{c} = [c[0], \dots, c[N-1]]$  que recoge las muestras de una señal en el dominio del tiempo que se le añade a las muestras de la señal OFDM en el dominio del tiempo  $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]$  con la finalidad de cambiar la distribución estadística de la señal para reducir la PAPR. Si se obtiene la correspondiente señal en el dominio de la frecuencia de dicho vector  $\mathbf{c}$ , entonces  $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}(0), \dots, \tilde{c}(N-1)]$  agrupa dichas muestras. Por lo tanto, el vector que reúne las nuevas muestras de la señal OFDM en el dominio del tiempo es  $\mathbf{x}' = [x'[0], \dots, x'[N-1]]$  que se obtiene a partir de

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{c} = \text{IDFT} \{ \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{c}} \} \quad (3.26)$$

donde  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}(0), \dots, \tilde{x}(N-1)]$  es el vector que contiene las muestras de los símbolos complejos OFDM en el dominio de la frecuencia y  $\tilde{x}(k)$  denota el símbolo complejo en la subportadora  $k$ -ésima,  $k = \{0, \dots, N-1\}$ .

Ahora, el objetivo de TR es encontrar los elementos del vector  $\tilde{\mathbf{c}}$  que hagan a la señal OFDM de PAPR mínima, es decir,

$$\min_{\tilde{\mathbf{c}}} \|\mathbf{x} + \mathbf{c}\|_{\infty} = \min_{\tilde{\mathbf{c}}} \|\mathbf{x} + \text{IDFT}\{\tilde{\mathbf{c}}\}\|_{\infty} \quad (3.27)$$

Si el símbolo OFDM tiene  $N_L$  subportadoras (tonos) libres y correspondientemente se tiene un conjunto de  $N_L$  subportadoras no nulas para el vector  $\tilde{\mathbf{c}}$ , es decir,  $\tilde{c}(k) \neq 0$  para  $k \in \{i_1, i_2, \dots, i_{N_L}\}$ , entonces para  $\tilde{\mathbf{x}}$ , los elementos  $\tilde{x}(k) = 0$  para  $k \in \{i_1, i_2, \dots, i_{N_L}\}$ . Las  $N_L$  posiciones no nulas del vector  $\tilde{\mathbf{c}}$  son llamadas subportadoras de reducción de picos (PRCs - *Peak Reduction Carriers*). Los valores óptimos de  $\tilde{\mathbf{c}}$  son determinados por medio de optimización convexa, usando métodos de programación lineal, que son altamente complejos [Tellado-Mourello, 1999].

Las posiciones de los elementos de  $\tilde{\mathbf{c}}$  dentro del símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia deben ser de conocimiento del receptor, por lo que este método requiere de la transmisión de información adicional.

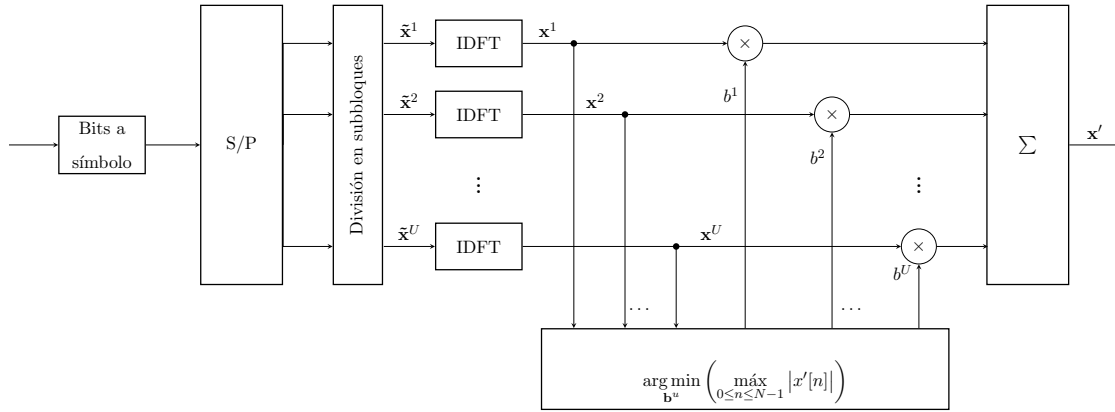
A partir de esta técnica se han publicado varios trabajos que buscan alternativas más eficientes para reducir la complejidad. Entre los trabajos más recientes de la técnica TR están: [Wang and Tellambura, 2008] que propone el uso de señales de cancelación de picos en el dominio del tiempo y filtrado de la señal en el dominio de la frecuencia hasta alcanzar un nivel de PAPR deseado, pero este método requiere muchas iteraciones que incrementan la complejidad de la técnica. [Behravan and Eriksson, 2009] define a TR como un problema de optimización convexa con restricciones de igualdad que pueden resolverse iterativamente. [Li et al., 2011] implementa el proceso de optimización de TR a través de aproximaciones de mínimos cuadrados. En el trabajo [Wang et al., 2012] se presenta TR basado en algoritmos genéticos.

#### (b) Técnica PTS

La técnica de reducción de la PAPR llamada PTS (*Partial Transmit Sequences*) fue originalmente introducida por [Müller, 1997] y consiste en dividir la señal OFDM en el dominio de la frecuencia  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}(0), \dots, \tilde{x}(N-1)]$  en  $U$  subconjuntos disjuntos representados por el vector  $\tilde{\mathbf{x}}^u = [\tilde{x}^u(0), \dots, \tilde{x}^u(N-1)]$  con  $1 \leq u \leq U$  de tal manera que la señal OFDM en el dominio de la frecuencia  $\tilde{\mathbf{x}}$  es la combinación de todos los  $U$  subbloques

(como se ilustra en la Fig. 3.4), es decir,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{u=1}^U \tilde{\mathbf{x}}^u. \quad (3.28)$$



**Figura 3.4:** Diagrama de bloques del transmisor OFDM con la técnica PTS para reducir la PAPR.

La señal en el dominio del tiempo para cada subbloque se obtiene mediante la correspondiente operación IDFT sobre cada subbloque y se denota como  $\mathbf{x}^u = [x^u[0], \dots, x^u[N - 1]]$  con  $1 \leq u \leq U$ . Luego, cada secuencia  $\mathbf{x}^u$  se multiplica independientemente por un vector de factores de fase, definido por el vector  $\mathbf{b}^u = [b^1, \dots, b^U]$ , donde cada elemento  $b^u = e^{j\varphi^u}$  y  $\varphi^u \in [0, 2\pi)$ . Las muestras de la señal después de la combinación se recogen en el vector  $\mathbf{x}' = [x'[0], \dots, x'[N - 1]]$  que se obtiene a partir de

$$\mathbf{x}' = \sum_{u=1}^U b^u \mathbf{x}^u. \quad (3.29)$$

El objetivo es obtener los elementos del vector  $\mathbf{b}^u$  que al combinarlos con  $\mathbf{x}^u$  la PAPR de la señal sea la menor posible; por tanto, se minimiza bajo el siguiente criterio [Müller, 1997]

$$\arg \min_{\mathbf{b}^u} \left( \max_{0 \leq n \leq N-1} |x'[n]| \right) \quad (3.30)$$

Para reducir la complejidad en la búsqueda de la solución óptima, la selección de los factores de fase, está limitado a un conjunto de  $G$  elementos [Han and Hong, 2005]. Así, el conjunto de factores de fase es  $\mathbf{b}^u = \{e^{j2\pi g/G} | g = 0, \dots, G - 1\}$ , con  $G^{U-1}$  conjuntos de factores de fase. El número de búsquedas se incrementa exponencialmente con el

número de subbloques. Además, esta técnica requiere calcular  $U$  operaciones IDFTs y la transmisión de  $\log_2 G^U$  bits adicionales para conseguir una decodificación correcta.

El rendimiento de PTS se ve afectado por los parámetros  $G$  y  $U$  [Han and Hong, 2005]. De forma general, PTS puede dividir los subbloques de tres formas distintas, dando lugar a las siguientes categorías: partición adyacente, partición intercalada y partición pseudoaleatoria [Müller, 1997]. En [Müller and Huber, 1997] se demuestra que la partición pseudoaleatoria es la mejor de las tres particiones.

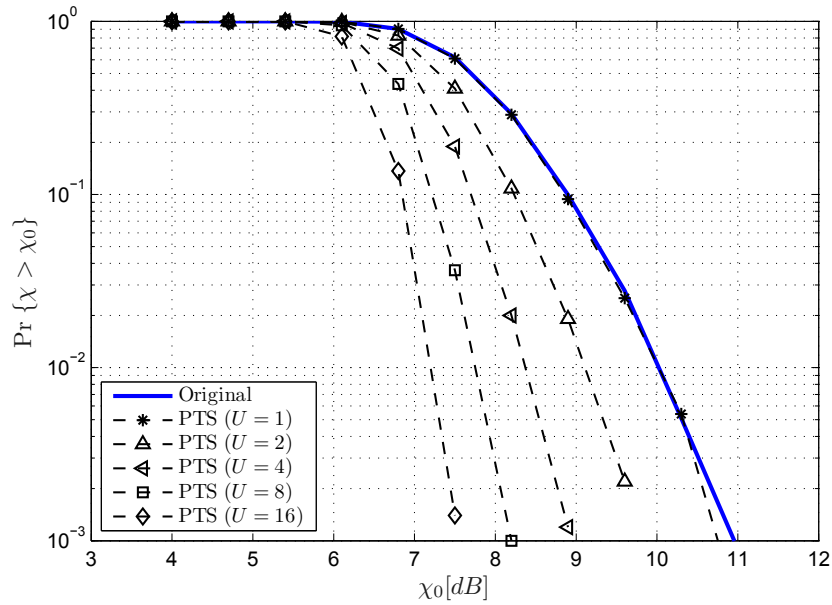
Se han presentado varios trabajos que reducen la complejidad de PTS, como por ejemplo: [Tellado-Mourello, 1999] y [Cimini and Sollenberger, 2000] proponen un esquema iterativo subóptimo para encontrar los factores de fase, y aunque la reducción de la PAPR no es tan buena como la técnica original, se consigue una implementación más simple. Otros trabajos más recientes que reducen la complejidad de la técnica PTS son [Han and Lee, 2004], [Yang et al., 2006], [Lim et al., 2006], [Ghassemi and Gulliver, 2008], [Hou et al., 2011] y [Cho et al., 2012].

En la Fig. 3.5 se presentan los resultados de la CCDF de la reducción de la PAPR con la técnica PTS para un sistema OFDM de 256 subportadoras y con modulación 16-QAM, donde el número de subbloques es el conjunto  $U = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ . En la figura, la etiqueta “Original” se usa para designar la señal OFDM sin ninguna técnica de reducción de la PAPR. Claramente, se puede observar que el comportamiento de la técnica es mejor a medida que también crece el número de subbloques.

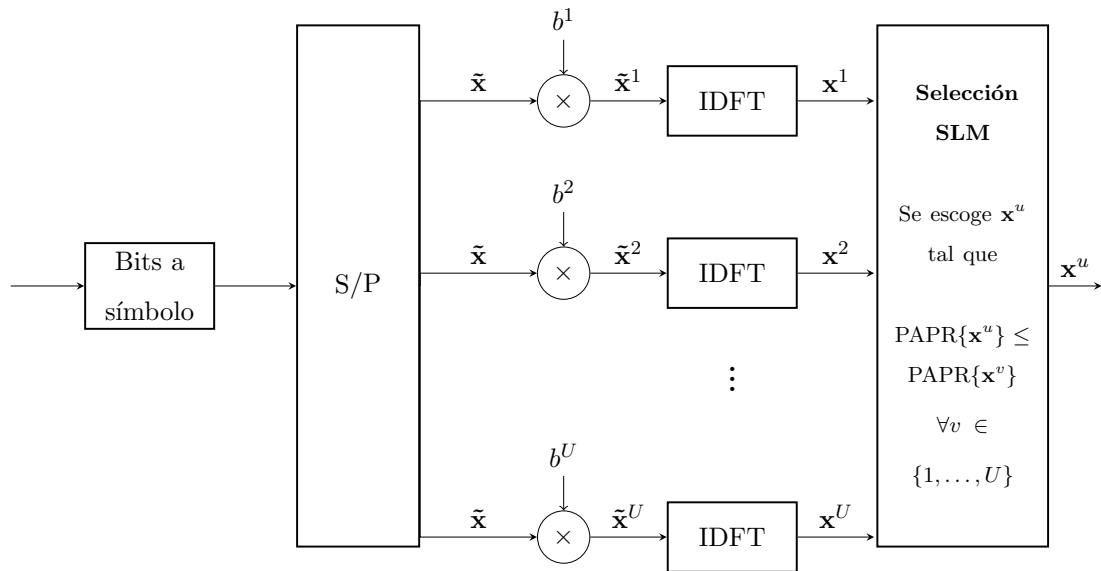
### (c) Técnica SLM

La técnica SLM (*SeLected Mapping*) propuesta originalmente en [Bäumel et al., 1996], tiene como objetivo generar un conjunto suficientemente diferente de símbolos OFDM todos representando la misma información que el símbolo original, para elegir aquél que proporcione la PAPR menor del conjunto disponible. El diagrama de bloques de la técnica SLM se presenta en la Fig. 3.6, cuyo funcionamiento se detalla a continuación.

Cada símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}(0), \dots, \tilde{x}(N-1)]$  se multiplica por  $U$  secuencias, cada una con diferentes factores de fases y de longitud  $N$ , que se recogen en el vector  $\mathbf{b}^u = [b^u(0), b^u(1), \dots, b^u(N-1)]$ ,  $1 \leq u \leq U$  y donde  $b^u(k) = e^{j\varphi_k^u}$  con  $\varphi_k^u \in [0, 2\pi)$ ,  $k = \{0, \dots, N-1\}$  y  $u = \{1, \dots, U\}$ , resultando en  $U$  secuencias de datos



**Figura 3.5:** CCDF de la PAPR con el esquema PTS para un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras y modulación 16-QAM.



**Figura 3.6:** Diagrama de bloques del transmisor OFDM con la técnica SLM para reducir la PAPR.

diferentes  $\tilde{\mathbf{x}}^u = [\tilde{x}^u(0), \tilde{x}^u(1), \dots, \tilde{x}^u(N-1)]$ . Luego, se obtiene para cada una de las  $U$  secuencias la correspondiente señal en el dominio del tiempo a través de la IDFT, cuyas muestras se recogen en el vector  $\mathbf{x}^u = [x^u[0], \dots, x^u[N-1]]$  para  $u = \{1, \dots, U\}$ .

El vector de secuencias de factores de fase  $\mathbf{b}^u = [b^1, \dots, b^U]$  debe minimizarse bajo el criterio,

$$\arg \min_{\mathbf{b}^u} \left( \max_{0 \leq n \leq N-1} |x^u[n]| \right) \quad (3.31)$$

La señal a ser transmitida se selecciona del conjunto  $\mathbf{x}^u = [x^u[0], \dots, x^u[N-1]]$ ,  $u = \{1, \dots, U\}$  disponible, bajo el criterio de la PAPR menor [Bäumel et al., 1996].

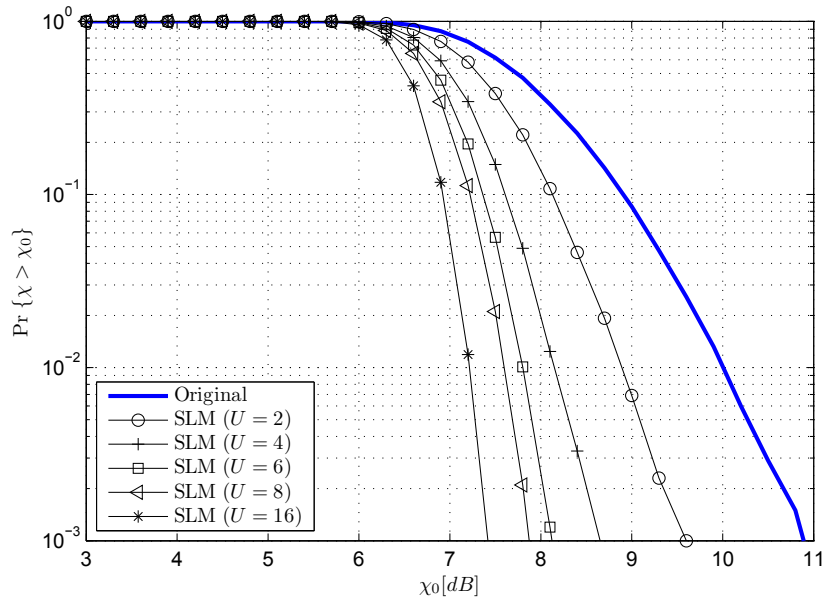
Para la implementación de SLM en los sistemas OFDM, se requiere que SLM realice  $U$  operaciones IDFTs y que se transmita  $\log_2 U$  bits por cada bloque de datos. La habilidad de SLM para reducir la PAPR dependerá del número de factores de fase  $U$  fijados. Se han propuesto varios trabajos para reducir la complejidad de SLM y el número de bits de información adicional. Por ejemplo, [Breiling et al., 2001] propone un esquema SLM que se abstiene de enviar la transmisión de información adicional hacia el receptor, conocido como BSLM (*Blind* - SLM) insertando etiquetas y codificación, a costa de introducir redundancia en la señal; otros trabajos que presentan a SLM sin información adicional son [Le Goff et al., 2009] y [Ji and Ren, 2013].

A modo de ejemplo, en la Fig. 3.7 se ilustran los resultados de la CCDF de la reducción de la PAPR con la técnica SLM para un sistema OFDM de 256 subportadoras y modulación QPSK, donde se considera el número de factores de fase  $U = \{2, 4, 8, 16\}$ . Se puede observar que el comportamiento de la técnica es mejor a medida que crece también el número de factores de fase disponibles.

Aunque ya se ha propuestos un esquema SLM, que no tiene la necesidad de transmitir información adicional hacia el receptor (BSLM), se ha incluido en esta categoría de técnicas, debido a que la técnica original y muchas de las mejoras sí lo requieren.

#### (d) Técnicas de codificación

El objetivo de estas técnicas es buscar la secuencia de códigos bloque que proporcione la PAPR mínima dentro de un conjunto disponible, la idea inicial fue introducida por [Jones et al., 1994]. Estos esquemas tienen la capacidad de realizar detección y corrección de errores, pero tienen una carga computacional exhaustiva debido a que hay que buscar la palabra código de PAPR menor, dentro de tablas de almacenamiento grandes tanto para la codificación como para la decodificación, especialmente cuando el número



**Figura 3.7:** CCDF de la PAPR con técnica SLM para un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras y modulación QPSK.

de subportadoras  $N$  es elevado. Existen varias propuestas con diferentes tipos de codificación, entre los que se destacan: Códigos Bloque Lineales (LBC - *Linear Block Codes*), Secuencias Complementarias Golay (GCSs - *Golay Complementary Sequences*) y Turbo Códigos (TC - *Turbo Codes*).

- Códigos Bloque Lineales (LBC - *Linear Block Codes*)** En los LBC, en lugar de dedicar algunos bits de las palabras código para mejorar el rendimiento de la BER, estos bits ahora se dedican a reducir la PAPR. El objetivo es escoger las palabras código de menor PAPR para su transmisión. En 1994, el trabajo de [Jones et al., 1994] propone usar un esquema LBC para que cada 3 bits de datos se mapeen en palabras código con longitud igual a 4 bits, añadiendo un bit de paridad. Más tarde se publicaron otros trabajos como: [Wulich, 1996] que propone el uso de un código cíclico de tasa 3/4 para cualquier número de subportadoras múltiplo de 4, donde la reducción de la PAPR conseguida fue de aproximadamente 3 [dB]. Un rendimiento similar, pero con complejidad menor se presenta en [Zhang et al., 1999] a través de codificación por subbloques (SBC - *Sub-Block Coding*). En [Jones and Wilkinson, 1996] se



expone la combinación de códigos (8, 4) LBC para ofrecer capacidad de control de errores y reducción de la PAPR de 4 [dB] en modulaciones multiportadora.

Para reducir la PAPR a través de códigos LBC, en [Ahn et al., 2000] y más recientemente en [Slimane, 2007] y [Hao and Lai, 2010] se presenta como alternativa que las palabras código se multipliquen por un vector de rotación de fase, de tal forma que la matriz de palabras código y el vector de rotación de fase seleccionados sean lo que proveen la PAPR mínima.

El artículo [Jiang and Zhu, 2005] propone reducir la complejidad de los esquemas de codificación a través de códigos bloque complementarios (CBC, *Complementary Block Codes*), donde los bits complementarios se insertan en medio de los bits de información para formar palabras código de PAPR menor.

El uso de códigos LDPC (*Low Density Parity Check*) también se han estudiado recientemente para reducir la PAPR en [Daoud and Alani, 2009] y [Qu et al., 2014]. El uso de códigos de fuente también se ha propuesto para controlar la PAPR de los sistemas OFDM en [Jiang and Li, 2010].

- **Secuencias Complementarias Golay (GCSs - *Golay Complementary Sequences*)** Las secuencias complementarias Golay [Golay, 1961] pueden usarse como palabras código para los sistemas OFDM. En las publicaciones que combinan pares de secuencias Golay con ciertos códigos Reed-Muller ([Davis and Jedwab, 1997], [Davis and Jedwab, 1999] y [Paterson, 2000]) se proporciona una potente manera de incorporar capacidad de corrección de errores y control de la PAPR, pero su uso está limitado a sistemas OFDM con pocas subportadoras. En el caso de sistemas OFDM con un mayor número de subportadoras, estos métodos resultan en pérdida de la tasa de transmisión y en un incremento considerable de la carga computacional, debido a la naturaleza exhaustiva del método para buscar los códigos adecuados. Algunos trabajos más recientes como [Taha and Liu, 2007], [Liu and Wu, 2010b] y [Liu and Wu, 2010a] estudian el uso de GCSs con constelaciones 16-QAM para reducir la PAPR. En [Gil Jiménez et al., 2008] se presenta el uso de GCSs con corrección de errores hacia adelante (FEC - *Forward Error Correction*) para reducir la PAPR en sistemas OFDM basados en redes WLAN.

- **Turbo Códigos (TC - *Turbo Codes*)** Una manera de aprovechar al máximo los turbo códigos para reducir la PAPR, es combinarlos con el método SLM. Las posibles secuencias SLM se generan con un codificador turbo con varios entrelazadores [Lin et al., 2003] [Abouda, 2004] y [Tsai et al., 2008]. Con esta combinación (SLM y TC) no se requiere la transmisión de información de control, pero si se comparan con la técnica SLM tradicional, se tiene degradación en la BER, producto de la incorrecta recuperación de la información. Sin embargo, los turbo códigos ofrecen la capacidad de control de errores.
- **Códigos BCH (*Bose-Ray CHaudhuri*)** Otras propuestas ofrecen el uso de códigos BCH para reducir la PAPR [Paterson and Tarokh, 2000], [Schmidt, 2008] y [Sabbaghian et al., 2011]. Especialmente [Paterson and Tarokh, 2000] muestra que las palabras código empleadas pueden conseguir que la envolvente de la señal OFDM exhiba fluctuaciones bajas. Sin embargo, se ve limitado por la falta de decodificadores prácticos dejando una brecha entre el rendimiento y el límite de Shannon. Para resolver esta brecha [Sabbaghian et al., 2011] propone el uso de decodificadores basados en el criterio de máximo a posteriori.

### 3.2.2.2. Sin información adicional

En las siguientes líneas se exponen aquellos esquemas de reducción de la PAPR que no requieren la transmisión de información adicional hacia el receptor para poder demodular la información de forma correcta. Dentro de estos métodos se pueden nombrar a:

- Técnicas CS (*Constellation Shapping*)
- Técnica con secuencias piloto

#### (a) Técnicas CS

Los esquemas CS (*Constellation Shapping*) hacen referencia a aquellos esquemas que mueven o insertan los puntos de la constelación del símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia. Dependiendo de la forma en que se desplazan los puntos de la constelación, se pueden agrupar en tres técnicas, a saber,

- Técnica TI (*Tone Injection*)

- Técnica CE (*Constellation Extension*)
- Técnica CCS (*Constrained Constellation Shapping*)
- **Técnica TI**

La técnica TI (*Tone Injection*) también fue propuesta junto a la técnica TR en el trabajo [Tellado-Mourello, 1999]. Tiene como objetivo incrementar el tamaño de la constelación, de tal manera que se pueda mapear cada punto de la constelación original  $\tilde{x}(k)$ ,  $k = \{0, \dots, N - 1\}$  en varios puntos equivalentes de una constelación expandida, donde se aprovechan los grados adicionales de libertad para reducir la PAPR. Esta técnica se llama TI porque substituye los puntos de la constelación originales en una constelación más grande “inyectando tonos” apropiadamente.

A diferencia de TR, está técnica no requiere de la transmisión de información adicional hacia el receptor, pero demanda de una energía por símbolo mucho mayor, producto de la extensión de la constelación.

Si las muestras de la señal original en el dominio de la frecuencia, que se recogen en el vector  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}(0), \dots, \tilde{x}(N - 1)]$ , se substituyen por una constelación expandida  $\tilde{\mathbf{x}}' = [\tilde{x}'(0), \dots, \tilde{x}'(N - 1)]$ , entonces cada subportadora  $k$ -ésima se obtiene a partir de

$$\tilde{x}'(k) = \tilde{x}(k) + \tilde{c}(k), \quad k = \{1, \dots, N - 1\} \quad (3.32)$$

siendo  $\tilde{c}(k)$  la secuencia de reducción de la PAPR en el dominio de la frecuencia para la subportadora  $k$ -ésima. Por consiguiente, la señal expandida en el dominio del tiempo  $\mathbf{x}' = [x'[0], \dots, x'[N - 1]]$  viene dada por

$$\begin{aligned} x'[n] &= x[n] + c[n] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{x}(k) + \tilde{c}(k)) e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N - 1 \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde  $x[n]$  y  $c[n]$  denotan, respectivamente, la señal OFDM original y secuencia de reducción de la PAPR en el dominio del tiempo. Cabe señalar que si las secuencias de reducción de la PAPR no son ortogonales, sus efectos deben eliminarse en recepción. Cada secuencia  $k$ -ésima  $\tilde{c}(k)$  se construye a partir de [Tellado-Mourello, 1999]

$$\tilde{c}(k) = a(k)\lambda + j \cdot b(k)\lambda \quad (3.34)$$

donde  $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$  es una constante, y  $a(k)$  y  $b(k)$  son dos valores escogidos para minimizar la PAPR.

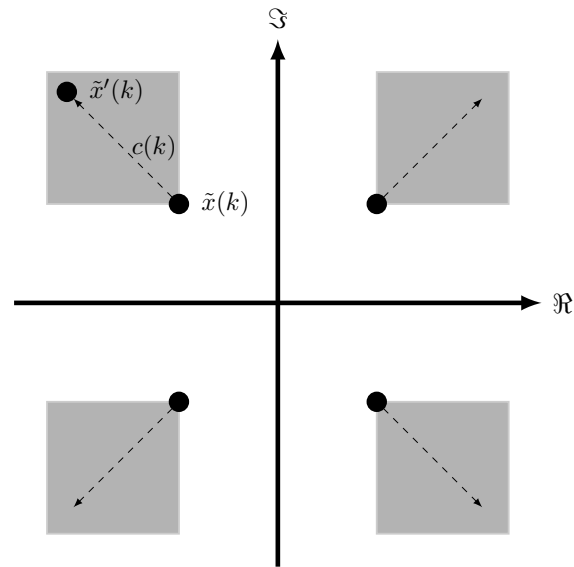
La solución óptima de TI (encontrar los valores de  $a(k)$  y  $b(k)$ ) requiere búsquedas exhaustivas de todas las combinaciones de las posibles permutaciones de la constelación.

En los trabajos recientes [Han et al., 2006] y [Han et al., 2008] se propone usar TI con constelaciones hexagonales para alcanzar la reducción de la PAPR con solo un pequeño incremento en la energía de bit por símbolo comparado con TI para constelaciones QAM. Por otro lado, [Damavandi et al., 2013] presenta a TI como un problema particular de optimización combinatoria, que se resuelve a través de los métodos *Cross-Entropy*.

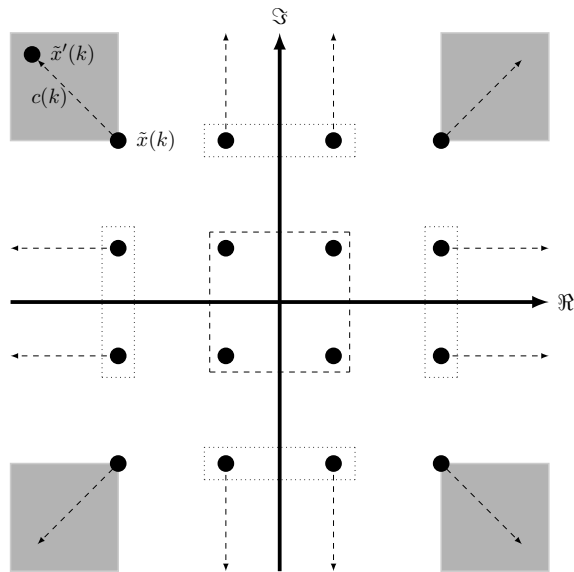
- **Técnica CE**

El objetivo del esquema CE (*Constellation Extension*) es minimizar la PAPR moviendo inteligentemente ciertos puntos externos del conjunto que forman parte de la constelación del símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia. Estos puntos se desplazan hacia afuera dentro de una región permitida (véase la Fig. 3.8), de tal forma que la distancia mínima no se vea afectada para no degradar la tasa de error de bit. Esta idea se explica fácilmente, en el caso de una modulación QPSK, como se ilustra en la Fig. 3.8a; la región permitida para desplazar los puntos corresponde a la zona sombreada. Para el caso de constelaciones de orden mayor, los puntos internos no se modifican para no afectar la distancia mínima, y los puntos externos de la constelación se moverán según su ubicación, a saber, los puntos de las esquinas pueden desplazarse dentro de la región sombreada, mientras que los de límites exteriores, sólo se desplazan en dirección de las flechas, como se observa en la Fig. 3.8b

Para expandir los puntos de la constelación del símbolo OFDM complejo  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}(0), \dots, \tilde{x}(N-1)]$  hacia cualquier punto de la región permitida se añade un factor de extensión  $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{C}$ , donde  $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}(0), \dots, \tilde{c}(N-1)]$  es un vector de tamaño  $1 \times N$  que recoge los factores de extensión para cada subportadora  $k$ -ésima. Como resultado se obtiene un nuevo símbolo complejo extendido, cuyas muestras se agrupan en el vector  $\tilde{\mathbf{x}}' = [\tilde{x}'(0), \dots, \tilde{x}'(N-1)]$ , siendo  $\tilde{x}'(k) = \tilde{x}(k) + \tilde{c}(k)$  el símbolo complejo



(a) Modulación QPSK



(b) Modulación 16-QAM

**Figura 3.8:** Regiones de extensión permitidas para la técnica CE.

extendido sobre la subportadora  $k$ -ésima y  $k = \{0, \dots, N - 1\}$ .

La correspondiente señal extendida en el dominio del tiempo  $\mathbf{x}' = [x'[0], \dots, x'[N - 1]]$ , a la salida de la IDFT, está dada por

$$x'[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{x}(k) + \tilde{c}(k)) e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (3.35)$$

Para determinar el conjunto de puntos de la constelación que se debe extender, en la literatura se han propuesto algunas versiones de la técnica CE. Así por ejemplo, ACE (*Active Constellation Extension*) [Krongold and Jones, 2003] y ACE-IPM (*ACE based on IPM*) [Wang and Leung, 2008] y [Yu et al., 2011] se presentan como problemas de optimización. En otros trabajos como [Sezginer and Sari, 2006] y [Sezginer and Sari, 2007] la decisión de qué símbolos se extenderán está basado en el cálculo de una métrica. En [Jabrane et al., 2010] la decisión está basada en redes neuronales mientras que en [Gil Jiménez et al., 2011] se propone que la extensión la realice un sistema difuso basado en ANFIS (*Adaptive Neural Fuzzy Inference Systems*). Debido a que la técnica CE es en la que se enmarca la Tesis, los detalles de estos esquemas se detallan en la sección 3.3.

#### ■ Técnica CSS

Este esquema reduce la PAPR moviendo ciertos puntos de la constelación original del conjunto que forman el símbolo OFDM, dentro un error permitido, llamado EVM (*Error Vector Magnitude*). La reducción de la PAPR que se consigue a través de esta técnica es significativa, pero a costa de degradar la BER. Una de las características principales de este esquema es que puede ser formulado como un problema de optimización, teniéndose las siguientes propuestas: [Aggarwal and Meng, 2006], [Wang and Yi, 2009], [Liu et al., 2009] y [Wang et al., 2011].

Por ejemplo, en [Aggarwal and Meng, 2006] los autores proponen minimizar la PAPR formulado el problema de minimización de la PAPR como esquema de optimización convexo SOCP (*Second Order Cone Program*). Las restricciones a las que está sujeto el problema son (1) el máximo EVM permitido y (2) la potencia promedio de las subportadoras libres. Este algoritmo considera  $N_d$  con ( $N_d < N$ ) subportadoras de datos en su proceso de optimización. Por tanto, si se considera que el símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}(0), \dots, \tilde{x}(N-1)]$  contiene los puntos de la constelación original y que  $\tilde{\mathbf{x}}' = [\tilde{x}'(0), \dots, \tilde{x}'(N-1)]$  agrupa los puntos de la constelación ideal, el EVM está definido por

$$EVM = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_d} \|\tilde{x}'(i) - \tilde{x}(i)\|}{N_d P_0}} \quad (3.36)$$

siendo  $N_d$  el número de subportadoras de datos que son indexadas por  $i_1, i_2, \dots, i_{N_d}$  y  $P_0$  es la potencia promedio de la constelación. Para resolver el problema SOCP se emplea el método IPM (*Interior Point Method*).

En [Wang and Yi, 2009], se expone la reducción de la PAPR como un problema SOCP para alcanzar una PAPR cuasi-constante. Por otro lado, el trabajo propuesto por [Liu et al., 2009] plantea minimizar el EVM para alcanzar un nivel de PAPR dado como restricción, por lo que también se resuelve a través del método IPM. El trabajo más reciente, [Wang et al., 2011] presenta la minimización del EVM como un problema no convexo QP (*Quadratic Program*) que se resuelve a través del método SDR (*SemiDefinite Relaxation*); las restricciones a las que está sujeto el problema de minimización del EVM es fijar un nivel de PAPR requerido y la de minimizar la potencia de las subportadoras libres.

### (b) Secuencias piloto

En los sistemas OFDM inalámbricos coherentes, los símbolos piloto se insertan usualmente en la rejilla 2D tiempo-frecuencia para estimar el canal. Si se considera que en cada símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo de  $N$  suportadoras, un subconjunto  $\Upsilon$  de subportadoras, con cardinalidad  $N_p = |\Upsilon|$  llevarán símbolos piloto, entonces el vector que recoge las muestras del símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia  $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}(0), \dots, \tilde{x}(N-1)]$  será

$$\tilde{x}(k) = \begin{cases} \tilde{p}(k), & k \in \Upsilon \\ \tilde{z}(k), & k \notin \Upsilon \end{cases} \quad (3.37)$$

donde  $\tilde{p}(k)$  y  $\tilde{z}(k)$  son, respectivamente, los símbolos piloto y de datos en la subportadora  $k$ -ésima, siendo  $k = \{0, \dots, N-1\}$ .

Por tanto, la correspondiente señal en el dominio del tiempo, a la salida de la IDFT  $x[n] = z[n] + p[n]$  también podría separarse en dos partes, como

$$x[n] = \begin{cases} p[n] &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \Upsilon} \tilde{p}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \\ z[n] &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \notin \Upsilon} \tilde{z}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \end{cases} \quad (3.38)$$

donde  $p[n]$  y  $z[n]$  hacen referencia a la señales en el dominio del tiempo de pilotos y datos, respectivamente.

La técnica OPS (*Orthogonal Pilot Sequences*) [Fernández-Getino García et al., 2006] propone el uso de un conjunto predefinido de  $M$  secuencias piloto ortogonales cada una de longitud  $N_p$  ( $M \leq N_p$ ). Para cada símbolo OFDM, se selecciona la secuencia piloto que al combinarse con los datos proporcione la PAPR más baja del conjunto disponible. Este esquema subóptimo reduce la complejidad si se compara con el uso de valores de pilotos óptimos. Además, evita la transmisión de información adicional hacia el receptor, ya que es posible una detección ciega debido a las condiciones de ortogonalidad de las secuencias piloto [Fernández-Getino García et al., 2006]. Para el símbolo OFDM, la secuencia  $\tilde{\mathbf{p}} = [\tilde{p}(0), \dots, \tilde{p}(N-1)]$  recoge los símbolos piloto en el dominio de la frecuencia en las correspondientes posiciones de los símbolos piloto, mientras que las demás posiciones se ponen a cero, según

$$\tilde{p}(k) = \begin{cases} \tilde{p}(k), & k \in \Upsilon \\ 0, & k \notin \Upsilon \end{cases} \quad (3.39)$$

OPS dispone de un conjunto finito de  $M$  secuencias piloto,  $\tilde{\mathbf{p}}_m$  con  $m \in \{1, \dots, M\}$ , es decir,  $\{\tilde{\mathbf{p}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{p}}_M\}$ . Estas secuencias piloto son ortogonales entre sí, por tanto deben cumplir la condición de ortogonalidad

$$\langle \tilde{\mathbf{p}}_m, \tilde{\mathbf{p}}_n \rangle = 0 \quad m \neq n \quad m, n = \{1, \dots, M\} \quad (3.40)$$

siendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto escalar.

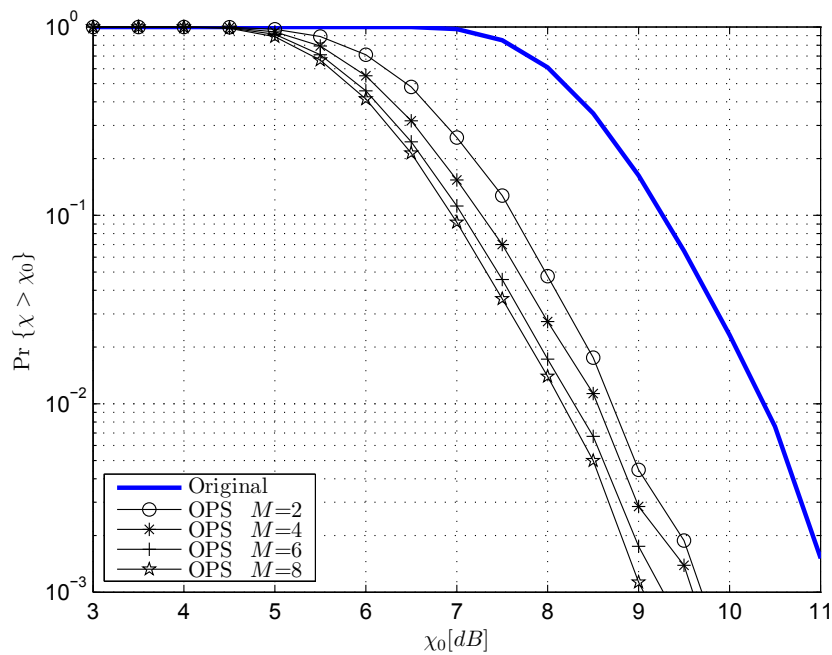
Particularmente, si se emplean las conocidas secuencias *Walsh-Hadamard* para los símbolos piloto, entonces  $\tilde{p}(k) \in \{1, -1\}$ , y por tanto  $\langle \tilde{\mathbf{p}}_m, \tilde{\mathbf{p}}_n \rangle = N_p \delta[m - n]$ ,  $m, n = \{1, \dots, M\}$ , donde  $\delta[\cdot]$  denota la función delta de Kronecker.

En esta técnica se usan las secuencias piloto del conjunto disponible  $\tilde{\mathbf{p}}_m$ ,  $m = \{1, \dots, M\}$  para formar  $M$  símbolos OFDM en el dominio de la frecuencia  $\tilde{x}_m(k)$   $k = \{0, \dots, N-1\}$ , según (3.37). Seguidamente, se obtienen  $M$  símbolos OFDM en el dominio del tiempo a través de la operación IDFT según (3.38). Luego, se selecciona el símbolo OFDM  $m$ -ésimo, que proporcione la PAPR menor del conjunto disponible. Por lo tanto, el algoritmo OPS lleva a cabo  $M$  operaciones IDFT por cada símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo dejando una implementación práctica compleja.

A modo de ejemplo, en la Fig. 3.9 se ilustran los resultados de la CCDF de la reducción de la PAPR con la técnica OPS [Fernández-Getino García et al., 2006] para un sistema



OFDM de 256 subportadoras y modulación 16-QAM, donde el número de secuencias piloto ortogonales considerado es  $M = \{2, 4, 6, 8\}$ , en donde cada  $N_f = 8$  se inserta un símbolo piloto, es decir,  $N_p = N/N_f = N/8$  pilotos por símbolo OFDM. Se puede observar que el comportamiento de la técnica es mejor a medida que crece el número de secuencias piloto.



**Figura 3.9:** CCDF de la PAPR con técnica OPS para un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras y modulación 16-QAM.

