



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

---

APROXIMACIONES SIMULTÁNEAS E  
IRRACIONALIDAD DE LOS VALORES  
DE LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

---

**Autor:** Anier Soria Lorente

**Director:** Jorge Arvesú Carballo

12 de noviembre de 2012

Leganés, Madrid





UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

---

APROXIMACIONES SIMULTÁNEAS E  
IRRACIONALIDAD DE LOS VALORES  
DE LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

---

MEMORIA PRESENTADA POR D. ANIER SORIA LORENTE PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS POR EL PROGRAMA DE INGENIERÍA MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID.

REALIZADA BAJO LA DIRECCIÓN DEL DR. D. JORGE ARVESÚ CARBALLO, PROFESOR TITULAR DEL DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID.

LEGANÉS, 12 DE NOVIEMBRE DE 2012.



TESIS DOCTORAL

APROXIMACIONES SIMULTÁNEAS E IRRACIONALIDAD  
DE LOS VALORES  
DE LA FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN

**Autor:** Anier Soria Lorente

**Director:** Jorge Arvesú Carballo

Firma del Tribunal Calificador:

Firma

**Presidente:** Dr. \_\_\_\_\_

**Vocal:** Dr. \_\_\_\_\_

**Vocal:** Dr. \_\_\_\_\_

**Vocal:** Dr. \_\_\_\_\_

**Secretario:** Dr. \_\_\_\_\_

**Calificación:**

Leganés, 12 de noviembre de 2012



*A Dios, por su amor y su bondad, a mi hermano Jorge Enrique Mesías, a mi abuelo Bernardo Lorente Reyes, a mis padres, Ramona Lorente Castro y Evelio Soria Gálvez, a mi abuela y madre Orfelina Castro Ramírez, a mi familia y en particular a mi esposa Damayanis Rodríguez Díaz y a mi hijo que está por nacer.*





## Agradecimientos

Deseo en primer lugar, expresar mi más sincero agradecimiento a mi director de tesis Jorge Arvesú Carballo, quien a pesar de otras muchas ocupaciones se comprometió y trabajó intensamente para alcanzar los resultados obtenidos en esta memoria y quien desde el principio aceptó, sin condiciones, la difícil tarea de guiarme a lo largo de todo el arduo proceso. Mi total agradecimiento por su apoyo, por valorar mi esfuerzo y animarme en todo momento, aún en los más difíciles, por el tiempo que con paciencia y cariño, me dedicó en estos últimos años.

Por nada puedo dejar de agradecer, al profesor Francisco Marcellán Español, quién me apoyó, animó y dedicó su escaso tiempo a la corrección de esta tesis, brindándome excelentes sugerencias. Mis agradecimientos a cada uno de los profesores del departamento de matemáticas de la universidad Carlos III de Madrid, por la formación que gracias a ellos he alcanzado en mi carrera doctoral.

Desde el punto vista personal, el primer agradecimiento va dedicado a Dios, luego a cada miembro de mi familia, en especial, a tío Bruny y a tía Yake, quiénes me han apoyado en todo momento, su amor y cariño no me han faltado. A mis padres, Ramona y Evelio, gracias por haberme engendrado y gracias por su preciado amor y cariño que siempre me han acompañado. Mi especial agradecimiento a mami china, a mis hermanos, Yampavel, Jorgito, Evelito y Brunito, a mis hermanas, Ariannis e Idelsis, a mi otra madre, Ideliza, también a Sara, a mis tías, Margaret, Mariné, Letis, Yella, Mairela y Yoenia, a mis abuelos, Evelio y Celeste, a mi querida abuela fefa, a mis tíos, Daniel, Fernando, Héctor, Nene, José, Jorgito y Acosta, a mis primos, Alejandro y a su esposa Barbarita, a José Carlos, Ernesto, Marquito, Edy, Yuli, a mis primas Rosita, Layde, Kirenia, Dianna, Natalia, Yipsi, Ariannis y a su esposo Yadiel, a mi padrastro Julio. Deseo agradecer de manera muy especial a mis padres, Ninfa Botello y Manuel Mesías. No podría olvidar de mencionar a mi esposa Damayanis Rodríguez Díaz.

También, quiero agradecer a mis amigos y hermanos, Maikel Salcedo, Raúl Antúnez, Yunieski, Alden, Rubén, Yisel Yero, Orlando, Juan Miguel, Parra, Daimara, Abran, Yadiel Oliveros, Yuniel Matos, Carlitos, Andys, Jorge Leyva, Yoandro, Pavel, Sergio, Yosvel, Yasnay, Abel Cruz, Yamilka, Adrian, Jean-Marie Vilaire, Cacoq Junot y Junior Michel.

Si he olvidado mencionar a alguien y tal persona no sabe si se encuentra entre las que debo agradecer, que me perdone en primer lugar y que tenga por seguro que estoy completamente agradecido.

*Anier Soria Lorente*  
*Leganés, 12 de noviembre de 2012*



*Los encantos de esta ciencia  
sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella.  
Carl Friedrich Gauss*



# Introducción

---

## Antecedentes históricos

El problema de calcular la suma de la serie

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots, \quad (1)$$

para  $s \geq 2$ , entero, había atraído la atención de varios matemáticos desde el siglo XVII. Así, a comienzos del siglo XVIII las series infinitas pasan a ser uno de los temas estrellas dentro del universo matemático de la época. El estudio sobre si convergían hacia un número o si se hacían cada vez más grandes sería uno de los retos de cualquier matemático de aquel entonces. Actualmente la serie (1) es conocida bajo el nombre de función zeta de Riemann [28, 31, 39, 70], quien la extendió al campo complejo, mostrando, y previendo, muchas de sus interesantes propiedades.

Euler en 1735 anunció que había encontrado el elegante e inesperado resultado  $\zeta(2) = \pi^2/6$ , dando solución así al llamado Problema de Basilea [40], que sin lugar a dudas le abrió las puertas para ingresar a la élite matemática de su época. Dicho triunfo estimuló formidablemente a Euler, de forma tal, que en 1750 llegó a reportar el resultado general [24]

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

donde los  $B_{2k}$  son los llamados números de Bernoulli [1, 27].

Desafortunadamente Euler no obtuvo nada acerca de los casos impares, todos sus intentos por evaluar  $\zeta(2k+1)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , fueron fallidos. Hasta la fecha, el carácter aritmético de estos números (exceptuando  $\zeta(3)$ ); es decir, si son racionales o irracionales, sigue siendo un problema abierto dentro de la comunidad matemática.

Después de los estudios iniciados por Euler, nada se supo sobre la naturaleza aritmética de  $\zeta(2k+1)$  para  $k \in \mathbb{N}$ , hasta que Roger Apéry, en el año 1979, sorprendió a la comunidad matemática con una demostración de la irracionalidad de  $\zeta(3)$  [2]. De ahí el conocido teorema de Apéry,  $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$ . Él sólo brindó una breve descripción de su impresionante demostración, cuyos resultados se pueden encontrar de forma detallada en [2, 26, 71, 91]. Como reconocimiento a este resultado, la constante  $\zeta(3)$ , se denomina actualmente, constante de Apéry.

El método de obtención de los aproximantes, aunque ingenioso, no hacía, sin embargo, uso alguno de resultados que no hubieran sido conocidos por los matemáticos del siglo XVIII. ¡Una demostración que se le había escapado al gran Euler! Una excelente exposición puede encontrarse en Vander Poorten

[91], quien dio una conferencia sobre la demostración de Apéry en el congreso internacional celebrado ese mismo año en Helsinki.

A partir de la demostración de la irracionalidad de  $\zeta(3)$  dada por Apéry, se organizaron múltiples seminarios en los que se pretendía entender dicha demostración, con la finalidad de responder a las interrogantes acerca de las propiedades aritméticas de la función zeta de Riemann en enteros impares. No obstante, hasta la fecha no se sabe siquiera si  $\zeta(5)$  es irracional o no; algunos de los pocos resultados relacionados con dicho número se pueden encontrar en [75, 77, 87, 93, 94, 96]. Sin embargo, el resultado de Apéry inspiró a varios autores [11, 13, 15, 18, 20, 57, 66, 68, 82, 83, 97] a construir diferentes métodos para explicar la irracionalidad de  $\zeta(3)$ . Sorprendentemente, estos métodos conducen a la misma sucesión de aproximantes racionales de la clase de Apéry. En [11] se muestra que todos estos métodos coinciden, teniendo como origen común, un problema de aproximación simultánea. A este hecho se le denomina “fenómeno de Apéry”.

Uno de ellos, se basa en una integral doble que involucra los polinomios de Legendre, la cual fue considerada por Beukers [11, 18, 19, 58]

$$\begin{aligned} r_n^{(0,0)} &= q_n^{(0,0)} \zeta(3) - p_n^{(0,0)} = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} L_n(x) L_n(y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz(1-x)(1-y)(1-z))^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} dx dy dz, \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$\begin{aligned} q_n^{(0,0)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2, \quad y \quad p_n^{(0,0)} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \gamma_{n,k}, \\ \gamma_{n,k} &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^3} + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{2j^3} \binom{n+j}{j}^{-1} \binom{n}{j}^{-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

son los aproximantes racionales de Apéry, y

$$L_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} z^n (1-z)^n = \sum_{k=0}^n l_k^{(n)} z^k, \quad l_k^{(n)} = (-1)^k \binom{n+k}{k} \binom{n}{k},$$

denotan los polinomios de Legendre, ortogonales con respecto a la medida de Lebesgue en  $(0, 1)$ . Por otra parte, Beukers demostró de una manera sencilla que  $r_n^{(0,0)} = \mathcal{O}\left((\sqrt{2}-1)^{4n}\right)$ , lo cual le permitió dar una nueva demostración de la irracionalidad de  $\zeta(3)$ . Es de vital importancia destacar, que para ciertas modificaciones de la integral de Beukers (2), se ha mejorado la medida de irracionalidad [44, 72] dada por Apéry [2, 91, 92].

De una manera similar a [37], Beukers [20] consideró un problema de aproximación racional en un intento por formular de un modo más natural la demostración de Apéry. Para ello introdujo la función racional

$$R_n(z) = \frac{(n-z+1)_n^2}{(-z)_{n+1}}, \quad (4)$$

donde  $(t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$  denota el símbolo de Pochhammer [38], a partir de la cual mediante el cálculo de su desarrollo en fracciones simples, dedujo de forma directa los aproximantes racionales de Apéry (3).

Sorokin en [82, 89], obtuvo los aproximantes racionales de Apéry (3) del mismo modo que Beukers, considerando el problema de aproximación racional

$$\begin{aligned} A_n(z) f_1(z) + B_n(z) f_2(z) - C_n(z) &= \mathcal{O}(z^{-n-1}), \\ A_n(z) f_2(z) + 2B_n(z) f_3(z) - D_n(z) &= \mathcal{O}(z^{-n-1}), \end{aligned}$$

donde  $A_n(z)$  y  $B_n(z)$  son polinomios de grado exactamente  $n$  y

$$f_1(z) = \int_0^1 \frac{dx}{z-x}, \quad f_2(z) = - \int_0^1 \frac{\log x}{z-x} dx, \quad f_3(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\log^2 x}{z-x} dx.$$

De este modo, demostró que la solución de este problema viene dada por las relaciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_0^1 (A_n(x) - B_n(x) \log x) x^k dx &= 0, \\ k &= 0, \dots, n-1, \\ \int_0^1 ((A_n(x) - B_n(x) \log x) \log x) x^k dx &= 0, \end{aligned}$$

junto con la condición  $A_n(1) = 0$ . Luego, usando la convolución de Mellin [88, 89, 90] como un ingrediente crucial, consiguió lo siguiente

$$\begin{aligned} r_n^{(0,0)} &= \int_0^1 \frac{(A_n(x) - B_n(x) \log x) \log x}{1-x} dx \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} L_n(x) L_n(y) dx dy, \end{aligned}$$

lo cual implica la irracionalidad de  $\zeta(3)$  de acuerdo con la estimación de Beukers dada en (2), véase [18].

Otra de las principales aportaciones que han sido desarrolladas para explicar la irracionalidad de  $\zeta(3)$ , fue propuesta por Nesterenko, quien en 1996 inspirado en la obra de Gutnik [37] consideró la siguiente modificación de la función racional (4) de Beukers

$$R_n(z) = \frac{(1-z)_n^2}{(z)_{n+1}}, \quad (5)$$

y de esta manera demostró que la sucesión residuo dada en (2) se podía escribir de la siguiente forma

$$r_n^{(0,0)} = - \sum_{k \geq 1} \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{(1-k)_n^2}{(k)_{n+1}} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(1-\nu)_n^2}{(\nu)_{n+1}} \left( \frac{\pi}{\sin \pi \nu} \right)^2 d\nu,$$

donde  $L$  es la línea vertical  $\operatorname{Re} z = C$ ,  $0 < C < n+1$ , orientada de arriba hacia abajo.

De hecho, él aplicó a esta integral, el conocido método de Laplace, del que se dará una breve descripción en el capítulo preliminar, lo cual le permitió llegar al mismo comportamiento de la sucesión residuo (2) encontrado por Beukers.

Luego, en el año 2009, Nesterenko publicó una nueva demostración de la irracionalidad de  $\zeta(3)$  [59], demostrando para  $l_n^3 \mathcal{B}_n, l_n^3 \mathcal{D}_n \in \mathbb{Z}$ , lo siguiente

$$(-1)^n l_n^3 \sum_{k \geq 1} \frac{\partial}{\partial k} \left( k^{-2} \prod_{j=1}^{[(n-1)/2]} \frac{k-j}{k+j} \prod_{j=1}^{[n/2]} \frac{k-j}{k+j} \right) = (-1)^{n-1} l_n^3 (2\mathcal{B}_n \zeta(3) - \mathcal{D}_n) < (4/5)^n,$$

donde

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} b_k \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_n = \sum_{k=1}^{[n/2]} (2b_k H_k^3 + a_k H_k^2),$$

con

$$b_k = (-1)^{n-1} \binom{[\frac{n-1}{2}] + k}{k} \binom{[\frac{n}{2}] + k}{k} \binom{[\frac{n-1}{2}]}{k} \binom{[\frac{n}{2}]}{k},$$

$$a_k = b_k \left( \frac{2}{k} + \sum_{j=0}^{[(n-1)/2]} \left( \frac{1}{k-j} - \frac{1}{k+j} \right) + \sum_{j=0}^{[n/2]} \left( \frac{1}{k-j} - \frac{1}{k+j} \right) \right),$$

lo cual prueba evidentemente el teorema de Apéry. Aquí,  $l_n$  denota el mínimo común múltiplo de  $\{1, 2, \dots, n\}$  y  $H_k^{(r)}$  el  $k$ -ésimo número armónico de orden  $r$  ( $H_k^{(1)} = H_k$  y  $H_0 = 0$ ) [27].

Se conoce además, que de los pocos resultados desarrollados para  $\zeta(4)$ , se encuentran los aportados por Zudilin en [100, 101], donde basado en la serie de tipo hipergeométrica

$$r_{n,z} = \frac{(-1)^{n+1}}{6} \sum_{k \geq 1} \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{(1-k)_n^2 (k+n+1)_n^2 (2k+n)}{(k)_{n+1}^4} \right) = q_{n,z} \zeta(4) - p_{n,z} \quad (6)$$

$$= \mathcal{O} \left( (3 - 2\sqrt{3})^{3n} \right),$$

dedujo la relación de recurrencia [103]

$$(n+1)^5 y_{n+1} - 3(2n+1)(3n^2+3n+1)(15n^2+15n+4)y_n - 3n^3(9n^2-1)y_{n-1} = 0, \quad n \geq 1,$$

donde los aproximantes racionales involucrados en (6), la satisfacen con condiciones iniciales

$$q_{0,z} = 1, \quad q_{1,z} = 12, \quad p_{0,z} = 0, \quad p_{1,z} = 13,$$

y a partir de la misma obtuvo el desarrollo en fracciones continuas,

$$\zeta(4) = \frac{13}{\mathcal{P}_z(0)} + \frac{1^7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{\mathcal{P}_z(1)} + \frac{2^7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{\mathcal{P}_z(2)} + \dots$$

$$+ \frac{n^7 (3n-1)(3n)(3n+1)}{\mathcal{P}_z(n)} + \dots,$$

siendo  $\mathcal{P}_z(n) = 3(2n+1)(3n^2+3n+1)(15n^2+15n+4)$ .

Otros resultados relevantes, relacionados con las propiedades aritméticas de la función zeta de Riemann en argumentos pares o impares, serán descritos en algunos de los capítulos de esta tesis, según corresponda al desarrollo seguido en el mismo.



## Estructura de la tesis

Para una eficiente estructuración y comprensión de los resultados de esta tesis doctoral, la misma se ha dividido en 4 capítulos, además de la presente introducción y una bibliografía final común para todos los capítulos. En los capítulos 2, 3 y 4, compuestos a su vez de secciones y subsecciones, se ha incluido una breve introducción, a modo de resumen, de su contenido y desarrollo así como una última sección donde se detallan los resultados alcanzados en los mismos. A continuación se enunciará, de manera descriptiva, los contenidos y principales resultados de cada uno de los capítulos.

El primer capítulo de esta tesis, se recogen aquellos conceptos básicos, que son importantes para el buen desarrollo de los capítulos que le siguen a continuación. El mismo se divide en 4 secciones. En la primera sección se brinda un breve resumen del problema de Riemann-Hilbert, tanto escalar como matricial. En la segunda, se enuncian algunos conceptos y definiciones, correspondientes a las relaciones de recurrencia y fracciones continuas irregulares. En la tercera se da una breve descripción del conocido Método de Laplace, y por último, en la cuarta sección, se detallan las aproximaciones simultáneas de Hermite-Padé.

En el segundo capítulo, se presenta una nueva sucesión de aproximantes racionales a  $\zeta(3)$  que prueba el teorema de Apéry. Para ello, en la primera sección, se desarrolla como ingrediente clave un problema de Riemann-Hilbert, que luego da lugar en la próxima sección, a reformular, a partir de cada una de las entradas de la matriz de Riemann-Hilbert, un problema de aproximación racional simultánea. Como resultado de ello, en la tercera sección, se describen de forma explícita dichos aproximantes. Para concluir, en la cuarta sección, se calcula el análogo del determinante wronskiano (usualmente conocido como determinante de Casorati) vinculado a dichos aproximantes racionales, a partir del cual, se deduce de una manera directa, la relación de recurrencia correspondiente a estos aproximantes racionales, así como un nuevo desarrollo en fracciones continuas para  $\zeta(3)$  [13].

En el tercer capítulo, se exponen en la primera sección, infinitos aproximantes racionales que dependen de ciertos parámetros, y que prueban la irracionalidad de  $\zeta(3)$  [12]. En la segunda sección, se logra vincular cada uno de estos aproximantes racionales con un problema de aproximación racional simultánea cerca del infinito. De esta manera, siguiendo la misma estrategia del capítulo anterior, se llega a deducir una relación de recurrencia, así como un nuevo desarrollo en fracciones continuas para  $\zeta(3)$ . Las últimas dos secciones de este capítulo, están dedicadas al estudio de ciertas funciones racionales, deducidas a partir de un problema de aproximación racional simultánea, de las cuales se infieren nuevos aproximantes racionales a  $\zeta(4)$  y sus correspondientes relaciones de recurrencia, las que permiten obtener de forma directa, nuevos desarrollos en fracciones continuas para  $\zeta(4)$  [14].

En el cuarto y último capítulo, se plantea un problema de aproximación racional simultánea cerca del infinito, a partir del cual, se consiguen excelentes aproximantes racionales, a los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros, tanto pares como impares. Además, se concluye el capítulo, con ejemplos numéricos que evidencian la efectividad de dichos aproximantes [15].

# Índice general

---

<b>Índice general</b>	<b>18</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>19</b>
1.1. Problema de Riemann-Hilbert	19
1.1.1. Problema escalar de Riemann-Hilbert	19
1.1.2. Problema matricial de Riemann-Hilbert	21
1.2. Relaciones de recurrencia y fracciones continuas irregulares	21
1.3. Método de Laplace	22
1.4. Aproximaciones simultáneas de Padé	23
<b>2. Nuevos aproximantes racionales a <math>\zeta(3)</math></b>	<b>27</b>
2.1. Desarrollo del problema de Riemann-Hilbert	28
2.2. Problema de aproximación racional simultánea	32
2.3. Aproximantes racionales a $\zeta(3)$	35
2.4. Relación de recurrencia de tipo Apéry e irracionalidad de $\zeta(3)$	39
2.5. Discusión de resultados	43
<b>3. Aproximantes diofánticos de <math>\zeta(3)</math> y <math>\zeta(4)</math></b>	<b>45</b>
3.1. Nuevos aproximantes diofánticos de $\zeta(3)$	46
3.2. Relación con un problema de aproximación simultánea	50
3.3. Relación de recurrencia de tipo Apéry para los aproximantes diofánticos de $\zeta(3)$	52
3.4. Problema de aproximación simultánea y aproximantes diofánticos de $\zeta(4)$	54
3.5. Relaciones de recurrencia para los aproximantes diofánticos de $\zeta(4)$	60
3.6. Discusión de resultados	64
<b>4. Aproximantes racionales a los valores de la función zeta de Riemann en enteros</b>	<b>69</b>
4.1. Problema de aproximación simultánea vinculado con $\zeta(s)$ , $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	69
4.2. Representación de $\left(r_n^{(k)}\right)_{n \geq 0}$ a partir de una integral de contorno	75
4.3. Ejemplos numéricos de los aproximantes racionales. Discusión de resultados	76
<b>Bibliografía</b>	<b>86</b>

# Capítulo 1

---

## Preliminares

---

### 1.1. Problema de Riemann-Hilbert

El problema de Riemann-Hilbert constituye una importante herramienta dentro de la teoría de funciones analíticas, poseyendo una fuerte conexión con problemas de aplicación física como la elasticidad y la hidrodinámica [56]. Básicamente, esta teoría tiene como objetivo central encontrar una función que sea analítica en una determinada región, teniendo en cuenta ciertas relaciones de salto entre sus valores límites sobre los puntos de un contorno dado. Tal problema fue mencionado por Riemann en su célebre disertación, más fue estudiado primeramente por Hilbert, de ahí la terminología, problema de Riemann-Hilbert.

Los problemas de frontera o de Riemann-Hilbert para funciones analíticas han resultado ser una herramienta fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como parciales, estando en la base de técnicas tan fundamentales como el scattering inverso y otros. A partir de los trabajos de Fokas, Its y Kitaev en los años 90 [32], estos métodos han empezado a jugar un papel preponderante en la teoría de polinomios ortogonales. A continuación se dará un breve resumen de algunas técnicas del problema de Riemann-Hilbert y del papel de puente que las mismas juegan entre la teoría moderna de funciones especiales, polinomios ortogonales y teoría analítica de números.

**Teorema (Liouville) 1.1.1.** *Si  $f$  es una función entera y*

$$f(z) = \mathcal{O}(z^n), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

*entonces  $f$  es un polinomio de grado  $\leq n$ , es decir,  $f \in \mathbb{P}_n$ , siendo  $\mathbb{P}_n$  es el subespacio  $n$ -dimensional del espacio lineal de los polinomios con coeficientes complejos  $\mathbb{P}$ .*

**Teorema (Morera) 1.1.1.** *Si  $f$  es una función continua en el dominio  $\Omega$  y se verifica*

$$\oint_{\gamma} f(t) dt = 0,$$

*para todo contorno cerrado  $\gamma$  en  $\Omega$ , entonces  $f$  es una función analítica en  $\Omega$ .*

#### 1.1.1. Problema escalar de Riemann-Hilbert

Supóngase que  $\gamma$  es una curva o contorno (o unión de los mismos) en el plano complejo  $\mathbb{C}$ ; buscando simplicidad y en aras de una visión global del problema, se ha de imponer en lo sucesivo

tantas hipótesis sobre los objetos con que se operará, como sean necesarias. En particular, considérese  $\gamma$  suave a trozos, denotando por  $\gamma^0$  el conjunto de sus puntos regulares, es decir, aquellos que no sean extremos de un arco o puntos de intersección. Si se fija una orientación arbitraria de  $\gamma$ , entonces dada una función  $f$  analítica en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , se denotará en adelante por  $f_+$  y  $f_-$  los valores de frontera de  $f$  por la izquierda y por la derecha en  $\gamma$ , respectivamente, si estos existen.

$$f_+(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \text{ pertenece al lado } +}} f(z) \quad \text{y} \quad f_-(t) = \lim_{\substack{z \rightarrow t \\ z \text{ pertenece al lado } -}} f(z).$$

Si sobre  $\gamma$  se tiene definida una función compleja  $v$ , entonces su integral tipo Cauchy es

$$\mathcal{C}(v)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{v(t)}{t-z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma. \quad (1.1)$$

Si  $v$  es Hölder a trozos entonces  $\mathcal{C}(v)$  es una función analítica en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , que posee valores de frontera continuos en  $\gamma^0$ . Uno de los teoremas fundamentales en la teoría de valores de frontera para funciones analíticas es el de Sokhotsky-Plemelj [3] que afirma

**Teorema 1.1.1.** *Sea  $v$  una función definida sobre  $\gamma$ . Si  $v$  es Hölder-continua*

$$|v(x) - v(y)| \leq \mathcal{K} |x - y|^\alpha, \quad \alpha > 0,$$

entonces (1.1) define una función analítica en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , y

$$f_+(t) - f_-(t) = v(t), \quad t \in \gamma^0.$$

O sea, se puede recuperar el valor del integrando en (1.1) como el salto aditivo de la integral tipo Cauchy a través de  $\gamma$ . En otras palabras, si dados  $\gamma$  y  $v$  como se definen en el teorema anterior, se desea encontrar una función  $f$  que sea holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  y cuyos valores de frontera satisfagan la siguiente condición de salto aditivo,

$$f_+(t) = f_-(t) + v(t), \quad t \in \gamma^0,$$

entonces una posible solución es  $\mathcal{C}(v)$ . Obviamente, la solución no es única:  $\mathcal{C}(v) + g$ , donde  $g$  es entera, tiene el mismo salto a través de  $\gamma$ . Para lograr la unicidad se deben imponer algunas condiciones adicionales sobre  $f$ , tales como que  $f(\infty) = 0$ , y describir su comportamiento en los puntos irregulares  $\gamma \setminus \gamma^0$ .

Un problema de salto multiplicativo o de Riemann-Hilbert homogéneo es el de encontrar una función  $f$  que sea holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , cuyos valores de frontera satisfagan

$$f_+(t) = f_-(t) v(t), \quad t \in \gamma^0,$$

unido a la condición asintótica

$$f(z) = 1 + \mathcal{O}(1/z), \quad z \rightarrow \infty.$$

En determinadas ocasiones, por ejemplo, si  $\gamma$  es un contorno de Jordan y  $v$  es real y positiva sobre el mismo, el problema multiplicativo se puede reducir al aditivo tomando logaritmos

$$\begin{aligned} (\log f)_+(t) &= (\log f)_-(t) + \log v(t), \quad t \in \gamma^0, \\ \log f(z) &= \mathcal{O}(1/z), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

siendo una posible solución

$$f(z) = \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\log v(t)}{t-z} dt \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma.$$

### 1.1.2. Problema matricial de Riemann-Hilbert

El problema de Riemann-Hilbert [30, 48, 50, 85] para polinomios ortogonales [16, 29, 53], fue introducido por Fokas, Its y Kitaev en [32]. Lo cierto es, que la situación anterior se complica, si en vez de considerar funciones escalares se considera el caso matricial. Para una función peso  $w(x)$ , considérese el problema de encontrar una función  $Y : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$  que satisfaga:

I.  $Y$  es analítica (lo cual significa que toda entrada  $Y_{ij}$  es una función analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ).

II.  $Y$  tiene valores fronteras para  $x \in \mathbb{R}$ , denotados mediante  $Y_{\pm}(x)$ , y

$$Y_+(x) = Y_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

III.

$$Y(z) = (I + \mathcal{O}(1/z)) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty.$$

**Teorema 1.1.2.** *La única solución del problema de Riemann-Hilbert I,II y III viene dada mediante (véase [48])*

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \gamma_n^{-1} p_n(z) & \frac{\gamma_n^{-1}}{2\pi i} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(t) w(t)}{t-z} dt \\ -2\pi i \gamma_{n-1} p_{n-1}(z) & -\gamma_{n-1} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{n-1}(t) w(t)}{t-z} dt \end{pmatrix},$$

donde  $p_n(t)$  son polinomios ortonormales con respecto a  $w(x)$  y  $\gamma_n$  el coeficiente principal de estos polinomios (véase [53]).

