



Universidad
Carlos III de Madrid

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**

**DEPARTAMENTO DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS Y
TEORÍA DE ESTRUCTURAS**

CARGAS CRÍTICAS DE PANDEO DE COLUMNAS FISURADAS

TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

AUTOR: LORENA MARÍA MORENO FERNÁNDEZ-CAÑADAS

TUTOR: D. JOSÉ FERNÁNDEZ SÁEZ

Leganés, marzo de 2012



DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, a mi tutor, José Fernández Sáez, que me ha dado la oportunidad de realizar el presente trabajo, el cual he realizado con gran ilusión. Por apoyarme en todo momento y enseñarme día a día, siendo un ejemplo tanto en lo profesional como en lo personal. GRACIAS.

A mis compañeros y amigos, con los que he compartido muy buenos momentos tanto dentro como fuera de la universidad. GRACIAS.

A mi abuela, Mercedes, que siempre me ha recordado que no todo se aprende de los libros, que la vida nos enseña todos los días, y todos los que nos rodean tienen algo que mostrarnos. GRACIAS.

Por último y, especialmente, a mis padres, Merche y Jesús, por estar a mi lado siempre que los he necesitado, apoyarme en todo momento, en cada paso, y ayudarme a no rendirme y superarme día a día. Por sus palabras de ánimo en los momentos más duros, por enseñarme que con esfuerzo todo es posible y confiar en mí. GRACIAS. ¡OS QUIERO!

En definitiva, a todos los que en algún momento me han apoyado y han confiado en mí.

GRACIAS.



Índice

1. Motivación y objetivos	10
2. Pandeo de columnas no fisuradas	12
2.1. Formulación diferencial del problema	12
2.1.1. Columna biapoyada	16
2.1.2. Columna empotrada-libre	18
2.1.3. Columna empotrada-simplemente apoyada	21
2.1.4. Columna biempotrada	23
2.1.5. Columna empotrada-apoyo deslizante	25
2.2. Formulación del problema por métodos energéticos	27
2.2.1. Columnas de sección constante	29
2.2.1.1. Columna biapoyada	30
2.2.1.2. Columna empotrada-libre	31
2.2.1.3. Columna empotrada-simplemente apoyada	31
2.2.1.4. Columna biempotrada	32
2.2.1.5. Columna empotrada-apoyo deslizante	33
2.3. Comentarios a la vista de los resultados obtenidos	33
2.3.1. Columnas de sección constante	34
2.3.2. Columnas de sección variable	34



3. Pandeo de columnas fisuradas	37
3.1. Modelo de columna fisurada	37
3.2. Formulación diferencial del problema	40
3.2.1. Columna biapoyada	41
3.2.2. Columna empotrada-libre	43
3.2.3. Columna empotrada-simplemente apoyada	44
3.2.4. Columna biempotrada	46
3.2.5. Columna empotrada-apoyo deslizante	47
3.3. Formulación del problema por métodos energéticos	48
3.3.1. Sección constante	52
3.3.1.1. Columna biapoyada	52
3.3.1.2. Columna empotrada-libre	54
3.3.1.3. Columna empotrada-simplemente apoyada	55
3.3.1.4. Columna biempotrada	57
3.3.1.5. Columna empotrada-apoyo deslizante	58
3.4. Resultados	59
3.4.1. Sección constante	59
3.4.1.1. Columna biapoyada	60
3.4.1.2. Columna empotrada-libre	64
3.4.1.3. Columna empotrada-simplemente apoyada	66
3.4.1.4. Columna biempotrada	69
3.4.1.5. Columna empotrada-apoyo deslizante	72
3.4.2. Sección variable	74



4. Conclusiones y trabajos futuros	77
4.1. Conclusiones	77
4.2. Trabajos futuros	79
5. Referencias	80
Anexos	81
A. Código desarrollado en <i>MATLAB</i>	81
B. Código desarrollado en <i>Mathematica</i>	84



Índice de figuras

Figura 2.1. Columna esbelta sobre la que actúa una fuerza de compresión	13
Figura 2.2. Fuerzas que actúan sobre una sección de la columna	13
Figura 2.3. Columna biapoyada	16
Figura 2.4. Columna empotrada-libre	19
Figura 2.5. Columna empotrada-simplemente apoyada	21
Figura 2.6. Columna biempotrada	23
Figura 2.7. Columna empotrada-apoyo deslizante	25
Figura 2.8. Columna de sección variable no fisurada	34
Figura 3.1. Modelo de columna fisurada	38
Figura 3.2. Columna biapoyada fisurada	42
Figura 3.3. Columna empotrada-libre fisurada	43
Figura 3.4. Columna empotrada-simplemente apoyada fisurada	45
Figura 3.5. Columna biempotrada fisurada	46
Figura 3.6. Columna empotrada-apoyo deslizante fisurada	47
Figura 3.7. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna biapoyada obtenida a través del planteamiento diferencial	61



Figura 3.8. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna biapoyada obtenida a través del método energético	62
Figura 3.9. Comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos para una columna biapoyada	63
Figura 3.10. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-libre obtenida a través del planteamiento diferencial	64
Figura 3.11. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-libre obtenida a través del método energético	65
Figura 3.12. Comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos para una columna empotrada-libre	66
Figura 3.13. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-simplemente apoyada obtenida a través del planteamiento diferencial	67
Figura 3.14. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-simplemente apoyada obtenida a través del método energético	68
Figura 3.15. Comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos para una columna empotrada-simplemente apoyada	69
Figura 3.16. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna biempotrada obtenida a través del planteamiento diferencial	70
Figura 3.17. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna biempotrada obtenida a través del método energético	71
Figura 3.18. Comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos para una columna biempotrada	71
Figura 3.19. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-apoyo deslizante obtenida a través del planteamiento diferencial	72
Figura 3.20. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-apoyo deslizante obtenida a través del método energético	73



Figura 3.21. Comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos para una columna empotrada-apoyo deslizante 74

Figura 3.22. Columna de sección variable fisurada 75



Índice de tablas

Tabla 2.1. Resultados de k_{CR} y P_{CR} para columnas no fisuradas de sección variable 36

Tabla 3.1. Valores de k_{CR} y P_{CR} para columnas fisuradas de sección variable 76



1. Motivación y objetivos

La estabilidad estructural ha sido motivo de preocupación y estudio a lo largo de los años. El diseño de una estructura implica la determinación de los esfuerzos que afectan a la misma, los cuales influyen sobre su equilibrio y, por consiguiente, sobre su integridad.

Los elementos que forman una estructura pueden fallar por diversos motivos, tales como el tipo de material utilizado, las cargas aplicadas, condiciones de contorno, etc.

En muchos casos estos fallos podrían evitarse con un correcto dimensionamiento de los diferentes elementos estructurales de manera que las tensiones y deformaciones máximas que aparecen permanezcan dentro de los límites admisibles.

Es importante asegurar que si la estructura, aparte de las cargas que soporta, es desplazada ligeramente de su posición de equilibrio debido a la acción de fuerzas, impactos, vibraciones, imperfecciones, tensiones residuales, etc., volverá recuperar su posición original tras cesar dichas perturbaciones. Así, la estabilidad estructural se convierte en un factor importante a tener en cuenta debido al uso hoy en día de materiales de alta resistencia que permiten la aplicación de elementos más ligeros y esbeltos.

En relación a los fallos provocados por inestabilidad, aparece el fenómeno de pandeo, el cual tiene lugar en elementos estructurales esbeltos sometidos a compresión y será considerado, en el presente trabajo, para columnas.

En ocasiones, la falta de información disponible acerca de este fenómeno, tanto en la normativa como en fuentes bibliográficas, supone que a la hora de dimensionar diferentes columnas, como es el caso de columnas de sección variable y, por tanto, de inercia variable, no se realice un correcto dimensionamiento frente al pandeo en dichos elementos. La mayoría de las veces se aplican coeficientes de seguridad de pandeo, como una postura conservadora, pero que se oponen al objetivo principal que es optimizar la estructura para disminuir las secciones de las barras y conseguir, en consecuencia, un ahorro de material, a la vez que se asegura la estabilidad estructural.

De este modo, un dimensionamiento erróneo de una estructura hace que las consecuencias producidas por este tipo de fenómeno puedan llegar a provocar el colapso de la misma.



El comportamiento de una columna frente al fenómeno de pandeo se puede ver afectado por la presencia de imperfecciones cuyo origen puede atribuirse al proceso de fabricación, al montaje o como consecuencia de su vida en servicio. Por ello, es necesario conocer el comportamiento de este tipo de estructuras frente a las cargas de trabajo. Así, la presencia de una fisura supone un grave peligro para la estabilidad de la columna, la cual puede colapsar.

Para ello, se realiza un análisis cualitativo y cuantitativo del fenómeno de pandeo de columnas, de tal manera que se pueda conocer el comportamiento de la barra frente a dicha inestabilidad.

Los resultados obtenidos permiten calcular de manera práctica y sencilla, multitud de columnas de sección tanto constante como variable con diferentes condiciones de contorno, consiguiéndose así el dimensionamiento adecuado que vaya en consonancia con el objetivo de optimización de estos elementos estructurales.

El presente trabajo tiene por objeto realizar un análisis de la carga crítica de pandeo de columnas sometidas a diversas condiciones de sustentación. A su vez, se estudiarán los efectos de la presencia de una fisura en la columna sobre dicha carga crítica en función de su tamaño y posición.

Actualmente, el cálculo de dicha carga crítica por medio de programas comerciales que aplican el método de elementos finitos requiere un gran número de elementos por barra para conseguir suficiente precisión en los resultados. Para evitar esto se propone un método alternativo de cálculo más sencillo, que requiere del uso de programación en *MATLAB* o *Mathematica*.

El trabajo ha sido estructurado en dos partes diferenciadas en función del tipo de columna a estudiar, con o sin fisura.

En la primera parte, se analizarán columnas no fisuradas. Para ello, se utilizará el planteamiento diferencial para calcular la carga crítica de pandeo de columnas con sección y rigidez constantes. A continuación, se realizarán de nuevo los cálculos por medio del método energético. Éste permitirá, además, calcular la carga crítica de pandeo para columnas cuya sección es variable. Se compararán los resultados obtenidos por medio del planteamiento diferencial con los valores de la carga crítica ya existentes en la bibliografía. Tomando como referencia los mismos, se comprobará la validez del método energético para columnas no fisuradas con sección constante y variable.

En la segunda parte, se analizarán los efectos de una fisura sobre las columnas estudiadas anteriormente. De nuevo, se calculará la carga crítica de pandeo a través del planteamiento diferencial y el método energético comparando los resultados obtenidos en ambos casos. Para ello, se analizarán diferentes posiciones y profundidades de la fisura y se determinarán las consecuencias que provocan sobre la carga crítica de pandeo.



2. Pandeo de columnas no fisuradas

El objetivo es utilizar diferentes métodos de cálculo que permitan obtener de manera sencilla el valor de la carga crítica de pandeo de columnas no fisuradas sometidas a diferentes condiciones de contorno.

Para ello, se recurrirá a dos métodos diferentes:

- Planteamiento diferencial
- Método energético

El primero de ellos, el planteamiento diferencial, está basado en la carga crítica de pandeo de Euler [1]. A partir de las fuerzas y momentos que actúan sobre la columna y suponiendo el equilibrio en las diferentes secciones de la misma se llega a una ecuación general, cuya solución se obtendrá por medio del planteamiento diferencial. Tras aplicar las condiciones de contorno a la solución general se obtendrá, además de la carga crítica de pandeo, la expresión exacta para el desplazamiento de la columna.

El método energético, por su parte, relaciona la energía de deformación con el trabajo realizado por la fuerza que provoca la inestabilidad. Se trata de un método según el cual la solución obtenida es aproximada. Además, debido a la sencillez en su proceso de resolución permite calcular la carga crítica de pandeo en columnas que presentan cambios en su sección.

Así, se compararán los resultados obtenidos mediante el planteamiento diferencial en los diferentes casos planteados con la bibliografía existente. Los obtenidos a través del método energético se compararán con los anteriores para comprobar la validez del mismo.

2.1. Formulación diferencial del problema

Este procedimiento está basado en la resolución de una ecuación general a través del planteamiento diferencial. Las hipótesis que se tendrán en cuenta a lo largo de la resolución del problema de pandeo en columnas no fisuradas son las siguientes:

- Se consideran columnas esbeltas cuya directriz es recta
- Se supone que los desplazamientos de las columnas sometidas a compresión son pequeños con respecto a su longitud

Se supone una columna esbelta cuya sección es constante y no tiene defectos en su superficie, sobre la cual se aplica una carga vertical de compresión P como se muestra en la figura 2.1.

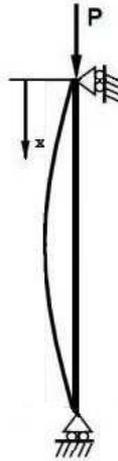


Figura 2.1. Columna esbelta sobre la que actúa una fuerza de compresión

Se considera, además, la presencia de una carga distribuida $q(x)$ lateralmente que provoca un equilibrio inestable sobre la columna y, por tanto, una deformación w en ese mismo sentido, y la aparición de un momento flector M en cada sección de la columna (véase figura 2.2.).

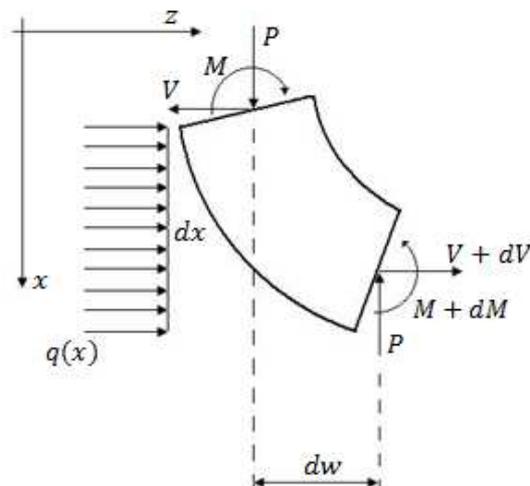


Figura 2.2. Fuerzas que actúan sobre una sección de la columna



Así, para una sección cualquiera de la columna, como la mostrada en la figura 2.2., se supone el equilibrio de fuerzas y momentos respectivamente.

$$\frac{dV}{dx} + q(x) = 0$$
$$V = -\frac{dM}{dx} - P \frac{dw}{dx}$$

Se establecen las relaciones entre las fuerzas y momentos que actúan sobre la sección igualando ambas expresiones.

$$\frac{dV}{dx} = -q(x) = -\frac{d^2M}{dx^2} - P \frac{d^2w}{dx^2}$$

Haciendo uso de la ecuación general de la elástica sin tener en cuenta los efectos del esfuerzo cortante ya que se trata de columnas de sección constante

$$M = EI \frac{d^2w}{dx^2}$$

donde EI es la rigidez a flexión de la columna que dependerá de la geometría de la sección, se sustituye el momento flector y se opera, para llegar a la siguiente ecuación diferencial a partir de la cual se resuelve el problema

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I(x) \frac{d^2w}{dx^2} \right) + P \frac{d^2w}{dx^2} = q(x)$$

Para los casos a estudiar se supone que la carga distribuida es nula ($q(x) = 0$) y la rigidez a flexión se mantiene constante ($EI = cte$) ya que la sección no varía, quedando la ecuación diferencial como sigue

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} + P \frac{d^2w}{dx^2} = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial y adimensionalizando la expresión, se obtiene

$$w^{IV}(\xi) + k^2 w^{II}(\xi) = 0$$



donde

$$\xi = \frac{x}{L}$$

y k es el factor adimensional de pandeo que a su vez se define como

$$k^2 = \frac{PL^2}{EI}$$

siendo L la longitud de la columna.

De la ecuación anterior se despeja la carga de compresión P , la cual será la ecuación de la carga crítica de pandeo de Euler P_C para los valores de k calculados.

$$P_C = \frac{k^2 EI}{L^2}$$

La ecuación de Euler supone que la carga crítica de pandeo depende de la longitud de la columna, el material, su sección transversal y las condiciones de apoyo en los extremos.

Por último, se resuelve la ecuación diferencial cuya solución será utilizada, junto con las condiciones de contorno, para hallar k .

$$w(\xi) = A_1 \text{sen}(k\xi) + A_2 \text{cos}(k\xi) + A_3 \xi + A_4$$

Se analizarán las diferentes columnas teniendo en cuenta las condiciones de contorno correspondientes a los dos extremos que darán lugar a un sistema de ecuaciones con la siguiente forma

$$[M]\{A_i\} = 0$$

siendo $[M]$ la matriz resultante de las condiciones de contorno y $\{A_i\}$ el vector formado por las constantes obtenidas de la ecuación diferencial.

Por medio del cálculo del determinante de la matriz $[M]$ se obtendrá la solución de k diferente a la trivial que permitirá hallar el valor de la carga crítica de pandeo P_C .

A continuación, se calculará la carga crítica de pandeo por medio de la ecuación de Euler para las siguientes columnas:



- Biapoyada
- Empotrada-libre
- Empotrada-simplemente apoyada
- Biempotrada
- Empotrada-apoyo deslizante

De este modo, se comprobarán los resultados obtenidos con los ya existentes en la bibliografía.

2.1.1. Columna biapoyada

Se tiene una columna biapoyada como la mostrada en la figura 2.3. de longitud L y sobre la cual se aplica una carga de compresión P .

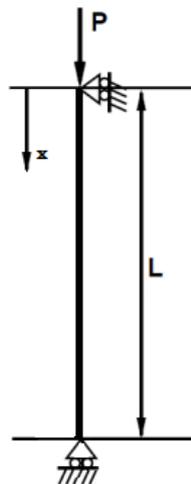


Figura 2.3. Columna biapoyada

Las condiciones de contorno que aparecen en un apoyo simple son desplazamiento y momento flector nulo.

$$w(\xi) = 0$$

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} = 0$$



De este modo, para cada uno de los apoyos se tienen las siguientes expresiones aplicando las condiciones de contorno anteriores a la solución general

Apoyo superior $\xi = 0$

$$w(0) = 0$$

$$A_2 + A_4 = 0$$

$$w''(0) = 0$$

$$-A_2 k^2 = 0$$

Apoyo inferior $\xi = 1$

$$w(1) = 0$$

$$A_1 \text{sen}(k) + A_2 \text{cos}(k) + A_3 + A_4 = 0$$

$$w''(1) = 0$$

$$-A_1 k^2 \text{sen}(k) - A_2 k^2 \text{cos}(k) = 0$$

Con las expresiones obtenidas se define un sistema de ecuaciones con la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 \\ \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 \\ -k^2 \text{sen}(k) & -k^2 \text{cos}(k) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Se simplifica $[M]$ ya que A_2 y A_4 son 0, quedando de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(k) & 1 \\ -k^2 \text{sen}(k) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Se resuelve el determinante correspondiente a la matriz $[M]$ para hallar el valor de k .