### 3.3. Técnicas CE (*Constellation Extension*)

Se ha considerado oportuno, que las versiones existentes actualmente en la literatura del esquema CE sean considerados en una sección aparte, ya que esta información será usada en los capítulos siguientes, por lo que se revisarán con más detalle en esta sección del capítulo. Cada una se detalla a continuación.

### 3.3.1. ACE (*Active Constellation Extension*)

La técnica ACE, propuesta en [Krongold and Jones, 2003], se formula como un problema de optimización. Así, para el símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo el problema de minimización es

$$\min_{\tilde{\mathbf{c}} \in C} \max_n |x'[n]|^2, \quad (3.41)$$

siendo  $\tilde{\mathbf{c}} = [\tilde{c}(0), \dots, \tilde{c}(N-1)]$  un vector de tamaño  $1 \times N$  que recoge los valores con los que se debe extender la constelación,  $C$  representa la región de extensión permitida (véase Fig. 3.8) y  $x'[n]$  es el símbolo OFDM extendido dado por

$$x'[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{x}(k) + \tilde{c}(k)) e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.42)$$

donde  $\tilde{x}(k)$  y  $\tilde{c}(k)$  son, respectivamente, el símbolo OFDM original y el factor de extensión sobre la subportadora  $k$ -ésima y  $k = \{0, \dots, N-1\}$ .

Este tipo de problema representa un caso especial de optimización QCQP (*Quadratically Constrained Quadratic Program*), cuya solución es altamente compleja. Los autores de [Krongold and Jones, 2003] proponen dos soluciones subóptimas para resolver el problema de minimización de la PAPR y reducir la carga computacional asociada con el problema formulado en (3.41), a saber: POCS (*Projection onto Convex Sets*) y SGP (*Smart Gradient Project*). Por ejemplo, en el caso de POCS, la minimización consiste en recortar los picos de la señal en el dominio del tiempo que superen un umbral dado  $A$ , para obtener

$$x'[n] = \begin{cases} x[n] & |x[n]| \leq A \\ Ae^{j\theta[n]} & |x[n]| \geq A \end{cases} \quad (3.43)$$

donde  $\theta[n]$  es la fase de  $x[n]$ .

Seguidamente, se obtiene la correspondiente señal en el dominio de la frecuencia, vía DFT. Si los picos recortados se corresponden, en el dominio de la frecuencia, con puntos de la constelación que estén fuera de la región permitida, hay que volver a colocarlos en su posición original y repetir este procedimiento hasta no tener puntos fuera de la región permitida o hasta alcanzar un número máximo de iteraciones que se ha fijado previamente. Estos algoritmos subóptimos siguen siendo complejos debido al número de operaciones DFT/IDFT que se realiza en cada iteración.

### 3.3.2. Basadas en métrica

Para decidir el conjunto de símbolos complejos del bloque OFDM en el dominio de la frecuencia que se deben extender [Sezginer and Sari, 2006] y [Sezginer and Sari, 2007] proponen el uso de una métrica, que mide la contribución de cada subportadora a la formación de los picos en la señal OFDM a la salida de la IDFT. Los autores proponen tres posibles variantes de los algoritmos basados en métrica: predistorsión de amplitud simple (SAP - *Simple Amplitude Predistortion*) [Sezginer and Sari, 2006], predistorsión de amplitud multinivel (MAP - *Multi-level Amplitude Predistortion*) [Sezginer and Sari, 2007] y predistorsión de símbolo complejo (CSP - *Complex Symbol Predistortion*) [Sezginer and Sari, 2007].

De forma general, para los algoritmos SAP y MAP, la métrica para el símbolo complejo  $k$ -ésimo en el dominio de la frecuencia está dada matemáticamente por

$$\mu(k) = \sum_{n \in \mathcal{S}_K} \omega(n) f(n, k) \quad (3.44)$$

siendo,  $f(n, k) = -\cos(\varphi_{nk})$  una función que mide el ángulo de fase entre la señal de entrada  $\tilde{x}(k)$  y de salida  $x[n]$  de la IDFT,  $\varphi_{nk}$  es el ángulo entre las muestras,  $\omega(n)$  es una función de pesos para  $x[n]$ , definida por

$$\omega(n) = |x[n]|^p \quad (3.45)$$

donde  $p$  un parámetro predefinido previamente y  $\mathcal{S}_K$  es un conjunto de tamaño  $K = |\mathcal{S}_K|$  cuyos elementos son los índices de las muestras  $x[n]$  que superan un determinado valor  $A$  (el valor de  $A$  puede ser considerado como un valor por el cual se obtiene la mayor disminución en la PAPR promedio; como regla general, el valor de  $A$  debe ser menor que la PAPR objetivo [Sezginer and Sari, 2006]).

Una vez calculada la métrica para todos los símbolos complejos en el dominio de la frecuencia, éstos se ordenan de forma descendente y el conjunto  $\mathcal{S}_L$  que corresponda a los  $L = |\mathcal{S}_L|$  símbolos con valores de métrica más grande se seleccionan para ser extendidos.

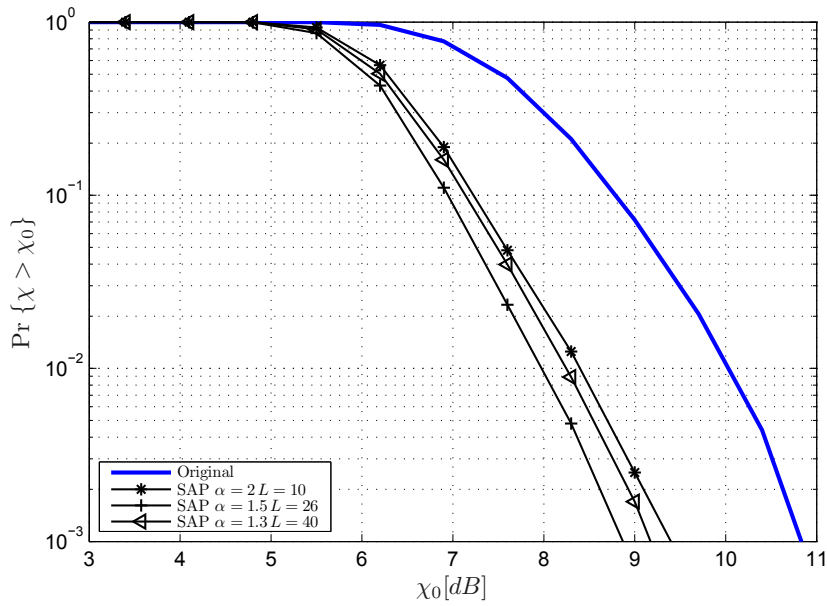
Para el algoritmo SAP, el factor de extensión es fijo para todas las subportadoras y todos los símbolos OFDM  $c(k) = \alpha \in \mathbb{R}$  ( $|\alpha| \geq 1$ ). El rendimiento de SAP es limitado debido a que  $\alpha$  es restringido  $\forall k, \ell$ . Además,  $\alpha$  y  $L$  son valores sugeridos por los autores<sup>3</sup>, a saber,  $\alpha = \{1.3, 1.55, 2\}$  con  $L = \{40, 26, 10\}$  respectivamente [Sezginer and Sari, 2006].

<sup>3</sup>tras una búsqueda empírica exhaustiva

Para MAP, el factor de extensión varía de símbolo a símbolo, de una manera intuitiva sugerida por los autores es  $c(k) = (1 + \beta\sqrt{\mu(k)})$ , siendo  $\beta \in \mathbb{R}$  un número real positivo.

Por otro lado, para el algoritmo CSP se redefine la métrica dada por (3.44) en dos partes, una para la parte real y otra para la imaginaria de la señal.

A modo de ejemplo, en la Fig. 3.10 se ilustra los resultados de la CCDF de la reducción de la PAPR con la técnica SAP para un sistema OFDM de 128 subportadoras y modulación 16-QAM. Se considera los siguientes parámetros  $\{L = 10, \alpha = 2\}$  y  $\{L = 26, \alpha = 1.55\}$ .



**Figura 3.10:** CCDF de la PAPR con técnica SAP para un sistema OFDM con  $N = 128$  subportadoras y modulación 16-QAM.

### 3.3.3. ACE-IPM

En [Wang and Leung, 2008] la reducción de la PAPR se formula como un problema SOCP (*Second Order Cone Program*) y se resuelve usando el método IPM (*Interior Point Method*). En este caso, el problema formulado es

$$\begin{aligned}
 \text{mín} \quad & \max_{0 \leq n \leq N-1} |x[n]|^2 & (3.46) \\
 \text{s. t.} \quad & \mathbf{x}_R = [\Re\{\mathbf{x}\}, \Im\{\mathbf{x}\}] = \text{IDFT}(\tilde{\mathbf{x}}_V, \tilde{\mathbf{x}}_F) \\
 & \text{sign}(\tilde{x}'_V(g) - \tilde{x}_V(g)) \times \text{sign}(\tilde{x}'_V(g)) \geq 0 \quad g = 1, \dots, G
 \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{x}_R \in \mathbb{R}^{2N}$  es un vector que contiene las partes real e imaginaria de la señal en el dominio del tiempo  $\mathbf{x}$ ,  $\Re\{\cdot\}$  e  $\Im\{\cdot\}$  representan la parte real e imaginaria,  $\tilde{\mathbf{x}}_V \in \mathbb{R}$  es un vector de tamaño  $1 \times G$  que recoge las parte real e imaginaria de puntos de la constelación que pueden extenderse (véase Fig. 3.8), donde  $G$  es el número total de puntos de la constelación que se pueden extender,  $\tilde{\mathbf{x}}_F \in \mathbb{R}$  es un vector de tamaño  $(2N - G) \times 1$  que recoge todos los puntos de la constelación que permanecen fijos y  $\tilde{\mathbf{x}}'_V$  recoge los puntos extendidos de la constelación.

### 3.4. Comparativa de las diferentes técnicas

El tema de reducción de la PARR en los sistemas OFDM continúa recibiendo mucha atención en el campo científico, y aún es un área muy activa dentro de la investigación. Evidentemente, se debe pagar algún coste adicional por conseguir reducir la PAPR de los sistemas OFDM. Las diferentes técnicas de reducción de la PAPR alcanzan buenos resultados pero a expensas de otros factores como: reducción en la velocidad de transmisión debido al transporte de información adicional, incremento en la energía de bit por símbolo, deterioro de la BER, aumento de la carga computacional, etc. A continuación en la Tabla 3.1 se presentan las diferentes técnicas de reducción de la PAPR existentes en la literatura y que se han discutido a lo largo de este capítulo.

Las prestaciones de una técnica, en términos de reducción de la PAPR, claramente, es el aspecto más importante para seleccionar un determinado esquema; sin embargo, se debe prestar atención a otros aspectos para que los efectos no sean perjudiciales para el sistema. Así, por ejemplo, la técnica de recorte y filtrado, CTs (*Companding Transforms*) y PW (*Peak Windowing*) consiguen una buena reducción de la PAPR pero provocan radiación dentro y fuera de banda lo que conlleva una degradación de la BER. De forma similar, la técnica CSS (*Constrained Constellation Shapping*) proporcionan una reducción de la PAPR significativa, pero al mover los puntos de constelación dentro de un error permitido, la degradación de la BER es importante, además de que su complejidad es alta.

Algunas técnicas como SLM, PTS, TR y codificación requieren que se transmita hacia el receptor información adicional para demodular correctamente la información, lo que se traduce en una pérdida en la velocidad de transmisión de datos. En ocasiones el transporte de esta información adicional puede verse afectada durante el paso por el canal, por lo que

**Tabla 3.1:** Comparación de las técnicas de reducción de la PAPR en los sistemas OFDM

Técnicas de reducción	Incremento de la BER	Pérdida de tasa de datos	Complejidad	Incremento potencia
Clipping	si	no	baja	no
Compadding	si	no	baja	no
Codificación	no	si	alta	no
SLM	no	si	alta	no
PTS	no	si	alta	no
TR	no	si	alta	si
TI	no	no	alta	si
CE	no	no	alta	si
CCS	si	no	alta	si
OPS	no	no	alta	no

el receptor recibe información de control errónea. Por lo tanto, es importante proporcionar protección a dicha información.

La complejidad computacional de cualquier técnica, es otro aspecto fundamental a tener en cuenta en la selección del esquema de reducción de la PAPR. Por ejemplo, PTS, ACE-POCS, etc. encuentran la solución usando varias iteraciones, lo que aumenta la complejidad del sistema. Generalmente técnicas más complejas obtienen mejores prestaciones en reducción de la PAPR.

Las técnicas CS (*Constellation Shapping*) aumentan la energía transmitida de la señal, después de procesar la técnica de reducción. Por ejemplo, TI, ACE, SAP, etc. usan un conjunto de puntos de constelación equivalente a la señal original para reducir la PAPR, pero este nuevo conjunto requiere más potencia que la original. En SAP, se puede limitar el aumento de potencia, restringiendo el valor del factor de extensión de la constelación.

Respecto a la complejidad, aunque para varios esquemas de reducción de la PAPR se indica que es “alta”, de manera cualitativa, existen diferencias significativas entre ellos.

## CAPÍTULO 4

# TÉCNICAS DE EXTENSIÓN DE LA CONSTELACIÓN BASADAS EN MÉTRICA COMBINADA CON PILOTOS

Este capítulo considera el diseño de nuevas técnicas de reducción de la PAPR a través de una propuesta eficiente en energía. Estas técnicas consisten en la adecuada combinación de un algoritmo de extensión de la constelación CE, basado en métrica, con símbolos piloto ortogonales. Debido a que ninguno de los dos algoritmos degrada la BER, ni requiere la transmisión de información adicional, se pueden aprovechar las ventajas de estos dos algoritmos, y, por tanto, obtener una técnica con una mejor ganancia en PAPR.

Esta combinación permite tres arquitecturas diferentes, donde cada una supera a los algoritmos previos (SAP y OPS) en términos de reducción de la PAPR. Además, se demuestra que dicha combinación es eficiente en energía por dos aspectos: por un lado, se consigue reducir la energía por símbolo adicional que introduce la extensión de la constelación si se insertan adecuadamente las secuencias piloto, y por otro lado, la implementación de la técnica requiere de carga computacional adicional que se traduce en ciclos de procesador adicionales que demandan consumo energía, pero esta carga computacional es menor que otros esquemas propuestos previamente.

A continuación, se describen las aportaciones de este capítulo que son: (1) la reducción de complejidad en la implementación del algoritmo OPS, (2) las tres arquitecturas que se obtienen de la combinación, (3) un análisis de la energía de bit por símbolo, (4) un análisis exhaustivo del coste computacional de cada arquitectura, para lo cual se considera un DSP

(*Digital Signal Processor*) para determinar los ciclos adicionales requeridos para implementar dichas arquitecturas, (5) se presentan los resultados obtenidos a través de simulaciones, tanto en términos de PAPR como de complejidad.

#### 4.1. LC-OPS (*Low-Complex Orthogonal Pilot Sequences*)

Como se revisó en la sección 3.2.2.2, la técnica OPS [Fernández-Getino García et al., 2006] hace uso de  $M$  secuencias piloto ortogonales en el dominio de la frecuencia, denotadas por el vector  $\tilde{\mathbf{p}}_m = [\tilde{p}_m(0), \dots, \tilde{p}_m(N-1)]$  con  $m = \{1, \dots, M\}$ , donde cada elemento  $k$ -ésimo está definida por

$$\tilde{p}_m(k) = \begin{cases} \tilde{p}_m(k) & k \in \Upsilon \\ 0 & k \notin \Upsilon \end{cases} \quad (4.1)$$

siendo  $\Upsilon$  el subconjunto de subportadoras piloto. Por tanto, cada secuencia es de longitud  $N$ , pero tiene valores no nulos en  $N_p = |\Upsilon|$  elementos, con  $M \leq N_p$ .

Para el símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo, se combina cada una de las  $M$  secuencias piloto ortogonales  $\tilde{\mathbf{p}}_m$  con los datos del símbolo OFDM  $\tilde{\mathbf{z}} = [\tilde{z}(0), \dots, \tilde{z}(N-1)]$  con valores no nulos  $\tilde{z}(k)$  en las posiciones  $k \notin \Upsilon$ , para formar  $M$  símbolos OFDM en el dominio de la frecuencia  $\tilde{\mathbf{x}}_m = [\tilde{x}_m(0), \dots, \tilde{x}_m(N-1)]$ , que se obtiene a partir de

$$\tilde{\mathbf{x}}_m = \tilde{\mathbf{p}}_m + \tilde{\mathbf{z}}, \quad m = \{1, \dots, M\} \quad (4.2)$$

que se pasan al dominio del tiempo vía operación IDFT, *i.e.*,  $\mathbf{x}_m = \text{IDFT}\{\tilde{\mathbf{x}}_m\}$ ,  $m = \{1, \dots, M\}$ . Seguidamente se selecciona el símbolo OFDM  $m$ -ésimo que proporcione la PAPR más baja, como se observa en el diagrama de bloques de la Fig. 4.1.

Para obtener un algoritmo más sencillo y menos complejo, se propone un nuevo esquema OPS de baja complejidad, llamado LC-OPS (*Low Complex - Orthogonal Pilot Sequences*), el cual evita que el transmisor OFDM realice  $(M-1)$  operaciones IDFT comparado con la técnica OPS original. Con el fin de reducir el número de operaciones IDFTs, LC-OPS traslada el procesamiento de la técnica al dominio del tiempo. Por tanto, las  $M$  secuencias piloto ortogonales en el dominio de la frecuencia  $\tilde{\mathbf{p}}_m$  se trasladan al dominio del tiempo  $\mathbf{p}_m = [p[0], \dots, p[N-1]]$  a través del correspondiente cálculo de la IDFT, así

$$p_m[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \Upsilon} \tilde{p}_m(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad \forall m \quad (4.3)$$



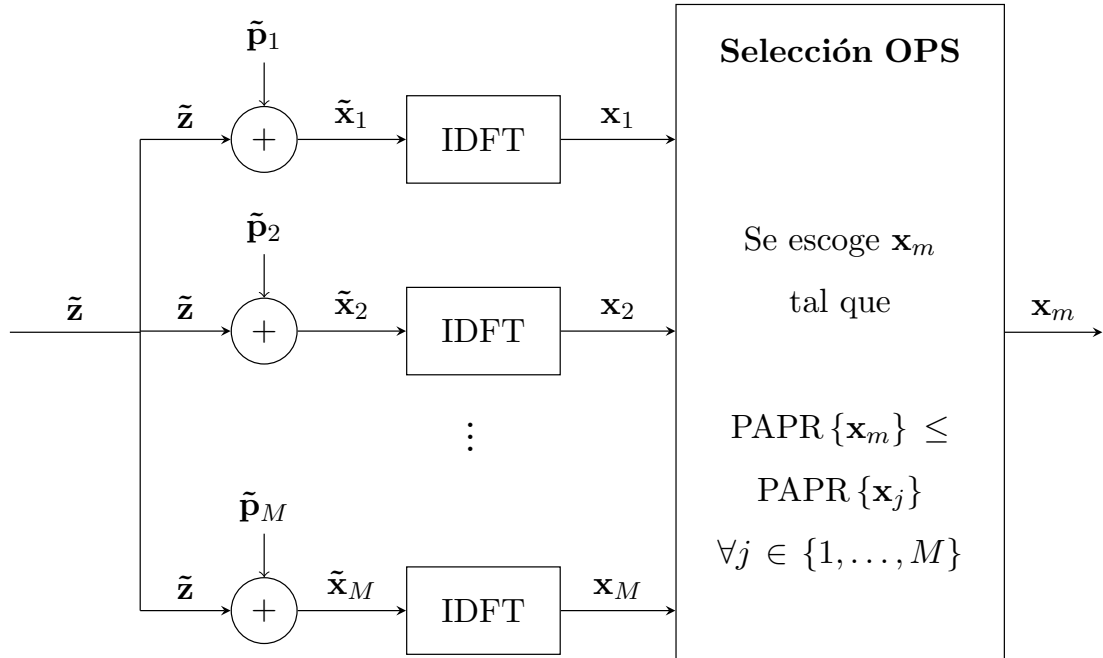
Hay que considerar que previamente el vector de datos  $\tilde{\mathbf{z}}$  se debe trasladar al dominio del tiempo  $\mathbf{z} = [z[0], \dots, z[N-1]]$  vía operación IDFT, entonces

$$z[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \notin \Upsilon} \tilde{z}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (4.4)$$

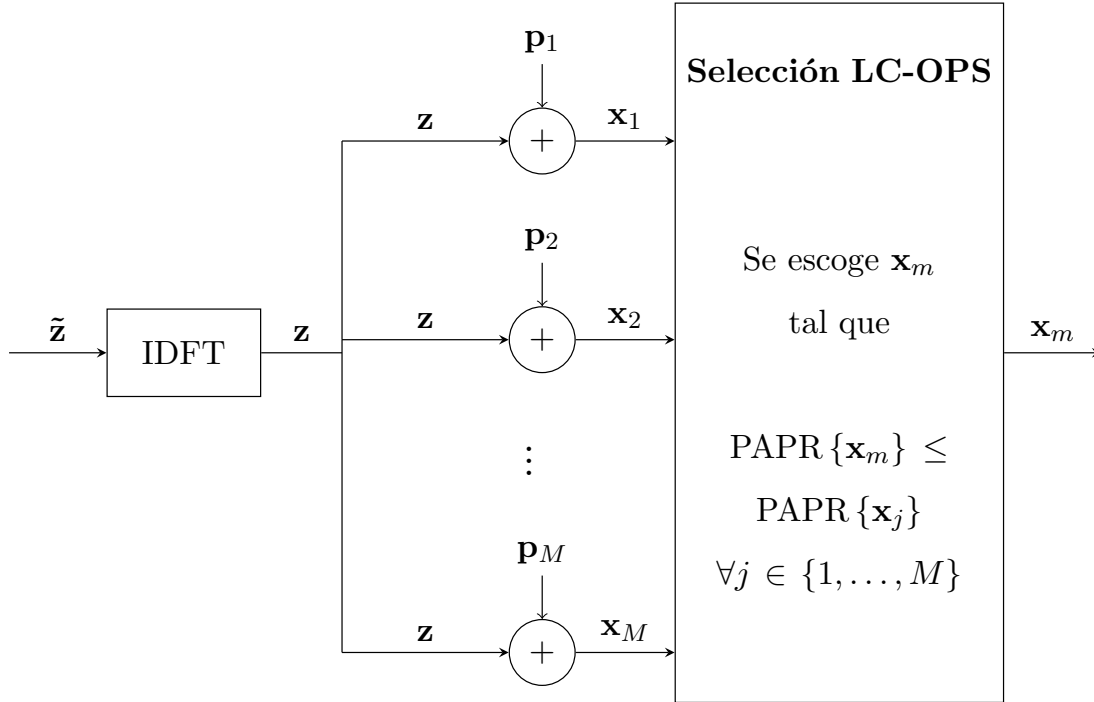
Luego, cada secuencia piloto en el dominio del tiempo  $\mathbf{p}_m = [p_m[0], \dots, p_m[N-1]]$ ,  $m = \{1, \dots, M\}$  se combina con los datos  $\mathbf{z}$  de la siguiente forma

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{z} + \mathbf{p}_m, \quad m = \{1, \dots, M\}. \quad (4.5)$$

Seguidamente, se selecciona el símbolo OFDM  $m$ -ésimo que proporcione la PAPR más baja. El diagrama de bloques, que resume el procesamiento de LC-OPS se presenta en la Fig. 4.2, donde es evidente que el transmisor evita calcular  $M-1$  operaciones IDFTs. Además, hay que considerar que como las secuencias piloto son fijas para todo símbolo OFDM no se requiere calcular en cada símbolo OFDM su valor en el dominio de la tiempo. Por tanto, las  $M$  secuencias piloto  $\mathbf{p}_m$  una vez calculadas, se almacenan para utilizarse en cada símbolo OFDM.



**Figura 4.1:** Diagrama de bloques de la técnica OPS [Fernández-Getino García et al., 2006], donde la técnica se realiza en el dominio de la frecuencia.



**Figura 4.2:** Diagrama de bloques de la técnica LC-OPS, donde el procesado se lleva a cabo en el dominio del tiempo.

## 4.2. Arquitecturas propuestas

Como se ha indicado, se propone la reducción de la PAPR considerando el uso combinado de un algoritmo CE basado en métrica (particularmente el algoritmo SAP en este caso) con LC-OPS, cuya combinación proporciona tres posibles arquitecturas de implementación dependiendo del orden en el que se use cada algoritmo. Así, las dos primeras propuestas son consideradas como arquitecturas de dos etapas y la tercera es un procedimiento paralelo, que se va a denotar como SOPP (*SAP y LC-OPS Paralelo*). Estas tres arquitecturas son

1. Esquema A: OPS-SAP
2. Esquema B: SAP-OPS
3. Esquema C: SOPP

La combinación de SAP con secuencias piloto ortogonales no es trivial, debido a que otras arquitecturas en lugar de estas tres no proporcionan ninguna mejora e incluso podrían degradar la PAPR por lo que se han descartado. Cada arquitectura propuesta se explica a

continuación a través de diagramas de bloques, en el cual se detalla cada una de las etapas de implementación de los algoritmos propuestos.

Los beneficios de estas arquitecturas son: (1) se obtiene una mejora en términos de reducción de la PAPR, si se compara con los algoritmos previos (SAP y OPS) y, (2) se obtiene una mejora desde un punto de vista energético, ya que el símbolo OFDM puede requerir una energía por símbolo menor, al combinar adecuadamente SAP con los símbolos piloto, pues obviamente, la energía de bit será menor que la demandada por SAP al implementarse sólo.

Las desventajas de esta unión son: (1) sólo se puede considerar para sistemas coherentes con símbolos piloto y, (2) implica un ligero incremento de la complejidad si se compara con la técnica SAP debido que adicionalmente se ejecuta el algoritmo LC-OPS. Sin embargo, esta carga computacional es despreciable debido a que se evitan  $M - 1$  operaciones IDFT.

#### 4.2.1. Esquema A: OPS-SAP

El esquema OPS-SAP es una arquitectura de dos etapas, donde se implementa la técnica LC-OPS como primer paso y el algoritmo SAP [Sezginer and Sari, 2006]<sup>1</sup> como segunda etapa. Los pasos que sigue el algoritmo OPS-SAP se detallan a través del pseudocódigo del Algoritmo 1 y también del diagrama de bloques de la Fig. 4.3.

En la primera etapa LC-OPS, las secuencias piloto ortogonales  $\mathbf{p}_m[n]$ ,  $m \in \{1, \dots, M\}$  se insertan apropiadamente en el símbolo OFDM en el dominio del tiempo. A continuación, se selecciona el símbolo  $m$ -ésimo que proporcione la PAPR menor del conjunto disponible. Una vez calculada la PAPR, si ésta supera un predeterminado umbral  $\gamma$ , se lleva a cabo la segunda etapa, esto es, calcular la métrica  $\mu(k)$ , dada por la ecuación (3.44) para el símbolo OFDM con los símbolos piloto insertados. Una vez calculada la métrica se selecciona el conjunto de símbolos  $\mathcal{S}_L$ ,  $L = |\mathcal{S}_L|$  que corresponda a la métrica más grande, los cuales serán extendidos o predistorcionados con un factor de extensión constante y predeterminado  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Una vez extendido el símbolo complejo, se deben actualizar las muestras en el dominio del tiempo. Hay que resaltar que la etapa SAP se ejecuta tanto sobre los símbolos de datos como los pilotos.

---

<sup>1</sup>véase sección 3.3.2

**Algoritmo 1 OPS-SAP**

---

- 1: **Entrada:** Símbolos de datos:  $\tilde{\mathbf{z}}$
  - 2:  $\mathbf{z} = \text{IDFT} \{ \tilde{\mathbf{z}} \}$
  - 3: **Etapas LC-OPS:**
  - 4: Insertar las secuencias  $\mathbf{p}_m$ ,  $m = \{1, \dots, M\}$  a los datos  $\mathbf{z}$ ,  
 $\mathbf{x}_m = \mathbf{p}_m + \mathbf{z}$
  - 5: Calcular la PAPR de los  $M$  símbolos  $\mathbf{x}_m$ :  $\text{PAPR} \{ \mathbf{x}_m \}$
  - 6: Se escoge el símbolo  $m$ -ésimo  $\mathbf{x}_m$  con la PAPR menor,  
 $\text{PAPR} \{ \mathbf{x}_m \} \leq \text{PAPR} \{ \mathbf{x}_j \} \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}$
  - 7: **if** ( $\text{PAPR} \{ \mathbf{x}_m \} \leq \gamma$ ) **then**
  - 8:     **Etapas SAP:**
  - 9:     Calcular la métrica con ec. (3.44),  
$$\mu(k) = \sum_{n \in S_k} \omega(n) f(n, k)$$
  - 10:     Seleccionar el conjunto de símbolos  $S_L$  que corresponde a los  $L$  símbolos con el valor de métrica más alto ( $L = |S_L|$ )
  - 11:     Extender los  $L$  símbolos seleccionados con el factor de escala  $\alpha$   
$$x'_m[n] = x_m[n] + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, 0 \leq n \leq N - 1$$
  - 12:     **return**  $\mathbf{x}'_m = [x'_m[0], \dots, x'_m[N - 1]]$
  - 13:     **else**
  - 14:     **return**  $\mathbf{x}_m = [x_m[0], \dots, x_m[N - 1]]$
  - 15:     **end if**
- 

#### 4.2.2. Esquema B: SAP-OPS

Esta segunda propuesta, también se considera una arquitectura de dos etapas, donde la etapa SAP [Sezginer and Sari, 2006] se lleva a cabo como primera etapa y LC-OPS como segunda. La ejecución de esta arquitectura sigue los pasos descritos en el Algoritmo 2 y en el diagrama de bloques de la Fig. 4.4.

A partir de los datos en el dominio del tiempo  $\mathbf{z} = [z[0], \dots, z[N - 1]]$ , se calcula la PAPR correspondiente, y si ésta supera un umbral determinado  $\gamma$  se procede a realizar el algoritmo

---

**Algoritmo 2** SAP-OPS

---

1: **Entrada:** Símbolos de datos:  $\tilde{\mathbf{z}}$ 2:  $\mathbf{z} = \text{IDFT} \{ \tilde{\mathbf{z}} \}$ 3: **if** ( $\text{PAPR} \{ \mathbf{z} \} \leq \gamma$ ) **then**4: **Etapa SAP:**

5: Calcular la métrica con ec. (3.44),

$$\mu(k) = \sum_{n \in S_K} \omega(n) f(n, k)$$

6: Seleccionar el conjunto de símbolos  $S_L$  que corresponde a los  $L$  símbolos con el valor de métrica más alto ( $L = |S_L|$ )7: Extender los  $L$  símbolos de datos seleccionados con el factor de escala  $\alpha$ 

$$z' [n] = z [n] + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{z}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

8: **return**  $\mathbf{z}' = [z'[0], \dots, z'[N - 1]]$ 9: **else**10: **return**  $\mathbf{z} = [z[0], \dots, z[N - 1]]$ 11: **end if**12: **Etapa LC-OPS:**13: Insertar las secuencias  $\mathbf{p}_m$ ,  $m = \{1, \dots, M\}$  a los datos  $\mathbf{z}'$ ,

$$\mathbf{x}_m = \mathbf{p}_m + \mathbf{z}'$$

14: Calcular la PAPR de los  $M$  símbolos  $\mathbf{x}_m$ :  $\text{PAPR} \{ \mathbf{x}_m \}$ 15: Se escoge el símbolo  $m$ -ésimo  $\mathbf{x}_m$  con la PAPR menor,

$$\text{PAPR} \{ \mathbf{x}_m \} \leq \text{PAPR} \{ \mathbf{x}_j \} \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}$$


---

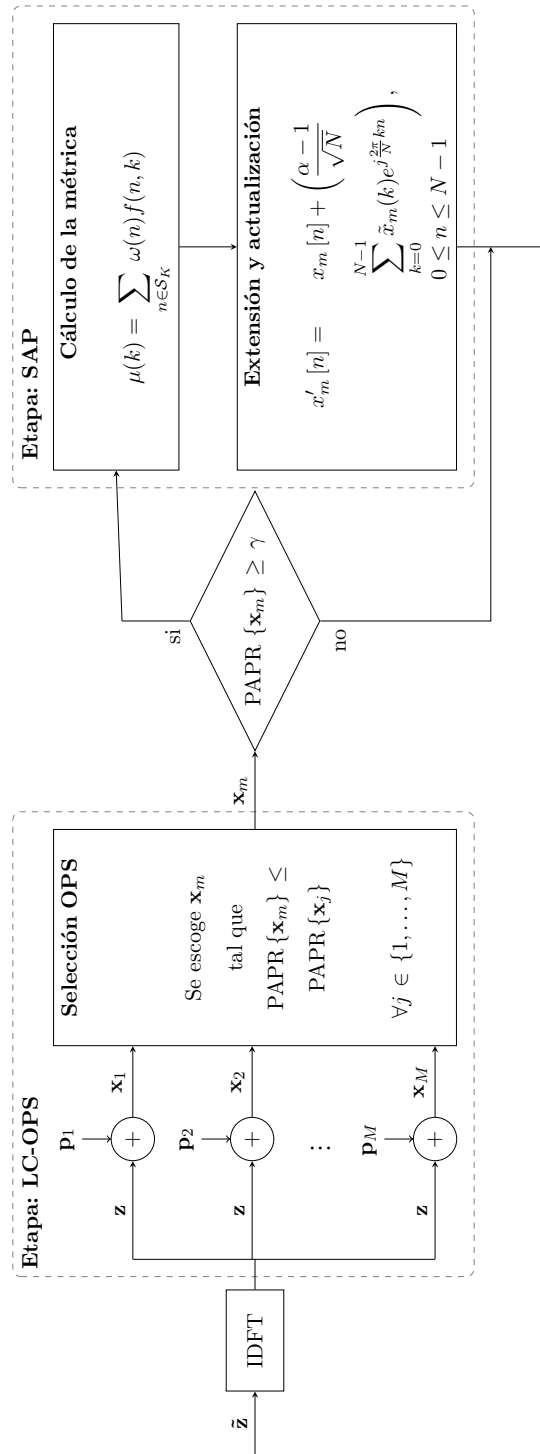
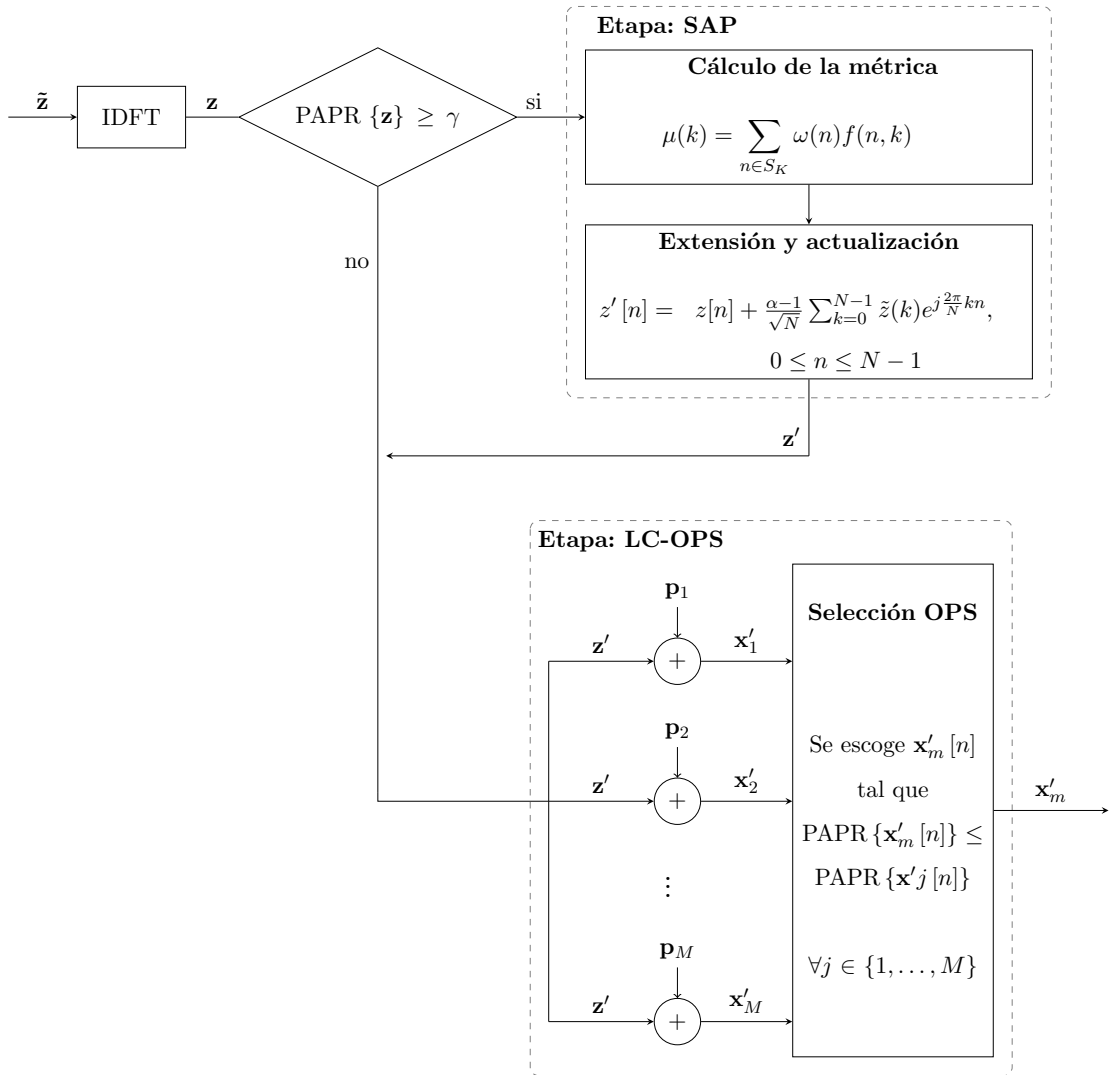


Figura 4.3: Diagrama de bloques de la técnica A: OPS-SAP.



**Figura 4.4:** Diagrama de bloques de la técnica B: SAP-OPS.

SAP como primer paso, que consiste en calcular la métrica y extender el conjunto  $S_L$  de símbolos con la métrica más alta. En este caso, SAP solamente se ejecuta sobre la secuencia de datos, lo que implica que se opera sobre  $N - N_p$  símbolos complejos, donde  $N_p$  es el número de portadoras pilotos dentro del símbolo OFDM. Luego, se lleva a cabo la etapa LC-OPS, es decir, cada una de las  $M$  secuencias piloto ortogonales en el dominio del tiempo  $\mathbf{p}_m$ ,  $m = \{1, \dots, M\}$  se inserta sobre el símbolo (sólo datos) OFDM extendido y se selecciona la secuencia que proporcione la PAPR menor del conjunto disponible.

### 4.2.3. Esquema C: SOPP

En el esquema C ambos algoritmos (SAP y LC-OPS) se ejecutan al mismo tiempo. El diagrama de bloques que se presenta en la Fig. 4.5 y el Algoritmo 3 detallan los pasos que esta arquitectura, denominada SOPP, lleva a cabo para reducir la PAPR de los sistemas OFDM.

En el dominio del tiempo, se insertan las  $M$  secuencias pilotos ortogonales  $\mathbf{p}_m$ ,  $m = \{1, \dots, M\}$  en sus correspondientes posiciones dentro del símbolo OFDM, es decir,  $\mathbf{x}_m = \mathbf{p}_m + \mathbf{z}$ ,  $\forall m$ . Luego, para cada una de las  $M$  ramas del esquema LC-OPS, se calcula la PAPR  $\text{PAPR}\{\mathbf{x}_m\}$  y si ésta supera un umbral determinado  $\gamma$  se procede a ejecutar la etapa SAP, en el cual la métrica y la extensión del conjunto de símbolos  $\mathcal{S}_L$  de los puntos de la constelación se realiza tanto sobre los símbolos de datos como de pilotos, es decir, que se ejecuta el algoritmo sobre  $N$  símbolos complejos (datos y pilotos). Una vez que se procesan las  $M$  ramas, se selecciona el símbolo OFDM  $\mathbf{x}'_m$  que provea la PAPR menor para la transmisión.

Un aspecto importante de esta arquitectura, es que la etapa SAP se lleva a cabo  $M$  veces, una por cada rama de LC-OPS. Consecuentemente, la etapa SAP se realiza  $M - 1$  veces más que en las otras dos arquitecturas, dejando por tanto una implementación más compleja que las otras.

