VALOR DE SHAPLEY DE UN JUEGO CAPITALISTA*

Juan Pablo Rincón Zapatero

RESUMEN.— La ineficiencia del capitalismo como sistema económico desde el punto de vista del óptimo social, puesta de manifiesto por primera vez por Lancaster en 1973 y derivada de la actuación descoordinada de los agentes que intervienen en el conflicto, ha llevado a numerosos autores a proponer soluciones basadas en la cooperación. En esta línea, en el artículo se demuestra la existencia del valor de Shapley en el juego de Lancaster bajo ciertas hipótesis. Además, se pone de manifiesto que la posición negociadora de ambos jugadores depende del valor del límite superior de la tasa de consumo de los trabajadores.

1. INTRODUCCION

En 1973 Lancaster modelizó el problema de la distribución y el crecimiento del capital en una economía capitalista, como un juego diferencial no cooperativo entre dos jugadores que representaban a trabajadores y capitalistas, respectivamente. El resultado obtenido, la ineficacia del capitalismo como sistema económico desde el punto de vista del óptimo social, derivada de la separación en la toma de decisiones en lo referente al ahorro y la inversión, ha motivado un estudio profundo del modelo, obteniéndose esta misma conclusión para cada una de las soluciones no cooperativas ensayadas.

El hecho de que la centralización en la toma de decisiones proporcione un mayor beneficio social[1], plantea el problema de cómo conseguir de manera efectiva un compromiso que garantice la cooperación entre los

* El autor agradece los valiosos comentarios de la doctora María Dolores Soto Torres.

1 Esto se deriva de que las estrategias óptimas de Pareto proporcionan (en casi todos los casos) una utilidad mayor que las de Nash. Véase Hoel, Michel (1978): «Distribution and Growth as a Differential Game Between Workers and Capitalists». *International Economic Review*. Vol. 19, nº 2, pp. 335-350.

jugadores. Tal acuerdo deberá ser vinculante, pues en caso contrario, si existe la posibilidad de aumentar la propia utilidad desviándose del acuerdo pactado, no será respetado. Supondremos que los jugadores aceptan la intervención de un agente externo (un árbitro). Este propone una serie de propiedades razonables que debe cumplir una solución, para ser aceptada como tal por los agentes que desean cooperar. La solución o reparto así obtenido dependerá de las propiedades propuestas, pero será la única que las verifica. Dos de las soluciones más usuales son la solución negociada de Nash y el valor de Shapley. La primera, aplicada al juego de Lancaster, ha sido estudiada por Pohjola[2]; el resultado más notable que obtiene este autor, aparte de la existencia, es que la posición negociadora de los trabajadores no es mejor que la de los capitalistas. Nosotros estudiaremos en este artículo la solución de Shapley.

Los juegos cooperativos estáticos se estudian mediante la definición de una función característica v, que asocia a cada coalición de jugadores que coordine sus estrategias, la utilidad (medida en dinero o en algún bien que los jugadores pueden transferir libremente) que la coalición puede aseguarse, independientemente del comportamiento del resto de los jugadores; es decir, si $N = \{1,..., n\}$ es el conjunto de jugadores, 2^N es el conjunto de subconjuntos de N y $S \in 2^N$, entonces $v(S) \in IR$ representa el pago conjunto que reciben los jugadores de la coalición S ($v(\emptyset) = 0$, por definición). Nada se dice sobre la forma de repartir la utilidad total entre los miembros de la coalición; éste es el problema básico de la teoría de los juegos cooperativos y su resolución depende del criterio adoptado.

Conviene aclarar que la existencia de restricciones dinámicas en el estado, así como en las estrategias de los jugadores impide el considerar pagos laterales entre ellos, como ponen de manifiesto Vaisbord y Zhukovskii[3]. Puede darse la posibilidad de que el pago propuesto para un jugador sea inalcanzable, cualquiera que sea la estrategia permitida que utilice.

En las siguientes secciones se presentará el juego diferencial de Lancaster con una modificación y se hallarán las estrategias maximin y óptimas de Pareto[4] de los jugadores, que permiten calcular el valor de Shapley.

2 Pohjola, Matti (1984): «Threats and Bargaining in Capitalism (A Differential Game View)». *Journal of Economic Dynamics and Control*. Nº 8, pp. 291-302.