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \text{sen}(k) & 1 \\ -k^2 \text{sen}(k) & 0 \end{vmatrix} = 0$$



$$k^2 \operatorname{sen}(k) = 0$$

De este modo, para soluciones de k diferentes a la trivial, se obtiene que su valor debe ser

$$k = n\pi$$

Dado que se estudia el primer modo de pandeo, $n = 1$, ya que se busca el menor valor de la carga crítica, queda un valor de k

$$k = \pi$$

Sustituyendo en la expresión de la carga crítica de pandeo de Euler

$$P_C = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Con el valor de k obtenido y los resultados de las constantes A_i de la solución general se obtiene la expresión para el desplazamiento $w(\xi)$

$$w(\xi) = A \operatorname{sen}(\pi\xi)$$

2.1.2. Columna empotrada libre

Se tiene una columna empotrada-libre como la que se muestra en la figura 2.4.

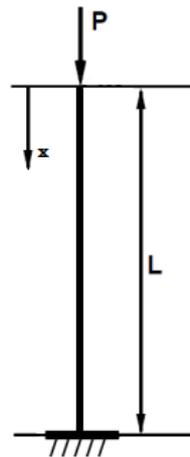


Figura 2.4. Columna empotrada-libre

Las condiciones de contorno que se dan en el extremo libre son momento flector y esfuerzo cortante nulos.

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} = 0$$

$$\frac{d^3w}{d\xi^3} + k^2 \frac{dw}{d\xi} = 0$$

El empotramiento presenta desplazamiento y giro nulos.

$$w(\xi) = 0$$

$$\frac{dw}{d\xi} = 0$$

A continuación, se obtienen las soluciones de la ecuación general para cada una de las condiciones de contorno.

Extremo libre $\xi = 0$

$$w''(0) = 0$$

$$-A_2 k^2 = 0$$



$$w'''(0) + k^2w(0) = 0$$

$$A_3 = 0$$

Empotramiento $\xi = 1$

$$w(1) = 0$$

$$A_1 \text{sen}(k) + A_2 \text{cos}(k) + A_3 + A_4 = 0$$

$$w'(1) = 0$$

$$A_1 k \text{cos}(k) - A_2 k \text{sen}(k) + A_3 = 0$$

Con las expresiones obtenidas se define la matriz $[M]$ y se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0 & -k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 \\ k \text{cos}(k) & -k \text{sen}(k) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Se observa que A_2 y A_3 son 0 de tal manera que simplificando la matriz $[M]$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(k) & 1 \\ k \text{cos}(k) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Con la matriz $[M]$ simplificada se resuelve su determinante para hallar el valor de k .

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \text{sen}(k) & 1 \\ k \text{cos}(k) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{cos}(k) = 0$$

Para soluciones de k diferentes a la trivial, su valor debe ser

$$k = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$



Siendo $n = 1$, es decir, el primer modo de pandeo, queda un valor de k

$$k = \frac{\pi}{2}$$

Sustituyendo en la expresión en la ecuación de Euler

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

La expresión resultante de $w(\xi)$ con los valores obtenidos es

$$w(\xi) = A \left[\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \xi \right) - 1 \right]$$

2.1.3. Columna empotrada-simplemente apoyada

Para una columna empotrada-simplemente apoyada como la mostrada en la figura 2.5., se tienen las mismas condiciones de contorno para el apoyo y el empotramiento que en los casos anteriores.

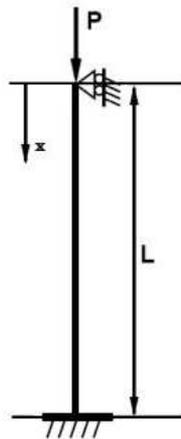


Figura 2.5. Columna empotrada-simplemente apoyada

Resolviendo la ecuación diferencial los resultados obtenidos son:



Apoyo $\xi = 0$

$$w(0) = 0$$

$$A_2 + A_4 = 0$$

$$w''(0) = 0$$

$$-A_2 k^2 = 0$$

Empotramiento $\xi = 1$

$$w(1) = 0$$

$$A_1 \text{sen}(k) + A_2 \text{cos}(k) + A_3 + A_4 = 0$$

$$w'(1) = 0$$

$$A_1 k \text{cos}(k) - A_2 k \text{sen}(k) + A_3 = 0$$

De este modo, la matriz $[M]$ queda de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 \\ \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 \\ k \text{cos}(k) & -k \text{sen}(k) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Dado que, en este caso, A_2 y A_4 son 0 se simplifica el sistema de ecuaciones como sigue

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(k) & 1 \\ k \text{cos}(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Se resuelve el determinante de $[M]$ para hallar el valor de k .

$$\det(M) = \begin{vmatrix} \text{sen}(k) & 1 \\ k \text{cos}(k) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{sen}(k) - k \text{cos}(k) = \text{tg}(k) - k = 0$$



En este caso, para encontrar la solución de k diferente a la trivial se utilizará *MATLAB* [2] como herramienta de cálculo para resolver la ecuación que sigue.

$$tg(k) = k$$

Para ello, se hace uso del método de la secante, a través del cual y tras realizar aproximaciones de la función por medio de rectas, se obtiene el valor de k . El resultado obtenido de es $k = 4.4934$, el cual, si se sustituye en la expresión de la carga crítica de pandeo se obtiene

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$

Así, para una columna empotrada-apoyada aparecen dos ecuaciones diferentes para el desplazamiento $w(\xi)$

$$w_1(\xi) = A[\text{sen}(1.43\pi\xi) - \xi\text{sen}(1.43\pi)]$$

$$w_2(\xi) = A[\text{sen}(1.43\pi\xi) - 1.43\pi\xi\text{cos}(1.43\pi)]$$

2.1.4. Columna biempotrada

Se supone una columna biempotrada como la mostrada en la figura 2.6. y para la cual se conocen las condiciones de contorno que aparecen en un empotramiento

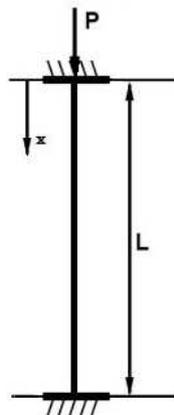


Figura 2.6. Columna biempotrada



Resolviendo, de nuevo, la ecuación diferencial los resultados son

Empotramiento superior $\xi = 0$

$$w(0) = 0$$

$$A_2 + A_4 = 0$$

$$w'(0) = 0$$

$$A_1 k + A_3 = 0$$

Empotramiento inferior $\xi = 1$

$$w(1) = 0$$

$$A_1 \text{sen}(k) + A_2 \text{cos}(k) + A_3 + A_4 = 0$$

$$w'(1) = 0$$

$$A_1 k \text{cos}(k) - A_2 k \text{sen}(k) + A_3 = 0$$

La matriz $[M]$ tiene la forma que sigue

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 \\ k \text{cos}(k) & -k \text{sen}(k) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0$$

Se resuelve el determinante de $[M]$ para hallar el valor de k

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 \\ k \text{cos}(k) & -k \text{sen}(k) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Nuevamente, para hallar las soluciones de k diferentes a la trivial se utilizará *MATLAB*, obteniendo

$$k = 2\pi$$



Sustituyendo en la expresión de la carga crítica de pandeo de Euler se obtiene

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}$$

Para una columna biempotrada la ecuación del desplazamiento $w(\xi)$ es

$$w(\xi) = A[\cos(2\pi\xi) - 1]$$

2.1.5. Columna empotrada-apoyo deslizable

Se tiene una columna empotrada-apoyo deslizable como la mostrada en la figura 2.7.

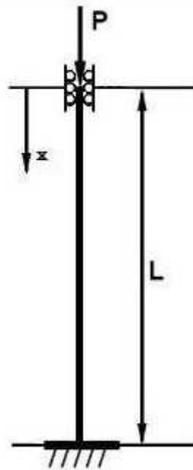


Figura 2.7. Columna empotrada-apoyo deslizable

Las condiciones de contorno que presenta son las del empotramiento y las del apoyo deslizable son giro y esfuerzo cortante nulos

$$\frac{dw}{d\xi} = 0$$

$$\frac{d^3w}{d\xi^3} + k^2 \frac{dw}{d\xi} = 0$$



Con estas se obtienen las soluciones de la ecuación general para cada uno de los extremos.

Apoyo deslizante $\xi = 0$

$$w'(0) = 0$$

$$A_1 k + A_3 = 0$$

$$w'''(0) + k^2 w(0) = 0$$

$$A_3 = 0$$

Empotramiento $\xi = 1$

$$w(1) = 0$$

$$A_1 \text{sen}(k) + A_2 \text{cos}(k) + A_3 + A_4 = 0$$

$$w'(1) = 0$$

$$A_1 k \text{cos}(k) - A_2 k \text{sen}(k) + A_3 = 0$$

Con las expresiones halladas se define la matriz $[M]$ y se resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 \\ k \text{cos}(k) & -k \text{sen}(k) & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Las constantes A_1 y A_3 son 0 por lo que simplificando $[M]$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} \text{cos}(k) & 1 \\ -k \text{sen}(k) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_4 \end{Bmatrix} = 0$$

Con la matriz simplificada se resuelve su determinante para hallar el valor de k .



$$\det(M) = \begin{vmatrix} \cos(k) & 1 \\ -k\operatorname{sen}(k) & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$k\operatorname{sen}(k) = 0$$

Para soluciones de k diferentes a la trivial, su valor debe ser

$$k = n\pi = \pi$$

Sustituyendo en la expresión de la carga crítica de pandeo

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

A partir de los resultados obtenidos $w(\xi)$ es

$$w(\xi) = A[1 + \cos(\pi\xi)]$$

2.2. Formulación del problema por métodos energéticos

Se trata de un método alternativo de cálculo de la carga crítica de pandeo basado en el balance de la energía y el trabajo realizado durante el proceso de deformación.

El método energético, planteado por Timoshenko, permite calcular la carga crítica de pandeo de manera aproximada y consiste en estimar los desplazamientos relacionados con el pandeo e igualar la energía de deformación U_{int} con el trabajo que realizado por la fuerza aplicada U_{ext} durante la deformación.

$$\Delta U_{int} = \Delta U_{ext}$$

Para ello, se determina la expresión del desplazamiento $w(x)$ de la columna que debe satisfacer, al menos, las condiciones de contorno geométricas. De este modo, aparece el inconveniente del método, debido a que se trata de un método de aproximación, que es la elección adecuada de $w(x)$. De esta elección, teniendo en cuenta los requisitos establecidos, dependerá la mayor o menor exactitud del resultado. Cuanto más exacta sea $w(x)$ los resultados obtenidos mediante este método serán más precisos.



Las variaciones de energía se relacionan con el momento flector y el giro asociados a la estructura de manera que se obtienen las siguientes expresiones para la energía interna y externa respectivamente

$$\Delta U_{int} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx$$

$$\Delta U_{ext} = \frac{P_C}{2} \int_0^L \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx$$

Igualando ambas expresiones y despejando la carga crítica de pandeo se obtiene la siguiente ecuación

$$P_C = \frac{\int_0^L EI(x) \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx}$$

Sustituyendo la carga crítica de pandeo de Euler, se obtiene la expresión que permite hallar k como se muestra a continuación. Para simplificar los resultados, se adimensionaliza la expresión por medio del parámetro ξ utilizado anteriormente

$$P_C = \frac{EI_o \int_0^1 \frac{EI(\xi)}{EI_o} \frac{1}{L^4} (w''(\xi))^2 L d\xi}{\int_0^1 \frac{1}{L^2} (w'(\xi))^2 L d\xi}$$

$$P_C = \frac{1}{L^2} EI_o \frac{\int_0^1 \bar{I}(\xi) (w''(\xi))^2 d\xi}{\int_0^1 (w'(\xi))^2 d\xi}$$

$$\frac{P_C L^2}{EI_o} = \frac{\int_0^1 \bar{I}(\xi) (w''(\xi))^2 d\xi}{\int_0^1 (w'(\xi))^2 d\xi}$$



donde

$$\bar{I}(\xi) = \frac{I(\xi)}{I_0}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la carga crítica de pandeo, sustituyendo se obtiene el valor de k^2

$$k^2 = \frac{\int_0^1 \bar{I}(\xi) (w''(\xi))^2 d\xi}{\int_0^1 (w'(\xi))^2 d\xi}$$

Con la ecuación para hallar el factor de pandeo k^2 queda establecer la expresión del desplazamiento $w(x)$. Como se ha dicho, debe cumplir las condiciones de contorno geométricas, de tal forma que se utilizará como referencia las expresiones obtenidas por medio del cálculo numérico del apartado anterior para columnas no fisuradas.

Este método será utilizado cuando las estructuras a estudiar son más complejas ya que, debido a la aparición de cambios de sección por ejemplo, que se verán reflejados en una variación del momento de inercia de la columna $I(x)$, el proceso utilizado anteriormente resulta muy complejo ya que requiere del cálculo de numerosas ecuaciones diferenciales.

A continuación, se calcularán los valores de la carga crítica de pandeo en columnas de sección constante y variable. De nuevo, se comenzará por el caso más sencillo en el que la columna no presenta imperfecciones en su superficie, para después estudiar los efectos de la fisura sobre la carga crítica de pandeo.

2.2.1. Columnas de sección constante

En este apartado se calculará el factor de pandeo en columnas de sección constante sometidas a diferentes condiciones de contorno. Para ello, se hará uso de las ecuaciones del desplazamiento $w(\xi)$ para columnas no fisuradas y se propondrán alternativas diferentes para analizar los resultados obtenidos.

En el caso de las columnas de sección constante el momento de inercia no varía ya que $I(\xi) = I_0$ de modo que $\bar{I}(\xi) = 1$, por lo que la expresión del factor de pandeo k^2 adquiere la siguiente forma



$$k^2 = \frac{\int_0^1 (w''(\xi))^2 d\xi}{\int_0^1 (w'(\xi))^2 d\xi}$$

A continuación, se realizarán los cálculos correspondientes a las columnas sometidas a diferentes condiciones de contorno ya estudiadas. De este modo, los modelos de las diferentes columnas serán los mismos en los diversos casos.

2.2.1.1. Columna biapoyada

Se supone una ecuación del desplazamiento $w(\xi)$ obtenida por medio del planteamiento diferencial para una columna no fisurada

$$w(\xi) = A \operatorname{sen}(\pi\xi)$$

Sustituyendo en la expresión de k^2 las ecuaciones del momento flector y el giro correspondientes a una columna biapoyada, el resultado obtenido es

$$k^2 = \frac{\int_0^1 (-A\pi^2 \operatorname{sen}(\pi\xi))^2 d\xi}{\int_0^1 (A\pi \cos(\pi\xi))^2 d\xi}$$

$$k^2 = \frac{A^2 \frac{\pi^4}{2}}{A^2 \frac{\pi^2}{2}}$$

$$k = \pi$$

Sustituyendo en la ecuación de la carga crítica de pandeo de Euler

$$P_C = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$



2.2.1.2. Columna empotrada-libre

En el caso de una columna empotrada-libre se toma la ecuación del desplazamiento que se muestra a continuación

$$w(\xi) = A \left[\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \xi \right) - 1 \right]$$

Sustituyendo en la relación entre la energía de deformación y el trabajo realizado por la fuerza externa

$$k^2 = \frac{\int_0^1 \left(-A \frac{\pi^2}{4} \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \xi \right) \right)^2 d\xi}{\int_0^1 \left(A \frac{\pi}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} \xi \right) \right)^2 d\xi}$$
$$k = \frac{\pi}{2}$$

Con el valor de k calculado la ecuación de la carga crítica de pandeo queda como sigue

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

2.2.1.3. Columna empotrada-simplemente apoyada

La columna empotrada-simplemente apoyada presenta dos expresiones diferentes para el desplazamiento. Aunque los resultados en ambos casos son iguales, los cálculos en este caso se realizarán para la siguiente expresión

$$w(\xi) = A [\text{sen}(1.43\pi\xi) - \xi \text{sen}(1.43\pi)]$$

Introduciendo la ecuación se obtiene el valor de k



$$k^2 = \frac{\int_0^1 (-20.19A \operatorname{sen}(1.43\pi\xi))^2 d\xi}{\int_0^1 (A(0.97 + 1.43\pi \cos(1.43\pi\xi)))^2 d\xi}$$

$$k = 4.4934$$

Con el valor de k calculado la ecuación de la carga crítica de pandeo queda como sigue

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$

2.2.1.4. Columna biempotrada

En el caso de una columna biempotrada cuyo desplazamiento es

$$w(\xi) = A[\cos(2\pi\xi) - 1]$$

El valor de k obtenido por medio del cociente de integrales es el siguiente

$$k^2 = \frac{\int_0^1 (-A 4\pi^2 \cos(2\pi\xi))^2 d\xi}{\int_0^1 (A 2\pi \operatorname{sen}(2\pi\xi))^2 d\xi}$$

$$k = 2\pi$$

Por lo que la carga crítica de pandeo queda

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2}$$



2.2.1.5. Columna empotrada-apoyo deslizante

Sea una columna empotrada-apoyo deslizante cuyo desplazamiento es

$$w(\xi) = A[1 + \cos(\pi\xi)]$$

El factor de pandeo k obtenido por haciendo uso del método energético es

$$k^2 = \frac{\int_0^1 (-A \pi^2 \cos(\pi\xi))^2 d\xi}{\int_0^1 (A \pi \sin(\pi\xi))^2 d\xi}$$
$$k = \pi$$

Sustituyendo en la ecuación de la carga crítica de pandeo de Euler queda

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

2.3. Comentarios a la vista de los resultados obtenidos

En el presente capítulo se ha calculado la carga crítica de pandeo una columna sometida a diferentes condiciones de contorno a través del planteamiento diferencial y el método energético.