## 4.3. Análisis de la energía transmitida

La energía transmitida para el símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo es  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(0) + \mathcal{E}(1) + \dots + \mathcal{E}(N-1)$ , donde  $\mathcal{E}(k)$ ,  $k = \{0, \dots, N-1\}$  es la energía del símbolo complejo en el dominio de la frecuencia en la subportadora  $k$ -ésima. La selección del factor de escala  $\alpha$  en las técnicas CE obviamente tiene un fuerte impacto en la energía transmitida. Si se denota  $\mathcal{S}_L$  como al conjunto de índices del símbolo complejo que son extendidos, esto es,  $L = |\mathcal{S}_L|$ , entonces después de la extensión de la constelación en la subportadora  $k$ -ésima, la energía por símbolo llega a ser  $\mathcal{E}_P(k) = \alpha^2 \mathcal{E}(k)$ ,  $k \in \mathcal{S}_L$ . Por tanto, para el símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo la energía transmitida  $\mathcal{E}_P$  después de la extensión de ciertos puntos de la constelación es

$$\mathcal{E}_P = \sum_k \mathcal{E}_P(k) = \sum_{k \notin \mathcal{S}_L} \mathcal{E}(k) + \alpha^2 \sum_{k \in \mathcal{S}_L} \mathcal{E}(k) \quad (4.6)$$

Sin extensión de la constelación en ninguna subportadora ( $\alpha = 1$ ,  $\forall k \in \mathcal{S}_L$ ), la energía transmitida es  $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}$ . Si se considera la modulación QPSK con  $\mathcal{E}(k) = 1$ ,  $\forall k$ , entonces la



---

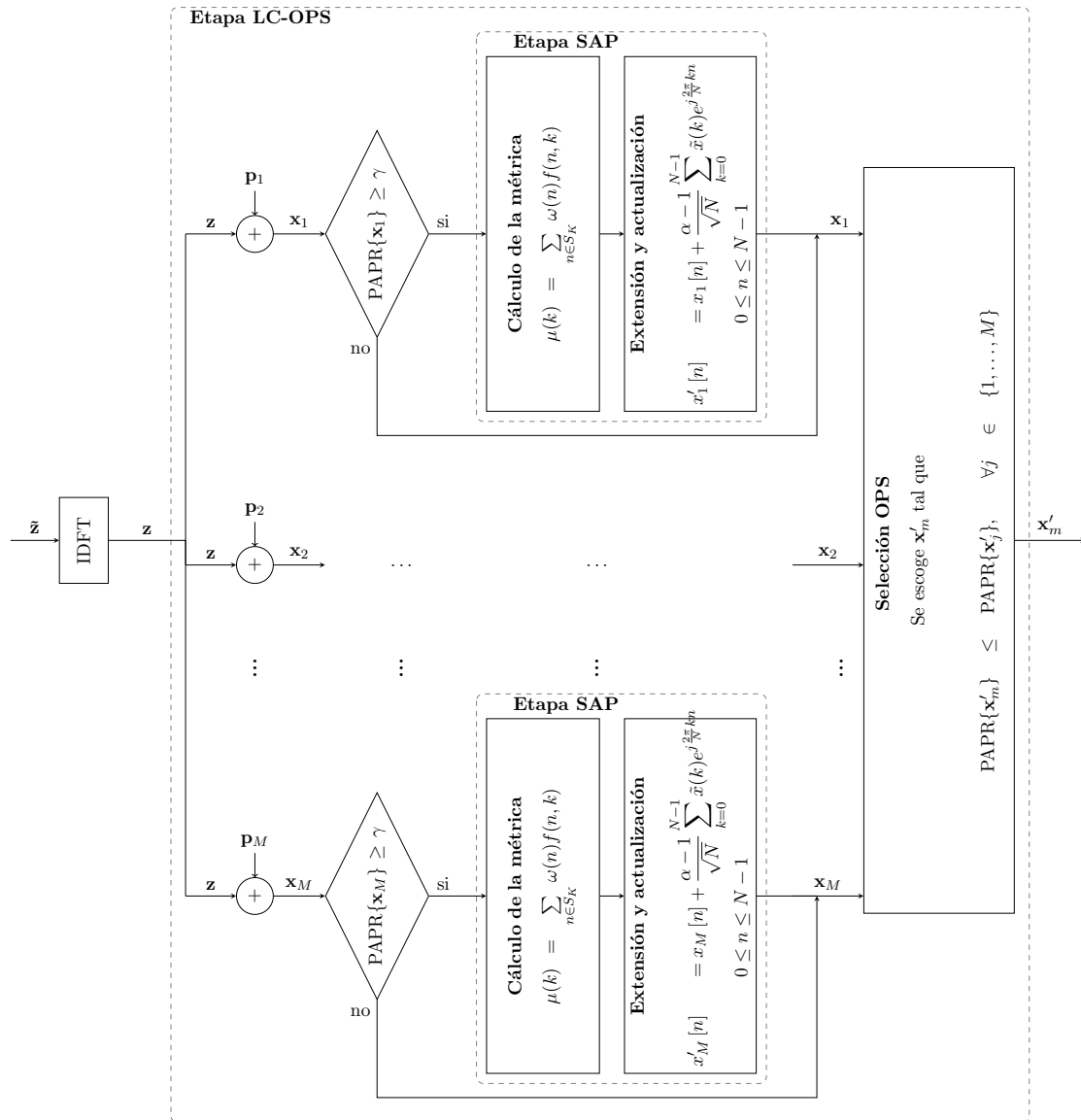
**Algoritmo 3** SOPP

---

- 1: **Entrada:** Símbolos de datos:  $\tilde{\mathbf{z}}$
  - 2:  $\mathbf{z} = \text{IDFT} \{ \tilde{\mathbf{z}} \}$
  - 3: **for**  $m = 1 \dots M$  **do**
  - 4:   **Etapa LC-OPS:**
  - 5:   Insertar la secuencia  $m$ -ésima  $\mathbf{p}_m$  a los datos  $\mathbf{z}$ ,  
 $\mathbf{x}_m = \mathbf{p}_m + \mathbf{z}$
  - 6:   Calcular la PAPR del símbolos  $m$ -ésimo  $\mathbf{x}_m$ ,  
 $\text{PAPR} \{ \mathbf{x}_m \}$
  - 7:   **if**  $(\text{PAPR} \{ \mathbf{x}_m \} \leq \gamma)$  **then**
  - 8:     **Etapa SAP:**
  - 9:     Calcular la métrica con ec. (3.44),  

$$\mu(k) = \sum_{n \in S_K} \omega(n) f(n, k)$$
  - 10:     Seleccionar el conjunto de símbolos  $S_L$  que corresponde a los  $L$  símbolos con el valor de métrica más alto  $L = |S_L|$
  - 11:     Extender los  $L$  símbolos seleccionados con el factor de escala  $\alpha$   

$$x'_m[n] = x_m[n] + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, 0 \leq n \leq N - 1$$
  - 12:     **return**  $\mathbf{x}'_m = [x'_m[0], \dots, x'_m[N - 1]]$
  - 13:     **else**
  - 14:     **return**  $\mathbf{x}_m = [x_m[0], \dots, x_m[N - 1]]$
  - 15:     **end if**
  - 16: **end for**
  - 17: Seleccionar el símbolo  $m$ -ésimo  $\mathbf{x}'_m$  con la PAPR menor,  
 $\text{PAPR} \{ \mathbf{x}'_m \} \leq \text{PAPR} \{ \mathbf{x}_m \} \quad \forall j \in \{1, \dots, M\}$
-



**Figura 4.5:** Diagrama de bloques de la técnica C: SOPP, el cual ejecuta las etapas SAP y LC-OPS de forma paralela.

energía transmitida es  $\mathcal{E}_P = (N - L) + \alpha^2 L$ . Si  $\alpha = 1$  en el caso particular de QPSK, (4.6) se reduce a

$$\mathcal{E}_P = \mathcal{E} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{E}(k) = N \quad (4.7)$$

Obviamente, en las tres arquitecturas propuestas mientras más pequeño es el valor del factor de extensión  $\alpha$  menor será la energía de símbolo requerida, pero sin embargo, las prestaciones, en términos de reducción de la PAPR, podrían verse comprometidas. Uno de los objetivos de la combinación (SAP y LC-OPS) es obtener las mismas o mejores prestaciones que sólo el algoritmo SAP [Sezginer and Sari, 2006] empleando un factor de extensión menor, es decir, ( $\alpha < \alpha_{\text{SAP}}$ ). Para evaluar el ahorro obtenido, en términos de energía transmitida, entre SAP (sólo) y cualquiera de las tres arquitecturas propuestas se define la relación de energía  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ , como

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}_P^{\text{ABC}}}{\mathcal{E}_P^{\text{SAP}}} \quad (4.8)$$

donde  $\mathcal{E}_P^{\text{ABC}}$  denota la energía transmitida por símbolo OFDM (después de la extensión) cuando se ejecuta una de las técnicas propuestas (esquema A, B o C), mientras que  $\mathcal{E}_P^{\text{SAP}}$  se refiere al mismo parámetro cuando se considera sólo SAP.

De forma similar, para la subportadora  $k$ -ésima, también se puede comparar la energía por símbolo entre estas tres arquitecturas propuestas y SAP, después del proceso de extensión de los puntos de la constelación, a través de la siguiente relación matemática

$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(k) = \frac{\mathcal{E}_P^{\text{ABC}}(k)}{\mathcal{E}_P^{\text{SAP}}(k)}, \quad k = \{0, \dots, N - 1\} \quad (4.9)$$

El ahorro de energía de símbolo que se consigue a través de estas arquitecturas, se presenta en la sección 4.5 de evaluación y resultados.

#### 4.4. Análisis del coste de energía computacional

Todas las técnicas de reducción de la PAPR introducen un procesamiento computacional adicional para ejecutar dicha técnica de reducción de la PAPR, más allá de los requerimientos tradicionales que demandan los sistemas OFDM. Dependiendo de cada técnica de reducción de la PAPR, el procesamiento adicional podría incrementar la complejidad del sistema en menor o mayor grado y, obviamente, el Procesador Digital de Señal (DSP - *Digital Signal Processor*) necesitará realizar un mayor número de operaciones, lo que resulta en un consumo mayor

de energía por requerir un número mayor de ciclos del procesador. Es, por tanto, razonable pensar que las tres arquitecturas propuestas no son la excepción. Por consiguiente, en esta sección del capítulo, se presenta un exhaustivo análisis del número de operaciones que cada técnica propuesta (OPS-SAP, SAP-OPS y SOPP) demanda para llevar a cabo la técnica de reducción de la PAPR, con la finalidad de determinar el consumo de energía que se requiere. Además, se incluye las técnicas SAP [Sezginer and Sari, 2006], LC-OPS y BSLM (*Blind Selected Mapping*) [Breiling et al., 2001] en el análisis con propósitos comparativos.

Para este análisis, se considera un DSP de coma fija, cuyos principales parámetros se resumen en la Tabla 4.1 [Baxley and Zhou, 2004].

**Tabla 4.1:** Parámetros del DSP de coma fija

<b>Parámetros</b>	<b>Valor</b>
Corriente/Ciclos por Segundo	0.33 [mA/MHz]
Voltaje de alimentación	1.26 [V]
Energía/ciclo	415.8 [pW · s/ciclos]
Ciclos/FFT de $N$ -puntos	$306 + 5\frac{N}{2} \log_2(\frac{N}{2})$
Ciclos/Multiplicación	1/2
Ciclos/Suma	1/4
Ciclos/Multiplicación Compleja	3
Ciclos/Búsqueda del índice mínimo de longitud $X^*$	$17 + X/2$
Ciclos/Búsqueda del valor máximo de longitud $Y^*$	$Y/2 + 6$

\*  $X$  y  $Y$  pueden tomar cualquier valor.

#### 4.4.1. Operaciones adicionales totales

A continuación se presenta detalladamente el número de operaciones adicionales que emplean las arquitecturas propuestas, tanto en el lado del transmisor como en el receptor, para llevar a cabo la reducción de la PAPR.

##### (a) **Transmisor:**

En el lado del transmisor, como se presenta en las Figs. 4.3, 4.4 y 4.5 cada una de las

etapas de las tres arquitecturas propuestas tienen asociados las operaciones matemáticas adicionales tanto de LC-OPS como de SAP, que son comunes para las tres. Por tal motivo, el estudio parte del análisis de LC-OPS y SAP de forma separada, para luego, incorporar al análisis de cada propuesta.

Por un lado, LC-OPS reduce la complejidad del esquema OPS originalmente propuesto en [Fernández-Getino García et al., 2006] evitando el cálculo en el lado del transmisor de  $(M - 1)$  operaciones IDFTs. Por consiguiente, en el algoritmo LC-OPS sólo se necesita llevar a cabo  $M$  sumas para insertar las secuencias piloto en el símbolo OFDM,  $M$  búsquedas de valor máximo de longitud  $N$  cada una, para encontrar la PAPR de cada símbolo OFDM  $m$ -ésimo y una búsqueda de índice mínimo para determinar y seleccionar el símbolo OFDM que proporcione la PAPR menor del conjunto de  $M$  símbolos OFDM disponibles.

Por otro lado, el algoritmo SAP demanda operaciones en tiempo real, tanto para el cálculo de la métrica dada por (3.44) como para la actualización de las muestras a la salida de la IDFT. El coste computacional del cálculo de la métrica es proporcional a  $KN$ , donde el parámetro  $K$  es el tamaño del conjunto de muestras que superan un umbral determinado <sup>2</sup>, y la actualización de las muestras en el dominio del tiempo tiene una complejidad proporcional a  $LN$ , siendo  $L$  el número de símbolos que se extienden. En el caso particular de la modulación QPSK, calcular la métrica requiere de al menos  $7KN$  multiplicaciones reales,  $3KN$  sumas y  $N$  divisiones y la actualización demanda  $5LN$  multiplicaciones reales y  $(2L + 1)N$  sumas [Sezginer and Sari, 2006]. En la Tabla 4.2 se resume el número de operaciones adicionales que emplean estos dos algoritmos (SAP y LC-OPS).

El transmisor de BSLM<sup>3</sup> considera  $U$  secuencias de fase que se generan bajo demanda [Baxley and Zhou, 2004], por tanto, el esquema BSLM requiere para generar cada secuencia  $3N$  multiplicaciones y  $N(U - 1)$  multiplicaciones complejas. Además, el transmisor BSLM demanda  $U$  operaciones IDFTs, luego se requieren  $U - 1$  operaciones IDFTs adicionales. Finalmente, para determinar la secuencia que proporcione la PAPR mínima del conjunto disponible, el transmisor requiere  $U$  búsquedas de valor máximo, cada una de

---

<sup>2</sup>véase sección 3.3.2

<sup>3</sup>Para más detalles sobre el funcionamiento de algoritmo SLM, véase la sección 3.2.2.1

longitud  $N$ , y una búsqueda de índice mínimo de longitud  $U$ . El número de operaciones adicionales que requiere el transmisor BSLM, se incluyen en la Tabla 4.2, con fines comparativos.

**Tabla 4.2:** Operaciones adicionales en el transmisor para los algoritmos: SAP, LC-OPS y BSLM

Operaciones	LC-OPS	SAP	BSLM
IDFT	-	-	$U - 1$
Multiplicaciones reales	-	$N(7K + 5L)$	$3N(U - 1)$
Multiplicaciones complejas	-	-	$N(U - 1)$
Divisiones	-	$N$	-
Sumas	$M$	$N(3K + 2L + 1)$	-
Búsqueda de índice mínimo de longitud $M$	1	-	-
Búsqueda de índice mínimo de longitud $U$	-	-	1
Búsqueda de valor máximo de longitud $N$	$M$	-	$U$
Búsqueda de valor máximo de longitud $M$	-	-	
<i>Overhead</i>	-	-	$N$

Ahora, el número de operaciones adicionales para reducir la PAPR con cada una de las propuestas viene dado por la suma, aunque no estrictamente en alguna arquitectura, de las operaciones que requieren LC-OPS y SAP. Sin embargo, hay que tomar en consideración que no en todas las arquitecturas el número de muestras del símbolo OFDM es el mismo y éste depende del orden en que se implementa cada etapa. Las operaciones adicionales requeridas por el transmisor de cada arquitectura se resumen en la Tabla 4.3. Es evidente que la propuesta C (SOPP) requiere un número mayor de operaciones, debido a que la etapa SAP (cálculo de la métrica y actualización de muestras) se realiza tantas veces como ramas tiene el algoritmo LC-OPS, es decir, se ejecuta la etapa SAP  $M$  veces, mientras que para los esquemas A (OPS-SAP) y B (SAP-OPS) la etapa SAP se realiza una sola vez. Además, se observa que el esquema B emplea  $(N - N_p)$  símbolos complejos en su primera etapa, debido a que las secuencias piloto ortogonales aún no se han insertado en el símbolo OFDM, es decir, que el procedimiento SAP, para este caso, se lleva a cabo sobre  $(N - N_p)$  símbolos complejos (tanto para calcular la métrica como para actualizar las muestras en el dominio del tiempo), lo que involucra un consumo menor de recursos

que el esquema A, el cual realiza la etapa SAP sobre  $N$  símbolos complejos.

**Tabla 4.3:** Operaciones adicionales en el transmisor para las arquitecturas: A, B y C

Operaciones	Esquema A		Esquema B		Esquema C	
	OPS-SAP		SAP-OPS		SOPP	
	LC-OPS	SAP	LC-OPS	SAP	LC-OPS	SAP
IDFT	-	-	-	-	-	-
Multiplicaciones reales	-	$N(7K + 5L)$	-	$(N - N_p)(7K + 5L)$	-	$NM(7K + 5L)$
Multiplicaciones Complejas	-	-	-	-	-	-
Divisiones	-	$N$	-	$N - N_p$	-	$MN$
Sumas	$M$	$N(3K + 2L + 1)$	$M$	$(N - N_p)(3K + 2L + 1)$	$M$	$MN(3K + 2L + 1)$
Búsqueda de índice mínimo de longitud $M$	1	-	1	-	1	-
Búsqueda de índice mínimo de longitud $U$	-	-	-	-	-	-
Búsqueda de valor máximo de longitud $N$	$M$	-	$M$	-	$M$	-
Búsqueda de valor máximo de longitud $M$	-	-	-	-	-	-
<i>Overhead</i>	-	-	-	-	-	-

(b) **Receptor:**

De forma similar, se realiza el análisis en el lado del receptor. El esquema LC-OPS permite detección ciega sin requerir la transmisión de información adicional para conocer cuál de las secuencias piloto ortogonales [Fernández-Getino García et al., 2006]. Este procedimiento se ejecuta con una simple regla de decisión, basada en maximizar la correlación entre la señal ecualizada y las  $M$  posibles secuencias piloto ortogonales  $\mathbf{p}_m$ ,  $m = \{1, \dots, M\}$ . Por otro lado, SAP no requiere realizar ningún cálculo adicional en el receptor previo a la demodulación OFDM.

Para el receptor BSLM, además de la DFT necesaria en cualquier receptor, se deben multiplicar  $(U - 1)$  secuencias de fase inversas por la señal a la salida de la DFT, como en el transmisor. Se asume que el receptor genera las secuencias de fase inversas a demanda utilizando  $3N$  multiplicaciones. A continuación, el receptor realiza la decodificación de máxima verosimilitud (ML, *Maximum Likelihood*) y de distancia mínima, para determinar qué punto de la constelación  $\{C_b\}_{b=0}^{B-1}$ , (donde  $B$  es el número de puntos de la constelación) se corresponde con qué factor de fase en cada subportadora  $k$ -ésima, esto es,  $\{\{\tilde{y}^u(k)\}_{k=0}^{N-1}\}_{u=1}^U$ , siendo  $\tilde{y}(k)$ ,  $k = \{0, \dots, N - 1\}$ , la señal recibida a la salida de la DFT. Encontrar la distancia al cuadrado entre dos puntos cualquiera requiere 3 sumas y 2 multiplicaciones. Por tanto, se requieren  $3NB$  sumas,  $2NB$  multiplicaciones y  $N$  búsquedas de índice mínimo de longitud  $B$  para cada secuencia de fase. En BSLM,

también es necesario identificar cuál de las secuencias de fase ha usado el transmisor, así que el receptor emplea  $NU$  sumas y una búsqueda de índice mínimo de longitud  $U$  [Baxley and Zhou, 2004].

En la Tabla 4.4 se resume el número total de operaciones adicionales que requieren los algoritmos SAP, LC-OPS y BSLM en el lado del receptor. Partiendo de estos datos, en la Tabla 4.5 se recogen las operaciones adicionales de cada arquitectura propuesta al implementar la técnica de reducción de la PAPR en el receptor.

**Tabla 4.4:** Operaciones adicionales en el receptor para los algoritmos: SAP, LC-OPS y BSLM

Operaciones	LC-OPS	SAP	BSLM
IDFT	-	-	-
Multiplicaciones reales	-	-	$2NB(U - 1) + 3N(U - 1)$
Multiplicaciones complejas	$MN_p$	-	$N(U - 1)$
Divisiones	-	-	-
Sumas	$M(N_p + 1)$	-	$3NB(U - 1) + NU$
Búsqueda de índice mínimo de longitud $M$	-	-	-
Búsqueda de índice mínimo de longitud $U$	-	-	1
Búsqueda de índice mínimo de longitud $B$	-	-	$N(U - 1)$
Búsqueda de valor máximo de longitud $N$	-	-	$U$
Búsqueda de valor máximo de longitud $M$	1	-	-
<i>Overhead</i>	-	-	$N$

Como se puede observar las tres arquitecturas necesitan el mismo número de operaciones adicionales en el receptor, las cuales corresponden a la etapa LC-OPS y son para determinar qué secuencia piloto ortogonal fue usada por el transmisor.

#### 4.4.2. Ciclos adicionales totales

Si se utiliza la información de las Tablas 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 se puede calcular el número total de ciclos adicionales que debe realizar el DSP, basándonos en la Tabla 4.1, considerando tanto el transmisor como el receptor para cada una de las diferentes técnicas: LC-OPS, SAP, BSLM, OPS-SAP, SAP-OPS y SOPP.

De forma general, el número total de ciclos, denotado por  $\mathcal{C}$ , se obtiene sumando todas



**Tabla 4.5:** Operaciones adicionales en el receptor para las arquitecturas: A, B y C

Operaciones	Esquema A		Esquema B		Esquema C	
	OPS-SAP		SAP-OPS		SOPP	
	LC-OPS	SAP	LC-OPS	SAP	LC-OPS	SAP
IDFT	-	-	-	-	-	-
Multiplicaciones reales	-	-	-	-	-	-
Multiplicaciones Complejas	$MN_p$	-	$MN_p$	-	$MN_p$	-
Divisiones	-	-	-	-	-	-
Sumas	$M(N_p + 1)$	-	$M(N_p + 1)$	-	$M(N_p + 1)$	-
Búsqueda de índice mínimo de longitud $M$	-	-	-	-	-	-
Búsqueda de índice mínimo de longitud $U$	-	-	-	-	-	-
Búsqueda de índice mínimo de longitud $B$	-	-	-	-	-	-
Búsqueda de valor máximo de longitud $N$	-	-	-	-	-	-
Búsqueda de valor máximo de longitud $M$	1	-	1	-	1	-
<i>Overhead</i>	-	-	-	-	-	-

las operaciones requeridas en ambos lados (transmisor y receptor) y multiplicando por el número de ciclos que demanda cada operación, según indica la Tabla 4.1. Se va a comenzar analizando los ciclos adicionales en el transmisor de cada técnica, para después calcular los ciclos adicionales en el receptor. Finalmente, se combinarán ambos resultados, para obtener los ciclos adicionales totales o número total de ciclos  $\mathcal{C}$ .

Por consiguiente, el transmisor del esquema LC-OPS, requiere procesar  $M$  sumas que necesitan  $1/4$  de ciclo por cada operación, más una búsqueda de índice mínimo de longitud  $M$ , la cual demanda  $(17 + M/2)$  ciclos por búsqueda y  $M$  búsquedas de valor máximo de longitud  $N$ , que requieren  $(N/2 + 6)$  ciclos cada una. Así, el número total de ciclos en el lado del transmisor que se requiere para procesar LC-OPS se obtiene con la siguiente expresión

$$\mathcal{C}_{\text{Tx}}^{\text{LC-OPS}} = \frac{3}{4}M + M \left( \frac{1}{6}N + 6 \right) + 17 \quad (4.10)$$

El algoritmo SAP demanda  $N(7K + 5L)$  multiplicaciones reales y  $N$  divisiones, que requieren  $1/2$  ciclo por cada operación, más  $N(3K + 2L + 1)$  sumas que necesitan solamente  $1/4$  ciclo cada suma. Por lo tanto, el número de ciclos en el lado del transmisor está dado por

$$\mathcal{C}_{\text{Tx}}^{\text{SAP}} = \frac{1}{2}N \left( \frac{17}{2}K + 6L + \frac{3}{2} \right) \quad (4.11)$$

En el transmisor del esquema A (OPS-SAP) se llevan a cabo  $N(7K + 5L)$  multiplicaciones reales y  $N$  divisiones, que requieren  $1/2$  ciclo por cada operación, más  $M + N(3K + 2L + 1)$  sumas que demandan solamente  $1/4$  ciclo cada suma, más una búsqueda de índice mínimo de longitud  $M$ , la cual procesa  $(17 + M/2)$  ciclos por búsqueda, y finalmente  $M$  búsquedas de valor máximo de longitud  $N$  que requieren  $(N/2 + 6)$  ciclos por cada una. Por tanto, el número total de ciclos en el transmisor para la técnica OPS-SAP  $\mathcal{C}_{\text{Tx}}^A$  puede calcularse como,

$$\mathcal{C}_{\text{Tx}}^A = \frac{1}{2}N \left( \frac{17}{2}K + 6L + \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{4}M + M \left( \frac{1}{6}N + 6 \right) + 17 \quad (4.12)$$

De forma similar, se obtiene el número de ciclos que se requieren para procesar en el lado del transmisor los esquemas B (SAP-OPS)  $\mathcal{C}_{\text{Tx}}^B$  y C (SOPP)  $\mathcal{C}_{\text{Tx}}^C$ , matemáticamente dados por

$$\mathcal{C}_{\text{Tx}}^B = \frac{1}{2}(N - N_p) \left( \frac{17}{2}K + 6L + \frac{3}{2} \right) + \frac{M}{4}(2N + 27) + 17 \quad (4.13)$$

$$\mathcal{C}_{\text{Tx}}^C = \frac{1}{2}MN \left( \frac{17}{2}K + 6L + \frac{3}{2} \right) + \frac{M}{4}(2N + 27) + 17 \quad (4.14)$$

Por otro lado, el número de ciclos en el transmisor BSLM son  $(U - 1)$  IDFTs correspondientes a las secuencias de fase, que requieren  $[306 + 5\frac{N}{2}\log_2(\frac{N}{2})]$  ciclos por cada IDFT, más  $3N(U - 1)$  multiplicaciones reales, que necesitan sólo  $1/2$  ciclo por cada multiplicación, más  $2N(U - 1)$  multiplicaciones complejas que requieren 3 ciclos por operación, más una búsqueda del índice mínimo de longitud  $U$ , la cual procesa  $(17 + U/2)$  ciclos cada una, más  $U$  búsquedas de valor máximo de longitud  $N$  que necesitan  $(N/2 + 6)$  ciclos cada búsqueda y finalmente  $N$  ciclos de *overhead*. Por tanto, el número total de operaciones adicionales para el transmisor BSLM está dado por:

$$\mathcal{C}_{\text{Tx}}^{\text{BSLM}} = (U - 1)[5\frac{N}{2}\log_2(\frac{N}{2})] + 5N(U + 1)\frac{13}{2}U + N \quad (4.15)$$

Ahora, se va analizar el número de ciclos para cada una de las técnicas en el lado del receptor que está determinado por las siguientes ecuaciones,

$$\mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{LC-OPS}} = \frac{1}{4}M(13N_p + 3) + 6 \quad (4.16)$$

$$\mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{SAP}} = 0 \quad (4.17)$$

$$\mathcal{C}_{\text{Rx}}^A = \mathcal{C}_{\text{Rx}}^B = \mathcal{C}_{\text{Rx}}^C = \frac{1}{4}M(13N_p + 3) + 6 \quad (4.18)$$

donde  $\mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{LC-OPS}}$ ,  $\mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{SAP}}$ ,  $\mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{A}}$ ,  $\mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{B}}$  y  $\mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{C}}$  representan el número de ciclos en el lado del receptor para las técnicas: LC-OPS, SAP, A (OPS-SAP), B (SAP-OPS) y C (SOPP), respectivamente. Hay que notar que las tres arquitecturas propuestas necesitan el mismo número de ciclos en el receptor, que corresponde solamente al procesamiento de la etapa LC-OPS. En lo referente al receptor BSLM, el número total de ciclos está dado por

$$\mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{BSLM}} = (U - 1) \left[ \frac{N}{2} \log_2 \left( \frac{N}{2} \right) \right] + 5N(U + 1) \frac{13}{2} U + N \quad (4.19)$$

Finalmente, el número total de ciclos que demanda cada técnica de reducción de la PAPR analizada, está dada por la suma de los ciclos requeridos por el transmisor y por el receptor, de la siguiente manera

$$\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{LC-OPS}} = \mathcal{C}_{\text{Tx}}^{\text{LC-OPS}} + \mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{LC-OPS}} \quad (4.20)$$

$$\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{SAP}} = \mathcal{C}_{\text{Tx}}^{\text{SAP}} + \mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{SAP}} \quad (4.21)$$

$$\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{A}} = \mathcal{C}_{\text{Tx}}^{\text{A}} + \mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{A}} \quad (4.22)$$

$$\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{B}} = \mathcal{C}_{\text{Tx}}^{\text{B}} + \mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{B}} \quad (4.23)$$

$$\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{C}} = \mathcal{C}_{\text{Tx}}^{\text{C}} + \mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{C}} \quad (4.24)$$

$$\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{BSLM}} = \mathcal{C}_{\text{Tx}}^{\text{BSLM}} + \mathcal{C}_{\text{Rx}}^{\text{BSLM}} \quad (4.25)$$

donde  $\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{LC-OPS}}$ ,  $\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{SAP}}$ ,  $\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{A}}$ ,  $\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{B}}$ ,  $\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{C}}$  y  $\mathcal{C}_{\text{T}}^{\text{BSLM}}$  denotan, respectivamente, el número de ciclos adicionales totales que los esquemas LC-OPS, SAP, A (OPS-SAP), B (SAP-OPS), C (SOPP) y BSLM requieren procesar, tanto en el transmisor como en el receptor, para reducir la PAPR.

#### 4.4.3. Coste de energía computacional

El coste de energía computacional, también llamado como energía de implementación, se mide a través de la energía consumida por el DSP para procesar los ciclos adicionales que se deben realizar cualquiera de las técnica de reducción de la PAPR. Para calcular el coste de energía, denotado por  $E_{\text{T}}$ , para cada uno de los esquemas se tiene

$$E_{\text{T}} = \mathcal{C}_{\text{T}} E_{\text{c}} \quad (4.26)$$

donde  $\mathcal{C}_{\text{T}}$  denota el número de ciclos de cada técnica previamente calculados y  $E_{\text{c}}$  es la energía consumida por ciclo en el procesador. Considerando los parámetros de la Tabla 4.1,  $E_{\text{c}}$  puede

escribirse como

$$\begin{aligned} E_c &= 0.33[\text{mA} \cdot \text{s/ciclo}] \times 1.26[\text{V}] \\ &= 415.8[\text{pW} \cdot \text{s/ciclo}] \end{aligned}$$

Finalmente, esta expresión se particulariza para cada uno de los esquemas, por tanto

$$E_T^{\text{LC-OPS}} = C_T^{\text{LC-OPS}} \cdot E_c \quad (4.27)$$

$$E_T^{\text{SAP}} = C_T^{\text{SAP}} \cdot E_c \quad (4.28)$$

$$E_T^A = C_T^A \cdot E_c \quad (4.29)$$

$$E_T^B = C_T^B \cdot E_c \quad (4.30)$$

$$E_T^C = C_T^C \cdot E_c \quad (4.31)$$

$$E_T^{\text{BSLM}} = C_T^{\text{BSLM}} \cdot E_c \quad (4.32)$$

donde  $E_T^{\text{LC-OPS}}$ ,  $E_T^{\text{SAP}}$ ,  $E_T^A$ ,  $E_T^B$ ,  $E_T^C$  y  $E_T^{\text{BSLM}}$  son, respectivamente, el consumo de energía de las técnicas LC-OPS, SAP, A (OPS-SAP), B (SAP-OPS), C (SOPP) y BSLM.

## 4.5. Evaluación y resultados

En esta sección del capítulo se presenta la evaluación y los resultados de las diferentes arquitecturas propuestas en términos de (1) reducción de la PAPR, (2) energía transmitida y (3) coste de energía computacional.

### 4.5.1. Reducción de la PAPR

Las prestaciones de las técnicas de reducción de la PAPR, se han evaluado en términos de la CCDF, a través de la media de  $10^4$  símbolos complejos OFDM generados aleatoriamente con modulación QPSK y diferente número de subportadoras  $N = \{64, 256\}$ , de las cuales cada  $N_f$  subportadoras se inserta un símbolo piloto, por tanto,  $N_p = N/N_f$  es el número total de símbolos piloto dentro de un símbolo OFDM. Se evalúa la etapa LC-OPS con  $M$  secuencias piloto ortogonales en el dominio del tiempo y para generar dichas secuencias piloto se emplean las conocidas secuencias *Walsh-Hadamard*, esto es,  $\tilde{p}(k) \in \{1, -1\}$ . El umbral de decisión considerado  $\gamma$  es de 6 [dB] que se utiliza normalmente en la literatura [Krongold and Jones, 2003]. Para la etapa SAP, se considera el conjunto de parámetros: para el cálculo de la métrica  $\{p = 6, A = 3.9[\text{dB}]\}$  [Sezginer and Sari, 2006] y para la evaluación del

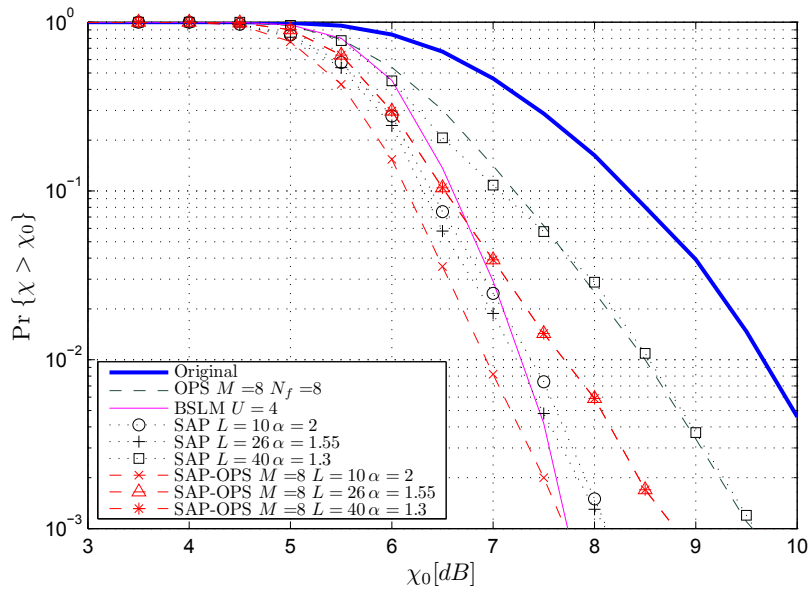
algoritmo se utilizan los conjuntos  $\{L = 10, \alpha = 2\}$ ,  $\{L = 26, \alpha = 1.55\}$  y  $\{L = 40, \alpha = 1.3\}$ . Para BSLM se emplea  $U = 4$ .

Los resultados de las tres arquitecturas propuestas (A, B y C) se comparan con los algoritmos SAP [Sezginer and Sari, 2006], OPS [Fernández-Getino García et al., 2006] y BLSM [Breiling et al., 2001] cuyos resultados han sido verificados con las correspondientes curvas originales de CCDF para garantizar la validez de los resultados. Para obtener una comparación justa, los parámetros de los algoritmos LC-OSP y SAP se han considerado iguales que los de las arquitecturas propuestas.

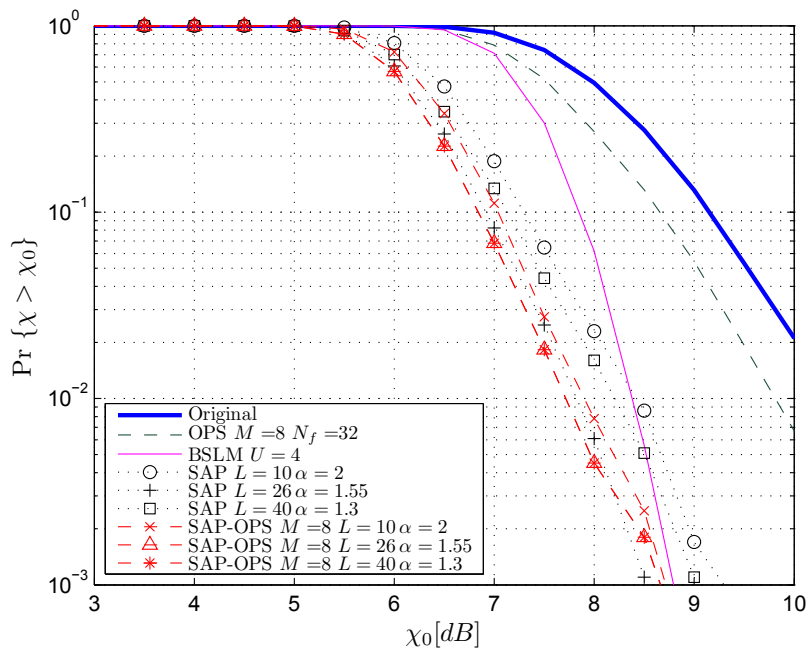
En todas la figuras, la línea continua de color azul representa la señal OFDM sin ninguna técnica de reducción de la PAPR y es etiquetada como “Original”, las curvas con línea punto y raya de color verde corresponden a la técnica OPS, las curvas con línea punteada y marcas de color negro son del algoritmo SAP y las curvas con línea punteada, con marcas y color rojo se corresponden con las arquitecturas propuestas.

Las curvas de la CCDF del **Esquema A (OPS-SAP)** se presentan en las Figs. 4.6, 4.7 y 4.8, donde se ha considerado un conjunto de parámetros diferentes para evaluar la reducción de la PAPR. Así, la Fig. 4.6 representa un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras con los siguientes parámetros en la etapa LC-OPS  $\{M = 8, N_p = 8 (N_f = 8)\}$ . La Fig. 4.7 representa un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras con el conjunto de parámetros  $\{M = 8, N_p = 8 (N_f = 32)\}$  para la etapa LC-OPS y la Fig. 4.8 con  $N = 256$  subportadoras con  $\{M = N_p, N_p = 32 (N_f = 8)\}$ . En la etapa SAP se consideran los parámetros  $\{\alpha = 2, L = 10\}$ ,  $\{\alpha = 1.55, L = 26\}$  y  $\{\alpha = 1.3, L = 40\}$  para todas las figuras. En estas figuras se observa claramente que la mejora, en términos de reducción de la PAPR, del esquema A(OPS-SAP) es alrededor de 1.2 [dB] a una probabilidad de  $10^{-3}$  con respecto al algoritmo SAP.

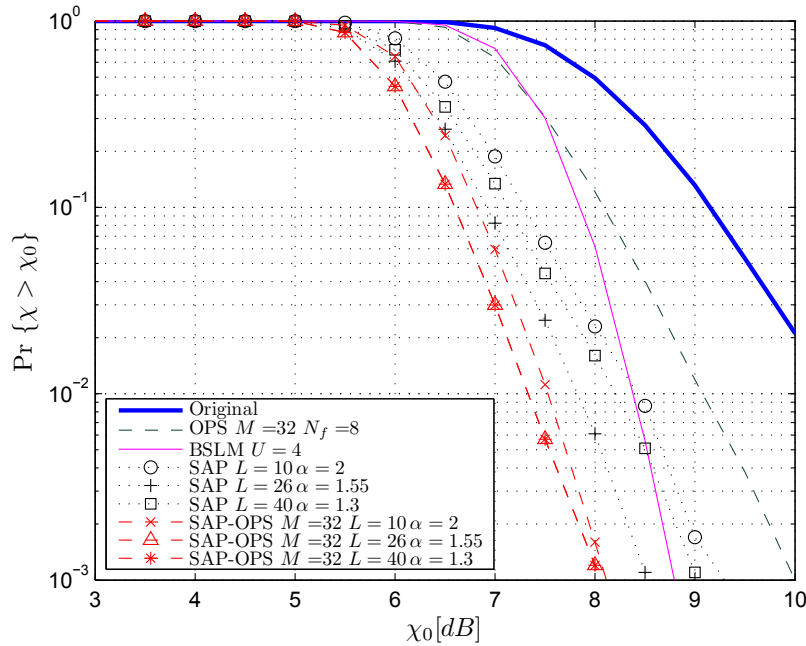
Las curvas de la CCDF del **Esquema B (SAP-OPS)** se presentan en las Figs. 4.9, 4.10 y 4.11. En la Fig. 4.9 se contempla un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras y los parámetros para la etapa LC-OPS son  $\{M = 8, N_p = 8 (N_f = 8)\}$ . Para la Fig. 4.10, se ilustra un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras y con los parámetros  $\{M = 8, N_p = 8 (N_f = 32)\}$  en la etapa LC-OPS. En la Fig. 4.11 se considera un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras y los parámetros para la etapa LC-OPS son  $\{M = N_p, N_p = 32 (N_f = 8)\}$ . En la etapa SAP, para todas las figuras, se utilizan los parámetros  $\{\alpha = 2, L = 10\}$ ,  $\{\alpha =$



**Figura 4.6:** CCDF de la PAPR del esquema OPS-SAP para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras con  $M = 8$  y  $N_p = 8$  ( $N_f = 8$ ).



**Figura 4.7:** CCDF de la PAPR del esquema OPS-SAP para un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras con  $M = 8$  y  $N_p = 8$  ( $N_f = 32$ ).