## 1.2. Relaciones de recurrencia y fracciones continuas irregulares

Para  $k \in \mathbb{N}$ , considérese la siguiente relación de recurrencia de orden  $k$  con coeficientes variables

$$u_n = \alpha_{n,1} u_{n-1} + \dots + \alpha_{n,k} u_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

para la cual los coeficientes tienen límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,i} = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (1.3)$$

Entonces, al polinomio

$$\lambda^k - \alpha_1 \lambda^{k-1} - \dots - \alpha_k = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i), \quad (1.4)$$

se le denomina, polinomio característico de la relación de recurrencia (1.2). Además, la relación de recurrencia (1.2) se dice que es no-degenerada si  $\alpha_{n,i} \neq 0$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 1.2.1.** (Teorema de Perron) Supóngase que para la relación de recurrencia no-degenerada (1.2), se verifica la condición (1.3), y todos los ceros del polinomio característico están ordenados en módulo  $|\lambda_1| < \dots < |\lambda_k|$ . Entonces para cada cero  $\lambda$  del polinomio característico (1.4) existe una solución  $(u_n)_{n \geq 1-k}$  de (1.2) tal que (véase [62, 63])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda.$$

Nótese que, la solución general  $(u_n)_{n \geq 1-k}$  puede ser expresada como una combinación lineal de las  $k$ -soluciones linealmente independientes  $(u_{n,i})_{n \geq 1-k}$  de (1.2) tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1,i}}{u_{n,i}} = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

**Teorema 1.2.2.** Sean  $(p_n)_{n \geq -1}$  y  $(q_n)_{n \geq -1}$  dos sucesiones de números, tales que  $q_{-1} = 0$ ,  $p_{-1} = q_0 = 1$  y  $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n \neq 0$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Entonces existe una única fracción continua irregular

$$a_0 + \frac{b_1 |}{|a_1|} + \frac{b_2 |}{|a_2|} + \frac{b_3 |}{|a_3|} + \dots + \frac{b_n |}{|a_n|} + \dots, \quad (1.5)$$

cuyo  $n$ -ésimo numerador es  $p_n$  y cuyo  $n$ -ésimo denominador es  $q_n$ , para cada  $n \geq 0$ . Más precisamente (véase [45, pág. 20] y [25, pág. 43])

$$a_0 = p_0, \quad a_1 = q_1, \quad b_1 = p_1 - p_0 q_1, \\ a_n = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}}, \quad b_n = \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

**Teorema 1.2.3.** Dos fracciones continuas irregulares

$$a_0 + \frac{b_1 |}{|a_1|} + \frac{b_2 |}{|a_2|} + \frac{b_3 |}{|a_3|} + \dots + \frac{b_n |}{|a_n|} + \dots, \quad a'_0 + \frac{b'_1 |}{|a'_1|} + \frac{b'_2 |}{|a'_2|} + \frac{b'_3 |}{|a'_3|} + \dots + \frac{b'_n |}{|a'_n|} + \dots,$$

son equivalentes, si y sólo si existe una sucesión de números  $(c_n)_{n \geq 0}$  distinta de cero, con  $c_0 = 1$  de manera que (véase [45, pág. 31] y [25, pág. 44])

$$a'_n = c_n a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad b'_n = c_n c_{n-1} b_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

### 1.3. Método de Laplace

En esta sección, se dará una breve descripción del conocido e importante método de Laplace [54, 54]. Este método se aplica a integrales de contorno de la forma

$$\mathcal{F}(z) = \int_C g(\omega) e^{zf(\omega)} d\omega,$$

donde  $C$  es un camino en el plano complejo y las funciones  $f$  y  $g$  son lo suficientemente suaves o analíticas. Los puntos de silla y los valores extremos del integrando, son los puntos en los que  $\operatorname{Re} f'(\omega)$  se anula. Estos puntos pueden dar las principales contribuciones al comportamiento asintótico de la función  $\mathcal{F}(z)$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . Este método ofrece la siguiente representación asintótica

$$\int_C g(\omega) e^{zf(\omega)} d\omega \sim g(z_0) e^{zf(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{z|f''(z_0)|}} e^{i\varphi_n}, \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty,$$

donde  $z_0$  es un punto de silla o un valor extremo de  $\operatorname{Re} f(\omega)$ , además

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{\pi - \theta}{2} + n\pi, \quad (n = 0, 1), \\ \theta &= \arg f''(z_0). \end{aligned}$$

## 1.4. Aproximaciones simultáneas de Padé

Este concepto data del siglo pasado y se le conoce como aproximaciones de Hermite-Padé. Considérese  $r$  funciones  $(f_1, f_2, \dots, f_r)$  de la forma

$$f_j(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu_j(x)}{z-x}, \quad j = 1, \dots, r, \quad z \notin \mathbb{R},$$

con un desarrollo formal cerca del infinito

$$f_j(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{c_{k,j}}{z^{k+1}}, \quad j = 1, \dots, r.$$

Dado un multi-índice  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$  con longitud  $|\vec{n}| = n_1 + n_2 + \dots + n_r$  y con los  $n_j \in \mathbb{N}$ , se distinguirán dos tipos de aproximaciones diferentes

1. Aproximación Hermite-Padé de tipo I: El objetivo es encontrar polinomios  $(A_{\vec{n},1}, \dots, A_{\vec{n},r})$ , donde  $A_{\vec{n},j}$  es de grado  $\leq n_j - 1$  y un polinomio  $B_{\vec{n}}$  tal que

$$\sum_{j=1}^r A_{\vec{n},j}(z) f_j(z) - B_{\vec{n}}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{|\vec{n}|}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Para este tipo de aproximación, los polinomios  $A_{\vec{n},j}$  con  $1 \leq j \leq r$ , pueden ser determinados mediante el sistema de ecuaciones lineales homogéneas, con  $|\vec{n}|$  coeficientes incógnitas y  $|\vec{n}| - 1$  ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu A_{\vec{n},j}(x) d\mu_j(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, |\vec{n}| - 2,$$

donde el polinomio  $B_{\vec{n}}$  viene dado por

$$B_{\vec{n}}(z) = \sum_{j=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{\vec{n},j}(z) - A_{\vec{n},j}(x)}{z-x} d\mu_j(x),$$

siendo el error de aproximación

$$\sum_{j=1}^r A_{\vec{n},j}(z) f_j(z) - B_{\vec{n}}(z) = \sum_{j=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{\vec{n},j}(x)}{z-x} d\mu_j(x).$$

2. Aproximación Hermite-Padé de tipo II: El objetivo es hallar un polinomio  $P_{\vec{n}}$  de grado  $\leq |\vec{n}|$ , y  $r$  polinomios  $Q_{\vec{n},1}, \dots, Q_{\vec{n},r}$  tales que

$$P_{\vec{n}}(z) f_j(z) - Q_{\vec{n},j}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

El denominador común  $P_{\vec{n}}$  puede ser determinado mediante el sistema de ecuaciones lineales homogéneas, con a lo sumo  $|\vec{n}| + 1$  coeficientes incógnitas y  $|\vec{n}|$  ecuaciones lineales

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^\nu P_{\vec{n}}(x) d\mu_j(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, r,$$

donde los numeradores vienen dados por

$$Q_{\vec{n},j}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_{\vec{n}}(z) - P_{\vec{n}}(x)}{z-x} d\mu_j(x), \quad j = 1, \dots, r,$$

siendo el error de aproximación

$$P_{\vec{n}}(z) f_j(z) - Q_{\vec{n},j}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_{\vec{n}}(x)}{z-x} d\mu_j(x), \quad j = 1, \dots, r.$$

Una noción importante en las aproximaciones de Hermite-Padé es la normalidad [82].

**Definición 1.4.1.** Un multi-índice  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ ,  $\vec{n} \neq 0$  se dice normal para un problema de aproximación si se obtienen polinomios con el mayor grado posible esperado.

**Nota 1.4.1.** En el caso que todos los polinomios sean normales se tiene la unicidad para el problema.

Así, en el caso Padé, si todos los índices de la aproximación son normales [82], entonces la tabla de Padé no contiene bloques, es decir, las secciones de la tabla de Padé contienen las mismas funciones racionales como aproximación. La normalidad también es importante en las aproximaciones de Hermite-Padé. Un multi-índice es normal para la aproximación de tipo I si el grado de cada  $A_{\vec{n},j}$  es  $n_j - 1$ . De la misma forma  $\vec{n}$  es normal en la aproximación de tipo II si el grado de  $Q_{\vec{n},j}$  es  $|\vec{n}|$ . Existe un tipo de funciones particularmente importantes para este tipo de aproximaciones; estas son las funciones de Markov, puesto que todos sus índices son normales.

Para el estudio de la irracionalidad de  $\zeta(3)$ , en las secciones 2.2 y 3.2 se hace uso de un problema mixto de tipo I y tipo II. Por lo que, en la siguiente afirmación, se muestra de manera precisa cómo probar la irracionalidad de un número real.

**Lema 1.4.1.** Sea  $x$  un número real. Si existen enteros  $p_n$  y  $q_n$  tales que

- i)  $q_n x - p_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,



$$ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (q_n x - p_n) = 0,$$

entonces  $x$  es irracional.

### Demostración

En efecto, supóngase que  $x$  es racional, entonces  $x = p/q$  para ciertos enteros  $p, q$ , y

$$q_n x - p_n = \frac{pq_n - qp_n}{q}.$$

Puesto que  $pq_n - qp_n$  es un entero no nulo, aplicando la suposición  $i)$  se deduce que  $|pq_n - qp_n| \geq 1$ . De esta manera se verifica

$$|q_n x - p_n| \geq 1 \geq \frac{1}{|q|}.$$

Lo cual contradice la suposición dos, así dicha contradicción prueba la irracionalidad del número  $x$ .  $\square$

**Lema 1.4.2.** Sea  $l_n$  el mínimo común múltiplo de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{l_n} \leq e. \quad (1.7)$$

### Demostración

En efecto, como es conocido, el mínimo común múltiplo de  $\{1, 2, \dots, n\}$  viene dado por  $l_n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_{\pi(n)}^{s_{\pi(n)}}$ , donde  $p_j$ ,  $1 \leq j \leq \pi(n)$  son los números primos,  $\pi(n)$  es el número de primos menores o iguales que  $n$ , y  $s_j$  es el mayor exponente de  $p_j$  en la factorización de cada número  $m \leq n$ . En particular, esto significa que  $p_j^{s_j} \leq n$ , de modo que  $l_n \leq n^{\pi(n)}$  y así se tiene

$$\sqrt[n]{l_n} \leq \sqrt[n]{n^{\pi(n)}} = e^{\pi(n)/n \ln n}.$$

Debido al siguiente comportamiento asintótico

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln n} = 1,$$

se consigue la desigualdad deseada (1.7).  $\square$

Nótese además, que usando una cota inferior  $l_n \geq p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_{\pi(n)}^{s_{\pi(n)}}$  y el Teorema de los números primos en la forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{n \ln n} = 1,$$

se puede probar también que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \sqrt[n]{l_n} \geq e$ . Por consiguiente, se llega al siguiente resultado

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{l_n} = e. \quad (1.8)$$

Cualquiera sea la forma (1.7) ó (1.8), ambas son útiles para probar la irracionalidad de  $\zeta(3)$ .



## Capítulo 2

---

# Nuevos aproximantes racionales a $\zeta(3)$

---

En este capítulo se obtendrán nuevos aproximantes racionales a  $\zeta(3)$  distintos a los dados por Apéry en [91], los cuales igualmente prueban la irracionalidad de dicho número. Como se ha visto antes, Apéry fue el primero en dar una demostración formal de la irracionalidad de  $\zeta(3)$ , dicha prueba tenía como ingrediente fundamental la siguiente relación de recurrencia (véase [2, 8, 21, 46, 47, 86, 91, 100, 104])

$$(n+1)^3 y_{n+1} - (2n+1)(17n^2 + 17n + 5)y_n + n^3 y_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \quad (2.1)$$

la cual satisfacen la sucesión de los numeradores  $p_n^{(0,0)}$  y denominadores  $q_n^{(0,0)}$  de los aproximantes racionales (3) a  $\zeta(3)$  con condiciones iniciales

$$p_0^{(0,0)} = 0, \quad p_1^{(0,0)} = 6, \quad q_0^{(0,0)} = 1, \quad q_1^{(0,0)} = 5.$$

Además, a partir de la relación de recurrencia anterior y de los aproximantes racionales (3) a  $\zeta(3)$ , Apéry [91] dedujo el siguiente desarrollo en fracciones continuas

$$\zeta(3) = \frac{6}{5} \bigg| - \frac{1}{117} \bigg| - \frac{64}{535} \bigg| - \cdots - \frac{n^6}{(2n+1)(17n^2 + 17n + 5)} \bigg| - \cdots$$

También, de forma similar, en 1996 Nesterenko [57] propuso el siguiente desarrollo en fracciones continuas

$$2\zeta(3) = 2 + \frac{1}{2} \bigg| + \frac{2}{4} \bigg| + \frac{1}{3} \bigg| + \frac{4}{2} \bigg| + \frac{2}{4} \bigg| + \frac{6}{6} \bigg| + \frac{4}{5} \bigg| + \cdots,$$

donde los numeradores  $a_n$ ,  $n \geq 1$ , y los denominadores  $b_n$ ,  $n \geq 2$ , están definidos mediante

$$\begin{aligned} b_{4k+1} &= 2k + 2, & a_{4k+1} &= k(k+1), & b_{4k+2} &= 2k + 4, \\ a_{4k+2} &= (k+1)(k+2), & b_{4k+3} &= 2k + 3, \\ a_{4k+3} &= (k+1)^2, & b_{4k} &= 2k, & a_{4k} &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Este capítulo tiene como objetivo fundamental, encontrar a partir de los nuevos aproximantes racionales, una nueva relación de recurrencia así como un nuevo desarrollo en fracciones continuas para  $\zeta(3)$ .

Para ello, en la próxima sección, se usará como ingrediente clave, un problema de Riemann-Hilbert asociado a un problema de aproximación racional simultánea, lo cual, más adelante, posibilitará determinar los nuevos aproximantes racionales a  $\zeta(3)$ , que luego darán lugar a la relación de recurrencia de tipo Apéry (2.45) y al nuevo desarrollo en fracciones continuas (2.54).

## 2.1. Desarrollo del problema de Riemann-Hilbert

Considérese el siguiente problema de Riemann-Hilbert:

**Problema 2.1.1.** *Encontrar una función matricial  $Y(z) \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  de manera que:*

**I.**  $Y(z)$  sea analítica en  $\mathbb{C} \setminus (0, 1)$ ,

**II.** Se verifique la siguiente condición de salto

$$Y_+(z) = Y_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1(z) & w_2(z) \\ 0 & 1 & w_2(z) & w_3(z) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in (0, 1), \quad (2.2)$$

donde  $w_i(z) = \log^{i-1} z$ ,  $i = 1, 2, 3$  (siendo  $w_1(z) = 1$ ).

**III.** El comportamiento asintótico cerca del infinito sea como sigue

$$Y(z) \begin{pmatrix} z^{-n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Supóngase que  $Y(z)$  es una solución del problema de Riemann-Hilbert 2.1.1, entonces para sus entradas se tiene el siguiente comportamiento

$$\begin{pmatrix} Y_{1,1}^{(n+1)}(z) & Y_{1,2}^{(n-1)}(z) & Y_{1,3}^{(n)}(z) & Y_{1,4}^{(n)}(z) \\ Y_{2,1}^{(n)}(z) & Y_{2,2}^{(n)}(z) & Y_{2,3}^{(n)}(z) & Y_{2,4}^{(n)}(z) \\ Y_{3,1}^{(n)}(z) & Y_{3,2}^{(n-1)}(z) & Y_{3,3}^{(n)}(z) & Y_{3,4}^{(n)}(z) \\ Y_{4,1}^{(n)}(z) & Y_{4,2}^{(n-1)}(z) & Y_{4,3}^{(n)}(z) & Y_{4,4}^{(n)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{n+1} + \mathcal{O}(z^n) & \mathcal{O}(z^{n-1}) & \mathcal{O}(z^{-n-1}) & \mathcal{O}(z^{-n-1}) \\ \mathcal{O}(z^n) & z^n + \mathcal{O}(z^{n-1}) & \mathcal{O}(z^{-n-1}) & \mathcal{O}(z^{-n-1}) \\ \mathcal{O}(z^n) & \mathcal{O}(z^{n-1}) & z^{-n} + \mathcal{O}(z^{-n-1}) & \mathcal{O}(z^{-n-1}) \\ \mathcal{O}(z^n) & \mathcal{O}(z^{n-1}) & \mathcal{O}(z^{-n-1}) & z^{-n} + \mathcal{O}(z^{-n-1}) \end{pmatrix}.$$

Nótese que a partir de la condición de salto (2.2) y el comportamiento en el infinito (2.3) se tiene

$$\begin{aligned} (Y_{i,3}^{(n)})_+ &= (Y_{i,3}^{(n)})_- + w_1 Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})} + w_2 Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}, \\ (Y_{i,4}^{(n)})_+ &= (Y_{i,4}^{(n)})_- + w_2 Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})} + w_3 Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Por consiguiente, haciendo uso del teorema Sokhotski-Plemelj, se deduce salvo un factor multiplicador,

$$Y_{i,3}^{(n)}(z) = \int_0^1 \frac{w_1(x) Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(x) + w_2(x) Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(x)}{z-x} dx, \quad (2.4)$$

$$Y_{i,4}^{(n)}(z) = \int_0^1 \frac{w_2(x) Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(x) + w_3(x) Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(x)}{z-x} dx. \quad (2.5)$$

De esta manera, se consiguen las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( w_1(x) Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(x) + w_2(x) Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(x) \right) x^k dx &= 0, & k = 0, \dots, n - \delta_{i,3} - 1, \\ \int_0^1 \left( w_2(x) Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(x) + w_3(x) Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(x) \right) x^k dx &= 0, & k = 0, \dots, n - \delta_{i,4} - 1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

garantizando así, el comportamiento  $z^{-n}\delta_{i,3} + z^{-n}\delta_{i,4} + \mathcal{O}(z^{-n-1})$  en el infinito, tanto para (2.4) como para (2.5). Obsérvese además que  $Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z)$  y  $Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z)$  son polinomios de grado exactamente  $n + \delta_{i,1}$  y  $n + \delta_{i,2} - 1$ , respectivamente, y el coeficiente principal de los polinomios  $Y_{1,1}^{(n+1)}(z)$  y  $Y_{2,2}^{(n)}(z)$  es igual a 1.

Las condiciones de ortogonalidad (2.6), junto con estas condiciones adicionales, conducen a un sistema de ecuaciones lineales indeterminado, por tanto, la  $i$ -ésima fila está determinada salvo un factor constante.

Obsérvese que el  $\det Y(z)$  se comporta como  $z$ , cuando  $z \rightarrow \infty$ , por tanto, al problema 2.1.1 se le denomina indeterminado. En lo que resta de sección, se asumirá que el problema 2.1.1 admite una solución  $Y(z)$ .

**Definición 2.1.1.** *Un problema 2.1.1 para el cual la condición III implica que  $\det Y(z) = z^p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) cuando  $z \rightarrow \infty$ , se le denomina problema de Riemann-Hilbert  $p$ -descompensado.*

A continuación, se mostrará cómo es posible encontrar el par indeterminado de polinomios  $Y_{1,1}^{(n+1)}(z)$  y  $Y_{1,2}^{(n-1)}(z)$ , de manera directa, a partir de un problema de Riemann-Hilbert asociado al problema 2.1.1. Para ello considérese el siguiente problema de Riemann-Hilbert:

**Problema 2.1.2.** *Encontrar una función matricial  $V(z) \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  de manera que:*

I.  $V(z)$  sea analítica en  $\mathbb{C} \setminus (0, 1)$ ,

II.

$$V_+(z) = V_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1(z) & w_2(z) \\ 0 & 1 & w_2(z) & w_3(z) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in (0, 1), \quad (2.7)$$

III.

$$V(z) \begin{pmatrix} z^{-n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{n+1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Puesto que  $\det V(z) = 1$ , cuando  $z \rightarrow \infty$ , esto implica la existencia de  $V^{-1}(z)$ , con tal que  $V(z)$  resuelva el problema 2.1.2. Por tanto, si  $Y(z)$  y  $V(z)$  son soluciones de los problemas 2.1.1 y 2.1.2, respectivamente, entonces  $Y(z)V^{-1}(z)$  es una función matricial entera, y su comportamiento cuando

$z \rightarrow \infty$  es

$$\begin{aligned}
 Y(z)V^{-1}(z) &= (I + \mathcal{O}(z^{-1})) \begin{pmatrix} z^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-n} \end{pmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} z^{-n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{n+1} \end{pmatrix} (I + \mathcal{O}(z^{-1})) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} + \mathcal{O}(1),
 \end{aligned}$$

donde  $I$  denota la matriz identidad. Por consiguiente

$$Y(z) = \left( \mathcal{O}(1) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \right) V(z).$$

Luego, denotando  $A = \mathcal{O}(1)$ , se deduce que esta matriz de coeficientes debería ser, en general, de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & a_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix},$$

para ciertas entradas  $a_{4,i}$  y  $a_{i,4}$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ . Escribiendo

$$V(z) = \left( I + \frac{V_1}{z} + \cdots \right) \begin{pmatrix} z^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-n-1} \end{pmatrix},$$

donde  $V_1$  es una matriz constante de dimensión 4. Por tanto

$$\begin{aligned}
Y(z) & \begin{pmatrix} z^{-n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^n \end{pmatrix} \\
& = \left( A + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix} \right) \left( I + \frac{V_1}{z} + \dots \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \\
& = I + A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(z^{-1}) \\
& = I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (V_1)_{4,1} & (V_1)_{4,2} & (V_1)_{4,3} & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(z^{-1}).
\end{aligned}$$

Nótese que si se escoge  $a_{4,i} = -(V_1)_{4,i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , entonces  $Y(z)$  resuelve el problema 2.1.1. Obviamente, aún las entradas  $a_{i,4}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , siguen siendo indeterminadas. Luego, si se supone que  $Y_{1,1}^{(n+1)}(z)$  se anula en  $z = 1$  entonces

$$(1 \ 0 \ 0 \ a_{1,4}) \begin{pmatrix} V_{1,1}(1) \\ V_{2,1}(1) \\ V_{3,1}(1) \\ V_{4,1}(1) \end{pmatrix} = 0,$$

determina genéricamente a  $a_{1,4}$ . Por tanto, es necesario que  $Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z) = 0$  en  $z = 1$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , lo cual, conduce directamente a la determinación de  $a_{1,4}$ ,  $a_{2,4}$ ,  $a_{3,4}$ ,  $a_{4,4}$ , de tal manera, que  $-1$  es un valor propio de  $A$  con vectores propios

$$\begin{pmatrix} V_{1,1}(1) \\ V_{2,1}(1) \\ V_{3,1}(1) \\ V_{4,1}(1) \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, si el problema 2.1.2 admite por solución  $V(z)$  tal que  $V_{4,1}(1) \neq 0$ , entonces es posible encontrar una solución única del problema 2.1.1, donde  $Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(1) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . De hecho, se puede proceder de manera directa a partir de la función matricial

$$W(z) = Y(z) \begin{pmatrix} (z-1)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

debido a que  $z = 1$  es un cero de los polinomios  $Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z)$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ . De un modo más preciso, se formula el siguiente problema:

**Problema 2.1.3.** Encontrar una función matricial  $W(z) \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  de manera que:

I.  $W(z)$  sea analítica en  $\mathbb{C} \setminus (0, 1)$ ,

II.

$$\begin{aligned} W_+(z) &= W_-(z) \begin{pmatrix} z-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1(z) & w_2(z) \\ 0 & 1 & w_2(z) & w_3(z) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} (z-1)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= W_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & (z-1)w_1(z) & (z-1)w_2(z) \\ 0 & 1 & w_2(z) & w_3(z) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in (1, 0), \end{aligned}$$

III.

$$W(z) \begin{pmatrix} z^{-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Téngase en cuenta que  $\det W(z) = 1$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , por tanto, el problema 2.1.3 es un problema de Riemann-Hilbert determinado, con una solución única siempre que exista. Luego, si se escribe la  $i$ -ésima fila de  $W(z)$  como

$$(W_{i,1} \ W_{i,2} \ W_{i,3} \ W_{i,4}), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

entonces, se deduce claramente que  $W_{i,1}(z)$  y  $W_{i,2}(z)$  son polinomios de grado  $n + \delta_{i,1} - 1$  y  $n + \delta_{i,2} - 1$ , respectivamente. En consecuencia

$$Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z) = (z-1)W_{i,1}(z), \quad Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(1) = 0, \quad (2.10)$$

$$Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z) = W_{i,2}(z), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.11)$$

## 2.2. Problema de aproximación racional simultánea

En esta sección, se establecerá una relación, entre cada una de las soluciones del problema de Riemann-Hilbert 2.1.1, con un problema de aproximación racional simultánea cerca del infinito.

Obsérvese que a partir de la expresión (2.4), se deduce lo siguiente

$$\begin{aligned} Y_{i,3}^{(n)}(z) &= \int_0^1 \frac{Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(x) \mp Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z) + \left( Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(x) \mp Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z) \right) \log x}{z-x} dx, \\ &= Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z) \int_0^1 \frac{dx}{z-x} + Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z) \int_0^1 \frac{\log x}{z-x} dx - C_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z), \end{aligned}$$



donde

$$C_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) = \int_0^1 \frac{Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z) - Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(x) + \left( Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z) - Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(x) \right) \log x}{z-x} dx,$$

es un polinomio de grado a lo más  $n + \delta_{i,1}$ . Además, abusando de la notación, en lo anterior, entiéndase por  $\mp x = -x + x$ . De manera análoga, a partir (2.5) se obtiene

$$Y_{i,4}^{(n)}(z) = Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z) \int_0^1 \frac{\log x}{z-x} dx + Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z) \int_0^1 \frac{\log^2 x}{z-x} dx - D_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z),$$

siendo

$$D_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) = \int_0^1 \frac{Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z) - Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(x) + \left( Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z) - Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(x) \right) \log x}{z-x} \log x dx,$$

también un polinomio de grado a lo más  $n + \delta_{i,1}$ . En consecuencia, para el sistema de funciones

$$f_j(z) = \frac{1}{(j-1)!} \int_0^1 \frac{\log^{j-1} x}{z-x} dx, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (2.12)$$

cuando  $j = 1, 2, 3$ , y los polinomios  $Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z)$ ,  $Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z)$ ,  $C_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z)$ , y  $D_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z)$  se consigue el siguiente problema de aproximación racional simultánea cerca del infinito

$$Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z)f_1(z) + Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z)f_2(z) - C_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) = z^{-n}\delta_{i,3} + \mathcal{O}(z^{-n-1}), \quad (2.13)$$

$$Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z)f_2(z) + 2Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z)f_3(z) - D_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) = z^{-n}\delta_{i,4} + \mathcal{O}(z^{-n-1}), \quad (2.14)$$

donde

$$Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(z) = \sum_{k=0}^{n+\delta_{i,1}} y_{k,n+\delta_{i,1}}^{(i,1)} z^k, \quad \text{con } Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(1) = 0, \quad y_{n+1,n+1}^{(1,1)} = 1, \quad (2.15)$$

$$Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(z) = \sum_{k=0}^{n+\delta_{i,2}-1} y_{k,n+\delta_{i,2}-1}^{(i,2)} z^k, \quad \text{con } y_{n,n}^{(2,2)} = 1,$$

son polinomios de grado exactamente  $n + \delta_{i,1}$  y  $n + \delta_{i,2} - 1$ , respectivamente.

Obsérvese que, tanto (2.13) como (2.14), definen un problema de aproximación racional de tipo I para los sistemas  $(f_1, f_2)$  y  $(f_2, f_3)$ , respectivamente. La combinación (2.13)-(2.14) forma un problema de aproximación de tipo II con denominador común

$$\left( Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}, Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)} \right).$$

De modo que este hecho motiva a que se denomine (2.13)-(2.14) problema de aproximación racional mixto de tipo I y tipo II.