Es importante destacar que el planteamiento diferencial permite obtener la carga crítica de pandeo exacta, mientras que el método energético proporciona resultados aproximados, que dependen de la ecuación del desplazamiento considerada.

2.3.1. Columnas de sección constante

Los resultados de la carga crítica de pandeo en columnas no fisuradas obtenidos por medio del planteamiento diferencial coinciden con los existentes y calculados en la teoría de pandeo de Euler.

Los resultados obtenidos para columnas no fisuradas de sección constante a través del método energético, teniendo en cuenta el uso de la solución exacta del desplazamiento, coinciden con los anteriores.

A la vista de los resultados obtenidos, se puede afirmar que el método energético es un método de cálculo alternativo válido para hallar la carga crítica de pandeo en columnas no fisuradas.

2.3.2. Columnas de sección variable

A continuación, se van a analizar los efectos de un cambio de sección en la columna planteando el caso de columna más sencillo, una columna biapoyada. Además, se calculará la carga crítica de pandeo para columnas de sección variable sometidas a diferentes condiciones de contorno.

Sea una columna biapoyada de sección circular cuyo radio es variable según una función $r(x)$ como la mostrada en la figura 2.8.

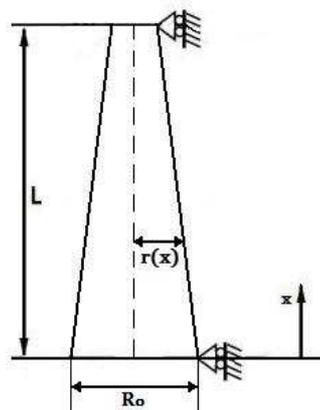


Figura 2.8. Columna de sección variable no fisurada



Se supone una expresión del momento de inercia en función del radio adimensionalizado $r(\xi)$ como la que sigue

$$I(\xi) = \frac{\pi r(\xi)^4}{4}$$

donde

$$r(\xi) = R_o \left(1 - \frac{\xi}{2}\right)$$

Sabiendo que el momento de inercia de una columna cónica es

$$I_o = \frac{\pi R_o^4}{4}$$

Se sustituyen ambas expresiones para obtener $\bar{I}(\xi)$

$$\bar{I}(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{2}\right)^4$$

Para columnas con sección variable se tomará siempre este modelo de estructura cónica al cual se irán cambiando las condiciones de contorno en ambos apoyos. Así, la ecuación que permite obtener el valor de k será

$$k^2 = \frac{\int_0^1 \bar{I}(\xi) (w''(\xi))^2 d\xi}{\int_0^1 (w'(\xi))^2 d\xi}$$

De nuevo se repetirán los cálculos anteriores introduciendo este parámetro en la expresión.

En la tabla 3.1. se recogen los resultados obtenidos para los diferentes tipos de columnas en función de las condiciones de contorno.



	Biapoyada	Empotrada-libre	Empotrada-simplemente apoyada	Biempotrada	Empotrada-apoyo deslizante
k_{CR}	1.8429	0.7125	2.7537	3.9664	2.0621
P_{CR}	$\frac{\pi^2 EI}{(1.7L)^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(4.4L)^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(1.14L)^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(0.79L)^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(1.52L)^2}$

Tabla 2.1. Resultados de k_{CR} y P_{CR} para columnas no fisuradas de sección variable

Dado que estos resultados han sido obtenidos partiendo de la ecuación del desplazamiento de la columna $w(x)$ correspondiente a cada uno de los diferentes casos, obtenidas a través del planteamiento diferencial, serán consideradas las soluciones exactas basando esta afirmación en los casos anteriormente expuestos.



3. Pandeo de columnas fisuradas

En el capítulo anterior se ha calculado la carga crítica de pandeo en columnas no fisuradas sometidas a diferentes condiciones de contorno a través del planteamiento diferencial y el método energético.

En el presente capítulo, se comprobarán los efectos de una fisura en la columna sobre el valor de la carga crítica de pandeo en función de su profundidad y su posición. Para ello, se propondrá un modelo de columna fisurada que se aplicará en los diferentes casos de columnas sometidas a diferentes condiciones de contorno.

3.1. Modelo de columna fisurada

En el análisis de la presencia de una fisura sobre la carga crítica de pandeo se supondrá, de nuevo, una columna esbelta de sección constante sobre la cual se aplica una carga de compresión P . Sin embargo, para analizar sus efectos sobre la columna, ésta se divide en dos partes en torno a la fisura como se muestra en la figura 3.1.

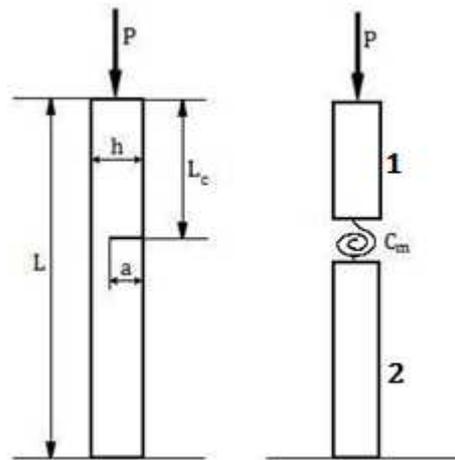


Figura 3.1. Modelo de columna fisurada

Para calcular las ecuaciones de compatibilidad que aparecen en posición de la fisura entre los dos tramos se supondrá la presencia de un muelle rotacional en ese punto de manera que existe continuidad de desplazamiento, esfuerzos cortantes y momentos flectores, y que, a su vez, permite el giro entre los tramos 1 y 2, lo que provoca la aparición de una discontinuidad en el giro $\Delta\theta$ [3, 4].

Estas condiciones que aparecen en torno a la fisura se expresarán en función de los dos tramos 1 y 2 en los que se separa la columna, de tal forma que las ecuaciones resultantes serán las que siguen

Continuidad de desplazamiento

$$w_1(L_c) = w_2(L_c)$$

Continuidad del esfuerzo cortante

$$w_1'''(L_c) + k^2 w_1'(L_c) = w_2'''(L_c) + k^2 w_2'(L_c)$$

Continuidad en el momento flector

$$w_1''(L_c) = w_2''(L_c)$$

Discontinuidad en el giro

$$\Delta\theta = w_2'(L_c) - w_1'(L_c)$$



La discontinuidad en el giro será proporcional al momento flector transmitido M_f y a la constante de flexibilidad de dicho muelle C_m .

$$\Delta\theta = C_m M_f = \frac{h}{EI} m(\alpha) M_f$$

De manera que la constante de flexibilidad tiene la forma que sigue

$$C_m = \frac{h}{EI} m(\alpha)$$

donde h es el ancho de la sección transversal de la columna y $m(\alpha)$ es una función de flexibilidad para secciones rectangulares que tiene la siguiente forma

$$m(\alpha) = 2 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 [5.93 - 19.69\alpha + 37.14\alpha^2 - 35.84\alpha^3 + 13.12\alpha^4]$$

donde

$$\alpha = \frac{a}{h}$$

siendo a la profundidad de la fisura como se muestra en la figura 3.1.

De este modo, queda definido el giro que experimenta la columna

$$\Delta\theta = w_2'(L_c) - w_1'(L_c) = \frac{h}{EI} m(\alpha) M_f$$

Al igual que se hizo en los casos de columnas no fisuradas, se adimensionalizan cada una de las expresiones en función de la variable ξ en la posición de la fisura, la cual se llamará ξ_c .

$$w_1(\xi_c) = w_2(\xi_c)$$

$$w_1'''(\xi_c) + k^2 w_1'(\xi_c) = w_2'''(\xi_c) + k^2 w_2'(\xi_c)$$

$$w_1''(\xi_c) = w_2''(\xi_c)$$

$$w_2'(L_c) - w_1'(L_c) = \frac{h}{L} m(\alpha) w_1''(\xi_c)$$



Estas ecuaciones se resolverán sustituyendo en cada caso los de desplazamientos por su expresión correspondiente en función de si se está resolviendo mediante el planteamiento diferencial, o por el contrario, se hace a través del método energético.

3.2. Formulación diferencial del problema

A continuación, se desarrollan las ecuaciones correspondientes a las condiciones de contorno en la fisura con las cuales se trabajará en los diferentes casos planteados. Los desplazamientos $w_1(\xi)$ y $w_2(\xi)$ se sustituirán por la solución general de la ecuación diferencial para cada tramo y que se recuerda a continuación

$$w(\xi) = A\text{sen}(k\xi) + B\text{cos}(k\xi) + C\xi + D$$

Sustituyendo en cada una de las condiciones de contorno, las expresiones que se obtienen son las siguientes en cada caso:

Continuidad en los desplazamientos

$$w_1(\xi_c) = w_2(\xi_c)$$

$$A_1\text{sen}(k\xi_c) + B_1\text{cos}(k\xi_c) + C_1\xi_c + D_1 = A_2\text{sen}(k\xi_c) + B_2\text{cos}(k\xi_c) + C_2\xi_c + D_2$$

Continuidad en los esfuerzos cortantes

$$(w'''_1 + k^2w'_1)(\xi_c) = (w'''_2 + k^2w'_2)(\xi_c)$$

$$\begin{aligned} -A_1k^3\text{cos}(k\xi_c) + B_1k^3\text{sen}(k\xi_c) + k^2[A_1k\text{cos}(k\xi_c) - B_1k\text{sen}(k\xi_c) + C_1] \\ = -A_2k^3\text{cos}(k\xi_c) + B_2k^3\text{sen}(k\xi_c) + k^2[A_2k\text{cos}(k\xi_c) - B_2k\text{sen}(k\xi_c) + C_2] \end{aligned}$$

$$k^2C_1 = k^2C_2$$

Continuidad en los momentos flectores

$$w''_1(\xi_c) = w''_2(\xi_c)$$

$$-A_1k^2\text{sen}(k\xi_c) - B_1k^2\text{cos}(k\xi_c) = -A_2k^2\text{sen}(k\xi_c) - B_2k^2\text{cos}(k\xi_c)$$



Discontinuidad en el giro

$$\begin{aligned}w'_2(\xi_c) - w'_1(\xi_c) &= \frac{h}{L} m(\alpha) w''_1(\xi_c) \\ [A_2 k \cos(k\xi_c) - B_2 k \sin(k\xi_c) + C_2] - [A_1 k \cos(k\xi_c) - B_1 k \sin(k\xi_c) + C_1] \\ &= \frac{h}{L} m(\alpha) (-A_1 k^2 \sin(k\xi_c) - B_1 k^2 \cos(k\xi_c)) \\ [A_2 k \cos(k\xi_c) - B_2 k \sin(k\xi_c) + C_2] - [A_1 k \cos(k\xi_c) - B_1 k \sin(k\xi_c) + C_1] \\ &= -\frac{h}{L} m(\alpha) A_1 k^2 \sin(k\xi_c) - \frac{h}{L} m(\alpha) B_1 k^2 \cos(k\xi_c)\end{aligned}$$

Estas expresiones, junto con las obtenidas a partir de la solución general de la ecuación diferencial para las condiciones de contorno de la columna, permiten obtener de nuevo un sistema de ecuaciones de la forma

$$[M]\{C_i\} = 0$$

siendo $[M]$ la matriz resultante de las condiciones de contorno y $\{C_i\}$ el vector formado por las constantes A_i y B_i obtenidas de la ecuación diferencial.

La solución a través del cálculo del determinante de la matriz $[M]$ será el valor de k diferente de 0 que permitirá hallar el valor de la carga crítica de pandeo para una columna fisurada.

A continuación, se planteará el proceso de obtención de la matriz $[M]$, la cual se dejará planteada en función de diferentes valores.

3.2.1. Columna biapoyada

Se tiene una columna biapoyada que presenta una fisura en la posición ξ_c la cual queda dividida en dos partes diferenciadas 1 y 2 en torno a dicho punto. Según este criterio, el apoyo superior estará referido al tramo 1 y el inferior a tramo 2 tal y como se muestra en la figura 3.2.

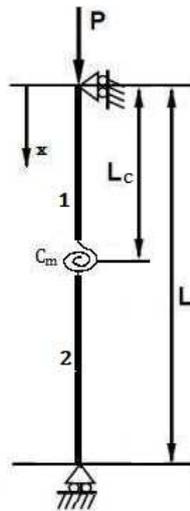


Figura 3.2. Columna biapoyada fisurada

Las expresiones relacionadas con las condiciones de contorno que aparecen en los apoyos, en los cuales el desplazamiento y el momento flector son nulos, referidas a cada uno de los tramos en los que se divide la columna son las siguientes

Apoyo superior $\xi = 0$

$$w(0) = 0 = A_2 + A_4$$

$$w''(0) = 0 = -A_2 k^2$$

Apoyo inferior $\xi = 1$

$$w(1) = 0 = B_1 \text{sen}(k) + B_2 \text{cos}(k) + B_3 + B_4$$

$$w''(1) = 0 = -B_1 k^2 \text{sen}(k) - B_2 k^2 \text{cos}(k)$$

Se tomarán las constantes A_i como las referidas al tramo 1 y B_i las que se refieren al tramo 2.

Con las ecuaciones anteriores y las condiciones de contorno que aparecen en la fisura se construye la matriz $[M]$ que tendrá la siguiente forma



$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k^2 \text{sen}(k) & -k^2 \text{cos}(k) & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(k\xi_c) & \text{cos}(k\xi_c) & \xi_c & 1 & -\text{sen}(k\xi_c) & -\text{cos}(k\xi_c) & -\xi_c & -1 & 0 & 0 \\ -k^2 \text{sen}(k\xi_c) & -k^2 \text{cos}(k\xi_c) & 0 & 0 & k^2 \text{sen}(k\xi_c) & k^2 \text{cos}(k\xi_c) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k^2 & 0 & 0 \\ -k\text{cos}(k\xi_c) + \frac{h}{L}m(\alpha)k^2 \text{sen}(k\xi_c) & k\text{sen}(k\xi_c) + \frac{h}{L}m(\alpha)k^2 \text{cos}(k\xi_c) & -1 & 0 & k\text{cos}(k\xi_c) & -k\text{sen}(k\xi_c) & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posteriormente, se tomarán diferentes valores de la profundidad de la fisura α , la posición de la grieta ξ_c y la relación entre el ancho de la sección de la columna y su longitud h/L para resolver el determinante de la matriz $[M]$ y obtener k , y se compararán estos resultados con los correspondientes a la columna sin fisurar. Para realizar los cálculos se utilizará un código de *MATLAB* con el que se calculará el valor de k con un error menor de 10^{-5} .

Se utilizará el mismo proceso de cálculo en todos y cada uno de los casos planteados a continuación modificando las condiciones de contorno correspondientes.

3.2.2. Columna empotrada-libre

Se propone una columna en empotrada-libre que presenta una fisura en una posición ξ_c a lo largo de su longitud L como se aprecia en la figura 3.3.

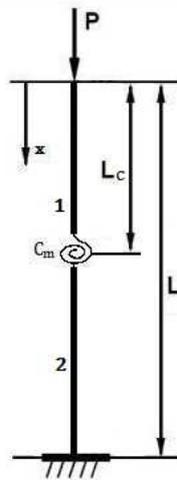


Figura 3.3. Columna empotrada-libre fisurada



Sean las condiciones de contorno en el extremo libre momento flector y esfuerzo cortante nulos y en el empotramiento desplazamiento y giro nulos, las ecuaciones correspondientes a cada uno de los tramos son

Extremo libre $\xi = 0$

$$w''(0) = 0 = -A_2 k^2$$

$$w'''(0) + k^2 w(0) = 0 = A_3$$

Empotramiento $\xi = 1$

$$w(1) = 0 = B_1 \text{sen}(k) + B_2 \text{cos}(k) + B_3 + B_4 = 0$$

$$w'(1) = 0 = B_1 k \text{cos}(k) - B_2 k \text{sen}(k) + B_3 = 0$$

Sustituyendo, quedará una matriz $[M]$ a partir del cual se obtendrá el valor del factor de pandeo de la siguiente forma

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & -k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \text{cos}(k) & -k \text{sen}(k) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(k\xi_c) & \text{cos}(k\xi_c) & \xi_c & 1 & -\text{sen}(k\xi_c) & -\text{cos}(k\xi_c) & -\xi_c & -1 & 0 \\ -k^2 \text{sen}(k\xi_c) & -k^2 \text{cos}(k\xi_c) & 0 & 0 & k^2 \text{sen}(k\xi_c) & k^2 \text{cos}(k\xi_c) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & -k^2 & 0 & 0 \\ -k \text{cos}(k\xi_c) + \frac{h}{L} m(\alpha) k^2 \text{sen}(k\xi_c) & k \text{sen}(k\xi_c) + \frac{h}{L} m(\alpha) k^2 \text{cos}(k\xi_c) & -1 & 0 & k \text{cos}(k\xi_c) & -k \text{sen}(k\xi_c) & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2.3. Columna empotrada-simplemente apoyada

Para una columna empotrada-simplemente apoyada fisurada como la que se muestra en la figura 3.4.

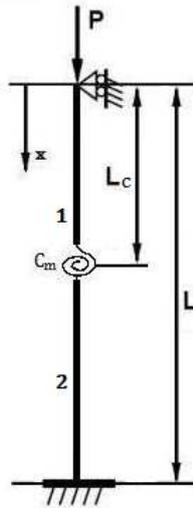


Figura 3.4. Columna empotrada-simplemente apoyada fisurada

Las condiciones de apoyo obtenidas, teniendo en cuenta los criterios anteriores, se exponen a continuación

Apoyo simple $\xi = 0$

$$w(0) = 0 = A_2 + A_4$$

$$w''(0) = 0 = -A_2 k^2$$

Empotramiento $\xi = 1$

$$w(1) = 0 = B_1 \text{sen}(k) + B_2 \text{cos}(k) + B_3 + B_4$$

$$w'(1) = 0 = B_1 k \text{cos}(k) - B_2 k \text{sen}(k) + B_3$$

Una vez obtenidas las ecuaciones correspondientes al tipo de columna que nos ocupa se plantea la matriz $[M]$ que resulta de la siguiente manera



$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k\text{cos}(k) & -k\text{sen}(k) & 1 & 0 \\ \text{sen}(k\xi_c) & \text{cos}(k\xi_c) & \xi_c & 1 & -\text{sen}(k\xi_c) & -\text{cos}(k\xi_c) & -\xi_c & -1 \\ -k^2\text{sen}(k\xi_c) & -k^2\text{cos}(k\xi_c) & 0 & 0 & k^2\text{sen}(k\xi_c) & k^2\text{cos}(k\xi_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & -k^2 & 0 \\ -k\text{cos}(k\xi_c) + \frac{h}{L}m(\alpha)k^2\text{sen}(k\xi_c) & k\text{sen}(k\xi_c) + \frac{h}{L}m(\alpha)k^2\text{cos}(k\xi_c) & -1 & 0 & k\text{cos}(k\xi_c) & -k\text{sen}(k\xi_c) & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2.4. Columna biempotrada

Para estudiar la presencia de una fisura en una columna biempotrada, se toma como modelo el presentado en la figura 3.5.