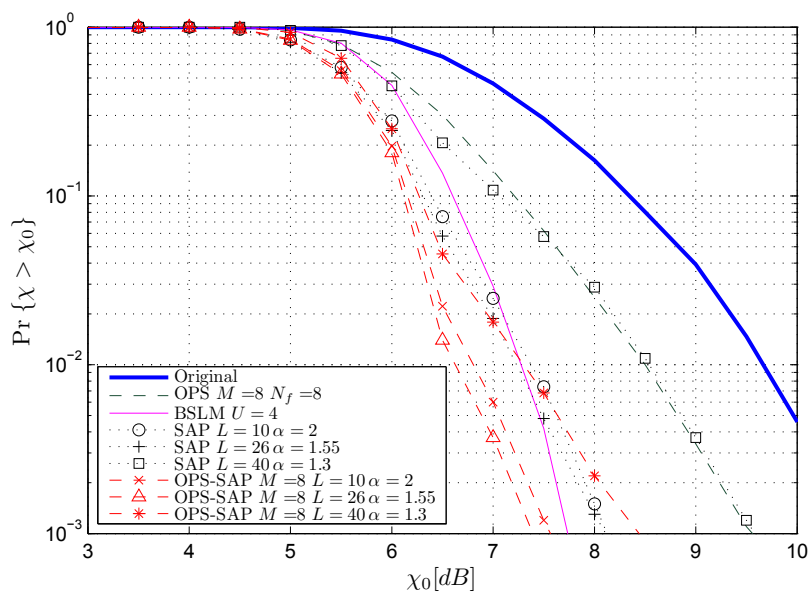


**Figura 4.8:** CCDF de la PAPR del esquema OPS-SAP para un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras con  $M = N_p$  y  $N_p = 32$  ( $N_f = 8$ ).

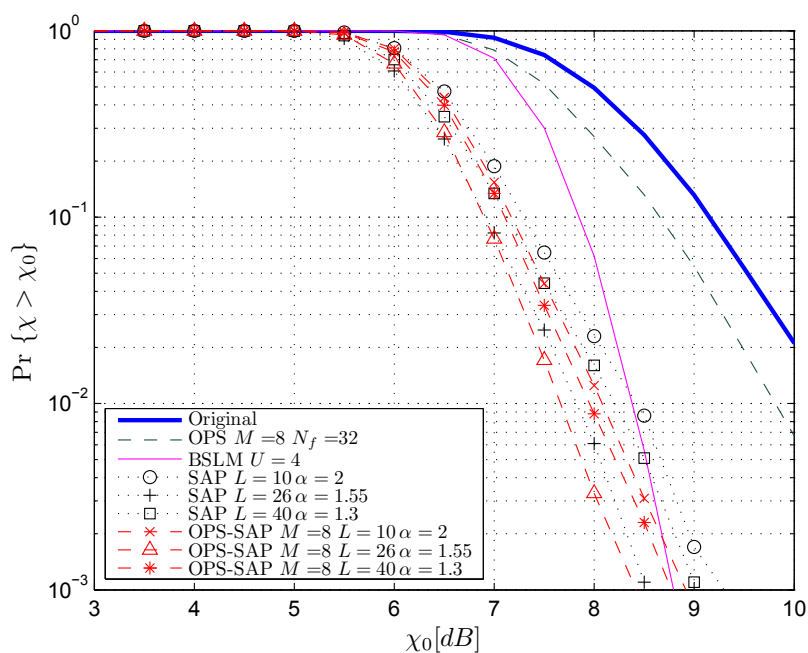
1.55,  $L = 26$ } y  $\{\alpha = 1.3, L = 40\}$ . En estas figuras se observa que la mejora, en términos de reducción de la PAPR, de la arquitectura B está alrededor de 0.8 [dB] a una probabilidad de  $10^{-3}$  si se compara con el algoritmo SAP.

La reducción de la PAPR del **Esquema C (SOPP)** se representa en las Figs. 4.12, 4.13 y 4.14 para sistemas OFDM con  $N = 64$  y  $N = 256$  subportadoras. La Fig. 4.12 con  $N = 64$  subportadoras, se evalúa con los parámetros  $\{M = 8, N_p = 8 (N_f = 8)\}$  en la etapa LC-OPS, mientras que las Figs. 4.13 y 4.14 para  $N = 256$  subportadoras, en la etapa LC-OPS se consideran los parámetros  $\{M = 8, N_p = 8 (N_f = 32)\}$  y  $\{M = N_p, N_p = 32 (N_f = 8)\}$  respectivamente. La etapa SAP considera los parámetros  $\{\alpha = 2, L = 10\}$ ,  $\{\alpha = 1.55, L = 26\}$  y  $\{\alpha = 1.3, L = 40\}$  en todas las figuras. Como resultado, se puede observar que la mejora en cuanto a la reducción de la PAPR proporcionada por el esquema C, es aproximadamente 1.3 [dB] a una probabilidad de  $10^{-3}$ .

Con fines comparativos, la reducción de la PAPR que proporciona cada arquitectura A, B y C se presenta en las Figs. 4.15 y 4.16 para  $N = 64$  y  $N = 256$  subportadoras, respectivamente. Estas curvas indican que la arquitectura C, tiene una ligera mejora con respecto a los otros



**Figura 4.9:** CCDF de la PAPR del esquema SAP-OPS para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras con  $M = 8$  y  $N_p = 8$  ( $N_f = 8$ ).



**Figura 4.10:** CCDF de la PAPR del esquema SAP-OPS para un sistema OFDM con  $N = 256$ . con  $M = 8$  y  $N_p = 8$  ( $N_f = 32$ ).



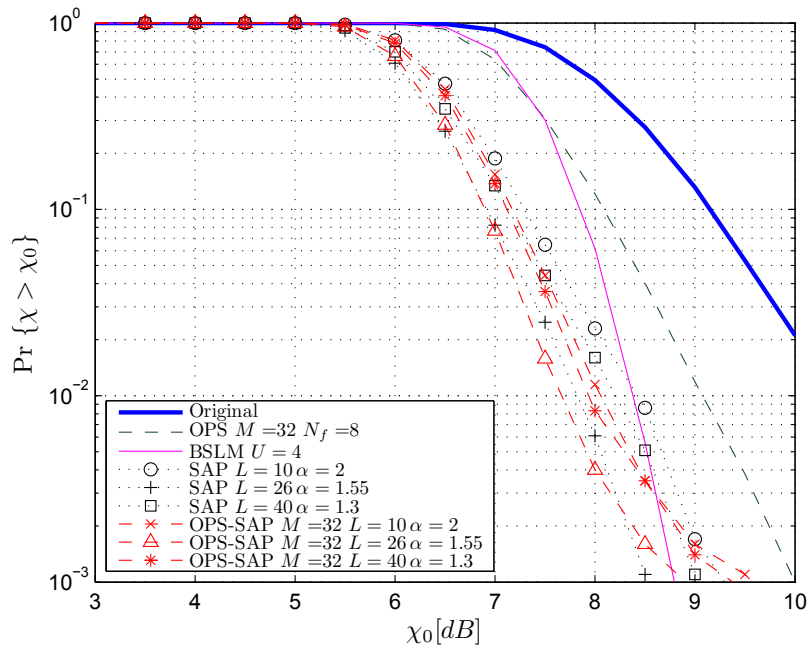


Figura 4.11: CCDF de la PAPR del esquema SAP-OPS para un sistema OFDM con  $N = 256$  con  $M = 8$  y  $N_p = 32$  ( $N_f = 8$ ).

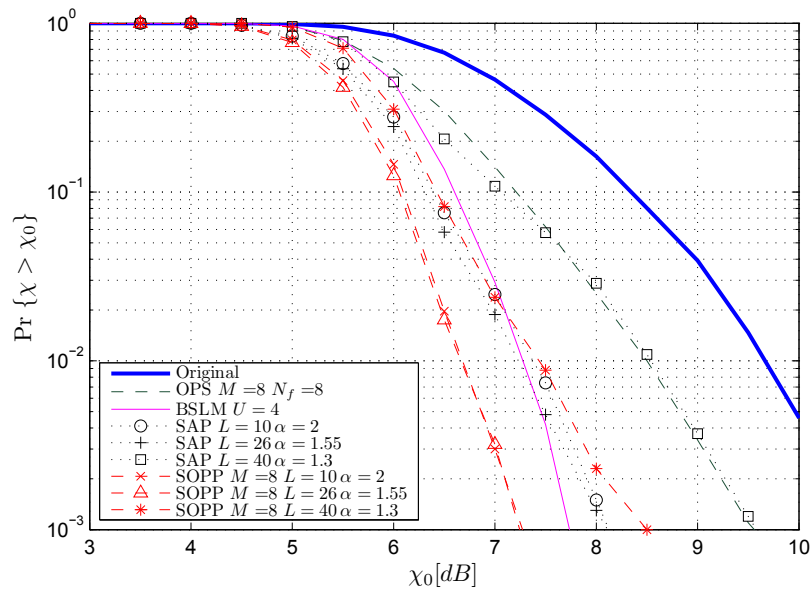
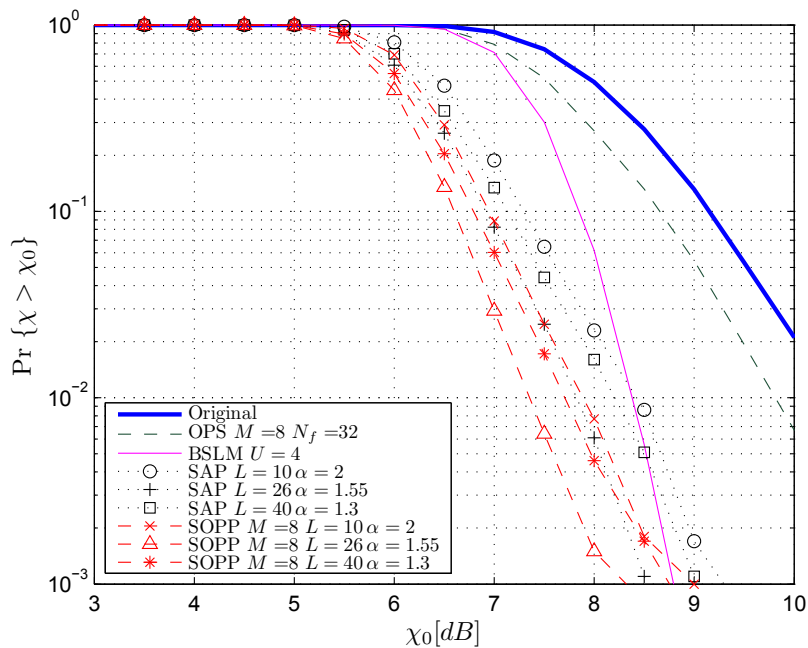


Figura 4.12: CCDF de la PAPR del esquema SOPP para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras,  $M = 8$  y  $N_p = 8$  ( $N_f = 8$ ).

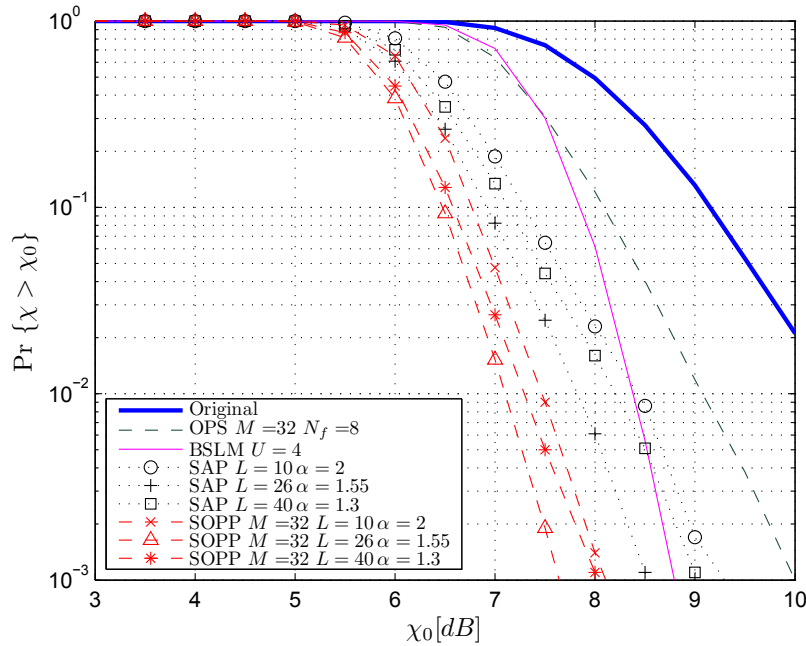


**Figura 4.13:** CCDF de la PAPR del esquema SOPP para un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras,  $M = 8$  y  $N_p = 8$  ( $N_f = 32$ ).

esquemas, pero como se ha visto, su complejidad es mucho mayor debido principalmente a que ejecuta  $M$  veces la etapa SAP, una por cada secuencia piloto. Además, se observa que el esquema A y C tienen una ganancia en PAPR similar, mientras que el esquema B es el que presenta una ganancia menor. Sin embargo, el esquema C es mucho más complejo, debido a que la etapa SAP se ejecuta varias veces. Por tanto, el esquema A (OPS-SAP) es el que proporciona un compromiso adecuado entre PAPR y complejidad.

#### 4.5.2. Energía transmitida

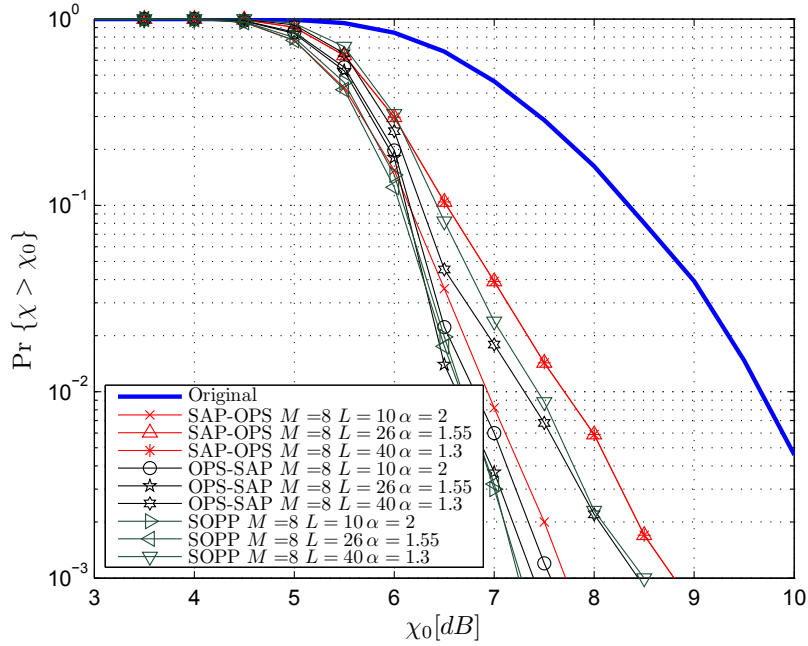
Para demostrar los beneficios de las arquitecturas propuestas, en términos de energía transmitida, a manera de ejemplo, se considera la arquitectura A (OPS-SAP) con  $N = 256$  subportadoras y se compara con la técnica SAP dada en [Sezginer and Sari, 2006]. Como se observa en la Fig. 4.17 OPS-SAP con  $\alpha = 1.3$  obtiene un comportamiento similar, en términos de reducción de la PAPR, que el algoritmo SAP con  $\alpha = 2$  y  $L = 40$ , lo que se traduce en que SAP requiere valores de  $\alpha$  más altos (lo que demanda más energía para la transmisión) para garantizar el mismo rendimiento que el esquema OPS-SAP.



**Figura 4.14:** CCDF de la PAPR del esquema SOPP para un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras,  $M = N_p$  y  $N_p = 32$  ( $N_f = 8$ ).

La relación dada en (4.9) para la subportadora  $k$ -ésima, donde  $k \in \mathcal{S}_L$ , donde  $\mathcal{S}_L$  representa el conjunto de símbolos extendidos, en este caso (Fig. 4.17) es  $\mathcal{R}_{\mathcal{E}}(k) = 0.4225$ , lo que significa que OPS-SAP consume sólo el 42.25% de la energía transmitida en comparación con el algoritmo SAP. Por lo tanto, el ahorro de energía transmitida es del 57.75% por símbolo complejo extendido de la constelación.

En la Fig. 4.18, se presenta el ahorro de energía transmitida cuando OPS-SAP y SAP tienen un rendimiento similar en la reducción de la PAPR, para lo cual se ha considerado un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras,  $L = 40$  y diferentes valores de  $\alpha$ . Así, en el eje x se representan los valores que puede tomar la variable  $\alpha$ , y en el eje y se provee la diferencia de umbrales  $\chi$  (en [dB]), dada por la variable  $\Delta_{\chi}$ , entre las dos técnicas mencionadas, medida a una probabilidad de  $10^{-3}$ . Evidentemente, si  $\Delta_{\chi} = 0$  [dB], significa que las dos técnicas tienen el mismo rendimiento. Cada curva corresponde a un valor fijo de  $\alpha$  para la técnica SAP (dado en la leyenda). En esta figura, se observa que si se ejecuta SAP con  $\alpha = 2$ , se tiene el mismo rendimiento que si se usa OPS-SAP con  $\alpha = 1.3$  (dado en el eje x) ya que  $\Delta_{\chi} = 0$ . Por tanto, si se extienden  $L = 40$  símbolos complejos, como es el caso de la Fig. 4.18,



**Figura 4.15:** CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras. En la etapa LC-OPS con parámetros  $M = 8$  y  $N_p = 8$  ( $N_f = 8$ ), y para la etapa SAP  $\{\alpha = 1.55, L = 26\}$  y  $\{\alpha = 1.3, L = 40\}$ .

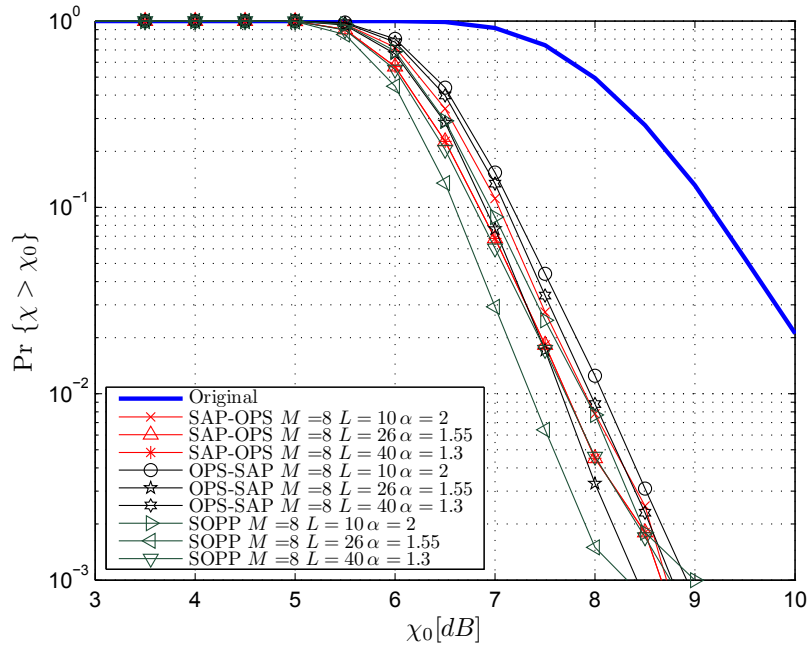
se consigue un ahorro de 24.57% en la energía transmitida  $\mathcal{R}_E$ , valor que ha sido calculado como  $1 - \mathcal{R}_E$ , donde  $\mathcal{R}_E$  se determina usando (4.8).

De forma similar, si se consideran extender  $L = 26$  símbolos complejos, para OPS-SAP con  $\alpha = 1.55$  y SAP con  $\alpha = 2$ , se obtiene una ligera mejora en el rendimiento, en términos de reducción de la PAPR, pero el ahorro en energía transmitida es del 13.62%.

### 4.5.3. Coste de energía computacional

En la Fig. 4.19, se ilustra la energía consumida por cada técnica, tanto en el lado del transmisor como del receptor, para implementar cada una de las diferentes técnicas de reducción de la PAPR, como son LC-OPS, SAP, BSLM y OPS-SAP usando, respectivamente, las ecuaciones (4.27), (4.28), (4.29) y (4.32) para diferente número de subportadoras,  $N$ . En los cálculos se descartan los requerimientos tradicionales de cualquier sistema OFDM para realizar las operaciones IDFT/DFT y común para todas las técnicas.

Claramente, se observa en las ecuaciones (4.27), (4.28), (4.29) y (4.32) que los valores

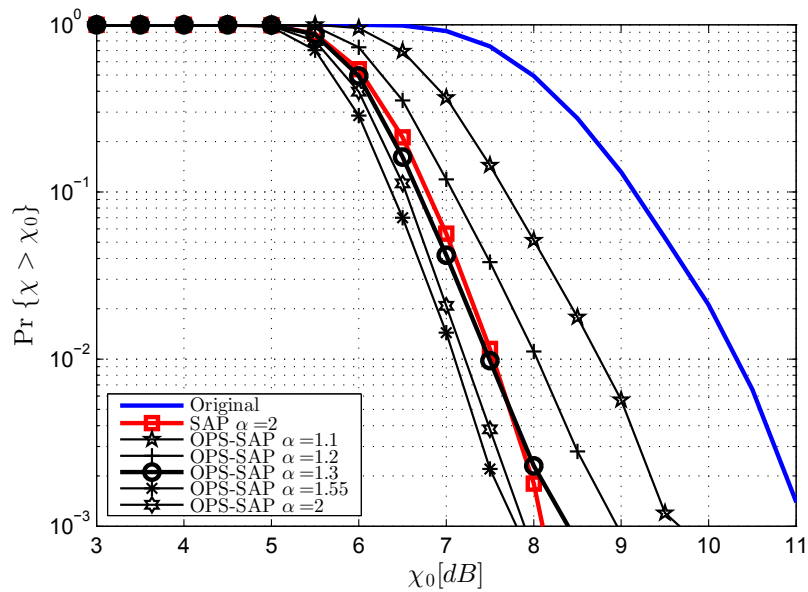


**Figura 4.16:** CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 256$  subportadoras, y con  $M = 8$  y  $N_p = 8$  ( $N_f = 32$ ) para la etapa LC-OPS y para la etapa SAP  $\{\alpha = 1.55, L = 26\}$  y  $\{\alpha = 1.3, L = 40\}$ .

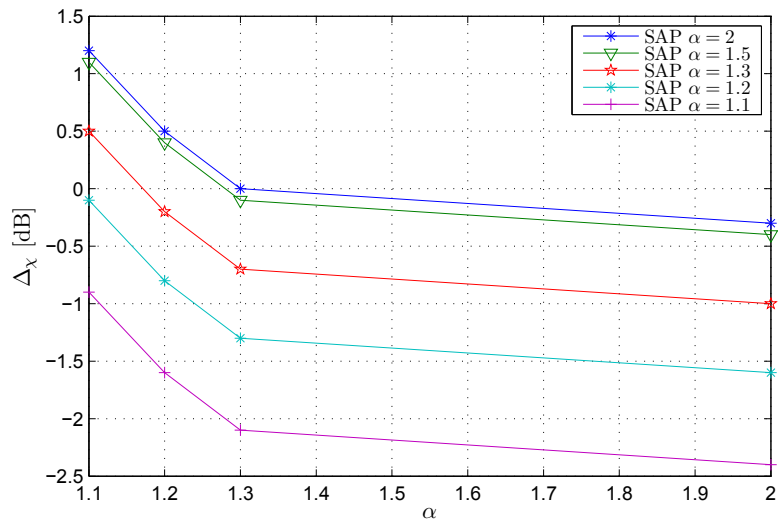
que toman los diferentes parámetros, que usan cada técnica, tiene un impacto variable en el consumo de la energía del DSP. En efecto, en el esquema LC-OPS, el coste de energía depende del tamaño del conjunto de secuencias piloto ortogonales  $M$ , como se observa en la Fig. 4.19, pero el impacto obtenido al cambiar el valor de este parámetro es insignificante. Por ejemplo, si se evalúa un sistema OFDM de  $N = 64$  subportadoras con  $M = 4$ , la  $E_T^{\text{LC-OPS}}$  es  $0.0861[\mu\text{W} \cdot \text{s}]$ , pero si se incrementa el valor de  $M = 8$ , entonces la  $E_T^{\text{LC-OPS}}$  es  $0.1626[\mu\text{W} \cdot \text{s}]$ .

Por otro lado, la energía consumida por SAP en su mayoría depende de los valores que tomen los parámetros  $K$  y  $L$ , donde el mayor impacto lo introduce  $K$ , que se usa para calcular la métrica. A través de simulaciones se ha encontrado que el valor de  $K$  se sitúa cerca del valor de  $N$ , cuando  $N$  es mayor de 256. En cuanto al coste que introduce  $L$ , en la Fig. 4.19 se observa que el impacto que introduce el cambiar el valor de  $L$  es despreciable.

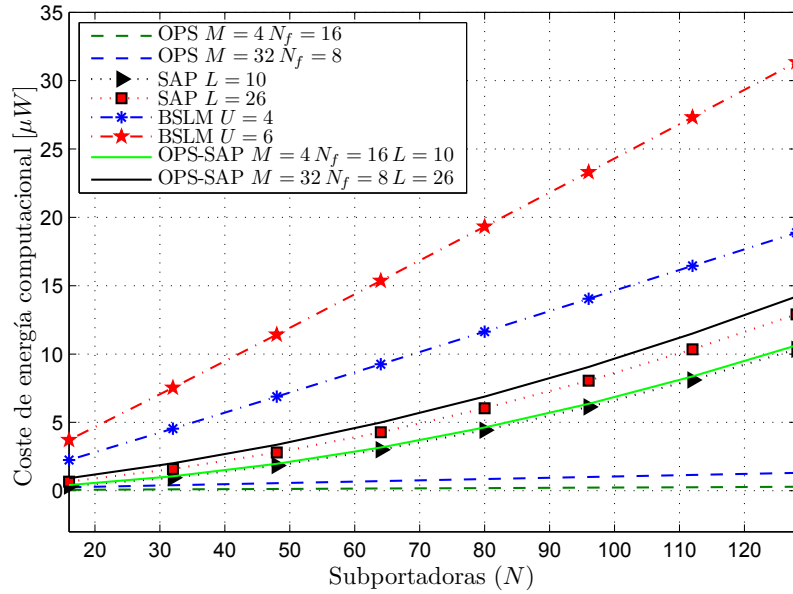
En la técnica SLM o BSLM el número de operaciones IDFTs utilizadas en el transmisor es el que produce el mayor impacto en el consumo de energía, que coincide con el número de secuencias de fase  $U$  que usa el algoritmo. Como se observa en la Fig. 4.19, conforme se incrementa el valor de  $U$  el consumo de energía  $E_T^{\text{BSLM}}$  también crece.



**Figura 4.17:** CCDF de la PAPR para la señal OFDM con  $N = 256$  subportadoras y modulación QPSK, donde se han extendido  $L = 40$  símbolos complejos tanto en SAP como en OPS-SAP. OPS-SAP con diferentes valores de  $\alpha$ ,  $M = 8$ ,  $N_p = 16$ .



**Figura 4.18:** Para un valor fijo de  $\alpha$  en la técnica SAP (leyenda), la diferencia entre el rendimiento, en términos de reducción de la PAPR, de OPS-SAP y SAP dado en [dB] (eje y) para un valor variable de  $\alpha$  en OPS-SAP (eje x). Valores negativos de  $\Delta$  son descartados. El sistema OFDM analizado corresponde a  $N = 256$  subportadoras con  $L = 40$ .



**Figura 4.19:** Coste de energía computacional para cada técnica.

Ahora, el coste energético de OPS-SAP involucra los parámetros tanto de LC-OPS como de SAP  $\{M, K, L\}$ , lo que hacen de él un algoritmo flexible. Si los parámetros se usan adecuadamente se puede conseguir un buen rendimiento en la reducción de la PAPR con un coste de energía pequeño. Como se observa en la Fig. 4.19 el consumo de energía de OPS-SAP es ligeramente más alto que si se compara con el algoritmo SAP, debido a que se añade el coste casi despreciable que introduce la etapa LC-OPS, pero es significativamente menor si se compara con la técnica BSLM.

Para evaluar el consumo de energía de OPS-SAP con respecto a BSLM, a manera de ejemplo numérico, se considera un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras con los parámetros  $M = 8$ ,  $L = \{10, 26\}$  y  $U = 4$  para BSLM. Para ello se define la relación  $\mathcal{R}_{E_T}$  del consumo de energía entre dos técnicas como

$$\mathcal{R}_{E_T} = \frac{E_T^A}{E_T^{\text{BSLM}}} \quad (4.33)$$

de la cual se obtiene que OPS-SAP consume 51.3% y 58.04% (para cada valor de  $L$ ) menos que la energía que demanda BSLM. De forma análoga, se define para el resto de técnicas.





## CAPÍTULO 5

# ALGORITMOS DE EXTENSIÓN DE LA CONSTELACIÓN MEDIANTE OPTIMIZACIÓN

Este capítulo se dedica a la propuesta y diseño de novedosos algoritmos de reducción de la PAPR basados en técnicas CE, a través de algoritmos de optimización. En primer lugar, se presenta un algoritmo óptimo, que se formula como un problema de optimización no lineal mixta-entera (MINLP - *Mixed Integer Non-Linear Programming*), que emplea los métodos GBD (*Generalized Benders Decomposition*) y BB (*Branch-and-Bound*) para determinar el factor de escala más adecuado y el conjunto óptimo de símbolos complejos en el dominio de la frecuencia que deben ser extendidos dentro de la región permitida, sin degradar la BER. La técnica óptima propuesta, llamada GBDCE (*Generalized Benders Decomposition for Constellation Extension*), proporciona una mejora significativa en la reducción de PAPR, y se considera como una cota inferior que sirve para comparar con otras técnicas CE. No obstante, el algoritmo GBDCE puede presentar una convergencia lenta, debido a que ejecuta un proceso iterativo. En segundo lugar, con el objetivo de evitar el excesivo tiempo de procesamiento en los sistemas OFDM prácticos, se propone un esquema de reducción de la PAPR subóptimo, denotado como BBCE (*Branch-and-Bound for Constellation Extension*), que se formula como un problema de optimización entero (IP - *Integer Programming*) y se resuelve a través del método BB. BBCE obtiene una buena reducción de la PAPR a la vez que reduce la complejidad con respecto al algoritmo óptimo. A través de simulaciones se demuestra que BBCE consigue un buen compromiso entre complejidad y rendimiento (PAPR). Como

tercera aportación de este capítulo, se presenta el esquema subóptimo DCE (*Dynamic Constellation Extension*) como una alternativa para reducir aún más el tiempo de procesamiento con respecto al esquema BBCE.

El capítulo está organizado de la siguiente manera. Se inicia con la formulación del problema de optimización, a continuación se detallan los algoritmos GBDCE y BBCE y la complejidad asociada a cada uno de ellos. Se continúa el capítulo con el algoritmo DCE, su diseño y el análisis de la complejidad. Finalmente, se expone la evaluación de resultados en términos de la CCDF, PSD (*Power Spectral Density*) y BER (*Bit Error Rate*) en presencia de un HPA.

## 5.1. Formulación del problema

Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, la idea básica de las técnicas CE, consiste en mover hacia afuera ciertos puntos externos de la constelación del símbolo complejo en el dominio de la frecuencia para combatir los picos grandes de la señal a la salida de la IDFT. Si se considera que el símbolo complejo  $k$ -ésimo en el dominio de la frecuencia  $\tilde{x}(k)$  con  $k = \{0, \dots, N-1\}$  se desplaza hacia cualquier punto dentro de la región permitida (véase Fig. 5.1), añadiendo un factor de extensión  $c(k) \in \mathbb{C}$ , entonces el símbolo complejo extendido es  $\tilde{x}'(k) = \tilde{x}(k) + c(k)$ . El correspondiente símbolo OFDM extendido, en el dominio del tiempo,  $\mathbf{x}' = [x'[0], \dots, x'[N-1]]$  está dado por

$$x'[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} (\tilde{x}(k) + c(k)) e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (5.1)$$

Si se considera la definición de la PAPR dada en (3.3), entonces, el problema general de minimización de la PAPR a través de las técnicas CE puede expresarse matemáticamente de la siguiente forma simplificada

$$\min_{\mathbf{c} \in C} \chi = \min_{\mathbf{c} \in C} \frac{\|\mathbf{x}'\|_{\infty}^2}{E[\|\mathbf{x}'\|^2]}, \quad (5.2)$$

siendo  $\chi$  la PAPR del símbolo OFDM  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{c}$  un vector de tamaño  $1 \times N$  que recoge los factores de extensión  $c(k)$  y  $C$  es el espacio permitido para extender la constelación.

Por conveniencia, en lugar de un factor de extensión aditivo  $c(k)$ , donde  $\tilde{x}'(k) = \tilde{x}(k) + c(k)$ , se prefiere un factor de extensión multiplicativo  $d(k) \in \mathbb{C}$ , donde  $\tilde{x}'(k) = \tilde{x}(k) d(k)$ ,

siendo  $\mathbf{d} \in D$  un vector  $1 \times N$  que recoge los factores de extensión  $d(k)$  del símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo, y  $D$  es la región de extensión permitida. A partir de aquí se utilizará esta notación.

Los nuevos algoritmos propuestos se basan en determinar los factores de extensión  $d(k)$  para cada símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo y el conjunto  $\mathcal{S}_L$  de los símbolos complejos OFDM en el dominio de la frecuencia que se deben extender para obtener una reducción en la PAPR del símbolo OFDM. Consecuentemente,  $\mathcal{S}_L$  consta de los  $\tilde{x}(k)$  tal que sus  $d(k)$  asociados son no nulos, a saber

$$\mathcal{S}_L = \{\tilde{x}(k) \mid d(k) \neq 0\}. \quad (5.3)$$

La cardinalidad de este conjunto está dado por  $L$  ( $L = |\mathcal{S}_L|$ ) y se cumple que  $L \leq N$ . El hecho de determinar  $\mathcal{S}_L$  ha sido abordado indirectamente por otras versiones de la técnica CE propuestas en la literatura. A continuación se presenta una asociación rápida de  $d(k)$  y  $\mathcal{S}_L$  para cada técnica CE (revisadas en el capítulo 3).

(a) **ACE (*Active Constellation Extension*)**: En la técnica ACE propuesta como un problema de optimización min-max [Krongold and Jones, 2003], todos los puntos de la constelación podrían ser extendidos por un valor  $d(k)$  diferente para cada subportadora, con  $|d(k)| \geq 1$ . Ésta técnica se puede caracterizar por

- Cardinalidad de  $\mathcal{S}_L$ :  $L \leq N$
- Factor de extensión:  $\mathbf{d} = \{d(k)\}_{k=0}^{N-1}$

(b) **SAP (*Simple Amplitude Predestination*)**: En la técnica SAP [Sezginer and Sari, 2006], los puntos externos de la constelación se modifican usando un factor de extensión predefinido  $d(k) = \alpha \in \mathbb{R}$ , ( $|\alpha| \geq 1$ ) que es independiente no solo del índice de las subportadoras  $k$  sino también del símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo, es decir, se tiene el mismo factor de extensión para todas las subportadoras y todos los símbolos OFDM transmitidos. El conjunto  $\mathcal{S}_L$  se determina a través de una métrica, y se extienden los  $L$  símbolos con la métrica más alta. Entonces,

- Cardinalidad de  $\mathcal{S}_L$ :  $L < N$
- Factor de extensión:  $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{1}_{1 \times N}$ , siendo  $\mathbf{1}_{1 \times N}$  un vector de unos de tamaño  $1 \times N$ . Este valor de  $\alpha$  es fijo para todos los símbolos OFDM.

(c) **ACE-IPM** (*ACE based on IPM*): ACE-IPM se formula como un problema de minimización SOCP para reducir la PAPR en [Wang and Leung, 2008] utilizando algoritmos *logarithmic-barrier* IPM y se caracteriza por

- Cardinalidad de  $\mathcal{S}_L$ :  $L \leq N$
- Factor de extensión:  $\mathbf{d} = \{d(k)\}_{k=0}^{N-1}$ .

### 5.1.1. Minimización de la PAPR como un problema mixto-entero

Con respecto al problema de minimización de la PAPR, el objetivo principal es determinar las muestras del símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia que pertenecen al conjunto  $\mathcal{S}_L$  y el correspondiente valor numérico del factor de escala  $d(k)$  para  $k \in \mathcal{S}_L$ . Esto implica reformular el problema de minimización de la PAPR dado en (5.2) en términos de variables binarias como se detalla a continuación.

Minimizar la PAPR es equivalente a minimizar el numerador de (5.2) si se considera el símbolo OFDM extendido en el dominio del tiempo  $\mathbf{x}' = [x'[0], \dots, x'[N-1]]$  [Tellado, 2002]. Dado que el cuadrado puede suprimirse en la operación de minimización, se define la función objetivo como  $\tilde{\chi} = \|\mathbf{x}'\|_\infty$ , y el problema de optimización se convierte en

$$\min_{\mathbf{d}^\ell \in D^\ell} \tilde{\chi} \quad (5.4)$$

con

$$x' [n] = x [n] + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathcal{S}_L} (d(k) - 1) \tilde{x} (k) e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (5.5)$$

siendo  $x [n]$  las muestras en el dominio del tiempo sin extensión. El problema (5.4) se puede reformular en términos de variables binarias, definiendo la variable  $s(k)$  que es 1 ó 0 dependiendo de si  $\tilde{x}(k)$  pertenece o no a  $\mathcal{S}_L$ , *i.e.*,

$$s(k) = \begin{cases} 1, & \tilde{x}(k) \in \mathcal{S}_L \\ 0, & \tilde{x}(k) \notin \mathcal{S}_L \end{cases} \quad (5.6)$$

Entonces, (5.5) es

$$x' [n] = x [n] + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) (d(k) - 1) \tilde{x} (k) e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (5.7)$$

Para reducir la complejidad, se asume que  $d(k)$  es real y no cambia en cada subportadora:  $d(k) = \alpha \in \mathbb{R}, \forall k$ . No obstante, hay que hacer notar que este valor no es fijo para todos los

símbolos OFDM, sino que se actualiza símbolo a símbolo OFDM. Por consiguiente (5.7) se reescribe como

$$x' [n] = x [n] + \frac{\alpha - 1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) \tilde{x}(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (5.8)$$

Consecuentemente, la formulación del problema de la PAPR se puede escribir como

$$\underset{\mathbf{s}, \alpha}{\text{mín}} \tilde{\chi} \quad (5.9)$$

siendo  $\mathbf{s} = [s(0), \dots, s(N - 1)]$ .

Sin embargo, para extender los puntos de una constelación con un orden mayor que QPSK, los índices de los símbolos candidatos a ser extendidos se deben conocer a priori, como se ilustra en la Fig. 5.1, y por consiguiente se redefine (5.8) como

$$x' [n] = x [n] + \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sum_{k \in \mathcal{I}_p} s(k) \tilde{x}(k) e^{j2\pi kn/N} + \sum_{k \in \mathcal{C}_p} \alpha s(k) \tilde{x}(k) e^{j2\pi kn/N} + \sum_{k \in \mathcal{B}_R} s(k) (\alpha \Re\{\tilde{x}(k)\} + j \Im\{\tilde{x}(k)\}) e^{j2\pi kn/N} + \sum_{k \in \mathcal{B}_I} s(k) (\Re\{\tilde{x}(k)\} + \alpha j \Im\{\tilde{x}(k)\}) e^{j2\pi kn/N} \right), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (5.10)$$

donde  $\mathcal{I}_p, \mathcal{B}_R, \mathcal{B}_I$  y  $\mathcal{C}_p$  son, respectivamente, los subconjuntos de símbolos que pertenecen a los puntos de la constelación internos, frontera en el eje real, frontera en el eje imaginario y esquinas.

De acuerdo con la caracterización hecha para las otras técnicas CE (ACE, SAP y ACE-IPM) el problema de minimización de la PAPR propuesto se caracteriza por

- Cardinalidad de  $\mathcal{S}_L$ :  $L \leq N$
- Factor de extension:  $\mathbf{d} = \alpha \mathbf{1}_{1 \times N}$ . Este valor de  $\alpha$  cambia para cada símbolo OFDM.

La solución del problema de optimización dado por (5.9) proporciona el valor del factor de extensión óptimo ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) y el conjunto de índices de los símbolos  $\mathcal{S}_L$  que se deben extender, es decir, cuando  $s(k) = 1$  el símbolo  $\tilde{x}(k)$  es extendido. La solución se indicará con el superíndice  $(\cdot)^*$ , y está dada por  $(\mathbf{s}^*, \alpha^*)$ .

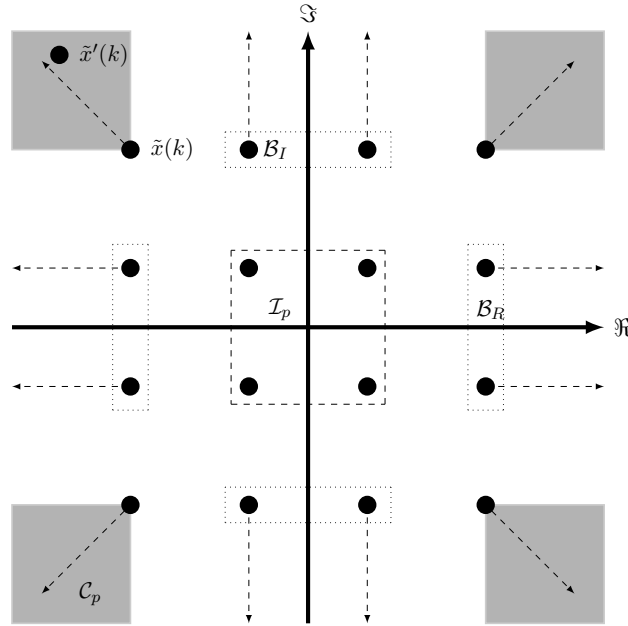


Figura 5.1: Regiones de extensión permitida en una modulación 16-QAM.