Por otra parte, las relaciones de ortogonalidad (2.6) se pueden reescribir como sigue

$$\begin{aligned} \int_0^1 Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(x)x^k d\mu_1(x) + \int_0^1 Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(x)x^k d\mu_2(x) &= 0, \quad 0 \leq k \leq n - \delta_{i,3} - 1, \\ \int_0^1 Y_{i,1}^{(n+\delta_{i,1})}(x)x^k d\mu_2(x) + \int_0^1 Y_{i,2}^{(n+\delta_{i,2}-1)}(x)x^k d\mu_3(x) &= 0, \quad 0 \leq k \leq n - \delta_{i,4} - 1, \end{aligned}$$

donde  $d\mu_i(x) = \log^{i-1} x dx$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Obsérvese que para el sistema anterior, se tienen  $(2n - \delta_{i,3} - \delta_{i,4})$ -ecuaciones lineales con  $(2n - \delta_{i,3} - \delta_{i,4})$ -incógnitas, ya que según (2.15) se cuenta con dos coeficientes del polinomio  $Y_{1,1}^{(n+1)}(x)$ , un coeficiente de los polinomios  $Y_{i,1}^{(n)}(x)$  con  $i = 2, 3, 4$  y otro coeficiente del polinomio  $Y_{2,2}^{(n)}(x)$ , junto con las condiciones

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( Y_{3,1}^{(n)}(x) + Y_{3,2}^{(n-1)}(x) \log x \right) x^{n-1} dx &= 1, \\ \int_0^1 \left( Y_{4,1}^{(n)}(x) + Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \log x \right) \log x x^{n-1} dx &= 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

A continuación, se expone las relaciones que existen entre los problemas de aproximación racional simultánea con los problemas 2.1.1 y 2.1.3, respectivamente. Así, a partir de (2.10)-(2.11) y (2.13)-(2.14), se consigue

$$W_{i,1}(z) \int_0^1 \frac{(x-1)}{z-x} d\mu_1(x) + W_{i,2}(z) f_2(z) - \tilde{C}_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) = z^{-n} \delta_{i,3} + \mathcal{O}(z^{-n-1}), \quad (2.17)$$

$$W_{i,1}(z) \int_0^1 \frac{(x-1)}{z-x} d\mu_2(x) + 2W_{i,2}(z) f_3(z) - \tilde{D}_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) = z^{-n} \delta_{i,4} + \mathcal{O}(z^{-n-1}). \quad (2.18)$$

Obsérvese que

$$\int_0^1 \frac{x-1}{z-x} d\mu_i(x) = \int_0^1 \frac{x-z+z-1}{z-x} d\mu_i(x) = (z-1) f_i(z) - \int_0^1 d\mu_i(x),$$

y

$$\int_0^1 d\mu_1(x) = 1, \quad \int_0^1 d\mu_2(x) = \int_0^1 \log x dx = -1.$$

En consecuencia, el problema de aproximación (2.17)-(2.18) toma la forma

$$(z-1)W_{i,1}(z) f_1(z) + W_{i,2}(z) f_2(z) - \tilde{C}_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) - W_{i,1}(z) = z^{-n} \delta_{i,3} + \mathcal{O}(z^{-n-1}), \quad (2.19)$$

$$(z-1)W_{i,1}(z) f_2(z) + 2W_{i,2}(z) f_3(z) - \tilde{D}_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) + W_{i,1}(z) = z^{-n} \delta_{i,4} + \mathcal{O}(z^{-n-1}), \quad (2.20)$$

lo cual se corresponde con las ecuaciones (2.13)-(2.14). Por consiguiente, además de (2.10) y (2.11) se tiene

$$\begin{aligned} C_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) &= \tilde{C}_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) + W_{i,1}(z), \\ D_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) &= \tilde{D}_{n+\delta_{i,1}}^{(i)}(z) - W_{i,1}(z). \end{aligned}$$

Por tanto, es suficiente considerar o bien el problema 2.1.1 o bien el problema 2.1.3.

## 2.3. Aproximantes racionales a $\zeta(3)$

En esta sección se dará de forma explícita, los nuevos aproximantes racionales que prueban el teorema de Apéry, y que dan lugar a un nuevo desarrollo en fracciones continuas. Para ello, se hará uso del problema de aproximación racional simultánea, derivado de la cuarta fila de la matriz  $Y(z)$ . Se puede comprobar, que para la primera y tercera fila de esta matriz, sólo es posible determinar excelentes aproximantes racionales a  $\zeta(3)$ , aunque no prueban su irracionalidad. En cuanto a la primera fila, los resultados son similares a los de la cuarta, véase [10, 11].

Para cualquier entero positivo  $k \in \mathbb{N}$ , la función zeta de Riemann se puede expresar como (véase [23, pag. 14])

$$\zeta(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{\log^{k-1} x}{1-x} dx. \quad (2.21)$$

Nótese que esta representación está relacionada salvo un factor multiplicador con el sistema de funciones (2.12). En particular  $f_1(1)$  es la transformada de Cauchy de la medida de Lebesgue soportada en el intervalo  $(0, 1)$ ,  $f_2(1) = -\zeta(2)$ , y  $f_3(1) = \zeta(3)$ .

Así el siguiente problema de aproximación racional simultánea cerca del infinito, asociado a la cuarta fila de la matriz  $Y(z)$ , del problema de Riemann-Hilbert 2.1.1, se expresa mediante

$$Y_{4,1}^{(n)}(z) f_1(z) + Y_{4,2}^{(n-1)}(z) f_2(z) - C_n(z) = \mathcal{O}(z^{-n-1}), \quad (2.22)$$

$$Y_{4,1}^{(n)}(z) f_2(z) + 2Y_{4,2}^{(n-1)}(z) f_3(z) - D_n(z) = \mathcal{O}(z^{-n}), \quad (2.23)$$

donde  $Y_{4,1}^{(n)}(1) = 0$ , y

$$Y_{4,1}^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^n y_{k,n}^{(4,1)} z^k, \quad Y_{4,2}^{(n-1)}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} y_{k,n-1}^{(4,2)} z^k,$$

son polinomios de grado exactamente  $n$  y  $n-1$ , respectivamente.

Obsérvese que, sustituyendo  $z = 1$  en el problema de aproximación simultánea (2.22)-(2.23), se tiene a partir de (2.23) lo siguiente

$$2Y_{4,2}^{(n-1)}(1)\zeta(3) - D_n(1) = Y_{4,4}^{(n)}(1), \quad n \geq 1, \quad (2.24)$$

donde

$$D_n(z) = \int_0^1 \frac{Y_{4,1}^{(n)}(z) - Y_{4,1}^{(n)}(x) + \left( Y_{4,2}^{(n-1)}(z) - Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \right) \log x}{z-x} \log x dx, \quad (2.25)$$

y

$$Y_{4,4}^{(n)}(z) = \int_0^1 \frac{Y_{4,1}^{(n)}(x) + Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \log x}{z-x} \log x dx. \quad (2.26)$$

Así pues, el sistema de ecuaciones lineales que se deriva de (2.22)-(2.23), y que posibilita determinar los coeficientes (incógnitas) de los polinomios  $Y_{4,2}^{(n-1)}(z)$  y  $Y_{4,1}^{(n)}(z)$ , viene dado mediante las relaciones de ortogonalidad

$$\int_0^1 x^k \left( Y_{4,1}^{(n)}(x) + Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \log x \right) dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (2.27)$$

$$\int_0^1 x^k \left( Y_{4,1}^{(n)}(x) + Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \log x \right) \log x dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-2, \quad (2.28)$$

conjuntamente con las dos condiciones adicionales,  $Y_{4,1}^{(n)}(1) = 0$  y (2.16), resultantes del problema de Riemann-Hilbert 2.1.1.

Sin embargo, esta última normalización es irrelevante en lo sucesivo, debido a que se trata simplemente de un factor multiplicador, lo cual implica que la solución del anterior sistema de ecuaciones, es única, salvo dicho factor. Nótese además, que a partir de las relaciones (2.25) y (2.26) se deduce fácilmente que este factor se cancela en (2.24), de ahí su irrelevancia.

Obsérvese que las condiciones de ortogonalidad (2.27) y (2.28) se pueden reescribir a partir de las siguientes formas

$$F_n(x) = Y_{4,1}^{(n)}(x) + Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \log x \quad \text{y} \quad G_n(x) = F_n(x) \log x, \quad (2.29)$$

como sigue

$$\int_0^1 F_n(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (2.30)$$

$$\int_0^1 G_n(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-2. \quad (2.31)$$

Evidentemente, a partir de (2.30)-(2.31) se verifica lo siguiente

$$\int_0^1 F_n(x) (P(x) + Q(x) \log x) dx = 0, \quad \forall P(x) \in \mathbb{P}_{n-1}, Q(x) \in \mathbb{P}_{n-2}.$$

Nótese además, que esta relación se puede interpretar como una condición de ortogonalidad entre dos formas (2.29) diferentes, es decir

$$\int_0^1 F_n(x) F_m(x) dx = 0, \quad \text{siempre que} \quad m \neq n.$$

Claramente, otra consecuencia de las relaciones de ortogonalidad (2.30)-(2.31) queda reflejada en las siguientes relaciones

$$\int_0^1 p(x) \frac{F_n(x)}{z-x} dx = p(z) \int_0^1 \frac{F_n(x)}{z-x} dx, \quad (2.32)$$

$$\int_0^1 q(x) \frac{G_n(x)}{z-x} dx = q(z) \int_0^1 \frac{G_n(x)}{z-x} dx, \quad (2.33)$$

siendo  $p(x)$  y  $q(x)$  polinomios arbitrarios de grado a lo más  $n$  y  $n-1$ , respectivamente. Así, definiendo

$$R_{1,n}(t) = \int_0^1 F_n(x) x^t dx \quad \text{y} \quad R_{2,n}(t) = \int_0^1 G_n(x) x^t dx, \quad (\operatorname{Re} t > -1), \quad (2.34)$$

y aplicando la identidad

$$\int_0^1 x^i \log^j x dx = (-1)^j j! \frac{1}{(i+1)^{j+1}}, \quad (2.35)$$

se tiene

$$\begin{aligned} R_{1,n}(t) &= \sum_{k=0}^n \frac{y_{k,n}^{(4,1)}}{t+k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_{k,n-1}^{(4,2)}}{(t+k+1)^2}, \\ R_{2,n}(t) &= -\sum_{k=0}^n \frac{y_{k,n}^{(4,1)}}{(t+k+1)^2} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_{k,n-1}^{(4,2)}}{(t+k+1)^3}. \end{aligned}$$

Luego, basado en lo anterior y utilizando la condición (2.9), que implica que  $Y_{4,1}^{(n)}(1) = 0$  y las condiciones de ortogonalidad (2.30)-(2.31), se deduce el siguiente resultado

$$R_{1,n}(t) = \frac{(-t)_n^2}{(t+1)_{n+1}^2} \left( \frac{t+n+1}{t-n+1} \right),$$

de donde se infiere

$$R_{2,n}(t) = 2R_{1,n}(t) \left[ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{t-k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{t+k} + \frac{n}{(t+1)^2 - n^2} \right].$$

Obsérvese que estas dos últimas expresiones, representan la continuación analítica de las funciones que figuran en (2.34). En consecuencia, los coeficientes  $y_{k,n}^{(4,1)}$  y  $y_{k,n-1}^{(4,2)}$  se pueden escribir explícitamente, como sigue

$$\begin{aligned} y_{k,n-1}^{(4,2)} &= -(t+k+1)^2 R_{1,n}(t) \Big|_{t=-k-1}, \quad k = 0, \dots, n-1, \\ &= \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \left( \frac{n-k}{n+k} \right), \end{aligned} \tag{2.36}$$

y

$$\begin{aligned} y_{k,n}^{(4,1)} &= \frac{d}{dt} [(t+k+1)^2 R_{1,n}(t)] \Big|_{t=-k-1}, \quad k = 0, \dots, n-1, \\ &= 2y_{k,n-1}^{(4,2)} \left[ H_{n+k-1} - 2H_k + H_{n-k-1} + \frac{n}{n^2 - k^2} \right], \end{aligned} \tag{2.37}$$

donde, en particular,

$$\begin{aligned} y_{n,n}^{(4,1)} &= (t+n+1) R_{1,n}^{(4)}(t) \Big|_{t=-n-1} \\ &= -\frac{2}{n} \binom{2n-1}{n-1}^2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Obsérvese que a partir de las expresiones anteriores, se deduce claramente que  $y_{k,n-1}^{(4,2)} \in \mathbb{Z}$  y  $l_n y_{k,n}^{(4,1)} \in \mathbb{Z}$ . Además, teniendo en cuenta (2.36)-(2.38) y (2.25), se infieren las siguientes expresiones

$$Y_{4,2}^{(n-1)}(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k}^2 \left( \frac{n-k}{n+k} \right), \quad n \geq 1, \tag{2.39}$$

$$D_n(1) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_{k,n-1}^{(4,2)} H_k^{(3)} - \sum_{k=1}^n y_{k,n}^{(4,1)} H_k^{(2)}, \quad n \geq 1.$$

Por razones de brevedad, se denotarán las sucesiones implicadas en (2.24), como

$$\begin{aligned} (q_n)_{n \geq 1} &= \left\{ 2Y_{4,2}^{(n-1)}(1) \right\}_{n \geq 1}, & (p_n)_{n \geq 1} &= \{D_n(1)\}_{n \geq 1}, \\ (r_n)_{n \geq 1} &= \left\{ Y_{4,4}^{(n)}(1) \right\}_{n \geq 1}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

De esta manera, (2.24) se reescribe como sigue

$$q_n \zeta(3) - p_n = r_n, \quad n \geq 1. \quad (2.41)$$

Llegado a este punto, obsérvese que una de las principales dificultades en el estudio de la irracionalidad de  $\zeta(3)$ , es determinar si los elementos de la sucesión residuo (2.41) se anulan o no [10, 11]. En esencia, dos enfoques diferentes se han propuesto para responder a esta cuestión, la integral de contorno propuesta por Nesterenko [57] y la integral doble que involucra los polinomios de Legendre, considerada por Beukers [18, 19, 20, 82, 89]. Una vez se ha señalado lo anterior, sería interesante formular la siguiente pregunta: ¿será posible que los elementos de la sucesión residuo  $(r_n)_{n \geq 1}$  dados en (2.41) no se anulen? El siguiente lema da una respuesta simple a la pregunta anterior (véase [10, 11]).

**Lema 2.3.1.** *Supóngase que  $Y_{4,1}^{(n)}(x) \in \mathbb{P}_n \setminus \{0\}$ ,  $Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \in \mathbb{P}_{n-1} \setminus \{0\}$  son soluciones del problema de aproximación simultánea (2.22)-(2.23). Entonces, para  $n = 1, 2, \dots$ , la función residuo  $Y_{4,4}^{(n)}(z)$  no se anula en  $z = 1$ .*

### Demostración

En efecto, supóngase que  $Y_{4,4}^{(n)}(1) = 0$ , eso significa,

$$r_n = \int_0^1 \frac{Y_{4,1}^{(n)}(x) + Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \log x}{1-x} \log x dx = 0.$$

Luego, considerando la función auxiliar

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2 \left( Y_{4,1}^{(n)}(x) + Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \log x \right)^2}{1-x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

donde  $Y_{4,1}^{(n)}(x)$  y  $Y_{4,2}^{(n-1)}(x)$  son las soluciones polinomiales del problema de aproximación simultánea (2.22)-(2.23) y teniendo en cuenta que  $f_n(x) \geq 0$ , así como

$$\int_0^1 f_n(x) dx > 0.$$

Entonces, se deduce lo siguiente

$$\begin{aligned}
0 &< \int_0^1 f_n(x) dx = 2 \int_0^1 \frac{\left(Y_{4,1}^{(n)}(x) + Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \log x\right)^2}{1-x} dx \\
&= 2 \int_0^1 \frac{Y_{4,1}^{(n)}(x)^2 + 2Y_{4,1}^{(n)}(x)Y_{4,2}^{(n-1)}(x) \log x + Y_{4,2}^{(n-1)}(x)^2 \log^2 x}{1-x} dx \\
&= 2 \int_0^1 \frac{Y_{4,1}^{(n)}(x)F_n(x)}{1-x} dx + 2 \int_0^1 \frac{Y_{4,2}^{(n-1)}(x)G_n(x)}{1-x} dx \\
&= 2Y_{4,1}^{(n)}(1) \int_0^1 \frac{F_n(x)}{1-x} dx + 2Y_{4,2}^{(n-1)}(1) \int_0^1 \frac{G_n(x)}{1-x} dx \\
&= q_n r_n.
\end{aligned}$$

Por tanto,  $r_n$  no puede anularse. Esta contradicción prueba la hipótesis inicial. De este modo, el lema queda demostrado.  $\square$

Como consecuencia del lema anterior, los elementos de la sucesión  $(r_n)_{n \geq 1}$ , tienen el mismo signo que  $(q_n)_{n \geq 1}$ . Además de ello, dichos elementos son estrictamente positivos. Éste hecho se debe a que  $(q_n)_{n \geq 1}$  forma una sucesión estrictamente positiva, véase (2.36).

## 2.4. Relación de recurrencia de tipo Apéry e irracionalidad de $\zeta(3)$

Obviamente, del problema de aproximación racional simultánea (2.22)-(2.23), se observa que la función residuo  $Y_{4,4}^{(n)}(z)$  decrece en el infinito, mientras que el polinomio  $Y_{4,2}^{(n-1)}(z)$  crece. Sin embargo, no es evidente que este comportamiento se conserve en el punto singular  $z = 1$ . A continuación, se va a probar que las sucesiones numéricas formadas por  $Y_{4,2}^{(n-1)}(1)$  y  $Y_{4,4}^{(n)}(1)$ , van a conservar tal comportamiento y además serán linealmente independientes. En los lemas que vienen a continuación, se dará cumplida respuesta a tales cuestiones.

**Lema 2.4.1.** *Las sucesiones  $(q_n)_{n \geq 1}$  y  $(r_n)_{n \geq 1}$  son linealmente independientes.*

### Demostración

En efecto, es suficiente probar, que el análogo del determinante wronskiano para  $q_n$  y  $r_n$  no se anula, es decir

$$W(q_n, r_n) = \det \begin{pmatrix} q_n & r_n \\ q_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0, \quad n \geq 1.$$

Ahora, considérese la siguiente integral

$$I_n = 2 \int_0^1 \frac{F_n(x) F_{n+1}(x)}{1-x} dx.$$

Luego, usando las expresiones (2.32)-(2.33) así como la condición  $Y_{4,1}^{(n)}(1) = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned}
I_n &= 2 \int_0^1 \frac{F_n(x) F_{n+1}(x)}{1-x} dx \\
&= 2 \int_0^1 \frac{Y_{4,1}^{(n)}(x) F_{n+1}(x)}{1-x} dx + 2 \int_0^1 \frac{Y_{4,2}^{(n-1)}(x) G_{n+1}(x)}{1-x} dx \\
&= 2Y_{4,2}^{(n-1)}(1) \int_0^1 \frac{G_{n+1}(x)}{1-x} dx = q_n r_{n+1}.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
I_n &= 2 \int_0^1 \frac{F_n(x) F_{n+1}(x)}{1-x} dx \\
&= 2 \int_0^1 \frac{Y_{4,1}^{(n+1)}(x) F_n(x)}{1-x} dx + 2 \int_0^1 \frac{Y_{4,2}^{(n)}(x) G_n(x)}{1-x} dx \\
&= q_{n+1} r_n - 2 \left( y_{n+1, n+1}^{(4,1)} R_{1,n}(n) + y_{n,n}^{(4,2)} R_{2,n}(n-1) \right).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Igualando (2.42) y (2.43) se obtiene

$$\begin{aligned}
W(q_n, r_n) &= q_n r_{n+1} - q_{n+1} r_n = p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n \\
&= -2 \left[ y_{n+1, n+1}^{(4,1)} R_{1,n}(n) + y_{n,n}^{(4,2)} R_{2,n}(n-1) \right] \\
&= -\frac{4(2n+1)(3n^2+3n+1)}{n^3(n+1)^3} \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

De esta forma, el lema queda demostrado.  $\square$

**Teorema 2.4.1.** *Las sucesiones  $(p_n)_{n \geq 1}$ ,  $(q_n)_{n \geq 1}$  y  $(r_n)_{n \geq 1}$  verifican la siguiente relación de recurrencia de tipo Apéry*

$$\alpha_n y_{n+2} + \beta_n y_{n+1} + \gamma_n y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.45}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= (n+2)^3(2n+1)(3n^2+3n+1), \\
\beta_n &= -2(102n^6 + 612n^5 + 1462n^4 + 1768n^3 + 1143n^2 + 382n + 52), \\
\gamma_n &= n^3(2n+3)(3n^2+9n+7).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

### Demostración

En efecto, a partir del lema 2.4.1 y (2.44), se tiene

$$\begin{aligned}
q_{n+1} r_{n+2} &= q_{n+2} r_{n+1} - W_{n+1} \Leftrightarrow r_{n+2} = \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} r_{n+1} - \frac{W_{n+1}}{q_{n+1}}, \\
q_n r_{n+1} &= q_{n+1} r_n - W_n \Leftrightarrow \frac{q_n}{q_{n+1}} r_{n+1} = r_n - \frac{W_n}{q_{n+1}},
\end{aligned}$$



donde

$$W_n = \frac{4(2n+1)(3n^2+3n+1)}{n^3(n+1)^3}.$$

De esta manera, multiplicando la primera ecuación por  $W_n$ , la segunda ecuación por  $-W_{n+1}$ , y adicionado ambas ecuaciones se obtiene

$$W_n r_{n+2} - \left( W_n \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} + W_{n+1} \frac{q_n}{q_{n+1}} \right) r_{n+1} + W_{n+1} r_n = 0, \quad n \geq 1.$$

Luego, multiplicando la ecuación anterior por  $n^3(n+1)^3(n+2)^3$ , se consigue

$$\alpha_n r_{n+2} - \tilde{\beta}_n r_{n+1} + \gamma_n r_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

donde  $\alpha_n$  y  $\gamma_n$  están dados en (2.46), y

$$\tilde{\beta}_n = \alpha_n \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} + \gamma_n \frac{q_n}{q_{n+1}}. \quad (2.47)$$

Claramente, lo anterior implica la verificación de la relación de recurrencia

$$\alpha_n y_{n+2} - \tilde{\beta}_n y_{n+1} + \gamma_n y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.48)$$

por las sucesiones involucradas en (2.24). Además, cualquier solución de (2.48) pertenece al subespacio generado por dos soluciones linealmente independientes, es decir,  $\{q_n, p_n\}$ , o equivalentemente,  $\{q_n, r_n\}$ . También, de la ecuación (2.48) se tiene

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_n &= \alpha_n \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} + \gamma_n \frac{p_n}{p_{n+1}} = \alpha_n \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}} + \gamma_n \frac{r_n}{r_{n+1}} \\ &= \alpha_n \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} + \gamma_n \frac{q_n}{q_{n+1}}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Nótese además, que a partir de (2.47) se deduce que la sucesión  $\tilde{\beta}_n/n^6$  converge cuando  $n \rightarrow \infty$  (véase [10, 11]). Si por el contrario, esta sucesión fuese divergente, entonces se comportaría de igual modo que el término divergente del miembro derecho de (2.47), que sin pérdida de generalidad, sería  $q_{n+2}/q_{n+1}$ . A continuación, asumiendo este comportamiento para  $\tilde{\beta}_n$  en la ecuación (2.48) cuando  $n$  es suficientemente grande, se tendría que  $q_{n+2}/q_{n+1}$  converge, contradiciendo de esta forma la hipótesis inicial. Ahora, sólo es una cuestión de realizar un simple cálculo, para determinar de forma explícita el coeficiente  $\tilde{\beta}_n = an^6 + bn^5 + cn^4 + dn^3 + en^2 + fn + g$ . De esta manera, a partir de (2.39) y (2.49) se consigue un sistema de ecuaciones lineales para determinar las incógnitas  $a, b, c, d, e, f$  y  $g$ . En particular, para  $n = 1, 2, \dots, 7$  dicho sistema conduce a la siguiente solución  $a = 204, b = 1224, c = 2924, d = 3536, e = 2286, f = 764$  y  $g = 104$ . Por tanto,  $\tilde{\beta}_n = -\beta_n$ , lo cual completa la demostración.  $\square$

Obsérvese que haciendo uso de las expresiones

$$q_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} y_{k,n-1}^{(4,2)} \quad \text{y} \quad p_n = 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_{k,n-1}^{(4,2)} H_k^{(3)} - \sum_{k=1}^n y_{k,n}^{(4,1)} H_k^{(2)}, \quad (2.50)$$

así como  $y_{k,n-1}^{(4,2)} \in \mathbb{Z}$ ,  $l_n y_{k,n}^{(4,1)} \in \mathbb{Z}$ , y teniendo en cuenta que

$$l_n^j \sum_{\nu=1}^k \frac{1}{\nu^j} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad j \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.51)$$

se deduce claramente que  $q_n \in \mathbb{Z}$  y  $l_n^3 p_n \in \mathbb{Z}$ .

Es importante destacar, que los nuevos aproximantes racionales (2.50) también prueban la irracionalidad de  $\zeta(3)$ , lo cual se muestra en el siguiente corolario.

**Corolario 2.4.2.** (Teorema de Apéry) *El número real  $\zeta(3)$  es irracional.*

### Demostración

En efecto, la ecuación característica para (2.45) es

$$\lambda^2 - 34\lambda + 1, \quad (2.52)$$

y sus ceros son

$$\lambda_1 = (\sqrt{2} + 1)^4 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = (\sqrt{2} - 1)^4, \quad (2.53)$$

respectivamente. Por consiguiente, a partir del teorema de Perron 1.2.1 se consigue el comportamiento asintótico  $q_n = \mathcal{O}(\lambda_1^n)$  y  $r_n = \mathcal{O}(\lambda_2^n)$ , cuando  $n$  tiende a infinito, para las dos soluciones linealmente independientes, respectivamente. De esta manera, a partir de (2.41) se tiene

$$q_n \zeta(3) - p_n = \mathcal{O}\left(\left(\sqrt{2} - 1\right)^{4n}\right).$$

Luego haciendo uso del lema 1.4.2 se obtiene

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{l_n^3 (q_n \zeta(3) - p_n)} \leq e^3 \left(\sqrt{2} - 1\right)^4 = 0,591263 \dots < 1.$$

Así, la irracionalidad de  $\zeta(3)$  se deduce a partir del lema 1.4.1. □

**Teorema 2.4.3.** *Se verifica el siguiente desarrollo en fracciones continuas*

$$\zeta(3) = \frac{2}{|2} + \frac{-42}{|125} + \frac{760}{|Q_3} + \frac{P_4}{|Q_4} + \dots + \frac{P_n}{|Q_n} + \dots, \quad (2.54)$$

donde

$$P_n = -(n-2)^3(n-1)^3(2n-5)(2n-1)(3n^2-15n+19)(3n^2-3n+1),$$

y

$$Q_n = -2(102n^6 - 612n^5 + 1462n^4 - 1768n^3 + 1143n^2 - 382n + 52).$$

### Demostración

En efecto, fijando  $p_{-1} = q_0 = 1$  y  $p_0 = q_{-1} = 0$ , por el teorema 1.2.2 se concluye que

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, & a_2 &= 125/8, \\ b_1 &= 2, & b_2 &= -21/4. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Además, a partir de la relación de recurrencia (2.45) se tiene

$$y_n = -\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}y_{n-1} - \frac{\gamma_{n-2}}{\alpha_{n-2}}y_{n-2}.$$

De esta manera, se han construido los elementos de la fracción continua irregular (1.5) la cual satisface (2.55) y

$$a_n = -\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}, \quad b_n = -\frac{\gamma_{n-2}}{\alpha_{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Ahora ya se está en condiciones de aplicar el teorema 1.2.3 con la elección  $c_0 = c_1 = 1$ ,  $c_2 = 8$  y  $c_n = -\alpha_{n-2}$ , para  $n \geq 3$ , obteniéndose de este modo el resultado deseado.

## 2.5. Discusión de resultados

En esta sección se discuten los principales resultados alcanzados a lo largo del capítulo. A continuación, se muestra una tabla comparativa, entre los aproximantes de Apéry y los de la primera, tercera y cuarta fila de  $Y(z)$ , respectivamente.

