



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

Trabajo fin de Máster

Máster en Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Automática

Operación óptima de una planta hidráulica reversible que cubre los desvíos en la predicción de un productor eólico

Autor:

Álvaro Jaramillo Duque

Directores:

Edgardo Daniel Castronuovo

Julio Usaola García

Escuela Politécnica Superior
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Leganés, Septiembre del 2009

Operación óptima de una planta hidráulica reversible que cubre los desvíos en la predicción de un productor eólico

Autor: Álvaro Jaramillo Duque
Directores: Edgardo Daniel Castronuovo
Julio Usaola García

Firma del Tribunal Calificador:

Presidente: Pablo Ledesma
Vocal: Jorge Martínez Crespo
Secretario: Ismael Sánchez

Calificación:

Leganés, 29 de septiembre de 2009.

«Que las empresas tengan especial influencia en la política significa que la democracia está enferma. El propósito de la democracia es asegurarse que los ricos no tienen una influencia proporcional a su riqueza. Y si tienen más influencia que tú o que yo, eso significa que la democracia está fallando. Las leyes que se obtienen de esta forma no tienen autoridad moral, sino la capacidad de hacer daño».

Cita de *Richard Matthew Stallman (RMS)*.



Esta obra está licenciada bajo Creative Commons
Reconocimiento-No comercial-Sin obras derivadas España
License 3.0 2009.

Se permite copiar, distribuir y comunicar públicamente esta obra siempre que:

- Se cite al autor.
- Que el uso que se haga de la obra no sea comercial.
- Que no se pueda crear una obra derivada a partir de la original.

Agradecimientos

El llegar al fin de este trabajo hay muchas personas a las que quiero agradecerles por su apoyo y ayuda, pero espero sepan entender que en este momento mi búfer de memoria está casi lleno, por lo que seguro no mencionaré a todos lo que quisiera.

Primero que todo quiero agradecer de forma especial, a mi tutor Edgardo Daniel Castronuovo, por el tiempo dedicado, empeño y sobretodo por la confianza que me ha brindado durante estos dos años de trabajo. De igual forma quiero agradecer a Julio Usaola, por haberme brindado la oportunidad de realizar esta tesis de máster.

A Ismael Sánchez, por sus ideas y tutorías en el desarrollo del método para cuantificar la incertidumbre en la predicción de la potencia eólica.

A Mónica por estar siempre atenta y dispuesta a ayudarme, y por sus comentarios libres de ironía que siempre hacían del día algo más llevadero.

A Miriam por su ayuda y charlas enriquecedoras, y sobretodo por enseñarme muchas otras facetas de Madrid y por abrirme un espacio entre su grupo de amigos.

A todos mis compañeros de la universidad, con los que he compartido más que charlas técnicas y que siempre han estado allí cuando los he necesitado.

A Jorge Martínez, por haber confiado y dado la oportunidad de venir a esta universidad, ya que gracias a él, fue que me enteré de la beca que disfruto ahora.

A todos mis amigos, algunos en la distancia y a otros que he descubierto en este viaje que comenzó en Portugal. Gracias por su apoyo y compañía cuando la he necesitado, ya que no todo ha sido fácil.

A Paloma, por darme todo su apoyo y tiempo en la recta final de este trabajo.

Al Ministerio de Ciencia e Innovación de España por el financiamiento de este proyecto.

Y finalmente, un especial agradecimiento a mi familia, que estado en la distancia, siempre me ha dado su apoyo incondicional, y porque este logro también es de ellos. También a mis familias adoptivas en Portugal y España, que me han acogido en las intimidades de sus hogares y me han hecho sentir como uno de ellos.

Resumen

En algunos mercados de energía eléctrica, el productor eólico debe proporcionar con antelación un programa de producción, usualmente basado en herramientas de predicción de potencia eólica. Adicionalmente, es responsable de asumir los desvíos que pueden darse entre las previsiones y la producción real de la energía. Con el fin de disminuir los sobre costos por desvíos, es propuesta la operación conjunta de una planta hidráulica reversible que adapta su operación para compensar los errores en la predicción de potencia eólica. Con el fin de optimizar la operación de la planta hidráulica reversible, es necesario cuantificar con antelación la incertidumbre de la predicción de potencia eólica. Para esto es desarrollado un método basado en los datos historicismos de la producción de potencia eólica y su predicción, con el cual se logra modelar la producción de potencia eólica y posteriormente, es posible definir intervalos de incertidumbre para la misma. Finalmente, es formulado un problema de optimización, utilizando como entradas la incertidumbre de la predicción y las características de la planta hidráulica reversible, donde el objetivo es encontrar el mejor programa de operación para la planta hidráulica reversible que cubra los posibles desvíos del productor eólica. Un caso realista es utilizado para evaluar el método propuesto.

Abstract

The participation of wind energy in electricity markets requires providing a forecast for future energy production of a wind generator, whose value will be its scheduled energy. Deviations from this schedule because of prediction errors could imply the payment of imbalance costs. In order to decrease these costs, a joint operation between a wind farm and a hydro-pump plant is proposed; the hydro-pump plant changes its production to compensate wind power prediction errors. In order to optimize this operation, the uncertainty of the wind power forecast is modeled and quantified. This uncertainty is included in an optimization problem that shifts the production of the hydro-pump plant in an optimal way, aiming at reducing the imbalance costs. The result of such a method is profitable for both participants, the wind farm and the hydro-pump plant. A realistic test case is used to evaluate the proposed method.

Índice general

Agradecimientos	VII
Resumen - Abstract	IX
Índice general	XI
Índice de figuras	XV
Índice de tablas	XVII
1. Introducción	1
2. Método de Puntos Interiores	7
2.1. Introducción	7
2.1.1. Información sobre el MPI	9
2.2. Método de Puntos Interiores	11
2.2.1. Problema original	11
2.3. Las ecuaciones de KKT perturbadas	12
2.3.1. Ecuaciones de desigualdad	12
2.3.2. Tratamiento ecuaciones de complementariedad	15
2.3.3. Formulación de las ecuaciones de KKT perturbadas	15
2.3.4. Solución iterativa	16
2.3.5. Reducción del parámetro de perturbación	23
2.3.6. Convergencia del proceso iterativo	24
2.3.7. Punto inicial	25
2.3.8. Algoritmo para el MPI para PNL	26
2.3.9. Tiempos de ejecución	27
2.4. MPI Predictor Corrector	28
2.4.1. Paso predictor	28
2.4.2. Paso corrector	30
2.4.3. Algoritmo para el MPI-PC para PNL	31

2.5. Implementación de los algoritmos	32
2.5.1. Herramienta de desarrollo	32
2.6. Conclusiones	44
3. Simulación de trayectorias de producción eólica	45
3.1. Introducción	45
3.2. Consideraciones	47
3.2.1. Caso de estudio	47
3.2.2. Incertidumbre en la producción de potencia eólica	47
3.2.3. Relación entre la producción y la predicción de potencia eólica	48
3.2.4. Relación entre los errores y el horizonte de predicción	51
3.3. Método propuesto	54
3.3.1. Secuencia de los pasos desarrollados	54
3.3.2. Simulación de los errores	55
3.3.3. Simulación de la producción eólica	56
3.4. Resultados	58
3.4.1. Simulación de trayectorias	59
3.4.2. Desvíos de energía	60
3.5. Validación del método	62
3.5.1. Seguimiento de la estructura de los errores	62
3.5.2. Verificación de la generación de escenarios de producción eólica	62
3.6. Conclusiones	64
4. Desarrollo del problema	67
4.1. Introducción	67
4.2. Consideraciones	68
4.3. Operación óptima para una planta hidráulica reversible	69
4.3.1. Resultados	70
4.4. Operación conjunta de una planta hidráulica y un productor eólico	72
4.4.1. Desvíos de potencia	72
4.4.2. Reservas de energía	73
4.4.3. Resultados de la operación conjunta	74
4.5. Operación real de la planta hidráulica reversible cubriendo los desvíos	76
4.6. Costos de la programación anticipada y de la operación real	77
4.7. Conclusiones	81

5. Conclusiones	83
5.1. Trabajos futuros	85
Referencias	87
A. Conceptos matemáticas	93
A.1. Condiciones de optimalidad de Karush Kuhn Tucker (KKT)	93
A.2. Definiciones matemáticas	94

Índice de figuras

2.1. Distribución de publicaciones sobre el MPI	9
2.2. Estructura de la matriz del sistema lineal, para un sistema de 3 barras	19
2.3. Ejemplo de PNL con dos variables	34
2.4. Comparación de los diferentes MPI, caso matemático	38
2.5. Diagrama del Sistema Eléctrico	40
2.6. Comparación de los diferentes MPI, caso OPF	43
3.1. Relación de la velocidad del viento y la potencia producida por un generador eólico.	48
3.2. Predicción y producción de la potencia eólica	49
3.3. Relación de la predicción y la producción de potencia eólica usando un diagrama de cajas.	50
3.4. Aproximación de la producción de potencia eólica a diferentes niveles de predic- ción, usando la distribución Beta	51
3.5. Errores entre la predicción y producción de la potencia eólica.	52
3.6. Relación de la predicción eólica y la producción usando un diagrama de cajas. .	53
3.7. Análisis de los errores históricos en la predicción eólica.	56
3.8. Esquema de la transformación estadística para generar trayectorias.	57
3.9. Función para el cálculo aproximado de la varianza de los errores.	58
3.10. Trayectorias posibles, producción y predicción de la potencia eólica	59
3.11. Intervalos de predicción basados en la simulación de trayectorias	60
3.12. Desvíos de energía para un período de 24h	61
3.13. Matriz de correlación, análisis de los errores para las trayectorias simuladas . .	63
3.14. Esquema de la transformación estadística para verificar el método propuesto .	63
3.15. Validación del método propuesto para generar trayectorias de producción eólica.	64
4.1. Operación óptima para una planta hidráulica reversible.	71
4.2. Operación óptima para una planta hidráulica reversible que cubre los errores de un productor eólico.	76
4.3. Comparación del programa obtenido con antelación y la operación real	78

4.4. Intervalos de predicción basados en la simulación de trayectorias	79
4.5. Diferentes perfiles de precios para los días típicos de una semana.	80

Índice de tablas

2.1. Resumen del proceso de convergencia del MPI según El-Bakry, Criterios de convergencia	37
2.2. Comparación diferentes versiones del MPI, caso matemático	38
2.3. Características técnicas de las unidades generadoras, en p.u	39
2.4. Costo de la energía por unidad	41
2.5. Carga instalada en cada nudo	42
2.6. Comparación diferentes versiones del MPI, caso OPF	43
3.1. Percentiles de los desvíos de energía	61
4.1. Datos técnicos de la planta hidráulica reversible.	70
4.2. Costos de operación de la planta hidráulica reversible y el productor eólico.	80

1. Introducción

En ingeniería la optimización es utilizada para encontrar soluciones a problemas reales modelados de forma matemática, donde son representadas las características y restricciones de los mismos. El objetivo es minimizar o maximizar una función que representa una característica, o un grupo de ellas de la realidad, tomando valores dentro de un conjunto de soluciones posibles.

En la operación de sistemas de potencia, las herramientas para resolver problemas de optimización son cada vez más accesibles y de uso común, incluso para problemas de gran envergadura. Desde inicios de la década de 1980, la investigación sobre el Método de Puntos Interiores (MPI), en inglés «Interior-Point Method» (IPM), ha tenido un gran desarrollo, debido a los avances teóricos y las continuas adaptaciones al método que han conseguido dar solución a problemas de diferente naturaleza. Por otra parte este avance debido a los desarrollos computacionales, que permitieron la implementación de algoritmos robustos y capaces de dar resultados en tiempos relativamente pequeños.

Actualmente se ha generalizado el uso del MPI para resolver problemas de operación en sistemas de potencia, gracias a la capacidad de variables que logra admitir y a la robustez en el proceso de convergencia. Un ejemplo de estos casos puede ser visto en las referencias [1, 2, 3]. En la referencia [4] se puede encontrar un recuento detallado sobre la extendida aplicación del MPI en la operación de sistemas de potencia hasta el año 2000.

Se propone en este trabajo realizar un análisis de los algoritmos de optimización, en este caso particular al MPI y algunas de sus versiones, donde se puedan comparar medidas de desempeño y precisión de los algoritmos. Adicionalmente, se realizará un análisis teórico de las bases necesarias para resolver problemas de los modelos matemáticos utilizados para representar la realidad, la convergencia en el proceso de optimización y la inestabilidad numérica de algunos algoritmos.

En la operación de sistemas de potencia, las variables principales que introducen incertidumbre son: la demanda del sistema, el precio de la energía y la predicción de la potencia eólica.