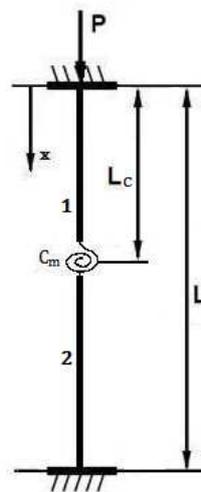


Figura 3.5. Columna biempotrada fisurada

Atendiendo a las condiciones de contorno en los extremos, se calculan las ecuaciones en función de las constantes A_i en relación al tramo 1 y B_i en relación al tramo 2

Empotramiento superior $\xi = 0$

$$w(0) = 0 = A_2 + A_4$$

$$w'(0) = 0 = A_1 k + A_3$$

Empotramiento inferior $\xi = 1$

$$w(1) = 0 = B_1 \text{sen}(k) + B_2 \text{cos}(k) + B_3 + B_4$$

$$w'(1) = 0 = B_1 k \text{cos}(k) - B_2 k \text{sen}(k) + B_3$$

Con las expresiones obtenidas se sustituye en la matriz $[M]$ obteniendo el resultado que sigue

$$[M] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \text{cos}(k) & -k \text{sen}(k) & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(k\xi_c) & \text{cos}(k\xi_c) & \xi_c & 1 & -\text{sen}(k\xi_c) & -\text{cos}(k\xi_c) & -\xi_c & -1 & 1 & -1 \\ -k^2 \text{sen}(k\xi_c) & -k^2 \text{cos}(k\xi_c) & 0 & 0 & k^2 \text{sen}(k\xi_c) & k^2 \text{cos}(k\xi_c) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & -k^2 & 0 & 0 & 0 \\ -k \text{cos}(k\xi_c) + \frac{h}{L} m(\alpha) k^2 \text{sen}(k\xi_c) & k \text{sen}(k\xi_c) + \frac{h}{L} m(\alpha) k^2 \text{cos}(k\xi_c) & -1 & 0 & k \text{cos}(k\xi_c) & -k \text{sen}(k\xi_c) & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2.5. Columna empotrada-apoyo deslizando

El último caso a estudiar es el de una columna empotrada en uno de sus extremos y con un apoyo deslizando en el otro. En la figura 3.6. se muestra el modelo de columna seguido

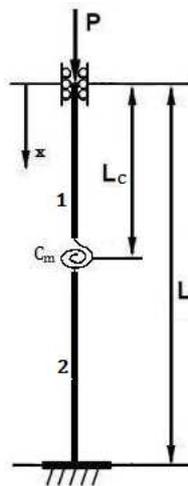


Figura 3.6. Columna empotrada-apoyo deslizando fisurada



Conociendo las condiciones de contorno en el empotramiento y sabiendo que en un apoyo deslizante el esfuerzo cortante y el giro son nulos se calculan las expresiones correspondientes en ambos casos

Apoyo deslizante $\xi = 0$

$$w'(0) = 0 = A_1 k + A_3$$

$$w'''(0) + k^2 w(0) = 0 = A_3$$

Empotramiento $\xi = 1$

$$w(1) = 0 = B_1 \text{sen}(k) + B_2 \text{cos}(k) + B_3 + B_4$$

$$w'(1) = 0 = B_1 k \text{cos}(k) - B_2 k \text{sen}(k) + B_3$$

Introduciendo los diferentes valores teniendo en cuenta cada uno de los dos tramos de la columna y las condiciones de contorno en la posición de la fisura se obtiene la siguiente matriz $[M]$

$$[M] = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen}(k) & \text{cos}(k) & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \text{cos}(k) & -k \text{sen}(k) & 1 & 0 & \\ \text{sen}(k\xi_c) & \text{cos}(k\xi_c) & \xi_c & 1 & -\text{sen}(k\xi_c) & -\text{cos}(k\xi_c) & -\xi_c & -1 & \\ -k^2 \text{sen}(k\xi_c) & -k^2 \text{cos}(k\xi_c) & 0 & 0 & k^2 \text{sen}(k\xi_c) & k^2 \text{cos}(k\xi_c) & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & k^2 & 0 & 0 & 0 & -k^2 & 0 & \\ -k \text{cos}(k\xi_c) + \frac{h}{L} m(\alpha) k^2 \text{sen}(k\xi_c) & k \text{sen}(k\xi_c) + \frac{h}{L} m(\alpha) k^2 \text{cos}(k\xi_c) & -1 & 0 & k \text{cos}(k\xi_c) & -k \text{sen}(k\xi_c) & 1 & 0 & \end{pmatrix}$$

3.3. Formulación del problema por métodos energéticos

Se recurre al modelo de columna fisurada propuesto que consideraba la presencia de un muelle rotacional en la posición de la grieta y según el cual se suponía la continuidad de desplazamientos, momentos y esfuerzos cortantes en dicho punto, además de una discontinuidad en el giro que dependía de una constante de flexibilidad relacionada con el muelle [5].



Debido a la presencia de dicha imperfección, y teniendo en cuenta las condiciones en dicho punto, la energía interna de deformación se divide en dos partes en torno a la posición de la fisura

$$\Delta U_{int} = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx$$
$$\Delta U_{int} = \frac{1}{2} \int_0^b EI(x) \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_b^L EI(x) \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx$$

La energía de deformación debida a la presencia del muelle rotacional se define como

$$\Delta U_{muelle} = \frac{1}{2} \Delta \theta M$$

Sumando ambas expresiones, la ecuación que define la energía de deformación es

$$\Delta U_{int} = \frac{1}{2} \int_0^b EI(x) \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_b^L EI(x) \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \Delta \theta M$$

Siendo M el momento flector en la posición de la fisura $x = b$

$$M = EI(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \Big|_b = EI(b) w''(b)$$

Y el giro $\Delta \theta$

$$\Delta \theta = \frac{h}{EI} m(\alpha) M = \frac{h}{EI} m(\alpha) EI w''(b) = h m(\alpha) w''(b)$$

De tal forma que la expresión de la energía interna, la cual se sustituirá en la ecuación que permite hallar el valor de k , queda

$$\Delta U_{int} = \frac{1}{2} \int_0^b EI(x) \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_b^L EI(x) \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EI(b)}{2} h m(\alpha) w''(b)^2$$



El trabajo realizado por la fuerza se divide, al igual que la energía de deformación, en dos tramos

$$\Delta U_{ext} = \frac{P_C}{2} \int_0^L \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx$$

$$\Delta U_{ext} = \frac{P_C}{2} \left[\int_0^b \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx + \int_b^L \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx \right]$$

Igualando ambas expresiones y despejando la carga crítica de pandeo se obtiene la siguiente ecuación

$$k^2 = \frac{\int_0^b \bar{I}(x) \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \int_b^L \bar{I}(x) \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \bar{I}(b)hm(\alpha)w''(b)^2}{\int_0^b \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx + \int_b^L \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 dx}$$

Para cuantificar el grado de aproximación de este método respecto del anterior usando desplazamientos diferentes a la solución exacta, se utiliza una expresión polinómica de cuarto grado a la cual se le sumará el desplazamiento de la correspondiente columna sin fisurar, quedando de la siguiente forma

$$w(x) = w_{sf}(x) + A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$$

donde $w_{sf}(x)$ es el desplazamiento de la columna sin fisurar.

Se utilizará una ecuación diferente para cada uno de los dos tramos en los que queda dividida la columna con sus respectivas constantes, es decir

$$w_1(x) = w_{sf}(x) + B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3$$

$$w_2(x) = w_{sf}(x) + C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3$$

Estas ecuaciones, que serán iguales para todos los casos planteados, deben satisfacer, por un lado, las condiciones de contorno de la fisura.



Continuidad en los esfuerzos cortantes

$$\begin{aligned}w'''_1(b) &= w'''_2(b) \\w_{sf}'''(b) + 6B_3 &= w_{sf}'''(b) + 6C_3 \\B_3 &= C_3\end{aligned}$$

Continuidad en los momentos flectores

$$\begin{aligned}w''_1(b) &= w''_2(b) \\w_{sf}''(b) + 2B_2 + 6B_3b &= w_{sf}''(b) + 2C_2 + 6C_3b \\B_2 &= C_2\end{aligned}$$

Continuidad en los desplazamientos

$$\begin{aligned}w_1(b) &= w_2(b) \\w_{sf}(b) + B_0 + B_1b + B_2b^2 + B_3b^3 &= w_{sf}(b) + C_0 + C_1b + C_2b^2 + C_3b^3 \\B_0 + B_1b + B_2b^2 + B_3b^3 &= C_0 + C_1b + C_2b^2 + C_3b^3 \\ \xrightarrow{B_2=C_2, B_3=C_3} B_0 + B_1b &= C_0 + C_1b\end{aligned}$$

Discontinuidad en el giro

$$\begin{aligned}w'_2(b) - w'_1(b) &= hm(\alpha)w_{sf}''(b) \\w_{sf}'(b) + C_1 + 2C_2b + C_3b^2 - [w_{sf}'(b) + B_1 + 2B_2b + 3B_3b^2] & \\ &= hm(\alpha)(w_{sf}''(b) + 2C_2 + 6C_3b) \\ \xrightarrow{B_2=C_2, B_3=C_3} C_1 - B_1 &= hm(\alpha)(w_{sf}''(b) + 2C_2 + 6C_3b)\end{aligned}$$

Por otro lado deben cumplir las dos condiciones de contorno que aparecen en cada uno de los extremos de la columna.

Una vez están planteadas las ecuaciones de partida se obtienen los valores de las ocho constantes y por consiguiente el valor de k tras aplicar la relación entre la energía interna de deformación y la ejercida por la fuerza.



3.3.1. Sección constante

Una columna cuya sección no es variable implica que el momento de inercia de dicha columna no modifique su valor a lo largo de la longitud de la columna. Esto implica que el cociente \bar{I} que relaciona el momento de inercia de la columna de sección variable con el de la columna de sección constante no se tenga en cuenta ya que $I(x) = I_0$. De este modo, la expresión de la carga crítica de pandeo queda de la siguiente forma

$$k^2 = \frac{\int_0^b \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \int_b^L \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^2 dx + hm(\alpha)w''(b)^2}{\int_0^b \left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 dx + \int_b^L \left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 dx}$$

A continuación, se analizarán los diferentes casos propuestos por medio del método energético suponiendo su sección constante. Se utilizará *Mathematica* [6] en el proceso de cálculo de las expresiones de los desplazamientos $w_1(\xi)$ y $w_2(\xi)$ debido a la complejidad de la resolución.

3.3.1.1. Columna biapoyada

En el caso de una columna biapoyada las condiciones de contorno son el desplazamiento y momento flector nulo en ambos apoyos. De ese modo, las condiciones de contorno de cada una de las dos partes en que se divide la columna quedan como sigue

Apoyo superior $x = 0$

$$w(0) = 0$$

$$B_0 = 0$$

$$w''(0) = 0$$

$$B_2 = 0$$



Apoyo inferior $x = L$

$$w(L) = 0$$

$$C_0 + C_1L + C_2L^2 + C_3L^3 = 0 \xrightarrow{C_2=C_3=0} C_0 + C_1L = 0$$

$$w''(L) = 0$$

$$C_2L^2 + C_3L^3 = 0 \xrightarrow{C_2=0} C_3 = 0$$

Habiendo obtenido los valores de las constantes que son 0

$$B_0 = B_2 = B_3 = C_2 = C_3 = 0$$

Y con las expresiones resultantes de la simplificación de las ecuaciones iniciales se obtienen las constantes no nulas

$$C_0 + C_1L = 0$$

$$B_0 + B_1b = C_0 + C_1b \xrightarrow{B_0=0} B_1b = C_0 + C_1b$$

$$C_1 - B_1 = hm(\alpha) \left(-D \frac{\pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi b}{L} \right) + 2C_2 + 6C_3b \right)$$

Los valores obtenidos para cada una de ellas son

$$C_0 = bhm(\alpha)D \frac{\pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi b}{L} \right)$$

$$C_1 = -bhm(\alpha)D \frac{\pi^2}{L^3} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi b}{L} \right)$$

$$B_1 = hm(\alpha)D \frac{\pi^2}{L^2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi b}{L} \right) \left[1 - \frac{b}{L} \right]$$

Adimensionalizando dichas constantes por medio de los parámetros

$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$\xi_c = \frac{b}{L}$$



se obtienen las siguientes expresiones correspondientes los desplazamientos de cada uno de los tramos

$$w_1(\xi) = D \left[\text{sen}(\pi\xi) + \frac{h}{L} \xi m(\alpha) \pi^2 \text{sen}(\pi\xi_c) [1 - \xi_c] \right]$$

$$w_2(\xi) = D \left[\text{sen}(\pi\xi) + \frac{h}{L} \xi_c m(\alpha) \pi^2 \text{sen}(\pi\xi_c) [1 - \xi] \right]$$

Mediante la herramienta de cálculo *Mathematica* y habiendo comprobado previamente que se cumplen las condiciones de contorno en los extremos y en la fisura se realizan los diferentes cálculos para hallar el valor de k y, por consiguiente, la expresión de la carga crítica de pandeo.

3.3.1.2. Columna empotrada-libre

Sea una columna empotrada-libre, las condiciones de contorno que aparecen en los extremos son

Extremo libre $x = 0$

$$w''(0) = 0$$

$$B_2 = 0$$

$$L^2 w'''(0) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 w(0) = 0$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[B_1 - \frac{\pi}{2} L \right] + L^2 \left(6B_3 + \left(\frac{\pi}{2L}\right)^3 \right) = 0$$

Empotramiento $x = L$

$$w(L) = 0$$

$$C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + C_3 L^3 = 0 \xrightarrow{B_2=C_2=0} C_0 + C_1 L + C_3 L^3 = 0$$



$$w'(L) = 0$$

$$C_1 + 2C_2L + 3C_3L^2 = 0 \xrightarrow{B_2=C_2=0} C_1 + 3C_3L^2 = 0$$

Aplicando estas condiciones de contorno y las correspondientes a la fisura, se obtienen las constantes que se sustituirán en las ecuaciones del desplazamiento

$$B_0 = \text{sen}\left(\frac{\pi b}{2L}\right) [A_1(0.2b - 0.8L)]$$

$$C_0 = \text{sen}\left(\frac{\pi b}{2L}\right) [0.8LA_1]$$

$$B_1 = \text{sen}\left(\frac{\pi b}{2L}\right) [A_1]$$

$$C_1 = \text{sen}\left(\frac{\pi b}{2L}\right) hm(\alpha) \left[\frac{0.1L^2 + 1.2bhm(\alpha)}{0.009L^4 + 0.2bhL^2m(\alpha) + b^2h^2m(\alpha)^2} \right]$$

$$B_2 = C_2 = 0$$

$$B_3 = C_3 = \text{sen}\left(\frac{\pi b}{2L}\right) \left[\frac{0.4}{L^2} A_1 \right]$$

donde

$$A_1 = \frac{hm(\alpha)}{0.09L^2 + bhm(\alpha)}$$

3.3.1.3. Columna empotrada-simplemente apoyada

En el caso de una columna empotrada-simplemente apoyada las condiciones de contorno son

Apoyo $x = 0$

$$w(0) = 0$$

$$B_0 = 0$$



$$w''(0) = 0$$

$$B_2 = 0$$

Empotramiento $x = L$

$$w(L) = 0$$

$$C_0 + C_1L + C_2L^2 + C_3L^3 = 0 \xrightarrow{B_2=C_2=0} C_0 + C_1L + C_3L^3 = 0$$

$$w'(L) = 0$$

$$-\frac{0.004}{L} + C_1 + 2C_2L + 3C_3L^2 = 0 \xrightarrow{B_2=C_2=0} -\frac{0.004}{L} + C_1 + 3C_3L^2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtienen las constantes B_i y C_i que forman las ecuaciones de los desplazamientos $w(x)$

$$B_0 = 0$$

$$C_0 = -0.004 + L^3 \left(\frac{0.001}{0.3L^3 + b^2hm(\alpha)} \right) + 6.7 \operatorname{sen} \left(\frac{4.5b}{L} \right)$$

$$B_1 = \operatorname{sen} \left(\frac{4.5b}{L} \right) \left[0.004 \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{b} \right) - \frac{1}{0.3L^3 + b^2hm(\alpha)} \left(0.002L^2 + \frac{0.001L^3}{b} \right) + \frac{hm(\alpha)(-3.4bL^3 + 2.2L^4 - 10.1b^3hm(\alpha) + 6.7b^2hLm(\alpha))}{0.1L^6 + 0.7b^2hL^3m(\alpha) + b^4h^2m(\alpha)^2} \right]$$

$$C_1 = \frac{0.004}{L} + \operatorname{sen} \left(\frac{4.5b}{L} \right) \left[\frac{-10^{-4}L^2(7L^3 + 2b^2hm(\alpha)) + bhm(\alpha)(-3.4L^3 - 10.1b^2hm(\alpha))}{0.1L^6 + 0.7b^2hL^3m(\alpha) + b^4h^2m(\alpha)^2} \right]$$

$$B_2 = C_2 = 0$$

$$B_3 = C_3 = \operatorname{sen} \left(\frac{4.5b}{L} \right) \left[\frac{-10^{-4}L^2(2L^3 + 6b^2hm(\alpha)) + bhm(\alpha)(1.1L^3 + 3.4b^2hm(\alpha))}{0.1L^3 + 0.7b^2hL^5m(\alpha) + b^4h^2L^2m(\alpha)^2} \right]$$