3 Vaisbord, E. M. y Zhukovskii, V. I. (1988): *Introduction to Multiplayer Differential Games and Their Applications*. Gordon and Brench Science Publishers, p. 225. Estos autores trasladan de forma extensa y rigurosa los conceptos de la teoría de juegos estáticos a los juegos diferenciales.

4 De manera informal, puede decirse que una estrategia maximin es aquella que asegura una utilidad mínima al jugador, independientemente del comportamiento del resto de los jugadores. Un jugador que adopta una estrategia maximin es pesimista, pues éstas se basan en el supuesto de que todos los demás coordinen sus estrategias, con el fin de que la utilidad del jugador sea mínima; en un juego de suma no constante este modo de actuación no es racional. Una n-upla de estrategias es óptima de Pareto si ocurre alguna de estas dos situaciones: al adoptar otra n-upla de estategias, o bien no hay variación en la utilidad de los jugadores, o bien al menos un jugador sufre una disminución en su utilidad.

La cuestión más importante es estudiar los casos en los que puede garantizarse la existencia de estrategias que hagan posible dichos pagos. Finalmente, se estudia su comportamiento cualitativo en función de los parámetros del juego.

2. PLANTEAMIENTO DEL MODELO

Se considera una economía con un único sector cuya producción $X(t)$, en un instante del tiempo t, puede ser o bien consumida o bien añadida al capital $k(t)$ y en la que el factor trabajo no tiene ninguna limitación. Supondremos que el cociente entre capital y producción es constante e igual a la unidad; esta ligera variación respecto al modelo original de Lancaster no tendrá ninguna repercusión. La variable de control de los trabajadores, que consideraremos como el jugador 1, es su tasa de consumo, $u_1(t) = \dfrac{C_1(t)}{X(t)}$ que puede variar dentro de unos límites determinados, $c \leq u_1 \leq b$, con $0 < c < b$, $\dfrac{1}{2} < b < 1$. Los capitalistas, o jugador 2, pueden controlar la tasa de inversión respecto a la producción que no consumen los trabajadores: $u_2(t) = \dfrac{I(t)}{X(t) - C_1(t)}$. Esta variable puede tomar cualquier valor entre 0 y 1. Las variaciones del capital en la economía se deben exclusivamente a la inversión, no existiendo depreciación de capital. Por tanto, $\dot{k}(t) = I(t) = k(t)\left(1 - \dfrac{C_1(t)}{k(t)}\right)\left(\dfrac{I(t)}{k(t) - C_1(t)}\right)$.

La evolución dinámica de la variable de estado, k, puede expresarse entonces en términos de u_1 y u_2 mediante la ecuación diferencial:

$$\dot{k}(t) = k(t)\,(1 - u_1(t))\,u_2(t) \quad t \in [0, T], \quad k(0) = K_0 > 0.$$

Las funciones de pago de los jugadores son:

$$J_1(u_1, u_2) = \int_0^T k(t)u_1(t)\,dt$$

$$J_2(u_1, u_2) = \int_0^T k(t)\,(1 - u_1(t))\,(1 - u_2(t))\,dt,$$

donde T es fijo y u_1, u_2 son elementos de los conjuntos

$$U_1 = \{u_1 : [0, T] \rightarrow [a, b] \mid u_1 \text{ es continua a trozos}\}$$
$$\text{y } U_2 = \{u_2 : [0, T] \rightarrow [0, 1] \mid u_2 \text{ es continua a trozos}\}$$

respectivamente.

3. ESTRATEGIAS MAXIMIN

Una estrategia maximin para el primer jugador es una función $u^*_1 \in U_1$ tal que

$$\max_{u_1 \in U_1} \min_{u_2 \in U_2} J_1(u_1, u_2) = \min_{u_2 \in U_2} J_1(u^*_1, u_2) = v(\{1\}).$$

De manera análoga se define para el segundo jugador y puede generalizarse a un juego de n personas.

Puesto que las estretegias maximin aseguran un determinado pago, independientemente del comportamiento del otro jugador, al determinarlas obtendremos $v(\{i\})$, $i = 1, 2$, donde v es la función característica del juego cooperativo.