Los problemas de estimación de la demanda de potencia y precio de la energía están bastante estudiados a día de hoy, y se cuenta con herramientas que logran dar estimaciones muy acertadas [5, 6, 7]. La predicción del viento es un problema que hasta hace poco era exclusivo de la meteorología, pero actualmente con la gran penetración de la generación eólica, el problema se ha tornado de gran interés por su gran impacto económico y técnico. Un dato fiable de

la predicción del viento implica una buena predicción de la producción eólica. Adicionalmente, hay que considerar muchos otros factores funcionales de la producción eólica que son ajenos al viento y que afectan directamente la producción eólica. Por esta razón son necesarias nuevas herramientas que proporcionen información fiable de la probable producción eólica [8].

Se ha dado un gran impulso a las energías renovables debido a los compromisos adoptados por España en el protocolo de Kyoto y las políticas pactadas en marzo de 2007 por el Consejo Europeo en Bruselas. En este último se aprobó un plan energético obligatorio que incluye un recorte del 20 % de las emisiones de dióxido de carbono antes del año 2020 y un aumento en la producción de energías renovables, para que representen el 20 % del consumo total de la UE (actualmente el 7 %, datos 2006) [9].

Debido a la naturaleza del viento, no es posible prever con exactitud la energía eléctrica que será producida a partir de éste. Para solucionar este problema se combina la producción eólica con otras fuentes de energía, con el objetivo de asegurar la cobertura de la demanda. Adicionalmente, la operación conjunta hace posible una mayor integración de estos sistemas en mercados de energía sujetos a regulaciones basadas en tecnologías tradicionales como la térmica, hidráulica o nuclear, donde es necesario asegurar una capacidad energética de forma anticipada.

Para la coordinación de la producción eólica con cualquier tipo de fuente generación y almacenamiento, es necesario estimar de una forma fiable los posibles desvíos entre la predicción a corto plazo y la producción real. En [10] se utilizó una función que estimó los posibles errores, usando como única variable el horizonte de predicción. Esta función está basada en el promedio de diferentes métodos para predecir los errores. La predicción del viento es modelado como una serie ARMA en [11], convirtiendo este dato posteriormente en potencia eléctrica utilizando las curvas de los generadores.

El trabajo desarrollado por [12] analiza una zona con gran penetración eólica, con la intención de cuantificar la reserva necesaria para asegurar el correcto funcionamiento del sistema eléctrico. Para este caso, el error en la predicción de la potencia eólica de un parque es expresado como una ecuación en función del horizonte de predicción, usando la desviación estándar de los errores. Esta estimación está basada en los datos reales de un parque eólico y los resultados de una herramienta de cálculo difuso. Para el cálculo de los errores en la zona donde existen múltiples parques eólicos, es utilizada una función de correlación que se basa en la distancia que existe entre los diferentes parques eólicos.

Un análisis de los errores en la predicción de la potencia eólica muestra una dependencia no sólo con el horizonte de predicción, sino también con el nivel de producción de potencia [13]. Este concepto es presentado y aplicado en [14, 15], consiguiendo cuantificar la incertidumbre en la predicción de la potencia eólica, basándose en los datos históricos tanto de predicciones

como de producciones reales, para obtener la relación de los errores, considerando el horizonte de predicción y los niveles de producción eólica.

Es necesario desarrollar nuevos modelos que se acomoden a los datos reales, incorporando las características específicas de las variables. Este análisis está fundamentado en la necesidad de información más confiable para la toma de decisiones en situaciones de mercado, donde se busca controlar el riesgo al que están expuestos los agentes.

El mercado de electricidad en España está definido por las transacciones derivadas de la participación de los agentes del mercado en las sesiones de los mercados diario e intradiario. Los agentes del mercado son aquellas empresas habilitadas para actuar en el mercado de producción como vendedores y compradores de electricidad.

Para realizar las transacciones de energía eléctrica, se lleva a cabo un mercado diario, mediante la presentación de ofertas de venta y adquisición de energía eléctrica por parte de los agentes del mercado. Por medio del mercado intradiario, que actualmente se estructura en seis sesiones durante el día, son realizados los ajustes sobre el programa diario viable, mediante la presentación de ofertas de venta y adquisición de energía eléctrica.

En el mercado español, los productores eólicos con potencias instaladas superiores o iguales a los 10MW pueden realizar ofertas al mercado. Generalmente esta oferta se hace para el día siguiente, y debe ser de duración horaria, desde la hora 00:00 [h] hasta la hora 24:00 [h]. El mercado cierra el plazo para la presentación de las ofertas a las 10:00 [h], lo que agrega 14 horas de anticipación a las 24 [h] de programación. Debido a esto, los productores eólicos están expuestos a tener errores en su programa ofertado. Los errores pueden estar entre el 30-50 % de la energía ofertada con respecto a la energía real al momento de despacharla. Este error es reducido acudiendo a los mercados intradiarios para recomprar o vender la energía, quedando entre el 15-25 %. Finalmente los desvíos entre la energía programada y la energía entregada al sistema son cobrados a través de los mercados de reservas. Los costes por desvíos que se imputarán a los productores eólicos, plantean dificultades adicionales cuando éstos desean acudir al mercado eléctrico, [16].

La estrategia más común para un productor eólico es ofertar la energía prevista para cada hora, obtenida por medio de las herramientas de predicción de las que dispone. Sin embargo, en el caso de tener una planta hidráulica reversible asociada, existe la posibilidad de almacenar energía en forma de agua, llevando ésta a un embalse y luego producir energía en períodos donde se obtenga el máximo beneficio, por la diferencia entre los ingresos en el mercado y los costos variables. Para una central térmica, los costos variables dependen de los costos del combustible, operación y mantenimiento, mientras que para una planta hidráulica reversible y un parque eólico, no hay costo para el combustible, ya que sus insumos son agua y viento, y para este tipo de casos los costos variables son insignificantes. Finalmente, el objetivo es maximizar

los ingresos en el mercado.

Se pueden distinguir dos esquemas de operación entre centrales hidráulicas y productores eólicos. En el primero esquema, la programación de la operación de bombeo depende fundamentalmente de la producción eólica, pudiendo ocasionalmente, recibir aportes de otras fuentes. Este tipo de esquema es frecuentemente utilizado en regiones aisladas eléctricamente o físicamente como las islas [17, 18, 19, 20]. En grandes islas, el uso de bombeo puede llegar a reemplazar la necesidad de instalar una unidad térmica [18]. Adicionalmente, el uso de bombeo como una forma de almacenamiento de la energía eólica, resuelve no sólo los problemas ya antes mencionados, sino que además plantea soluciones para reservas de agua potable, irrigación, protección contra incendios e incluso desalinización de agua marina [18, 19].

En el segundo esquema, la central hidráulica opera de forma independiente y además cubre los desvíos en la predicción de un productor eólico, evitando los cobros por incumplimiento del programa presentado con antelación por el productor eólico. A su vez, el productor eólico puede aportar los excedentes de energía para incrementar la operación de la central cuando bombea. Este último esquema está sujeto a restricciones técnicas del sistema, de mercado y a su vez a intereses económicos de los agentes que intervienen [21, 16, 22]. En regiones interconectadas y con buenos perfiles de viento, es posible que por restricciones de carácter técnico en el sistema eléctrico sea limitada la cantidad de energía aportada por los productores eólicos [11]. Esta labor es desarrollada en España por Centros de Control de Generación (CCG), lo que obliga a perder parte de la energía eólica [23]. La operación conjunta proporciona no solo una alternativa para utilizar este excedente sino también para cubrir los errores en la programación de los parques eólicos, evitándose de esta forma los sobrecostos.

Para abordar el problema de la operación conjunta de un productor eólico y una planta hidráulica reversible, se propone la solución de un problema de optimización que busca obtener el mayor beneficio de la central de almacenamiento, además de cubrir los desvíos que pueden existir entre la predicción eólica y la producción real.

En el primer capítulo de la tesis se presentará una introducción al Método de Puntos Interiores Primal-Dual (MPI), una reseña histórica, una deducción teórica del MPI y del MPI Predictor Corrector. También son presentados los resultados obtenidos con algoritmos desarrollados del MPI para dos casos tipo. En el segundo capítulo, se presentará un método para cuantificar la incertidumbre en la predicción de la potencia eólica a corto plazo, a través de la simulación de trayectorias de producción modeladas por medio de la distribución Beta. Con éstas son definidos los intervalos de predicción y los posibles desvíos de energía para un período futuro. En el tercer capítulo, se llevará a cabo una propuesta para la operación conjunta de un productor eólico y una planta hidráulica reversible que cubrirá los desvíos en la predicción del productor eólico. En este capítulo, para dar solución al problema de optimización, serán utilizados el MPI y

las estimaciones de la incertidumbre de la predicción. Finalmente, en el capítulo cuatro serán presentadas las conclusiones y las expectativas de trabajo futuro.

2. Método de Puntos Interiores

Resumen

En este capítulo se presenta una introducción al Método de Puntos Interiores Primal-Dual (MPI). El trabajo incluye una reseña histórica sobre la optimización y una descripción de algunas fuentes de documentación utilizadas en este documento. También, aparece una deducción teórica sobre el MPI convencional y algunas de sus variaciones propuestas en la bibliografía, aclarando algunos detalles del método. Son explicados dos problemas en el capítulo, uno matemático y un Flujo de Potencia Óptimo (FPO), los cuales son resueltos por medio de los algoritmos del MPI desarrollados en este capítulo. Los resultados numéricos de los algoritmos implementados son validados con una herramienta comercial.

2.1. Introducción

En matemáticas, el concepto de optimización (o de programación matemática), se refiere al estudio de los problemas que tratan de minimizar o maximizar una función real, eligiendo sistemáticamente valores reales o enteros de las variables de decisión dentro de un conjunto permitido.

El término «Programación Lineal», originalmente en inglés «Linear Programming», fue introducido por Dantzig durante la década de 1940. El término «programming», no hace referencia al uso de programas informáticos para resolver problemas matemáticos (en esta época, el uso de computadores no era común para resolver este tipo de problemas). Dicho término proviene de la utilización de la palabra «programación», por parte del Ejército de los Estados Unidos de Norte América, para referirse a las propuestas de la formación y logística de horarios, en el tema que trabajaba Dantzig en aquella época, y al que dio solución creando el método Simplex [24, 25].

Uno de los primeros desarrollos conocidos sobre el MPI, es atribuido a Frisch en 1955 [26], luego también desarrollado por Fiacco y McCormick en 1968 [27], considerando una perturbación en las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), ver anexo A.1.

El método del Gradiente, utilizado para resolver flujos de potencia óptimos (FPO) [28], con

anterioridad a los MPI, resultado lento en el proceso de convergencia y con un comportamiento en zig-zag cercano al punto óptimo [24].

En 1979 Khachiyan [29] presenta un método elipsoide, que prometía solucionar problemas de PL en tiempos polinómicos. Desafortunadamente, este método demostró en la práctica tener prestaciones inferiores al método Simplex.

En optimización irrestricta, el algoritmo de Davidon-Fletcher-Powell (DFP), y algunas de sus variaciones, era la mejor solución hasta cerca de 1970, éste fue el primer método casi-Newton. En su implementación surgían problemas numéricos en el cálculo de la inversa de la matriz Hessiana. En 1970, el método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), derivado del método de Newton, corregía el problema del método DFP mediante aproximaciones de la matriz Hessiana. Sin embargo, el hecho de que la matriz Hessiana fuera aproximada introducía un error numérico. Este problema se corrigió, aplicando técnicas de factorización, en especial con la implementación de la factorización Cholesky [24].

El método de Programación Cuadrática Sucesiva (PCS) [30], siendo un método casi-Newton y usando derivadas de segundo orden, demostró ser mejor en el proceso de convergencia que el método del Gradiente. Sin embargo la matriz Hessiana (construida de forma interactiva), de la función de Lagrange se hacía densa y tornaba lento el proceso de convergencia.

El método de Newton, busca un punto que cumpla directamente las condiciones de KKT. El principal problema de este método es identificar las restricciones de desigualdad que son activas [31].

En 1984 Karmarkar [32] presentó un MPI para PL, con resultados 50 veces más rápido que el método Simplex (con tiempos del orden polinomial). En 1989, Meggiddo [33] aplicó la barrera logarítmica de una forma simultánea a variables primales y duales, consiguiendo mejores resultados que los algoritmos de MPI desarrollados hasta el momento. Mehrotra en 1992 [34], propone el MPI Predictor Corrector (MPI-PC), considerado como una de las variaciones al MPI más eficientes. Este método fue mejorado, llevando a la variación conocida como el MPI con Múltiples Pasos de Corrección (MPI-MPC).

Una descripción más detallada sobre la historia y evolución de la matemática y la optimización puede ser encontrada en las referencias [25, 24] y en especial sobre el MPI en las referencias [35, 4]. Actualmente son muchas las mejoras y aplicaciones del MPI; una lista con referencias de publicaciones relevantes sobre MPI viene siendo actualizada periódicamente en [36]¹, donde se puede ver de una forma explícita, el interés y desarrollo que ha suscitado el MPI y la optimización en las últimas tres décadas, representado como histograma en la figura 2.1, con datos tomados en agosto del 2009.