3.3.1.4. Columna biempotrada

Al estudiar una columna biempotrada se tienen en cuenta las siguientes condiciones de contorno en ambos extremos

Empotramiento superior $x = 0$

$$w(0) = 0$$

$$B_0 = 0$$

$$w'(0) = 0$$

$$B_1 = 0$$

Empotramiento inferior $x = L$

$$w(L) = 0$$

$$C_0 + C_1L + C_2L^2 + C_3L^3 = 0$$

$$w'(L) = 0$$

$$C_1 + 2C_2L + 3C_3L^2 = 0$$

Resolviendo estas expresiones junto con las obtenidas para la posición de la fisura se obtienen las constantes que forman la ecuación polinómica

$$B_0 = 0$$

$$C_0 = \cos\left(\frac{2\pi b}{L}\right) [A_1(-2L) + A_2L^2]$$

$$B_1 = 0$$

$$C_1 = \cos\left(\frac{2\pi b}{L}\right) [3 A_1]$$

$$B_2 = C_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi b}{L}\right) A_2$$

$$B_3 = C_3 = 0$$



donde

$$A_1 = \frac{-5.7bhLm(\alpha) + 2.8hL^2m(\alpha)}{0.08L^4 + b^2hLm(\alpha) - L^2hbm(\alpha) + 0.3hL^3m(\alpha)}$$
$$A_2 = \frac{hm(\alpha)(29.6bL - 19.7L^2 + 29.6bhm(\alpha) - 19.7hLm(\alpha))}{L((L + hm(\alpha))(0.25L^3 + 3b^2hm(\alpha) - 3bhLm(\alpha) + L^2hm(\alpha)))}$$

3.3.1.5. Columna empotrada-apoyo deslizante

Sea una columna empotrada-apoyo deslizante cuyas condiciones de contorno son las que siguen

Apoyo deslizante $x = 0$

$$w'(0) = 0$$

$$B_1 = 0$$

$$L^2w'''(0) + \pi^2w(0) = 0$$

$$B_1\pi^2 + 6B_3L^2 = 0$$

Empotramiento $x = L$

$$w(L) = 0$$

$$C_0 + C_1L + C_2L^2 + C_3L^3 = 0$$

$$w'(L) = 0$$

$$C_1 + 2C_2L + 3C_3L^2 = 0$$

A partir de las ecuaciones obtenidas y junto con las expresiones que definen las condiciones de contorno de la fisura se obtienen las diferentes constantes



$$B_0 = \cos\left(\frac{\pi b}{L}\right) \left[\frac{hm(\alpha)}{L + hm(\alpha)} (4.9 - \pi^2) \right]$$

$$C_0 = \cos\left(\frac{\pi b}{L}\right) \left[-\frac{4.9hm(\alpha)}{L + hm(\alpha)} \right]$$

$$B_1 = 0$$

$$C_1 = \cos\left(\frac{\pi b}{L}\right) \left[-\frac{\pi^2 hm(\alpha)}{L(L + hm(\alpha))} \right]$$

$$B_2 = C_2 = \cos\left(\frac{\pi b}{L}\right) \left[\frac{4.9hm(\alpha)}{L^2(L + hm(\alpha))} \right]$$

$$B_3 = C_3 = 0$$

3.4. Resultados

En el capítulo anterior se calcularon los valores de la carga crítica de pandeo para columnas que no presentan fisuras haciendo uso del planteamiento diferencial y se compararon con los obtenidos por medio del método energético.

En el presente capítulo se han realizado los cálculos, a través de ambos métodos, para obtener diferentes valores de k para los casos presentados en función de la posición de la fisura y el tamaño de la misma, dando, para ello, diferentes valores a estas variables.

3.4.1. Columnas de sección constante

Se utilizarán diversos valores de ξ_c y α , combinándolos entre sí, para analizar los efectos de la fisura de modo que se representará gráficamente la relación entre la carga crítica de pandeo de una columna que presenta una fisura con respecto a la misma sin fisurar $\left(\frac{P_c}{P_o}\right)$ frente a la una constante que se denominará η y que se define como

$$\eta = \frac{h}{L} m(\alpha)$$



Dado que se trata de columnas esbeltas, se tomará una relación entre el ancho de la sección transversal de la columna y su longitud

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{25}$$

Por su parte, los valores de α oscilarán entre $0.1 \leq \alpha \leq 0.7$ y se tomarán valores $\xi_{c_1} = 0.25$, $\xi_{c_2} = 0.5$ y $\xi_{c_3} = 0.75$.

En el caso del planteamiento diferencial, para obtener los resultados a través de la resolución del determinante $[M]$ se hará uso de *MATLAB* debido a la complejidad del cálculo del mismo.

Para obtener los resultados a través del método energético, se ha utilizado *Mathematica* para resolver las integrales partiendo de los desplazamientos obtenidos dando de nuevo valores a las variables anteriores.

En el *Anexo* que se adjunta al final del presente texto se plantea el proceso de cálculo seguido en el caso de una columna biapoyada. Ese mismo código es válido para cualquier columna, únicamente es necesario modificar las condiciones de contorno por las correspondientes para la columna a estudiar.

El programa permite al usuario introducir diferentes valores de α , ξ_c y h/L , obteniendo el factor de pandeo k de manera rápida y sencilla con un error en el resultado mínimo.

A continuación, se estudiarán los efectos de la fisura para cada una de las columnas propuestas comparando los resultados obtenidos con los valores exactos. Asimismo, se compararán las soluciones halladas a través de cada uno de los métodos entre sí.

3.4.1.1. Columna biapoyada

Para el modelo de columna biapoyada propuesto con un valor de $\xi_c = 0.5$ y $\alpha = 0.5$ sustituyendo en la matriz de condiciones de contorno $[M]$ y calculando su determinante, el valor del factor de pandeo obtenido es $k = 2.7674$.

Introduciendo este valor en la carga crítica de pandeo de Euler resulta

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(1.14L)^2}$$

Comparando este resultado con el obtenido para una columna que no presenta imperfecciones en su superficie, se observa que k disminuye un 11.9%, por lo que la carga crítica de pandeo disminuye un 22.4%.

Manteniendo la posición de la fisura $\xi_c = 0.5$ pero modificando su profundidad desde un valor de $\alpha = 0.5$ hasta $\alpha = 0.7$ el factor de pandeo es $k = 2.1256$, es decir, disminuye un 32.3% y la carga crítica lo hace un 54.2%.

Si se modifica la posición de la fisura a $\xi_c = 0.25$ y la profundidad se toma como $\alpha = 0.5$ el valor obtenido del factor de pandeo es $k = 2.9229$ lo que supone una reducción en su valor del 6.9% y del 13.4% en el de la carga crítica.

Realizando los cálculos para el resto de valores los resultados obtenidos son los que se representan en la figura 3.7.

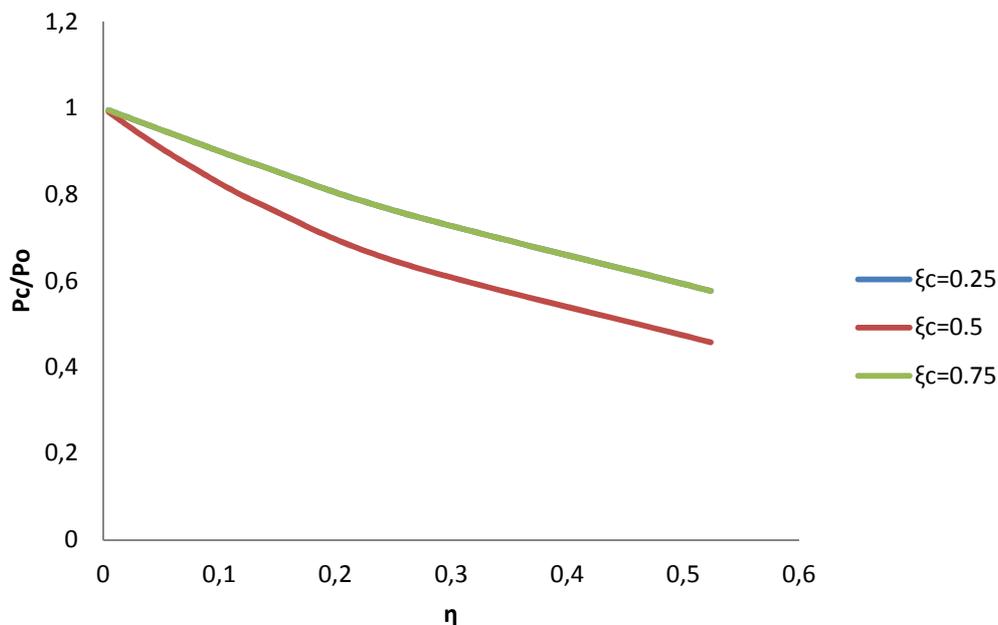


Figura 3.7. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna biapoyada obtenida a través del planteamiento diferencial

Cabe destacar que las curvas para las posiciones de la fisura $\xi_c = 0.25$ y $\xi_c = 0.75$ se superponen. Esto se debe a la ley del momento flector de una columna biapoyada, la cual es simétrica respecto del punto medio de la columna por lo que en ambos puntos dicho momento es el mismo.

El punto de mayor momento flector de la columna es el punto medio. En la gráfica 3.7. se observa que para $\xi_c = 0.5$ los efectos de la presencia de una grieta son mayores que en el resto de puntos de la columna, y que a medida que la profundidad de la fisura α aumenta para



un mismo ancho de la sección transversal de la columna h , la carga crítica de pandeo disminuye en algunos casos más de la mitad con respecto a la columna sin fisurar. Cabe esperar que para valores de α mayores el valor de la carga crítica seguirá disminuyendo.

Por su parte, en las curvas para $\xi_c = 0.25$ y $\xi_c = 0.75$ se observa de nuevo que a mayor ancho de la fisura la carga crítica de pandeo disminuye, pero los efectos son menores que en el punto medio.

Se realizan los cálculos para obtener la carga crítica de pandeo a través del método energético, y se representan los resultados obtenidos en la figura 3.8.

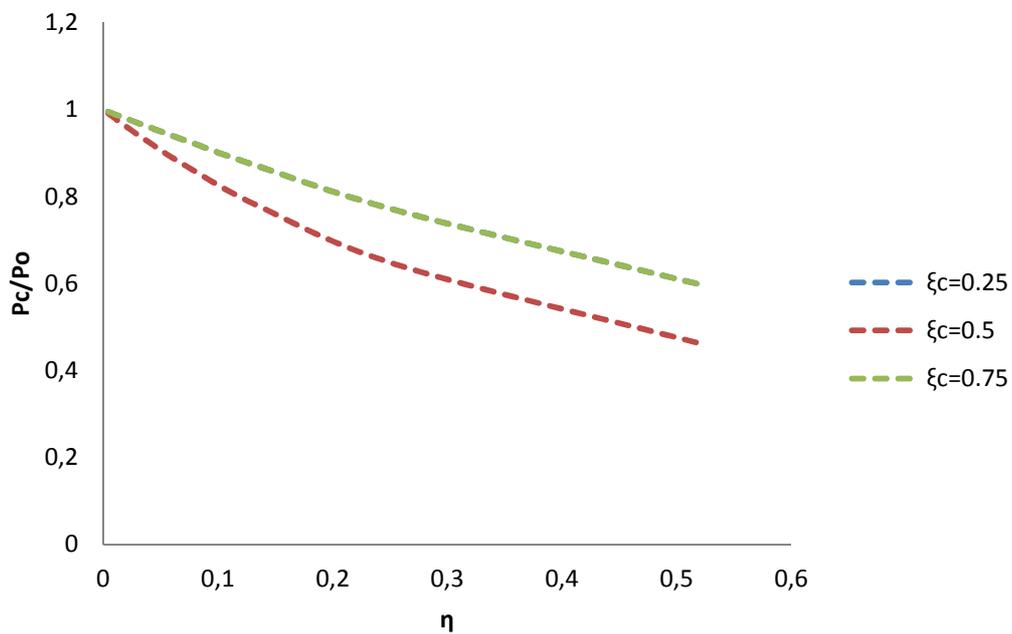


Figura 3.8. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna biapoyada obtenida a través del método energético

Es importante recordar que en la obtención de la carga crítica de pandeo se han propuesto ecuaciones del desplazamiento polinómicas diferente al de la solución exacta, lo cual implica una diferencia en los resultados con respecto a los obtenidos mediante el planteamiento diferencial.

Se observa que los resultados obtenidos para valores pequeños de α , entre 0.1 y 0.5, son muy cercanos a los resultados exactos para cualquier valor de ξ_c . Sin embargo, para valores mayores, en función de la posición de la fisura, los resultados distan en mayor o menor medida.

Así, en el caso de una columna biapoyada se mantiene la relación entre la carga crítica de pandeo y el momento flector, de manera que para puntos de la fisura donde el momento flector es mayor, la carga crítica de pandeo es mayor.

A la vista de los resultados obtenidos se puede afirmar que la tendencia en las curvas es mantener el valor de la carga crítica de pandeo con respecto a los resultados anteriores para pequeños valores de α . Además, los resultados se mantienen cercanos a los resultados exactos cuanto mayor es el momento flector, llegando a aumentar la carga crítica para los valores más altos de α , como se puede observar figura 3.9.

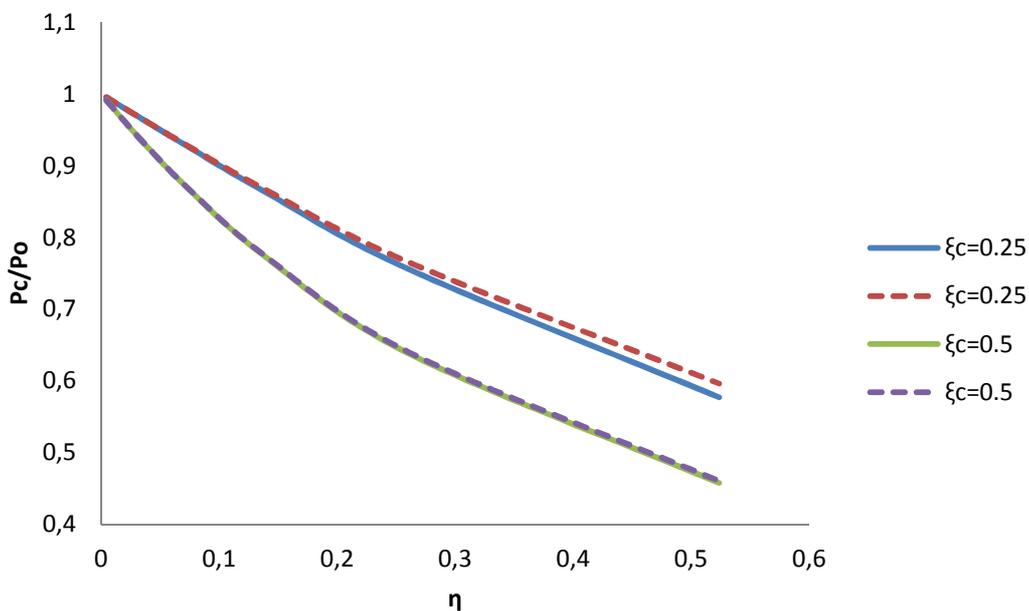


Figura 3.9. Comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos para una columna biapoyada. El trazo continuo corresponde al planteamiento diferencial y el discontinuo al método energético

El valor de la carga crítica de pandeo hallada por medio del método energético es ligeramente superior al obtenido mediante el planteamiento diferencial, distando entre sí para el valor más alto de la profundidad de la grieta $\alpha = 0,7$ en el caso de $\xi_c = 0,25$, en la que el momento flector es menor, un 3,24%.



3.4.1.2. Columna empotrada-libre

En el caso de una columna empotrada-libre sustituyendo en la matriz $[M]$ para un valor de $\xi_c = 0.5$ y $\alpha = 0.5$ el valor del factor de pandeo k es $k = 1.4705$ por lo que la carga crítica de pandeo de Euler queda

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(2.14L)^2}$$

Contrastando los valores hallados con los correspondientes a una columna no fisurada, se observa que k disminuye un 6.3% y carga crítica de pandeo lo hace un 12.4%.

Para esa misma posición de la fisura $\xi_c = 0.5$ pero una profundidad de valor $\alpha = 0.7$ el factor de pandeo es $k = 1.2535$. Esto es, una disminución en su valor del 20.2% y la carga crítica lo hace un 36.3%.

Tomando $\xi_c = 0.25$ y la profundidad como $\alpha = 0.5$ el valor obtenido es $k = 1.5075$ lo que significa una reducción de este valor de un 2.1% , mientras q la carga critica disminuye un 7.9%

Los resultados obtenidos para el resto de valores se muestran en la figura 3.10.

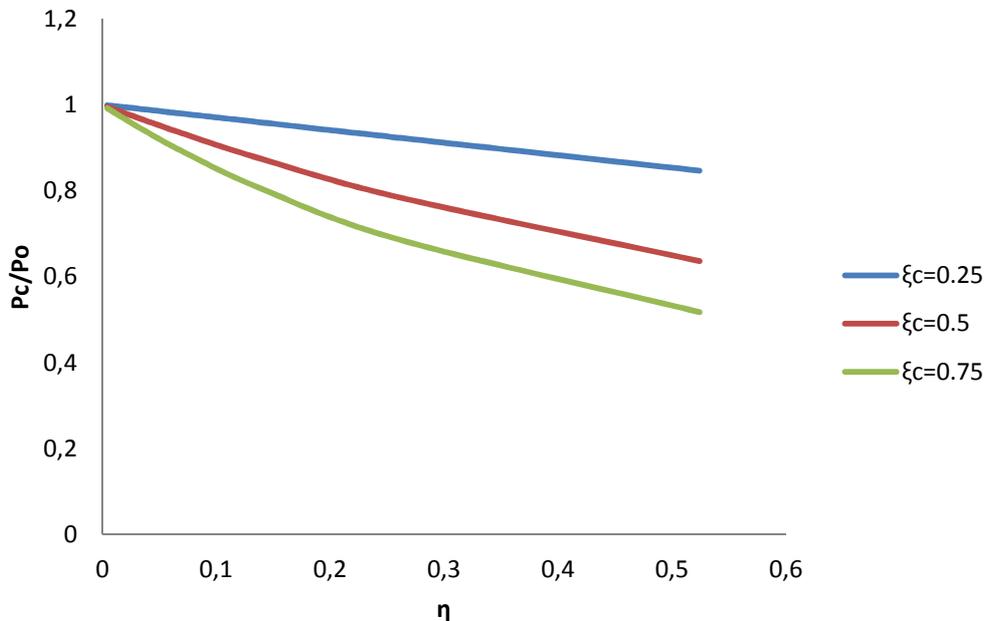


Figura 3.10. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-libre obtenida a través del planteamiento diferencial



De nuevo a medida que el ancho de la fisura a es mayor, la carga crítica de pandeo disminuye su valor para cualquier valor de ξ_c .