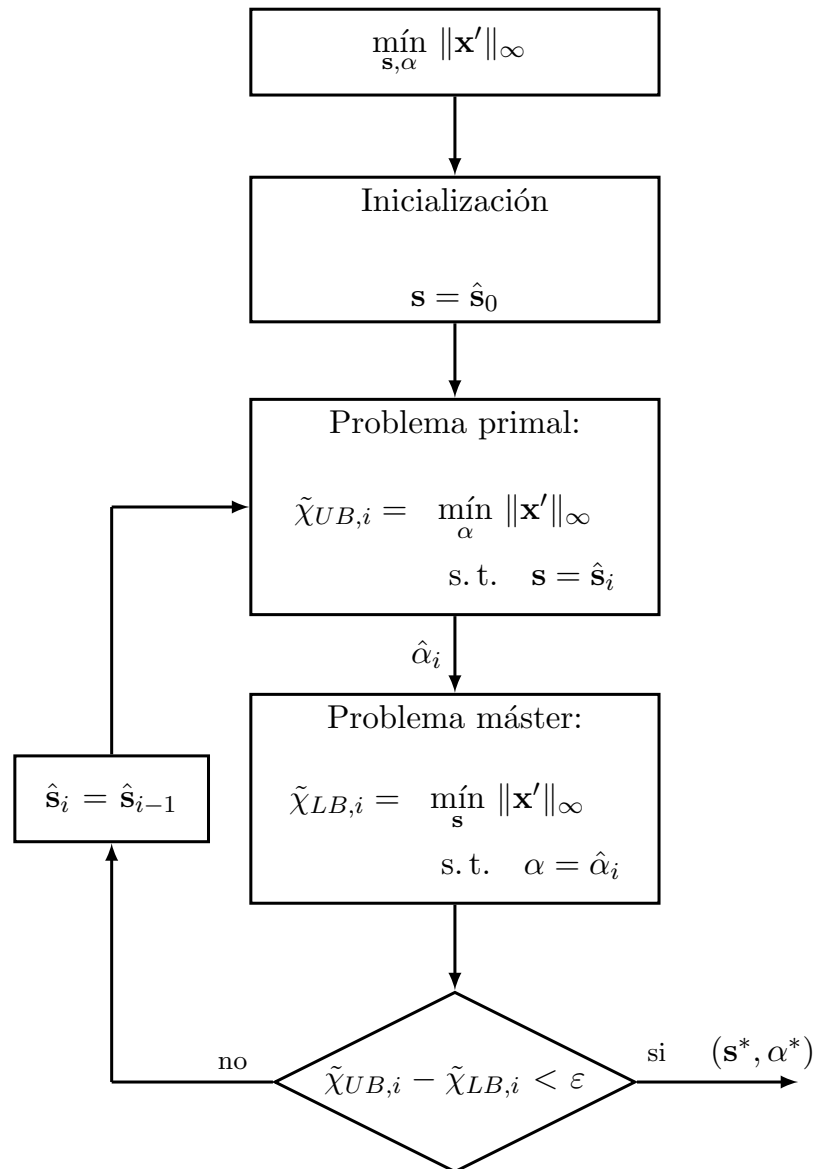
El problema (5.9) de minimización se considera como un problema de Programación No Lineal Mixto-Entero (MINLP), debido a que compromete variables con valores enteros (dadas en el vector  $\mathbf{s}$ ) y variables no enteras ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), y la función de optimización es no lineal.

## 5.2. Algoritmo óptimo GBDCE

En esta sección del capítulo, se propone una solución óptima al problema de reducción de la PAPR dado en (5.9), llamado algoritmo GBDCE (*Generalized Benders Decomposition for Constellation Extension*), cuya solución se encuentra a través del método GBD (*Generalized Benders Decomposition*), detallado en el apéndice B. El método GBD consiste en generar, en un número finito de iteraciones, dos secuencias que se actualizan en cada iteración: el límite superior (que es no creciente) y el límite inferior (que es no decreciente), los cuales convergen dentro de un valor  $\varepsilon$  [Geoffrion, 1972]. Para cada iteración, encontrar el límite superior corresponde a resolver un subproblema de variables reales, donde el valor de las variables enteras son fijos; este subproblema se denomina *problema primal*; de forma similar, el límite inferior se obtiene resolviendo sucesivamente un subproblema de variables enteras, donde los valores de las variables reales son fijos; este subproblema se denomina *problema*

máster.

Los detalles del algoritmo GBDCE se proporcionan a continuación y se ilustran por medio del diagrama de bloques de la Fig. 5.2. Las resoluciones de los problemas máster y primal se ejecutan para cada iteración  $i$ -ésima,  $1 \leq i \leq I$ , donde  $I < \infty$  es el número de iteraciones que alcanza el algoritmo GBDCE hasta conseguir su convergencia.



**Figura 5.2:** Diagrama de bloques del algoritmo óptimo de reducción de la PAPR: GBDCE

Primero, para resolver el problema primal se proporciona una solución entera  $\hat{s}_{i-1}$ , es decir, los valores de las variables enteras  $\hat{s}_{i-1}$  son fijos y el objetivo es obtener el valor de

$\alpha_i$  para conseguir el límite inferior  $\tilde{\chi}_{UB,i}$  del problema dado en (5.9). Por consiguiente, el problema primal en la iteración  $i$ -ésima se formula como

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{UB,i} &= \min_{\alpha} \|\bar{\mathbf{x}}\|_{\infty} \\ \text{s. t.} \quad \mathbf{s} &= \hat{\mathbf{s}}_{i-1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

La solución de este problema proporciona el valor  $\hat{\alpha}_i$  que se utiliza para resolver el problema máster. Por tanto, como segundo paso, se resuelve el problem máster para las variables enteras  $\mathbf{s}$  cuando se ha fijado  $\alpha = \hat{\alpha}_i$  (dado en la solución del problema primal). La solución de este problema es el límite inferior  $\tilde{\chi}_{LB,i}$  del problema dado en (5.9). Por tanto, el problema máster se formula como

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{LB,i} &= \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{x}'\|_{\infty} \\ \text{s. t.} \quad \alpha &= \hat{\alpha}_i \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde se obtienen las variables enteras  $\hat{\mathbf{s}}_i$  que son proporcionadas al problema primal en la siguiente iteración. El problema máster puede resolverse por medio de métodos estándares de optimización entera y en el caso particular del GBDCE se hace uso del método BB (*Branch-and-Bound*) [Bertsekas, 1999], expuesto en el apéndice B. Hay que tener en cuenta que aunque GBDCE haga uso del método BB para calcular el límite inferior  $\tilde{\chi}_{LB}$ , este algoritmo GBDCE difiere notablemente del esquema BBCE propuesto en la siguiente sección.

Se debe observar que el algoritmo GBDCE se debe inicializar con una solución  $\hat{\mathbf{s}}_0$ , por lo que se ha determinado empíricamente que  $\hat{\mathbf{s}}_0 = \mathbf{0}_{1 \times N}$  es una solución inicial válida, donde  $\mathbf{0}_{1 \times N}$  es un vector nulo de tamaño  $1 \times N$ .

Estos dos problemas se ejecutan iterativamene hasta que se alcance la convergencia, es decir, debe cumplirse la condición  $(\tilde{\chi}_{UB,i} - \tilde{\chi}_{LB,i}) < \varepsilon$ , siendo  $\varepsilon$  el parámetro que define la convergencia del esquema GBDCE. Como la secuencia de límite superior  $\{\tilde{\chi}_{UB,i}\}_{i=1}^I$  es no creciente y la del límite inferior  $\{\tilde{\chi}_{LB,i}\}_{i=1}^I$  es no decreciente, entonces se garantiza que la diferencia  $\tilde{\chi}_{UB,i} - \tilde{\chi}_{LB,i}$  converja dentro del valor de  $\varepsilon$  como también lo hace el algoritmo propuesto de acuerdo al Teorema 1 del apéndice B.

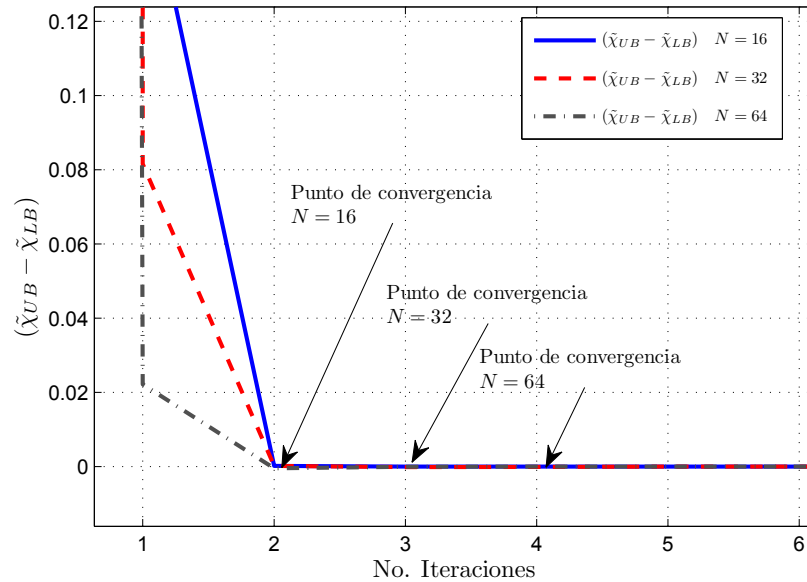
Determinar la solución óptima del problema de la PAPR por medio del esquema GBDCE implica un proceso secuencial para calcular los valores de la variable real  $\alpha \in \mathbb{R}$  junto con el cálculo de las variables enteras  $\mathbf{s}$  hasta que la diferencia entre  $\tilde{\chi}_{UB}$  y  $\tilde{\chi}_{LB}$  sea menor que  $\varepsilon$ . En



consecuencia, la convergencia de GBDCE depende de un valor adecuado de  $\varepsilon$ , ya que mientras más alto es el valor de  $\varepsilon$ , la convergencia del algoritmo es más rápida, pero a expensas de una precisión menor en la solución y viceversa.

### 5.2.1. Convergencia del algoritmo GBDCE

Como se ha indicado, el algoritmo GBDCE termina cuando la diferencia entre los límites superior e inferior ( $\tilde{\chi}_{UB} - \tilde{\chi}_{LB}$ ) es menor que un valor  $\varepsilon$  dado. A través de simulaciones, se demuestra que el algoritmo GBDCE converge en un número finito de iteraciones. Así, la Fig. 5.3 muestra la convergencia del algoritmo GBDCE, donde para cada iteración se evalúa la diferencia entre el límite superior e inferior para sistemas OFDM con  $N = \{16, 32, 64\}$  subportadoras. Se establecen los siguientes puntos iniciales del algoritmo,  $\tilde{\chi}_{UB} = 10^6$ ,  $\tilde{\chi}_{LB} = 0$  y se considera el parámetro de convergencia  $\varepsilon = 10^{-6}$ . De esta figura, el hecho de que  $\tilde{\chi}_{UB} - \tilde{\chi}_{LB}$  esté cerca del cero significa que el algoritmo ha convergido en un número finito de iteraciones.



**Figura 5.3:** Convergencia del algoritmo GBDCE: diferencia entre los límites superior e inferior para cada iteración para sistemas OFDM con  $N = \{16, 32, 64\}$  subportadoras y modulación QPSK.

### 5.3. Algoritmo subóptimo BBCE

El esquema GBDCE tiene asociado una elevada complejidad computacional debido principalmente a que es un proceso secuencial. En esta parte del capítulo, se propone un algoritmo subóptimo llamado BBCE (*Branch-and-Bound for Constellation Extension*), el cual pretende aliviar el tiempo de ejecución asociado al esquema GBDCE. Ambos objetivos se pueden alcanzar con BBCE, si el valor del factor de extensión  $\alpha$  se restringe a un conjunto de valores dados por el conjunto  $\mathcal{A} = \{1, 1 + \delta, 1 + 2\delta, \dots, 1 + (Q - 1)\delta\}$ , siendo  $\delta$  el paso entre valores consecutivos de  $\alpha$ , el cual define la granularidad en la precisión de la solución, y  $Q$  es la cardinalidad de  $\mathcal{A}$  ( $Q = |\mathcal{A}|$ ).

El algoritmo BBCE soluciona el problema de la PAPR dado en (5.9) haciendo uso del método BB (para detalles sobre este método, véase el apéndice B) como se detalla a continuación (véase el diagrama del algoritmo en la Fig. 5.4). BBCE encuentra la solución  $\mathbf{s}^*$  por medio de  $Q$  ramas calculadas de forma paralela, donde en cada rama  $q$ -ésima,  $q = \{0, \dots, Q - 1\}$ , resuelve el problema de minimización de la PAPR para un valor  $\alpha \in \mathcal{A}$ , obteniéndose la solución  $\mathbf{s}_q^*$ . Por lo tanto, el problema de minimización de la PAPR se formula como

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{x}'\|_{\infty} \\ \text{s. t. } \alpha = \alpha_q, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde  $\alpha_q = 1 + q\delta$ , con  $q = \{0, \dots, Q - 1\}$ . Por consiguiente, el problema (5.13) se resuelve en paralelo, tantas veces como sea el valor de  $Q$  y en cada rama  $q$ -ésima se tiene asociado un valor de  $\tilde{\chi}_q$  dado por

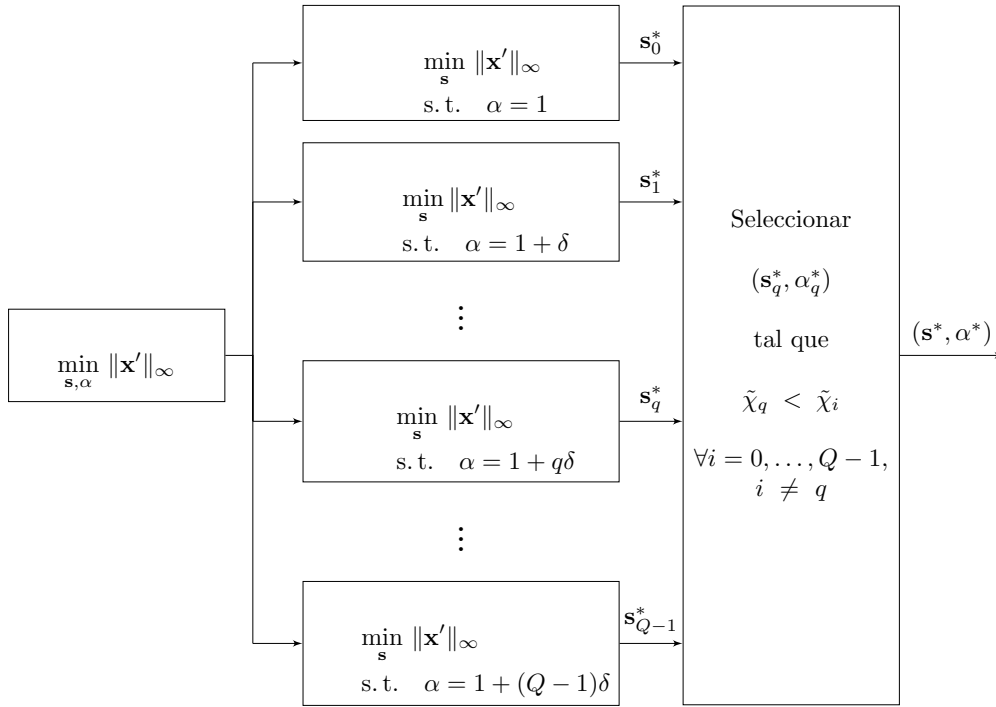
$$\tilde{\chi}_q = [\|\mathbf{x}'\|_{\infty}]_{\mathbf{s}_q^*, \alpha_q}. \quad (5.14)$$

Finalmente, se selecciona la solución  $(\mathbf{s}^*, \alpha^*)$  que corresponda al valor más bajo del conjunto  $\mathcal{S}_{\chi} = \{\tilde{\chi}_q\}_{q=0}^{Q-1}$  según

$$(\mathbf{s}^*, \alpha^*) = \arg \min_{(\mathbf{s}_q, \alpha_q)} \mathcal{S}_{\chi} \quad (5.15)$$

donde  $\min \mathcal{S}_{\chi}$  es el mínimo valor dentro del conjunto  $\mathcal{S}_{\chi}$ , denotado como  $\tilde{\chi}^*$ , y  $(\mathbf{s}^*, \alpha^*)$  son los argumentos correspondientes a  $\tilde{\chi}^*$ .

En términos de complejidad, el punto clave es definir el conjunto  $\mathcal{A}$  lo más pequeño posible, lo que significa una alta granularidad. A medida que se reduce el valor de delta ( $\delta \rightarrow 0$ ) se tiene una mejor aproximación al caso continuo  $\mathcal{A} = [1, Q] \in \mathbb{R}$ , mientras que



**Figura 5.4:** Diagrama de bloques del algoritmo subóptimo BBCE.

para  $\delta = 1$  el conjunto se reduce a  $Q$  puntos:  $\mathcal{A} = \{1, \dots, Q\}$ . Para valores más altos de  $\delta$ , menor es el tiempo de procesamiento asociado con la ejecución del BBCE. Con esto en mente, se demuestra a través de simulaciones en la sección 5.6 que los efectos de incrementar la granularidad ( $\delta$ ) sólo tiene un ligero impacto en la reducción de la PAPR. Por consiguiente, determinar  $\mathbf{s}$  es el valor crítico de la técnica BBCE.

## 5.4. Análisis de la complejidad de GBDCE y BBCE

A continuación se presenta el análisis de la complejidad de los dos algoritmos hasta ahora propuestos. Primero, se analizarán en términos de tiempo de ejecución, donde se demuestra que el esquema BBCE es menos complejo que GBDCE. Segundo, se investiga la complejidad computacional teórica y se proporciona una comparación con otras técnicas CE existentes en la literatura.

### 5.4.1. Análisis del tiempo de ejecución

El esquema GBDCE provee una solución óptima al problema de la PAPR a través de la extensión de ciertos puntos de la constelación del símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, el tiempo de ejecución de este algoritmo puede ser elevado debido a que se lleva a cabo un proceso iterativo. Para evaluar eficazmente la diferencia entre GBDCE y BBCE, en términos de tiempo de ejecución, se caracteriza el tiempo de ejecución de ambos algoritmos desde un punto de vista probabilístico, como se detalla a continuación.

Se denota el tiempo de ejecución por símbolo OFDM por medio de la variable aleatoria  $T$ , que representa el tiempo que requiere cada algoritmo para procesar la técnica de reducción de la PAPR por medio de simulaciones con Matlab. Se ha observado empíricamente que los histogramas de la variable aleatoria  $T$  sigue una distribución Rayleigh (como se observa en las Figs. 5.5 y 5.6). En consecuencia, la PDF (*Probability Density Function*) de  $T$  puede expresarse como

$$f_T(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-t^2/2\sigma^2} \quad , 0 < t \leq \infty \quad (5.16)$$

donde  $\sigma$  es el parámetro de máxima verosimilitud de la distribución, que puede ser estimado a partir de  $M$  muestras como [Ochi, 1990]:

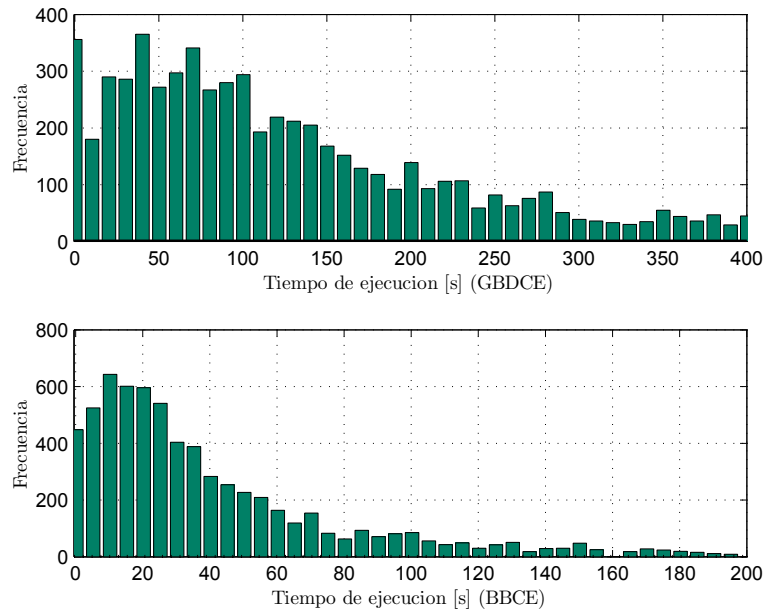
$$\hat{\sigma} \approx \sqrt{\frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M (t_m)^2}, \quad (5.17)$$

y la media y varianza de la distribución están, respectivamente, dados por [Ochi, 1990]:

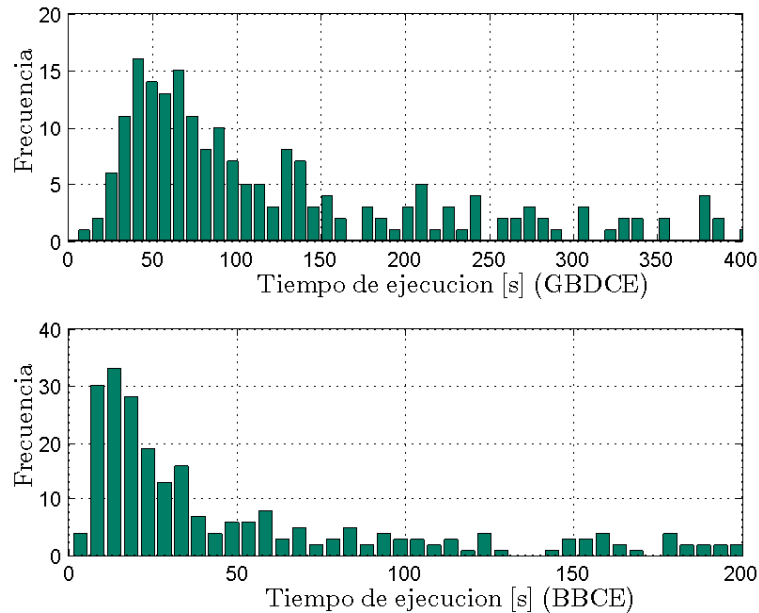
$$E[T] = \left(\sqrt{\pi/2}\right) \sigma \quad (5.18)$$

$$Var[T] = (2 - \pi/2) \sigma^2. \quad (5.19)$$

Los histogramas en las Figs. 5.5 y 5.6 representan el tiempo de ejecución de sistemas OFDM con  $N = 16$  y  $N = 32$  subportadoras respectivamente. En el eje x de estas figuras se representa el tiempo de ejecución por símbolo OFDM en [s], mientras que en eje y se proporciona la frecuencia de aparición. El eje x de los algoritmos (GBDCE y BBCE) se presentan en diferentes escalas con el fin de apreciar la envolvente Rayleigh. Se observa claramente en estas figuras que el tiempo que requiere el algoritmo GBDCE es mayor que el del esquema BBCE.



**Figura 5.5:** Distribución Rayleigh del tiempo de ejecución de las técnicas GBDCE y BBCE para un sistema OFDM con  $N = 16$  subportadoras y modulación QPSK (a través de simulaciones en Matlab).



**Figura 5.6:** Distribución Rayleigh del tiempo de ejecución de la técnica GBDCE para un sistema OFDM con  $N = 32$  subportadoras (a través de simulaciones en Matlab).

Los parámetros de la distribución Rayleigh de cada esquema se comparan para confirmar que el esquema BBCE requiere un menor tiempo de procesamiento. Estos parámetros se resumen en la Tabla 5.1, en la cual se puede notar que la media y la varianza de GBDCE para un sistema OFDM con  $N = 32$  subportadoras son significativamente más grandes que los valores de BBCE. Específicamente, la media es casi el triple y la varianza es siete veces mayor aproximadamente, lo que implica que la distribución Rayleigh del tiempo de ejecución del esquema GBDCE se extiende más. Así se confirma que el algoritmo GBDCE es más costoso que el algoritmo BBCE, en términos de tiempo de procesamiento.

**Tabla 5.1:** Parámetros de la distribución Rayleigh para un sistema OFDM con  $N = \{16, 32\}$  subportadoras

<b>Parámetros</b>	$N = 16$		$N = 32$	
	<b>GBDCE</b>	<b>BBCE</b>	<b>GBDCE</b>	<b>BBCE</b>
	$\hat{\sigma}$	9.6	6.7	73.3
$E [T]$	12.1	8.3	91.9	34.5
$Var [T]$	39.9	19.2	2308.2	325.9

#### 5.4.2. Complejidad computacional

En la literatura existen algunas propuestas que siguen la idea de minimización de la PAPR a través de programación entera. Por ejemplo, ACE-POCS [Krongold and Jones, 2003] demuestra que la complejidad asociada con el esquema POCS es  $O(N \log N)$ , donde  $N$  es número de subportadoras. La complejidad del algoritmo GBDCE es  $O(IN \log N)$ , donde  $I$  es el número de iteraciones hasta que el algoritmo alcance la convergencia. En lo que respecta al algoritmo BBCE, hay que tener en cuenta que el método BB (*Branch-and-Bound*) que apoya al esquema, tiene una complejidad asociada que viene dada por  $O(N \log N)$ . Debe que el algoritmo BBCE se calcula paralelamente, pues las  $Q$  ramas se resuelven simultáneamente, su complejidad está dada también por  $O(N \log N)$ .

Sin embargo, para estos dos algoritmos, se ha limitado a que sólo los puntos externos de la constelación sean extendidos, lo que reduce la complejidad de manera considerable. Se define  $\Theta = \frac{B_{outer}}{B}$ , donde  $\Theta$  representa el porcentaje de símbolos de datos complejos  $\tilde{x}(k)$  que son susceptibles de ser expandidos, es decir,  $k \in \mathcal{B}_R, \mathcal{B}_I, \mathcal{C}_p$ ,  $B_{outer}$  es el número de puntos externos de la constelación con  $B_{outer} = |\mathcal{B}_R| + |\mathcal{B}_I| + |\mathcal{C}_p|$  y  $B$  es el número total de puntos de la constelación. Por ejemplo, si se considera una modulación 16-QAM, los cuatro puntos internos no deben expandirse ( $k \in \mathcal{I}_p$ ) y el problema se resuelve con los doce puntos externos de la constelación, *i.e.*,  $\Theta = 12/16 = 0.75$ . Como los símbolos complejos son variables aleatorias i.i.d.,  $\Theta$  proporciona el porcentaje de puntos de la constelación que podrían extenderse, este porcentaje es  $(1 - \Theta) \times 100 = 25\%$ . Por esta razón, se tiene que la complejidad asociada con el algoritmo GBDCE es  $O(I\Theta N \log \Theta N)$ , y la del algoritmo BBCE es  $O(\Theta N \log \Theta N)$ . Claramente, dado que  $\Theta \leq 1$  el algoritmo BBCE exhibe una menor complejidad que ACE-POCS.

Con respecto a las técnicas CCS<sup>1</sup>, usualmente propuestas como problemas de minimización convexa, el algoritmo EVM-IPM [Aggarwal and Meng, 2006] formula la minimización de la PAPR como un problema SOCP, sujeto a restricciones en EVM y a la potencia de las subportadoras libres. Este problema conlleva una complejidad  $O(N^3)$ . En [Wang and Leung, 2008], los autores presentan el algoritmo ACE-IMP el cual ligeramente mejora la complejidad teórica asociada con el algoritmo EVM-IPM, alcanzando una complejidad  $O(I(2N + N^2))$ , donde  $I$  representa el número de iteraciones que usa el algoritmo gradiente conjugado. Por otro lado, el esquema G-IPM (*Generalized IPM*) [Yu et al., 2011], incorpora un tipo específico de extensión de la constelación en la formulación del problema, como un conjunto de funciones convexas, por tanto, el esquema G-IPM es esencialmente el mismo que el algoritmo ACE-IPM, con la diferencia de que el tamaño óptimo de paso  $\alpha$  se debe calcular por medio de un problema de optimización (en ACE-IPM,  $\alpha$  se da en forma cerrada). Consecuentemente, la complejidad es mayor que  $O(I(2N + N^2))$ , con un aumento en la complejidad dada directamente por el problema asociado de optimización del tamaño del paso. Todos estos esquemas, tienen en común que necesitan de un criterio para terminar el algoritmo, ya sea por el número máximo de iteraciones o que la convergencia de la solución sea dentro de un parámetro  $\varepsilon$ .

En lo referente a la complejidad de SAP [Sezginer and Sari, 2007], estrictamente hablando,

---

<sup>1</sup>véase sección 3.2.2.2

esta es más una técnica en lugar de un algoritmo. Esta técnica es útil para determinar el nivel de extensión y número de símbolos complejos en el dominio de la frecuencia que se deben extender para reducir la PAPR; estos parámetros se calculan *offline* a través de simulaciones exhaustivas. No se puede hacer ninguna modificación adicional para estos valores prefijados y, en consecuencia, se aplican los mismos valores a cualquier símbolo OFDM transmitido. Además, los parámetros calculados son concretos para un número específico de subportadoras (tamaño de la FFT) y del tipo de modulación. Dicho esto, se considera que la complejidad asociada con la técnica SAP no debe ser tomada en consideración para comparar con los dos algoritmos presentados hasta ahora en este capítulo ya que no es un algoritmo adaptativo.

## 5.5. Algoritmo subóptimo DCE

Como se ha analizado en la sección 5.4.1, el tiempo de ejecución del algoritmo subóptimo BBCE sigue una distribución Rayleigh, lo que significa que la mayoría de los símbolos OFDM son procesados rápidamente, pero un pequeño porcentaje de los símbolos OFDM presentarán un tiempo de procesamiento largo para encontrar la solución. Con la finalidad de aliviar esta lenta convergencia ocasional, se propone un nuevo esquema subóptimo llamado DCE (*Dynamic Constellation Extension*), el cual se presenta como una alternativa para obtener una buena reducción de la PAPR y que pueda ser implementado en sistemas reales, a diferencia de muchos algoritmos CS, que en su mayoría tienen buenas prestaciones, en términos de reducción de la PAPR, pero, debido a que realizan procesos de optimización demandan de una complejidad computacional bastante alta, [Krongold and Jones, 2003],[Wang and Leung, 2008], [Yu et al., 2011], la cual es indeseable en los sistemas prácticos

El esquema DCE consiste en un algoritmo de dos ramas, llamadas rama BBCE y rama SAP. DCE hace uso del algoritmo BBCE, pero en caso de que un cierto símbolo OFDM tenga una lenta convergencia, DCE evita este tiempo de ejecución excesivo, conmutando a la segunda rama, donde se lleva a cabo un algoritmo CE, basado en métrica (específicamente el algoritmo SAP [Sezginer and Sari, 2006]) que es menos eficiente, en términos de reducción de la PAPR, pero más rápido. Ahora, para decidir si el esquema DCE, en la rama del algoritmo BBCE está tardando demasiado tiempo en encontrar la solución y es momento de conmutar a la segunda rama, se debe determinar un umbral de tiempo adecuado. Dicho umbral debe



proporcionar un buen compromiso entre prestaciones de PAPR y tiempo de ejecución, que está íntimamente relacionado con la complejidad.

Los detalles de la técnica DCE se presentan a través del pseudocódigo dado en el Algoritmo 4 y del diagrama la Fig. 5.7. El algoritmo DCE, para cada símbolo OFDM, se inicia siempre en la rama BBCE, esto es, que el proceso de optimización se realiza para encontrar los elementos del vector  $\mathbf{s} = [s(0), \dots, s(N-1)]$  que corresponderá a los símbolos en el dominio de la frecuencia que deben ser extendidos para  $s(k) = 1$ , y el correspondiente factor de extensión  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{x}'\|_{\infty} \\ \text{s. t. } \alpha = \alpha_q, \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde  $\mathbf{x}' = [x'[0], \dots, x'[N-1]]$  recoge las muestras del símbolo OFDM extendido según (5.8) y  $\alpha_q = 1 + q\delta$ , con  $q = \{0, \dots, Q-1\}$ .

En el esquema DCE, en cada proceso de minimización  $q$ -ésimo de la rama BBCE, se debe comprobar el tiempo de ejecución  $t$ . Se denota  $t_{\gamma}$  como el umbral de tiempo de ejecución permitido para que la rama BBCE encuentre la solución, es decir, que una vez que  $t_{\gamma}$  sea alcanzado ( $t > t_{\gamma}$ ) sin que BBCE haya encontrado la solución  $(\mathbf{s}^*, \alpha^*)$ , el algoritmo DCE debe conmutar a la segunda rama, donde se lleva a cabo el algoritmo SAP [Sezginer and Sari, 2006], esto es, se calcula la métrica dada por (3.44) para determinar el conjunto de símbolos que deben extenderse, es decir,  $\tilde{x}(k), k \in \mathcal{S}_L$ ; el valor de  $\alpha$ , para el caso de la rama SAP será fijado a priori [Sezginer and Sari, 2006]. Una vez que se determine el conjunto de símbolos que deben ser extendidos, ya sea por medio de la rama BBCE o de SAP, los datos deben ser actualizados en el dominio del tiempo.

Así, se obtiene un algoritmo que alcanza una buena reducción de la PAPR, mientras decrece el excesivo tiempo de ejecución que ocasionalmente presenta el algoritmo BBCE. Con estas consideraciones, el diseño del algoritmo DCE, puede realizarse desde dos puntos de vista: (1) restricciones en el tiempo de ejecución y (2) límites en el rendimiento de la PAPR. Ambas consideraciones se abordan en esta sección y se analizan los parámetros involucrados que son determinados teóricamente.

---

**Algoritmo 4 DCE**

---

1: **Entrada:** Símbolo OFDM de PAPR elevada:  $\mathbf{x} = [x[0], \dots, x[N-1]]$

2: **Rama BBCE**

3: Formulación del problema, según (5.20)

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{s}} \|\mathbf{x}'\|_{\infty} \\ & \text{s. t. } \alpha = \alpha_q, \end{aligned}$$

4: Minimizar  $\mathbf{x}'$  en cada rama  $q$ -ésima

5: Verificar la duración del tiempo de procesado de cada rama  $q$ -ésima hasta  
 $t > t_{\gamma}$

6: **if** ( $t \leq t_{\gamma}$ ) **then**

7: Seleccionar el conjunto  $(\mathbf{s}, \alpha)$  de la rama  $q$ -ésima que proporcione la PAPR  
 menor

$$(\mathbf{s}^*, \alpha^*) = \arg \min_{(\mathbf{s}_q, \alpha_q)} \mathcal{S}_{\chi}$$

8: **return**  $(\mathbf{s}^*, \alpha^*)$

9: **else**

10: **Conmutar a la rama SAP**

11: Calcular la métrica usando (3.44)

12: Seleccionar los  $L$  símbolos con métrica más alta

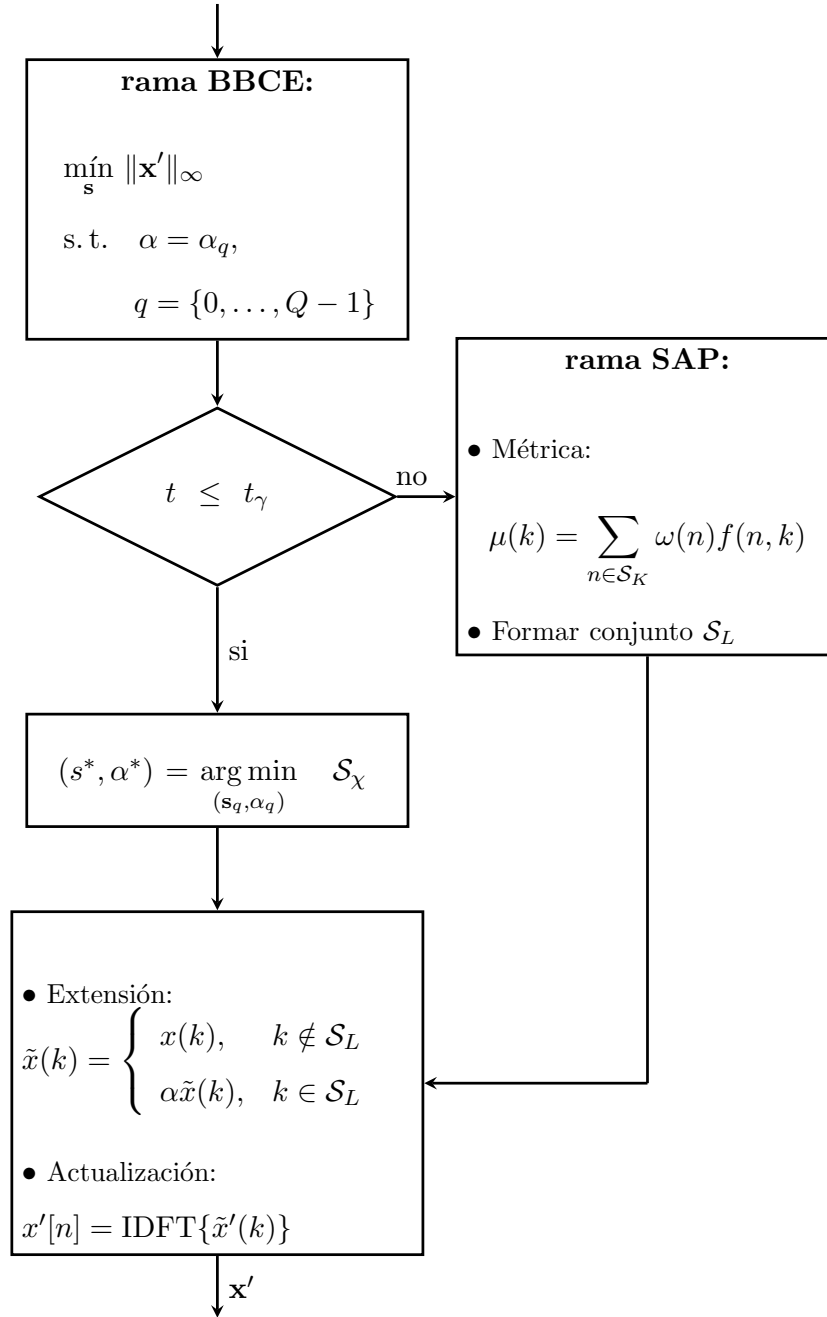
13: **return**  $\mathcal{S}_L$

14: **end if**

15: Extender los puntos de la constelación usando el conjunto  $(\mathbf{s}^*, \alpha^*)$  o  $\mathcal{S}_L$  con  
 $\alpha$  fijado a priori

16: Actualizar la señal en el dominio del tiempo

---

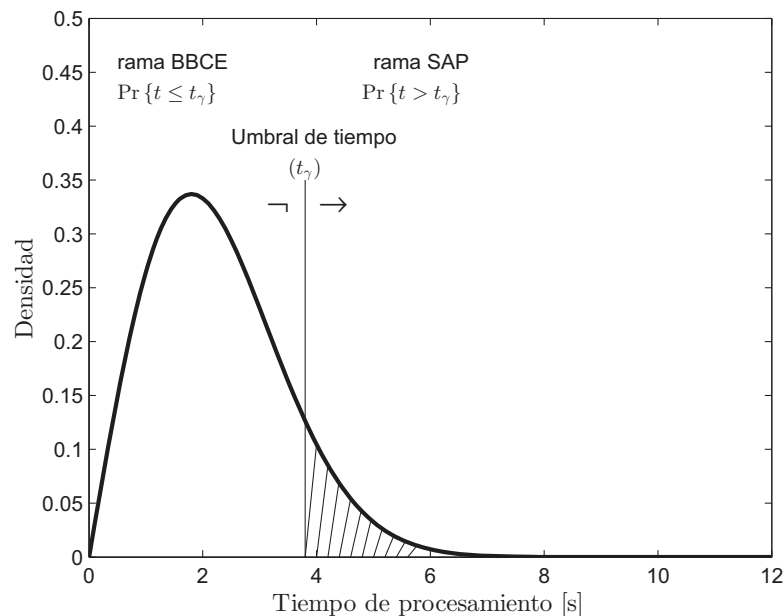


**Figura 5.7:** Diagrama de bloques del esquema DCE, donde se considera que las  $Q$  ramas del algoritmo BBCE están implícitas en la caja de la rama BBCE.

### 5.5.1. Diseño práctico del algoritmo DCE

El algoritmo DCE, debe proporcionar un compromiso adecuado entre el tiempo de ejecución ( $T$ ) y el rendimiento de la PAPR (CCDF). Evidentemente, la selección del umbral

de tiempo ( $t_\gamma$ ) determina el tiempo de procesado y el rendimiento de la PAPR. Para aclarar mejor esta idea, se presenta la Fig. 5.8, donde se observa que fijar el umbral de tiempo  $t_\gamma$ , define la duración del procesado de la técnica y las prestaciones en términos de PAPR. Así por ejemplo, si el valor de  $t_\gamma$  es grande, la ganancia en PAPR es mejor, debido a que la rama BBCE encontrará la solución para la mayoría de símbolos OFDM transmitidos. Sin embargo, si  $t_\gamma$  es pequeño, la conmutación dinámica a la rama SAP, ocurrirá con mayor frecuencia; y, consecuentemente, las prestaciones de la PAPR son menores. En resumen, a medida que el valor de  $t_\gamma$  va decreciendo, lo hace también la ganancia en PAPR, pero el tiempo de ejecución del algoritmo es menor.