¹<http://liinwww.ira.uka.de/bibliography/Math/optim.html>

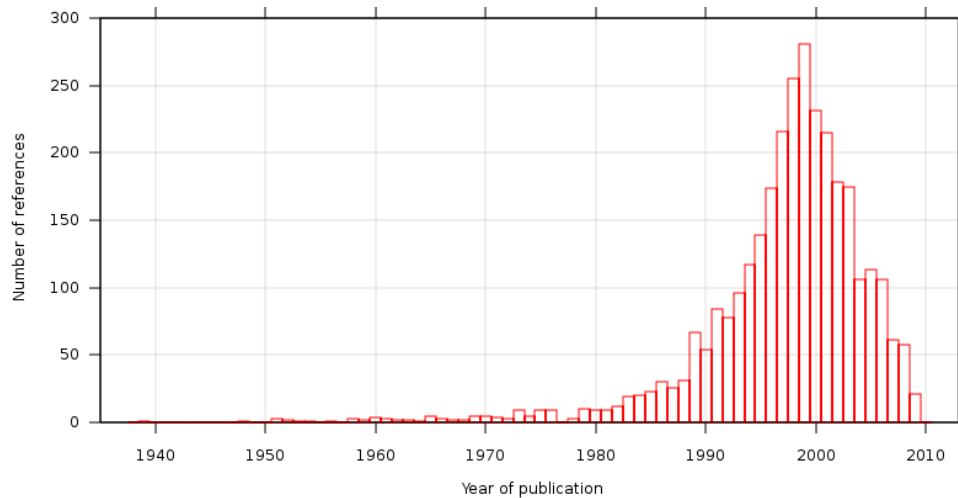


Figura 2.1.: Distribución de publicaciones sobre el MPI

2.1.1. Información sobre el MPI

Actualmente se pueden encontrar muchas referencias y documentación sobre la teoría y las implementaciones del MPI, tanto de acceso público como de acceso por suscripción. Básicamente se hará énfasis en la información de libre acceso que es numerosa y de buena calidad, y que será utilizada como fuente de información para este documento.

A continuación se listan algunas de las herramientas de búsqueda, disponibles en Internet, que fueron utilizadas para búsqueda bibliográfica en este documento.

- <http://www.sciencedirect.com/>
- <http://www.siam.org/>
- <http://www.springer.com/>
- <http://www.elsevier.com>
- <http://www.ieeexplore.ieee.org/>
- <http://scholar.google.com/>

Optimization Online: Esta página web [37]², ofrece un amplio repositorio de bibliografía libre, desde agosto del 2000, que ha venido siendo actualizado de forma voluntaria por un grupo de editores reconocidos. Allí se pueden encontrar artículos sobre optimización y áreas relacionadas. El temario abarca desde teoría netamente matemática, hasta aplicaciones y desarrollos

²<http://www.optimization-online.org/>

prácticos en muchas áreas de la ciencia. Actualmente tiene una lista de correo electrónico, con ediciones usualmente mensuales, donde se da un resumen de los últimos artículos publicados.

«Optimization Online» es la sucesora de la página web «Interior-Point Methods Online³», que dejó de ser actualizada, sin embargo, esta página sigue teniendo información útil para las personas que se están introduciendo en esta área de investigación.

Decision Tree for Optimization Software: Esta página web [38]⁴, tiene como objetivo ayudar a identificar y utilizar herramientas para solucionar problemas de optimización, o al menos dar una guía para encontrar una forma de llegar a la solución de un problema de optimización, por medio del trabajo hecho por otras personas. Esta página es de filosofía abierta, según expresa el editor, por lo que son bienvenidos los aportes sobre información relevante no listada o errores de edición.

Las áreas tratadas son las siguientes:

- Problemas de optimización y programas informáticos
- Puntos de referencias para diferentes herramientas de optimización
- Casos de test para herramientas de optimización
- Libros y guías
- Herramientas de optimización
- Otras fuentes de información

Interior Point Methods Task Force: Esta página web [39]⁵, fue el resultado de un foro de ingenieros, para compartir y discutir conocimientos y experiencias en la aplicación de MPI para la operación óptima de sistemas de potencia.

En esta página se encuentra una introducción, a modo de guía sobre el MPI, la cual contiene de una forma resumida y muy clara los conceptos sobre MPI primal dual y el MPI-PC. Adicionalmente, se encuentra una lista sobre bibliografía y referencias a otros lugares de interés. Esta página web ha dejado de ser actualizada (última actualización en el 2000), pero su contenido sigue siendo muy valioso.

Formulación y Resolución de Modelos de Programación Matemática en Ingeniería y Ciencia: Esta página web [40]⁶, presenta el libro con el mismo título, escrito por profesores

³<http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/InteriorPoint/>

⁴<http://plato.la.asu.edu/guide.html>

⁵<http://thunderbox.uwaterloo.ca/~ieee-ipm/>

⁶<http://departamentos.unican.es/macc/personal/profesores/castillo/Libro.htm>

de la Universidad de Castilla-La Mancha, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, ver [41].

«Este libro está organizado en cuatro partes. En la primera se tratan los modelos para introducir al lector en el atractivo mundo de la programación matemática, por medio de ejemplos cuidadosamente seleccionados [...]

La parte segunda trata de los métodos y describe las técnicas principales para resolver problemas de programación lineal y no lineal [...]

En la tercera parte se describe el GAMS (sistema general de modelización algebraica) como herramienta principal usada en el libro [...]

La parte cuarta se dedica a las aplicaciones de estas técnicas a problemas prácticos más importantes de varias áreas del conocimiento [...]

Este libro está dirigido a una audiencia muy amplia, que incluye matemáticos, ingenieros, y científicos aplicados» [41].

Programas de optimización de carácter general como GAMS y MATLAB entre otras, ofrecen el MPI dentro de sus utilidades para resolver problemas de optimización. Otro tipo de programas de carácter más específico, especialmente en ingeniería eléctrica, el ETAP, KNITRO OPF entre otros, incluyen el MPI dentro de sus núcleos de optimización.

2.2. Método de Puntos Interiores

2.2.1. Problema original

De forma general, un problema de optimización no-lineal sujeto a restricciones de igualdad y desigualdad puede ser matemáticamente modelado y descrito de la siguiente forma:

$$\text{mín } f(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

s.a

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \tag{2.3}$$

Donde:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nx}$ son las variables de decisión del problema de optimización.

$f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{nx} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función objetivo o índice de desempeño.

$\mathbf{g}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{nx} \rightarrow \mathbb{R}^{ng}$ son las restricciones de igualdad.

$\mathbf{h}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{nx} \rightarrow \mathbb{R}^{nh}$ son las restricciones de desigualdad.

$f(\mathbf{x})$, $g_j(\mathbf{x})$ y $g_i(\mathbf{x})$ son funciones convexas lisas, para todo j e i .

La intersección de las ecuaciones $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ forman la región de convergencia o región factible, que es el conjunto de puntos posibles que resuelven el problema formulado en las ecuaciones (2.1) a (2.3).

nx se refiere a la dimensión de la variable \mathbf{x} .

ng se refiere a la dimensión del grupo de las restricciones de igualdad.

nh se refiere a la dimensión del grupo de las restricciones de desigualdad.

2.3. Las ecuaciones de KKT perturbadas

El MPI, propone una modificación a las condiciones de KKT (ver el apéndice A.1) para evitar determinar las restricciones de desigualdad activas durante el proceso iterativo, lo cual era un inconveniente en el método de Newton.

La Función de Lagrange es un artificio para convertir un problema de optimización lineal o no-lineal, el cual está sujeto apenas a restricciones de igualdad, en un problema de optimización irrestricto. Esto se consigue adicionando las restricciones de igualdad a la función objetivo, donde la nueva función es denominada Función de Lagrange [2]. Para poder aplicar este concepto, primero se tratan las restricciones de desigualdad, para convertirlas en restricciones de igualdad.

2.3.1. Ecuaciones de desigualdad

Para convertir las restricciones de desigualdad, ecuación (2.3), en restricciones de igualdad, son utilizadas las variables de holgura no negativas \mathbf{s} en cada restricción de desigualdad, quedando el problema formulado en las ecuaciones (2.1) a (2.3) de la siguiente forma [3]:

$$\text{mín } f(\mathbf{x}) \tag{2.4}$$

s.a

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{s} \geq \mathbf{0} \tag{2.7}$$

Donde:

$\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ es la variable de holgura para la función $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

La adición de las variables de holgura aumenta la dimensión del problema original. Sin embargo, el problema original es transformado en un problema de optimización sujeto sólo a restricciones de igualdad. Con esta metodología, no es necesario hacer uso de funciones de penalidad, ni determinar las restricciones de desigualdad activas en la solución [2].

La *Función de Lagrange* del problema definido en las ecuaciones (2.4) a (2.7) se puede expresar como [42]:

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi}^T (\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}) \quad (2.8)$$

Donde:

$l(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$ es una función escalar llamada Función de Lagrange.

$\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{nx}$ son las variables de decisión del problema de optimización, también denominado vector de variables primales.

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{ng}$ es vector de Multiplicadores de Lagrange, de las restricciones de igualdad, también denominadas vector de variables duales.

$\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^{nh}$ es vector de Multiplicadores de Lagrange, de las restricciones de desigualdad, también denominadas vector de variables duales.

La solución del sistema de ecuaciones (2.4) a (2.7), es obtenida como un punto estacionario de la función de Lagrange, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*)$.

Las condiciones de optimalidad de primera orden de KKT para la función de Lagrange (2.8) pueden ser expresadas como [2]:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{J}_g(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{J}_h(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \quad (2.12)$$

$$\Omega \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\pi}^* \geq \mathbf{0} \quad (2.14)$$

Donde:

$\nabla f(\mathbf{x}^*) \in \mathbb{R}^{nx}$: es el vector gradiente de la función objetivo.

$\mathbf{J}_g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{ng \times nx}$: es el Jacobiano de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

$\mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{nh \times nx}$: es el Jacobiano de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

$\boldsymbol{\omega}$ es el vector de los multiplicadores de complementariedad de las ecuaciones de desigualdad y Ω representa la matriz diagonal de los elementos de $\boldsymbol{\omega}$.

La ecuación (2.9) es el gradiente de la función de Lagrange (ecuación (2.8)), nulo en el candidato al óptimo, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*)$. La ecuación (2.10) dice que, en este punto, los multiplicadores de Lagrange y los multiplicadores de complementariedad de las restricciones de desigualdad son iguales. La ecuaciones (2.11) y (2.12) hacen factible la solución. Finalmente, la ecuación de complementariedad estricta (2.13), permite considerar simultáneamente todas las restricciones de desigualdad, sean estas activas o no, en la solución, con el costo de incrementar el número de las variables duales. En esta última ecuación, pueden ser analizados dos casos [2], para las restricciones de desigualdad que satisfacen:

$$\omega_i^* h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (2.15)$$

donde

$$\omega_i^* \geq 0 \quad \text{si } h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{restricción activa} \quad (2.16)$$

o

$$\omega_i^* = 0 \quad \text{si } h_i(\mathbf{x}^*) < 0 \quad \text{restricción inactiva} \quad (2.17)$$

para $i = 1, 2, \dots, nh$

La condición de complementariedad, ecuación (2.15), merece una consideración especial, debido a sus características [2]:

- Es no lineal
- Puede ser entendida como la solución de un problema combinatorio. Con efecto en la solución del problema de optimización, para cada restricción i , donde: $h_i(\mathbf{x}^*) = 0$ o $\omega_i^* = 0$

El número de variables duales de la formulación descrita en (2.9) a (2.14), puede ser reducido, siendo en el punto solución, los multiplicadores de complementariedad de las restricciones de desigualdad, iguales a los multiplicadores de Lagrange para las mismas restricciones ($\omega^* - \boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{0} \rightarrow \omega^* = \boldsymbol{\pi}^*$). Por consiguiente, pueden ser representadas estas dos funciones en una misma variable, tal como se muestra a continuación [2]:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{J}_g(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{J}_h(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\pi}^* = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \quad (2.20)$$

$$\boldsymbol{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\pi}^* \geq \mathbf{0} \quad (2.22)$$

Donde:

Π representa la matriz diagonal de los elementos de π .

En el punto óptimo, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*, \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, la ecuación (2.6) deber ser satisfecha. Por consiguiente, sustituyendo en la ecuación (2.21), la expresión $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = -\mathbf{s}^*$, se obtiene [2]:

$$\Pi^* \mathbf{s}^* = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

2.3.2. Tratamiento ecuaciones de complementariedad

El MPI propone la relajación de la ecuación de complementariedad estricta (2.23), ya que esta debe ser satisfecha solo en el punto solución, \mathbf{x}^* . Sin embargo, durante el proceso iterativo para encontrar la solución del problema, es posible realizar una perturbación, a través de la introducción del parámetro $\mu \geq 0$, tal como es mostrado a continuación [2]:

$$\Pi^* \mathbf{s}^* = \mu^* \mathbf{e} \quad (2.24)$$

Donde:

μ es el parámetro de perturbación.