$n$	$r_n^{(0,0)}$	$Y_{1,4}^{(n)}(1)$	$Y_{3,4}^{(n)}(1)$	$Y_{4,4}^{(n)}(1)$
4	$1,173 \times 10^{-7}$	$-1,036 \times 10^{-7}$	$0,223 \times 10^{-4}$	$9,674 \times 10^{-7}$
10	$2,235 \times 10^{-17}$	$-2,116 \times 10^{-17}$	$1,357 \times 10^{-14}$	$1,503 \times 10^{-16}$
25	$6,500 \times 10^{-41}$	$-6,354 \times 10^{-41}$	$1,257 \times 10^{-37}$	$4,014 \times 10^{-40}$
37	$1,550 \times 10^{-59}$	$-1,526 \times 10^{-59}$	$4,885 \times 10^{-56}$	$9,393 \times 10^{-59}$
47	$5,322 \times 10^{-75}$	$-5,257 \times 10^{-75}$	$2,255 \times 10^{-71}$	$3,199 \times 10^{-74}$
50	$1,239 \times 10^{-79}$	$-1,225 \times 10^{-79}$	$5,664 \times 10^{-76}$	$7,433 \times 10^{-79}$

Como se puede apreciar, el comportamiento que siguen las sucesiones residuos correspondientes a la primera, tercera y cuarta fila de  $Y(z)$ , respectivamente, es similar al comportamiento de la sucesión residuo generada a partir de los aproximantes de Apéry. Además de ello, estas filas dan lugar a sucesiones de aproximantes racionales a  $\zeta(3)$  que verifican una relación de recurrencia de segundo orden, con el mismo polinomio característico dado por la relación de recurrencia de Apéry (2.1), por ejemplo, para la primera fila se tiene la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{aligned} (n+1)^3(n+3)^4(3n^2+6n+2)y_{n+2} \\ - (n+2)^4(2n+3)(51n^4+306n^3+631n^2+516n+126)y_{n+1} \\ + (n+1)^4(n+2)^3(3n^2+12n+11)y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$v_1 = -19/16, \quad v_2 = -3635/81, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = -112/3.$$

De esta manera, según el teorema de Perron, se corrobora lo explicado anteriormente. Además, a partir de la relación de recurrencia, se tiene el siguiente desarrollo en fracciones continuas

$$\zeta(3) = \frac{19}{16} + \frac{-1164}{58160} + \frac{-8643024}{330075} +$$

$$+ \dots + \frac{-n^7 (n-1)^4 (n-2)^3 (3n^2-1) (3n^2-12n+11)}{n^4 (2n-1) (51n^4 - 102n^3 + 19n^2 + 32n - 14)} + \dots$$

## Capítulo 3

---

# Aproximantes diofánticos de $\zeta(3)$ y $\zeta(4)$

---

A pesar del tiempo transcurrido desde el descubrimiento de Apéry, sólo se conocen unas pocas sucesiones de aproximantes racionales distintas a (3) que prueban la irracionalidad de  $\zeta(3)$  [44, 59, 72]. La primera parte de este capítulo, se dedica a introducir, nuevas (infinitas) sucesiones de aproximantes racionales que prueban el teorema de Apéry. En la primera sección, se obtiene un conjunto de aproximantes racionales clasificados en doce tipos [12],  $q_n^{(i,j)} \zeta(3) - p_n^{(i,j)}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , que dependen de ciertos parámetros, los cuales permiten generar infinitos aproximantes cuya sucesión residuo es

$$q_n^{(i,j)} \zeta(3) - p_n^{(i,j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} R_{1,n}^{(i,j)}(\nu-1) \left( \frac{\pi}{\sin \pi\nu} \right)^2 d\nu, \quad (3.1)$$

donde las funciones  $R_{1,n}^{(i,j)}(\nu-1)$ , son modificaciones de la función (5). La segunda sección, se dedica a vincular estos nuevos aproximantes racionales con un problema de aproximación racional simultánea cerca del infinito. De esta manera, en la tercera sección, se determina explícitamente, el análogo del determinante wronskiano (3.25) para las sucesiones involucradas en (3.1) para  $i = 1$  y  $j = 2$ , y a partir del mismo se deduce la relación de recurrencia (3.26) correspondiente a estos aproximantes racionales, así como un nuevo desarrollo en fracciones continuas (3.28) para  $\zeta(3)$ .

Las últimas dos secciones de este capítulo, están dedicadas al estudio de ciertas funciones racionales (3.39) [14], deducidas a partir de un problema de aproximación racional simultánea, de las cuales se infieren nuevos aproximantes racionales a  $\zeta(4)$ , clasificados en tres tipos  $q_n^{(l)} \zeta(4) - p_n^{(l)}$ ,  $l = 1, 2, 3$ , y cuyas sucesiones residuos se escriben en la forma

$$q_n^{(l)} \zeta(4) - p_n^{(l)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} R_{1,n}^{(l)}(\nu-1) \left( \frac{\pi}{\sin \pi\nu} \right)^2 d\nu,$$

donde las funciones racionales  $R_{1,n}^{(l)}(t)$ ,  $l = 1, 2, 3$ , vienen dadas en (3.39). Además de ello, a partir de estas funciones racionales (3.39), se obtienen nuevas relaciones de recurrencia de segundo orden, tras aplicarle el algoritmo de Zeilberger [4, 5, 6, 7, 64, 65, 67] a (3.39), las que permiten escribir de forma directa, nuevos desarrollos en fracciones continuas para  $\zeta(4)$ . Cabe destacar, que estas relaciones de recurrencia de segundo orden, no brindan aproximantes diofánticos que prueban la irracionalidad de  $\zeta(4)$ , sin embargo, presentan un eficiente y rápido algoritmo para el cálculo de esta constante. También, existen otros resultados, relacionados con el número  $\zeta(4)$ , los cuales han sido desarrollados en su gran mayoría por Zudilin (véase [15, 24, 41, 84, 98, 100, 101, 103]).

### 3.1. Nuevos aproximantes diofánticos de $\zeta(3)$

Defínase las siguientes sucesiones de funciones racionales

$$\left( R_{1,n}^{(i,j)}(t) \right)_{n \geq 0}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3,$$

donde

$$R_{1,n}^{(i,j)}(t) = \frac{\theta^{(i,j)}(t) (-t)_n^2}{(t+1)_{n+1}^2}, \quad (3.2)$$

y

$$\theta^{(i,j)}(t) = \frac{[\delta_{1,j}(t+n+\rho) + \delta_{2,j}(t+\vartheta n+1) + \delta_{3,j}(vt-\chi n-\psi)]^{\delta_{i,2}+1}}{(t-n+1)^{2-\delta_{i,1}}(t+n+1)^{-\delta_{i,3}}}, \quad (3.3)$$

con  $\rho \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ,  $\vartheta \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ,  $v, \chi \in \mathbb{N}$  ( $\chi \geq v$ ),  $\psi \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $\delta_{i,j}$  que denota la función delta de Kronecker.

Obsérvese que el desarrollo en fracciones simples de (3.2) viene dado mediante

$$R_{1,n}^{(i,j)}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{a_{k,n}^{(i,j)}}{t+k+1} - \sum_{k=0}^{n-\delta_{i,3}} \frac{b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}}{(t+k+1)^2}, \quad (3.4)$$

con coeficientes

$$\begin{aligned} b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)} &= -(t+k+1)^2 R_{1,n}^{(i,j)}(t) \Big|_{t=-k-1}, \quad k = 0, \dots, n - \delta_{i,3}, \\ &= -\binom{n+k}{k}^2 \binom{n}{k} \theta^{(i,j)}(-k-1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

y

$$\begin{aligned} a_{k,n}^{(i,j)} &= \operatorname{Res}_{t=-k-1} R_{1,n}^{(i,j)}(t), \quad k = 0, \dots, n - \delta_{i,3}, \\ &= 2b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)} [H_{n+k-1} - 2H_k + H_{n-k-\delta_{i,3}} - \varphi^{(i,j)}(-k-1)], \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde

$$\varphi^{(i,j)}(t) = \frac{d}{dt} \log \theta^{(i,j)}(t).$$

Por otra parte, se cumple la siguiente situación particular

$$\begin{aligned} a_{n,n}^{(3,j)} &= (t+n+1) R_{1,n}^{(3,j)}(t) \Big|_{t=-n-1} \\ &= \frac{(-1)^{\delta_{3,j}}}{n^{2-\delta_{2,j}}} \binom{2n-1}{n-1}^2 \sigma_{3,j}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $\sigma_{3,1} = \rho - 1$ ,  $\sigma_{3,2} = \vartheta - 1$ ,  $\sigma_{3,3} = v(n+1) + \chi n + \psi$ . Además, a partir de las anteriores expresiones explícitas de los coeficientes (3.5)-(3.7) se verifica

$$n^{\omega_{i,j}} b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}, n^{\omega_{i,j}} l_n a_{k,n}^{(i,j)} \in \mathbb{Z}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (3.8)$$

Ahora bien, denotando mediante

$$R_{2,n}^{(i,j)}(t) = \frac{d}{dt} R_{1,n}^{(i,j)}(t),$$

se deduce

$$R_{2,n}^{(i,j)}(t) = 2R_{1,n}^{(i,j)}(t) \left[ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{t-k} - \sum_{k=1}^{n-\delta_{i,3}+1} \frac{1}{t+k} + \varphi^{(i,j)}(t) \right]. \quad (3.9)$$

Para el resultado principal de esta sección, se necesitarán los siguientes lemas.

**Lema 3.1.1.** *Es válida la siguiente relación*

$$\sum_{t \geq 0} R_{2,n}^{(i,j)}(t) = q_n^{(i,j)} \zeta(3) - p_n^{(i,j)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.10)$$

donde

$$q_n^{(i,j)} = 2 \sum_{k=0}^{n-\delta_{i,3}} b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)} \quad \text{y} \quad p_n^{(i,j)} = 2 \sum_{k=1}^{n-\delta_{i,3}} b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)} H_k^{(3)} - \sum_{k=1}^n a_{k,n}^{(i,j)} H_k^{(2)}, \quad (3.11)$$

cuyos coeficientes  $a_{k,n}^{(i,j)}$  y  $b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}$  están dados en (3.5)-(3.7). Además,  $n^{\omega_{i,j}} q_n^{(i,j)} \in \mathbb{Z}$ , y  $n^{\omega_{i,j}} l_n^3 p_n^{(i,j)} \in \mathbb{Z}$ , donde

$$(\omega_{i,j})_{4,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

### Demostración

En efecto, puesto que  $R_{1,n}^{(i,j)}(t) = \mathcal{O}(t^{-2-\delta_{i,3}})$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces se deduce

$$\sum_{k=0}^n a_{k,n}^{(i,j)} = \sum_{k=0}^n \operatorname{Res}_{t=-k-1} R_{1,n}^{(i,j)}(t) = -\operatorname{Res}_{t=\infty} R_{1,n}^{(i,j)}(t) = 0. \quad (3.12)$$

Luego, denotando

$$r_n^{(i,j)} = \sum_{t \geq 0} R_{2,n}^{(i,j)}(t),$$

se tiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} r_n^{(i,j)} &= 2 \sum_{t \geq 0} \sum_{k=0}^{n-\delta_{i,3}} \frac{b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}}{(t+k+1)^3} - \sum_{t \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{a_{k,n}^{(i,j)}}{(t+k+1)^2} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-\delta_{i,3}} \sum_{l \geq k+1} \frac{b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}}{l^3} - \sum_{k=0}^n \sum_{l \geq k+1} \frac{a_{k,n}^{(i,j)}}{l^2} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-\delta_{i,3}} b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)} \left( \sum_{l \geq 1} - \sum_{l=1}^k \right) \frac{1}{l^3} - \sum_{k=0}^n a_{k,n}^{(i,j)} \left( \sum_{l \geq 1} - \sum_{l=1}^k \right) \frac{1}{l^2} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-\delta_{i,3}} b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l^3} - 2 \sum_{k=1}^{n-\delta_{i,3}} b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)} \sum_{l=1}^k \frac{1}{l^3} + \sum_{k=1}^n a_{k,n}^{(i,j)} \sum_{l=1}^k \frac{1}{l^2}, \end{aligned}$$

la cual coincide con (3.10) al considerar las expresiones dadas en (3.11). Finalmente, usando (2.51) y las inclusiones (3.8), se deduce que  $n^{\omega_{i,j}} q_n^{(i,j)} \in \mathbb{Z}$  y  $n^{\omega_{i,j}} l_n^3 p_n^{(i,j)} \in \mathbb{Z}$ . De esta manera, el lema queda demostrado.  $\square$

**Lema 3.1.2.** *Se satisface la siguiente relación para (3.10)*

$$r_n^{(i,j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} R_{1,n}^{(i,j)}(\nu) \left( \frac{\pi}{\sin \pi \nu} \right)^2 d\nu. \quad (3.13)$$

### Demostración

En efecto, para la evaluación de la integral (3.13), se debe expresar dicha integral como límite de integrales de contorno sobre la curva  $\Omega_{n,i,j}$ , la cual se extiende a lo largo de la línea imaginaria desde  $-1/2 + iL_{n,i,j}$  hasta  $-1/2 - iL_{n,i,j}$  y luego en sentido antihorario a lo largo de un semicírculo centrado en  $-1/2$  desde  $-1/2 + iL_{n,i,j}$  hasta  $-1/2 - iL_{n,i,j}$ , donde el radio de dicho semicírculo satisface  $L_{n,i,j} > n + 2$ . Además, se toma  $L_{n,i,j}$  mayor que  $n + 2$ , a fin de que las  $n + 1$  singularidades de la función integrando queden en el interior del recinto de dicha curva. Obsérvese que sobre el arco de  $\Omega_{n,i,j}$  la función racional  $R_{1,n}^{(i,j)}(t) = \mathcal{O}(L_{n,i,j}^{-2})$ , mientras que la función  $(\sin \pi z)^{-1}$  está acotada. Ahora, por el teorema de los residuos, se puede calcular (3.13), como se muestra a continuación

$$\operatorname{Res}_{t=n} \left( R_{1,n}^{(i,j)}(z) \left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 \right) = R_{2,n}^{(i,j)}(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

lo cual se puede comprobar fácilmente considerando los siguientes desarrollos sobre los enteros

$$\begin{aligned} R_{1,n}^{(i,j)}(z) &= R_{1,n}^{(i,j)}(n) + R_{2,n}^{(i,j)}(n)(z-n) + \mathcal{O}((z-n)^2), \\ \left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 &= \frac{1}{(z-n)^2} + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$r_n^{(i,j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} R_{1,n}^{(i,j)}(\nu) \left( \frac{\pi}{\sin \pi \nu} \right)^2 d\nu.$$

Así el lema queda demostrado.  $\square$

**Teorema 3.1.1.** *Se verifica la siguiente fórmula asintótica*

$$r_n^{(i,j)} = \frac{-\pi^{3/2} \eta^{(i,j)}}{\eta^{3/2-\delta_{i,4}} 2^{1/4}} \left( \sqrt{2} - 1 \right)^{4n} (1 + o(1)),$$

donde

$$\left( \eta^{(i,j)} \right)_{4,3} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{|\vartheta|}{\vartheta} & 1 \\ 1 & \frac{|\vartheta|}{\vartheta} & 1 \\ 1 & \frac{|\vartheta|}{\vartheta} & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Demostración



En efecto, la expresión (3.13) se puede reescribir como sigue

$$r_n^{(i,j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{(1-\nu)_n^2}{(\nu)_{n+1}^2} \left( \frac{\pi}{\sin \pi \nu} \right)^2 \theta^{(i,j)}(\nu-1) d\nu. \quad (3.14)$$

Ahora, teniendo en cuenta las estimaciones

$$\log \theta^{(i,j)}(z-1) \Big|_{z=(n+1)t} \sim \begin{cases} \log \frac{(t+1)^{2-\delta_{i,1}-\delta_{i,4}}}{(t-1)^{2-\delta_{i,1}}} - \delta_{i,4} \log(n+1), & j=1, \\ \log \frac{(t+1)^{\delta_{i,3}} (t+\vartheta)^{\delta_{i,2}+1}}{(t-1)^{2-\delta_{i,1}}} - \delta_{i,4} \log(n+1), & j=2, \\ \log \frac{(t+1)^{\delta_{i,3}} (\nu t - \chi)^{\delta_{i,2}+1}}{(t-1)^{2-\delta_{i,1}}} - \delta_{i,4} \log(n+1), & j=3, \end{cases}$$

mediante cálculo directo para  $z = (n+1)t$  se obtiene

$$\begin{aligned} \log \frac{(1-z)_n^2}{(z)_{n+1}^2} \left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 \theta^{(i,j)}(z-1) \Big|_{z=(n+1)t} &= \log g^{(i,j)}(t) + 2(n+1)f(t) \\ &\quad - (2 + \delta_{i,4}) \log(n+1) + 2 \log 2\pi + \mathcal{O}(n^{-1}), \end{aligned}$$

donde

$$g^{(i,j)}(t) = \begin{cases} \frac{(t+1)^{2-\delta_{i,1}-\delta_{i,4}}}{(t-1)^{2-\delta_{i,1}}} g(t), & j=1, \\ \frac{(t+1)^{\delta_{i,3}} (t+\vartheta)^{\delta_{i,2}+1}}{(t-1)^{2-\delta_{i,1}}} g(t), & j=2, \\ \frac{(t+1)^{\delta_{i,3}} (\nu t - \chi)^{\delta_{i,2}+1}}{(t-1)^{2-\delta_{i,1}}} g(t), & j=3, \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1+t}{(1-t)t^2}, \\ f(t) &= (1-t) \log(1-t) + 2t \log t - (1+t) \log(1+t). \end{aligned}$$

Así, la expresión (3.14) se transforma en

$$r_n^{(i,j)} = \frac{2\pi i}{n^{1+\delta_{i,4}}} \int_{1/\sqrt{2}-i\infty}^{1/\sqrt{2}+i\infty} g^{(i,j)}(t) e^{2(n+1)f(t)} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})) dt.$$

Obsérvese que,  $t = 1/\sqrt{2}$  es el único máximo de la función  $\operatorname{Re} f(t)$  sobre el contorno de integración. Por tanto, utilizando el método de Laplace se obtiene

$$r_n^{(i,j)} = -\frac{\pi^{3/2} \eta^{(i,j)}}{2^{1/4} n^{1+\delta_{i,4}} (n+1)^{1/2}} \left| g^{(i,j)}(\sqrt{2}^{-1}) \right| (\sqrt{2}-1)^{4n+4} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})),$$

lo que ofrece la estimación requerida.  $\square$

Cabe señalar, que los nuevos aproximantes racionales (3.11) también prueban la irracionalidad de  $\zeta(3)$ , lo cual viene enunciado en el corolario 2.4.2.

## Demostración

En efecto, procédase por reducción al absurdo, esto es,  $\zeta(3) = p/q$ , donde  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , entonces

$$qn^{\omega_{i,j}} l_n^3 r_n^{(i,j)} = n^{\omega_{i,j}} l_n^3 q_n^{(i,j)} p - qn^{\omega_{i,j}} l_n^3 p_n^{(i,j)},$$

es un número entero distinto de cero. Por consiguiente

$$1 \leq qn^{\omega_{i,j}} l_n^3 |r_n^{(i,j)}| = \mathcal{O} \left( l_n^3 (\sqrt{2} - 1)^{4n} \right),$$

lo cual contradice la hipótesis realizada sobre la racionalidad de  $\zeta(3)$ , puesto que para cualquier  $\varepsilon > 0$  y cualquier  $n$  suficientemente grande, la estimación  $l_n < e^{(1+\varepsilon)n}$  implica que  $e^3 (\sqrt{2} - 1)^4 < 1$ .  $\square$

A continuación, se darán otras propiedades de estos nuevos aproximantes racionales a  $\zeta(3)$ .

## 3.2. Relación con un problema de aproximación simultánea

En esta sección se vincula los aproximantes racionales antes mencionados, con un problema de aproximación racional simultánea cerca del infinito. Para tal propósito, se han de definir los siguientes polinomios

$$A_n^{(i,j)}(z) = \sum_{k=0}^n a_{k,n}^{(i,j)} z^k \quad \text{y} \quad B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(z) = \sum_{k=0}^{n-\delta_{i,3}} b_{k,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)} z^k, \quad (3.15)$$

con coeficientes dados en (3.5)-(3.7). Obsérvese que  $b_{0,n-\delta_{i,3}}^{(i,j)} = -\theta^{(i,j)}(-1)$ , y a partir de la ecuación (3.12) se deduce que  $A_n^{(i,j)}(1) = 0$ . Además, haciendo uso de las expresiones (3.4) y (3.9) se tiene

$$R_{1,n}^{(i,j)}(t) = \int_0^1 F_n^{(i,j)}(x) x^t dx \quad \text{y} \quad R_{2,n}^{(i,j)}(t) = \int_0^1 G_n^{(i,j)}(x) x^t dx, \quad (\operatorname{Re} t > -1), \quad (3.16)$$

donde

$$F_n^{(i,j)}(x) = A_n^{(i,j)}(x) + B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(x) \log x \quad \text{y} \quad G_n^{(i,j)}(x) = F_n^{(i,j)}(x) \log x.$$

Nótese que las expresiones (3.2) y (3.9) representan la continuación analítica de las funciones que figuran en (3.16).

Teniendo en cuenta los ceros de las funciones racionales (3.4) y (3.9), que no dependen de los parámetros  $(\rho, \vartheta, v, \chi, \text{ y } \psi)$  implicados en (3.3), se determinan las siguientes condiciones de ortogonalidad

$$\int_0^1 F_n^{(i,j)}(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-2 + \delta_{i,1},$$

$$\int_0^1 G_n^{(i,j)}(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-2. \quad (3.17)$$

Si los coeficientes de los polinomios (3.15), fuesen desconocidos, entonces los ceros que dependen de los parámetros  $\rho, \vartheta, v, \chi, \text{ o } \psi$  proporcionan condiciones adicionales al anterior sistema indeterminado

de ecuaciones lineales para determinar estos coeficientes. Como una consecuencia de las anteriores condiciones de ortogonalidad, se tiene

$$\int_0^1 p(x) \frac{F_n^{(i,j)}(x)}{z-x} dx = p(z) \int_0^1 \frac{F_n^{(i,j)}(x)}{z-x} dx, \quad (3.18)$$

$$\int_0^1 q(x) \frac{G_n^{(i,j)}(x)}{z-x} dx = q(z) \int_0^1 \frac{G_n^{(i,j)}(x)}{z-x} dx,$$

donde  $p(z)$  y  $q(z)$  son polinomios arbitrarios de grado a lo sumo  $n + \delta_{i,1} - 1$  y  $n - 1$ , respectivamente. Denotando por

$$r_{n,1}^{(i,j)}(z) = \int_0^1 \frac{F_n^{(i,j)}(x)}{z-x} dx \quad \text{y} \quad r_{n,2}^{(i,j)}(z) = \int_0^1 \frac{G_n^{(i,j)}(x)}{z-x} dx, \quad (3.19)$$

se observa que las ecuaciones (3.17) implican que  $r_{n,1}^{(i,j)}(z) = \mathcal{O}(z^{-n-\delta_{i,1}})$  y  $r_{n,2}^{(i,j)}(z) = \mathcal{O}(z^{-n})$ . Luego, haciendo  $p(z) = q(z) = 1$  en las ecuaciones (3.18), entonces mediante una adición y sustracción apropiada de los términos polinómicos en el numerador de sus miembros derechos, se obtiene

$$\int_0^1 \frac{F_n^{(i,j)}(x)}{z-x} dx = \int_0^1 \frac{A_n^{(i,j)}(x) + B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(x) \log x}{z-x} dx \quad (3.20)$$

$$= A_n^{(i,j)}(z) f_1(z) + B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(z) f_2(z) - C_n^{(i,j)}(z),$$

$$\int_0^1 \frac{G_n^{(i,j)}(x)}{z-x} dx = \int_0^1 \frac{A_n^{(i,j)}(x) + B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(x) \log x}{z-x} \log x dx \quad (3.21)$$

$$= A_n^{(i,j)}(z) f_2(z) + 2B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(z) f_3(z) - D_n^{(i,j)}(z),$$

donde  $f_j(z)$  viene dado en (2.12) y

$$C_n^{(i,j)}(z) = \int_0^1 \frac{A_n^{(i,j)}(z) + B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(z) \log x - F_n^{(i,j)}(x)}{z-x} dx, \quad (3.22)$$

$$D_n^{(i,j)}(z) = \int_0^1 \frac{\left( A_n^{(i,j)}(z) + B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(z) \log x \right) \log x - G_n^{(i,j)}(x)}{z-x} dx. \quad (3.23)$$

En consecuencia, para el sistema de funciones (2.12) y los polinomios  $A_n^{(i,j)}(z)$ ,  $B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(z)$ ,  $C_n^{(i,j)}(z)$ , y  $D_n^{(i,j)}(z)$  se consigue un problema de aproximación racional simultánea cerca del infinito. Nótese que la solución de este problema sólo depende de los coeficientes de los polinomios  $A_n^{(i,j)}(z)$  y  $B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(z)$ , puesto que los coeficientes para  $z^{-j}$  ( $1 \leq j \leq n - 1 + \delta_{i,1}$ ) en el desarrollo en serie de Laurent de  $A_n^{(i,j)}(z) f_1(z) + B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(z) f_2(z)$  y para  $z^{-j}$  ( $1 \leq j \leq n - 1$ ) en el desarrollo en serie de  $A_n^{(i,j)}(z) f_2(z) + 2B_{n-\delta_{i,3}}^{(i,j)}(z) f_3(z)$  se anulan, mientras que los coeficientes para  $z^j$  ( $0 \leq j \leq n$ ) coinciden con los coeficientes correspondientes de  $C_n^{(i,j)}(z)$  y  $D_n^{(i,j)}(z)$ , respectivamente.

### 3.3. Relación de recurrencia de tipo Apéry para los aproximantes diofánticos de $\zeta(3)$

En lo que sigue, sin pérdida de generalidad, el desarrollo de esta sección se restringirá al caso particular  $i = 1$  y  $j = 2$ . El resto de los casos, se puede tratar como se indica en los resultados que siguen a continuación.