La estrategia maximin para el jugador 1 se halla teniendo en cuenta que el jugador 2 influye sólo en su función de pago, vía la ecuación de estado. Puesto que k es creciente y $k(t)\, u_1(t)$ es positivo, el valor mínimo de $J_1(u_1, u_2)$ respecto a u_2 se alcanza con $\hat{u}_2(t) = 0\ \forall\, t \in [0, T]$, pues la acumulación de capital permanece en su nivel más bajo, k_0. Es evidente, entonces, que el máximo de $J_1(u_1, \hat{u}_2)$ respecto a u_1 se alcanza en $u^*_1(t) = b\ \forall\, t \in [0, T]$. Es decir, la estrategia maximin para el jugador 1 consiste en realizar el máximo consumo posible. De esta manera, puede asegurarse al final del juego una utilidad:

$$v(\{1\}) = J_1(u^*_1, \hat{u}_2) = k_0\, bT.$$

Para encontrar la estretegia maximin del jugador 2, notemos que para todo t se verifica: $(1 - u_1(t))\,(1 - u_2(t)) \geq (1 - b)\,(1 - u_2(t))$, $\forall\, u_1 \in U_1$, y que además la tasa de crecimiento del capital es la menor posible respecto a u_1 cuando $u_1(t) = b$ para todo $t \in [0, T]$.

Se trata de resolver, por tanto, el problema de control óptimo:

$$\max_{u_2 \in U_2} J_2(b, u_2) = \max_{u_2 \in U_2} (1 - b_2) \int_0^T k(t)\,(1 - u_2(t))\, dt$$

$$s.a.: \begin{cases} \dot{k}(t) = (l - b)\, k(t)\, u_2(t) \\ k(0) = k_0 \end{cases}$$

El hamiltoniano del problema es:

$$H(u_2, k, \lambda) = k(1 - u_2) + \lambda\,(1 - b)\, k u_2,$$

donde λ es la variable de coestado. El principio del máximo de Pontryagin[5] afirma que si existe un control óptimo u^*_2, con trayectoria asociada k^*,

5 Este teorema puede encontrarse en Kamien, M. I. y Schwartz, N. L. (1981): *Dynamic Optimazation*. North Holland. New York.

entonces existe una función λ^* continua y con derivada continua a trozos, tal que se verifica:

$$\dot{k}^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(u^*_2, k^*, \lambda) \tag{1}$$

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial k}(u^*_2, k^*, \lambda^*) \tag{2}$$

$$H(u_2, k, \lambda) \leq H(u^*_2, k, \lambda) \quad \forall\, u_2 \in U_2 \tag{3}$$

además de las condiciones de transversalidad $k(0) = k_0$ y $\lambda^*(T) = 0$.

Las condiciones en general son sólo necesarias, no suficientes. Sin embargo, dada la linealidad del hamiltoniano de nuestro problema en la variable de estado, las condiciones se tornan en este caso también suficientes[6]. De la condición (3) se obtiene:

$$u^*_2(t) = \begin{cases} 1, \; si\; \lambda > \dfrac{1}{1-b} \\ \alpha, \; si\; \lambda = \dfrac{1}{1-b} \\ 0, \; si\; \lambda < \dfrac{1}{1-b} \end{cases}$$

donde $\alpha \in [0, 1]$.

La continuidad de la función λ^* asegura la existencia de un instante t' tal que $\lambda^*(t) < \frac{1}{1-b}\; \forall\, t \in [t', T]$, es decir, $u^*_2(t) = 0$ en (t', T). En este intervalo, la ecuación diferencial (2) adopta la forma: $\dot{\lambda}^*(t) = -1,\; \lambda^*(T) = 0$, que admite como solución $\lambda^*(t) = T - t,\; t \in (t', T)$. Nótese que $\lambda^*(t') = \frac{1}{1-b}$ si $t' = T - \frac{1}{1-b}$. Supondremos que el horizonte temporal es suficientemente amplio de forma que $t' > 0$. En vista de la monotonía de λ, en un intervalo $(t'', t'),\; 0 \leq t'' < t'$, se tiene $\lambda^*(t) > \frac{1}{1-b}$ y, por tanto, $u^*_2(t) = 1$ en este intervalo. Al integrar (2) con condición inicial $\lambda^*(t') = \frac{1}{1-b}$, se obtiene $\lambda^*(t) = \frac{1}{1-b}\, e^{(1-b)(t'-t)}\; t \in [t'', t']$. Como $\lambda^*(t) > \frac{1}{1-b}\; \forall\, t < t'$, no hay más cambios en el control óptimo. Por tanto, la función:

6 Kamien, M. I. y Schwartz, N. L. (1981): *Op. cit.*, pp. 123 y 148.

$$u^*_2(t) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \leq t \leq t' \\ 0, & si\ t' < t \leq T \end{cases}$$

determina la estrategia maximin del segundo jugador. El pago que puede asegurarse es[7]:

$$v(\{2\}) = k_0\, e^{(1-b)\,T-1}.$$

4. ESTRATEGIAS OPTIMAS DE PARETO

Un par de estrategias $(u_1^p, u_2^p) \in U_1 \times U_2$ son óptimas de Pareto si y sólo si para todo $(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2$, $J_i\,(u_1, u_2) = J_i\,(u_1^p, u_2^p)$ o bien $J_i\,(u_1, u_2) < J_i\,(u_1^p, u_2^p)$, $i = 1, 2$.

Las estrategias óptimas de Pareto en nuestro problema se obtienen al resolver el problema de control óptimo[8]:

$$\max_{u_1 \in U_1,\, u_2 \in U_2} \left(\mu J_1\,(u_1, u_2) + (1 - \mu)\, J_2\,(u_1, u_2)\right)$$

$$s.a.: \begin{cases} \dot{k}(t) = k(t)\,(1 - u_1(t))\, u_2(t) \\ k\,(0) = k_0 \end{cases}$$

con las hipótesis del problema original, donde $\mu \in [0, 1]$. La solución a este problema puede encontrarse en el trabajo ya citado de Hoel.

Con su resolución para los distintos valores del parámetro, se obtienen las estrategias que dan lugar a los pagos que conforman la frontera de Pareto en el plano (J_1, J_2). Para el cálculo del valor de Shapley necesitamos determinar $v\,(\{1, 2\}) = max_{u_1 \in U_1,\, u_2 \in U_2}\,(J_1 + J_2)\,(u_1, u_2)$, que se obtiene del problema anterior cuando $\mu = \frac{1}{2}$. Las estrategias óptimas son:

$$u_1^p(t) = \begin{cases} c, & si\ 0 \leq t \leq T-1 \\ d, & si\ T-1 < t \leq T \end{cases} \qquad u_2^p(t) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \leq t \leq T-1 \\ 0, & si\ T-1 < t \leq T \end{cases}$$

donde $d \in [0, 1]$; es decir, el primer jugador puede adoptar cualquier estrategia en un período final del juego. Los pagos respectivos de los jugadores al final del juego son:

7 Obsérvese que si ambos jugadores juegan su estrategia maximin, el pago para el primer jugador no es $v(\{1\})$.

8. Leitmann, George (1974): *Cooperative and Non-Cooperative Many Players Differential Games*. Springer Verlag. Udine, pp. 7-9.

$$J_1(u_1^p, u_2^p) = \frac{c}{1-c}(k_0\, e^{(1-c)(T-1)} - k_0) + dk_0\, e^{(1-c)(T-1)}$$

$$J_2(u_1^p, u_2^p) = (1-d)\, k_0\, e^{(1-c)(T-1)}$$

y por tanto, $v(\{1,2\}) = \frac{c}{1-c}(k_0\, e^{(1-c)(T-1)} - k_0) + k_0\, e^{(1-c)(T-1)}$

5. VALOR DE SHAPLEY

La expresión del valor de Shapley[9] del jugador i en un juego de dos personas, con función característica v, es:

$$\emptyset_i(v) = \frac{1}{2}(v(\{1,2\}) + v(\{i\}) - v(\{j\})) \qquad \text{para } i \neq j\ i, j \in \{1,2\}$$