\mathbf{e} es un vector unitario con tantos elementos como ecuaciones de desigualdad $h_i(\mathbf{x})$, para todo i .

En el punto candidato al óptimo la solución de la ecuación (2.24) debe ser igual que la que se obtendría con la expresión original de la ecuación de complementariedad estricta (ecuación (2.21)), razón por la cual al final de un proceso iterativo debe ser satisfecha la condición $\mu^* \rightarrow 0$, partiendo desde un valor inicial μ^0 y decreciendo de forma monótona. La secuencia de parámetros μ^k genera una secuencia de subproblemas, según asegura el teorema de Fiacco y McCormick [27] (que probablemente son de los primeros en considerar las KKT perturbadas [42]) en el proceso de decrecimiento de μ^k (la secuencia de soluciones del problema $(\mathbf{x}(\mu^k))$ que tienden a la solución y que cumplen todas las restricciones del problema descrito en (2.4) a (2.7).

La forma en la que se determinan los valores de μ^k durante el proceso iterativo determina la trayectoria primal-dual recorrida para encontrar la solución [2, 3].

2.3.3. Formulación de las ecuaciones de KKT perturbadas

Las modificaciones al problema original y a las ecuaciones de optimalidad de KKT, permiten que se formule de nuevo un sistema de ecuaciones que se denomina ecuaciones de KKT perturbadas [2]:

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{\Pi} \mathbf{s} - \mu \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{s}, \boldsymbol{\pi}, \mu, \geq \mathbf{0} \quad (2.29)$$

Con estas ecuaciones de KKT perturbadas se resuelve el problema original, ecuaciones (2.1) a (2.3), y se llegará al mismo resultado que se obtendría al resolver las ecuaciones de KKT originales, ecuaciones (2.9) a (2.14), pero de una forma computacionalmente más eficiente.

2.3.4. Solución iterativa

El sistema de ecuaciones (2.25) a (2.29) es representado por simplicidad de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} \\ \mathbf{\Pi} \mathbf{s} - \mu \mathbf{e} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\lambda}, \geq \mathbf{0} \quad (2.30)$$

Posteriormente, se utiliza el método de Newton para resolver el sistema de ecuaciones (2.30). Este sistema es no lineal y para aplicaciones reales es de gran tamaño. El método de Newton es eficiente para resolver sistemas de ecuaciones con este tipo de características. Como resultado se llega a las aproximaciones de las raíces de la función tratada, que para este caso es la aproximación al mínimo de la función objetivo, sujeto a un conjunto de restricciones de igualdad y desigualdad.

El algoritmo de Newton parte de un valor inicial, el cual es denominado $\mathbf{v}^0 = (\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$, que será tratado posteriormente.

El punto solución se aproxima iterando, mediante una corrección perturbada, correspondiente al parámetro μ^k del vector de direcciones de Newton, $\Delta \mathbf{v}^k = (\Delta \mathbf{x}^k, \Delta \mathbf{s}^k, \Delta \boldsymbol{\pi}^k, \Delta \boldsymbol{\lambda}^k)$, como en la solución del sistema lineal perturbado [42]:

$$\Delta \mathbf{v}^k = -(\mathbf{F}'(\mathbf{v}^k))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{v}^k) \quad (2.31)$$

Finalmente, se llega a un punto solución $\mathbf{v}^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*, \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$, a través de una familia de puntos, en cada iteración k , que conforman la trayectoria durante el proceso iterativo.

Durante el proceso iterativo, se deben cumplir las condiciones de no negatividad $\mathbf{s}^k, \boldsymbol{\pi}^k, \boldsymbol{\lambda}^k \geq \mathbf{0}$.

La solución explícita, realizando la inversa de una matriz $\mathbf{F}'(\mathbf{v}^k)^{-1}$, la cual en aplicaciones reales es de gran porte y dispersa, es computacionalmente ineficiente [43], por lo que generalmente se llega a $\Delta\mathbf{v}^k$ mediante la solución del siguiente sistema:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v}^k)\Delta\mathbf{v}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{v}^k) \quad (2.32)$$

Donde $\mathbf{F}'(\mathbf{v}^k)$ es la matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de $\mathbf{F}(\mathbf{v}^k)$; y $\Delta\mathbf{v}^k$ es el vector de direcciones del método de Newton.

Condiciones necesarias para aplicar el método de Newton

Las condiciones necesarias para la utilización del método de Newton son, [42, 2]:

- Existencia de un punto solución $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*, \boldsymbol{\pi}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ tal que satisfaga el sistema descrito en las ecuaciones (2.1) a (2.3) y las condiciones de KKT descritas en las ecuaciones (2.18) a (2.22).
- Existencia y continuidad de las segundas derivadas parciales locales en el punto óptimo. Esto es, para todo j e i , existe $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$, $\nabla^2 g_j(\mathbf{x}^*)$ y $\nabla^2 h_i(\mathbf{x}^*)$.
- El conjunto de las restricciones de igualdad y de desigualdad, $\{\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_{ng}(\mathbf{x}^*)\} \cup \{\nabla h_1(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla h_{nh}(\mathbf{x}^*)\}$, activas en el punto óptimo deben ser linealmente independientes.
- La matriz Hessiana reducida de la Función de Lagrange ($\nabla_{\mathbf{xx}}^2 l(\mathbf{x}^*)$) debe ser definida positiva en el punto óptimo, $\boldsymbol{\eta}^T \nabla_{\mathbf{xx}}^2 l(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\eta} > 0$, en que $\boldsymbol{\eta}$ es una base del espacio nulo de las marices jacobianas de las restricciones de igualdad y de desigualdad, $\mathbf{J}_g(\mathbf{x})$ y $\mathbf{J}_h(\mathbf{x})$ respectivamente.
- Existencia de la complementariedad estricta ($\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\pi}^* \geq \mathbf{0}$) en el punto óptimo.

Las condiciones teóricas que fueron presentadas para la utilización del método de Newton, no son validadas en la solución, debido a la complejidad numérica de cálculo en las aplicaciones reales de sistemas de gran dimensión. Por esto, no se puede garantizar que la solución encontrada sea un óptimo global. Sin embargo, el proceso de optimización, en general, encuentra mejores soluciones que los métodos clásicos. A modo práctico, se dan por satisfechas las condiciones para la aplicación del método de Newton, y se lleva a cabo el proceso iterativo [2].

Sistema lineal completo

Para dar solución al problema planteado en el sistema (2.32), se aproxima a una iteración del método de Newton, donde $\Delta \mathbf{v}^k$ es una medida de la trayectoria seguida para encontrar el punto óptimo, la cual es parametrizada por μ^k . En el sistema mostrado a continuación es eliminado, por simplicidad, el súper índice k correspondiente al proceso iterativo.

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T & \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_g(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S} & \boldsymbol{\Pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \\ \Delta \mathbf{s} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} \\ \boldsymbol{\Pi} \mathbf{s} - \mu \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

con:

$$\nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{ng} \lambda_j \mathbf{G}_j(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{nh} \pi_i \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \quad (2.34)$$

$$\nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

Donde:

$\nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$: Hessiana de la Función de Lagrange.

$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$: Hessiana de la función objetivo $f(\mathbf{x})$.

$\mathbf{G}_j(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$: Hessiana de la restricción de igualdad $g_j(\mathbf{x})$.

$\mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$: Hessiana de la restricción de desigualdad $h_i(\mathbf{x})$.

\mathbf{S} , $\boldsymbol{\Pi}$, \mathbf{E} representa la matriz diagonal de los elementos \mathbf{s} , $\boldsymbol{\pi}$ y \mathbf{e} respectivamente.

La matriz del sistema (2.33) tiene las siguientes propiedades [2]:

- Dimensiones elevadas, comparado con el sistema original; en sistemas eléctricos de 10 a 12 veces el orden del tamaño original.
- Alta dispersión, no sólo por la existencia de matrices nulas, sino por la gran dispersión de las matrices no nulas.
- Simétrica sólo en estructura, y simétrica en elementos sólo en las submatrices no nulas.

En la figura 2.2(a), se puede observar la matriz mostrada en el sistema (2.33) resultante de la optimización de la operación de un pequeño sistema eléctrico, desarrollado posteriormente en este documento. Se utilizó la instrucción `spy`, disponible en GNU Octave y MATLAB® para conseguir las figuras 2.2(a) y 2.2(b). En la figura 2.2(a), se marcan con un asterisco los elementos nulos. Las características del problema son $nx = 9$, $nh = 18$ y $ng = 6$, por tanto la dimensión de la matriz es de 51×51 , y con $nnz = 177$ elementos no nulos, lo que significa un 93,195% de elementos nulos.

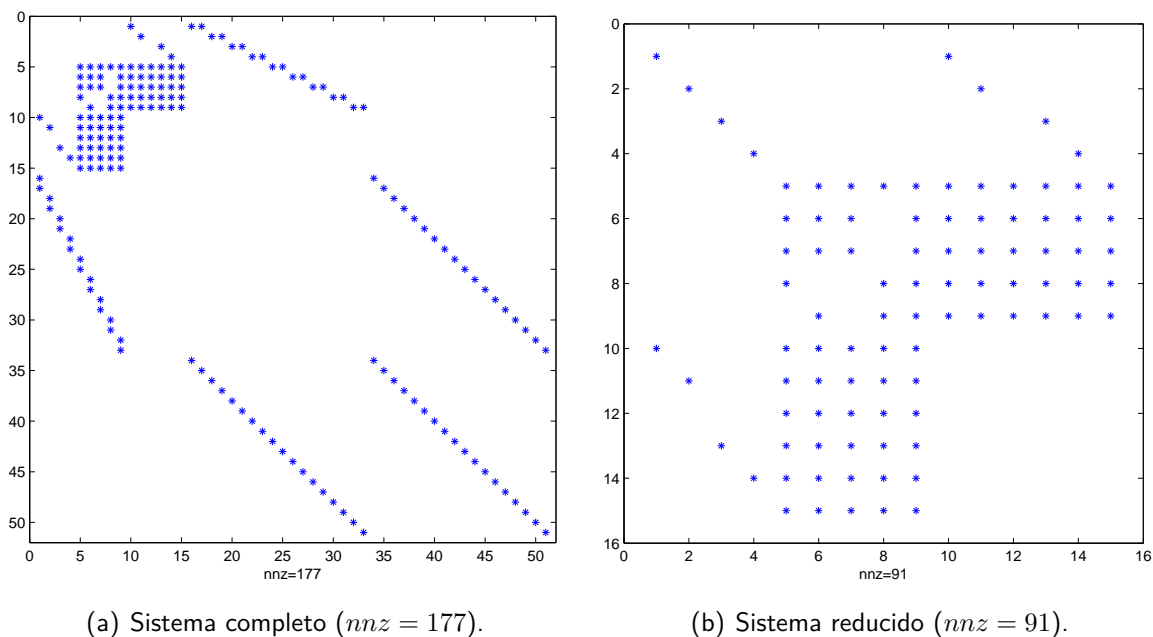


Figura 2.2.: Estructura de la matriz del sistema lineal, para un sistema de 3 barras

Sistema lineal reducido

El sistema lineal (2.33) puede ser reducido extrayendo algunas de sus ecuaciones, las cuales son denominadas ecuaciones auxiliares. De esta forma se reduce el sistema lineal, facilitando su tratamiento y resolviendo una matriz simétrica, tanto numérica como estructuralmente [2].

Se considera primero la tercera fila del sistema (2.33), para despejar Δs :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \\ \Delta \mathbf{s} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{J}_h(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x} + \mathbf{E}\Delta \mathbf{s} = -(\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s})$$

$$\Delta \mathbf{s} = -(\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}) - \mathbf{J}_h(\mathbf{x})\Delta \mathbf{x}$$

Como se puede ver Δs puede ser expresado exclusivamente en términos de Δx . El incremento de las variables $\Delta \pi$ puede ser obtenido de forma similar, tomando la cuarta fila del sistema (2.33):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{\Pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \\ \Delta \mathbf{s} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi} \mathbf{s} - \mu \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{S} \Delta \boldsymbol{\pi} + \mathbf{\Pi} \Delta \mathbf{s} = -(\mathbf{\Pi} \mathbf{s} - \mu \mathbf{e})$$

$$\Delta \boldsymbol{\pi} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \Delta \mathbf{s} = -(\boldsymbol{\pi} - \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e})$$

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = -\mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \Delta \mathbf{s} - \boldsymbol{\pi} + \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}$$

Ahora, se substituye $\Delta \mathbf{s}$ en la ecuación anterior.