Considerando el caso particular  $z = 1$  en el problema de aproximación racional simultánea (3.20)-(3.21) se tiene

$$r_n^{(1,2)}(1) = 2B_n^{(1,2)}(1)\zeta(3) - D_n^{(1,2)}(1), \quad n \geq 1,$$

donde

$$(2B_n(1))_{n \geq 1} = (q_n^{(1,2)})_{n \geq 1}, \quad (D_n(1))_{n \geq 1} = (p_n^{(1,2)})_{n \geq 1}, \\ (r_{n,2}^{(1,2)}(1))_{n \geq 1} = (r_n^{(1,2)})_{n \geq 1}.$$

A continuación, se obtendrá una expresión explícita para el análogo del determinante wronskiano, el cual se escribe en función de las sucesiones anteriores, es decir

$$W(q_n^{(1,2)}, r_n^{(1,2)}) = \det \begin{pmatrix} q_n^{(1,2)} & r_n^{(1,2)} \\ q_{n+1}^{(1,2)} & r_{n+1}^{(1,2)} \end{pmatrix} = -W(q_n^{(1,2)}, p_n^{(1,2)}).$$

**Lema 3.3.1.** *Es válida la siguiente relación*

$$W(q_n, p_n) = \frac{2\mathcal{N}_n}{n^3(n+1)^3} \neq 0, \quad n \geq 1, \quad (3.24)$$

donde

$$\mathcal{N}_n = (24\vartheta^2 n^3 + 30\vartheta^2 n^2 + 16\vartheta^2 n + 3\vartheta^2 + 9\vartheta n^2 + 5\vartheta n \\ + \vartheta - 12n^3 - 21n^2 - 11n - 2), \quad \vartheta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

**Demostración**

En efecto, considerando la integral

$$I_n = 2 \int_0^1 \frac{F_n^{(1,2)}(x) F_{n+1}^{(1,2)}(x)}{1-x} dx, \quad n \geq 1,$$

y haciendo uso de las expresiones (3.18) así como de la condición  $A_n^{(1,2)}(1) = 0$  y siguiendo el mismo procedimiento utilizado en la demostración del lema 2.4.1 se tiene

$$W(q_n, r_n) = -2 \left[ a_{n+1, n+1}^{(1,2)} R_{1, n}^{(1,2)}(n) \right. \\ \left. + b_{n+1, n+1}^{(1,2)} \left( R_{2, n}^{(1,2)}(n) + R_{2, n}^{(1,2)}(n-1) \right) + b_{n, n+1}^{(1,2)} R_{2, n}^{(1,2)}(n-1) \right], \\ = -\frac{2\mathcal{N}_n}{n^3(n+1)^3}, \quad n \geq 1. \quad (3.25)$$

Para finalizar, obsérvese que  $\mathcal{N}_n$  es un polinomio de grado 2 en  $\vartheta$ , con ceros no enteros. De hecho, cuando  $n \rightarrow \infty$  sus ceros tienden a  $1/\sqrt{2}$  y  $-1/\sqrt{2}$ , respectivamente. De esta manera se deduce claramente que  $\mathcal{N}_n \neq 0$  para  $\vartheta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , y  $n \geq 1$ , lo cual completa la demostración.  $\square$

**Teorema 3.3.1.** Las sucesiones  $(p_n^{(1,2)})_{n \geq 1}$ ,  $(q_n^{(1,2)})_{n \geq 1}$  y  $(r_n^{(1,2)})_{n \geq 1}$  verifican la siguiente relación de recurrencia de segundo orden

$$\alpha_n y_{n+2} + \beta_n y_{n+1} + \gamma_n y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \vartheta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad (3.26)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (n+2)^3(24\vartheta^2 n^3 + 30\vartheta^2 n^2 + 16\vartheta^2 n + 3\vartheta^2 + 9\vartheta n^2 + 5\vartheta n + \vartheta \\ &\quad - 12n^3 - 21n^2 - 11n - 2), \\ \beta_n &= -2(408\vartheta^2 n^6 + 2346\vartheta^2 n^5 + 5336\vartheta^2 n^4 + 6130\vartheta^2 n^3 + 3810\vartheta^2 n^2 + 1268\vartheta^2 n \\ &\quad + 172\vartheta^2 + 153\vartheta n^5 + 769\vartheta n^4 + 1417\vartheta n^3 + 1143\vartheta n^2 + 382\vartheta n + 52\vartheta \\ &\quad - 204n^6 - 1275n^5 - 3181n^4 - 4011n^3 - 2667n^2 - 886n - 120), \\ \gamma_n &= n^3(24\vartheta^2 n^3 + 102\vartheta^2 n^2 + 148\vartheta^2 n + 73\vartheta^2 + 9\vartheta n^2 + 23\vartheta n + 15\vartheta \\ &\quad - 12n^3 - 57n^2 - 89n - 46). \end{aligned} \quad (3.27)$$

### Demostración

En efecto, basta seguir el procedimiento descrito en la demostración del teorema 2.4.1, para así obtener el resultado deseado.  $\square$

Obsérvese que el polinomio característico de la relación de recurrencia (3.26) viene dado por  $t^2 - 34t + 1$ , el cual coincide con el que se deriva a partir de la relación de recurrencia de Apéry [2]. En consecuencia, los nuevos aproximantes diofánticos a  $\zeta(3)$  expuestos en esta sección, no mejoran la medida de irracionalidad obtenida en [2, 18, 57], o sea ( $\mu = 13.4178202 \dots$ ).

Una consecuencia importante del teorema anterior es la representación en fracción continua del número  $\zeta(3)$ . A continuación, se presenta una de las varias posibles representaciones en fracciones continuas, las cuales se pueden deducir a partir del enfoque seguido en esta sección (véase las funciones racionales (3.2) así como el problema de aproximación simultánea (3.20)-(3.21)).

**Corolario 3.3.2.** Se verifica el siguiente desarrollo en fracciones continuas

$$\zeta(3) = \frac{9}{8} + \frac{-184}{359} + \frac{-30672}{Q_3} + \frac{P_4}{Q_4} + \dots + \frac{P_n}{Q_n} + \dots, \quad (3.28)$$

donde

$$P_n = -9(n-2)^3(n-1)^3(28n^3 - 213n^2 + 543n - 464)(28n^3 - 45n^2 + 27n - 6),$$

y

$$Q_n = 6(476n^6 - 2907n^5 + 7077n^4 - 8715n^3 + 5715n^2 - 1926n + 264).$$

### Demostración

Fijando  $p_{-1} = q_0 = 1$ ,  $p_0 = q_{-1} = 0$ , y  $\vartheta = 2$  mediante el teorema 1.2.2 se deduce

$$\begin{aligned} a_1 &= 8, & a_2 &= 359/24, \\ b_1 &= 9, & b_2 &= -23/3. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Además, a partir de la relación de recurrencia (3.26) se tiene

$$y_n = -\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}y_{n-1} - \frac{\gamma_{n-2}}{\alpha_{n-2}}y_{n-2}.$$

Por tanto, se han construido los elementos de la fracción continua irregular (1.5) la cual satisface (3.29) y

$$a_n = -\frac{\beta_{n-2}}{\alpha_{n-2}}, \quad b_n = -\frac{\gamma_{n-2}}{\alpha_{n-2}}, \quad n \geq 3.$$

Luego, haciendo uso del teorema 1.2.3, con la elección  $c_0 = c_1 = 1$ ,  $c_2 = 24$  y  $c_n = -\alpha_{n-2}$ , para  $n \geq 3$ , se consigue el resultado deseado.  $\square$

### 3.4. Problema de aproximación simultánea y aproximantes diofánticos de $\zeta(4)$

Para el sistema de funciones (2.12) y los polinomios  $\mathcal{A}_n^{(i,l)}(z)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ,  $1 \leq l \leq 3$ , considérese el siguiente problema de aproximación racional simultánea cerca del infinito

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^{i-1} \mathcal{A}_n^{(i,l)}(z) f_i(z) - \mathcal{C}_n^{(l)}(z) = \mathcal{O}(z^{-n-\delta_{1,l}}), \tag{3.30}$$

$$\sum_{i=1}^4 (-1)^i i \mathcal{A}_n^{(i,l)}(z) f_{i+1}(z) - \mathcal{D}_n^{(l)}(z) = \mathcal{O}(z^{-n}), \tag{3.31}$$

conjuntamente con las condiciones adicionales  $\mathcal{A}_n^{(i,l)}(1) = 0$ ,  $i = 1, 2, 4$ , siendo

$$\mathcal{A}_n^{(i,l)}(z) = \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j}^{(l,n)} z^j,$$

polinomios de grado exactamente  $n$ .

Al problema de aproximación simultánea (3.30)-(3.31), se le denomina, problema de aproximación racional mixto de tipo I y tipo II (véase la sección 2.2). Este problema de aproximación, conduce a un sistema de ecuaciones lineales, en el que se deben determinar  $(6n+3)$ -incógnitas, esto es, los coeficientes de los polinomios involucrados en el problema de aproximación simultánea (3.30)-(3.31).

El hecho de que los polinomios  $\mathcal{C}_n^{(l)}(z)$  y  $\mathcal{D}_n^{(l)}(z)$  dependen de  $\mathcal{A}_n^{(i,l)}$ ,  $i = 1, 2, 4$ , (véase más adelante las expresiones (3.32) y (3.34)) hace posible encontrar un sistema de ecuaciones lineales aún más pequeño para  $(4n+1)$ -incógnitas. Dicho sistema se puede inferir a partir de las condiciones de ortogonalidad (3.37). A continuación se dará una explicación detallada de estos hechos.

Obsérvese que de la expresión (3.30) se deduce

$$\sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \int_0^1 \frac{\mathcal{A}_n^{(i,l)}(z) \log^{i-1} x}{z-x} dx - \mathcal{C}_n^{(l)}(z) = \mathcal{O}(z^{-n-\delta_{1,l}}).$$

Además, teniendo en cuenta que

$$\frac{\mathcal{A}_n^{(i,l)}(z) - \mathcal{A}_n^{(i,l)}(x)}{z-x},$$

son polinomios de grado exactamente  $n-1$ , entonces se consigue

$$\sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \int_0^1 \frac{\mathcal{A}_n^{(i,l)}(z) - \mathcal{A}_n^{(i,l)}(x)}{z-x} \log^{i-1} x dx = \mathcal{C}_n^{(l)}(z) \in \mathbb{P}_n. \quad (3.32)$$

En consecuencia, el término residuo viene dado por

$$\begin{aligned} r_1^{(l,n)}(z) &= \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \int_0^1 \frac{\mathcal{A}_n^{(i,l)}(x) \log^{i-1} x}{z-x} dx \\ &= \sum_{k=n+\delta_{1,l}-1}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^1 x^k \left( \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1} \mathcal{A}_n^{(i,l)}(x) \log^{i-1} x}{(i-1)!} \right) dx = \mathcal{O}(z^{-n-\delta_{1,l}}), \end{aligned}$$

donde la condición de ortogonalidad

$$\int_0^1 x^k \left( \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1} \mathcal{A}_n^{(i,l)}(x) \log^{i-1} x}{(i-1)!} \right) dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-2 + \delta_{1,l}, \quad (3.33)$$

garantiza el orden establecido cerca del infinito impuesto por la ecuación (3.30).

De forma análoga, se procede con la ecuación (3.31) del problema de aproximación simultánea (3.30)-(3.31). De esta manera se obtiene

$$\sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i}{(i-1)!} \int_0^1 \frac{\mathcal{A}_n^{(i,l)}(x) - \mathcal{A}_n^{(i,l)}(x)}{z-x} \log^i x = \mathcal{D}_n^{(l)}(z) \in \mathbb{P}_n. \quad (3.34)$$

Por consiguiente, una segunda condición de ortogonalidad viene dada por

$$\int_0^1 x^k \left( \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1} \mathcal{A}_n^{(i,l)}(x) \log^{i-1} x}{(i-1)!} \right) \log x dx, \quad k = 0, \dots, n-2, \quad (3.35)$$

la cual garantiza el orden establecido cerca del infinito del segundo término residuo

$$\begin{aligned} r_2^{(l,n)}(z) &= \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i}{(i-1)!} \int_0^1 \frac{\mathcal{A}_n^{(i,l)}(x) \log^i x}{z-x} dx \\ &= - \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} \int_0^1 x^k \left( \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1} \mathcal{A}_n^{(i,l)}(x) \log^{i-1} x}{(i-1)!} \right) \log x dx = \mathcal{O}(z^{-n}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nótese que las condiciones de ortogonalidad (3.33) y (3.35) se pueden reescribir a partir de las siguientes formas

$$\mathcal{F}_n^{(l)}(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^{i-1} \mathcal{A}_n^{(i,l)}(x) \log^{i-1} x}{(i-1)!} \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_n^{(l)}(x) = \mathcal{F}_n^{(l)}(x) \log x,$$

como se sigue

$$\int_0^1 \mathcal{F}_n^{(l)}(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-2 + \delta_{i,1},$$

$$\int_0^1 \mathcal{G}_n^{(l)}(x) x^k dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-2. \quad (3.37)$$

Ahora, definiendo

$$\mathcal{R}_{1,n}^{(l)}(t) = \int_0^1 \mathcal{F}_n^{(l)}(x) x^t dx \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{2,n}^{(l)}(t) = \int_0^1 \mathcal{G}_n^{(l)}(x) x^t dx, \quad (\operatorname{Re} t > -1),$$

y aplicando la identidad (2.35) se obtiene

$$\mathcal{R}_{1,n}^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_{i,j}^{(l,n)}}{(t+j+1)^i},$$

$$\mathcal{R}_{2,n}^{(l)}(t) = - \sum_{i=1}^4 i \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_{i,j}^{(l,n)}}{(t+j+1)^{i+1}}. \quad (3.38)$$

Obsérvese que si  $\mathcal{R}_{1,n}^{(l)}(t)$  tiene además los mismos ceros que el polinomio

$$(t+n+2)_{n-1}^2 (t+2n+1)^{\delta_{1,l}} (2t+n+2)^{2\delta_{3,l}+1},$$

el sistema de ecuaciones lineales resultante, aún continua siendo indeterminado.

De esta forma, basándose en las anteriores condiciones adicionales, en la expresión (3.38), en la condición  $\mathcal{A}_n^{(i,l)}(1) = 0$ ,  $i = 1, 2, 4$ , y en las condiciones de ortogonalidad (3.37), se deduce al siguiente resultado

$$\mathcal{R}_{1,n}^{(l)}(t) = \frac{(-t)_n^2 (t+n+2)_{n-1}^2 \theta_{l,n}(t)}{(t+1)_{n+1}^4}, \quad 1 \leq l \leq 3, \quad (3.39)$$

donde

$$\theta_{l,n}(t) = \frac{(t+2n+1)^{\delta_{1,l}} (2t+n+2)^{2\delta_{3,l}+1}}{(t-n+1)^{2-\delta_{1,l}}}.$$

Obsérvese que, sustituyendo  $z = 1$  en el problema de aproximación simultánea (3.30)-(3.31), se tiene a partir de (3.31) lo siguiente

$$3\mathcal{A}_n^{(3,l)}(1)\zeta(4) - \mathcal{D}_n^{(l)}(1) = r_2^{(l,n)}(1), \quad n \geq 1, \quad (3.40)$$



donde

$$\mathcal{A}_n^{(3,l)}(1) = \sum_{j=0}^n \alpha_{3,j}^{(l,n)} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_n^{(l)}(1) = \sum_{i=1}^4 i \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}^{(l,n)} H_j^{(i+1)}.$$

Por razones de brevedad, se denotarán las sucesiones implicadas en (3.40), como

$$\begin{aligned} q_{n,l} &= 3 \sum_{j=0}^n \alpha_{3,j}^{(l,n)}, & p_{n,l} &= \sum_{i=1}^4 i \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}^{(l,n)} H_j^{(i+1)}, \\ (r_{n,l})_{n \geq 1} &= \left\{ r_2^{(l,n)}(1) \right\}_{n \geq 1}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

De esta manera, (3.40) se reescribe como sigue

$$q_{n,l} \zeta(4) - p_{n,l} = r_{n,l}, \quad n \geq 1. \quad (3.42)$$

Luego, escribiendo

$$\mathcal{R}_{2,n}^{(l)}(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{R}_{1,n}^{(l)}(t),$$

se tiene el siguiente lema.

**Lema 3.4.1.** *Se verifica la siguiente relación para (3.42)*

$$r_{n,l} = - \sum_{t \geq 0} \mathcal{R}_{2,n}^{(l)}(t), \quad n \geq 1.$$

**Demostración**

En efecto, desarrollando  $\mathcal{R}_{1,n}^{(l)}(t)$  en fracciones simples

$$\mathcal{R}_{1,n}^{(l)}(t) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_{i,j}^{(l,n)}}{(t+j+1)^i}, \quad (3.43)$$

y teniendo en cuenta las condiciones  $\mathcal{A}_n^{(i,l)}(1) = 0$ ,  $i = 1, 2, 4$ , se deduce lo siguiente

$$\begin{aligned} r_{n,l} &= \sum_{t \geq 0} \sum_{i=1}^4 i \sum_{j=0}^n \frac{\alpha_{i,j}^{(l,n)}}{(t+j+1)^{i+1}} = \sum_{i=1}^4 i \sum_{j=0}^n \sum_{k \geq j+1} \frac{\alpha_{i,j}^{(l,n)}}{k^{i+1}} \\ &= \sum_{i=1}^4 i \sum_{j=0}^n \alpha_{i,j}^{(l,n)} \left( \sum_{k \geq 1} - \sum_{k=1}^j \right) \frac{1}{k^{i+1}} \\ &= 3 \sum_{j=0}^n \alpha_{3,j}^{(l,n)} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^4} - \sum_{i=1}^4 i \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}^{(l,n)} \sum_{k=1}^j \frac{1}{k^{i+1}}, \end{aligned}$$

lo cual coincide con (3.42) al considerar las expresiones dadas en (3.41). Por tanto, el lema queda demostrado.  $\square$

**Lema 3.4.2.** *Es válida la siguiente relación para (3.42)*

$$r_{n,l} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} \mathcal{R}_{1,n}^{(l)}(\nu) \left(\frac{\pi}{\sin \pi\nu}\right)^2 d\nu. \quad (3.44)$$

**Demostración**

En efecto, aplicando el teorema de los residuos basta con verificar la siguiente relación

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} \mathcal{R}_{1,n}^{(l)}(\nu) \left(\frac{\pi}{\sin \pi\nu}\right)^2 d\nu = \sum_{j \geq 0} \mathcal{R}_{2,n}^{(l)}(j).$$

De esta manera se tiene

$$r_{n,l} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} \mathcal{R}_{1,n}^{(l)}(\nu) \left(\frac{\pi}{\sin \pi\nu}\right)^2 d\nu.$$

Así, el lema queda demostrado. □

**Teorema 3.4.1.** *Se verifica la siguiente fórmula asintótica para (3.42)*

$$r_{n,l} = \mathcal{K}^{l,n} \left(2\sqrt{3} - 3\right)^{3n} (1 + o(1)),$$

donde

$$\mathcal{K}^{l,n} = \frac{(-1)^{\delta_{1,l}} \pi^{3/2} 2^{2\delta_{1,l}+5(1-\delta_{1,l})/2}}{3^{(2\delta_{1,l}+5\delta_{2,l}+\delta_{3,l})/4} n^{15/2-\delta_{1,l}+\delta_{2,l}-\delta_{3,l}}}.$$

**Demostración**

En efecto, a partir de (3.44) se tiene

$$r_{n,l} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} \frac{(1-\nu)_n^2}{(\nu)_{n+1}^2} \left(\frac{\pi}{\sin \pi\nu}\right)^2 G(\nu) \theta_{l,n}(\nu-1) d\nu, \quad (3.45)$$

donde

$$G(z) = \frac{(z+n+1)_{n-1}^2}{(z)_{n+1}^2} = \left(\frac{\Gamma(z+2n)\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)^2}\right)^2.$$

Luego, usando la relación

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \rho(z), \quad |\rho(z)| \leq \mathcal{K} |\operatorname{Re} z|^{-1},$$

siendo  $\mathcal{K}$  una constante absoluta, sólo es cuestión de cálculo, verificar que para  $z = (n+1)t$  se cumple

$$\begin{aligned} \log G(z) \Big|_{z=(n+1)t} &= (2z+4n-1) \log(z+2n) + (2z-1) \log z \\ &\quad - (4z+4n+2) \log(z+n+1) + 4 + \mathcal{O}(n^{-1}) \Big|_{z=(n+1)t} \\ &\sim \log \tilde{g}(t) + 2(n+1) \tilde{f}(t) - 6 \log(n+1) + 4, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{g}(t) &= \frac{(t+1)^2}{t(t+2)^5}, \\ \tilde{f}(t) &= (t+2)\log(t+2) + t\log t - 2(t+1)\log(t+1).\end{aligned}$$

De esta manera, teniendo en cuentas las estimaciones

$$\ln \theta_{l,n}(z-1) \Big|_{z=(n+1)t} \sim \ln \left( \frac{(t+2)^{\delta_{1,l}} (2t+1)^{3\delta_{3,l}+1}}{(t-1)^{2-\delta_{1,l}}} \right) + \ln(n+1)^{\delta_{1,l}-\delta_{2,l}+\delta_{3,l}},$$

se consigue para  $z = (n+1)t$  lo siguiente

$$\begin{aligned}\log \frac{(1-z)_n^2}{(z)_{n+1}^2} \left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 G(z) \theta_{l,n}(z-1) \Big|_{z=(n+1)t} &= \log g^{(l)}(t) + 2(n+1)f^{(l)}(t) \\ &\quad - (8 - \delta_{1,l} + \delta_{2,l} - \delta_{3,l}) \log(n+1) + 2 \log 2\pi + 4 + \mathcal{O}(n^{-1}),\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}g^{(l)}(t) &= -\frac{(t+1)^3 (2t+1)^{3\delta_{3,l}+1}}{(t-1)^{3-\delta_{1,l}} t^3 (t+2)^{5-\delta_{1,l}}}, \\ f^{(l)}(t) &= (t+2)\log(t+2) - 3(t+1)\log(t+1) + 3t\log t + (1-t)\log(1-t).\end{aligned}$$

Por consiguiente, la expresión (3.45) se transforma en

$$r_{n,l} = \frac{2\pi e^4}{n^{7-\delta_{1,l}+\delta_{2,l}-\delta_{3,l}}} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} g^{(l)}(t) e^{2(n+1)f^{(l)}(t)} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})) dt,$$

donde el punto

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} - 1 \right),$$

es un valor extremo para la función  $\operatorname{Re} f^{(l)}(t)$  sobre el contorno de integración. Por tanto, a partir del método de Laplace se obtiene

$$\begin{aligned}r_{n,l} &= \frac{(-1)^{\delta_{1,l}} 2^{3(1-\delta_{1,l})+5\delta_{1,l}/2} 3^{(-\delta_{2,l}-\delta_{1,l}/4)} \pi e^4}{n^{7-\delta_{1,l}+\delta_{2,l}-\delta_{3,l}}} \\ &\quad \times \left( 2\sqrt{3} + 3 \right)^{(1-\delta_{1,l})/2} \left( 2\sqrt{3} - 3 \right)^{3n+(3-l)(1-\delta_{1,l})+\delta_{1,l}} \\ &\quad \times \left( \frac{2\pi}{n+1} \left( 4\sqrt{3} \right)^{-1} \right)^{1/2} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})).\end{aligned}$$

De esta forma, el teorema queda demostrado. □

### 3.5. Relaciones de recurrencia para los aproximantes diofánticos de $\zeta(4)$

**Lema 3.5.1.** *Se verifica la siguiente identidad*

$$\alpha_n^{(1)} \mathcal{R}_{1,n+2}^{(1)}(t) + \beta_n^{(1)} \mathcal{R}_{1,n+1}^{(1)}(t) + \gamma_n^{(1)} \mathcal{R}_{1,n}^{(1)}(t) = S_n^{(1)}(t+1) - S_n^{(1)}(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.46)$$

siendo  $S_n^{(1)}(t) = s_n^{(1)}(t) \mathcal{R}_{1,n}^{(1)}(t)$ , con  $s_n^{(1)}(t)$  dado en (3.48) y

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(1)} &= (n+1)(n+2)^7(156n^5 + 299n^4 + 296n^3 + 159n^2 + 44n + 5), \\ \beta_n^{(1)} &= 6(n+1)^3(7020n^{10} + 66105n^9 + 272904n^8 + 651396n^7 \\ &\quad + 999934n^6 + 1039061n^5 + 745775n^4 + 365788n^3 \\ &\quad + 116588n^2 + 21744n + 1808), \\ \gamma_n^{(1)} &= -3n^6(3n+1)(3n+2)(156n^5 + 1079n^4 + 3052n^3 + 4401n^2 + 3226n + 959). \end{aligned} \quad (3.47)$$

#### Demostración

En efecto, dividiendo ambos lados de (3.46) mediante  $\mathcal{R}_{1,n}^{(1)}(t)$ , entonces la demostración se reduce a la verificación de la identidad

$$\alpha_n^{(1)} \frac{\mathcal{R}_{1,n+2}^{(1)}(t)}{\mathcal{R}_{1,n}^{(1)}(t)} + \beta_n^{(1)} \frac{\mathcal{R}_{1,n+1}^{(1)}(t)}{\mathcal{R}_{1,n}^{(1)}(t)} + \gamma_n^{(1)} = s_n^{(1)}(t+1) \frac{\mathcal{R}_{1,n}^{(1)}(t+1)}{\mathcal{R}_{1,n}^{(1)}(t)} - s_n^{(1)}(t),$$

donde

$$s_n^{(1)}(t) = \frac{(t-n)(t-n+1)}{(n+1)^2(t+n+2)^6(2t+n+2)} \sum_{0 \leq j \leq 10} a_{j,1}^{(n)} t^j, \quad (3.48)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_{0,1}^{(n)} &= -(n+1)^2(n+2)^4(709644n^{14} + 7947251n^{13} + 40958180n^{12} + 129008529n^{11} \\ &\quad + 278011982n^{10} + 434496995n^9 + 508850400n^8 + 454360048n^7 \\ &\quad + 311075426n^6 + 162416604n^5 + 63545130n^4 + 18032060n^3 \\ &\quad + 3504810n^2 + 417536n + 23016), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{1,1}^{(n)} &= -(n+1)(n+2)^3(2573688n^{15} + 32107634n^{14} + 185682117n^{13} + 661065262n^{12} \\ &\quad + 1622215805n^{11} + 2910242130n^{10} + 3949128709n^9 + 4134730864n^8 \\ &\quad + 3372780323n^7 + 2144799582n^6 + 1053681111n^5 + 391939354n^4 \\ &\quad + 106661255n^3 + 20034878n^2 + 2322452n + 125336), \end{aligned}$$

$$a_{2,1}^{(n)} = -(n+2)^2(3552744n^{16} + 48478430n^{15} + 308187769n^{14} + 1211880148n^{13} \\ + 3300019159n^{12} + 6602517802n^{11} + 10054432219n^{10} + 11916298341n^9 \\ + 11142859511n^8 + 8270812637n^7 + 4861063255n^6 + 2234552979n^5 \\ + 784907013n^4 + 203139920n^3 + 36521218n^2 + 4075576n + 212840),$$

$$a_{3,1}^{(n)} = -(n+2)(1842672n^{16} + 24169496n^{15} + 145453323n^{14} + 528815703n^{13} \\ + 1284478110n^{12} + 2172158612n^{11} + 2576416966n^{10} + 2086057516n^9 \\ + 1036841896n^8 + 158828894n^7 - 197746229n^6 - 196355867n^5 \\ - 101589589n^4 - 34751253n^3 - 7735966n^2 - 1022528n - 61240),$$

$$a_{4,1}^{(n)} = 618540n^{16} + 12273859n^{15} + 109561231n^{14} + 592205522n^{13} \\ + 2179584562n^{12} + 5788078432n^{11} + 11435704096n^{10} + 17083813426n^9 \\ + 19453793382n^8 + 16943825389n^7 + 11292448387n^6 + 5740166135n^5 \\ + 2200345745n^4 + 618044836n^3 + 119913446n^2 + 14360976n + 800656,$$

$$a_{5,1}^{(n)} = 1351896n^{15} + 21132982n^{14} + 155455146n^{13} + 710530940n^{12} \\ + 2238913697n^{11} + 5105146851n^{10} + 8629596061n^9 + 10945320083n^8 \\ + 10475680365n^7 + 7580020609n^6 + 4138848148n^5 + 1689027018n^4 \\ + 501539540n^3 + 102275550n^2 + 12811950n + 744240,$$

$$a_{6,1}^{(n)} = (n+1)(748176n^{13} + 10554076n^{12} + 69671202n^{11} + 278854109n^{10} \\ + 740986736n^9 + 1362104193n^8 + 1768940560n^7 + 1642628189n^6 \\ + 1099473216n^5 + 532128586n^4 + 183578770n^3 + 42752658n^2 \\ + 6028622n + 389616),$$

$$a_{7,1}^{(n)} = (20n^4 + 217n^3 + 807n^2 + 1186n + 590)(9516n^9 + 64181n^8 + 181050n^7 \\ + 280021n^6 + 264810n^5 + 164073n^4 + 69150n^3 + 19000n^2 + 3078n + 224),$$

$$a_{8,1}^{(n)} = (n+2)(2n^2 + 53n + 65)(9516n^9 + 64181n^8 + 181050n^7 + 280021n^6 \\ + 264810n^5 + 164073n^4 + 69150n^3 + 19000n^2 + 3078n + 224),$$

$$a_{9,1}^{(n)} = (11n+17)(9516n^9 + 64181n^8 + 181050n^7 + 280021n^6 + 264810n^5 \\ + 164073n^4 + 69150n^3 + 19000n^2 + 3078n + 224),$$

$$a_{10,1}^{(n)} = (9516n^9 + 64181n^8 + 181050n^7 + 280021n^6 + 264810n^5 + 164073n^4 \\ + 69150n^3 + 19000n^2 + 3078n + 224).$$

Por tanto, el lema queda demostrado. □

**Teorema 3.5.1.** Las sucesiones  $(p_{n,1})_{n \geq 1}$ ,  $(q_{n,1})_{n \geq 1}$  y  $(r_{n,1})_{n \geq 1}$  satisfacen la siguiente relación de recurrencia

$$\alpha_n^{(1)} y_{n+2} + \beta_n^{(1)} y_{n+1} + \gamma_n^{(1)} y_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.49)$$

donde  $\alpha_n^{(1)}$ ,  $\beta_n^{(1)}$  y  $\gamma_n^{(1)}$  están dados en (3.47).