Por otro lado, atendiendo a la posición de la fisura a medida que ésta se aleja del extremo libre la carga crítica de pandeo P_c es menor.

De este modo, cabe esperar que la posición donde el cociente P_c sería menor es en el empotramiento ya que el momento flector máximo de la columna se da en dicho punto y, por tanto, los efectos de una fisura hacen disminuir la carga crítica de pandeo hasta su valor mínimo.

Se obtienen estos mismos resultados pero esta vez obtenidos mediante el método energético (véase figura 3.11.).

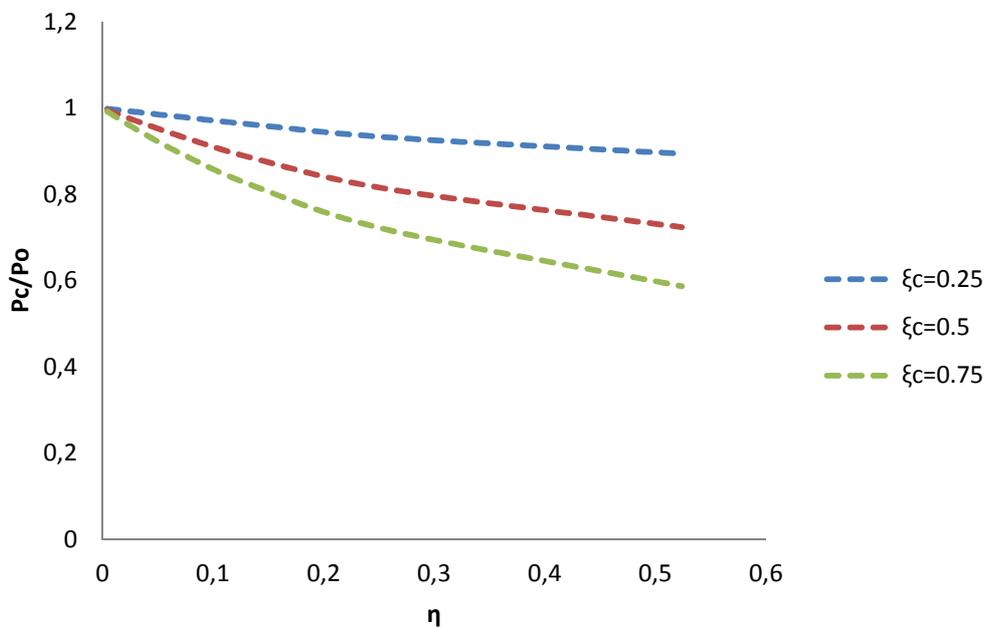


Figura 3.11. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-libre obtenida a través del método energético

Se observa nuevamente la relación entre el momento flector y la carga crítica de pandeo. En el caso del método energético, los resultados obtenidos son ligeramente superiores que en el caso anterior, lo que se explica por el uso de una ecuación del desplazamiento $w(x)$ que a pesar de cumplir con las condiciones de contorno, difiere de la solución exacta al incluir la expresión polinómica.

Estas diferencias entre ambos métodos se observan en la figura 3.12. mostrada a continuación.

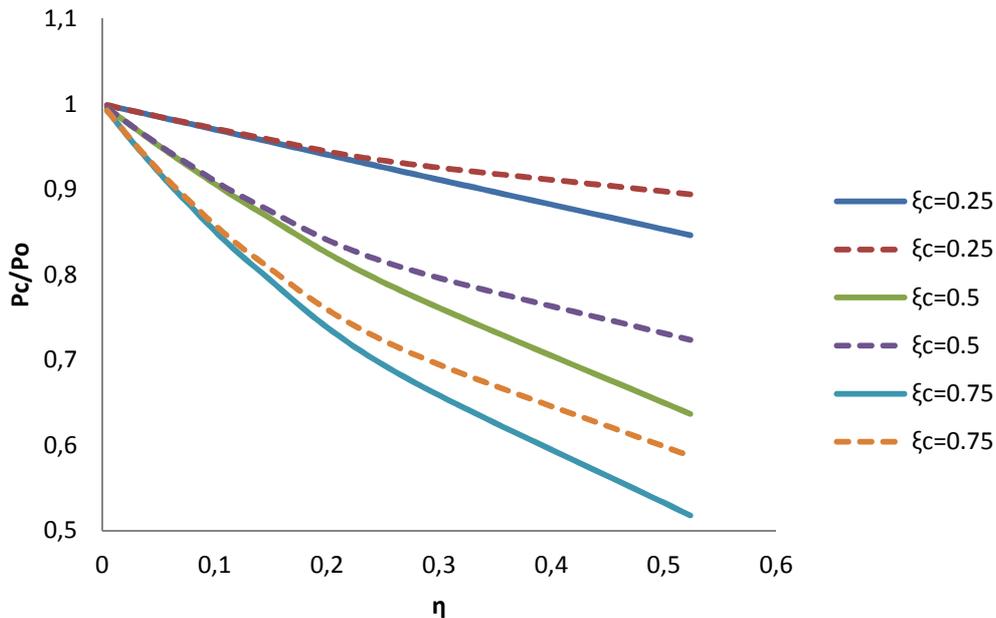


Figura 3.12. Comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos para una columna empotrada-libre. El trazo continuo corresponde al planteamiento diferencial y el discontinuo al método energético

Para valores bajos de α , hasta 0.5, los resultados obtenidos a través de ambos métodos difieren en torno al 0.001%. Es para valores más altos, a partir de la mitad de la columna, cuando la diferencia es visible en mayor grado. En el caso de $\alpha = 0.7$ la diferencia entre ambos métodos puede cuantificarse de tal forma que la carga crítica de pandeo obtenida a través del método energético es un 11.8% superior con respecto a la misma hallada mediante el planteamiento diferencial.

3.4.1.3. Columna empotrada-simplemente apoyada

Sea una columna empotrada-simplemente apoyada para un valor de la posición de la fisura $\xi_c = 0.5$ y una profundidad de la misma de $\alpha = 0.5$ el valor del factor de pandeo es $k = 4.1355$ por lo que la carga crítica de pandeo de Euler queda

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0.76L)^2}$$

Estos valores hallados, en comparación a los de una columna no fisurada, disminuyen un 7.9% en el caso de k y un 15.3% carga crítica de pandeo.



Manteniendo la posición en $\xi_c = 0.5$ y aumentando la una profundidad hasta $\alpha = 0.7$ el factor de pandeo es $k = 3.5053$. Esto supone una disminución en su valor del 21.9%, mientras que la carga crítica disminuye un 39.1%.

Modificando la posición hasta $\xi_c = 0.25$ y suponiendo una profundidad de la grieta de $\alpha = 0.5$ el valor obtenido es $k = 3.9923$ lo que significa una reducción de este valor de un 11.1% , mientras q la carga critica disminuye un 21.1%

En la figura 3.13. se muestran los resultados hallados para una columna empotrada-apoyada.

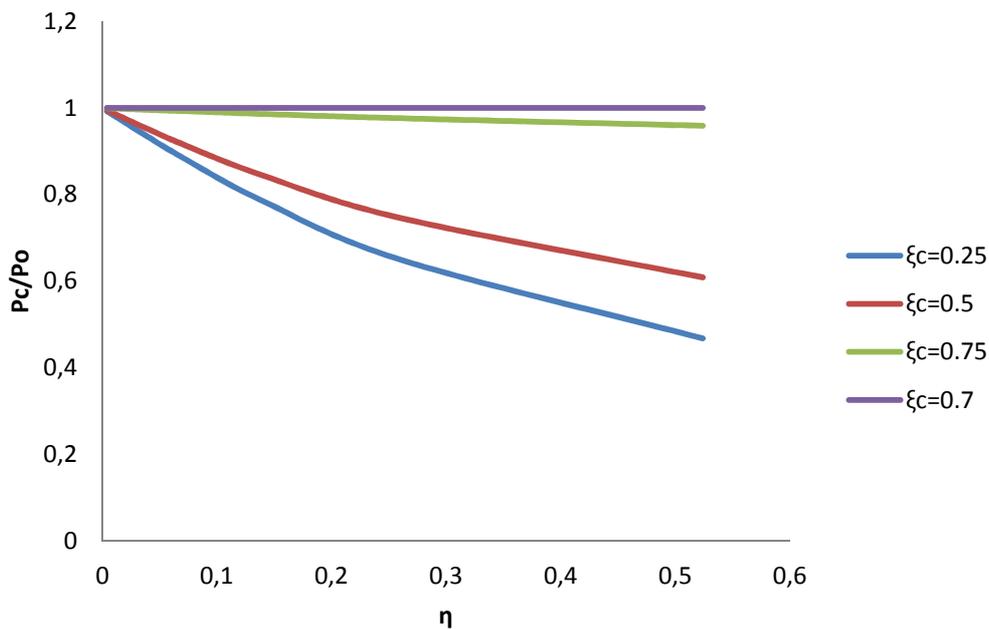


Figura 3.13. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-simplemente apoyada obtenida a través del planteamiento diferencial

Nuevamente, a medida que el ancho de la fisura es mayor la carga crítica de pandeo disminuye. En la gráfica 4.3. se observa para las curvas $\xi_c = 0.25$ y $\xi_c = 0.75$ cómo este hecho afecta en mayor medida cuanto mayor es el momento flector, ya que P_c disminuye en mayor medida para $\xi_c = 0.25$ que para $\xi_c = 0.75$, posición en la cual disminuye menos de un 10% para el mayor ancho de la fisura.

A su vez, para $\xi_c = 0.7$ la carga crítica de pandeo de la columna fisurada P_c tiene el mismo valor que la carga crítica para una columna que no presenta grietas P_0 , como se muestra en la gráfica 4.3. Debido a esto, se puede afirmar que la fisura en dicho punto de la columna, con independencia de su tamaño, tiene efectos sobre P_c son nulos, hecho que tiene lugar porque en $\xi_c = 0.7$ el momento flector de la columna es 0.

Atendiendo a los resultados obtenidos por medio del método energético, la tendencia de los mismos vuelve a ser la misma que en casos anteriores (véase figura 3.14.)

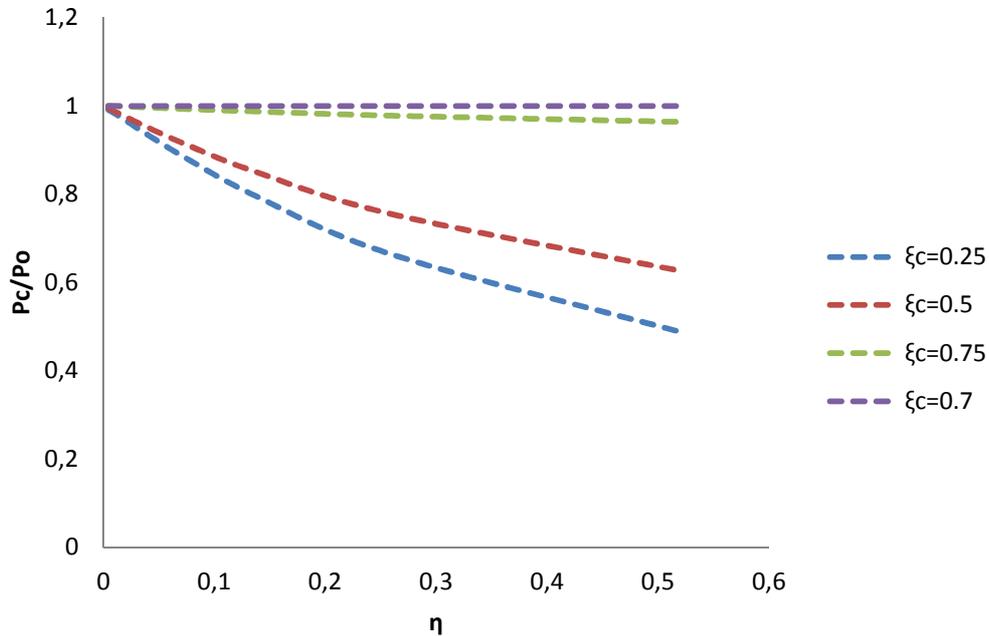


Figura 3.14. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-simplemente apoyada obtenida a través del método energético

Los resultados de la carga crítica obtenidos en las diferentes posiciones son en todos los casos ligeramente superiores a los anteriores, coincidiendo en el caso de $\xi_c = 0,7$ ya que las constantes de la expresión polinómica son nulas $B_i = C_i = 0$, lo que implica que la ecuación del desplazamiento $w(x)$ tiene la forma de la solución exacta. Se comprueba así, mediante el método energético que la presencia de una fisura en puntos donde el momento flector es nulo no afecta a la carga crítica de pandeo de la columna.

En la figura 3.15. se observan las diferencias existentes entre la relación de la carga crítica de pandeo de una columna fisurada con respecto a la misma no fisurada, obtenidas por medio de ambos métodos.

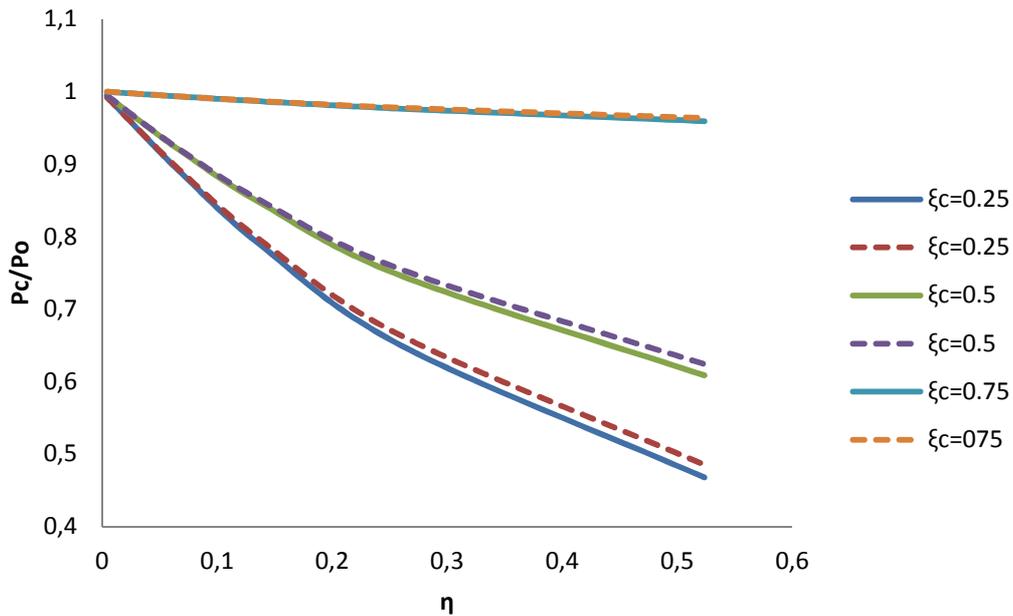


Figura 3.15. Comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos para una columna empotrada-simplente apoyada. El trazo continuo corresponde al planteamiento diferencial y el discontinuo al método energético

En el caso de la columna empotrada-simplente apoyada los resultados del método energético son muy próximos a los exactos. Para valores elevados de la profundidad de la fisura α , como por ejemplo $\alpha = 0.7$, la carga crítica de pandeo hallada mediante el método energético es un 3.6% a la obtenida mediante el planteamiento diferencial para $\xi_c = 0.25$, posición de la fisura en la que la diferencia de la carga crítica entre ambos métodos es mayor.

3.4.1.4. Columna biempotrada

Se tiene una columna biempotrada cuya fisura está situada en $\xi_c = 0.5$ y posee una profundidad $\alpha = 0.5$. El valor del factor de pandeo es $k = 5.5567$ de manera que la carga crítica de pandeo de Euler es

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(0.56L)^2}$$

Comparando los resultados obtenidos, disminuyen un 11.5% en el caso de k y un 21.8% carga crítica de pandeo.

Para la misma posición $\xi_c = 0.5$ y una profundidad que aumenta hasta $\alpha = 0.7$ el factor de pandeo es $k = 4.5402$. Esto supone una disminución en su valor del 27.7%, mientras que la carga crítica disminuye un 47.8%.

Cambiando la posición a $\xi_c = 0.25$ y con una profundidad de la grieta de $\alpha = 0.5$ el valor obtenido es $k = 2\pi$, es decir, el mismo valor que en el caso de la columna no fisurada, por lo que la carga crítica de pandeo también lo será.

Los resultados para una columna biempotrada son los que aparecen en la figura 3.16.