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = -\mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} (-(\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}) - \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi} + \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}$$

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{s} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \boldsymbol{\pi} + \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}$$

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\pi} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} - \boldsymbol{\pi} + \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}$$

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}$$

Reemplazando en la primera ecuación del sistema (2.33):

$$\begin{bmatrix} \nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T & \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \\ \Delta \mathbf{s} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \Delta \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \Delta \boldsymbol{\pi} = -\nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$$

Y substituyendo $\Delta \boldsymbol{\pi}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T (\mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Pi} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}) = -\nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \Delta \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} = -\nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \right) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T (\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}) = -\nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \right) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ = -\nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) - \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T (\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e}) \end{aligned}$$

Recreando de nuevo el sistema lineal, que ahora es de menor dimensión, se tienen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_r(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \\ \mathbf{J}_g(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Donde:

$$\mathbf{J}_r(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{J}_h(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T (\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e})$$

El sistema (2.38) debe ser resuelto en cada iteración k , generalmente utilizando la factorización Cholesky [4]. De la solución, se obtiene el incremento de variables primales $\Delta \mathbf{x}$ y los multiplicadores de Lagrange de las ecuaciones de desigualdad, $\Delta \boldsymbol{\lambda}$. Luego se resuelven las ecuaciones auxiliares, (2.39) y (2.40), utilizadas antes para llegar al sistema lineal reducido, para determinar los incrementos de las variables de holgura $\Delta \mathbf{s}$ y los multiplicadores de Lagrange para las restricciones de desigualdad $\Delta \boldsymbol{\pi}$ [2], tal como es mostrado a continuación.

$$\Delta \mathbf{s} = -(\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}) - \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \quad (2.39)$$

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} - \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \Delta \mathbf{s} - \boldsymbol{\Pi} \quad (2.40)$$

Características del sistema lineal reducido: El sistema recreado en (2.38) es simétrico tanto numéricamente como estructuralmente; un análisis más detallado sobre la estructura y características del sistema lineal reducido, es tratado en [2]. La dimensión del sistema lineal reducido es la suma de las variables primales originales, \mathbf{x} , mas el número de restricciones de igualdad del problema original, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $(nx + ng)$. Para la solución del sistema lineal, es aplicado la factorización de Cholesky, ya que es más eficiente en tiempos computacionales que otros métodos [2, 4].

En la figura 2.2(b), página 19, se puede observar la matriz reducida, resultante de la optimización de la operación de un pequeño sistema eléctrico, desarrollado posteriormente en este documento. En esta figura, se marcan con un asterisco los elementos no nulos. Las características del problema son $nx = 9$ y $ng = 6$, por tanto la dimensión de la matriz es de 15×15 , y con un $nnz = 91$ elementos no nulos, lo que significa un 59,556 % de elementos nulos.

Actualización de las variables primales y duales

Después de resolver el sistema lineal reducido (2.38), en cada iteración k , se calcula una nueva aproximación de las variables como es mostrado a continuación:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \gamma \alpha_p^k \Delta \mathbf{x}^k \quad (2.41)$$

$$\mathbf{s}^{k+1} = \mathbf{s}^k + \gamma \alpha_p^k \Delta \mathbf{s}^k \quad (2.42)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \boldsymbol{\lambda}^k + \gamma \alpha_d^k \Delta \boldsymbol{\lambda}^k \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{\pi}^{k+1} = \boldsymbol{\pi}^k + \gamma \alpha_d^k \Delta \boldsymbol{\pi}^k \quad (2.44)$$

Donde $\alpha_p^k, \alpha_d^k \in (0, 1]$, y corresponden al paso primal y dual en cada iteración k , respectivamente; que es el paso máximo que pueden tomar $\Delta \mathbf{v}^k$. El valor escalar $\gamma \in (0, 1]$, es un factor de seguridad del paso primal y dual, que asegura la condición de no negatividad y evita problemas numéricos. En la práctica este factor es ajustado típicamente a $\gamma = 0,99995$ [2, 3, 1].

Tamaño del paso primal y dual: El tamaño de los pasos primal y dual, es calculado de la siguiente forma [2, 42]:

$$\alpha_p^k = \min \left\{ \min_{\Delta s_j^k < 0} \frac{s_j^k}{|\Delta s_j^k|}, 1 \right\} \quad (2.45)$$

$$\alpha_d^k = \min \left\{ \min_{\Delta \pi_j^k < 0} \frac{\pi_j^k}{|\Delta \pi_j^k|}, 1 \right\} \quad (2.46)$$

2.3.5. Reducción del parámetro de perturbación μ

El valor residual de la condición de complementariedad es llamado *gap de complementariedad*, y es calculado en cada iteración k , de la siguiente forma:

$$\rho^k(\boldsymbol{\pi}^k, \mathbf{s}^k) = (\boldsymbol{\pi}^k)^T \mathbf{s}^k \quad (2.47)$$

Como se dijo antes, [página 15](#), el parámetro $\mu^* \rightarrow 0$, en el punto candidato al óptimo, sin embargo, a efectos prácticos, se dice que al final del proceso iterativo, el parámetro $\mu^* \leq \epsilon_\mu$, donde ϵ_μ es un número lo suficientemente pequeño. La relación entre los parámetros μ^k y ρ^k esta definida de forma explicita en la ecuación (2.28). Las referencias [2, 42, 44], utilizan una aproximación para asegurar el decrecimiento del parámetro de perturbación en cada iteración, utilizando una expresión similar a la que es presentada a continuación:

$$\mu^k = \sigma^k \frac{\rho^k(\boldsymbol{\pi}^k, \mathbf{s}^k)}{nh} \quad (2.48)$$

Donde el parámetro $\sigma^k \in (0, 1)$ es el decrecimiento esperado de $\rho^k(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{s})$, llamado *parámetro de centralización*.

Partiendo del sistema mostrado en (2.30), se redefine el sistema de la siguiente forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}^k) = \mathbf{G}(\mathbf{v}^k) - \mu^k \mathbf{u} \quad (2.49)$$

Donde: $\mathbf{u} = [0 \ 0 \ 0 \ \mathbf{e}]^T$

Quedando la dirección del método de Newton de la siguiente forma:

$$\Delta \mathbf{v}^k = -(\mathbf{F}'(\mathbf{v}^k))^{-1} (\mathbf{G}(\mathbf{v}^k) - \mu^k \mathbf{u}) \quad (2.50)$$

Con esto, el *parámetro de centralización* se puede interpretar, como la proporción de dos componentes cuando:

$\sigma^k = 1$ se define como una dirección *Central*, llamada en inglés *Centering direction*

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v}^k) \mu^k \mathbf{u}$$

$\sigma^k = 0$ se define como una dirección de Newton pura, llamada en inglés *affine-scaling*

$$-(\mathbf{F}'(\mathbf{v}^k))^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{v}^k)$$

Una explicación más detallada sobre las direcciones *Central* y *affine-scaling* y el ajuste del parámetro de centralización, es desarrollado en la referencia [2].

En este documento se presentan algunas formas de ajustar el parámetro de centralización, según las referencias estudiadas. El-Bakry en [42], presenta el parámetro de centralización en función del gap de complementariedad, ecuación (2.51).

$$\sigma^k = \min(\eta_1; \eta_2 \rho^k) \quad (2.51)$$

Donde $\eta_1 = 0,2$ y $\eta_2 = 100$, consiguiendo un parámetro de centralización que está relacionado con el proceso de convergencia, ya que la ρ^k será un índice del estado de problema de complementariedad. De una forma semejante, Torres presenta en [44] el parámetro de centralización en función de su valor anterior, ecuación (2.52).

$$\sigma^k = \max(0,95\sigma^{k-1}; 0,1) \quad \text{con: } \sigma^0 = 0,2 \quad (2.52)$$

Otra forma de ajustar este parámetro, ecuación (2.53), considerada como la forma estándar (MPI estándar) se basa en un decremento constante [2]. Esta estrategia es comúnmente utilizada para realizar comparaciones sobre el desempeño de diferentes versiones del MPI.

$$\sigma^k = 0,1 \quad (2.53)$$

Sin embargo, otras formas de ajustar este parámetro se pueden encontrar en [2].

2.3.6. Convergencia del proceso iterativo

Según las referencias [2, 42] y como se dijo antes, una apropiada elección de una secuencia de parámetros μ^k , crea una sucesión de pasos primales y duales, α_p^k y α_d^k , para los cuales la secuencia de soluciones del problema ($\mathbf{x}(\mu^k)$), tiende a la solución, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\pi}^*)$, que cumple todas las restricciones del problema descrito en (2.4) a (2.7).

Usando el sistema de ecuaciones de KKT perturbadas, ecuación (2.30), se define el criterio de parada utilizando la función de mérito siguiente (basado en las referencias [45, 44]):

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{v}^k)\|_\infty \leq \epsilon_{tol} \quad (2.54)$$

Que sería equivalente a:

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \|\nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi}\|_\infty \\ \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|_\infty \\ \|\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}\|_\infty \\ \|\mathbf{\Pi}\mathbf{s} - \mu\mathbf{e}\|_\infty \end{array} \right\} \leq \epsilon_{tol} \quad (2.55)$$

Y que se puede discriminar de la siguiente forma:

- Factibilidad Primal:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|_{\infty} &\leq \epsilon_p \\ \|\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}\|_{\infty} &\leq \epsilon_p \end{aligned} \quad (2.56)$$

- Factibilidad Dual:

$$\|\nabla f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\pi}\|_{\infty} \leq \epsilon_d \quad (2.57)$$

- Condición de optimalidad o de complementariedad:

$$\|\boldsymbol{\Pi} \mathbf{s} - \mu \mathbf{e}\|_{\infty} \leq \epsilon_c \quad (2.58)$$

Adicionalmente, de forma práctica se deben considerar los siguientes parámetros para determinar el criterio de parada (2.59) y (2.60).

$$\mu^k \leq \epsilon_{\mu} \quad (2.59)$$

$$\frac{|f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^{k-1})|}{1 + |f(\mathbf{x}^k)|} \leq \epsilon_{des} \quad (2.60)$$

Con el criterio de parada (2.60), se busca evitar que el proceso continúe, cuando para dos valores consecutivos de \mathbf{x} el valor de la función objetivo no cambia de forma considerable, es decir $f(\mathbf{x}^{k-1}) \approx f(\mathbf{x}^k)$.

Se pueden sugerir los criterios de convergencia de una forma general, mostrados a continuación, sin embargo, es necesario considerar el orden de las magnitudes de cada problema y establecer errores admisibles para cada situación en particular. Una relación que normalmente se da en el MPI, basado en los resultados, es $\epsilon_{\mu} = 10^{-2} \times \epsilon_p$, la cual se debe tener en cuenta en el momento que se ajusten las tolerancias de los criterios de convergencia.

$$\epsilon_{tol} = \epsilon_p = \epsilon_d = \epsilon_c = \epsilon_{des} = 10^{-5} \quad \epsilon_{\mu} = 10^{-7}$$

2.3.7. Punto inicial

En un problema de PNL, en general la elección del punto inicial, \mathbf{x}^0 , afecta el número de iteraciones en el proceso iterativo. Por esto, son utilizadas funciones de merito que ayudan a encontrar un punto inicial adecuado. Sin embargo, esto involucra otro problema de optimización de complejidad, en algunos casos, semejante al problema original [35].

Una de las grandes ventajas, que tiene el MPI frente al método tradicional de Newton, es que el punto inicial, \mathbf{x}^0 , no necesita estar en la región de convergencia. El punto inicial y la trayectoria de convergencia no tienen esta restricción, que sólo debe ser cumplida por el punto candidato al óptimo, \mathbf{x}^* [2]. Los multiplicadores de Lagrange para las restricciones de igualdad, $\boldsymbol{\lambda}^0$, y las variables del problema original, \mathbf{x}^0 , pueden tomar cualquier valor en el punto inicial.

En cuanto a los valores iniciales de los multiplicadores de Lagrange para las restricciones de desigualdad, $\boldsymbol{\pi}^0$, y las variables de holgura, \mathbf{s}^0 , deben ser positivos y cumplir las condiciones de no negatividad durante todo el proceso iterativo, lo que garantiza que el parámetro μ sea positivo durante el mismo. El uso de estrategias heurísticas para determinar los valores iniciales es utilizado en las referencias [44, 3]. Algunas de estas consideraciones son señaladas a continuación:

- Si hay límites para las variables del problema original, \mathbf{x} , es conveniente utilizar el punto medio entre los límites.
- Las variables de holgura son inicializadas así:

$$s_i^0 = |h_i(\mathbf{x}^0)| \quad (2.61)$$

- Los multiplicadores de Lagrange para las restricciones de igualdad y desigualdad:

$$\lambda_j^0 = 1 \quad (2.62)$$

$$\boldsymbol{\pi}^0 = \mu^0(\mathbf{S})^{-1}\mathbf{e} \quad (2.63)$$

Típicamente el parámetro μ^0 adopta los valores $\{10; 1; 0, 1\}$.