Si nos olvidamos por un momento de la cuestión de la existencia de estrategias que permitan obtener los pagos propuestos por el valor de Shapley en el juego de Lancaster, éstos vendrán determinados por las expresiones:

$$\emptyset_1(v) = \frac{1}{2}\, k_0 \left(\frac{c}{1-c}(e^{(1-c)(T-1)} - 1) + e^{(1-c)(T-1)} + bT - e^{(1-b)T-1} \right)$$

$$\emptyset_2(v) = \frac{1}{2}\, k_0 \left(\frac{c}{1-c}(e^{(1-c)(T-1)} - 1) + e^{(1-c)(T-1)} - bT + e^{(1-b)T-1} \right)$$

Para probar que existen al menos un par de estrategias permitidas (u_1^s, u_2^s) tales que $J_1(u_1^s, u_2^s) = \emptyset_1(v)$, $J_2(u_1^s, u_2^s) = \emptyset_2(v)$, nos valdremos del hecho de que las que proporcionan el valor de Shapley son óptimas de Pareto[10] y, por tanto, deben encontarse entre las que resuelven el problema de control de la sección 4 (si es que existen). Precisamente la singularidad que aparece en el control óptimo del primer jugador, cuando $\mu = \frac{1}{2}$, permite asegurar la existencia del valor de Shapley en ciertos casos.

Al integrar la ecuación del sistema con controles $u_1 = u_1^p$, $u_2 = u_2^p$ se obtiene $J_1(u_1^p, u_2^p) = \emptyset(\{1\})$, $J_1(u_1^p, u_2^p) = \emptyset(\{2\})$ si y sólo si:

9 Fijado $N = \{1,...,n\}$, las funciones $w_R(S) = \begin{cases} 1, & si\ R \subseteq S \\ 0, & si\ R \subseteq S \end{cases}$ $R \in S^N$, forman base del espacio vectorial real $G^N = \{v : 2^N \to IR\}$. El valor de Shapley es la única aplicación lineal $\emptyset: G^N \to IR^{|N|}$ tal que

$$\emptyset_i(w_R) = \begin{cases} \frac{1}{|R|}, & si\ i \in R \\ 0, & si\ i \notin R \end{cases}$$

De esta caracterización se deducen sus propiedades: distribuye totalmente entre los jugadores el pago que puede recibir la coalición total y es simétrico. El valor de Shapley proporciona una medida del poder de los jugadores en el proceso negociador.

10 Por tanto, la acumulación de capital en la economía será superior con esta solución que con las estrategias de Nash adoptadas por Lancaster en su modelo.

$$\int_{T-1}^{T} d(t)dt = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{1-c}\,(1 - e^{-(1-c)(T-1)}) + bTe^{-(1-c)(T-1)} - e^{(c-b)T-c}\right).$$

Por tanto, cualquier función d continua a trozos en $[T-1, T]$, que tome sus valores en $[c, b]$ y verifique la identidad anterior, proporciona a partir de u_1^p, u_2^p un par de estrategias u_1^s, u_2^s con las que ambos jugadores alcanzan su valor de Shapley.

Reduciremos nuestra atención al caso $d(t) = d^* \ \forall t \in [T-1, T]$. Las estrategias:

$$u_1^s(t) = \begin{cases} c, & si\ 0 \le t \le T-1 \\ d^*, & si\ T-1 < t \le T \end{cases} \qquad u_2^s(t) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \le t \le T-1 \\ 0, & si\ T-1 < t \le T \end{cases}$$

con $d^* = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c}{1-c}\,(1 - e^{-(1-c)(T-1)}) + bTe^{-(1-c)(T-1)} - e^{(c-b)T-c}\right)$ son

la solución del problema siemrpe que u_1^s sea admisible, es decir, siempre que $c \le d^* \le b$. En el caso $c = 0$, basta que $0 \le \frac{1}{2}\,(1 - bTe^{-(T-1)}\,e^{-bT}) \le b$, desigualdades que se cumplen para todo $T > 2$ y $\frac{1}{2} < b < \frac{T-1}{T}$. Luego podemos afirmar la existencia del valor de Shapley en el juego de Lancaster cuando el límite inferior de la tasa de consumo de los trabajadores es cero y el límite superior es mayor que $\frac{1}{2}$ pero menor que $\frac{T-1}{T}$.