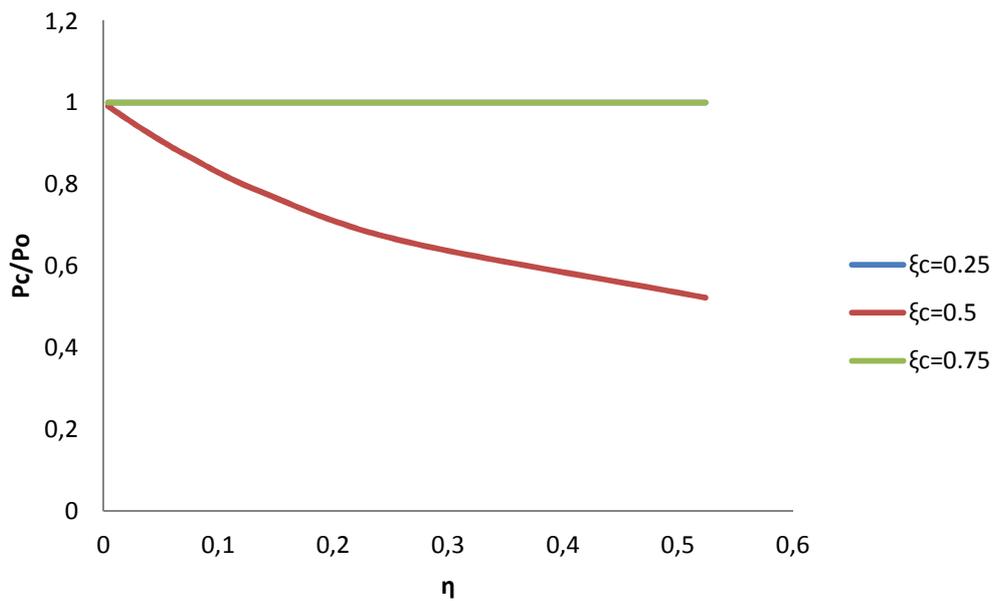


Figura 3.16. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna biempotrada obtenida a través del planteamiento diferencial

De nuevo coinciden dos curvas para las posiciones $\xi_c = 0.25$ y $\xi_c = 0.75$. Esto se debe a la simetría del momento flector. Además, en esos puntos el momento flector es nulo por lo que la presencia de la fisura en esos puntos no provoca efectos sobre la carga crítica de pandeo P_C .

En $\xi_c = 0.5$, el momento flector es máximo, de manera que los efectos de la grieta son mayores cuanto mayor es su profundidad provocando que P_C disminuya casi un 50% con respecto a P_0 .

A continuación, se calcula las carga crítica de pandeo para los valores propuestos de ξ_c y α mediante el método energético (véase figura 3.17.).

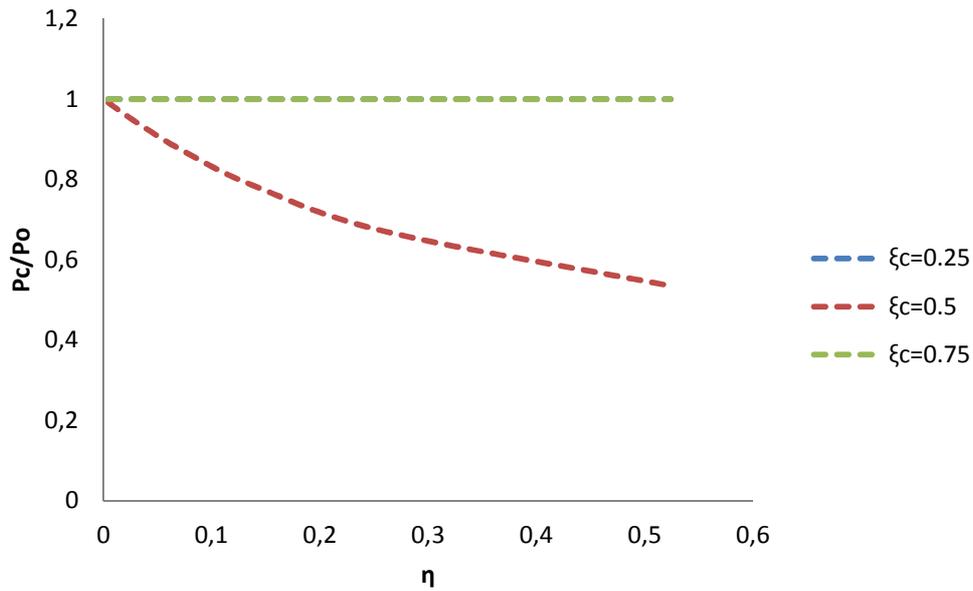


Figura 3.17. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna biempotrada obtenida a través del método energético

De nuevo, para puntos en los que el momento flector es nulo, los efectos de la fisura sobre la carga crítica de pandeo que se calcula por el método energético son nulos, ya que la carga crítica de la columna fisurada y la no fisurada tienen el mismo valor.

Asimismo, en la figura 3.18. se muestran las diferencias obtenidas en los resultados de ambos métodos.

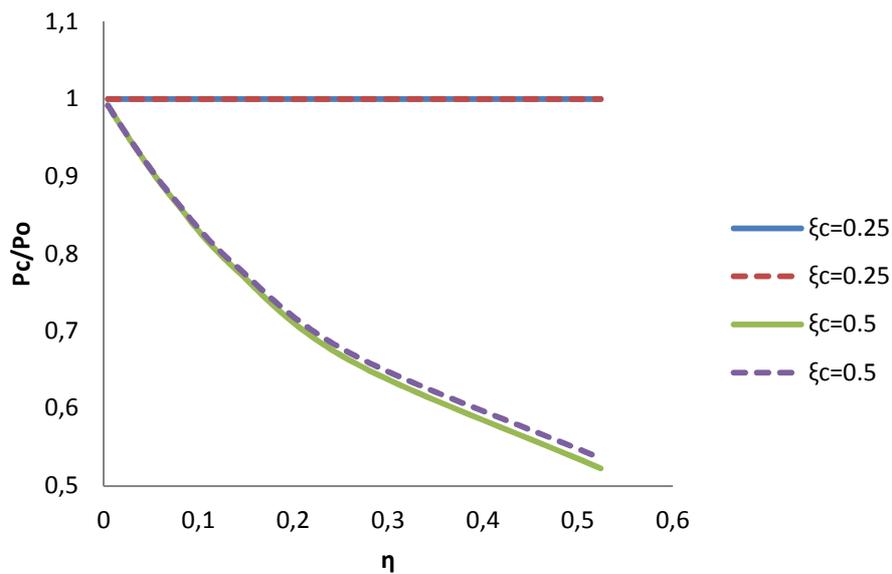


Figura 3.18. Comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos para una columna biempotrada. El trazo continuo corresponde al planteamiento diferencial y el discontinuo al método energético

La diferencia entre las cargas críticas de pandeo obtenidas, en el punto en el que existe una mayor diferencia entre ambos métodos, es decir, $\xi_c = 0.5$, y la profundidad de la fisura es mayor, $\alpha = 0.7$, es de un 2.4%, siendo superior la carga crítica obtenida con el método energético como se observa en la gráfica 4.12.

3.4.1.5. Columna empotrada-apoyo deslizante

Se tiene una columna empotrada en un extremo y un apoyo deslizante en el otro con fisura en $\xi_c = 0.5$ y cuya profundidad es $\alpha = 0.5$. El valor del factor de pandeo es $k = \pi n$ de manera que la carga crítica de pandeo de Euler es

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Si se compara este valor con el de una misma columna que no presenta una fisura ambos coinciden. Este hecho, se puede extender para cualquier valor de la profundidad de la fisura manteniendo esa posición.

Si por el contrario se modifica la posición a $\xi_c = 0.25$ y se toma una profundidad de la grieta de $\alpha = 0.5$ el valor del factor de pandeo es $k = 2.6667$ que disminuye un 15.1%, mientras que la carga crítica de pandeo lo hace en un 27.9%.

Los resultados obtenidos para una columna empotrada-apoyo deslizante se reflejan en la figura 3.19.

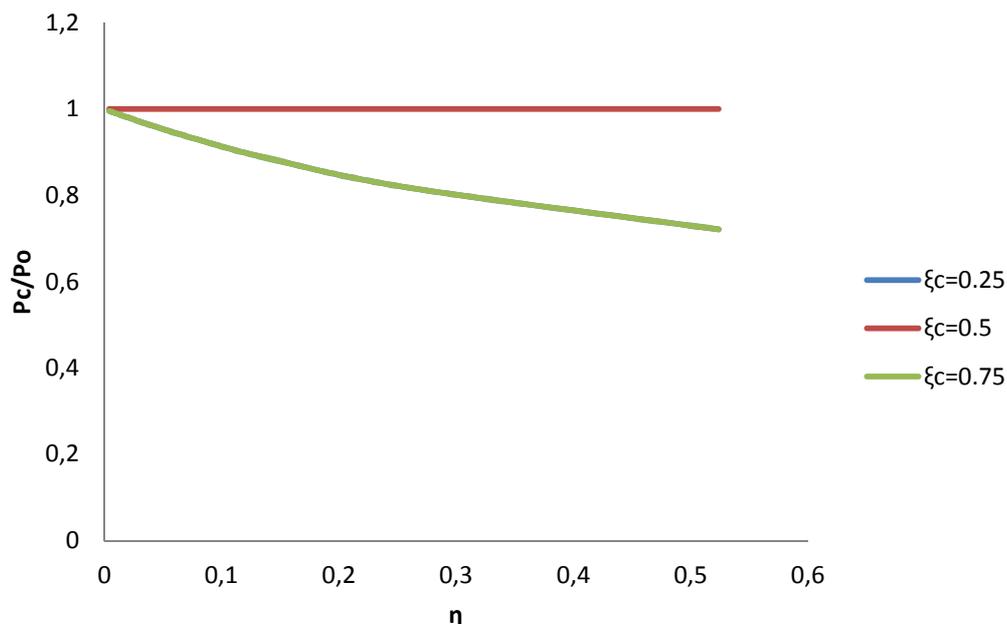


Figura 3.19. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-apoyo deslizante obtenida a través del planteamiento diferencial



Nuevamente, la simetría del momento flector provoca la superposición de las curvas correspondientes a $\xi_c = 0.25$ y $\xi_c = 0.75$.

En este caso, para la posición $\xi_c = 0.5$ el valor del momento flector es nulo, por lo que una grieta en ese punto con independencia de su profundidad no provoca efectos.

En la figura 3.20. que se muestra a continuación, se pueden observar los resultados del método energético para el caso de una columna empotrada-apoyo deslizante.

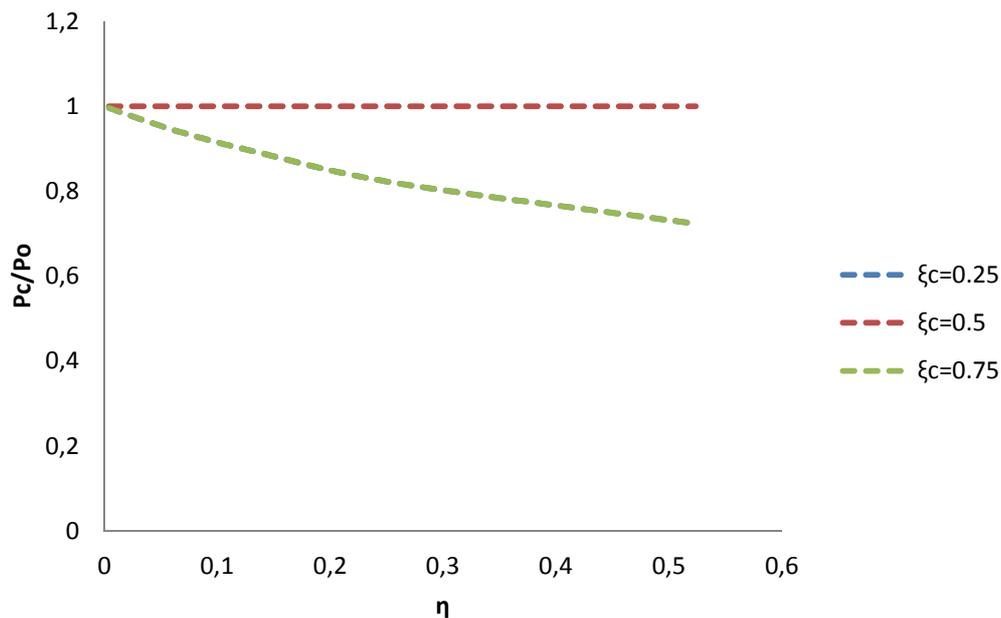


Figura 3.20. Relación entre la carga crítica de pandeo de una columna fisurada y una columna no fisurada frente al parámetro η de una columna empotrada-apoyo deslizante obtenida a través del método energético

Se comprueba de nuevo la validez de los valores de la carga crítica que resultan del método energético, verificando además cuales son aquellos puntos en los que la fisura no produce efectos.

A continuación, se comparan los resultados obtenidos a través de ambos métodos (véase la figura 3.21.).

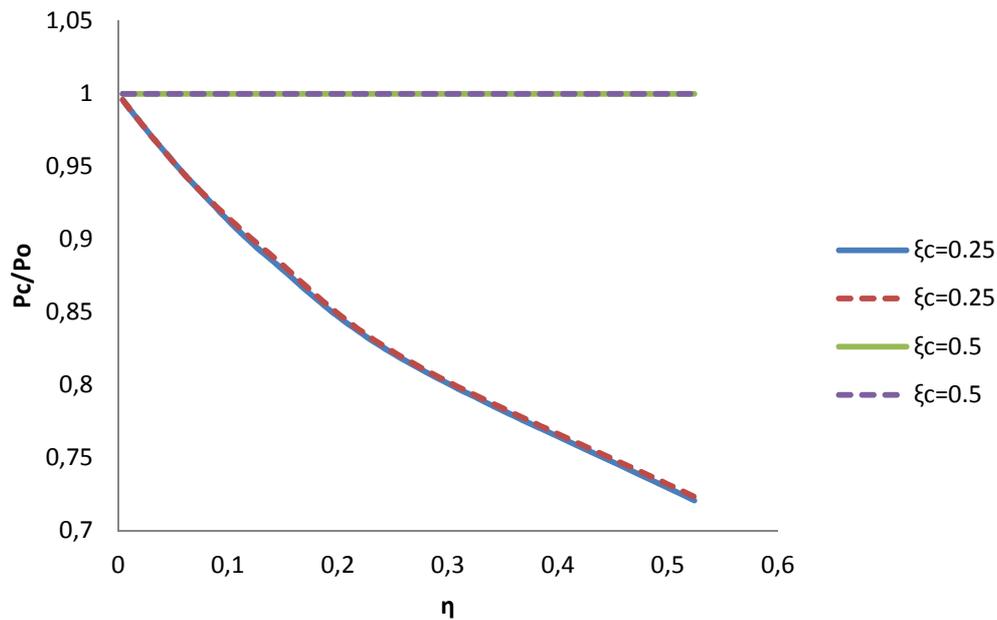


Figura 3.21. Comparación de los resultados obtenidos por ambos métodos para una columna empotrada-apoyo deslizante. El trazo continuo corresponde al planteamiento diferencial y el discontinuo al método energético

Para la curva resultante de la posición $\xi_c = 0,25$, que coincide con la curva de $\xi_c = 0,75$, la carga crítica de pandeo hallada por el método energético es un 0.004% superior a la obtenida por medio del planteamiento diferencial.

3.4.2. Columnas de sección variable

Se quieren comprobar los efectos del cambio de sección sobre una columna fisurada. Se supone una columna biapoyada de sección cuadrada variable como se muestra en la figura 3.22. El motivo del estudio de una columna de sección cuadrada variable en lugar de circular, es la aplicación de la misma expresión de la función de flexibilidad $m(\alpha)$ utilizada en los casos anteriores, ya que es válida únicamente para secciones rectangulares.

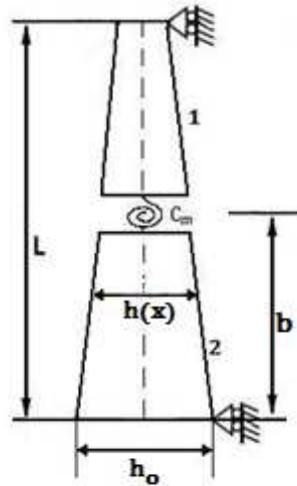


Figura 3.22. Columna de sección variable no fisurada

Dado que existe un cambio de sección, la relación entre el momento de inercia de la columna de sección variable y la misma columna recta dependerá de la posición x y tendrá la siguiente forma.

Se supone una expresión del momento de inercia en función del ancho de la sección de la columna h_o

$$I(x) = \frac{1}{12} h^4$$

donde

$$h(x) = h_o \left(1 - \frac{x}{2L}\right)$$

Sabiendo que el momento de inercia de una columna cuadrada es

$$I_o = \frac{1}{12} h_o^4$$

Se sustituyen ambas expresiones para obtener $\bar{I}(x)$

$$\bar{I}(x) = \left(1 - \frac{x}{2L}\right)^4$$



Incluyendo este término en la ecuación que permite obtener el factor de pandeo, y por consiguiente, la carga crítica de pandeo queda de la siguiente manera

$$k^2 = \frac{\int_0^b \bar{I}(x) \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \int_b^L \bar{I}(x) \left(\frac{d^2w(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \bar{I}(b)hm(\alpha)w''(b)^2}{\int_0^b \left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 dx + \int_b^L \left(\frac{dw(x)}{dx}\right)^2 dx}$$

Utilizando la expresión del desplazamiento que es la suma del desplazamiento de la misma mas una expresión polinómica de cuarto grado los resultados obtenidos tomando un valor de $\xi_c = 0.5$ y $\alpha = 0.5$ se muestran en la tabla 3.1.

	Biapoyada	Empotrada-libre	Empotrada-simplemente apoyada	Biempotrada	Empotrada-apoyo deslizante
k_{CR}	1.6102	0.5888	2.4162	3.5299	2.0621
P_{CR}	$\frac{\pi^2 EI}{(1.7L)^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(4.4L)^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(1.14L)^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(0.79L)^2}$	$\frac{\pi^2 EI}{(1.52L)^2}$

Tabla 3.1. Valores de k_{CR} y P_{CR} para columnas fisuradas de sección variable



4. Conclusiones y trabajos futuros

4.1. Conclusiones

El presente trabajo plantea dos métodos diferentes para obtener la carga crítica de pandeo tanto en columnas no fisuradas y como en fisuradas, éstas últimas en función del tamaño y posición de la grieta.

El primer método utilizado, recurre al planteamiento diferencial partiendo de una solución general para todos los casos, que permitirá obtener el valor exacto de la carga crítica aplicando las diferentes condiciones de contorno. El segundo de ellos, el método energético, se basa en el balance entre la energía de deformación y el trabajo realizado por la fuerza de compresión. Para definir ambos términos se requiere del uso de una expresión del desplazamiento que cumpla al menos las condiciones de contorno geométricas.