2.3.8. Algoritmo para el MPI para PNL

El algoritmo del MPI puede ser descrito en una forma detallada en los siguientes pasos:

1. Inicialización de $k = 0$ y $\mu^0 = 1/10$, elección de un punto inicial, $\mathbf{v}^0 = (\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ que cumpla las condiciones de no negatividad, $\rho^0(\boldsymbol{\pi}^0, \mathbf{s}^0) > 0$, ecuación (2.47); luego calcular σ^0 , ecuaciones (2.51), (2.52) ó (2.53).
2. Calcular los vectores $\nabla f(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$, y las matrices $\mathbf{J}_g(\mathbf{x}^0)$ y $\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^0)$.
3. Si el punto actual, $\mathbf{v}^k = (\mathbf{x}^k, \mathbf{s}^k, \boldsymbol{\pi}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$, satisface el criterio de convergencia, ecuaciones (2.56) a (2.60); **Terminar**, en caso contrario **Continuar** con el siguiente paso.
4. Calcular el vector $[\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T$, del sistema lineal reducido mostrado en (2.38).

5. Calcular la matriz $\nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$, por medio de la ecuación (2.34).
6. Formar la matriz del sistema lineal mostrado en (2.38) y resolver este sistema en el punto actual, $\mathbf{v}^k = (\mathbf{x}^k, \mathbf{s}^k, \boldsymbol{\pi}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$.
7. Con los valores obtenidos $\Delta \mathbf{x}^k$ y $\Delta \boldsymbol{\lambda}^k$, y las ecuaciones auxiliares (2.39) y (2.40), determinar las otras direcciones de búsqueda restantes, $\Delta \mathbf{s}^k$ y $\Delta \boldsymbol{\pi}^k$.
8. Calcular los pasos primales y duales, α_p^k y α_d^k por medio de las ecuaciones (2.45) y (2.46).
9. Actualizar las variables primales y duales $\mathbf{v}^k = (\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{s}^{k+1}, \boldsymbol{\pi}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1})$, por medio de las ecuaciones auxiliares (2.41) a (2.44).
10. Calcular los vectores $\nabla f(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$, y las matrices $\mathbf{J}_g(\mathbf{x}^{k+1})$ y $\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^{k+1})$.
11. Actualizar los valores de ρ^{k+1} , σ^{k+1} y μ^{k+1} , ecuaciones (2.47); (2.51), (2.52) ó (2.53) y 2.48 respectivamente.
12. Asignar $k = k + 1$ y continuar en el **Paso 3**.

2.3.9. Tiempos de ejecución

El paso que tarda más tiempo y demanda más recursos computacionales durante la ejecución del MPI, en cada iteración, es la solución del sistema lineal (2.38), en la [página 21](#). Además, el tiempo de ejecución total está relacionado con los siguientes factores [3]:

- Naturaleza del problema tratado y densidad.
- Punto inicial.
- Esquema de procesamiento y ordenamiento del sistema lineal.
- Método utilizado para resolver el sistema lineal.
- Precisión del cálculo numérico.
- Variante de Método de Puntos Interiores.
- Tasa de decrecimiento del parámetro de barrera.
- Longitud de los pasos primales y duales.
- Criterio de parada.

Contínuos desarrollos se llevan a cabo en todas estas áreas citadas anteriormente, consiguiendo algoritmos más eficientes y robustos [4]. Esto, sumado al exponencial desarrollo computacional, hace que el MPI sea utilizado cada vez más en las aplicaciones de uso común.

2.4. MPI Predictor Corrector

El MPI predictor Corrector (MPI-PC) es una variante del MPI con la intención de mejorar los cálculos de las direcciones de búsqueda y, de esta forma, acelerar la convergencia [35]. El MPI-PC primal-dual soluciona dos sistemas de ecuaciones lineales en cada iteración k usando la misma matriz de coeficientes, ecuaciones (2.32) y (2.50), y adicionando un vector más, tal como se ve a continuación:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v}^k)\Delta\mathbf{v}^k = -\mathbf{G}(\mathbf{v}^k) + \mu^k\mathbf{u} - \Delta \quad (2.64)$$

$$\text{Donde: } \Delta = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \Delta\Pi \ \Delta\mathbf{s}]^T.$$

Como resultado, asumiendo que el valor de Δ es conocido, se obtiene un nuevo sistema lineal. La solución del sistema (2.64), proporcional a tres componentes para la dirección de búsqueda.

$$\Delta\mathbf{v}^k = \Delta\mathbf{v}_{af}^k + \Delta\mathbf{v}_{ce}^k + \Delta\mathbf{v}_{co}^k \quad (2.65)$$

La dirección de búsqueda $\Delta\mathbf{v}^k$, se define de la siguiente forma:

$\Delta\mathbf{v}_{af}^k$ dirección *predictora* o dirección *affine-scaling*, también llamada como dirección de Newton.

$\Delta\mathbf{v}_{ce}^k$ dirección *central*.

$\Delta\mathbf{v}_{co}^k$ dirección *correctora*.

Para el MPI primal dual, la dirección de búsqueda es $\Delta\mathbf{v}^k = \Delta\mathbf{v}_{af}^k + \Delta\mathbf{v}_{ce}^k$. En el MPI-PC, el método de Newton, ecuación (2.64), se resuelve en dos pasos, llamados *predictor* y *corrector*.

$$\Delta\mathbf{v}^k = \underbrace{\Delta\mathbf{v}_{af}^k}_{\text{predictor}} + \underbrace{\Delta\mathbf{v}_{ce}^k + \Delta\mathbf{v}_{co}^k}_{\text{corrector}}$$

2.4.1. Paso predictor

La dirección, correspondiente al paso predictor, se calcula partiendo de la ecuación (2.33).

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v}^k) \times \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{af} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_{af} \\ \Delta \boldsymbol{\pi}_{af} \\ \Delta \mathbf{s}_{af} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} \\ \boldsymbol{\Pi} \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

El paso predictor es usado para aproximar los términos no lineales de Δ de la parte derecha de la ecuación (2.64), y para estimar un valor del parámetro de barrera μ_{af}^k , que serán usados en el cálculo del paso corrector.

El máximo tamaño del paso predictor se determina de la siguiente forma:

$$\alpha_{p_{af}}^k = \min \left\{ \min_{\Delta s_j^k < 0} \frac{s_j^k}{|\Delta s_{j_{af}}^k|}; 1 \right\} \quad (2.67)$$

$$\alpha_{d_{af}}^k = \min \left\{ \min_{\Delta \pi_j^k < 0} \frac{\pi_j^k}{|\Delta \pi_{afj}^k|}; 1 \right\} \quad (2.68)$$

La estimación para el gap de complementariedad, puede ser expresada como:

$$\rho_{af}^k = (\boldsymbol{\pi}^k + \gamma \alpha_{d_{af}} \Delta \boldsymbol{\pi}_{af})^T (\mathbf{s}^k + \gamma \alpha_{p_{af}} \Delta \mathbf{s}_{af}) \quad (2.69)$$

El parámetro de perturbación, se puede calcular de la siguiente forma:

$$\mu_{af}^k = \sigma_{af}^k \frac{\rho_{af}^k}{n h} \quad (2.70)$$

Y el parámetro de centralización como:

$$\sigma_{af}^k = \min \left\{ \left(\frac{\rho_{af}^k}{\rho^k} \right)^3; 0, 2 \right\} \quad (2.71)$$

La estrategia utilizada por el MPI-PC para hallar el parámetro de perturbación, será tomar valores pequeños cuando el paso predictor produzca un decrecimiento grande en el gap de complementariedad y, en caso contrario, tomar un valor grande.

El sistema lineal mostrado en (2.66) es factorizado para reducir su dimensión, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_r(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \\ \mathbf{J}_g(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_{af} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}_{af} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Donde:

$$\mathbf{J}_r(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T (\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}))$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T (\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}))$$

Y las ecuaciones auxiliares como:

$$\Delta \mathbf{s}_{af} = -(\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}) - \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}_{af} \quad (2.73)$$

$$\Delta \boldsymbol{\pi}_{af} = -\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \Delta \mathbf{s}_{af} - \boldsymbol{\pi} \quad (2.74)$$

2.4.2. Paso corrector

La dirección, correspondiente al paso corrector, se calcula también partiendo de la ecuación (2.33).

$$\mathbf{F}'(\mathbf{v}^k) \times \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \\ \Delta \boldsymbol{\pi} \\ \Delta \mathbf{s} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s} \\ \boldsymbol{\Pi} \mathbf{s} - \mu_{af} \mathbf{e} + \Delta \boldsymbol{\Pi}_{af} \Delta \mathbf{s}_{af} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

El paso corrector calcula simultáneamente las direcciones $\Delta \mathbf{v}_{ce}^k + \Delta \mathbf{v}_{co}^k$. Los pasos predictor y corrector están basados en los mismos elementos que la factorización de la matriz (2.64). El esfuerzo adicional en el MPI-PC es la resolución de otro sistema lineal para el cálculo de $\Delta \mathbf{v}_{af}^k$. Por tanto, el cálculo del tamaño de los pasos α_{paf}^k y α_{daf}^k , y la estimación μ_{af} .

El sistema lineal (2.75), reduce su dimensión, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_r(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) & \mathbf{J}_g(\mathbf{x})^T \\ \mathbf{J}_g(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Donde:

$$\mathbf{J}_r(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T (\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{J}_h(\mathbf{x}))$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) = \nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) + \mathbf{J}_h(\mathbf{x})^T (\mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}^{-1} (\mu_{af} \mathbf{e} - \Delta \boldsymbol{\Pi}_{af} \Delta \mathbf{s}_{af}))$$

Y se obtienen ecuaciones auxiliares:

$$\Delta \mathbf{s} = -(\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}) - \mathbf{J}_h(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x} \quad (2.77)$$

$$\Delta \boldsymbol{\pi} = \mathbf{S}^{-1} (\mu_{af} \mathbf{e} - \Delta \boldsymbol{\Pi}_{af} \Delta \mathbf{s}_{af}) - \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\Pi} \Delta \mathbf{s} - \boldsymbol{\pi} \quad (2.78)$$

El MPI-PC tiene la ventaja de reducir el número de iteraciones y el tiempo computacional [35, 3].

2.4.3. Algoritmo para el MPI-PC para PNL

El algoritmo del MPI-PC, puede ser descrito de forma detallada en los siguientes pasos:

1. Escoger un punto inicial, $\mathbf{v}^0 = (\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ que cumpla las condiciones de no negatividad.
2. Calcular los vectores $\nabla f(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$, y las matrices $\mathbf{J}_g(\mathbf{x}^0)$ y $\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^0)$.
3. Si el punto actual, $\mathbf{v}^k = (\mathbf{x}^k, \mathbf{s}^k, \boldsymbol{\pi}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$, satisface el criterio de convergencia, ecuaciones (2.56) a (2.60); **Terminar**, en caso contrario **Continuar** con el siguiente paso.
4. Calcular el vector $[\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) \ \mathbf{g}(\mathbf{x})]^T$, del sistema lineal reducido mostrado en (2.72).
5. Calcular la matriz $\nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi})$, por medio de la ecuación (2.34).
6. Formar la matriz del sistema lineal mostrado en (2.72) y resolver este sistema en el punto actual, $\mathbf{v}^k = (\mathbf{x}^k, \mathbf{s}^k, \boldsymbol{\pi}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$.
7. Con los valores obtenidos $\Delta \mathbf{x}_{af}^k$ y $\Delta \boldsymbol{\lambda}_{af}^k$, y las ecuaciones auxiliares (2.73) y (2.74), determinar las otras direcciones de búsqueda restantes, $\Delta \mathbf{s}_{af}^k$ y $\Delta \boldsymbol{\pi}_{af}^k$.
8. Calcular los pasos primales y duales, α_{paf}^k y α_{daf}^k por medio de las ecuaciones (2.67) y (2.68). Calcular ρ_{af}^k y luego estimar μ_{af}^k usando (2.69) y (2.70) respectivamente.
9. Formar la matriz del sistema lineal mostrado en (2.76) y resolver este sistema en el punto actual, $\mathbf{v}^k = (\mathbf{x}^k, \mathbf{s}^k, \boldsymbol{\pi}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$.
10. Con los valores obtenidos $\Delta \mathbf{x}^k$ y $\Delta \boldsymbol{\lambda}^k$, y las ecuaciones auxiliares (2.77) y (2.78), se determina las otras direcciones de búsqueda restantes, $\Delta \mathbf{s}^k$ y $\Delta \boldsymbol{\pi}^k$.
11. Calcular los pasos primales y duales, α_p^k y α_d^k por medio de las ecuaciones (2.45) y (2.46).
12. Actualizar las variables primales y duales $\mathbf{v}^{k+1} = (\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{s}^{k+1}, \boldsymbol{\pi}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1})$, por medio de las ecuaciones auxiliares (2.41) a (2.44).
13. Calcular los vectores $\nabla f(\mathbf{x}^{k+1})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}^{k+1})$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x}^{k+1})$, y las matrices $\mathbf{J}_g(\mathbf{x}^{k+1})$ y $\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^{k+1})$.
14. Asignar $k = k + 1$ y continuar en el **Paso 3**.