### Demostración

En efecto, usando (3.42) y el lema 3.5.1 se consigue

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(1)} r_{n+2,1} + \beta_n^{(1)} r_{n+1,1} + \gamma_n^{(1)} r_{n,1} &= - \sum_{j \geq 0} (S_n^{(1)'}(t+1) - S_n^{(1)'}(t)) \Big|_{t=j} \\ &= -S_n^{(1)'}(0) = s_n^{(1)'}(0) \mathcal{R}_{1,n}^{(1)}(0) - s_n^{(1)}(0) \mathcal{R}_{2,n}^{(1)}(0) = 0, \end{aligned}$$

puesto que  $\mathcal{R}_{1,n}^{(1)}(0) = \mathcal{R}_{2,n}^{(1)}(0) = 0$  para  $n \geq 1$ . Luego, para la sucesión  $(q_{n,1})_{n \geq 1}$  se ha de usar

$$q_{n,1} = 3 \sum_{k=0}^n \frac{d}{dt} \left[ (t+k+1)^4 \mathcal{R}_{1,n}^{(1)}(t) \right] \Big|_{t=-k-1}.$$

De esta forma se tiene

$$\alpha_n^{(1)} q_{n+2,1} + \beta_n^{(1)} q_{n+1,1} + \gamma_n^{(1)} q_{n,1} = 3 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d}{dt} \left[ (t+k+1)^4 (S_n^{(1)}(t+1) - S_n^{(1)}(t)) \right] \Big|_{t=-k-1},$$

donde

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d}{dt} \left[ (t+k+1)^4 (S_n^{(1)}(t+1) - S_n^{(1)}(t)) \right] \Big|_{t=-k-1} &= \\ &= 12 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ (t+k+1)^3 (S_n^{(1)}(t+1) - S_n^{(1)}(t)) \right] \Big|_{t=-k-1} \\ &+ 3 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ (t+k+1)^4 (S_n^{(1)'}(t+1) - S_n^{(1)'}(t)) \right] \Big|_{t=-k-1} \\ &= 12j^4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (S_n^{(1)}(j-k) - S_n^{(1)}(j-k-1)) \Big|_{j=0} \\ &+ 3j^3 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (S_n^{(1)'}(j-k) - S_n^{(1)'}(j-k-1)) \Big|_{j=0} = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, la sucesión  $p_{n,1} = q_{n,1}\zeta(4) - r_{n,1}$  satisface la relación de recurrencia (3.49) como una combinación lineal de las sucesiones  $q_{n,1}$  y  $r_{n,1}$ , así pues, el teorema queda demostrado.  $\square$

Nótese que siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, se consiguen también las siguientes relaciones de recurrencia

$$\alpha_n^{(l)} y_{n+2} + \beta_n^{(l)} y_{n+1} + \gamma_n^{(l)} y_n = 0, \quad n \geq 1, \quad l = 2, 3, \quad (3.50)$$

donde  $\alpha_n^{(l)}$ ,  $\beta_n^{(l)}$  y  $\gamma_n^{(l)}$  vienen dados mediante

$$\alpha_n^{(2)} = (n+1)(n+2)^9(78n^5 + 182n^4 + 186n^3 + 99n^2 + 27n + 3),$$

$$\beta_n^{(2)} = 6(n+1)^5(3510n^{10} + 34515n^9 + 149160n^8 + 372732n^7 + 596567n^6 + 640097n^5 + 467634n^4 + 230368n^3 + 73364n^2 + 13672n + 1136),$$

$$\gamma_n^{(2)} = -3n^8(3n+1)(3n+2)(78n^5 + 572n^4 + 1694n^3 + 2529n^2 + 1901n + 575),$$

$$\alpha_n^{(3)} = (n+1)(n+2)^7(78n^5 + 208n^4 + 238n^3 + 147n^2 + 49n + 7),$$

$$\beta_n^{(3)} = 6(n+1)^3(3510n^{10} + 35685n^9 + 159690n^8 + 413268n^7 + 683759n^6 + 755299n^5 + 564844n^4 + 283304n^3 + 91588n^2 + 17304n + 1456),$$

$$\gamma_n^{(3)} = 3n^6(3n+1)(3n+2)(78n^5 + 598n^4 + 1850n^3 + 2889n^2 + 2279n + 727).$$

Es evidente, que haciendo uso del teorema 3.4.1, de las relaciones de recurrencia (3.49)-(3.50) y del teorema de Perron, se demuestra el teorema que se enuncia a continuación.

**Teorema 3.5.2.** *Se verifican para las sucesiones  $(p_{n,l})_{n \geq 1}$ ,  $(q_{n,l})_{n \geq 1}$  y  $(r_{n,l})_{n \geq 1}$  los siguientes límites*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n,l}}{q_{n,l}} &= \zeta(4), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |q_{n,l}|^{1/n} &= -(2\sqrt{3} + 3)^3, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |r_{n,l}|^{1/n} &= (2\sqrt{3} - 3)^3, \quad l = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

donde  $\mp (2\sqrt{3} \pm 3)^3$  son las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 + 270\lambda - 27,$$

de las relaciones de recurrencia (3.49)-(3.50).

Obsérvese que considerando  $p_{n,l}/q_{n,l}$ ,  $l = 1, 2$ , como convergentes de un desarrollo en fracciones continuas de  $\zeta(4)$  y haciendo la transformación equivalente para dicho desarrollo (véase los teoremas 1.2.2 y 1.2.3) se deduce el siguiente teorema.

**Teorema 3.5.3.** *Se verifican los siguientes desarrollos en fracciones continuas*

$$\zeta(4) = \frac{33}{|30} + \frac{5754}{|11741} + \frac{-543755520}{|Q_3^{(1)}} + \frac{\mathcal{P}_4^{(1)}}{|Q_4^{(1)}} + \dots + \frac{\mathcal{P}_n^{(1)}}{|Q_n^{(1)}} + \dots,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n^{(1)} &= 3(n-2)^7(n-1)^7(3n-5)(3n-4)(156n^5 - 2041n^4 + 10748n^3 \\ &\quad - 28479n^2 + 37970n - 20377)(156n^5 - 481n^4 + 660n^3 - 495n^2 + 198n - 33), \end{aligned}$$

y

$$\mathcal{Q}_n^{(1)} = -6(n-1)^3(7020n^{10} - 74295n^9 + 346614n^8 - 935148n^7 + 1610278n^6 - 1845475n^5 + 1426245n^4 - 736340n^3 + 244156n^2 - 47168n + 4048).$$

$$\zeta(4) = \frac{14}{12} + \frac{-6900}{-7377} + \frac{790164480}{\mathcal{Q}_3^{(2)}} + \frac{\mathcal{P}_4^{(2)}}{\mathcal{Q}_4^{(2)}} + \cdots + \frac{\mathcal{P}_n^{(2)}}{\mathcal{Q}_n^{(2)}} + \cdots,$$

donde

$$\mathcal{P}_n^{(2)} = 3(n-2)^9(n-1)^9(3n-5)(3n-4)(78n^5 - 988n^4 + 5022n^3 - 12807n^2 + 16389n - 8421)(78n^5 - 208n^4 + 238n^3 - 147n^2 + 49n - 7),$$

y

$$\mathcal{Q}_n^{(2)} = -6(n-1)^5(3510n^{10} - 35685n^9 + 159690n^8 - 413268n^7 + 683759n^6 - 755299n^5 + 564844n^4 - 283304n^3 + 91588n^2 - 17304n + 1456).$$

### 3.6. Discusión de resultados

Denotando por  $\pi_n^{(i,j)} = p_n^{(i,j)}/q_n^{(i,j)}$ ,  $0 \leq i \leq 4$ ,  $0 \leq j \leq 3$  y mediante  $\pi_n^{(0,0)} = p_n^{(0,0)}/q_n^{(0,0)}$  los aproximantes de Apéry dados en (3), en la Figura 3.1 se muestra una comparación entre los aproximantes de Apéry  $\pi_n^{(0,0)}$  y los doce aproximantes diofánticos  $\pi_n^{(i,j)}$  para los siguientes parámetros

$\rho$	$\vartheta$	$v, \chi, \psi$
2	2	1, 1, 1
4	784	49, 891, 97
913	93	413, 732, 231
23	57	713, 3427, 231

Como se puede apreciar, dichos resultados se ilustraron a través de una matriz rectangular de cuadrados, formada por trece filas y nueve columnas, donde se utilizó una escala de grises, para la cual, el color de cada cuadrado se determina mediante el valor de la función

$$f(\pi_n^{(i,j)}) = \left| (\log |\zeta(3) - \pi_n^{(i,j)}|)^{-1} \right|, \quad 0 \leq i \leq 4, \quad 0 \leq j \leq 3, \quad n = 2, \dots, 10, \quad (3.51)$$

la que oscila entre  $0,0144346 \dots$  y  $0,137009 \dots$ . Además, los valores cercanos al mínimo de la función (3.51), se muestran como cuadrados blancos, mientras que sus máximos se muestran como cuadrados negros. De hecho, diez iteraciones fueron suficientes para revelar la alta precisión de los resultados alcanzados en la primera parte de este capítulo. Claramente, en la Figura 3.1, la oscuridad disminuye a medida que el número de iteraciones crece, lo cual se corresponde con los resultados analíticos dados en las secciones 3.1 y 3.3.

A continuación, se exponen cuatro tablas, donde las tres primeras muestran una comparación de la velocidad de convergencia, entre los aproximantes racionales  $\pi_n^{(0,0)}$  de Apéry y tres casos seleccionados de los doce aproximantes diofánticos  $\pi_n^{(i,j)}$ , y en la última tabla, se muestra una comparación entre las sucesiones residuos, correspondientes a dichos aproximantes.



I Comparación entre los aproximantes racionales  $\pi_n^{(0,0)}$  de Apéry y los aproximantes racionales  $\pi_n^{(1,1)}$  para  $\rho = 2$

$n$	$\pi_n^{(0,0)}$	$\zeta(3) - \pi_n^{(0,0)}$	$\pi_n^{(1,1)}$	$\zeta(3) - \pi_n^{(1,1)}$
2	$\frac{351}{292}$	$2,109 \times 10^{-6}$	$\frac{1327}{1104}$	0,00006
3	$\frac{62531}{52020}$	$1,968 \times 10^{-9}$	$\frac{104377}{86832}$	$5,776 \times 10^{-8}$
4	$\frac{11424695}{9504288}$	$1,778 \times 10^{-12}$	$\frac{58624219}{48769920}$	$5,211 \times 10^{-11}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
50	.	$2,795 \times 10^{-153}$	.	$9,250 \times 10^{-152}$

II Comparación entre los aproximantes racionales  $\pi_n^{(0,0)}$  de Apéry y los aproximantes racionales  $\pi_n^{(1,2)}$  para  $\vartheta = 2$

$n$	$\pi_n^{(0,0)}$	$\zeta(3) - \pi_n^{(0,0)}$	$\pi_n^{(1,2)}$	$\zeta(3) - \pi_n^{(1,2)}$
2	$\frac{351}{292}$	$2,109 \times 10^{-6}$	$\frac{1077}{896}$	0,00004
3	$\frac{62531}{52020}$	$1,968 \times 10^{-9}$	$\frac{1987}{1653}$	$3,686 \times 10^{-8}$
4	$\frac{11424695}{9504288}$	$1,778 \times 10^{-12}$	$\frac{34774333}{28929024}$	$3,006 \times 10^{-11}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
50	.	$2,795 \times 10^{-153}$	.	$3,505 \times 10^{-152}$

III Comparación entre los aproximantes racionales  $\pi_n^{(0,0)}$  de Apéry y los aproximantes racionales  $\pi_n^{(1,3)}$  para  $v = \chi = \psi = 1$

$n$	$\pi_n^{(0,0)}$	$\zeta(3) - \pi_n^{(0,0)}$	$\pi_n^{(1,3)}$	$\zeta(3) - \pi_n^{(1,3)}$
2	$\frac{351}{292}$	$2,109 \times 10^{-6}$	$\frac{2231}{1856}$	$9,489 \times 10^{-6}$
3	$\frac{62531}{52020}$	$1,968 \times 10^{-9}$	$\frac{783217}{651564}$	$6,216 \times 10^{-9}$
4	$\frac{11424695}{9504288}$	$1,778 \times 10^{-12}$	$\frac{118221931}{98349696}$	$4,550 \times 10^{-12}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
50	.	$2,795 \times 10^{-153}$	.	$3,114 \times 10^{-153}$

IV Comparación entre las sucesiones residuos, de los aproximantes racionales  $\pi_n^{(0,0)}$  de Apéry y los aproximantes racionales  $\pi_n^{(1,1)}$ ,  $\pi_n^{(1,2)}$  y  $\pi_n^{(1,3)}$  para  $\rho = 2$ ,  $\vartheta = 2$  y  $v = \chi = \psi = 1$ ,

respectivamente

$n$	$r_n^{(0,0)}$	$r_n^{(1,1)}$	$r_n^{(1,2)}$	$r_n^{(1,3)}$
2	0,00030	0,00442	0,00537	-0,00220
3	$5,686 \times 10^{-6}$	0,00006	0,00008	-0,00002
4	$1,173 \times 10^{-7}$	$1,103 \times 10^{-6}$	$1,510 \times 10^{-6}$	$-3,885 \times 10^{-7}$
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
·	·	·	·	·
50	$1,238 \times 10^{-79}$	$7,520 \times 10^{-79}$	$1,177 \times 10^{-78}$	$-1,412 \times 10^{-79}$

Es importante destacar, que pequeñas modificaciones  $\theta(t)$  en (3.2) podrían dar lugar a nuevos aproximantes racionales que no demuestran la irracionalidad de  $\zeta(3)$ . Por ejemplo, las siguientes funciones racionales

$$\tilde{R}_{1,n}^{(1)} = \frac{(-t)_n^2}{(t+1)_{n+1}^2} \left( \frac{t+n+1}{t+n+2} \right), \quad (3.52)$$

y

$$\tilde{R}_{1,n}^{(2)} = \frac{(-t)_n^2}{(t+1)_{n+1}^2} \left( \frac{a_n t^2 + b_n}{t-n+1} \right), \quad (3.53)$$

donde  $a_n = 4n(2H_n - H_{2n-1}) - 1$  y  $b_n = (n+1)a_n - 2n$ , dan lugar a sucesiones de aproximantes racionales a  $\zeta(3)$  que verifican una relación de recurrencia de segundo orden, con el mismo polinomio característico dado por la relación de recurrencia de Apéry (2.1), sin embargo, no demuestran la irracionalidad de dicho número. No obstante, la convergencia de estos aproximantes racionales a  $\zeta(3)$  es excelente, tal como se aprecia en la Figura 3.2.

Obsérvese en la siguiente tabla, como desde el punto de vista numérico, las sucesiones residuos (3.42) para los nuevos aproximantes racionales (3.41) a  $\zeta(4)$ , mejoran en comparación a los obtenidos por Zudilin [100, 101].

$n$	$r_{n,z}$	$r_{n,1}$	$r_{n,2}$	$r_{n,3}$
4	$9,435 \times 10^{-7}$	$-8,324 \times 10^{-7}$	$8,931 \times 10^{-8}$	$9,531 \times 10^{-6}$
10	$1,195 \times 10^{-13}$	$-1,326 \times 10^{-14}$	$2,175 \times 10^{-16}$	$1,427 \times 10^{-13}$
25	$-1,324 \times 10^{-29}$	$-2,136 \times 10^{-31}$	$5,480 \times 10^{-34}$	$2,228 \times 10^{-30}$
34	$6,223 \times 10^{-39}$	$-5,339 \times 10^{-41}$	$7,373 \times 10^{-44}$	$5,536 \times 10^{-40}$
45	$-3,112 \times 10^{-50}$	$-1,507 \times 10^{-52}$	$1,184 \times 10^{-55}$	$1,556 \times 10^{-51}$
50	$2,396 \times 10^{-55}$	$-9,361 \times 10^{-58}$	$5,956 \times 10^{-61}$	$9,656 \times 10^{-57}$

donde  $(r_{n,z})_{n \geq 1}$  es la sucesión residuo dada en (6).



Figura 3.1: De izquierda a derecha se muestran en escala de grises los valores de la función (3.51) para  $n = 2, \dots, 10$ , y de arriba hacia abajo sus argumentos son:  $\pi_n^{(0,0)}$ ,  $\pi_n^{(1,1)}$  para  $\rho = 2$ ,  $\pi_n^{(2,1)}$  para  $\rho = 4$ ,  $\pi_n^{(3,1)}$  para  $\rho = 913$ ,  $\pi_n^{(4,1)}$  para  $\rho = 23$ ,  $\pi_n^{(1,2)}$  para  $\vartheta = 2$ ,  $\pi_n^{(2,2)}$  para  $\vartheta = 784$ ,  $\pi_n^{(3,2)}$  para  $\vartheta = 93$ ,  $\pi_n^{(4,2)}$  para  $\vartheta = 57$ ,  $\pi_n^{(1,3)}$  para  $v = \chi = \psi = 1$ ,  $\pi_n^{(2,3)}$  para  $v = 49$ ,  $\chi = 891$ ,  $\psi = 97$ ,  $\pi_n^{(3,3)}$  para  $v = 413$ ,  $\chi = 732$ ,  $\psi = 231$ ,  $\pi_n^{(4,3)}$  para  $v = 713$ ,  $\chi = 3427$ ,  $\psi = 231$ . Para  $n = 10$  (la ltima columna) se observa un alto nivel de coincidencia entre todos los aproximantes diofánticos.

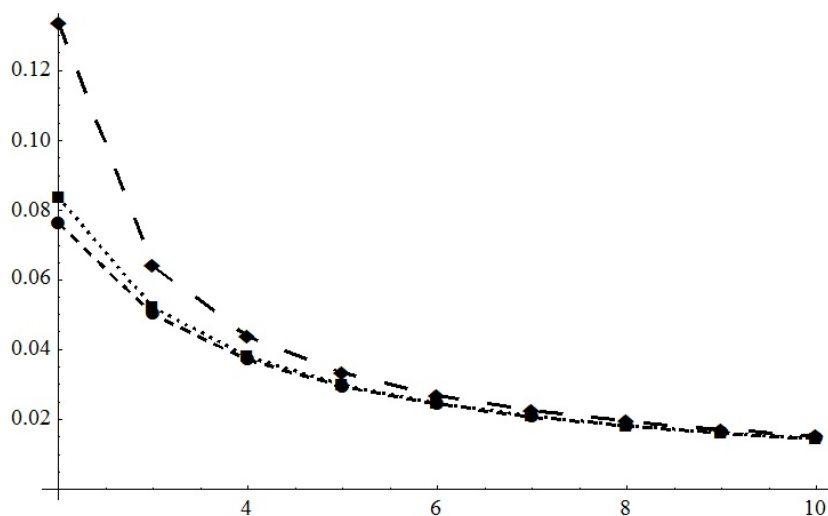


Figura 3.2: La función (3.51) se traza para  $n = 2, \dots, 10$  de modo que: el símbolo ● se utiliza para representar los aproximantes de Apéry, mientras que ■ y ◆ se utilizan para los aproximantes obtenidos a partir de (3.52) y (3.53), respectivamente.



## Capítulo 4

---

# Aproximantes racionales a los valores de la función zeta de Riemann en enteros

---

Como es conocido, en 2001, Ball y Rivoal [17, 73, 74, 78] probaron que la sucesión  $\{\zeta(2k+1)\}_{k \geq 1}$  contiene una infinidad de irracionales. En otra dirección, para el 2002, Zudilin probó que al menos uno de los números  $\zeta(5)$ ,  $\zeta(7)$ ,  $\zeta(9)$  y  $\zeta(11)$  es irracional [94]. Lo cierto es, que son escasos los resultados que existen acerca de las propiedades aritméticas de los números  $\zeta(2k+1)$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , los cuales pueden consultarse en [33, 34, 35, 36, 51, 69, 76, 79, 80, 81, 95, 99, 102].

Unos de los objetivos fundamentales de este capítulo, es presentar excelentes aproximantes racionales a los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros. Para tal propósito, en la primera sección se hará uso de un problema de aproximación simultánea mixto, el cual posibilitará dar de formar explícita dichos aproximantes racionales, lo cual será expuesto en la primera sección de este capítulo.

En la próxima sección, se estudiarán los residuos involucrados en dichos aproximantes racionales, y por último, se expondrán algunos ejemplos y resultados numéricos vinculados con las secciones anteriores.

### 4.1. Problema de aproximación simultánea vinculado con $\zeta(s)$ , $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Recuérdese que la función zeta de Riemann (2.21) está relacionada salvo un factor multiplicador con el sistema de funciones (2.12). En particular,  $f_k(1) = \zeta(k)$ ,  $f_{k+1}(1) = -\zeta(k+1)$  y  $f_{k+2}(1) = \zeta(k+2)$ , siendo  $k > 1$  un entero impar.

Por tanto, para el sistema  $\{f_k, f_{k+1}, f_{k+2}\}$  y los polinomios  $A_n^{(k)}(z)$ ,  $B_n^{(k)}(z)$ ,  $C_n^{(k)}(z)$ , y  $D_n^{(k)}(z)$  se formula el siguiente problema de aproximación racional simultánea cerca del infinito

$$A_n^{(k)}(z)f_k(z) + kB_n^{(k)}(z)f_{k+1}(z) - C_n^{(k)}(z) = \mathcal{O}(z^{-n-1}), \quad (4.1)$$

$$A_n^{(k)}(z)f_{k+1}(z) + (k+1)B_n^{(k)}(z)f_{k+2}(z) - D_n^{(k)}(z) = \mathcal{O}(z^{-n-1}), \quad (4.2)$$

$$A_n^{(k)}(1) = 0, \quad (4.3)$$

donde

$$A_n^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^n a_{j,n}^{(k)} z^j \quad \text{y} \quad B_n^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^n b_{j,n}^{(k)} z^j,$$

son polinomios de grado exactamente  $n$ . Como se ha explicado anteriormente, al problema (4.1)-(4.2), se le denomina, problema de aproximación racional mixto de tipo I y tipo II (véase la sección 2.2).

Se puede comprobar fácilmente que este problema de aproximación, conduce a un sistema de ecuaciones lineales, para el que se deben determinar  $(4n + 3)$ -incógnitas, estas son, los coeficientes de los polinomios involucrados en el problema de aproximación (4.1)-(4.2).

El hecho de que los polinomios  $C_n^{(k)}(z)$  y  $D_n^{(k)}(z)$  dependen de  $A_n^{(k)}(z)$  y  $B_n^{(k)}(z)$  (véase más adelante las expresiones (4.4) y (4.6)) hace posible encontrar un sistema de ecuaciones lineales aún más pequeño para  $(2n + 1)$ -incógnitas. Dicho sistema se puede inferir a partir de las condiciones de ortogonalidad (4.10). A continuación se dará una explicación detallada de estos hechos.

Es evidente que sustituyendo  $f_1(z)$  y  $f_2(z)$  en la expresión (4.1) se obtiene

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{A_n^{(k)}(z) + B_n^{(k)}(z) \log x}{z-x} \log^{k-1} x dx - C_n^{(k)}(z) = \mathcal{O}(z^{-n-1}).$$

Además, teniendo en cuenta que

$$\frac{A_n^{(k)}(z) - A_n^{(k)}(x)}{z-x} \quad \text{y} \quad \frac{B_n^{(k)}(z) - B_n^{(k)}(x)}{z-x},$$

son polinomios de grado exactamente  $n - 1$ , entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{A_n^{(k)}(z) - A_n^{(k)}(x)}{z-x} \log^{k-1} x dx \\ + \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{B_n^{(k)}(z) - B_n^{(k)}(x)}{z-x} \log^k x dx = C_n^{(k)}(z) \in \mathbb{P}_n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

En consecuencia, el término residuo viene dado mediante

$$\begin{aligned} r_{n,1}^{(k)}(z) &= \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{A_n^{(k)}(x) + B_n^{(k)}(x) \log x}{z-x} \log^{k-1} x dx \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{z^{\nu+1}} \int_0^1 x^\nu (A_n^{(k)}(x) + B_n^{(k)}(x) \log x) \log^{k-1} x dx = \mathcal{O}(z^{-n-1}), \end{aligned}$$

donde la condición de ortogonalidad

$$\int_0^1 x^\nu (A_n^{(k)}(x) + B_n^{(k)}(x) \log x) \log^{k-1} x dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \quad (4.5)$$

garantiza el orden establecido cerca del infinito impuesto por la ecuación (4.1). De forma análoga, se procede con la ecuación (4.2) del problema de aproximación racional (4.1)-(4.2). De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{A_n^{(k)}(z) - A_n^{(k)}(x)}{z-x} \log^k x dx \\ + \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{B_n^{(k)}(z) - B_n^{(k)}(x)}{z-x} \log^{k+1} x dx = D_n^{(k)}(z) \in \mathbb{P}_n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por consiguiente, una segunda condición de ortogonalidad viene dada como sigue

$$\int_0^1 x^\nu (A_n^{(k)}(x) + B_n^{(k)}(x) \log x) \log^k x dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \quad (4.7)$$

la cual garantiza el orden establecido cerca del infinito del segundo término residuo

$$\begin{aligned} r_{n,2}^{(k)}(z) &= \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{A_n^{(k)}(x) + B_n^{(k)}(x) \log x}{z-x} \log^k x dx \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{z^{\nu+1}} \int_0^1 x^\nu (A_n^{(k)}(x) + B_n^{(k)}(x) \log x) \log^k x dx = \mathcal{O}(z^{-n-1}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por tanto, se comprueba de esta manera, que las  $(4n+3)$ -incógnitas del problema de aproximación inicial, se reducen simplemente a la determinación de  $(2n+1)$ -coeficientes incógnitas, debido a que  $C_n^{(k)}(z)$  y  $D_n^{(k)}(z)$  dependen de los polinomios  $A_n^{(k)}(z)$  y  $B_n^{(k)}(z)$ . Nótese que las condiciones de ortogonalidad (4.5) y (4.7) se pueden reescribir a partir de las siguientes formas

$$F_n^{(k)}(x) = A_n^{(k)}(x) + B_n^{(k)}(x) \log x \quad \text{y} \quad G_n^{(k)}(x) = F_n^{(k)}(x) \log x, \quad (4.9)$$

como se sigue

$$\int_0^1 F_n^{(k)}(x) x^\nu \log^{k-1} x dx = \int_0^1 G_n^{(k)}(x) x^\nu \log^{k-1} x dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1. \quad (4.10)$$

Por tanto, a partir de (4.10) se verifica lo siguiente

$$\int_0^1 F_n^{(k)}(x) (P(x) + Q(x) \log x) \log^{k-1} x dx = 0, \quad \forall P(x), Q(x) \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Además, esta relación se puede interpretar como una condición de ortogonalidad entre dos formas (4.9) diferentes, es decir

$$\int_0^1 F_n^{(k)}(x) F_m^{(k)}(x) \log^{k-1} x dx = 0, \quad \text{siempre que } n \neq m.$$

Claramente, otra consecuencia de las relaciones de ortogonalidad (4.10) se representa mediante

$$\begin{aligned} \int_0^1 p(x) \frac{F_n^{(k)}(x)}{z-x} \log^{k-1} x dx &= p(z) \int_0^1 \frac{F_n^{(k)}(x)}{z-x} \log^{k-1} x dx, \\ \int_0^1 q(x) \frac{G_n^{(k)}(x)}{z-x} \log^{k-1} x dx &= q(z) \int_0^1 \frac{G_n^{(k)}(x)}{z-x} \log^{k-1} x dx, \end{aligned}$$

donde  $p(z)$  y  $q(z)$  son polinomios arbitrarios de grado a lo más  $n$ . Ahora, definiendo

$$R_{1,n}^{(k)}(t) = \int_0^1 F_n^{(k)}(x) x^t dx \quad \text{y} \quad R_{2,n}^{(k)}(t) = \int_0^1 G_n^{(k)}(x) x^t dx, \quad (\operatorname{Re} t > -1), \quad (4.11)$$

y aplicando la identidad (2.35) se tiene

$$\begin{aligned} R_{1,n}^{(k)}(t) &= (k-1)! \sum_{j=0}^n \left[ \frac{a_{j,n}^{(k)}}{(t+j+1)^k} - k \frac{b_{j,n}^{(k)}}{(t+j+1)^{k+1}} \right], \\ R_{2,n}^{(k)}(t) &= -k! \sum_{j=0}^n \left[ \frac{a_{j,n}^{(k)}}{(t+j+1)^{k+1}} - (k+1) \frac{b_{j,n}^{(k)}}{(t+j+1)^{k+2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