**Figura 5.8:** Distribución Rayleigh del tiempo de ejecución del algoritmo BBCE, donde el valor que tome  $t_\gamma$  determina las prestaciones del sistema. Si  $t_\gamma$  se mueve cerca del cero, significa que DCE conmutará con mayor frecuencia a la rama SAP.

Dependiendo de los requerimientos del diseño, se pueden tener dos consideraciones:

- Si por razones de implementación, el aspecto más importante a tener en cuenta es el tiempo de ejecución del algoritmo, entonces es necesario determinar un adecuado umbral de tiempo ( $t_\gamma$ ) que alivie la lenta convergencia que ocasionalmente presenta el algoritmo BBCE, sin degradar excesivamente el rendimiento de la técnica de reducción

de la PAPR

- Por otro lado, si el rendimiento (CCDF) es el criterio clave del diseño, es obligatorio asegurar que el esquema DCE conmute a la rama SAP lo menos posible, sin que el tiempo de ejecución sea alto.

Por consiguiente, se debe conseguir un algoritmo con un compromiso adecuado entre tiempo de ejecución y rendimiento de la PAPR. Los dos casos de diseño se presentan a continuación.

### 5.5.1.1. Diseño basado en restricciones de tiempo

En esta primera consideración de diseño, se asume que el valor de  $t_\gamma$  es fijo, debido a las restricciones impuestas por los requerimientos de implementación. Por tanto, el valor de  $t_\gamma$  debe fijarse lo más bajo posible en función de las restricciones de tiempo que exista ( $t_\gamma$  debe moverse hacia la izquierda de la distribución, como se observa en la Fig. 5.8), pero a costa de degradar la ganancia de la PAPR. Consecuentemente, el valor escogido para  $t_\gamma$  tiene un impacto en las prestaciones del sistema.

Como se ha indicado, el tiempo de ejecución de cada símbolo OFDM  $\ell$ -ésimo para encontrar la solución en la rama BBCE está limitado al umbral de tiempo  $t_\gamma$ , es decir, siempre se debe cumplir  $t \leq t_\gamma$ . Si se denota como  $\mathcal{L}_1$  al conjunto de índices de los símbolos OFDM ( $\ell$ ) que son procesados solamente por la rama BBCE, mientras que  $\mathcal{L}_2$  denota el conjunto de índices que corresponden a los símbolos OFDM que necesitaron conmutar a la rama SAP para encontrar la solución, entonces,  $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$  agrupa todo los valores de  $\ell$ . Para aquellos símbolos que sólo necesitan pasar por la rama BBCE para encontrar la solución ( $\ell \in \mathcal{L}_1$ ) el tiempo de procesamiento asociado es  $t < t_\gamma$ , es decir, encontraron la solución antes de alcanzar el umbral de tiempo. Y, para aquellos símbolos que conmutaron a la rama SAP para encontrar la solución ( $\ell \in \mathcal{L}_2$ ) el tiempo de procesamiento está dado por  $t = t_\gamma + t_{SAP}$ , donde  $t_{SAP}$  denota el tiempo que consume la rama SAP para procesar la técnica de reducción de la PAPR. Por consiguiente, el tiempo de ejecución total del esquema DCE ( $t_T$ ) para una cierta simulación está dado por

$$t_T = \sum_{\ell \in \mathcal{L}_1} t + \sum_{\ell \in \mathcal{L}_2} (t_\gamma + t_{SAP}). \quad (5.21)$$

Debido a que  $t_{SAP}$  es insignificante comparado con  $t_\gamma$  ( $t_{SAP} \ll t_\gamma$ ) entonces, para  $\ell \in \mathcal{L}_2$ ,

se puede aproximar  $t \approx t_\gamma$ , obteniéndose

$$t_T \approx \sum_{\ell \in \mathcal{L}_1} t + \sum_{\ell \in \mathcal{L}_2} t_\gamma. \quad (5.22)$$

La pregunta relevante ahora es cómo elegir el valor de  $t_\gamma$ . Aunque el criterio para limitar el tiempo de ejecución son las restricciones en la implementación práctica, la selección puede guiarse por el valor de la mediana de la distribución Rayleigh, denotada por  $t_0$ , la cual es uno de los parámetros más usados y representativos de la distribución Raileigh. El valor de la mediana separa la mitad superior de la mitad inferior de la curva de la PDF de la distribución, esto es,

$$\Pr \{T < t_0\} = \Pr \{T \geq t_0\}. \quad (5.23)$$

Esto significa que la expectativa de encontrar la solución solamente con la rama BBCE es la misma que encontrarla cuando se necesitó conmutar a la rama SAP. Por tanto, el valor sugerido de  $t_\gamma$  podría estar alrededor de  $t_0$ , aunque el valor fijado pueda ser impuesto por las limitaciones prácticas, sin importar el rendimiento de la PAPR.

#### 5.5.1.2. Diseño basado en rendimiento

En el segundo escenario de diseño se asume que las prestaciones de la PAPR son más relevantes que el tiempo de ejecución. Por lo tanto, es necesario alcanzar un determinado valor de PAPR (CCDF), para lo cual se debe garantizar que la solución se encuentre, en la mayoría de casos, a través de la rama BBCE. Por consiguiente, la conmutación hacia la rama SAP debe ocurrir con menor frecuencia. Cabe recordar que una probabilidad alta de encontrar la solución sin conmutación requiere de una lenta convergencia del algoritmo BBCE.

Con el propósito de evaluar la probabilidad de que un cierto símbolo OFDM solamente necesite atravesar la rama BBCE para encontrar la solución, se analiza la Función de Distribución (CDF - *Cumulative Distribution Function*) de la distribución Rayleigh. La CDF provee la probabilidad de que el tiempo de ejecución de un determinado símbolo OFDM sea menor o igual a un umbral de tiempo, y está dada por [Proakis and Salehi, 2007]

$$\Pr \{T \leq t_\gamma\} = 1 - e^{-t_\gamma^2/2\sigma^2}. \quad (5.24)$$

Por otro lado, la probabilidad de que el tiempo de ejecución de un determinado símbolo

OFDM exceda el umbral de tiempo  $t_\gamma$ , es [Proakis and Salehi, 2007]

$$\Pr \{T > t_\gamma\} = e^{-t_\gamma^2/2\sigma^2} \quad (5.25)$$

Por lo tanto, la (5.24) provee la probabilidad de que la solución se encuentre solamente procesando los símbolos OFDM en la rama BBCE, es decir, la solución se encuentra antes de alcanzar el valor de  $t_\gamma$ . Sin embargo, (5.25) proporciona la probabilidad de que el esquema DCE haya necesitado conmutar a la rama SAP para encontrar la solución.

Si la cardinalidad del conjunto  $\mathcal{L}_1$  se denota como  $N_1 = |\mathcal{L}_1|$  y, de forma similar,  $N_2 = |\mathcal{L}_2|$ ; entonces, si  $N_s$  denota el número total de símbolos OFDM transmitidos, entonces se tiene  $N_s = N_1 + N_2$ . Esto significa que  $N_1$  símbolos OFDM encuentran la solución a través de la rama BBCE y  $N_2$  símbolos OFDM necesitan conmutar dinámicamente a la rama SAP para encontrar la solución.

Ahora, si se denota como  $p$  la probabilidad de que la solución se encuentre sólo en la rama BBCE, *i.e.*  $p = \Pr \{T \leq t_\gamma\}$ , y  $(1 - p)$  como la probabilidad que la solución se encuentre a través de la conmutación hacia la rama SAP, *i.e.*  $1 - p = \Pr \{T > t_\gamma\}$ , entonces,

$$N_1 = N_s p \quad (5.26)$$

$$N_2 = N_s(1 - p). \quad (5.27)$$

Por consiguiente, para un valor fijo de  $p$ , el valor numérico de  $t_\gamma$  puede calcularse despejando (5.24) según

$$p = 1 - e^{-t_\gamma^2/2\sigma^2}. \quad (5.28)$$

### 5.5.2. Análisis de la complejidad de DCE

En esta sección se presenta un análisis de la complejidad teórica asociada al algoritmo DCE, la cual está relacionada con la complejidad de los algoritmos que ejecuta en cada rama, a saber, el algoritmo BBCE y SAP. Como se vió en secciones anteriores de este capítulo, el algoritmo BBCE presenta una complejidad  $O(N \log N)$ , en cada rama  $q$ -ésima del algoritmo, donde las  $Q$  ramas del algoritmo BBCE se ejecutan de forma simultánea, mientras que la complejidad del algoritmo SAP es  $O(N)$  [Sezginer and Sari, 2006] y [Sezginer and Sari, 2007].

Por consiguiente, la complejidad del algoritmo DCE para la mayoría de los símbolos OFDM transmitidos es la complejidad del algoritmo BBCE, pero en caso de que la convergencia del BBCE sea lenta y que el algoritmo DCE se vea obligado a conmutar a la segunda

rama, donde se procesa el algoritmo SAP, la complejidad del DCE se verá modificada. Esta modificación viene dada porque no se procesa BBCE en su totalidad y su complejidad estará ahora dada por  $O(\gamma N \log N)$ , siendo  $\gamma < 1$ ; además se incorpora la complejidad del algoritmo SAP. Entonces, la complejidad del algoritmo DCE está dada por la siguiente expresión

$$p \cdot O(N \log N) + (1 - p) [O(\gamma N \log N) + O(N)] \quad (5.29)$$

donde  $p$  es la probabilidad de que los símbolos OFDM solamente necesiten pasar por la rama BBCE para encontrar la solución.

Otras de las consideraciones que hay que tener en cuenta en el análisis de la complejidad del algoritmo DCE, es que la extensión de los puntos de la constelación para modulaciones de orden superior ( $B > 4$ ), siendo  $B$  es el número total de puntos de la constelación, solamente tiene en cuenta los puntos externos de la constelación. Entonces la complejidad se reduce, debido a que no se consideran los puntos internos, es decir,  $\tilde{x}(k)$  tal que  $k \notin \mathcal{I}_p$ . Si se define

$$\Theta = \frac{B_{outer}}{B}, \quad (5.30)$$

donde  $\Theta \leq 1$  representa el porcentaje de símbolos complejos  $\tilde{x}(k)$  que son susceptibles de ser extendidos, es decir,  $\tilde{x}(k)$ ,  $k \in \mathcal{B}_R, \mathcal{B}_I, \mathcal{C}_p$  y  $B_{outer}$  es el número de puntos externos,  $B_{outer} = |\mathcal{B}_R| + |\mathcal{B}_I| + |\mathcal{C}_p|$ . Entonces, finalmente la complejidad del algoritmo DCE está dada por

$$p \cdot O(\Theta N \log N) + (1 - p) [O(\gamma \Theta N \log N) + O(\Theta N)] \quad (5.31)$$

## 5.6. Evaluación y resultados

En esta parte del capítulo, se evalúa el rendimiento de los algoritmos propuestos (GBDCE, BBCE y DCE) y se comparan con otros esquemas CE propuestos, específicamente con los algoritmos ACE-POCS [Krongold and Jones, 2003], SAP [Sezginer and Sari, 2006] y ACE-IPM [Wang and Leung, 2008]. El rendimiento de las técnicas de reducción de la PAPR se presenta en términos de la CCDF, PSD (*Power Spectral Density*) y en el receptor se evalúa la BER.

Los resultados se obtienen por medio de simulaciones en Matlab, generando aleatoriamente  $10^4$  símbolos OFDM, donde se ha considerado un conjunto de varios parámetros, como son modulaciones QPSK, 16-QAM y 64-QAM, y  $N = \{16, 32, 64, 128, 256\}$  subportadoras.

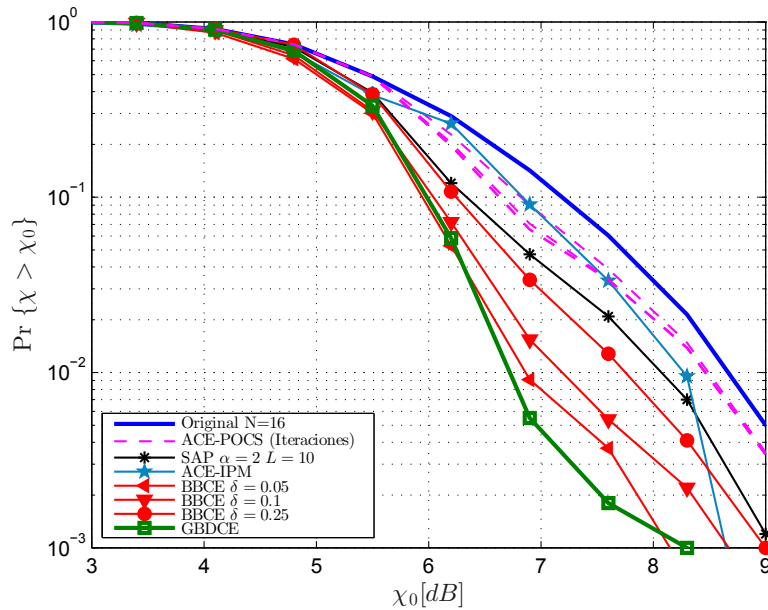


Las técnicas de reducción de la PAPR se aplican siempre que la PAPR del símbolo OFDM sea mayor que 6 [dB], como se especifica usualmente en [Krongold and Jones, 2003]. En todas las figuras, las curvas con línea continua representan la señal OFDM convencional, es decir, sin ninguna técnica de reducción de la PAPR y se etiqueta como “Original”. Las curvas de color verde con líneas continuas y con marcas corresponden al algoritmo GBDCE, y las de color rojo con línea continua y marcas a BBCE. Las curvas con línea discontinua representan a las iteraciones ACE-POCS. La línea continua de color celeste con marcas son las iteraciones de ACE-IPM, y las líneas negras representan a SAP.

### 5.6.1. Evaluación de los algoritmos GBDCE y BBCE

El rendimiento de la técnica GBDCE proporciona una cota de comparación con otras técnicas CE, en términos de reducción de la PAPR. Las figuras 5.9 - 5.13 muestran este hecho para sistemas OFDM con  $N = \{16, 32, 64, 128, 256\}$  subportadoras y modulaciones QPSK, 16-QAM, y 64-QAM. Por ejemplo, se observa que la mejora de GBDCE a una probabilidad de  $10^{-2}$  puede ser aproximadamente de 4 [dB] con respecto a la “Original” y de un mínimo de 1.4 [dB] con respecto a otras técnicas CE (véase Fig.5.13).

En lo que se refiere al algoritmo BBCE, primero se evalúa el impacto que introduce la granularidad del factor de escala  $\alpha$  dado que, cuanto mayor sea el valor de  $\delta$ , menor será la precisión de  $\alpha$ . Hay que tener en cuenta que se impone la restricción  $1 \leq \alpha \leq 2$  para evitar un incremento excesivo en la energía transmitida. La figura 5.9 ilustra el rendimiento de BBCE para un sistema OFDM con  $N = 16$  subportadoras y modulación QPSK. Se considera el conjunto de valores  $\delta = \{0.05, 0.1, 0.25\}$ . Se observa una pequeña degradación en el rendimiento cuando el valor de  $\delta$  se incrementa, con una pérdida de 0.7 [dB] a una probabilidad de  $10^{-2}$ , para el caso más desfavorable  $\delta = 0.25$ , con respecto a GBDCE. Al mismo tiempo, BBCE supera a otras técnicas CE. Por tanto, para los siguientes escenarios, se utiliza el algoritmo BBCE con  $\delta = 0.25$ , dado que el compromiso entre la complejidad computacional y la reducción de la PAPR es satisfactorio. Las Figs. 5.10 - 5.13 confirman que BBCE se comporta mejor que otras técnicas basadas en CE para mayor número de subportadoras. Así, para sistemas OFDM con  $N = 128$  subportadoras y modulaciones {QPSK, 16-QAM}, BBCE presenta una reducción de aproximadamente 2.8 [dB] a una probabilidad de  $10^{-2}$  con respecto a la PAPR de la señal OFDM convencional.

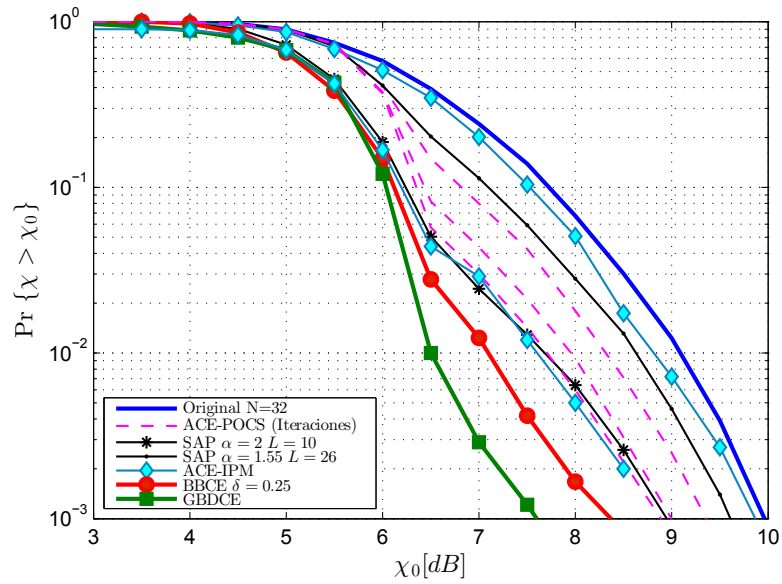


**Figura 5.9:** CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 16$  subportadoras y modulación QPSK. Los parámetros del esquema SAP son  $\{L = 10, \alpha = 2\}$ . BBCE con  $\delta = \{0.05, 0.1, 0.25\}$ .

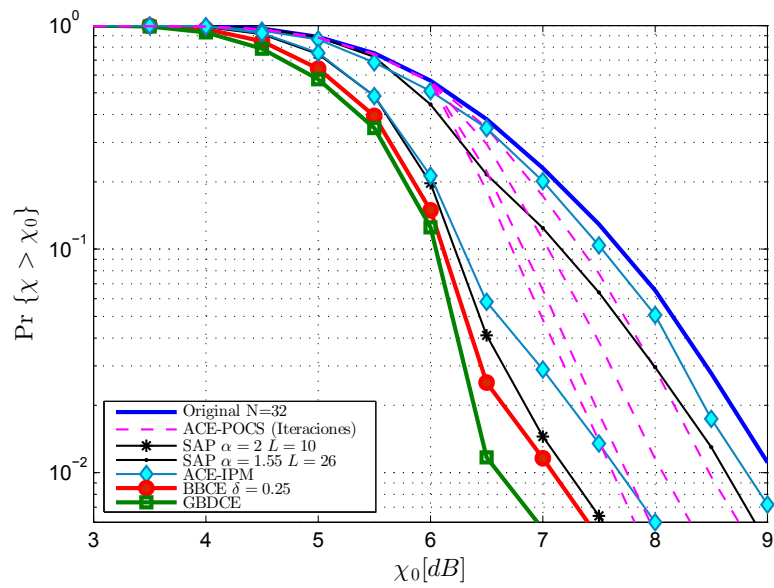
Para evaluar el algoritmo BBCE bajo la operación completa de un transmisor, se verifica la PSD a la salida de un HPA. Se considera una configuración común, por ejemplo, un amplificador de potencia de estado sólido (SSPA - *Solid State Power Amplifier*), el cual puede ser modelado de acuerdo al modelo modificado de *Rapp* [Honkanen and Haggman, 1997], donde la conversión AM/AM (Amplitude/Amplitude) y la conversión AM/PM (Amplitude/Phase) se detallan en el apéndice A, a través de las ecuaciones (A.3) y (A.4), respectivamente.

Las figuras 5.14a y 5.14b ilustran la PSD para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras a la salida del HPA, con valores de IBO de  $\{5, 8, 15\}$  [dB] para las modulaciones  $\{QPSK, 16\text{-QAM}\}$ , con factor de sobremuestreo  $J = 4$ . Se ha escogido el valor de  $s = 2$ , un valor adecuado en la práctica [Kaitz, 2001]. Para estas figuras se observa claramente que a medida que se incrementa el valor del IBO, los efectos de las no linealidades decrecen. Por ejemplo, en la Fig. 5.14b la reducción de la radiación fuera de banda cuando se usa BBCE con modulación 16-QAM es de aproximadamente 3 [dB] para un valor de IBO = 8 [dB].

También se evalúa el algoritmo BBCE para confirmar que no ocurre una degradación significativa de la BER cuando se transmite la señal OFDM usando un SSPA. Las simulaciones contemplan un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras,  $J = 4$  y modulaciones

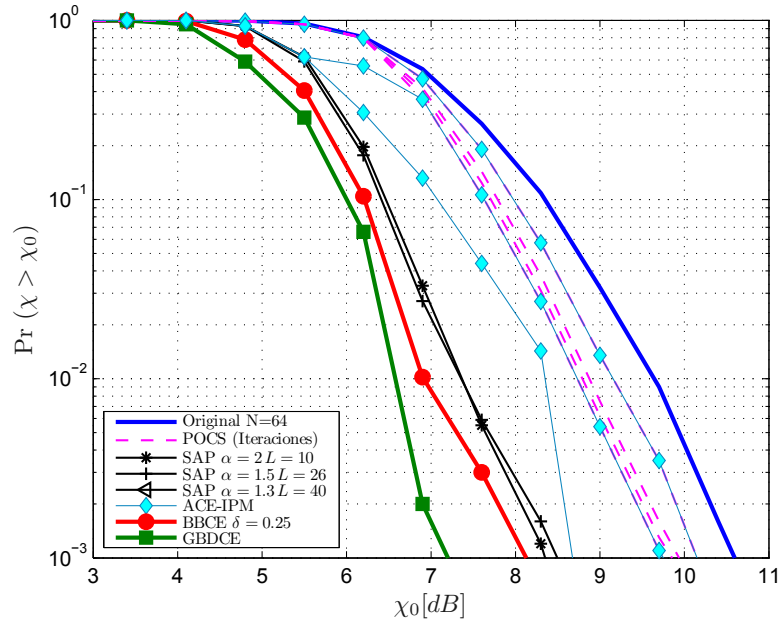


(a) Sistema OFDM con modulación QPSK

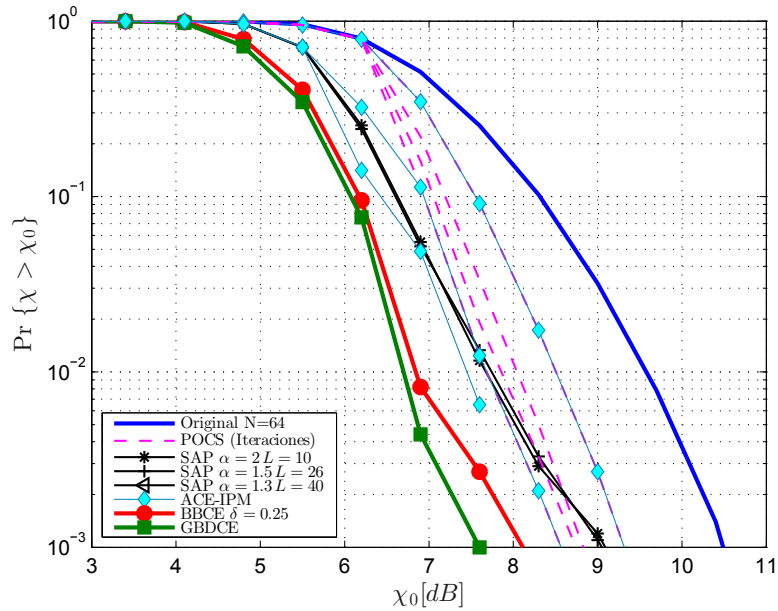


(b) Sistema OFDM con modulación 64-QAM

**Figura 5.10:** CCDF de la PAPR para un sistema OFDM  $N = 32$  subportadoras. SAP con parámetros  $\{L = 10, \alpha = 2\}$  y  $\{L = 26, \alpha = 1.55\}$ , BBCE con  $\delta = 0.25$ .

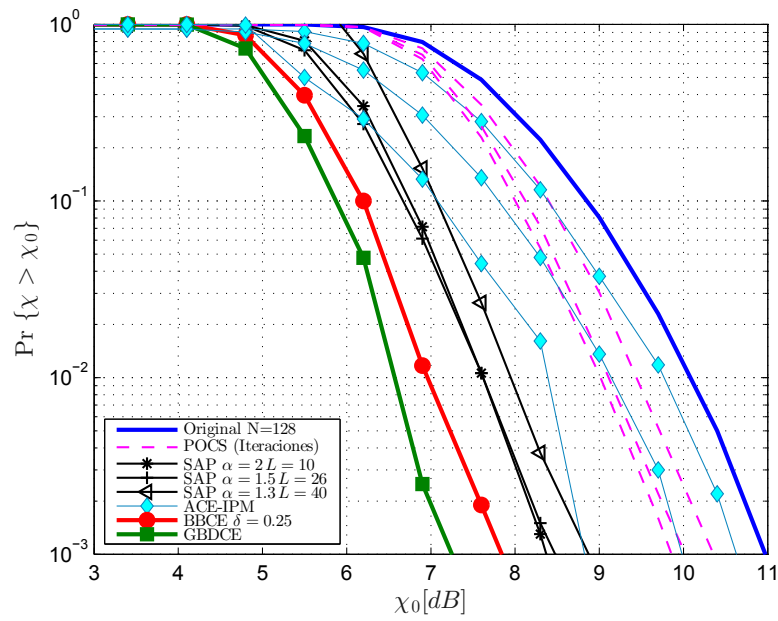


(a) Sistema OFDM con modulación QPSK

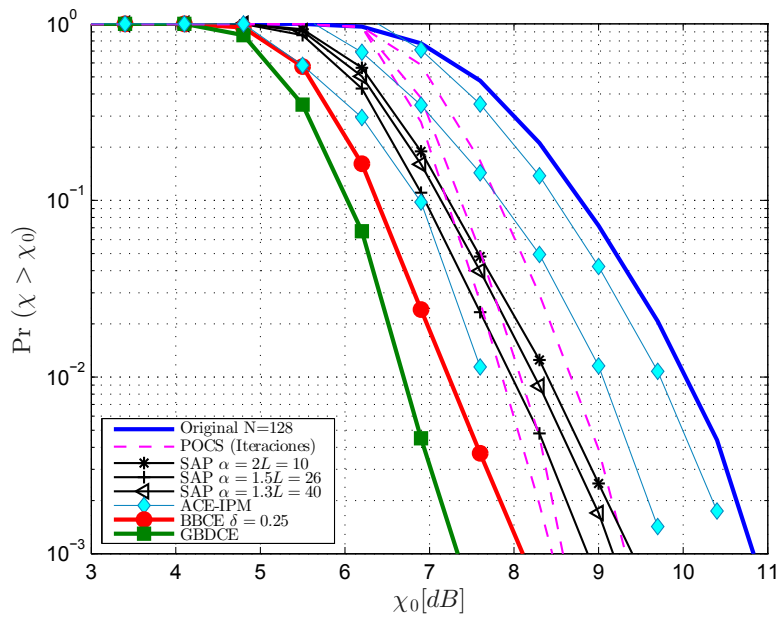


(b) Sistema OFDM con modulación 16-QAM

Figura 5.11: CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras. SAP con  $\{L = 10, \alpha = 2\}$ ,  $\{L = 26, \alpha = 1.55\}$  y  $\{L = 40, \alpha = 1.3\}$ . BBCE con  $\delta = 0.25$ .

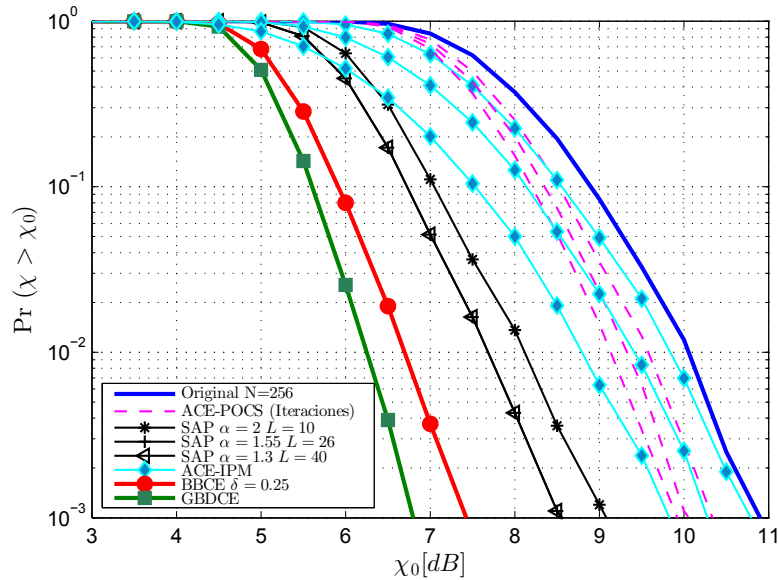


(a) Sistema OFDM con modulación QPSK



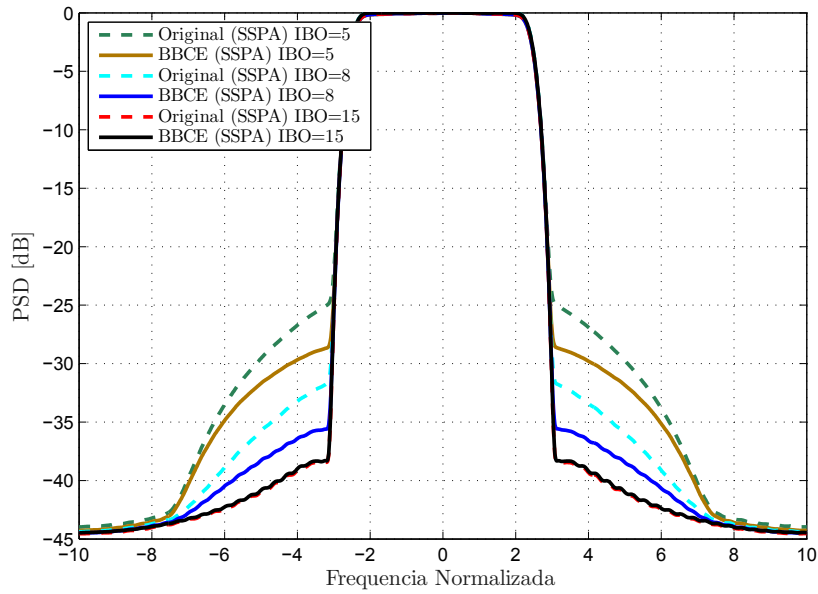
(b) Sistema OFDM con modulación 16-QAM

**Figura 5.12:** CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 128$ . SAP con  $\{L = 10, \alpha = 2\}$ ,  $\{L = 26, \alpha = 1.55\}$  y  $\{L = 40, \alpha = 1.3\}$ . BBCE con  $\delta = 0.25$ .

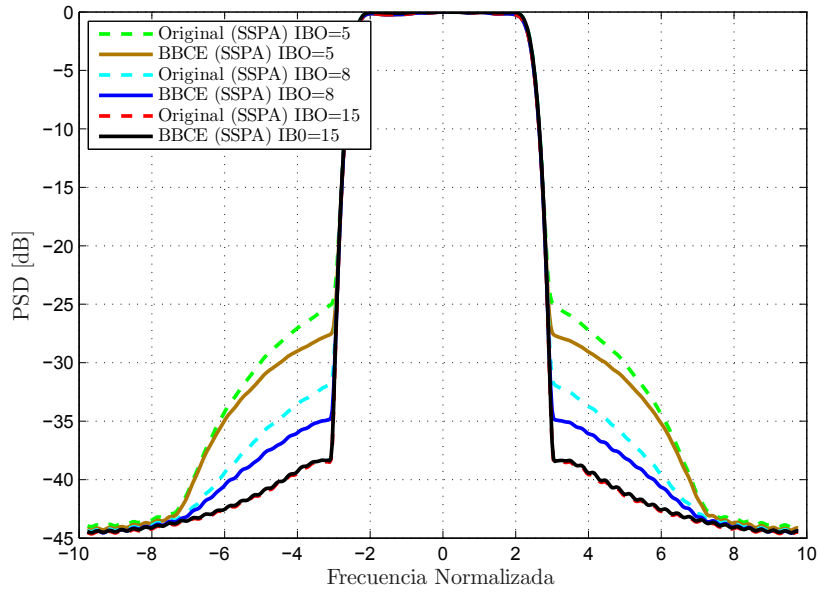


**Figura 5.13:** CCDF de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 256$  y modulación QPSK. SAP con los parámetros  $\{L = 10, \alpha = 2\}$ ,  $\{L = 26, \alpha = 1.55\}$  y  $\{L = 40, \alpha = 1.3\}$ . BBCE con  $\delta = 0.25$ .

{QPSK, 16-QAM} sobre un canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), y además, se considera el SSPA con  $\text{IBO} = \{5, 8, 15\}$  [dB] tanto para la señal “Original” como para la señal con BBCE. Con fines comparativos también se dibuja la BER de la señal “Original” y del BBCE usando un amplificador lineal, el cual no causa ninguna degradación. En las Figs. 5.15a y 5.15b se observa un rendimiento mejor para el BBCE con respecto al “Original”, debido a dos factores: (1) dado que la extensión de los puntos de la constelación hecha por el algoritmo BBCE no afecta a la distancia mínima de los puntos de la constelación, como se muestra en la Fig. 5.1 y (2) la extensión de la constelación aumenta la energía de los puntos extendidos. Por ejemplo, en la Fig. 5.15b para un valor de  $\text{IBO} = 5$  [dB], la ganancia en SNR para el esquema BBCE es aproximadamente 1.5 [dB] con respecto a la “Original” para una  $\text{BER} = 10^{-3}$ . Además, se puede observar que las no linealidades del SSPA intrínsecamente introducen alguna degradación en la BER con respecto a un amplificador lineal tanto para la señal “Original” como para la señal con BBCE. Como era de esperar, la degradación decrece a medida que el valor del IBO aumenta; esta degradación es de aproximadamente 2 [dB] para una  $\text{BER} = 10^{-3}$  cuando se usa un  $\text{IBO} = 5$  [dB] y éste llega a ser insignificante para  $\text{IBO} = 15$  [dB].



(a) Sistema OFDM con modulación QPSK



(b) Sistema OFDM con modulación 16-QAM

**Figura 5.14:** PSD a la salida del SSPA con  $\text{IBO}=\{5, 8, 15\}$  [dB] para el esquema BBCE con  $N = 64$  subportadoras,  $J = 4$  y  $\delta = 0.25$ .

Además, se comparan los algoritmos propuestos con las técnicas CSS, más específicamente con EVM-IPM [Aggarwal and Meng, 2006] y EVM-SDR [Wang et al., 2011], cuya principal característica es que degradan la BER. En estas simulaciones se usa un sistema OFDM representativo con  $N = 64$  subportadoras, de las cuales 52 subportadoras son para datos y 12 subportadoras están puestas a cero como en el escenario de simulaciones que se usa en [Aggarwal and Meng, 2006, Wang et al., 2011]. La Figura 5.16a ilustra que la BER es peor con las técnicas CSS. En lo que respecta a la reducción de la PAPR, la Fig. 5.16b muestra la CCDF, demostrando que el esquema EVM-SDR gana un 1 [dB] a una probabilidad de  $10^{-3}$  respecto al GBDCE pero a costa de una degradación de más de 3 [dB] en la BER.

### 5.6.2. Evaluación del algoritmo DCE

Los resultados se obtienen a través de simulaciones en Matlab, promediando  $N_s = 10^4$  símbolos OFDM generados aleatoriamente con modulaciones QPSK y 16-QAM. Para mantener la compatibilidad con los estándares existentes se presentan resultados para IEEE 802.11a/g que consideran sistemas OFDM con  $N = 64$  subportadoras. Además se presentan resultados para  $N = \{16, 32\}$ . El algoritmo DCE se compara con BBCE con  $\delta = 0.25$  y SAP con el conjunto de parámetros  $\{\alpha = 2, L = 10\}$ ,  $\{\alpha = 1.55, L = 26\}$  y  $\{\alpha = 1.3, L = 40\}$ . Cabe señalar que la comparación con los otros algoritmos CE no son incluidos en esta sección, debido a que en la sección de resultados de los algoritmos GBDCE y BBCE ya se han analizado previamente.

La reducción de la PAPR en los símbolos OFDM se realiza si la PAPR supera los 6 [dB], que es un valor considerado usualmente en la literatura [Krongold and Jones, 2003]. Para todas las figuras de CCDF, la línea continua representa a la señal OFDM convencional, es decir, sin ninguna técnica de reducción de la PAPR, y se etiqueta como “Original”. Las curvas con línea discontinua corresponderán al algoritmo BBCE (esto es  $t_\gamma = \infty$ ), las curvas con líneas discontinua y con marcas representarán al algoritmo SAP y finalmente, las curvas del algoritmo DCE se representan con línea continua y con marcas.

Para una comparación justa con respecto al tiempo de ejecución de los algoritmos, todos los algoritmos se consideran bajo las mismas condiciones.



### 5.6.2.1. Diseño basado en restricciones de tiempo

Se evalúa el tiempo total de ejecución ( $t_T$ ) y el rendimiento (CCDF) para un conjunto de valores numéricos diferentes del parámetro  $t_\gamma$ . Primero, se presentan los resultados para el caso en que los símbolos OFDM no conmutan a la rama SAP para encontrar la solución, esto es  $t_\gamma = \infty$  y  $N_1 = N_s$ . Como se ha mencionado, un valor relevante de la distribución es la mediana, por lo que se proporcionan valores de  $t_\gamma$  iguales a la mediana ( $t_0$ ) y además valores superiores e inferiores a este valor.

Para evaluar el porcentaje de tiempo de ejecución que requiere el algoritmo DCE al fijar el valor de  $t_\gamma$  con respecto al tiempo de procesamiento que demanda el algoritmo BBCE ( $t_\gamma = \infty$ ), se define la variable “Tiempo consumido”, denotado por  $T_c$ . Dicho parámetro, que está dado en porcentaje, se define como la relación entre el tiempo de ejecución de DCE para un valor de  $t_\gamma$  dado en la ec. (5.21) y el tiempo consumido por el BBCE que será el caso ( $t_\gamma = \infty$ ), por tanto

$$T_c [\%] = \frac{t_T}{t_T |_{t_\gamma=\infty}} \times 100. \quad (5.32)$$

En la Fig. 5.17 se presenta  $T_c$  para sistemas OFDM con  $N = \{16, 32, 64\}$  subportadoras y modulación QPSK. Para aclarar, en esta figura el eje x representa los diferentes valores que  $t_\gamma$  puede tomar y en el eje y se tiene el valor de  $T_c$ . Por ejemplo, para el caso de  $N = 16$  subportadoras, cuando el valor de  $t_\gamma$  corresponde a la mediana  $t_0 = 2.59$  [s], el valor de  $T_c$  es alrededor de 3.2% con respecto al tiempo que el algoritmo BBCE demandaría. Para  $N = 64$  con  $t_\gamma = t_0 = 6.44$  [s] el correspondiente valor de  $T_c$  es de aproximadamente 4.6%. De esta figura, se deduce que para valores de  $t_\gamma$  más altos, el tiempo consumido ( $T_c$ ) asociado a ese valor es también más alto.

A manera de ejemplo, los valores numéricos correspondientes a los de la Fig. 5.17 se resumen en la Tabla 5.2 para un sistema OFDM con  $N = 16$  subportadoras. Estos resultados evidencian el porcentaje de ahorro en tiempo de ejecución que representa la técnica de reducción de la PAPR con el algoritmo DCE con respecto a BBCE. Por ejemplo, si el umbral de tiempo impuesto por símbolo OFDM es  $t_\gamma = 2.59$  [s], que coincide con el valor de la mediana ( $t_0$ ), el consumo de tiempo es de  $T_c = 3.2\%$ , que significa que el ahorro producido es  $T_s [\%] = 100 - T_c = 96.8\%$ .

Evidentemente, en la Tabla 5.2 se observa que con el algoritmo DCE se obtiene una

**Tabla 5.2:** Análisis del tiempo consumido ( $T_c$ ) cuando  $t_\gamma$  es fijo, para  $N = 16$  subportadoras

Umbral de tiempo	Tiempo consumido	Ahorro de tiempo
$(t_\gamma)$ [s]	$(T_c)$ [%]	$(T_s)$ [%]
1.50	0.52 %	99.48 %
2.59*	3.20 %	96.30 %
3.5	4.70 %	95.30 %
10	10.0 %	90.00 %
40	15.0 %	85.00 %
$\infty$	100 %	0 %

\* valor correspondiente a la mediana

reducción en el tiempo de ejecución muy significativa. Como se he mencionado, el restringir el tiempo de ejecución del algoritmo produce una degradación del sistema en términos de reducción de la PAPR; consecuentemente a continuación se analizan dichos efectos cuando se fija el valor de  $t_\gamma$ .