2.5. Implementación de los algoritmos

Como implementación, se optó por desarrollar los algoritmos del MPI tratados en las secciones anteriores, basados en las referencias, [2, 42, 3, 44]. Se utilizaron dos problemas: un problema matemático y un Flujo de Potencia Óptimo (OPF), para comparar desempeño y precisión entre los algoritmos.

El objetivo principal era entender la estructura y los detalles de funcionamiento de los algoritmos del MPI de forma general. No se cubrieron todos los aspectos conceptuales, como explotación de la dispersidad de las matrices y métodos de factorización para los sistemas lineales. Sin embargo, en futuras actualizaciones podrán cubrirse estos aspectos, sin implicar un cambio estructural de los algoritmos desarrollados.

En las secciones anteriores se explicaron diferentes MPI primales-duales que fueron implementados y utilizados para encontrar la solución de los dos problemas propuestos; y que denominaremos de aquí en adelante de la siguiente forma:

Estándar: se basa en un decremento constante [2], ecuación (2.53).

El-Bakry: en función del gap de complementariedad [42], ecuación (2.51).

Torres: en función del parámetro de centralización [44], ecuación (2.52).

MPI-PC: Método de Puntos Interiores Predictor Corrector [3], página 21.

Se partió de la premisa de desarrollar prototipos, sin la intención de llegar a la robustez de una herramienta de carácter profesional. Con esta premisa, se eligió un ambiente de trabajo versátil y que facilitara la depuración de los algoritmos.

2.5.1. Herramienta de desarrollo

Los códigos de los algoritmos del MPI, fueron desarrollados y probados en GNU Octave Version 3.0.0. (para más información ir a <http://www.octave.org>). Adicionalmente para comprobar la portabilidad de los algoritmos, también fueron ejecutados en MATLAB®.

A efectos de comparación fueron resueltos los problemas usando el Optimization Toolbox de MATLAB®, ajustando dentro de sus parámetros un algoritmo de MPI (según la documentación ofrecida por la aplicación), con la intención de comparar la precisión de los algoritmos de MPI desarrollados y explicados en este documento con el toolbox.

Los valores de los criterios de parada del Optimization Toolbox fueron ajustados de forma similar y adecuada a los MPI desarrollados.

Ejemplo numérico

Este ejemplo fue tomado de la referencia [35]. La trayectoria de puntos utilizada para llegar al punto óptimo y el número de iteraciones difiere de los presentados en la referencia debido a algunas diferencias en las implementaciones de los algoritmos de MPI utilizados. Sin embargo, se logra validar el algoritmo al tomar criterios de parada semejante, obteniéndose el mismo punto solución.

Problema 1: Considere el siguiente problema de Programación No Líneal (PNL), de orden cuadrático, con restricciones de igualdad y desigualdad.

$$\text{minimizar} \quad x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 20 \quad (2.79)$$

sujeto a:

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2 = 0 \quad (2.80)$$

$$1 \leq x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 + 10 \leq 4 \quad (2.81)$$

En la figura 2.3 se muestra el problema presentado en las ecuaciones (2.79) a (2.81). La circunferencia con línea discontinua representa la restricción de igualdad. La región punteada representa el espacio delimitado por la restricción de desigualdad. Las circunferencias con línea discontinua y punto representan valores que la función objetivo toma para diferentes parejas de puntos (x_1, x_2) . La región de soluciones posibles son los arcos delimitados por los puntos (A, B) y (C, D) . Estos arcos son la intersección del conjunto de restricciones de igualdad y desigualdad. El Arco (B, C) no forma parte de la zona de soluciones factibles

En la figura 2.3, el punto $O = (2,000; 4,000)$, marcado con un asterisco, es mínimo global irrestricto de la función objetivo, sin considerar el conjunto de restricciones. El punto $A = (2,000, 2,732)$ representa el mínimo de la función objetivo, ecuación (2.79), considerando el conjunto de restricciones, ecuaciones (2.80) y (2.81). Las líneas que parten del punto $x^0 = (5,000, 4,000)$, representan las secuencias de puntos que siguen cada uno de los algoritmos para llegar al valor óptimo restringido, punto $A = (2,000; 2,732)$. Se puede observar las diferencias en los caminos recorridos, sin embargo todos convergen en el mismo punto. En secciones posteriores se discutirá de una forma más amplia las diferencias entre los algoritmos y su desempeño.

Se ilustrará la primera iteración correspondiente al algoritmo presentado por El-Bakry [42].

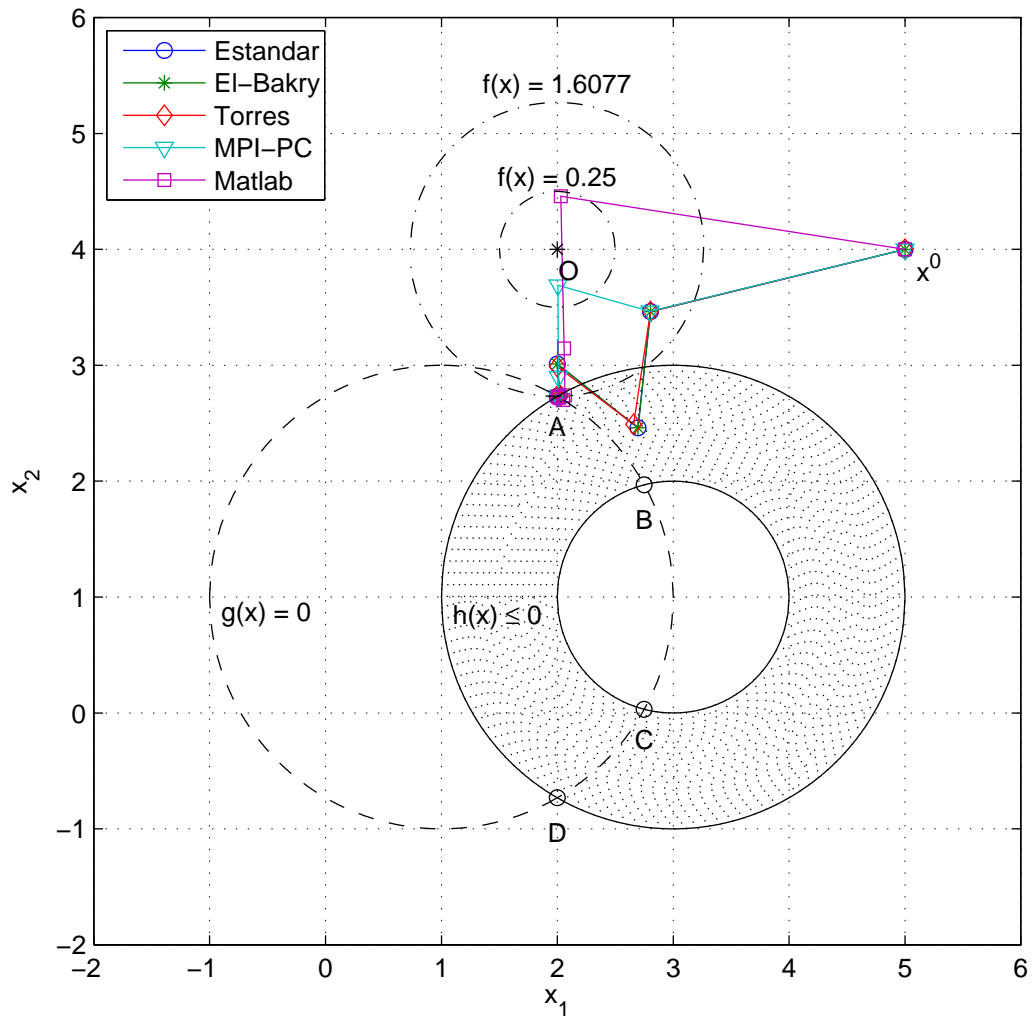


Figura 2.3.: Ejemplo de PNL con dos variables

Pasos previos: Se definen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 20 \\
 g(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2 = 0 \\
 h_1(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 6 \leq 0 \\
 h_2(\mathbf{x}) &= -(x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 + 9) \leq 0
 \end{aligned}$$

Y definen los vectores y matrices correspondientes:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 - 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2 & 2x_2 - 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 6 & 2x_2 - 2 \\ -2x_1 + 6 & -2x_2 + 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_{h_1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_{h_2}(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se definen constantes para el algoritmo:

$$\mu^0 = 0,1 \quad \gamma = 0,99995 \quad \tau = 0,25$$

Y se escoge el punto inicial:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0 &= (5,0000 \quad 4,0000)^T \\ \mathbf{s}^0 &= (9,0000e + 00 \quad 1,2000e + 01)^T \\ \boldsymbol{\pi}^0 &= (0,01111111 \quad 0,00833333)^T \\ \boldsymbol{\lambda}^0 &= (1)^T \end{aligned}$$

Cálculo del gap de complementariedad y parámetro de centralización, ecuaciones (2.47) y (2.51), respectivamente.

$$\rho^0 = 2,0000e - 01 \quad \sigma^0 = 1,0000e - 01$$

Cálculo de los vectores $\nabla f(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x}^0)$, y las matrices $\mathbf{J}_g(\mathbf{x}^0)$ y $\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^0)$.

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^0) = 21 \quad \mathbf{J}_g(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 9 \\ -12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_h(\mathbf{x}^0) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

Iteración 0

Cálculo del vector $[\mathbf{r}(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\pi}^0) \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)]^T$, del sistema líneal reducido mostrado en (2.38).

$$- \begin{bmatrix} r_1(\mathbf{v}^0) \\ r_2(\mathbf{v}^0) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14,1000 \\ -6,1500 \\ -21,0000 \end{bmatrix}$$

Criterios de convergencia, ecuaciones (2.56) a (2.60):

$$\begin{aligned}\epsilon_p &= 10^{-5} \geq 21,00000 \\ \epsilon_d &= 10^{-5} \geq 14,01111 \\ \epsilon_c &= 10^{-5} \geq 0,00000 \\ \epsilon_\mu &= 10^{-10} \geq 0,10000 \\ \epsilon_{des} &= 10^{-3} \geq 0,00000\end{aligned}$$

Cálculo de la matriz $\nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$, por medio de la ecuación (2.34).

$$\nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) = \begin{bmatrix} 4,00556 & 0,00000 \\ 0,00000 & 4,00556 \end{bmatrix}$$

Matriz del sistema líneal mostrado en (2.38) y solución en el punto actual, $(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \boldsymbol{\pi}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$.

$$\begin{bmatrix} 4,03642 & 0,04630 & 8,00000 \\ 0,04630 & 4,07500 & 6,00000 \\ 8,00000 & 6,00000 & 0,00000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^0 \\ \Delta x_2^0 \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14,1000 \\ -6,1500 \\ -21,0000 \end{bmatrix}$$

Con los valores obtenidos $\Delta \mathbf{x}^0$ y $\Delta \boldsymbol{\lambda}^0$, y las ecuaciones auxiliares (2.39) y (2.40), se determinarán las otras direcciones de búsqueda restantes, $\Delta \mathbf{s}^0$ y $\Delta \boldsymbol{\pi}^0$.

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x}^0 &= (-2,21867 \quad -0,54177)^T \\ \Delta \boldsymbol{\lambda}^0 &= (-0,63993)^T \\ \Delta \mathbf{s}^0 &= (-5,8747 \quad -12,1253)^T \\ \Delta \boldsymbol{\pi}^0 &= (0,0072527 \quad 0,0084204)^T\end{aligned}$$

Cálculo de los pasos primales y duales, α_p^0 y α_d^0 , por medio de las ecuaciones (2.45) y (2.46).

$$\alpha_p^0 = 0,98967 \quad \alpha_d^0 = 1,00000$$

VARIABLES PRIMALES Y DUALES ACTUALIZADAS, $(\mathbf{x}^1, \mathbf{s}^1, \boldsymbol{\pi}^1, \boldsymbol{\lambda}^1)$, por medio de las ecuaciones auxiliares (2.41) a (2.44).

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^1 &= (2,8044 \quad 3,4639)^T \\ \mathbf{s}^1 &= (3,1863e + 00 \quad 6,0000e - 04)^T \\ \boldsymbol{\pi}^1 &= (0,018363 \quad 0,016753)^T \\ \boldsymbol{\lambda}^1 &= (0,36010)^T\end{aligned}$$

Cálculo de los vectores $\nabla f(\mathbf{x}^1)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}^1)$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x}^1)$, y las matrices $\mathbf{J}_g(\mathbf{x}^1)$ y $\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^1)$.

$$\nabla f(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix} 1,6087 \\ -1,0723 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^1) = 5,3263 \quad \mathbf{J}_g(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} 3,6087 & 4,9277 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} 2,1089 \\ -5,1089 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_h(\mathbf{x}^1) = \begin{bmatrix} -0,39127 & 4,92771 \\ 0,39127 & -4,92771 \end{bmatrix}$$

Actualización de los valores ρ^1 , σ^1 y μ^1 , ecuaciones (2.47), (2.51) y 2.48 respectivamente.

$$\rho^1 = 5,8522e - 02 \quad \sigma^1 = 1,0000e - 01 \quad \mu^1 = 2,9261e - 03$$

Asignar $k = 1$, y verificar criterios de convergencia, ecuaciones (2.56) a (2.60):

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= 10^{-5} \geq 5,3263e + 00 \\ \epsilon_d &= 10^{-5} \geq 2,9076e + 00 \\ \epsilon_c &= 10^{-5} \geq 5,5586e - 02 \\ \epsilon_\mu &= 10^{-10} \geq 2,9261e - 03 \\ \epsilon_{des} &= 10^{-3} \geq 4,1694e + 00 \end{aligned}$$

Continuar con la **Iteración 1**.