Es destacable que la posición relativa (o de poder) de trabajadores y capitalistas no depende de c ni del stock inicial de capital k_0, pero sí de T y de b; más concretamente, del signo de $bT - e^{(1-b)T-1}$. Si se considera $c = 0$ (tenemos asegurada la existencia del valor de Shapley), para b próximo a su valor más alto, $\frac{T-1}{T}$, se tiene $\emptyset_1(v) > \emptyset_2(v)$. Por el contrario, si b está próximo a $\frac{1}{2}$, se tiene la otra desigualdad[11]. Nótese también que si se considera $\emptyset_i$ como función de la variable b únicamente, $\emptyset_1$ es creciente en b, mientras que $\emptyset_2$ es decreciente en b.

Puede asegurarse la existencia del valor de Shapley en este juego diferencial para valores menos restrictivos del parámetro c, aunque es evidente

11 Para $x > 1$, la función $h(x) = x - e^{x-1}$ es decreciente; como

$$\lim_{b \to \frac{1}{2}^+} bT - e^{(1-b)T-1} = \frac{1}{2}\,T - e^{\frac{1}{2}T-1} < 0 \ \forall T > 2,$$

se deduce

$$\lim_{b \to \frac{1}{2}^+} \emptyset_1(v) < \lim_{b \to \frac{1}{2}^+} \emptyset_2(v),$$

si $T > 2$. La primera afirmación es evidente.

que el comportamiento cualitativo de $\emptyset_i(v)$ no variará respecto al caso $c = 0$. Si el horizonte temporal T es suficientemente amplio, de manera que las expresiones:

$$e^{-(1-c)(T-1)}\left(\frac{c}{1-c}+T-2\right) \text{ y } \frac{1}{2}Te^{-(1-c)(T-1)}-e^{(c-b)T-c}$$

estén próximas a cero, entonces si $0 \leq c < 1 - \sqrt{\frac{2}{2}}$ y $\frac{1}{2} < b < \frac{T-1}{T}$, d^* está acotado entre c y b.

6. CONCLUSIONES

En el trabajo, se ha probado la existencia del valor de Shapley en el juego del capitalismo de Lancaster, cuando se imponen ciertas cotas de variación en los parámetros del mismo, c, b y T. En particular, para valores realistas de c, es decir $c \neq 0$, se necesita que el horizonte temporal sea suficientemente amplio. También se ha puesto de manifiesto que el valor de Shapley otorga un mayor índice de poder a la clase trabajadora que a la capitalista cuando b está próximo a su valor más alto, mientras que sucede lo contrario cuando b tiende a $\frac{1}{2}$. Este resultado parece intuitivamente razonable, pues cuanto mayor (menor) sea b, mayor (menor) será la capacidad negociadora de los trabajadores. El comportamiento de la solución cooperativa propuesta por Shapley, en este caso concreto, es distinto del de la solución negociada de Nash, estudiada por Pohjola, quien demostró que la posición negociadora de los trabajadores no es mejor que la de los capitalistas en ningún caso.

BIBLIOGRAFIA

Hoel, Michel (1978): «Distribution and Growth as a Differential Game Between Workers and Capitalists». *International Economic Review*. Vol. 19, nº 2, pp. 335-350.

Kamien, M. I. y Schwartz, N. L. (1981): *Dynamic Optimization*. North Holland. New York.

Lancaster, Kelvin (1973): «The Dynamic Inefficiency of Capitalism». *Journal of Political Economy*. Vol. 81, pp. 1.092-1.109.

Leitmann, George (1974): *Cooperative and Non-Cooperative Many Players Differential Games*. Springer Verlag. Udine.

Mehlman, Alexander (1988): *Applied Differential Games*. Plenum Press.

Myerson (1991): *Game Theory*. Harvard University Press. Cambridge.

Owen, G. (1982): *Game Theory. 2nd Ed.* Academic Press. New York.

Pohjola, Matti (1984): «Threats and Bargaining in Capitalism (A Differential Game View)». *Journal of Economic Dynamics and Control*. Nº 8, pp. 291-302.

Vaisbord, E. M. y Zhukovskii, V. I. (1988): *Introduction to Multiplayer Differential Games and Their Applications*. Gordon and Brench Science Publishers. Glasgow.