De esta manera, basándose, en la condición (4.3), y en las condiciones de ortogonalidad (4.10), se obtiene el siguiente resultado

$$R_{1,n}^{(k)}(t) = -\kappa_n^{(k)} \frac{(-t)_n^2}{(t+1)_{n+1}^{k+1}} P_{n(k-1)}^{(k)}(t), \quad (4.13)$$

donde

$$\kappa_n^{(k)} = \frac{k!n!^{k-1}}{P_{n(k-1)}^{(k)}(-1)}.$$

y  $P_{n(k-1)}^{(k)}(t)$  es un polinomio indeterminado de grado exactamente  $n(k-1)$ . Además, se puede comprobar que

$$R_{2,n}^{(k)}(t) = 2R_{1,n}^{(k)}(t) \left[ \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{t-j} - \frac{k+1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{t+j} + \frac{P_{n(k-1)}^{(k)'}(t)}{2P_{n(k-1)}^{(k)}(t)} \right]. \quad (4.14)$$

Obsérvese que la expresiones (4.13) y (4.14), representan la continuación analítica de las funciones que figuran en (4.11). En consecuencia, los coeficientes  $a_{j,n}^{(k)}$  y  $b_{j,n}^{(k)}$  se pueden escribir explícitamente, como sigue

$$\begin{aligned} b_{j,n}^{(k)} &= -\frac{\kappa_n^{(k)}}{k!} (t+j+1)^{k+1} R_{1,n}^{(k)}(t) \Big|_{t=-j-1}, \quad j = 0, \dots, n, \\ &= \frac{\kappa_n^{(k)}}{k!n!^{k-1}} \binom{n+j}{j}^2 \binom{n}{j}^{k+1} P_{n(k-1)}^{(k)}(-j-1), \end{aligned} \quad (4.15)$$

y

$$\begin{aligned} a_{j,n}^{(k)} &= \frac{1}{(k-1)!} \frac{d}{dt} \left[ (t+j+1)^{k+1} R_{1,n}^{(k)}(t) \right] \Big|_{t=-j-1}, \quad j = 0, \dots, n, \\ &= 2kb_{j,n}^{(k)} \left[ H_{n+j} - \frac{k+3}{2} H_j + \frac{k+1}{2} H_{n-j} - \frac{P_{n(k-1)}^{(k)'}(-j-1)}{2P_{n(k-1)}^{(k)}(-j-1)} \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Obsérvese además, que estos coeficientes se pueden determinar simplemente a partir de la solución



del siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2^k} & \cdots & \frac{1}{n^k} & \frac{1}{(n+1)^k} & -k & \frac{-k}{2^{k+1}} & \cdots & \frac{-k}{n^{k+1}} & \frac{-k}{(n+1)^{k+1}} \\ \frac{1}{2^k} & \frac{1}{3^k} & \cdots & \frac{1}{(n+1)^k} & \frac{1}{(n+2)^k} & \frac{-k}{2^{k+1}} & \frac{-k}{3^{k+1}} & \cdots & \frac{-k}{(n+1)^{k+1}} & \frac{-k}{(n+2)^{k+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n^k} & \frac{1}{(n+1)^k} & \cdots & \frac{1}{(2n-1)^k} & \frac{1}{(2n)^k} & \frac{-k}{n^{k+1}} & \frac{-k}{(n+1)^{k+1}} & \cdots & \frac{-k}{(2n-1)^{k+1}} & \frac{-k}{(2n)^{k+1}} \\ -1 & \frac{-1}{2^{k+1}} & \cdots & \frac{-1}{n^{k+1}} & \frac{-1}{(n+1)^{k+1}} & k+1 & \frac{k+1}{2^{k+2}} & \cdots & \frac{k+1}{n^{k+2}} & \frac{k+1}{(n+1)^{k+2}} \\ \frac{-1}{2^{k+1}} & \frac{-1}{3^{k+1}} & \cdots & \frac{-1}{(n+1)^{k+1}} & \frac{-1}{(n+2)^{k+1}} & \frac{k+1}{2^{k+2}} & \frac{k+1}{3^{k+2}} & \cdots & \frac{k+1}{(n+1)^{k+2}} & \frac{k+1}{(n+2)^{k+2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{-1}{n^{k+1}} & \frac{-1}{(n+1)^{k+1}} & \cdots & \frac{-1}{(2n-1)^{k+1}} & \frac{-1}{(2n)^{k+1}} & \frac{k+1}{n^{k+2}} & \frac{k+1}{(n+1)^{k+2}} & \cdots & \frac{k+1}{(2n-1)^{k+2}} & \frac{k+1}{(2n)^{k+2}} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta lo anterior y las expresiones (4.4) y (4.6) se deduce

$$\begin{aligned} B_n^{(k)}(1) &= -\frac{\kappa_n^{(k)}}{k!n!^{k-1}} \sum_{j=0}^n \binom{n+j}{j}^2 \binom{n}{j}^{k+1} P_{n(k-1)}^{(k)}(-j-1), \quad B_0^{(k)}(1) = 1, \\ C_n^{(k)}(1) &= \sum_{j=1}^n \left[ a_{j,n}^{(k)} H_j^{(k)} - k b_{j,n}^{(k)} H_j^{(k+1)} \right], \quad C_0^{(k)}(1) = 0, \\ D_n^{(k)}(1) &= \sum_{j=1}^n \left[ (k+1) b_{j,n}^{(k)} H_j^{(k+2)} - a_{j,n}^{(k)} H_j^{(k+1)} \right], \quad D_0^{(k)}(1) = 0. \end{aligned}$$

Nótese que en particular para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , el problema de aproximación racional (4.1)-(4.2) cuando  $z = 1$  toma la siguiente forma

$$k B_n^{(k)}(1) f_{k+1}(1) - C_n^{(k)}(1) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 \frac{F_n^{(k)}(x)}{1-x} \log^{k-1} x dx, \quad (4.17)$$

$$(k+1) B_n^{(k)}(1) f_{k+2}(1) - D_n^{(k)}(1) = \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{G_n^{(k)}(x)}{1-x} \log^{k-1} x dx. \quad (4.18)$$

Por razones de brevedad, se denotarán las sucesiones implicadas en (4.17)-(4.18) como

$$\begin{aligned} (q_n^{(k)})_{n \geq 0} &= \{(k+1) B_n^{(k)}(1)\}_{n \geq 0}, \quad (p_n^{(k)})_{n \geq 0} = \{D_n^{(k)}(1)\}_{n \geq 0}, \\ (\hat{q}_n^{(k)})_{n \geq 0} &= -(k B_n^{(k)}(1))_{n \geq 0}, \quad (\hat{p}_n^{(k)})_{n \geq 0} = \{C_n^{(k)}(1)\}_{n \geq 0}, \\ (r_n^{(k)})_{n \geq 0} &= \{r_{n,2}^{(k)}(1)\}_{n \geq 0}, \quad (\hat{r}_n^{(k)})_{n \geq 0} = \{r_{n,1}^{(k)}(1)\}_{n \geq 0}. \end{aligned}$$

Luego (4.17)-(4.18) se reescriben como sigue

$$\hat{q}_n^{(k)} \zeta(k+1) - \hat{p}_n^{(k)} = \hat{r}_n^{(k)}, \quad q_n^{(k)} \zeta(k+2) - p_n^{(k)} = r_n^{(k)}, \quad n \geq 0. \quad (4.19)$$

A continuación se expondrán un teorema donde se evidencia que el residuo  $r_n^{(k)}$  no se anula.

**Teorema 4.1.1.** *Supóngase que  $A_n^{(k)}(x), B_n^{(k)}(x) \in \mathbb{P}_n \setminus \{0\}$  son soluciones del problema de aproximación simultánea (4.1)-(4.3). Entonces, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , la función residuo  $r_{n,2}^{(k)}(z)$  no se anula en  $z = 1$ .*

**Demostración**

En efecto, procédase por reducción al absurdo, esto es,  $r_{n,2}^{(k)}(1) = 0$ , lo que significa

$$r_n^{(k)} = \frac{1}{k!} \int_0^1 \frac{A_n^{(k)}(x) + B_n^{(k)}(x) \log x}{1-x} \log^k x dx = 0.$$

Luego, considerando la función auxiliar

$$f_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{\left(A_n^{(k)}(x) + B_n^{(k)}(x) \log x\right)^2 \log^{k-1} x}{1-x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

donde  $A_n^{(k)}(x)$  y  $B_n^{(k)}(x)$  son las soluciones polinomiales del problema de aproximación simultánea (4.1)-(4.3) y teniendo en cuenta que  $f_n^{(k)}(x) \geq 0$ , así como

$$\int_0^1 f_n^{(k)}(x) dx > 0.$$

Entonces, se deduce lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{k+1}{k!} \int_0^1 f_n^{(k)}(x) dx = \frac{k+1}{k!} \int_0^1 \frac{\left(A_n^{(k)}(x) + B_n^{(k)}(x) \log x\right)^2 \log^{k-1} x}{1-x} dx \\ &= \frac{k+1}{k!} \int_0^1 \frac{A_n^{(k)}(x)^2 + 2A_n^{(k)}(x)B_n^{(k)}(x) \log x + B_n^{(k)}(x)^2 \log^2 x}{1-x} \log^{k-1} x dx \\ &= \frac{k+1}{k!} \int_0^1 \frac{A_n^{(k)}(x)F_n^{(k)}(x)}{1-x} \log^{k-1} x dx + \frac{k+1}{k!} \int_0^1 \frac{B_n^{(k)}(x)G_n^{(k)}(x)}{1-x} \log^{k-1} x dx \\ &= \frac{(k+1)A_n^{(k)}(1)}{k!} \int_0^1 \frac{F_n^{(k)}(x)}{1-x} \log^{k-1} x dx + \frac{(k+1)B_n^{(k)}(1)}{k!} \int_0^1 \frac{G_n^{(k)}(x)}{1-x} \log^{k-1} x dx \\ &= q_n^{(k)} r_n^{(k)}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $r_n$  no puede anularse. Esta contradicción prueba la hipótesis inicial. De este modo, el teorema queda demostrado. □

Como consecuencia del teorema anterior, los elementos de la sucesión  $\left(r_n^{(k)}\right)_{n \geq 0}$  tienen el mismo signo que  $\left(q_n^{(k)}\right)_{n \geq 0}$ .

## 4.2. Representación de $\left(r_n^{(k)}\right)_{n \geq 0}$ a partir de una integral de contorno

A continuación se presenta un lema, mediante el cual se expresan los residuos  $\left(r_n^{(k)}\right)_{n \geq 0}$  como una integral de contorno.

**Teorema 4.2.1.** *Se verifican las siguientes relaciones para el término residuo (4.8) cuando  $z = 1$*

$$r_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i k!} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} R_{1,n}^{(k)}(\nu) \left(\frac{\pi}{\sin \pi \nu}\right)^2 d\nu = \frac{1}{k!} \sum_{t=n}^{\infty} R_{2,n}^{(k)}(t). \quad (4.20)$$

### Demostración

En efecto, el núcleo de Cauchy  $1/(z-x)$  en la expresión integral para el residuo (4.8), se puede sustituir por la expresión

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{2iz} \int_{\operatorname{Re} \nu = -1/2} \left(-\frac{x}{z}\right)^\nu \left(\frac{1}{\sin \pi \nu}\right) d\nu, \quad \left|\frac{x}{z}\right| < 1, \quad x \neq 0,$$

donde la línea vertical  $\operatorname{Re} \nu = -1/2$  está orientada de arriba hacia abajo. Nótese que dicha integral converge uniformemente para  $\varepsilon \leq x \leq 1$ , y  $z < -1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$ . En consecuencia, se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} r_{n,2}^{(k)}(z) &= -\frac{1}{k!} \int_0^1 \left(\frac{1}{2zi} \int_{\operatorname{Re} \nu = -1/2} \left(-\frac{x}{z}\right)^\nu \frac{d\nu}{\sin \pi \nu}\right) G_n^{(k)}(x) \log^{k-1} x dx \\ &= -\frac{1}{2zik!} \int_{\operatorname{Re} \nu = -1/2} \left(\int_0^1 x^\nu G_n^{(k)}(x) \log^{k-1} x dx\right) \left(-\frac{1}{z}\right)^\nu \frac{d\nu}{\sin \pi \nu} \\ &= -\frac{1}{2z\pi ik!} \int_{\operatorname{Re} \nu = -1/2} R_{2,n}^{(k)}(\nu) \left(-\frac{1}{z}\right)^\nu \frac{\pi d\nu}{\sin \pi \nu}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

puesto que  $z < -1$  y  $0 < x \leq 1$ . Ahora bien, acoplando la función integrando en (4.21) mediante el uso de la fórmula de derivación (4.14) y tomando límite cuando  $z$  tiende a 1 se consigue

$$q_n^{(k)} \zeta(k+2) - p_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi ik!} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} R_{n,1}^{(k)}(\nu) \left(\frac{\pi}{\sin \pi \nu}\right)^2 d\nu.$$

Luego, sólo queda por demostrar que

$$\frac{1}{k!} \sum_{t \geq 0} R_{2,n}^{(k)}(t) = q_n^{(k)} \zeta(k+2) - p_n^{(k)}.$$

Para ello, basta tener en cuenta que  $A_n^{(k)}(1) = 0$ , y luego haciendo uso de (4.12), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \sum_{t \geq 0} R_{2,n}^{(k)}(t) &= (k+1) \sum_{t \geq 0} \sum_{j=0}^n \frac{b_{j,n}^{(k)}}{(t+j+1)^{k+2}} - \sum_{t \geq 0} \sum_{j=0}^n \frac{a_{j,n}^{(k)}}{(t+j+1)^{k+1}} \\ &= (k+1) \sum_{j=0}^n \sum_{l \geq j+1} \frac{b_{j,n}^{(k)}}{l^{k+2}} - \sum_{j=0}^n \sum_{l \geq j+1} \frac{a_{j,n}^{(k)}}{l^{k+1}} \\ &= (k+1) \sum_{j=0}^n b_{j,n}^{(k)} \left( \sum_{l \geq 1} - \sum_{l=1}^j \right) \frac{1}{l^{k+2}} - \sum_{j=0}^n a_{j,n}^{(k)} \left( \sum_{l \geq 1} - \sum_{l=1}^j \right) \frac{1}{l^{k+1}} \\ &= (k+1) \sum_{j=0}^n b_{j,n}^{(k)} \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l^{k+2}} - (k+1) \sum_{j=1}^n b_{j,n}^{(k)} \sum_{l=1}^j \frac{1}{l^{k+2}} + \sum_{j=1}^n a_{j,n}^{(k)} \sum_{l=1}^j \frac{1}{l^{k+1}}, \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$q_n^{(k)} = (k+1) \sum_{j=0}^n b_{j,n}^{(k)} \quad \text{y} \quad p_n^{(k)} = (k+1) \sum_{j=1}^n b_{j,n}^{(k)} H_j^{(k+2)} - \sum_{j=1}^n a_{j,n}^{(k)} H_j^{(k+1)}.$$

Este resultado se corresponde con (4.19). De esta forma, el teorema queda demostrado. □

Llegado a este punto, es totalmente necesario el estudio de los ceros del polinomio  $P_{n(k-1)}^{(k)}(t)$ , lo cual posibilitaría de forma efectiva, determinar el comportamiento asintótico de los residuos  $r_n^{(k)}$ , a partir del método de Laplace, aplicándose pues, a (4.20). Esta cuestión queda como problema abierto de esta tesis doctoral.

A continuación se mostrará, el compartamiento que siguen algunos residuos para los primeros  $n$ .

$n$	$q_n^{(1)} \zeta(3) - p_n^{(1)}$	$q_n^{(27)} \zeta(29) - p_n^{(27)}$	$q_n^{(35)} \zeta(37) - p_n^{(35)}$	$q_n^{(39)} \zeta(41) - p_n^{(39)}$
1	0,02057	$8,370 \times 10^{-6}$	$3,229 \times 10^{-7}$	$6,345 \times 10^{-8}$
7	$1,433 \times 10^{-12}$	$9,049 \times 10^{-20}$	$2,512 \times 10^{-23}$	$3,794 \times 10^{-25}$
25	$6,500 \times 10^{-41}$	$5,319 \times 10^{-49}$	$1,809 \times 10^{-53}$	$8,815 \times 10^{-56}$
34	$6,879 \times 10^{-55}$	$5,194 \times 10^{-63}$	$1,266 \times 10^{-67}$	$5,133 \times 10^{-70}$
45	$6,548 \times 10^{-72}$	$5,100 \times 10^{-80}$	$9,668 \times 10^{-85}$	$3,399 \times 10^{-88}$
50	$1,239 \times 10^{-79}$	$9,980 \times 10^{-88}$	$1,742 \times 10^{-92}$	$5,837 \times 10^{-95}$

### 4.3. Ejemplos numéricos de los aproximantes racionales. Discusión de resultados

En esta sección se darán algunos ejemplos numéricos, donde se resalta la velocidad de convergencia de los aproximantes racionales expuestos a continuación.

I Aproximantes racionales a  $\zeta(5)$

$n$	$p_n^{(3)}/q_n^{(3)}$	$\zeta(5) - p_n^{(3)}/q_n^{(3)}$
1	$\frac{200}{193}$	0,000658325
2	$\frac{1193096709}{1150607924}$	$5,064 \times 10^{-7}$
3	$\frac{83320088643112085473325}{80352838722733659446868}$	$4,113 \times 10^{-10}$
4	$\frac{442202476872959085926909789087863004126875}{42645447060288630709524019983813167727104}$	$3,424 \times 10^{-13}$
5	$\frac{80236495088546709948043087446448576238829878564279976819467888207}{77379060103809162825796985303074423411579893795225283068654384000}$	$2,889 \times 10^{-16}$
30	.	$7,215 \times 10^{-93}$
37	.	$2,635 \times 10^{-114}$
42	.	$1,284 \times 10^{-129}$
50	.	$4,071 \times 10^{-154}$

II Aproximantes racionales a  $\zeta(7)$

$n$	$p_n^{(5)}/q_n^{(5)}$	$\zeta(7) - p_n^{(5)}/q_n^{(5)}$
1	$\frac{3808}{3777}$	0,000141705
2	$\frac{1581134880721329}{1568042966905180}$	$7,133 \times 10^{-8}$
3	$\frac{550810359798780529506267393799430964061}{546249570639182786118197944314698083884}$	$4,654 \times 10^{-11}$
4	$\frac{206302328839127088897201131688130390001000423002686228115931485796875}{204594115815481327003095832746318425389629788514757721321372722371072}$	$3,389 \times 10^{-14}$
5	.	$2,612 \times 10^{-17}$
30	.	$4,481 \times 10^{-94}$
37	.	$1,609 \times 10^{-115}$
42	.	$7,774 \times 10^{-131}$
50	.	$2,439 \times 10^{-155}$

III Aproximantes racionales a  $\zeta(13)$

$n$	$p_n^{(11)}/q_n^{(11)}$	$\zeta(13) - p_n^{(11)}/q_n^{(11)}$
1	$\frac{16746496}{16744449}$	$4,638 \times 10^{-7}$
2	$\frac{5866785788869311043396925597895}{5866065944528804420313872478428}$	$4,239 \times 10^{-11}$
3	.	$1,087 \times 10^{-14}$
4	.	$4,360 \times 10^{-18}$
5	.	$2,213 \times 10^{-21}$
30	.	$5,634 \times 10^{-99}$
37	.	$1,838 \times 10^{-120}$
42	.	$8,451 \times 10^{-136}$
50	.	$2,497 \times 10^{-160}$

IV Aproximantes racionales a  $\zeta(29)$

$n$	$p_n^{(27)}/q_n^{(27)}$	$\zeta(29) - p_n^{(27)}/q_n^{(27)}$
1	$\frac{72057589877178368}{72057589742960641}$	$1,447 \times 10^{-14}$
2	.	$2,072 \times 10^{-21}$
3	.	$1,376 \times 10^{-26}$
4	.	$4,903 \times 10^{-31}$
5	.	$4,349 \times 10^{-35}$
30	.	$1,381 \times 10^{-116}$
37	.	$2,663 \times 10^{-138}$
42	.	$9,270 \times 10^{-154}$
50	.	$1,952 \times 10^{-178}$

V Aproximantes racionales a  $\zeta(41)$

$n$	$p_n^{(39)}/q_n^{(39)}$	$\zeta(41) - p_n^{(39)}/q_n^{(39)}$
1	$\frac{1208925819590989674708992}{1208925819590439918895105}$	$2,740 \times 10^{-20}$
2	.	$1,367 \times 10^{-29}$
3	.	$3,154 \times 10^{-36}$
4	.	$1,132 \times 10^{-41}$
5	.	$1,860 \times 10^{-46}$
30	.	$5,342 \times 10^{-132}$
37	.	$5,630 \times 10^{-154}$
42	.	$1,417 \times 10^{-169}$
50	.	$2,005 \times 10^{-194}$

En la figura que viene a continuación, se puede observar cuán rápido convergen los aproximantes racionales correspondientes a  $\zeta(5)$ ,  $\zeta(7)$ ,  $\zeta(13)$ ,  $\zeta(29)$  y  $\zeta(41)$ , respectivamente, en correspondencia con las tablas anteriores.

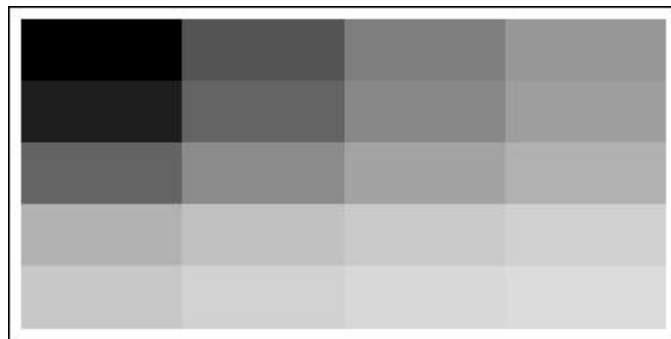


Figura 4.1: De izquierda a derecha se muestran en escala de grises los valores de la función (4.22), para  $n = 2, \dots, 10$  y de arriba hacia abajo sus argumentos son  $\pi_n^{(3)}$ ,  $\pi_n^{(5)}$ ,  $\pi_n^{(11)}$ ,  $\pi_n^{(27)}$  y  $\pi_n^{(39)}$ , respectivamente.

Como se ha podido observar, los resultados se han ilustrados mediante una matriz rectangular de cuadrados, formada por cinco filas y nueve columnas, donde se utilizó una escala de grises, para la

cual, el color de cada cuadrado se determina mediante el valor de la función

$$f(\pi_n^{(k)}) = \left| \left( \log |\zeta(k+2) - \pi_n^{(k)}| \right)^{-1} \right|, \quad k = 3, 5, 11, 27, 39, \quad n = 2, \dots, 10, \quad (4.22)$$

siendo  $\pi_n^{(k)} = p_n^{(k)} / q_n^{(k)}$ .

A modo de resumen, se mostrará en la siguiente tabla, el número de iteraciones realizadas para que los aproximantes racionales antes expuestos, alcancen una cota de error de  $10^{-154}$ :

$\zeta$	$\zeta(5)$	$\zeta(9)$	$\zeta(13)$	$\zeta(19)$	$\zeta(23)$	$\zeta(29)$	$\zeta(37)$	$\zeta(41)$
$n$	50	49	48	46	45	42	39	37

Algunos autores se han dedicado al estudio de determinados algoritmos [22, 61], que estiman ciertos valores de la función zeta de Riemann en enteros. Es evidente, según se ha mostrado anteriormente, que en este capítulo, se presenta un nuevo algoritmo, capaz de brindar excelentes aproximantes racionales, a valores de la función zeta de Riemann para cualquier argumento entero, con las limitaciones que el software (Mathematica) disponible en el mercado, tenga para resolver en aritmética exacta sistemas de ecuaciones lineales.





# Resumen de conclusiones y problemas abiertos

---

Para finalizar esta tesis doctoral, se concluye con una exposición, a modo de resumen, de los principales resultados, desarrollados a lo largo de toda la investigación doctoral, recogidos en las secciones 2.5, 3.6 y 4.3. Además, de una serie de cuestiones y problemas abiertos que han surgido durante el proceso investigador.

## \* Conclusiones

1. Diferentes formulaciones del problema de Riemann-Hilbert, conllevan a diferentes aproximaciones diofánticas a  $\zeta(3)$ , tal es el caso, de los problemas de Riemann-Hilbert  $p$ -descompensados. En particular, para  $p = 1$  se tiene la siguiente formulación:

**Problema 4.3.1.** *Encontrar una función matricial  $F(z) \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  de manera que:*

**I.**  *$F(z)$  sea analítica en  $\mathbb{C} \setminus (0, 1)$ ,*

**II.** *Se verifique la siguiente condición de salto*

$$F_+(z) = F_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1(z) & w_2(z) \\ 0 & 1 & w_2(z) & w_3(z) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \in (0, 1).$$

**III.** *El comportamiento asintótico cerca del infinito sea como sigue*

$$F(z) \begin{pmatrix} z^{-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty.$$

A partir de la cual, se formulan los siguientes problemas de aproximación simultánea

$$\begin{aligned} F_{i,1}^{(n+\delta_{i,1}-1)}(z) f_1(z) + F_{i,2}^{(n+\delta_{i,2})}(z) f_2(z) - \mathcal{C}_{n+\delta_{i,2}}(z) &= z^{-n} \delta_{i,3} + \mathcal{O}(z^{-n-1}), \\ F_{i,1}^{(n+\delta_{i,1}-1)}(z) f_2(z) + 2F_{i,2}^{(n+\delta_{i,2})}(z) f_3(z) - \mathcal{D}_{n+\delta_{i,2}}(z) &= z^{-n} \delta_{i,4} + \mathcal{O}(z^{-n-1}), \\ F_{i,1}^{(n+\delta_{i,1}-1)}(1) &= 0, \quad i = 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

siendo  $F_{i,1}^{(n+\delta_{i,1}-1)}(z)$ ,  $F_{i,2}^{(n+\delta_{i,2})}$  polinomios de grado  $n+\delta_{i,1}-1$  y  $n+\delta_{i,2}$ , respectivamente. Como resultado de lo anterior, para  $i = 1$ , se tienen los aproximantes de Apéry (2)-(3) y

para el resto se consigue

$$\begin{aligned} 2F_{i,2}^{(n+\delta_{i,2})}(1) \zeta(3) - \mathcal{D}_{n+\delta_{i,2}}(1) &= \int_0^1 \frac{F_{i,1}^{(n+\delta_{i,1}-1)}(x) + F_{i,2}^{(n+\delta_{i,2})}(x) \log x}{1-x} \log x dx \\ &= \mathcal{O}\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^{4n}\right). \end{aligned}$$

Lo cual evidentemente, da excelentes aproximantes racionales a  $\zeta(3)$ , aunque para estos casos, como es posible comprobar, no se prueba su irracionalidad.

2. Se han encontrado infinitas aproximaciones diofánticas a  $\zeta(3)$  que prueban el teorema de Apéry.
3. Modificaciones  $\theta(t)$  en

$$\tilde{R}_n(t) = \frac{(-t)_n^2 \theta(t)}{(t+1)_{n+1}^2}, \tag{4.23}$$

podrían dar lugar a nuevos aproximantes racionales que no demuestren la irracionalidad de  $\zeta(3)$ , aunque es posible que los mismos conduzcan a excelentes aproximantes diofánticos a dicho número.

4. Se han encontrado nuevas relaciones de recurrencia y nuevos desarrollos en fracciones continuas para  $\zeta(3)$  y  $\zeta(4)$ .
5. Los nuevos aproximantes diofánticos de  $\zeta(4)$  mejoran numéricamente en comparación a los obtenidos por Zudilin.
6. Se han encontrado excelentes aproximantes racionales a los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros.
7. Se ha expuesto un algoritmo eficiente, para el cálculo de aproximaciones diofánticas, a los valores de la función zeta de Riemann en argumentos enteros.

\* Problemas abiertos

1. ¿Es posible encontrar nuevas funciones racionales del tipo (4.23), que mejoren la medida de irracionalidad de  $\zeta(3)$  dada por Apéry? En caso afirmativo, ¿es posible que dichos resultados estén vinculados con problemas de Riemann-Hilbert  $p$ -descompensados?
2. A priori se desconoce un criterio formal, que permita encontrar excelentes aproximantes diofánticos que prueben la irracionalidad de  $\zeta(3)$ , a partir de funciones racionales del tipo (4.23). Es aconsejable abundar en esta cuestión.
3. ¿Es posible a partir de las técnicas desarrolladas en las secciones 3.1-3.3, probar que  $\zeta(3)^2$  sea irracional? En caso afirmativo, ¿es posible extender este esquema y construir una demostración de la trascendencia de  $\zeta(3)$ ?