En ambos casos, se deben considerar columnas esbeltas, de directriz recta y fabricadas con un material elástico y lineal. Además, los desplazamientos que sufre la columna deben ser pequeños.

Las conclusiones que se obtienen son:

- El valor de la carga crítica de pandeo depende del material del que esté fabricada la columna y su comportamiento frente a cargas de compresión. Así cuanto mayor sea el módulo de elasticidad E del material, mayor será la carga crítica de pandeo.
- La carga crítica de pandeo es directamente proporcional al módulo de rigidez a flexión EI . Así pues, se mejorará la resistencia al pandeo utilizando columnas que opongan gran resistencia a la flexión, es decir, que tengan módulos de rigidez a la flexión elevados.
- Una columna pandeará en el plano que presente menor rigidez a la flexión, es decir, aquel respecto del cual EI sea mínimo.
- La carga crítica es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la columna L^2 . De este modo, cuanto mayor sea la longitud de una columna, es más probable que se alcance la carga crítica y se produzca fallo por pandeo.



Para estudiar los efectos de una grieta se ha realizado una modelización de la columna fisurada que supone la presencia de un muelle torsional en la posición de la misma, el cual implica una continuidad en el desplazamiento, el esfuerzo cortante y el momento flector, a la vez que permite un giro relativo entre los dos tramos en los que se divide la columna.

Los resultados obtenidos a partir del planteamiento diferencial permiten afirmar que:

- Los efectos de una fisura sobre la carga crítica de pandeo dependen de su profundidad α y posición ξ_c , siendo éstos en cualquier caso más evidentes cuando aumenta el valor de α .
- A partir de las variables que influyen sobre la carga crítica de pandeo, se puede definir un parámetro adimensional η que depende de la profundidad de la fisura, el ancho de la sección de la columna y su longitud y se define de la siguiente manera:

$$\eta = \frac{h}{L} m(\alpha)$$

Este parámetro se refleja en la constante de rigidez del muelle rotacional con el que se modeliza la fisura, y por tanto, en la discontinuidad en el giro entre los tramos en los que se divide la columna.

- El valor de la carga crítica de pandeo está relacionado con el momento flector de la columna en la posición de la fisura ξ_c , de manera que cuanto mayor sea el momento flector menor es el valor de la carga crítica en dicho punto.
- Si existe una fisura en un punto en el cual el momento flector es nulo, no se producirán efectos de la misma sobre la carga crítica de pandeo, es decir, su valor no se verá alterado.

Las conclusiones que se pueden extraer del método energético, además de las ya mencionadas para el planteamiento diferencial que son aplicables a éste, son:

- Se trata de un método de cálculo aproximado, por lo que, dependerá de la expresión del desplazamiento empleada la mayor o menor exactitud de los resultados.
- Se ha comprobado que utilizando las expresiones exactas del desplazamiento que se extraen del planteamiento diferencial, los resultados coinciden en ambos casos, mientras que expresiones diferentes suponen variaciones en la carga crítica de pandeo.
- Para la expresión del desplazamiento propuesta

$$w(x) = w_{sf}(x) + B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3$$



la cual se verifica que cumple las condiciones de contorno, los resultados obtenidos son muy próximos a los exactos habiéndose comparado ambos, siendo la carga crítica de pandeo ligeramente superior en todos los casos. Se ha comprobado que estos valores se alejan de los exactos a medida que aumenta el valor de la profundidad de la fisura α , mientras que para valores bajos de esta variable se pueden considerar prácticamente exactos ya que los valores difieren menos de un 0.01%.

4.2. Trabajos futuros

Como continuación a este trabajo se podría realizar un estudio de la carga crítica de pandeo de columnas que presenten varias fisuras, estudiando sus efectos en función de su posición y tamaño. También, se podrían considerar diferentes geometrías para la sección de la columna, incluyendo cambios en la misma, utilizando el método energético.

Además, se podría considerar el efecto del esfuerzo cortante en el comportamiento de la columna frente al fenómeno de pandeo, siguiendo el modelo de columna planteado por Timoshenko.



5. Referencias

- [1] GEORGE J. SIMITSES and DEWEY H. HODGES. (2006) *Fundamentals of Structural Stability*, Butterworth-Heinemann.
- [2] *MATLAB Programming Fundamentals*. (2010) The MathWorks, Inc.
- [3] M. ARIF GÜREL and M. KISA (2004). "Buckling of slender prismatic columns with a single edge crack under concentric vertical loads", *Turkish J. Eng. Env. Sci* 29, 185-193.
- [4] J. A. LOYA, G. VADILLO and J. FERNÁNDEZ-SÁEZ (2010), "First-order solutions for the buckling loads of Euler-Bernoulli weakened columns", *Journal of Engineering Mechanics* 136, 674-679.
- [5] J. FERNÁNDEZ-SÁEZ, L. RUBIO and C. NAVARRO (1999), "Approximate calculation of the fundamental frequency for bending vibrations of cracked beams", *Journal of Sounds and Vibration* 225, 345-352.
- [6] *Mathematica: Mathematics And Algorithms*. (2008) Wolfram Mathematica.



Anexos

A continuación, se detallan los códigos utilizados en el cálculo de la carga crítica de pandeo de una columna fisurada, para el caso concreto de una columna biapoyada.

En el anexo A, se muestra el código utilizado en MATLAB para realizar obtener la carga crítica por medio del planteamiento diferencial.

En el anexo B, se adjunta el código utilizado en Mathematica para desarrollar el proceso de cálculo de la carga crítica a través del método energético

A. Código desarrollado en *MATLAB*

```
clear all

alfa=0.5;

malfa=2*((alfa/(1-alfa))^2)*(5.93-19.69*alfa+37.14*(alfa^2)-
35.84*(alfa^3)+13.12*(alfa^4));

sc=0.5;
hL=0.04;

k=0.1;
k0=0.1;
prod=1;
inc=0.1;

while (prod>0)

    M=[0 1 0 1 0 0 0 0;
        0 -k^2 0 0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 sin(k) cos(k) 1 1;
        0 0 0 0 -k^2*sin(k) -k^2*cos(k) 0 0;
        sin(k*sc) cos(k*sc) sc 1 -sin(k*sc) -cos(k*sc) -sc -1;
```



```
-(k^2*sin(k*sc))      -(k^2*cos(k*sc))      0      0      k^2*sin(k*sc)
k^2*cos(k*sc) 0 0;
0 0 k^2 0 0 0 -k^2 0;
-(k*cos(k*sc))+((hL)*malfa)*k^2*sin(k*sc)
(k*sin(k*sc))+((hL)*malfa)*k^2*cos(k*sc)      -1      0      k*cos(k*sc)      -
(k*sin(k*sc)) 1 0];

detM=det(M);

M0=[0 1 0 1 0 0 0 0;
0 -k0^2 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 sin(k0) cos(k0) 1 1;
0 0 0 0 -k0^2*sin(k0) -k0^2*cos(k0) 0 0;
sin(k0*sc) cos(k0*sc) sc 1 -sin(k0*sc) -cos(k0*sc) -sc -1;
-(k0^2*sin(k0*sc)) -(k0^2*cos(k0*sc)) 0 0 k0^2*sin(k0*sc)
k0^2*cos(k0*sc) 0 0;
0 0 k0^2 0 0 0 -k0^2 0;
-(k0*cos(k0*sc))+((hL)*malfa)*k0^2*sin(k0*sc)
(k0*sin(k0*sc))+((hL)*malfa)*k0^2*cos(k0*sc)      -1      0      k0*cos(k0*sc)      -
(k0*sin(k0*sc)) 1 0];

detM0=det(M0);

k0=k;
k=k+inc;

prod=detM*detM0;

c=detM;
d=detM0;

end

k=k0-inc;

a=k0;
b=k;

n=0;
m=0;
mm=0;
g=1;

while (g>(0.0001))

M=[0 1 0 1 0 0 0 0;
0 -k^2 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 sin(k) cos(k) 1 1;
0 0 0 0 -k^2*sin(k) -k^2*cos(k) 0 0;
sin(k*sc) cos(k*sc) sc 1 -sin(k*sc) -cos(k*sc) -sc -1;
-(k^2*sin(k*sc)) -(k^2*cos(k*sc)) 0 0 k^2*sin(k*sc)
k^2*cos(k*sc) 0 0;
0 0 k^2 0 0 0 -k^2 0;
```



```
-(k*cos(k*sc))+((hL)*malfa)*k^2*sin(k*sc)
(k*sin(k*sc))+((hL)*malfa)*k^2*cos(k*sc)   -1   0   k*cos(k*sc)   -
(k*sin(k*sc)) 1 0];

detM=det(M);

M0=[0 1 0 1 0 0 0 0;
    0 -k0^2 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 sin(k0) cos(k0) 1 1;
    0 0 0 0 -k0^2*sin(k0) -k0^2*cos(k0) 0 0;
    sin(k0*sc) cos(k0*sc) sc 1 -sin(k0*sc) -cos(k0*sc) -sc -1;
    -(k0^2*sin(k0*sc)) -(k0^2*cos(k0*sc)) 0 0 k0^2*sin(k0*sc)
k0^2*cos(k0*sc) 0 0;
    0 0 k0^2 0 0 0 -k0^2 0;
    -(k0*cos(k0*sc))+((hL)*malfa)*k0^2*sin(k0*sc)
(k0*sin(k0*sc))+((hL)*malfa)*k0^2*cos(k0*sc)   -1   0   k0*cos(k0*sc)   -
(k0*sin(k0*sc)) 1 0];

detM0=det(M0);

k1=k-(detM*((k0-k)/(detM0-detM)));

M1=[0 1 0 1 0 0 0 0;
    0 -k1^2 0 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 sin(k1) cos(k1) 1 1;
    0 0 0 0 -k1^2*sin(k1) -k1^2*cos(k1) 0 0;
    sin(k1*sc) cos(k1*sc) sc 1 -sin(k1*sc) -cos(k1*sc) -sc -1;
    -(k1^2*sin(k1*sc)) -(k1^2*cos(k1*sc)) 0 0 k1^2*sin(k1*sc)
k1^2*cos(k1*sc) 0 0;
    0 0 k1^2 0 0 0 -k1^2 0;
    -(k1*cos(k1*sc))+((hL)*malfa)*k1^2*sin(k1*sc)
(k1*sin(k1*sc))+((hL)*malfa)*k1^2*cos(k1*sc)   -1   0   k1*cos(k1*sc)   -
(k1*sin(k1*sc)) 1 0];

detM1=det(M1);

kf=k1;
g=detM1;

prod0=detM1*detM0;
prod=detM1*detM;

if (prod0<0)

    k=k1;
    k0=k0;

elseif (prod<0)

    k0=k1;
    k=k;

end

end
```



B. Código desarrollado en *Mathematica*

$$w1[x_] = \left(\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{L}\right] \right) + B0 + B1 * x + B2 * x^2 + B3 * x^3$$

$$B0 + B1 x + B2 x^2 + B3 x^3 + \text{Sin}\left[\frac{\pi x}{L}\right]$$

$$w2[x_] = \left(\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{L}\right] \right) + C0 + C1 * x + C2 * x^2 + C3 * x^3$$

$$C0 + C1 x + C2 x^2 + C3 x^3 + \text{Sin}\left[\frac{\pi x}{L}\right]$$

$$dw1[x_] = \partial_x w1[x]$$

$$B1 + 2 B2 x + 3 B3 x^2 + \frac{\pi \text{Cos}\left[\frac{\pi x}{L}\right]}{L}$$

$$ddw1[x_] = \partial_x dw1[x]$$

$$2 B2 + 6 B3 x - \frac{\pi^2 \text{Sin}\left[\frac{\pi x}{L}\right]}{L^2}$$

$$dddw1[x_] = \partial_x ddw1[x]$$

$$6 B3 - \frac{\pi^3 \text{Cos}\left[\frac{\pi x}{L}\right]}{L^3}$$

$$dw2[x_] = \partial_x w2[x]$$

$$C1 + 2 C2 x + 3 C3 x^2 + \frac{\pi \text{Cos}\left[\frac{\pi x}{L}\right]}{L}$$

$$ddw2[x_] = \partial_x dw2[x]$$

$$2 C2 + 6 C3 x - \frac{\pi^2 \text{Sin}\left[\frac{\pi x}{L}\right]}{L^2}$$

$$dddw2[x_] = \partial_x ddw2[x]$$

$$6 C3 - \frac{\pi^3 \text{Cos}\left[\frac{\pi x}{L}\right]}{L^3}$$

Solve[{w1[b] == w2[b], ddw1[b] == ddw2[b], dddw1[b] == dddw2[b], dw2[b] - dw1[b] == h * m * ddw2[b], w1[0] == 0., ddw1[0] == 0., w2[L] == 0., ddw2[L] == 0.}, {B0, B1, B2, B3, C0, C1, C2, C3}]

$$\left\{ \left\{ B1 \rightarrow 0. + \frac{0.}{b} + 0. b - \frac{1. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) b^2}{0. b + 144. L} + 1. b^2 \left(0. + \frac{0.}{0. b + 144. L} + \frac{0. b}{0. b + 144. L} \right) - 1. b \left(0. - \frac{3. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) L}{0. b + 144. L} \right) - 1. \left(\frac{0. b^2}{0. b + 1. L} + \frac{2. b^3 \left(0. + \frac{0.}{0. b + 144. L} + \frac{0. b}{0. b + 144. L} \right)}{0. b + 1. L} \right) - \frac{1. \left(0. - \frac{3. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) L}{0. b + 144. L} \right) (1. L^2 + 1. (-1. b^2 + b (2. b - 2. h m))}{0. b + 1. L} - \frac{1. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) (1. L^3 + 1. (-1. b^3 + b (3. b^2 - 6. b h m))}{(0. b + 1. L) (0. b + 144. L)} + \frac{0. + 1. \left(0. + 1. \left(0. + \frac{9.8696 b h m \text{Sin}\left[\frac{3.14159 b}{L}\right]}{L^2} \right) \right)}{0. b + 1. L} \right) \right\} \right\} - \frac{1}{b} 1. \left(0. - \frac{1. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) L^3}{0. b + 144. L} - 1. L^2 \left(0. - \frac{3. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) L}{0. b + 144. L} \right) - \right.$$



$$\begin{aligned}
 & 1. L \left(\frac{0. b^2}{0. b + 1. L} + \frac{2. b^3 \left(0. + \frac{0.}{0. b + 144. L} + \frac{0. b}{0. b + 144. L} \right)}{0. b + 1. L} - \right. \\
 & \frac{1. \left(0. - \frac{3. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) L}{0. b + 144. L} \right) (1. L^2 + 1. (-1. b^2 + b (2. b - 2. h m)))}{0. b + 1. L} - \\
 & \frac{1. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) (1. L^3 + 1. (-1. b^3 + b (3. b^2 - 6. b h m)))}{(0. b + 1. L) (0. b + 144. L)} + \\
 & \left. \frac{0. + 1. \left(0. + 1. \left(0. + \frac{9.8696 b h m \sin\left[\frac{3.14159 b}{L}\right]}{L^2} \right) \right) \right)}{0. b + 1. L} \right), B0 \rightarrow 0., \\
 C0 \rightarrow 0. + \frac{1. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) L^3}{0. b + 144. L} + 1. L^2 \left(0. - \frac{3. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) L}{0. b + 144. L} \right) + \\
 & 1. L \left(\frac{0. b^2}{0. b + 1. L} + \frac{2. b^3 \left(0. + \frac{0.}{0. b + 144. L} + \frac{0. b}{0. b + 144. L} \right)}{0. b + 1. L} - \right. \\
 & \frac{1. \left(0. - \frac{3. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) L}{0. b + 144. L} \right) (1. L^2 + 1. (-1. b^2 + b (2. b - 2. h m)))}{0. b + 1. L} - \\
 & \frac{1. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) (1. L^3 + 1. (-1. b^3 + b (3. b^2 - 6. b h m)))}{(0. b + 1. L) (0. b + 144. L)} + \\
 & \left. \frac{0. + 1. \left(0. + 1. \left(0. + \frac{9.8696 b h m \sin\left[\frac{3.14159 b}{L}\right]}{L^2} \right) \right) \right)}{0. b + 1. L} \right), \\
 C1 \rightarrow \frac{0. b^2}{0. b + 1. L} - \frac{2. b^3 \left(0. + \frac{0.}{0. b + 144. L} + \frac{0. b}{0. b + 144. L} \right)}{0. b + 1. L} + \\
 & \frac{1. \left(0. - \frac{3. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) L}{0. b + 144. L} \right) (1. L^2 + 1. (-1. b^2 + b (2. b - 2. h m)))}{0. b + 1. L} + \\
 & \frac{1. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) (1. L^3 + 1. (-1. b^3 + b (3. b^2 - 6. b h m)))}{(0. b + 1. L) (0. b + 144. L)} - \\
 & \frac{1. \left(0. + 1. \left(0. + 1. \left(0. + \frac{9.8696 b h m \sin\left[\frac{3.14159 b}{L}\right]}{L^2} \right) \right) \right)}{0. b + 1. L}, \\
 B3 \rightarrow 0. + \frac{0.}{0. b + 144. L} + \frac{0. b}{0. b + 144. L}, \\
 B2 \rightarrow 0., \\
 C2 \rightarrow 0. + \frac{3. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b))) L}{0. b + 144. L}, \\
 C3 \rightarrow \frac{1. (0. + 2. (0. + 2. (0. + 0. b)))}{0. b + 144. L} \} \}
 \end{aligned}$$

FullSimplify [%]

$$\left\{ \left\{ B1 \rightarrow \frac{h (-9.8696 b + 9.8696 L) m \sin\left[\frac{3.14159 b}{L}\right]}{L^3}, B0 \rightarrow 0., C0 \rightarrow \frac{9.8696 b h m \sin\left[\frac{3.14159 b}{L}\right]}{L^2}, \right. \right. \\
 \left. \left. C1 \rightarrow -\frac{9.8696 b h m \sin\left[\frac{3.14159 b}{L}\right]}{L^3}, B3 \rightarrow 0. + \frac{0. + 0. b}{L}, B2 \rightarrow 0., C2 \rightarrow 0. + 0. b, C3 \rightarrow \frac{0. + 0. b}{L} \right\} \right\}$$