En la Fig. 5.18, se presenta la reducción de la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 16$  subportadoras y con modulación QPSK. Se puede observar que para obtener un buen compromiso entre tiempo de ejecución y rendimiento de la PAPR, el valor más adecuado de  $t_\gamma$  aparentemente es la mediana, es decir,  $t_\gamma = t_0 = 2.59$ [s].

Para evaluar la PAPR para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras y modulaciones QPSK y 16-QAM se presentan las figuras 5.19a y 5.19b, respectivamente. La figura 5.19a muestra el caso de la modulación QPSK, donde se ha proporcionado el conjunto de valores  $t_\gamma = \{1.6, 2.9, 3.2, 6.44, 10, 40\}$  [s]; cabe resaltar que para el valor de la mediana ( $t_0 = 6.44$  [s]), el ahorro en el tiempo de ejecución es del 95.4 %, mientras que la ganancia en la PAPR es de aproximadamente 2.8 [dB] a una probabilidad de  $10^{-3}$  con respecto a la señal OFDM original. La Fig. 5.19b presenta los resultados para el caso de la modulación 16-QAM, donde se ha considerado  $t_\gamma = \{0.5, 1.5, 2.9, 5.9, 9.4\}$  [s]; para el correspondiente valor de la mediana  $t_0 = 5.9$  [s], el ahorro es del 95.23 % y la ganancia en la PAPR es de aproximadamente 2.3 [dB] a una probabilidad de  $10^{-3}$  con respecto a la señal OFDM original.

De estos resultados, se puede concluir que se obtiene una importante reducción del tiempo consumido al implementar esta técnica de reducción de la PAPR, si el valor de umbral de tiempo  $t_\gamma$  se fija adecuadamente, pero a costa de obtener una ligera degradación en el rendimiento de la PAPR. Para obtener un compromiso adecuado en el algoritmo DCE, el valor de  $t_\gamma$  se debe fijar con el valor de la mediana  $t_\gamma = t_0$ .

### 5.6.2.2. Diseño basado en rendimiento

La evaluación del algoritmo DCE, cuyo diseño esté basado en el rendimiento de la técnica, en términos de la PAPR, se presenta a continuación. En este caso se fija la probabilidad  $p$  de encontrar la solución sin que DCE realice una conmutación a la rama SAP. Como referencia, primero se evalúa el algoritmo DCE cuando  $p = 1$ , que significa que la solución se encuentra siempre en la rama BBCE.

Se calcula un conjunto de valores diferentes de  $t_\gamma$  tras fijar el valor de  $p$ , y dichos resultados se recogen en la Tabla 5.3, donde se ha considerado el caso de un sistema OFDM con  $N = 16$  subportadoras con modulación QPSK. A partir de los resultados de esta Tabla, se observa que evidentemente, cuando el valor de  $p$  aumenta, es más probable encontrar la solución sin necesidad de cambiar a la rama SAP, lo que provoca que el valor de  $t_\gamma$  también aumente. En ese caso, la ganancia en PAPR es mejor, pero obviamente la convergencia es más lenta.

**Tabla 5.3:** Análisis de  $t_\gamma$  en función la probabilidad dada para la rama BBCE ( $p$ )

Algoritmo DCE		
Probabilidad de la rama BBCE (sin conmutación ( $p$ ))	Probabilidad de la rama SAP ( $1 - p$ )	Umbral de tiempo ( $t_\gamma$ )
0.8	0.2	3.95
0.5	0.5	2.59
0.2	0.8	1.47

Para determinar el impacto en la reducción de la PAPR ocasionado por fijar el valor de

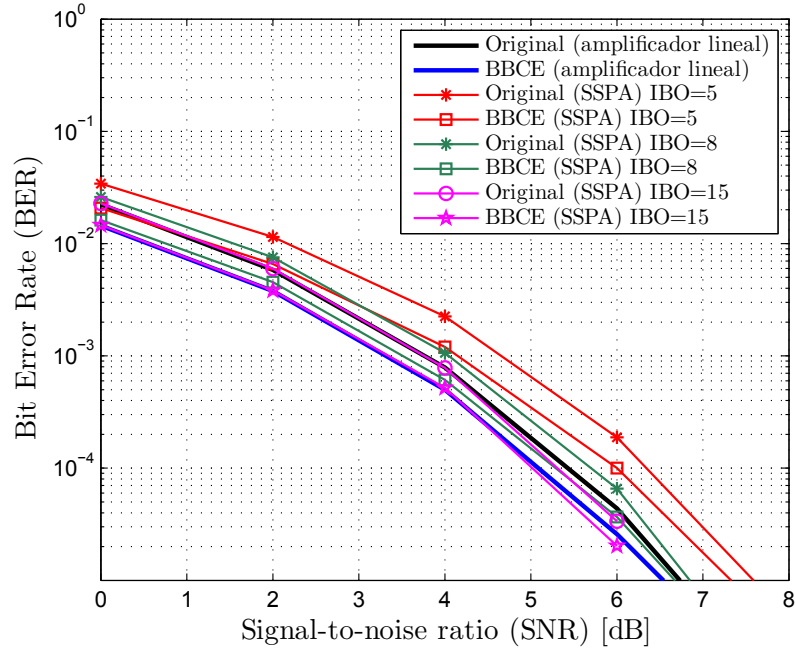
$p$ , a continuación se presentan las curvas correspondientes de la CCDF para un conjunto de valores de  $p$  diferentes.

La Fig. 5.20 ilustra la reducción de la PAPR de un sistema OFDM con  $N = 16$  subportadoras y modulación QPSK. Para el esquema DCE se considera  $p = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.8\}$ . Se compara al algoritmo DCE con el algoritmo SAP ( $p = 0$ ) y el esquema BBCE ( $p = 1$ ); nótese que  $p = 0$  se corresponde con  $t_\gamma = 0$ , mientras que  $p = 1$  se corresponde con  $t_\gamma = \infty$ . Como se puede observar en esta figura, la mejora del algoritmo BBCE ( $p = 1$ ) es similar a la ganancia que se obtiene con DCE con  $p = 0.8$ , mientras que el esquema DCE con  $p = 0.2$  tiene casi el mismo rendimiento que el algoritmo SAP ( $p = 0$ ). Consecuentemente, para obtener un compromiso adecuado entre tiempo de ejecución y rendimiento, el valor de  $p$  puede fijarse en 0.5, que corresponde a  $t_\gamma = t_0 = 2.59$  [s], y la degradación es de apenas 0.2 [dB] con respecto a BBCE.

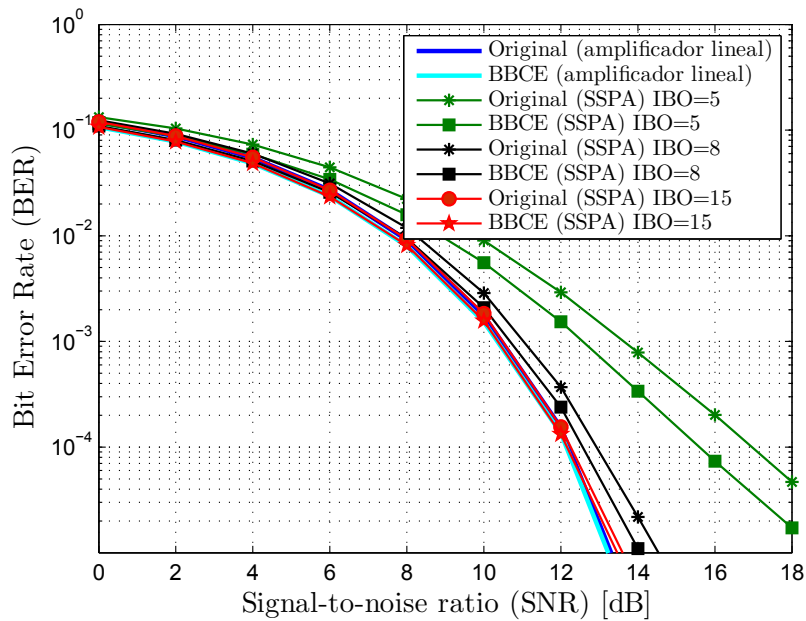
En las Figs. 5.21 y 5.22 se presentan, respectivamente, los sistemas OFDM con  $N = 32$  y  $N = 64$  subportadoras. El algoritmo DCE se evalúa con  $p = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.8\}$  para los dos sistemas. Nuevamente se observa que el valor más adecuado de  $p$  es 0.5, debido a que la degradación en PAPR con respecto al BBCE ( $p = 1$ ) es muy pequeña. Así, para el sistema de la Fig. 5.21 la degradación en PAPR es de apenas 0.2 [dB], y para los sistemas de las Figs. 5.22a y 5.22b es de apenas 0.4 [dB].

En la Fig. 5.23 se presenta la CCDF de la probabilidad de que el tiempo de ejecución de la rama BBCE para un símbolo OFDM exceda un umbral de tiempo determinado. Esto es, para un valor de  $t_\gamma$  fijo, se obtiene el valor de  $\Pr\{T > t_\gamma\} = 1 - p$ , el cual cumple (5.25), es decir,  $1 - p = e^{-t_\gamma^2/2\sigma^2}$ . En esta figura, el eje y presenta  $(1 - p)$  que es la probabilidad de que el algoritmo DCE deba conmutar a la rama SAP. Los resultados que se presentan son para sistemas OFDM con  $N = \{16, 32, 64\}$  subportadoras y modulación QPSK. Se puede observar que si se aumenta el valor de  $t_\gamma$ , la probabilidad de usar la rama SAP para encontrar la solución del problema decrece.

De estas figuras se puede concluir que para conseguir un compromiso adecuado entre tiempo de ejecución y ganancia de la PAPR, el valor de la probabilidad  $p$  más adecuado parece ser  $p = 0.5$ , el cual se corresponde con el valor de la mediana.

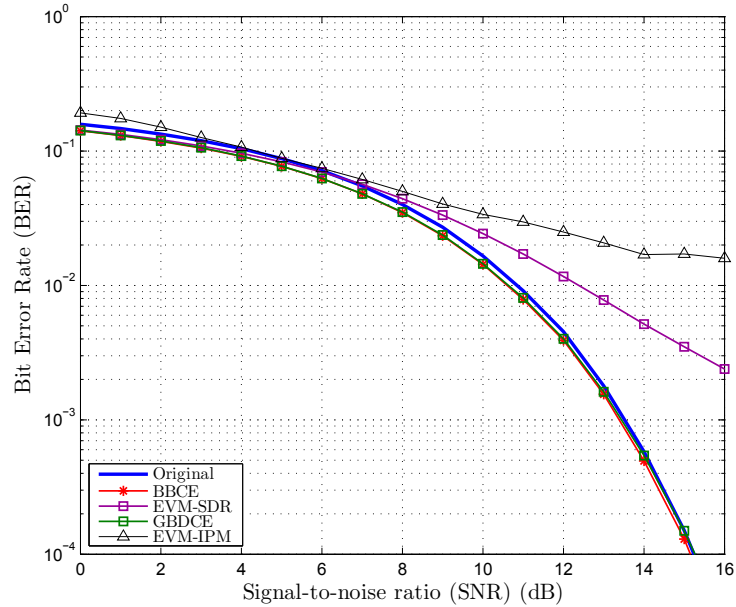


(a) Sistema OFDM con modulación QPSK

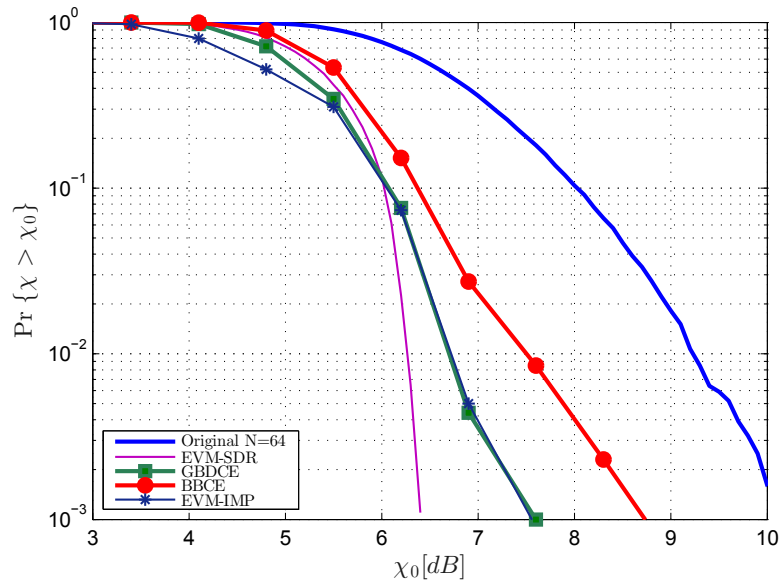


(b) Sistema OFDM con modulación 16-QAM

**Figura 5.15:** BER del esquema BBCE con  $N = 64$  subportadoras,  $J = 4$  y  $\delta = 0.25$  sobre un canal AWGN en presencia de un SSPA con  $\text{IBO} = \{5, 8, 15\}$  [dB].

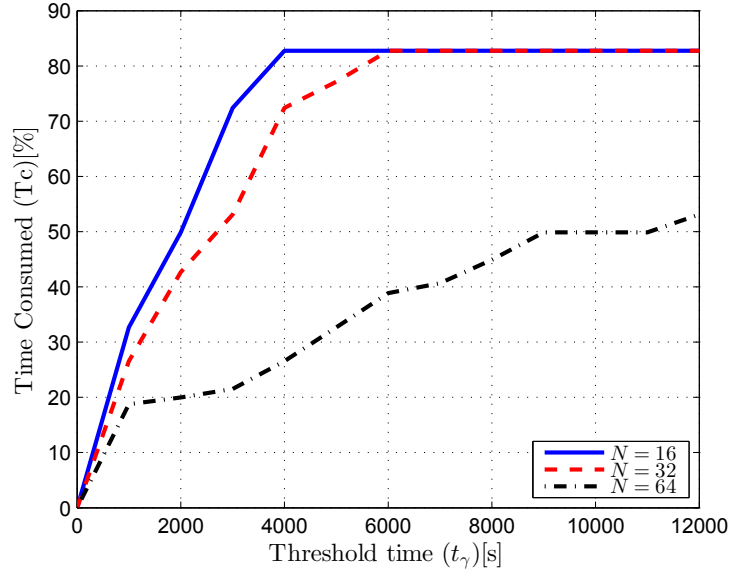


(a) BER performance for  $N = 64$  subcarriers and 16-QAM modulation over AWGN channel

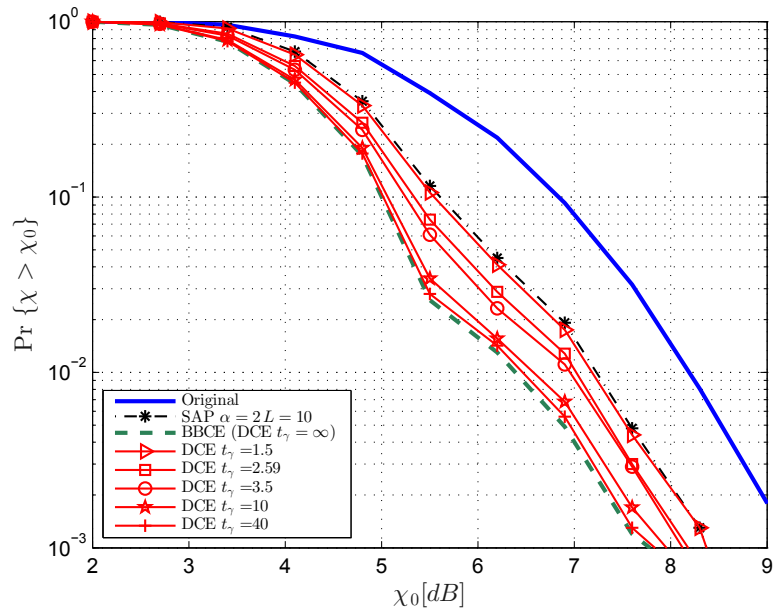


(b) CCDF for OFDM system with  $N = 64$  subcarriers and 16-QAM modulation

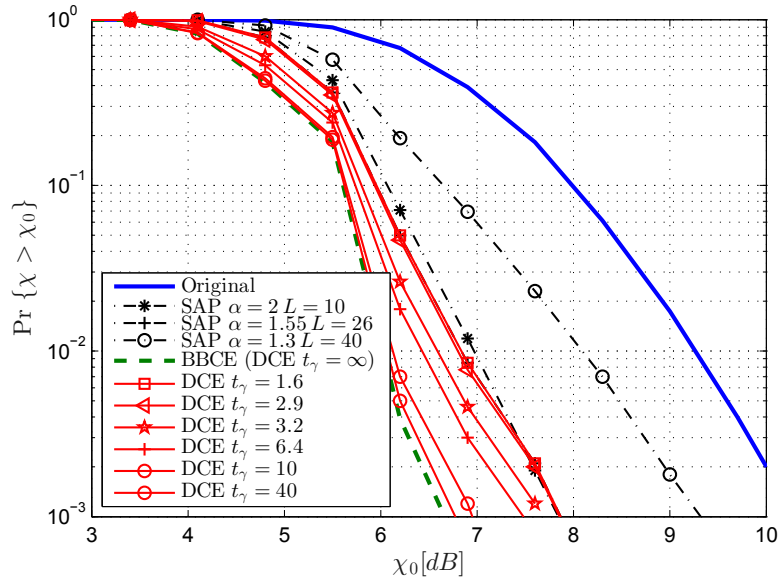
**Figura 5.16:** Comparación con las técnicas CSS. BBCE con  $\delta = 0.25$ , EVM-IPM y EVM-SDR con una tolerancia en EVM de  $-25$  [dB] y la potencia de las subportadoras libres es  $0.15$  [Wang et al., 2011].



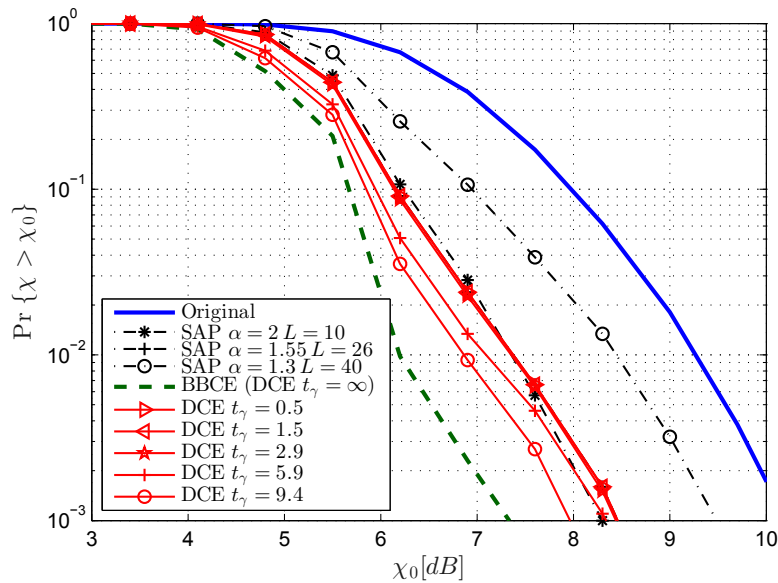
**Figura 5.17:** Porcentaje de ahorro del tiempo consumido  $T_c$  requerido para sistemas OFDM con  $N = \{16, 32, 64\}$  subportadoras y modulación QPSK para diferentes valores de  $t_\gamma$ .



**Figura 5.18:** CCDF de la PAPR con el algoritmo DCE para un sistema OFDM con  $N = 16$  subportadoras y modulación QPSK. Se considera para DCE  $t_\gamma = \{1.5, 2.59, 10, 40\}$  [s].



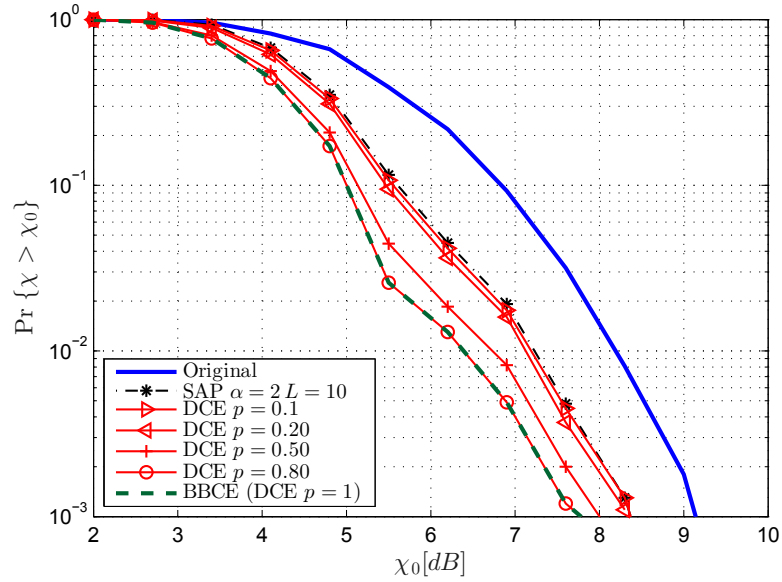
(a) Sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras y modulación QPSK,  $t_0 = 6.44$



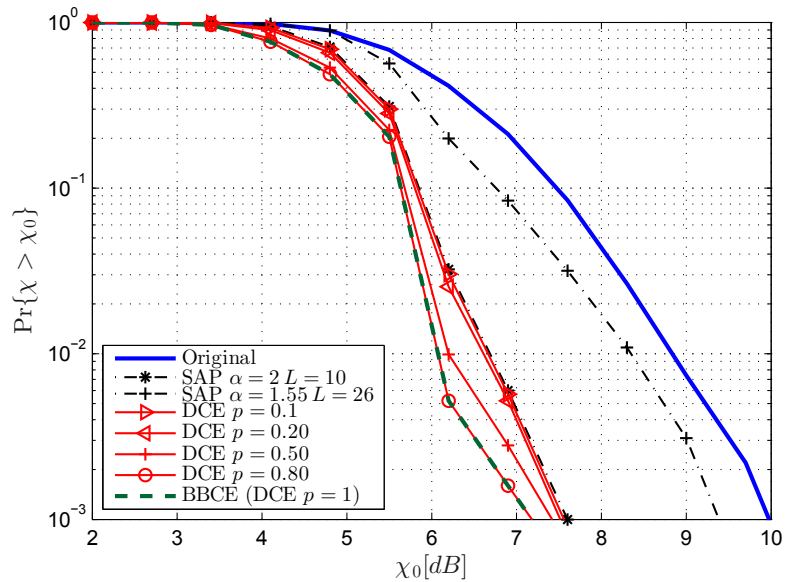
(b) Sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras y modulación 16-QAM,  $t_0 = 5.9$

**Figura 5.19:** CCDF de la PAPR con el algoritmo DCE para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras. Para evaluar el algoritmo DCE se proporciona un conjunto de valores de  $t_\gamma$ .

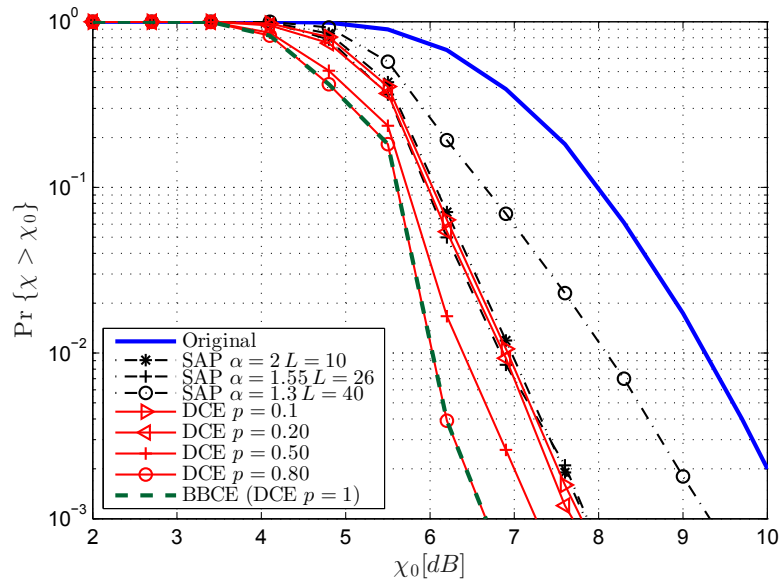




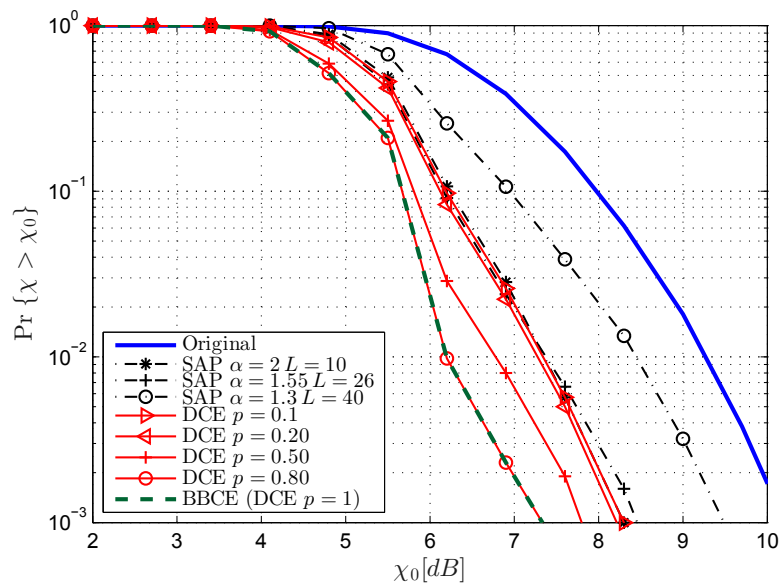
**Figura 5.20:** CCDF de la PAPR a través del algoritmo DCE para un sistema OFDM con  $N = 16$  subportadoras y modulación QPSK.



**Figura 5.21:** CCDF de la PAPR a través del algoritmo DCE para un sistema OFDM con  $N = 32$  subportadoras y modulación QPSK.

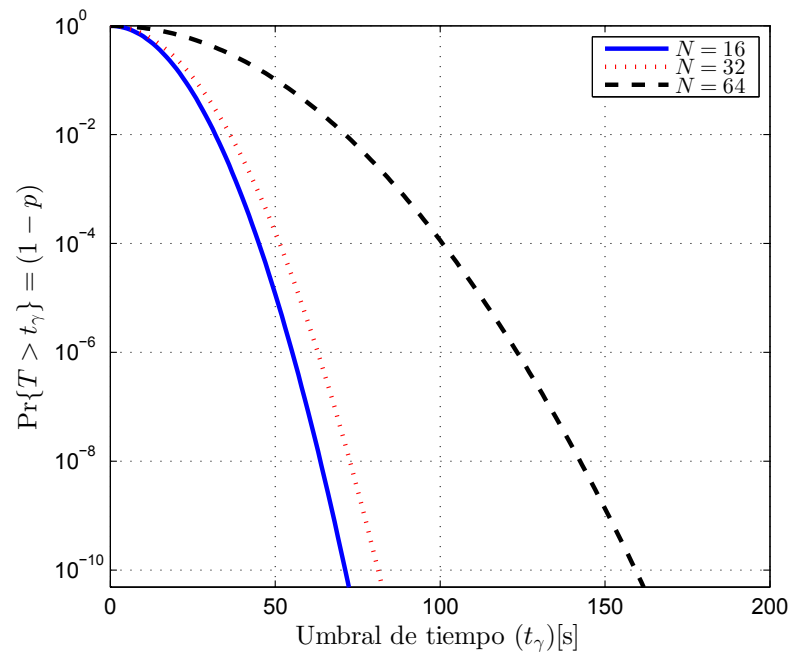


(a) Sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras y modulación QPSK



(b) Sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras y modulación 16-QAM.

**Figura 5.22:** CCDF de la PAPR a través del algoritmo DCE para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras. Se evalúa el algoritmo DCE para diferentes valores de  $p$ .



**Figura 5.23:** CCDF de la distribución Rayleigh del tiempo de ejecución para sistemas OFDM con  $N = \{16, 32, 64\}$  subportadoras y modulación QPSK.



## CAPÍTULO 6

# CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Este capítulo presenta las conclusiones generales que se extraen de la investigación hecha en esta Tesis y las posibles líneas de investigación a que dan lugar los resultados.

### 6.1. Conclusiones generales

En esta Tesis se ha estudiado la importancia de la modulación OFDM en los sistemas de comunicaciones de banda ancha y el tratamiento adecuado que se le debe dar a la señal para reducir la PAPR. Así, para los sistemas OFDM se han derivado varios esquemas de reducción de la PAPR, que haciendo uso de la extensión de ciertos puntos externos de la constelación que forman el símbolo OFDM en el dominio de la frecuencia, se reducen los picos de la señal en el dominio del tiempo.

Cabe aclarar que las aportaciones de esta investigación se concentran en los capítulos 4 y 5, por lo que las conclusiones se detallan por separado.

- Capítulo 4

En este capítulo se ha trabajado con un nuevo esquema de reducción de la PAPR combinando la extensión de ciertos puntos de la constelación con símbolos piloto. Esta nueva propuesta recoge los beneficios de las dos técnicas SAP y LC-OPS, donde LC-OPS se propone como un algoritmo que reduce la complejidad de la técnica OPS original, al trasladar el procesado al dominio del tiempo. La unión de estos dos algoritmos permite

obtener tres arquitecturas de implementación, que dependen de la posición que cada algoritmo tiene dentro de la arquitectura. Así, dos de estas arquitecturas son esquemas de dos etapas y se denominan respectivamente OPS-SAP y SAP-OPS, y la tercera arquitectura ejecuta los algoritmos SAP y LC-OPS de forma paralela y se denomina SOPP. Cada una de estas arquitecturas se analiza en términos energéticos desde dos puntos de vista: primero, la energía transmitida y segundo, el consumo de energía del DSP para llevar a cabo la técnica de reducción de la PAPR.

Se ha encontrado que las tres arquitecturas mejoran el rendimiento, en términos de reducción de la PAPR, si se comparan con las técnicas SAP y OPS originales. Así, la ganancia obtenida es de aproximadamente 1.2 [dB], 0.8 [dB] y 1.3 [dB] para las arquitectura OPS-SAP, SAP-OPS y SOPP, respectivamente si se comparan con SAP. Aunque SOPP es ligeramente mejor, en términos de PAPR, que las arquitecturas de dos etapas, su complejidad es mucho mayor ya que demanda la ejecución de SAP tantas veces como secuencias piloto sean consideradas para la etapa LC-OPS. La arquitectura SAP-OPS es ligeramente menos compleja que OPS-SAP debido a que la etapa SAP se realiza solamente sobre los símbolos de datos, esto es,  $N - N_p$  símbolos complejos, lo que demanda un número menor de operaciones, sin embargo la reducción de la PAPR es menor que las arquitecturas OPS-SAP y SOPP.

OPS-SAP proporciona un buen compromiso entre reducción de la PAPR y complejidad, por lo que se ha visto desde el punto de vista de eficiencia energética. En cuanto a la energía transmitida, se puede considerar que OPS-SAP es eficiente en energía transmitida por símbolo OFDM, ya que con un factor de extensión  $\alpha$  menor puede proporcionar un rendimiento similar a SAP, pero empleando éste último un factor de extensión mayor. Así, se ha conseguido un ahorro en energía transmitida de alrededor del 24.57%. Por otro lado, se ha obtenido ahorro en el consumo de energía del DSP al realizar los cálculos computacionales necesarios para llevar a cabo la técnica de reducción de la PAPR. Si se compara con otras técnicas como BSLM, OPS-SAP consigue un ahorro en la energía consumida por el DSP de alrededor del 58.04%. Por lo tanto, se puede concluir que si se insertan adecuadamente los símbolos piloto y se combinan adecuadamente con la técnica SAP, se obtiene una reducción considerable de la PAPR, y además

con eficiencia energética tanto en la energía transmitida por símbolo OFDM como en la energía consumida por el DSP.

- Capítulo 5

En el capítulo 5 se proponen tres algoritmos de reducción de la PAPR, basados en técnicas de extensión de la constelación, mediante métodos de optimización. El principal objetivo de estos algoritmos es determinar el conjunto de símbolos OFDM en el dominio de la frecuencia que deben ser extendidos y su correspondiente factor de escala, de tal manera que la PAPR de la señal en el dominio del tiempo sea menor.

Primero, se propone un algoritmo óptimo, llamado GBDCE (*Generalized Benders Decomposition for Constellation Extension*) que proporciona una solución óptima al problema de la PAPR a través de técnicas CE (*Constellation Extension*). GBDCE se considera como una cota inferior de referencia para otras técnicas CE. Por ejemplo, para un sistema OFDM con  $N = 256$  y con modulación 16-QAM, se obtiene una ganancia en PAPR de aproximadamente 4 [dB] con respecto a la PAPR de la señal OFDM sin ninguna técnica de reducción de la PAPR y una mejora de al menos 1.4 [dB] con respecto a otras técnicas CE, a una probabilidad de  $10^{-2}$ . No obstante, debido a la naturaleza iterativa del algoritmo GBDCE, éste podría incurrir en una lenta convergencia, aunque se ha demostrado a través de simulaciones que para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras, el número de iteraciones requeridas es cuatro. No obstante, esto aún supone una elevada carga computacional.

Segundo, como una alternativa para reducir la complejidad del algoritmo GBDCE se presenta el algoritmo subóptimo BBCE (*Branch-and-Bound for Constellation Extension*), el cual reduce el tiempo de ejecución al restringir a un conjunto finito los posibles valores del factor de extensión. El algoritmo BBCE obtiene una ligera degradación en la ganancia de la PAPR, con respecto al algoritmo óptimo GBDCE, siendo de apenas 0.7 [dB] para un sistema OFDM de  $N = 64$  subportadoras y modulación QPSK, y la ganancia con respecto a otras técnicas CE es de 0.8 [dB], a una probabilidad de  $10^{-2}$ . Además, se observa que el impacto que sufre la señal al pasar por el HPA es mínima y no se experimenta degradación en la BER (*Bit Error Rate*) debido a que sólo se extienden los puntos externos de la constelación, sin afectar a la distancia mínima de los puntos

de la constelación.

Finalmente, para reducir el tiempo de procesamiento ocasionalmente largo que presenta el esquema BBCE, se presenta el algoritmo subóptimo DCE (*Dynamic Constellation Extension*). Este esquema consiste en una técnica de dos ramas; en la primera rama, se busca la solución ejecutando el esquema BBCE, pero en caso de que BBCE no se resuelva antes de que se alcance un umbral de tiempo fijo, se conmuta a una segunda rama, donde se lleva a cabo el esquema SAP para encontrar la solución. Cabe aclarar que se hace uso de la rama SAP, sólo en el caso de que la rama BBCE no haya solucionado el problema dentro de un límite de tiempo fijado. El diseño del algoritmo DCE se puede realizar desde dos puntos de vista. Por un lado, si las restricciones de tiempo están dadas por la implementación práctica, se puede fijar un umbral de tiempo en base a ello. A la vista de los resultados de las simulaciones se puede recomendar que el umbral de tiempo, que indica la conmutación de rama, tenga un valor alrededor de la mediana de la distribución Rayleigh del tiempo de ejecución del algoritmo BBCE, con lo que se obtiene un compromiso adecuado entre ganancia de la PAPR y tiempo de ejecución. Por otro lado, el segundo criterio de diseño se guía por el rendimiento del sistema en PAPR, para lo cual se puede fijar la probabilidad de que los símbolos OFDM encuentren la solución en la rama BBCE, es decir, sin conmutación. A través de simulaciones, se ha visto que fijar una probabilidad  $p = 0.5$  es suficiente para conseguir un ahorro en tiempo de ejecución de aproximadamente 96 % con respecto al algoritmo BBCE para un sistema OFDM con  $N = 64$  subportadoras y modulación QPSK, mientras que la degradación de la PAPR es de sólo 0.5 [dB].

## 6.2. Líneas futuras de investigación

A lo largo de esta Tesis se han ido abriendo distintas líneas de investigación que, tomando como punto de partida la reducción de la PAPR, pueden dar lugar a estudios futuros. A continuación se enuncian brevemente algunas de estas líneas

- Debido a que las técnicas CE son muy prometedoras, ya que consiguen buenas prestaciones solamente con un pequeño incremento en la energía transmitida, se puede continuar con esta línea de investigación, y para ello se propone el uso de redes neuronales. Ya



se ha iniciado esta línea con ciertas pruebas iniciales, donde se ha considerado la señal de PAPR mínima que se obtiene mediante el algoritmo óptimo GBDCE, como señal de entrenamiento de la red neuronal.

- Se puede extender la formulación del problema de optimización de la PAPR, realizando una minimización de la métrica cúbica (*Cubic Metric*), que es la métrica que se está comenzando a considerar en los sistemas de comunicaciones multiportadora.



# APÉNDICES



## APÉNDICE A

### AMPLIFICADORES DE ALTA POTENCIA

De forma general, la manera común en que los amplificadores de alta potencia (HPA - *High Power Amplifier*) suelen modelarse es por medio de un modelo no lineal y sin memoria [Rowe, 1982]. La entrada al HPA puede describirse con

$$x(t) = |x(t)|e^{j\theta(t)} \quad (\text{A.1})$$

donde  $|x(t)|$  y  $e^{j\theta(t)}$  son, respectivamente, la amplitud y la fase de la señal de entrada. La señal a la salida del HPA puede modelarse como

$$y(t) = G[|x(t)|] e^{j\{\theta(t)+\Phi(|x(t)|)\}} \quad (\text{A.2})$$

donde  $G[\cdot]$  y  $\Phi[\cdot]$  se conocen, respectivamente, como las conversiones AM/AM (*Amplitude/Amplitude*) y AM/PM (*Amplitude/Phase*).  $G[\cdot]$  muestra los efectos de las no linealidades en la amplitud  $|x(t)|$  y  $\Phi[\cdot]$  muestra los efectos en la fase  $\theta(t)$ .

Existen dos tipos de amplificadores que se utilizan comúnmente en la literatura:

- SSPA (*Solid State Power Amplifier*)
- TWTA (*Traveling Wave Tube Amplifier*)

#### A.1. SSPA

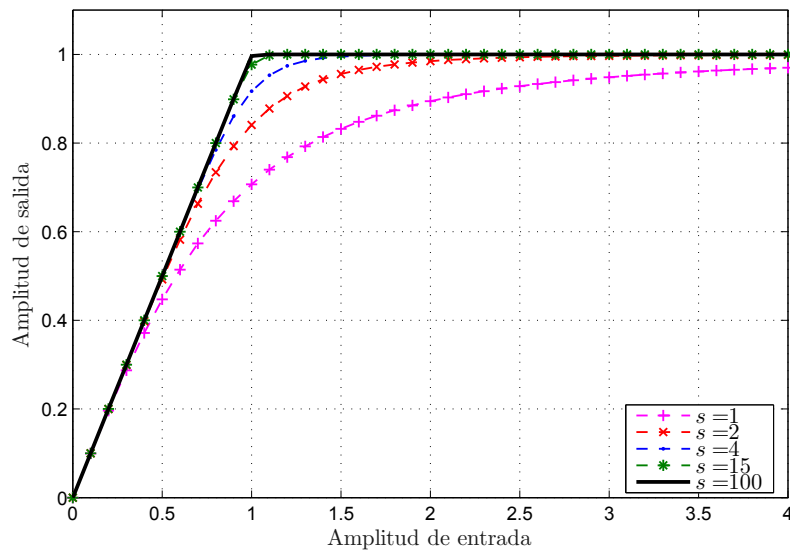
Existen varios modelos de amplificadores SSPA. Así, por ejemplo, se puede considerar el modelo modificado de *Rapp* [Honkanen and Haggman, 1997], cuyas conversiones AM/AM y

AM/PM pueden expresarse como

$$G[|x(t)|] = \frac{g_0|x(t)|}{\left(1 + \left(\frac{|x(t)|}{x_{sat}}\right)^{2s}\right)^{\frac{1}{2s}}} \quad (\text{A.3})$$

$$\Phi[|x(t)|] \approx 0 \quad (\text{A.4})$$

donde  $g_0$  es la ganancia del amplificador,  $x_{sat}$  es el nivel de saturación del SSPA y  $s$  es el parámetro que controla la precisión de la región de saturación del amplificador (mientras más pequeño es el valor de  $s$ , más suave es la conversión como se observa en la Fig. A.1). Se debe tener en cuenta que la conversión AM/PM se considera cero, pero los efectos no son exactamente cero, aunque son muy pequeños por lo que no se la considera en este modelo. En este caso el modelo modificado de *Rapp* sólo introduce conversiones AM/AM.