En particular, para  $i = 1, j = 1, 2$ , considérese la siguiente función auxiliar

$$f_n^{(1,l)}(x) = \begin{cases} \frac{2 \left( A_n^{(1,l)}(x) + B_n^{(1,l)}(x) \log x \right)^2}{1-x}, & 0 < x < 1, \quad l = 1, 2, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

de donde se puede comprobar que

$$0 < \int_0^1 f_n^{(1,l)}(x) dx = q_n^{(1,l)} r_n^{(1,l)} - 2b_{n,n}^{(1,l)} R_{2,n}^{(1,l)} (n-1),$$

siendo

$$2b_{n,n}^{(1,l)} R_{2,n}^{(1,l)} (n-1) = \begin{cases} \frac{2n+1}{n^5} > 0, & l=1, \\ \frac{3}{n^3} > 0, & l=2. \end{cases}$$

Por tanto,  $q_n^{(1,l)} r_n^{(1,l)} > 2b_{n,n}^{(1,l)} R_{2,n}^{(1,l)} (n-1) > 0$ . Luego, teniendo en cuenta que la sucesión  $\{q_n^{(1,l)}\}_{n \geq 0}$  es estrictamente positiva, se deduce entonces que  $r_n^{(1,l)} > 0$  y  $p_n^{(1,l)} = q_n^{(1,l)} \zeta(3) - r_n^{(1,l)} > 0$ . Es evidente, que a partir de un cierto  $n > n_0$ ,  $n_0 \in \mathbb{N}$ , se tiene

$$0 < l_n^6 n q_n^{(1,1)} q_n^{(1,2)} \zeta(3)^2 - l_n^6 n (p_n^{(1,1)} r_n^{(1,2)} + p_n^{(1,2)} r_n^{(1,1)} + p_n^{(1,1)} p_n^{(1,2)}) = l_n^6 n r_n^{(1,1)} r_n^{(1,2)} < 1.$$

Por consiguiente, cabría estudiar, considerando la libertad que proporcionan los parámetros  $\rho$  y  $\theta$ , la existencia de sucesiones de enteros  $p_n^{(\rho,\theta)}$  estrictamente positivas, que verifiquen

$$0 < l_n^6 n q_n^{(1,1)} q_n^{(1,2)} \zeta(3)^2 - p_n^{(\rho,\theta)} = l_n^6 n r_n^{(1,1)} r_n^{(1,2)} < 1, \quad n > n_0, \quad n_0 \in \mathbb{N},$$

dando lugar de esta manera, a la prueba de la irracionalidad del número real  $\zeta(3)^2$ .

4. ¿Existen modificaciones  $\tilde{\theta}_n(t)$  en

$$\mathcal{R}_n(t) = \frac{(-t)_n^2 (t+n+2)_{n-1}^2 \tilde{\theta}_n(t)}{(t+1)_{n+1}^4},$$

que conduzcan a aproximantes diofánticos a  $\zeta(4)$  que prueben su irracionalidad?

5. Se ha vinculado el estudio de la irracionalidad de  $\zeta(k+2)$ , con  $k$  entero impar, a la localización de los ceros del polinomio  $F_{n(k-1)}^{(k)}(t)$  involucrado en (4.13), véase la Figura 4.2.
6. Considerando la integral auxiliar

$$\begin{aligned} I_n^{(k)} &= \int_0^1 \frac{F_n^{(k)}(x) F_{n+1}^{(k)}(x)}{1-x} \log^{k-1} x dx = k! q_n^{(k)} r_{n+1}^{(k)} \\ &= k! q_{n+1}^{(k)} r_n^{(k)} - a_{n+1,n+1}^{(k)} R_{n,1}^{(k)}(n) - b_{n+1,n+1}^{(k)} R_{n,2}^{(k)}(n). \end{aligned}$$

Queda por determinar explícitamente el análogo del determinante wronskiano

$$W_n^{(k)} = \det \begin{pmatrix} q_n^{(k)} & r_n^{(k)} \\ q_{n+1}^{(k)} & r_{n+1}^{(k)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{k!} \left( a_{n+1,n+1}^{(k)} R_{n,1}^{(k)}(n) + b_{n+1,n+1}^{(k)} R_{n,2}^{(k)}(n) \right),$$

asociado a los aproximantes racionales a  $\zeta(k+2)$ , con  $k$  entero impar. Este resultado permitiría dar solución al siguiente problema abierto.

7. Determinar las relaciones de recurrencia de orden 2 ó superior, vinculadas a los aproximantes racionales a  $\zeta(s)$ ,  $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . En particular, para los aproximantes racionales a  $\zeta(k+2)$ , con  $k$  entero impar, habría que estudiar relaciones del tipo

$$W_n^{(k)} r_{n+2}^{(k)} - \left( W_n^{(k)} \frac{q_{n+2}^{(k)}}{q_{n+1}^{(k)}} + W_{n+1}^{(k)} \frac{q_n^{(k)}}{q_{n+1}^{(k)}} \right) r_{n+1}^{(k)} + W_{n+1}^{(k)} r_n^{(k)} = 0, \quad n \geq 1.$$

8. Aún queda por estimar los términos de las sucesiones residuos

$$r_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi i k!} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} R_{1,n}^{(k)}(\nu) \left( \frac{\pi}{\sin \pi \nu} \right)^2 d\nu.$$

Para ello, bastaría con escribirlos en la forma

$$r_n^{(k)} = -\frac{2\pi i}{n^{\Theta(k)}} \int_{\varrho-i\infty}^{\varrho+i\infty} g_k(t) e^{2(n+1)f_k(t)} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})) dt,$$

donde  $\varrho$  tiene que ser un punto de silla o un valor extremo de la función  $\operatorname{Re} f_k(t)$  sobre el contorno de integración y  $\Theta(k)$  es un número entero que depende de  $k$ . Por tanto, a partir del método de Laplace se conseguiría

$$r_n^{(k)} = -2\pi n^{-\Theta(k)} g_k(\varrho) e^{z f_k(\varrho)} \sqrt{\frac{2\pi}{z |f_k''(\varrho)|}} e^{i\varphi_m(\varrho)} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})),$$

donde

$$\varphi_m(\varrho) = \pi(m+1) - \frac{\arg f_k''(\varrho)}{2}, \quad (m = 0, 1).$$

9. Considérese el retículo  $\mathcal{L}_k$  formado por las soluciones del sistema diofántico de congruencias [9]

$$\vec{x} \in \mathcal{L}_k : \begin{cases} \langle \vec{x}, \vec{p}^{(k,n)} \rangle \equiv 0 \pmod{\mathcal{H}_n^{(k)}}, \\ \langle \vec{x}, \vec{q}^{(k,n)} \rangle \equiv 0 \pmod{\mathcal{H}_n^{(k)}}, \end{cases}$$

donde las coordenadas de los vectores

$$\vec{p}^{(k,n)} = \left( \tilde{p}_n^{(k)}, \tilde{p}_{n-1}^{(k)}, \dots, \tilde{p}_{n-r}^{(k)} \right), \quad \vec{q}^{(k,n)} = \left( \tilde{q}_n^{(k)}, \tilde{q}_{n-1}^{(k)}, \dots, \tilde{q}_{n-r}^{(k)} \right),$$

son los numeradores y denominadores de los aproximantes racionales a  $\zeta(k+2)$ , con  $k$  entero impar y  $\mathcal{H}_n$  es una cierta sucesión (fijada) de números naturales,  $n \in \mathbb{N}$ . Sería interesante reducir una de las bases que genera el retículo  $\mathcal{L}_k$  haciendo uso de estos aproximantes racionales a  $\zeta(k+2)$

$$\frac{\sum_{i=0}^r x_i \tilde{p}_{n-i}^{(k)}}{\sum_{i=0}^r x_i \tilde{q}_{n-i}^{(k)}} = \frac{\mathcal{H}_n^{(k)} \mathcal{P}^{(k,n)}}{\mathcal{H}_n^{(k)} \mathcal{Q}^{(k,n)}},$$

de modo que se pueda eliminar el crecimiento de las sucesión residuo  $\tilde{r}_n^{(k)} = \tilde{q}_n^{(k)}\zeta(k+2) - \tilde{p}_n^{(k)}$  mediante la transformación

$$\mathcal{Q}^{(k,n)}\zeta(k+2) - \mathcal{P}^{(k,n)} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{f}^{(k,n)} \rangle}{\mathcal{H}_n^{(k)}},$$

donde  $\vec{f}^{(k,n)} = \vec{q}^{(k,n)}\zeta(k+2) - \vec{p}^{(k,n)}$ . Nótese que el retículo  $\mathcal{L}_k$  puede ser generado por infinitas bases, esencialmente, quedaría por estudiar aquella base reducida  $(\vec{b}_j^{(k,n)})_{1 \leq j \leq r+1}$ , que permita que

$$\frac{\langle \vec{b}_j^{(k,n)}, \vec{f}^{(k,n)} \rangle}{\mathcal{H}_n^{(k)}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty,$$

probándose de esta manera, la irracionalidad de  $\zeta(k+2)$ , con  $k$  entero impar. Para tal propósito, se puede hacer uso del algoritmo LLL (Lenstra, Lenstra y Lovász) [52], el cual en principio debería proporcionar la solución deseada y en tiempo polinomial, suponiendo que la dimensión de  $\mathcal{L}_k$  esté fijada, véase [49]. Nótese que se tiene la libertad de ir iterando el proceso descrito anteriormente, en correspondencia con la dimensión  $r+1$  del retículo  $\mathcal{L}_k$ , hasta que se haya alcanzado la convergencia adecuada. Claro está, que lo anterior no es un problema trivial, pero sí da excelentes pautas a seguir, en trabajos futuros. Además, este problema abierto, también está vinculado al estudio de funciones del tipo

$$R_{n,k}(t) = \frac{(-t)_{n_i}^2 P_{n_j}(t)}{(t+1)_{n+1}^{k+1}},$$

donde queda por investigar los polinomios  $P_{n_j}(t)$  óptimos, que darían lugar a la prueba de la irracionalidad de  $\zeta(k+2)$ , con  $k$  entero impar.

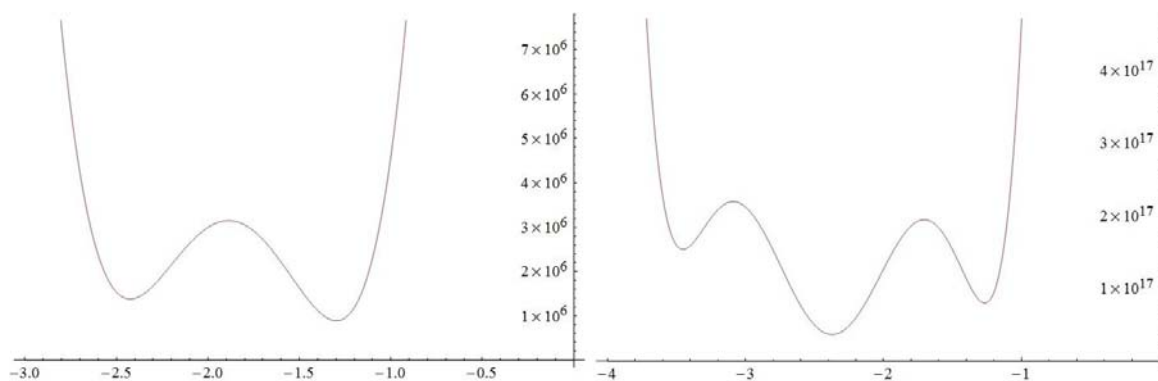


Figura 4.2: Estos gráficos representan los polinomios de parámetros  $n = 2, k = 3$  y  $n = 3, k = 3$ , respectivamente

# Bibliografía

---

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, (1972), Dover, New York.
- [2] R. Apéry, *Irrationalité de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$* , *Astérisque* **61**, (1979), 11–13.
- [3] M.J. Ablowitz, A.S. Fokas, *Complex Variables. Introduction and Applications*, Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, (2003).
- [4] S.A. Abramov, *Applicability of Zeilberger’s algorithm to hypergeometric terms*, In ISSAC’02: Proceedings of the 2002 international symposium on Symbolic and algebraic computation, New York, (2002), 1–7.
- [5] S.A. Abramov, H. Q. Le, *A criterion for the applicability of Zeilberger’s algorithm to rational functions*, *Discrete Math.* **259** (1-3): (2002), 1–17.
- [6] S.A. Abramov, *When does Zeilberger’s algorithm succeed?*, *Appl. Math.* **30** (3), (2003), 424–441.
- [7] S.A. Abramov, J.J. Carette, K.O. Geddes, H.Q. Le, *Telescoping in the context of symbolic summation in Maple*, *J. of Symb. Comput.* **38**, (2004), 1303–1326.
- [8] G. Almkvist, D. Van Straten, W. Zudilin, *Apéry limits of differential equations of order 4 and 5*, *Modular Forms and String Duality*, Fields Inst. Commun. Ser. **54**, Amer. Math. Soc. & Fields Inst., Providence, RI (2008), 105–123.
- [9] A. I. Aptekarev, D. N. Tulyakov, *On determinant of a lattice generated by rational approximants of the Euler constant*, *Trans. Moscow Math. Soc.* **70**, (2009), 237–249.
- [10] J. Arvesú, *Orthogonal forms: a simple tool for proving the irrationality of  $\zeta(3)$* , Preprint.
- [11] J. Arvesú. *Orthogonal forms: A key tool for deducing Apéry’s recurrence relation*, *J. Approx. Theory*, (2012), accepted.
- [12] J. Arvesú, A. Soria-Lorente, *On new rational approximants to  $\zeta(3)$* , arXiv:1204.6712v1 [math.CA] 30 Apr (2012).
- [13] J. Arvesú, A. Soria-Lorente, *On a Riemann-Hilbert problem and the irrationality of  $\zeta(3)$* , in progress, (2011).

- [14] J. Arvesú, A. Soria-Lorente, *Second order Apéry-Like recursions for  $\zeta(4)$* , in progress, (2011).
- [15] J. Arvesú, A. Soria-Lorente, *Approximants to  $\zeta$  function at integers*, in progress, (2011).
- [16] J. Arvesú, A. Soria-Lorente, *First order non-homogeneous  $q$ -difference equation for Stieltjes function characterizing  $q$ -orthogonal polynomials*, J. Differ. Equ. Appl. (2011), DOI:10.1080/10236198.2012.693484.
- [17] Ball K. and Rivoal T., *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs*. Inv. Math. **146**, (2001), 193-207.
- [18] F. Beuker, *A note on the irrationality of  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$* , Bull. London Math. Soc. **11**, (1979), 268–272.
- [19] F. Beuker, *Legendre polynomials in irrationality proofs*, Bull. Austral. Math. Soc. **22**, (1980), 431–438.
- [20] F. Beuker, *Padé approximations in number theory*, Padé approximation and its applications, (Amsterdam, 1980), 90–99, Lecture Notes in Math., **888**, Springer, Berlin-New York, (1981).
- [21] F. Beuker, *Consequences of Apéry's work on  $\zeta(3)$* , preprint of talk presented at the Rencontres Arithmétiques de Caen,  $\zeta(3)$  Irrationnel: Les Retombées, (1995).
- [22] J. Borwein, D. Bradley, R. Crandall, *Computational strategies for the Riemann zeta function*, J. Comput. Appl. Math. **121**, (2000), 247–296.
- [23] J. Borwein, D. Bradley, *Thirty-two Goldbach variations*, Int. J. Number Theory **2**, (2006), no. 1, 65–103.
- [24] E. P. Balanzario, *Método elemental para la evaluación de la función zeta de Riemann en los enteros pares*, Miscelánea Matemática **33**, (2001) 31–41.
- [25] J. Borwein, A. Van der Poorten, W. Zudilin, *Neverending Fractions: an Introduction to Continued Fractions*, September 30, (2009).
- [26] H. Cohen, *Démonstration de l'irrationalité de  $\zeta(3)$  (d'après R. Apéry)*, Séminaire de théorie des nombres, Grenoble (1978).
- [27] J. Conway, R. Guy, *The Book of Numbers*, Copernicus, Springer-Verlag New York, Inc., (1997).
- [28] C. Calderón, *La Función Zeta de Riemann*, Departamento de Matemáticas. Universidad del País Vasco, Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **57**, (2002), 67–87.
- [29] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, (1978).
- [30] P. A. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices*, a Riemann-Hilbert approach, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, American Mathematical Society, New York, (1999).
- [31] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, Dover, New York, (1974).

- [32] A.S. Fokas, A.R. Its, A.V. Kitaev, *The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity*, Comm. Math. Phys. **147**, (1992), 395–430.
- [33] S. Fischler, *Irrationalité de valeurs de zêta [d'après Apéry, Rivoal, ...]*, Séminaire Bourbaki 2002–2003, exposé numéro 910 (17 novembre 2002), Astérisque No. **294**, (2004), 27–62.
- [34] S. Fischler, *Restricted rational approximation and Apéry-type constructions*, Indagationes Mathem. **20**, (2009), 201–215.
- [35] S. Fischler, W. Zudilin, *A refinement of Nesterenko's linear independence criterion with applications to zeta values*, Math. Ann. **347**, (2010), 739–763.
- [36] S. Fischler, *Nesterenko's criterion when the small linear forms oscillate*, Arch. Math. **98**, (2012), 143–151.
- [37] L. A. Gutnik, *On the irrationality of certain quantities involving  $\zeta(3)$* , Acta Arith. **42**, (1983), 255–264.
- [38] G. Gasper, M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **96**, Cambridge University Press, Cambridge, (2004).
- [39] X. Gourdon, P. Sebah, *The Riemann Zeta-function  $\zeta(s)$ : generalities*, Numbers, constants and computation, (2004).
- [40] F. Granero, *El Problema de Basilea: historia y algunas demostraciones*, La Gaceta de la RSME, **12**, (2009), Núm. 4, Págs. 721–737.
- [41] J. Hancl, *A simple proof of the irrationality of  $\pi^4$* , Amer. Math. Monthly **93**, (1986), 374–375.
- [42] M. Hata, *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. Reine Angew. Math. **407**:1, (1990), 99–125.
- [43] M. Hata, *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. Pures et Appl. **69**, (1990), 133–173.
- [44] M. Hata, *A new irrationality measure for  $\zeta(3)$* , Acta Arith. **92**, (2000), 47–57.
- [45] W. B. Jones, W. J. Thron, *Continued fractions*, Analytic theory and applications, Encyclopaedia Math. Appl. Section: Analysis **11**, (Addison-Wesley, London, 1980).
- [46] Y. Jin, H. Dickinson, *Apéry sequences and Legendre transforms*, J. Austral. Math. Soc. **68**, (2000), 349–356.
- [47] L. Jain, P. Tzermias, *Beukers' integrals and Apéry's recurrences*, J. Integ. Seq. **8**, (2005), Article 05.1.1.
- [48] A. Kuijlaars, *Lecture notes on Riemann-Hilbert Methods for Orthogonal Polynomials*, 14th EICCAAPDE, University of Coimbra (2009), manuscript.
- [49] R. Kannan, *Minkowski's convex body theorem and integer programming*, Math. Oper. Res. **12**, (1987), 415–440.



- [50] A. Kuijlaars, *Riemann-Hilbert Analysis for Orthogonal Polynomials*, in: Orthogonal Polynomials and Special Functions: Leuven 2002, ( E. Koelink and W. Van Assche eds.), Lecture Notes in Mathematics **1817**, Springer-Verlag, Berlin, (2003), 167–210.
- [51] C. Krattenthaler, T. Rivoal, *Hypergéométrie et fonction zêta de Riemann*, Mem. Amer. Math. Soc. **186**, (2007), no. 875, x+87 pp.
- [52] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, L. Lovász, *Factoring polynomials with rational coefficients*, Math. Ann. **261** (1982), 515–534.
- [53] G. López, H. Pijeira, *Polinomios Ortogonales*, XIV Escuela Venezolana de Matemáticas, Mérida, Venezuela, (2001).
- [54] J. L. López, P. J. Pagola, *The Laplace's and Steepest Descents Methods Revisited*, International Mathematical Forum, **2**, (2007), no. 7, 297–314.
- [55] J. L. López, P. J. Pagola, *Fórmulas explícitas para los coeficientes de los métodos de Laplace y Saddle Point*, XI Congreso de Matemática Aplicada, Ciudad Real, 21-25 septiembre (2009), 1–9.
- [56] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, (1977).
- [57] Yu. V. Nesterenko, *A few remarks on  $\zeta(3)$* , Math. Notes **59**, No. 6, (1996), 625–636.
- [58] Yu. V. Nesterenko, *Integral identities and constructions of approximations to zeta values*, J. Théor. Nombres Bordx. **15**, (2003), 535–550.
- [59] Yu. V. Nesterenko, *An Elementary Proof of the Irrationality of  $\zeta(3)$* , Moscow University Mathematics Bulletin, **64**, No. 4, (2009), 165–171.
- [60] E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, **92**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, (1991).
- [61] T. J. Osler, B. Seaman, *A Computer Hunt for Apery's*, Math. Spectrum **35**, (2002-03), No. 1, 5–8.
- [62] O. Perron, *Über ein Satz des Herrn Poincaré*, J. Reine Angew. Math. **136**, (1909), 17–37; *Über die Poincarésche lineare Differenzgleichung*, **137**, (1910), 6–64.
- [63] H. Poincaré, *Sur les équations linéaires aux différentielles et aux différences finies*, Amer. J. Math. **7**, (1885), 203–258.
- [64] P. Paule, M. Schorn, *A Mathematica Version of Zeilberger's Algorithm for Proving Binomial Coefficient Identities*, J. Symb. Comput. **20**, (5–6): (1995), 673–698.
- [65] P. Paule, V. Strehl, *Symbolic summation—some recent developments*, In Computer Algebra in Science and Engineering—Algorithms, Systems, and Applications, (1995), 138–162.
- [66] M. Prévost, *A new proof of the irrationality of  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$  using Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math. **67**, (1996), 219–235.

- [67] M. Petkovsek, H. S. Wilf, and D. Zeilberger, *A = B*, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, M.A., (1997).
- [68] M. Prévost, V. N. Sorokin, *Hermite-Padé Approximants and Apéry Theorem*, Technical Report L.M.P.A., (2007).
- [69] Kh. H. Pilehrood, T. H. Pilehrood, *Simultaneous generation for zeta values by the Markov-WZ method*, D. Math. Theor. Comput. Sci. DMTCS, **10**:3, (2008), 115–124.
- [70] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsber. Akad. Berlin, (1859), 671–680.
- [71] E. Reysat, *Irrationalité de  $\zeta(3)$* , Selon Apéry in: 20 année. Seminaire Delange–Pisot–Poitou, (1978/79), p. 6.
- [72] G. Rhin, C. Viola, *The Group Structure for  $\zeta(3)$* , Acta Arith. **97**, (2001), 269–293.
- [73] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331**:4, (2000), 267–270.
- [74] T. Rivoal, *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs*, Thèse de doctorat (2001), Laboratoire SDAD, Université de Caen.
- [75] T. Rivoal, *Irrationalité d’au moins un des neuf nombres  $\zeta(5)$ ,  $\zeta(7)$ , ...,  $\zeta(21)$* , Acta Arith. **103**:2, (2002), 157–167.
- [76] T. Rivoal, W. Zudilin, *Diophantine properties of numbers related to Catalan’s constant*, Math. Ann. **326**, (2003), 705–721.
- [77] T. Rivoal, *Séries hypergéométriques et irrationalité des valeurs de la fonction zêta*, Actes des journées arithmétiques de Lille (July, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux **15**:1, (2003), 351–365.
- [78] T. Rivoal, *Valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann*, Quadrature, **49**, (2003), 11 pages.
- [79] T. Rivoal, *Simultaneous generation of Koecher and Almkvist-Granville’s Apéry-like formulae*, Experiment. Math., **13**, (2004), 503–508.
- [80] T. Rivoal, *Hypergeometric constructions of rational approximations of (multiple) zeta values*, in Algebraic and Analytic Aspects of Zeta Functions and L-Functions, G. Bhowmik et. al. (eds.), MSJ Memoirs **21**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, (2010), 167–183.
- [81] P. A. Sánchez, F. Luca, J. P. Maldonado, D. F. Núñez, R. N. Pacheco, *Valores irracionales de la función zeta de Riemann en los impares*, Morfismos, **10**, No. 2, (2006), 15–43.
- [82] V. N. Sorokin, *Hermite-Padé approximations for Nikishin systems and the irrationality of  $\zeta(3)$* , Communications of the Moscow Math. Soc. **49**, (1993), 176–177.
- [83] V. N. Sorokin, *Apéry’s theorem*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. [Moscow Univ. Math. Bull.] no. 3, (1998), 48–52.

- [84] V. N. Sorokin, *One algorithm for fast calculation of  $\pi^4$* , Preprint (Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute for Applied Mathematics, Moscow 2002), 59 pages.
- [85] V.L. Sousa, *O Problema de Riemann-Hilbert para Polinómios Ortogonais*, Tese de Mestrado, Universidade de Aveiro, Aveiro, (2004).
- [86] J. Steuding, *Diophantine Analysis*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2005).
- [87] V. Salikhov, A. Frolovichev, *On multiple integrals represented as a linear form in  $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(2k-1)$* , J. Math. Sci., **146**, No. 2, (2007).
- [88] Ch. Smet, W. Van Assche, *Mellin transforms for multiple Jacobi-Piñeiro polynomials and a  $q$ -analogue*, J. Approx. Theory, **162**:4, (2010), 782–806.
- [89] W. Van Assche, *Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence*, Contemp. Math. **236**, (1999), 325–342.
- [90] W. Van Assche, *Hermite-Padé Rational Approximation to Irrational Numbers*, Comput. Meth. Funct. Theory **10**, (2010), No. 2, 585–602.
- [91] Van der Poorten A. J., *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of  $\zeta(3)$* , An informal report, Math. Intelligencer **1**, (1979), 195–203.
- [92] W. Zudilin, *Difference equations and the irrationality measure of numbers*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **218**, (1997), 160–174.
- [93] W. Zudilin, *One of the eight numbers  $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(17), \zeta(19)$  is irrational*, Mat. Zametki [Math. Notes] **70**:3, (2001), 472–476.
- [94] W. Zudilin, *One of the eight numbers  $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$  is irrational*, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys] **56**:4, (2001), 149–150.
- [95] W. Zudilin, *Irrationality of values of zeta function at odd integers*, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys] **56**:2, (2001), 215–216.
- [96] W. Zudilin, *A third-order Apéry-like recursion for  $\zeta(5)$* , Mat. Zametki [Math. Notes] **72**:5, (2002), 796–800 (E-print math.NT/0206178).
- [97] W. Zudilin, *An elementary proof of Apéry's theorem*, E-print math. NT/0202159, Moscow Lomonosov State University, (2002), 1–8.
- [98] W. Zudilin, *Difference equation and permutation group for  $\zeta(4)$* , Actes des 12<sup>èmes</sup> rencontres arithmétiques de Caen (June 29–30, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux (2002).
- [99] W. Zudilin, *Irrationality of values of the Riemann zeta function*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. [Russian Acad. Sci. Izv. Math.] **66**, (2002), No. 3.
- [100] W. Zudilin, *An Apéry-Like Difference Equation for Catalan's Constant*, Elect. J. Comb. **10**, (2003), No. 1, R14, 1–10.

- [101] W. Zudilin, *Well-poised hypergeometric series for diophantine problems of zeta values*, Actes des 12èmes rencontres arithmétiques de Caen (June 29–30, 2001), J. Théorie Nombres Bordeaux, **15**:2, (2003), 593–626.
- [102] W. Zudilin, *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théorie Nombres Bordeaux, **16**:1, (2004), 251–291.
- [103] W. Zudilin, *Binomial sums related to rational approximations to  $\zeta(4)$* , Math. Notes 75 (2004), 594–597; English translation in Mat. Zametki, **75**, (2004), 637–640.
- [104] W. Zudilin, *Arithmetic hypergeometric series*, Russian Math. Surveys **66**:2, 1–51, Uspekhi Mat. Nauk **66**:2, (2011), 163–216.