**Figura A.1:** Característica AM/AM para un SSPA con diferentes valores de  $s$ .

## A.2. TWTA

En el modelo de TWTA, dado en [Costa et al., 1999], las conversiones AM/AM y AM/PM acorde al modelo Saleh [Saleh, 1981] pueden expresarse como

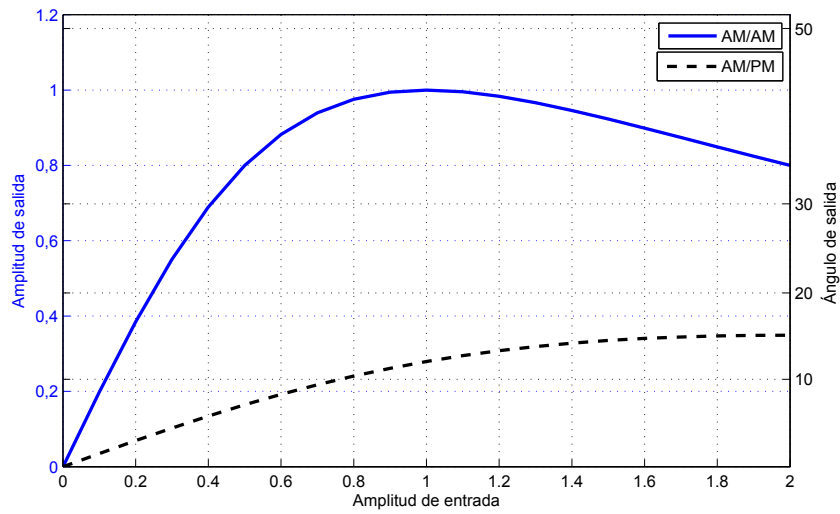
$$G[|x(t)|] = \frac{\alpha_a |x(t)|}{1 + \beta_a |x(t)|^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\Phi[|x(t)|] = \frac{\alpha_\theta |x(t)|}{1 + \beta_\theta |x(t)|^2} \quad (\text{A.6})$$

donde  $\alpha_a$ ,  $\beta_a$ ,  $\alpha_\theta$  y  $\beta_\theta$  son los parámetros que controlan las conversiones AM/AM y AM/PM. Estas conversiones se ilustran en la Fig. A.2. Estos parámetros se escogen tal que el error RMS (*Root Mean Square*) entre el modelo y el TWTA experimental sea mínimo. Los siguientes valores se utilizan comúnmente en la literatura, teniendo

$$\alpha_a = 2x_{sat}, \quad \beta_a = \frac{1}{x_{sat}^2}, \quad \alpha_\theta = \frac{\pi}{12} \quad \text{y} \quad \beta_\theta = 0.25$$

siendo  $x_{sat}$  es nivel de saturación del amplificador de potencia.



**Figura A.2:** Características AM/AM y AM/PM para TWTA.





El propósito de este apéndice es proporcionar una breve revisión de las herramientas y métodos matemáticos para la resolución de problemas de optimización sujetos a un determinado conjunto de restricciones, que permiten resolver los problemas formulados en el capítulo 5. La primera parte del apéndice se dedica a los métodos que se formulan como problemas en variable entera y la segunda parte a aquellos métodos de optimización formulados como problemas no lineales mixto-enteros.

### B.1. Programación entera

La programación entera (IP - *Integer Programming*) contempla aquellos problemas de optimización que restringen sus variables a valores enteros. Estos problemas de optimización presentan características muy diferentes respecto a la optimización de problemas con variables continuas, como por ejemplo, la no diferenciabilidad de las funciones, que hacen que los métodos y algoritmos sean completamente distintos y que en general demanden una complejidad mayor en su resolución.

Entre los algoritmos de programación entera está el método BB (*Branch-and-Bound*), que se resuelve a través de una secuencia de modelos de programación lineal que constituirán los nodos o subproblemas del problema entero.

### B.1.1. Método BB (*Branch-and-Bound*)

El método BB (*Branch-and-Bound*) se basa en una exploración del tipo “divide y vencerás” del conjunto de soluciones posibles que tiene el problema de optimización. Si se considera, por ejemplo, maximizar la función lineal de coste o función objetivo  $z$  sujeto a ciertas restricciones y cuyo conjunto de soluciones se divide en subconjuntos, entonces se tiene el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{S} \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde  $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}$  y  $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}$  son vectores columna y  $\mathcal{S}$  representa conjunto de soluciones del problema entero.

El conjunto  $\mathcal{S}$  se divide en  $R$  subconjuntos  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_R$  que se resuelven por separado, por lo tanto, tendrá  $R$  subproblemas resultantes

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in \mathcal{S}_r, \quad r = \{1, \dots, R\} \end{aligned} \tag{B.2}$$

Una vez que se resuelven los  $R$  subproblemas, se elige la mejor solución. Como cada subproblema  $\mathcal{S}_r$  podría tener la misma complejidad que el problema original, éstos son susceptibles de que se resuelvan dividiéndolos en nuevos subproblemas, y así sucesivamente hasta que la solución sea lo suficientemente sencilla. Por lo tanto, el método BB proporciona un árbol de subproblemas.

Sin embargo, la solución exacta de los subproblemas no siempre es sencilla, por lo que resulta en este caso más eficiente calcular una cota superior  $z(\mathcal{S}_r)$  para cada subproblema mediante un cierto algoritmo (por ejemplo, relajando la restricción entera), esto es,  $z(\mathcal{S}_r) \geq \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}_r} \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ , pues obtener una solución exacta puede ser muy complejo, mientras que obtener una cota superior puede resultar muy sencillo. Esto permite mantener una cota del valor óptimo de  $z$ , correspondiente al valor de la mejor solución encontrada hasta el momento. Así, se podrán descartar aquellos subproblemas para los que se haya obtenido una cota superior.

## B.2. Programación no lineal mixta-entera

La programación no lineal mixta-entera (MINLP - *Mixed Integer Non-Linear Programming*) hace uso de variables discretas y continuas. Proporcionan un poderoso marco para el

modelado matemático de muchos problemas de optimización. En los últimos años se ha producido un incremento importante en el desarrollo de estos modelos, en particular en el campo de la ingeniería. Entre dichos modelos, uno de los principales algoritmos que se usan para resolver los problemas MINLP está el método GBD (*Generalized Benders Decomposition*), cuya descripción se detalla a continuación.

### B.2.1. Método GBD (*Generalized Benders Decomposition*)

En el artículo [Benders, 1962], Benders propuso un nuevo método para resolver problemas de optimización con variables denominadas “*complicated*”, es decir, variables que a través de su presencia en las restricciones del problema originan acoplo entre las restricciones y la función a optimizar, lo cual impide hacer el problema separable en problemas más sencillos. Geoffrion, en su trabajo [Geoffrion, 1972], generalizó esta propuesta para problemas de optimización no lineales de la forma

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \quad & f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \text{s.t.} \quad & g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^N, \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^M, \end{aligned} \tag{B.3}$$

donde  $\mathbf{y}$  es un vector de variables tipo “*complicated*”, en el sentido de que (B.3) es mucho más fácil de resolver en  $\mathbf{x}$  cuando  $\mathbf{y}$  se ha fijado temporalmente,  $N$  y  $M$  son valores enteros positivos y  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  es un vector con las funciones de restricción no lineales. Por tanto, el método GBD es adecuado para resolver situaciones en las cuales, para valores fijos de  $\mathbf{y}$ , el problema (B.3) se separa en subproblemas independientes en  $\mathbf{x}$  o se asume una estructura especial bien conocida.

De forma general, el método GBD puede resumirse en los siguientes pasos:

1. (B.3) se proyecta en  $\mathbf{y}$ :

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}} \quad & v(\mathbf{y}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{V}, \end{aligned} \tag{B.4}$$

donde

$$v(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \text{s.t. } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{V} \triangleq \{\mathbf{y} : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}, \quad (\text{B.6})$$

con  $\mathcal{Y} \cap \mathcal{V}$  representando la proyección en la región factible de (B.3) en el espacio de  $\mathbf{y}$ . El problema (B.4) se conoce como *problema máster*, y es equivalente al problema original (B.3) de acuerdo al Teorema 2.1 de [Geoffrion, 1972], con la ventaja de que evaluar  $v(\mathbf{y})$  se considera mucho más fácil que resolver (B.3). El problema (B.5) se denota como *problema primal* y corresponde a resolver (B.3) cuando se fijan los valores de  $\mathbf{y}$ .

2. Al invocar la dualidad, el problema máster puede formularse como

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \mathbf{y}_0} \quad & \mathbf{y}_0 \\ \text{s.t. } \quad & \mathbf{y}_0 \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\mu}g(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}, \forall \boldsymbol{\mu} \geq 0 \\ & \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{\boldsymbol{\lambda}g(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} \geq 0, \forall \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

3. Resolver el problema máster relajado, es decir, el problema máster particularizado en  $\mathbf{x}^*$  el cual optimiza el problema primal. La solución óptima  $\mathbf{y}^*$  provee los valores óptimos de  $\mathbf{y}_0^*$ , los cuales corresponden a una cota superior (UB - *Upper Bound*) de la solución óptima del problema original (B.3).
4. Resolver el problema primal para  $\mathbf{y}^*$ , es decir, la solución óptima  $\mathbf{x}^*$  se actualiza y los valores óptimos  $v(\mathbf{y}^*)$  se usan en la actualización. La cota inferior (LB - *Lower Bound*) de la solución óptima de (B.3) es  $LB = \min\{LB, v(\mathbf{y}^*)\}$ .

Se resuelven de forma sucesiva los pasos 3 y 4, obteniéndose las secuencias correspondientes a la cota superior e inferior. La secuencia UB  $\mathbf{y}_0^*$  es monótona y no creciente, mientras que LB es no decreciente monótonamente y se obtiene a partir de  $LB = \min\{LB, v(\mathbf{y}^*)\}$ , dado que la secuencia de valor  $v(\mathbf{y}^*)$  no necesita ser monótona decreciente. La solución óptima se alcanza cuando  $UB = LB$ , aunque en la práctica se usa un parámetro de error, denotado por  $\varepsilon$ , siendo este  $\varepsilon = UB - LB$ . Entonces, la convergencia del método GBD está asegurado dentro del valor de error  $\varepsilon$ , de acuerdo al siguiente teorema [Geoffrion, 1972].

**Teorema 1.** *El método GBD termina en un número finito de iteraciones para cualquier valor de  $\varepsilon > 0$  e incluso para  $\varepsilon = 0$ , si se cumple las siguientes condiciones*

- *$\mathcal{X}$  es no vacío y convexo, y  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  son convexas para cada valor fijo de  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ .*
- *El conjunto  $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z} : g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mathbf{z}\}$  es cerrado para cada valor fijo de  $\mathbf{y}$ .*
- *Para cada valor fijo de  $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{V}$ , una de las siguientes condiciones se deben cumplir*
  1. *El problema original (B.3) tiene una solución finita.*
  2. *El problema original (B.3) es sin límites.*



- [3GPP, a] 3GPP. Tech. Specif. Group Radio Access Network Requirements for Evolved UTRA (E-UTRA) and Evolved UTRAN (E-UTRAN). *3GPP TS 25.913*.
- [3GPP, b] 3GPP. Tech. Specif. Group Services and System Aspects Service Requirements for Evolution of the 3GPP System (Rel. 8). *3GPP TS 22.278*.
- [3GPP, 2004] 3GPP (2004). Comparison of PAR and Cubic Metric for power de-rating. *TDocs. R1-040522 and R1-040642. 3GPP TSG RAN WG1 and 3GPP TSG WG4 Tech. Report*.
- [3GPP, 2006] 3GPP (2006). Cubic Metric in 3GPP-LTE. *TDoc. R1-060023. 3GPP TSG RAN WG1 Tech. Report*.
- [Abouda, 2004] Abouda, A. A. (2004). PAPR reduction of OFDM signal using turbo coding and selective mapping. In *Proceedings of the 6th Nordic Signal Processing Symposium-NORSIG*, volume 2004.
- [Aggarwal and Meng, 2006] Aggarwal, A. and Meng, T. (2006). Minimizing the Peak-to-Average Power Ratio of OFDM Signals Using Convex Optimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(8):3099–3110.
- [Ahn et al., 2000] Ahn, H.-J., Shin, Y., and Im, S. (2000). A block coding scheme for peak-to-average power ratio reduction in an orthogonal frequency division multiplexing system. In *51st IEEE Vehicular Technology Conference. VTC 2000-Spring.*, volume 1, pages 56–60.

- [Armstrong, 2002] Armstrong, J. (2002). Peak-to-Average Power Reduction for OFDM by repeated clipping and frequency domain filtering. *IET Electronics Letters*, 38(5):246–247.
- [Asif, 2011] Asif, S. Z. (2011). *Next generation mobile communications ecosystem: technology management for mobile communications*. John Wiley & Sons.
- [Bahai and Saltzberg, 1999] Bahai, A. and Saltzberg, B. R. (1999). *Multi-Carrier Digital Communications: Theory and Applications of OFDM*. Plenum Publishers, New York.
- [Batra et al., 2004] Batra, A., Balakrishnan, J., Aiello, G. R., Foerster, J. R., and Dabak, A. (2004). Design of a multiband OFDM system for realistic UWB channel environments. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 52(9):2123–2138.
- [Batra et al., 2005] Batra, A., Balakrishnan, J., Somayazulu, S., et al. (2005). Multiband OFDM physical layer specification. *WiMedia Alliance Release*, 1.
- [Baxley and Zhou, 2004] Baxley, R. J. and Zhou, G. T. (2004). Power savings analysis of peak-to-average power ratio in OFDM. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 50(3):792–798.
- [Behravan and Eriksson, 2009] Behravan, A. and Eriksson, T. (2009). Tone reservation to reduce the envelope fluctuations of multicarrier signals. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 8(5):2417–2423.
- [Bello, 1963] Bello, P. A. (1963). Characterization of randomly time-variant linear channels. *IEEE Transactions on Communications Systems*, 11(4):360–393.
- [Bello, 1965] Bello, P. A. (1965). Selective fading limitations of the kathryn modem and some system design considerations. *IEEE Transactions on Communication Technology*, 13(3):320–333.
- [Benders, 1962] Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4(1):238–252.
- [Bertsekas, 1999] Bertsekas, D. P. (1999). *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, MA.



- [Bingham, 1990] Bingham, J. A. (1990). Multicarrier modulation for data transmission: An idea whose time has come. *IEEE Communications Magazine*, 28(5):5–14.
- [Breiling et al., 2001] Breiling, M., Muller-Weinfurtner, S. H., and Huber, J. B. (2001). SLM peak-power reduction without explicit side information. *IEEE Communications Letters*, 5(6):239–241.
- [Bäumel et al., 1996] Bäumel, R., Fischer, R., and Huber, J. (1996). Reducing the peak-to-average power ratio of multicarrier modulation by selected mapping. *IET Electronics Letters*, 32(22):2056–2057.
- [Cha et al., 2008] Cha, S., Park, M., Lee, S., Bang, K.-J., and Hong, D. (2008). A new PAPR reduction technique for OFDM systems using advanced peak windowing method. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 54(2):405–410.
- [Chang, 1966] Chang, R. W. (1966). Synthesis of band-limited orthogonal signals for multi-channel data transmission. *Bell System Technical Journal*, 45(10):1775–1796.
- [Chang, 1970] Chang, R. W. (1970). Orthogonal frequency multiplex data transmission system. US Patent No.3, 488-445.
- [Cho et al., 2012] Cho, Y.-J., No, J.-S., and Shin, D.-J. (2012). A new low-complexity PTS scheme based on successive local search using sequences. *IEEE Communications Letters*, 16(9):1470–1473.
- [Cho et al., 2010] Cho, Y. S., Kim, J., Yang, W. Y., and Kang, C. G. (2010). *MIMO-OFDM wireless communications with MATLAB*. John Wiley and Sons.
- [Cimini, 1985] Cimini, L. J. (1985). Analysis and simulation of a digital mobile channel using orthogonal frequency division multiplexing. *IEEE Transactions on Communications*, 33(7):665–675.
- [Cimini and Sollenberger, 2000] Cimini, L. J. and Sollenberger, N. R. (2000). Peak-to-average power ratio reduction of an OFDM signal using Partial Transmit Sequences. *IEEE Communications Letters*, 4(3):86–88.

- [Cioffi, 2001] Cioffi, J. (2001). Multichannel Modulation. Class Notes for EE379C: Advanced Digital Communications. Chapter 4.
- [Costa et al., 1999] Costa, E., Midrio, M., and Pupolin, S. (1999). Impact of amplifier nonlinearities on OFDM transmission system performance. *IEEE Communications Letters*, 3(2):37–39.
- [Damavandi et al., 2013] Damavandi, M. G., Abbasfar, A., and Michelson, D. G. (2013). Peak power reduction of OFDM systems through Tone Injection via Parametric Minimum Cross-Entropy Method. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 62(4):1838–1843.
- [Daoud and Alani, 2009] Daoud, O. and Alani, O. (2009). Reducing the PAPR by utilisation of the LDPC code. *IET Communications*, 3(4):520–529.
- [Davis and Jedwab, 1997] Davis, J. A. and Jedwab, J. (1997). Peak-to-mean power control and error correction for OFDM transmission using Golay sequences and Reed-Muller codes. *IET Electronics Letters*, 33(4):267–268.
- [Davis and Jedwab, 1999] Davis, J. A. and Jedwab, J. (1999). Peak-to-mean power control in OFDM, Golay complementary sequences, and Reed-Muller codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(7):2397–2417.
- [Deumal et al., 2011] Deumal, M., Behravan, A., and Pijoan, J. L. (2011). On Cubic Metric Reduction in OFDM Systems by Tone Reservation. *IEEE Transactions on Communications*, 59(6):1612–1620.
- [Doelz et al., 1957] Doelz, M. L., Heald, E. T., and Martin, D. L. (1957). Binary data transmission techniques for linear systems. *Proceedings of the IRE*, 45(5):656–661.
- [Dudevoir, 1989] Dudevoir, G. P. (1989). Equalization Techniques For High Rate Digital Transmission on Spectrally Shaped Channels.
- [Edfors et al., 1996] Edfors, O., Sandell, M., van de Beek, J.-J., Landström, D., and Sjöberg, F. (1996). An introduction to orthogonal frequency-division multiplexing. *Lulea University of Technology*.

- [ETSI EN 300 744, 2001] ETSI EN 300 744 (2001). Digital Video Broadcasting (DVB); Frame structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television. *Tech. Rep. EN 300 744*, V.1.4.1.
- [ETSI EN 302 304, 2004] ETSI EN 302 304 (2004). Digital Video Broadcasting (DVB): Transmission System for Handheld Terminals (DVB-H). *Tech. Rep. EN 302 304*, V.1.1.1.
- [ETSI ETS 300 401, 1995] ETSI ETS 300 401 (1995). Radio broadcasting systems: Digital Audio Broadcasting (DAB) to mobile, portable and fixed receivers. *Tech. Rep. ETS 300 401*.
- [ETSI ETS 300 477, 1997] ETSI ETS 300 477 (1997). Digital Video Broadcasting (DVB): Framing structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television. *Tech. Rep. ETS 300 477*.
- [ETSI Hyperlan/2, 2001] ETSI Hyperlan/2 (2001). Broadband Radio Access Networks (BRAN); HIPERLAN type 2 technical specification; Physical (PHY) layer. 1.2.2.
- [Fernández-Getino García et al., 2006] Fernández-Getino García, M. J., Edfors, O., and Páez-Borrallo, J. M. (2006). Peak power reduction for OFDM systems with orthogonal pilot sequences. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 5(1):47–51.
- [Gallager, 1968] Gallager, R. G. (1968). *Information Theory and Reliable Communication*. John Wiley.
- [GB 20600-2006, 2006] GB 20600-2006 (2006). National Standard of P. R. China. *Frame structure, channel coding and modulation for digital terrestrial television*.
- [Geoffrion, 1972] Geoffrion, A. M. (1972). Generalized Benders Decomposition. *J. Optimization Theory and Applications*, 10(4):237–260.
- [Ghassemi and Gulliver, 2008] Ghassemi, A. and Gulliver, T. A. (2008). A low-complexity PTS-based radix FFT method for PAPR reduction in OFDM systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(3):1161–1166.
- [Gil Jiménez et al., 2008] Gil Jiménez, V. P., Fernández-Getino García, M. J., Sánchez-Fernández, M. P., and García Armada, A. (2008). Efficient implementation of comple-

- mentary Golay sequences for PAR reduction and forward error correction in OFDM-based WLAN systems. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 62(9):683–694.
- [Gil Jiménez et al., 2011] Gil Jiménez, V. P., Jabrane, Y., Armada García, A., Said, B. A. E., and Ouahman, A. A. (2011). Reduction of the envelope fluctuations of multi-carrier modulations using adaptive neural fuzzy inference systems. *IEEE Transactions on Communications*, 59(1):19–25.
- [Golay, 1961] Golay, M. J. (1961). Complementary series. *IRE Transactions on Information Theory*, 7(2):82–87.
- [Gong et al., 2005] Gong, H., Ye, W., Feng, S., and Ke, F. (2005). A threshold companding scheme for reducing peak-to-average power ratio of OFDM signals. In *International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2005*, volume 1, pages 573–576.
- [Han and Hong, 2005] Han, H. S. and Hong, L. J. (2005). An overview of Peak-to-Average Power Ratio reduction techniques for multicarrier transmission. *IEEE Wireless Communications*, 12(2):56–652.
- [Han et al., 2006] Han, S. H., Cioffi, J. M., and Lee, J. H. (2006). Tone injection with hexagonal constellation for peak-to-average power ratio reduction in OFDM. *IEEE Communications Letters*, 10(9):646–648.
- [Han et al., 2008] Han, S. H., Cioffi, J. M., and Lee, J. H. (2008). On the Use of Hexagonal Constellation for Peak-to-Average Power Ratio Reduction of an OFDM Signal. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 7(3):781–786.
- [Han and Lee, 2004] Han, S. H. and Lee, J. H. (2004). PAPR reduction of OFDM signals using a reduced complexity PTS technique. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(11):887–890.
- [Hanzo et al., 2000] Hanzo, L., Webb, W., and Keller, T. (2000). *Single-and Multi-carrier Quadrature Amplitude Modulation: Principles and Applications for Personal Communications, WATM and Broadcasting: 2nd*. IEEE Press-John Wiley.

- [Hao and Lai, 2010] Hao, M.-J. and Lai, C.-H. (2010). Precoding for PAPR reduction of OFDM signals with minimum error probability. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 56(1):120–128.
- [Holsinger, 1964] Holsinger, J. L. (1964). Digital communication over fixed timecontinuous channels with memory, with special application to telephone channels. Technical report, DTIC Document.
- [Honkanen and Haggman, 1997] Honkanen, M. and Haggman, S.-G. (1997). New aspects on nonlinear power amplifier modeling in radio communication system simulations. In *The 8th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, volume 3, pages 844–848.
- [Hou et al., 2009] Hou, J., Ge, J., and Li, J. (2009). Trapezoidal companding scheme for peak-to-average power ratio reduction of OFDM signals. *Electronics Letters*, 45(25):1349–1351.
- [Hou et al., 2011] Hou, J., Ge, J., and Li, J. (2011). Peak-to-average power ratio reduction of OFDM signals using PTS scheme with low computational complexity. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 57(1):143–148.
- [Hou et al., 2010] Hou, J., Ge, J., Zhai, D., and Li, J. (2010). Peak-to-Average Power Ratio Reduction of OFDM Signals With Nonlinear Companding Scheme. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 56(2):258–262.
- [Hsu and Liao, 2012] Hsu, C.-Y. and Liao, H.-C. (2012). PAPR reduction using the combination of precoding and Mu-Law companding techniques for OFDM systems. In *IEEE 11th International Conference on Signal Processing. ICSP'2012*, volume 1, pages 1–4.
- [Huang et al., 2001a] Huang, X., Lu, J., Chuang, J., and Zheng, J. (2001a). Companding transform for the reduction of peak-to-average power ratio of OFDM signals. In *53rd IEEE Vehicular Technology Conference. VTC 2001-Spring.*, volume 2, pages 835–839.
- [Huang et al., 2001b] Huang, X., Lu, J., Zheng, J., Chuang, J., and Gu, J. (2001b). Reduction of peak-to-average power ratio of OFDM signals with companding transform. *IET Electronics Letters*, 37(8):506–507.

- [IEEE 802.11, 2012] IEEE 802.11 (2012). IEEE Standard for Information Technology-Telecommunications and Information Exchange between Systems-Local and Metropolitan Area Networks-Specific Requirements. Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications.
- [IEEE 802.16, 2012] IEEE 802.16 (2012). IEEE Standard for Local and metropolitan area networks Part 16: Air Interface for Broadband Wireless Access Systems. *IEEE Std 802.16-2012(Revision of IEEE Std 802.16-2009)*.
- [IEEE 802.20, 2008] IEEE 802.20 (2008). IEEE Standard for Local and Metropolitan Area Networks Part 20: Air Interface for Mobile Broadband Wireless Access Systems Supporting Vehicular Mobilityphysical and Media Access Control Layer Specification. *IEEE Std 802.20-2008*, pages 1–1039.
- [Jabrane et al., 2010] Jabrane, Y., Jiménez, V. P., Armada García, A., Said, B. A. E., and Ouahman, A. A. (2010). Reduction of power envelope fluctuations in OFDM signals by using neural networks. *IEEE Communications Letters*, 14(7):599–601.
- [Jeng and Chen, 2011] Jeng, S.-S. and Chen, J.-M. (2011). Efficient PAPR reduction in OFDM systems based on a companding technique with trapezium distribution. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 57(2):291–298.
- [Ji and Ren, 2013] Ji, J. and Ren, G. (2013). A New Modified SLM Scheme for Wireless OFDM Systems without Side Information. *IEEE Signal Processing Letters*, 20(11):1090–1093.
- [Jiang and Li, 2010] Jiang, T. and Li, X. (2010). Using fountain codes to control the peak-to-average power ratio of OFDM signals. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 59(8):3779–3785.
- [Jiang and Wu, 2008] Jiang, T. and Wu, Y. (2008). An overview: Peak-to-Average Power Ratio Reduction Techniques for OFDM signals. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 54(2):257–268.

- [Jiang et al., 2007] Jiang, T., Xiang, W., Richardson, P. C., Qu, D., and Zhu, G. (2007). On the nonlinear companding transform for reduction in PAPR of MCM signals. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 6(6):2017–2021.
- [Jiang et al., 2005a] Jiang, T., Yang, Y., and Song, Y.-H. (2005a). Companding technique for PAPR reduction in OFDM systems based on an exponential function. In *IEEE Global Telecommunications Conference. GLOBECOM'05.*, volume 5, pages 2798–2801.
- [Jiang et al., 2005b] Jiang, T., Yang, Y., and Song, Y.-H. (2005b). Exponential companding technique for PAPR reduction in OFDM systems. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 51(2):244–248.
- [Jiang and Zhu, 2004] Jiang, T. and Zhu, G. (2004). Nonlinear companding transform for reducing peak-to-average power ratio of OFDM signals. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 50(3):342–346.
- [Jiang and Zhu, 2005] Jiang, T. and Zhu, G. (2005). Complement block coding for reduction in peak-to-average power ratio of OFDM signals. *IEEE Communications Magazine*, 43(9):S17–S22.
- [Jones and Wilkinson, 1996] Jones, A. E. and Wilkinson, T. A. (1996). Combined coding for error control and increased robustness to system nonlinearities in OFDM. In *IEEE 46th Vehicular Technology Conference, 1996*, volume 2, pages 904–908.
- [Jones et al., 1994] Jones, A. E., Wilkinson, T. A., and Barton, S. (1994). Block coding scheme for reduction of peak to mean envelope power ratio of multicarrier transmission schemes. *IET Electronics Letters*, 30(25):2098–2099.
- [Kaitz, 2001] Kaitz, T. (2001). Channel and interference model for 802.16b physical layer. *Contribution to the IEEE*, 802.
- [Kasturia et al., 1990] Kasturia, S., Aslanis, J. T., and Cioffi, J. M. (1990). Vector coding for partial response channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(4):741–762.
- [Krongold and Jones, 2003] Krongold, B. S. and Jones, D. L. (2003). PAR reduction in OFDM via active constellation extension. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 49(3):258–268.

- [Le Goff et al., 2009] Le Goff, S. Y., Al-Samahi, S. S., Khoo, B. K., Tsimenidis, C. C., and Sharif, B. S. (2009). Selected mapping without side information for PAPR reduction in OFDM. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 8(7):3320–3325.
- [Leung et al., 2002] Leung, S., Ju, S., and Bi, G. (2002). Algorithm for repeated clipping and filtering in peak-to-average power reduction for OFDM. *IET Electronics Letters*, 38(25):1726–1727.
- [Li et al., 2011] Li, H., Jiang, T., and Zhou, Y. (2011). An improved tone reservation scheme with fast convergence for PAPR reduction in OFDM systems. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 57(4):902–906.
- [Lim et al., 2006] Lim, D.-W., Heo, S.-J., No, J.-S., and Chung, H. (2006). A new PTS OFDM scheme with low complexity for PAPR reduction. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 52(1):77–82.
- [Lin et al., 2003] Lin, M.-C., Chen, K.-C., and Li, S.-L. (2003). Turbo coded OFDM system with peak power reduction. In *58th IEEE Vehicular Technology Conference. VTC 2003-Fall*, volume 4, pages 2282–2286.
- [Litsyn, 2007] Litsyn, S. (2007). *Peak power control in multicarrier communications*. Cambridge University Press.
- [Liu et al., 2009] Liu, Q., Baxley, R., Ma, X., and Zhou, G. (2009). Error vector magnitude optimization for OFDM systems with a deterministic peak-to-average power ratio constraint. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 3(3):418–429.
- [Liu and Wu, 2010a] Liu, X. and Wu, H.-C. (2010a). Analysis and evaluation of novel asterisk-16qam constellation family and its application for pmepr control in golay-coded ofdm systems. In *IEEE International Conference on Communications (ICC), 2010*, pages 1–5.
- [Liu and Wu, 2010b] Liu, X. and Wu, H.-C. (2010b). Novel asterisk 16qam constellation for cofdm. *IEEE Communications Letters*, 14(7):596–598.



- [Lowe and Huang, 2007] Lowe, D. and Huang, X. (2007). Optimal adaptive hyperbolic companding for OFDM. In *The 2nd International Conference on Wireless Broadband and Ultra Wideband Communications. AusWireless 2007*, pages 24–24.
- [Müller, 1997] Müller, Stefan H. and Huber, J. B. (1997). OFDM with reduced peak-to-average power ratio by optimum combination of partial transmit sequences. *IET Electronics Letters*, 33(5):368–369.
- [Müller and Huber, 1997] Müller, S. H. and Huber, J. B. (1997). A novel peak power reduction scheme for OFDM. In *The 8th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 1997. Waves of the Year 2000. PIMRC'97.*, volume 3, pages 1090–1094.
- [Moose, 1994] Moose, P. H. (1994). A technique for orthogonal frequency division multiplexing frequency offset correction. *IEEE Transactions on Communications*, 42(10):2908–2914.
- [Ochi, 1990] Ochi, M. (1990). *Applied probability and stochastic processes in engineering and physical sciences*. Wiley series in probability and mathematical statistics: Applied probability and statistics. Wiley.
- [Ochiai and Imai, 2000a] Ochiai, H. and Imai, H. (2000a). On clipping for peak power reduction of OFDM signals. In *IEEE Global Telecommunications Conference. GLOBECOM'00.*, volume 2, pages 731–735.
- [Ochiai and Imai, 2000b] Ochiai, H. and Imai, H. (2000b). Performance of the deliberate clipping with adaptive symbol selection for strictly band-limited OFDM systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 18(11):2270–2277.
- [Ochiai and Imai, 2001] Ochiai, H. and Imai, H. (2001). On the distribution of the peak-to-average power ratio in OFDM signals. *IEEE Transactions on Communications*, 49(2):282–289.
- [O’neill and Lopes, 1995] O’neill, R. and Lopes, L. (1995). Envelope variations and spectral splatter in clipped multicarrier signals. In *Sixth IEEE International Symposium on Perso-*

- nal, Indoor and Mobile Radio Communications, 1995. PIMRC'95. Wireless: Merging onto the Information Superhighway*, volume 1, pages 71–75.
- [Paterson, 2000] Paterson, K. G. (2000). Generalized Reed-Muller codes and power control in OFDM modulation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(1):104–120.
- [Paterson and Tarokh, 2000] Paterson, K. G. and Tarokh, V. (2000). On the existence and construction of good codes with low peak-to-average power ratios. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(6):1974–1987.
- [Pauli and Kuchenbecker, 1998] Pauli, M. and Kuchenbecker, H.-P. (1998). On the reduction of the out-of-band radiation of OFDM-signals. In *IEEE International Conference on Communications. ICC 98.*, volume 3, pages 1304–1308.
- [Peled and Ruiz, 1980] Peled, A. and Ruiz, A. (1980). Frequency domain data transmission using reduced computational complexity algorithms. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP '80).*, volume 5, pages 964–967.
- [Pratt et al., 2006] Pratt, T., Jones, N., Smee, L., and Torrey, M. (2006). OFDM link performance with companding for PAPR reduction in the presence of non-linear amplification. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 52(2):261–267.
- [Proakis and Salehi, 2007] Proakis, J. and Salehi, M. (2007). *Digital Communications*. McGraw-Hill higher education. McGraw-Hill Education, New York.
- [Qu et al., 2014] Qu, D., Li, L., and Jiang, T. (2014). Invertible Subset LDPC Code for PAPR Reduction in OFDM Systems with Low Complexity. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 13(4):2204–2213.
- [Rahmatallah et al., 2013] Rahmatallah, Y., Bouaynaya, N., and Mohan, S. (2013). Bit-Error-Rate Performance of Companding Transforms for OFDM. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 62(8):4116–4120.
- [Rahmatallah and Mohan, 2013] Rahmatallah, Y. and Mohan, S. (2013). Peak-To-Average Power Ratio Reduction in OFDM Systems: A Survey And Taxonomy. *IEEE Communications Surveys Tutorials*, 15(4):1567–1592.

- [Rowe, 1982] Rowe, H. (1982). Memoryless nonlinearities with Gaussian inputs: Elementary results. *Bell System Technical Journal*, 61(7):1519–1526.
- [Ruiz et al., 1992] Ruiz, A., Cioffi, J. M., and Kasturia, S. (1992). Discrete multiple tone modulation with coset coding for the spectrally shaped channel. *IEEE Transactions on Communications*, 40(6):1012–1029.
- [Sabbaghian et al., 2011] Sabbaghian, M., Kwak, Y., and Tarokh, V. (2011). New codes from dual BCH codes with applications in Low PAPR OFDM. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 10(12):3990–3994.
- [Saleh, 1981] Saleh, A. A. (1981). Frequency-independent and frequency-dependent nonlinear models of TWT Amplifiers. *IEEE Transactions on Communications*, 29(11):1715–1720.
- [Saltzberg, 1967] Saltzberg, B. R. (1967). Performance of an efficient parallel data transmission system. *IEEE Transactions on Communication Technology*, 15(6):805–811.
- [Schmidl and Cox, 1997] Schmidl, T. M. and Cox, D. C. (1997). Robust frequency and timing synchronization for ofdm. *IEEE Transactions on Communications*, 45(12):1613–1621.
- [Schmidt, 2008] Schmidt, K. (2008). On the peak-to-mean envelope power ratio of phase-shifted binary codes. *IEEE Transactions on Communications*, 56(11):1816–1823.
- [Sezginer and Sari, 2006] Sezginer, S. and Sari, H. (2006). OFDM peak power reduction with simple amplitude predistortion. *IEEE Communications Letters*, 10(2):65–67.
- [Sezginer and Sari, 2007] Sezginer, S. and Sari, H. (2007). Metric-Based symbol predistortion techniques for peak power reduction in OFDM systems. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 6(7):2622–2629.
- [Shepherd et al., 1998] Shepherd, S., Orriss, J., and Barton, S. (1998). Asymptotic limits in peak envelope power reduction by redundant coding in orthogonal frequency-division multiplex modulation. *IEEE Transactions on Communications*, 46(1):5–10.
- [Slimane, 2007] Slimane, S. B. (2007). Reducing the peak-to-average power ratio of OFDM signals through precoding. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 56(2):686–695.

- [Taha and Liu, 2007] Taha, Z. Q. and Liu, X. (2007). Low PMEPR code based on star-16-QAM constellation for OFDM. *IEEE Communications Letters*, 11(9):747–749.
- [Tellado, 2002] Tellado, J. (2002). *Multicarrier modulation with low PAR: applications to DSL and wireless*. Kluwer Academic Publishers.
- [Tellado-Mourello, 1999] Tellado-Mourello, J. (1999). *Peak to average power reduction for multicarrier modulation*. PhD thesis, Stanford University.
- [Tsai et al., 2008] Tsai, Y.-C., Deng, S.-K., Chen, K.-C., and Lin, M.-C. (2008). Turbo coded OFDM for reducing PAPR and error rates. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 7(1):84–89.
- [Tzannes et al., 1994] Tzannes, M., Tzannes, M., Proakis, J., and Heller, P. (1994). DMT systems, DWMT systems and digital filter banks. In *IEEE International Conference on Communications. ICC'94, SUPERCOMM/ICC '94, Conference Record, Serving Humanity Through Communications*, volume 1, pages 311–315.
- [Vaananen et al., 2002] Vaananen, O., Vankka, J., and Halonen, K. (2002). Reducing the peak to average ratio of multicarrier GSM and edge signals. In *13th IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2002.*, volume 1, pages 115–119.
- [Van Nee and de Wild, 1998] Van Nee, R. and de Wild, A. (1998). Reducing the peak-to-average power ratio of OFDM. In *48th IEEE Vehicular Technology Conference. VTC 98.*, volume 3, pages 2072–2076.
- [Wang and Leung, 2008] Wang, C. and Leung, S. H. (2008). Par reduction in OFDM through convex programming. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP) 2008*, pages 3597–3600.
- [Wang and Tellambura, 2005] Wang, L. and Tellambura, C. (2005). A simplified clipping and filtering technique for PAR reduction in OFDM systems. *IEEE Signal Processing Letters*, 12(6):453–456.

- [Wang and Tellambura, 2008] Wang, L. and Tellambura, C. (2008). Analysis of clipping noise and tone-reservation algorithms for peak reduction in OFDM systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 57(3):1675–1694.
- [Wang, 2008] Wang, M. (2008). Ultra mobile broadband technology overview. In *Communication Networks and Services Research Conference, 2008. CNSR 2008. 6th Annual*, pages 8–9.
- [Wang et al., 1999] Wang, X., Tjhung, T., and Ng, C. (1999). Reduction of peak-to-average power ratio of OFDM system using a companding technique. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 45(3):303–307.
- [Wang et al., 2003] Wang, X., Tjhung, T., and Wu, Y. (2003). On the SER and spectral analyses of A-law companded multicarrier modulation. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 52(5):1408–1412.
- [Wang et al., 2012] Wang, Y., Chen, W., and Tellambura, C. (2012). Genetic algorithm based nearly optimal peak reduction tone set selection for adaptive amplitude clipping PAPR reduction. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 58(3):462–471.
- [Wang and Luo, 2011] Wang, Y. and Luo, Z. (2011). Optimized iterative clipping and filtering for PAPR reduction of OFDM signals. *IEEE Transactions on Communications*, 59(1):33–37.
- [Wang et al., 2011] Wang, Y.-C., Wang, J.-L., Yi, K.-C., and Tian, B. (2011). PAPR Reduction of OFDM Signals with minimized EVM via SemiDefinite Relaxation. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 60(9):4662–4667.
- [Wang and Yi, 2009] Wang, Y.-C. and Yi, K.-C. (2009). Convex optimization method for quasi-constant peak-to-average power ratio of OFDM signals. *IEEE Signal Processing Letters*, 16(6):509–512.
- [Weinstein and Ebert, 1971] Weinstein, S. and Ebert, P. (1971). Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete fourier transform. *IEEE Transactions on Communication Technology*, 19(5):628–634.

- [Wu and Zou, 1995] Wu, Y. and Zou, W. Y. (1995). Orthogonal frequency division multiplexing: A multi-carrier modulation scheme. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 41(3):392–399.
- [Wulich, 1996] Wulich, D. (1996). Reduction of peak to mean ratio of multicarrier modulation using cyclic coding. *IET Electronics Letters*, 32(5):432–433.
- [Yang et al., 2007] Yang, G., Zhou, Y., and Qian, S. (2007). Using hyperbolic tangent sigmoid transfer function for companding transform in OFDM system. In *International Symposium on Communications and Information Technologies. ISCIT'07.*, pages 87–90.
- [Yang et al., 2006] Yang, L., Chen, R., Siu, Y., and Soo, K. (2006). PAPR reduction of an OFDM signal by use of PTS with low computational complexity. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 52(1):83–86.
- [Yu et al., 2011] Yu, Z., Baxley, R., and Zhou, G. (2011). Generalized interior-point method for constrained peak power minimization of OFDM signals. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2011*, pages 3572–3575.
- [Zhang et al., 1999] Zhang, Y., Yongacoglu, A., Chouinard, J.-Y., and Zhang, L. (1999). OFDM peak power reduction by sub-block-coding and its extended versions. In *IEEE 49th Vehicular Technology Conference, 1999*, volume 1, pages 695–699.
- [Zheng et al., 2003] Zheng, Z. W., Yang, Z. X., Pan, C. Y., and Zhu, Y. S. (2003). Cutoff Rate and Outage Probability Performance Comparisons Between DVB-T and DMB-T Systems Under Mobile Multipath Channels. *IEEE Transaction on Broadcasting*, 49:390–397.
- [Zimmerman and Kirsch, 1967] Zimmerman, M. and Kirsch, A. L. (1967). The an/gsc-10 (kathryn) variable rate data modem for hf radio. *IEEE Transactions on Communication Technology*, 15(2):197–204.
- [Zou and Wu, 1995] Zou, W. Y. and Wu, Y. (1995). Cofdm: An overview. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 41(1):1–8.
- [Zyren and McCoy, 2007] Zyren, J. and McCoy, W. (2007). Overview of the 3gpp long term evolution physical layer. *Freescale Semiconductor, Inc., white paper*.