El proceso termina en la séptima iteración. Un resumen del proceso de convergencia es presentado en el tabla 2.1.

k	α_p^k	α_d^k	E.P.	E.D	Gap C.	μ^k	$\Delta f(\mathbf{x}^k)$	x_1	x_2
0	0,0000	0,0000	2,10e+1	1,40e+1	0,00e+0	1,00e-1	0,00e+0	5,0000	4,0000
1	0,9897	1,0000	5,33e+0	2,91e+0	5,56e-2	2,93e-3	4,17e+0	2,8044	3,4639
2	1,0000	0,0161	1,02e+0	2,57e+0	4,80e-2	2,53e-3	4,98e-1	2,6970	2,4616
3	0,7443	1,0000	1,05e+0	6,67e-1	3,39e-2	1,79e-3	9,50e-1	2,0000	3,0121
4	1,0000	1,0000	7,28e-2	1,68e-1	2,27e-2	1,33e-3	2,34e-1	2,0172	2,7430
5	1,0000	1,0000	4,16e-4	2,02e-3	1,23e-3	7,06e-5	1,04e-2	2,0001	2,7321
6	1,0000	1,0000	3,24e-8	1,63e-7	6,97e-5	9,98e-7	1,01e-4	2,0000	2,7320
7	1,0000	1,0000	3,02e-9	2,60e-9	1,02e-6	2,03e-10	2,67e-5	2,0000	2,7321

Tabla 2.1.: Resumen del proceso de convergencia del MPI según El-Bakry, Criterios de convergencia

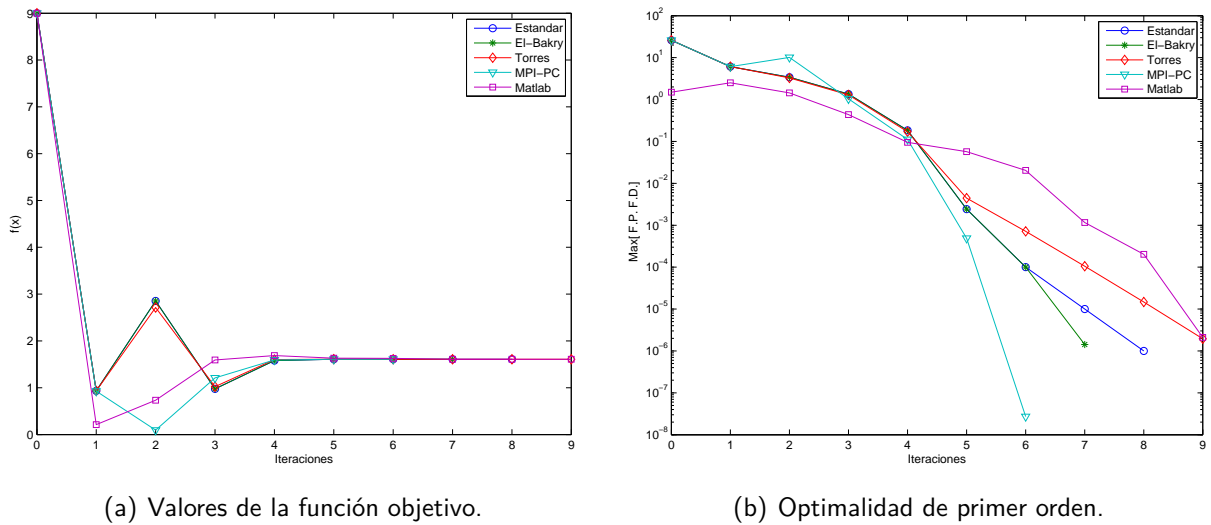


Figura 2.4.: Comparación de los diferentes MPI, caso matemático

Resultados obtenidos: La gráfica 2.4(a), muestra el valor que toma la función objetivo en cada iteración. De forma clara, se puede apreciar que todos los algoritmos convergen al mismo valor. En la gráfica 2.4(b), se puede el ver el error máximo que toman las ecuaciones de KKT (2.55), lo que se interpretar como la relación entre la reducción del error de las ecuaciones de KKT y las iteraciones del algoritmo.

MPI	$f(x)$	Desvío	Iter
Estándar	1,61e+00	7,09e-07	8
El-Bakry	1,61e+00	1,02e-06	7
Torres	1,61e+00	1,38e-06	9
MPI-PC	1,61e+00	0,00e+00	6
Matlab	1,61e+00	2,11e-06	9

Tabla 2.2.: Comparación diferentes versiones del MPI, caso matemático

Los resultados agrupados en la tabla 2.2 se interpretan de la siguiente forma: la columna marcada como « $f(x)$ », muestra el valor que toma la función objetivo al final del proceso iterativo, las diferencias entre los diferentes algoritmos no son apreciables debido a que los valores sólo cambian a partir del séptimo decimal. Las siguientes columnas dan una medida del desempeño de cada algoritmo. La columna marcada como «Desvío»⁷ representa el desvío sobre el mejor

⁷Donde:

$$\text{Desvío} = f_i(x) - \min(f_{ES}(x) \ f_{EB}(x) \ f_{TOR}(x) \ f_{MPI-PC}(x) \ f_{Matlab}(x))$$

resultado (el valor mínimo encontrado, entre todos los algoritmos). El algoritmo con el valor «0,00e + 00», será el algoritmo que encontró el valor mínimo y los valores diferentes darán una medida del desvío comparado con este mínimo. Todos los algoritmos convergen a un valor validado por los criterios de parada, que son comunes para todos ellos. La columna marcada como «Iter», se refiere al número de iteraciones que requiere cada algoritmo para alcanzar los criterios de parada. En este caso, un menor número de iteraciones significa algoritmo más eficiente en tiempo computacional.

Para este problema el MPI-PC fue el algoritmo que consiguió cumplir con los criterios de parada en el menor número de iteraciones.

Ejemplo en sistemas eléctricos de potencia

Uno de los problemas fundamentales en la operación del sistema de energía eléctrica, es el Flujo de Potencia Óptimo (OPF). Este problema consiste en repartir la demanda total del sistema entre las unidades disponibles, de forma que el coste total de generación sea el *mínimo posible*.

No se trata pues de una simple cuestión de inclinación por las centrales eléctricas más baratas, ya que en la práctica habitual, hay que tener en cuenta un conjunto de condiciones técnicas que restringen el uso de las mismas.

Formulación del Problema: En el problema propuesto se tiene como objetivo realizar un OPF de un sistema eléctrico, donde se contemplaran las restricciones físicas del sistema eléctrico.

Se parte de un pequeño sistema eléctrico de tres nudos con dos unidades de generación y una carga. El sistema puede ser visto en la figura 2.5. El sistema eléctrico está representado como un diagrama unifilar donde todos los elementos son referidos a valores de base. Las características de los unidades se encuentran en la tabla 2.3.

Generador	Nudo	Capacidad W p.u.	Capacidad VAR p.u.
G_1	1	$0.0 < G_1 < 3.0$	$-1.0 < G_1 < 2.0$
G_2	2	$0.0 < G_2 < 3.0$	$-1.0 < G_2 < 2.0$

Tabla 2.3.: Características técnicas de las unidades generadoras, en p.u

Para analizar el sistema eléctrico se utiliza el modelo de línea corta, que usa el valor de las admitancias para cada elemento en las ramas, con esta información se calcula la matriz $\mathbf{Y} \angle \Theta_{N \times N}$, donde N es el número de nudos del sistema. El módulo y el argumento son representados de forma separada.

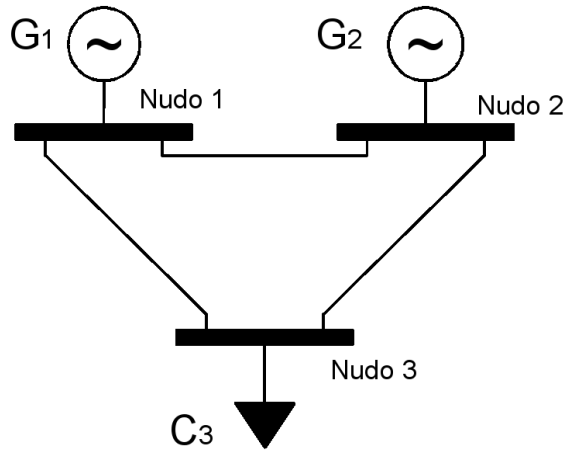


Figura 2.5.: Diagrama del Sistema Eléctrico

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 22,9700 & 12,1300 & 10,8500 \\ 12,1300 & 21,9300 & 9,8100 \\ 10,8500 & 9,8100 & 20,6500 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} -1,3380 & 1,8160 & 1,7890 \\ 1,8160 & -1,3470 & 1,7680 \\ 1,7890 & 1,7680 & -1,3620 \end{bmatrix}$$

Según la formulación del flujo de potencia, se puede calcular el estado de un sistema eléctrico con las siguientes ecuaciones, [41].

Equilibrio de potencia activa:

$$P_{Gi} - P_{Di} = V_i \sum_{k=1}^n y_{ik} V_k \cos(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) \quad (2.82)$$

Equilibrio de potencia reactiva:

$$Q_{Gi} - Q_{Di} = V_i \sum_{k=1}^n y_{ik} V_k \sin(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) \quad (2.83)$$

Los módulos de la tensión en cada nudo, V_i , deberán estar dentro de un límite inferior, $V_i^{\text{mín}}$, y un límite superior $V_i^{\text{máx}}$:

$$V_i^{\text{mín}} < V_i < V_i^{\text{máx}} \quad (2.84)$$

De igual forma para el argumento de la tensión en cada nudo, δ_i , deberán estar dentro de un límite inferior, $\delta_i^{\text{mín}}$, y un límite superior $\delta_i^{\text{máx}}$:

$$\delta_i^{\text{mín}} < \delta_i < \delta_i^{\text{máx}} \quad (2.85)$$

Cada unidad, por su características constructivas, puede inyectar una cantidad de potencia activa en el nodo i dentro de un límite inferior, $P_{Gi}^{\text{mín}}$, y un límite superior $P_{Gi}^{\text{máx}}$:

$$P_{Gi}^{\text{mín}} < P_{Gi} < P_{Gi}^{\text{máx}} \quad (2.86)$$

De igual manera, las unidades pueden inyectar una cantidad de potencia reactiva en el nodo i dentro de un límite inferior, $Q_{Gi}^{\text{mín}}$, y un límite superior, $Q_{Gi}^{\text{máx}}$:

$$Q_{Gi}^{\text{mín}} < Q_{Gi} < Q_{Gi}^{\text{máx}} \quad (2.87)$$

Con las consideraciones anteriores, obtenemos el modelo del sistema eléctrico, donde las ecuaciones de equilibrio de potencia por cada nudo, están en función de las variables desconocidas, módulo y argumento de la tensión en cada nudo y potencias generadas por cada unidad.

Según las consideraciones hechas anteriormente, se definen los siguientes límites del sistema.

$$\begin{aligned} 0 &\leq P_{G1} \leq 3 \\ 0 &\leq P_{G2} \leq 3 \\ -1 &\leq Q_{G1} \leq 2 \\ -1 &\leq Q_{G2} \leq 2 \\ 0,9 &\leq V_1 \leq 1,1 \\ 0,9 &\leq V_2 \leq 1,1 \\ 0,9 &\leq V_3 \leq 1,1 \\ -\pi/3 &\leq \delta_1 \leq \pi/3 \\ -\pi/3 &\leq \delta_2 \leq \pi/3 \end{aligned}$$

Se considerarán la potencia por cada unidad como una variable continua con un precio proporcional a la producción. La tabla 2.4 indica las magnitudes.

	C_{G1}	C_{G2}
€/ Wh	6	7

Tabla 2.4.: Costo de la energía por unidad

La carga está ubicada según la tabla 2.5.

	Nudo 1	Nudo 2	Nudo 3
P_{Di}	0,0	0,0	4,5
Q_{Di}	0,0	0,0	1.5

Tabla 2.5.: Carga instalada en cada nudo

Dado el precio de la energía por cada unidad, se calculó el costo de forma proporcional a la producción. Siendo este el objetivo a minimizar:

$$f(\mathbf{x}) = P_{G1}C_{G1} + P_{G2}C_{G2} \quad (2.88)$$

Se lleva el modelo del sistema eléctrico a un problema de optimización general, como el mostrado en las ecuaciones (2.1) a (2.3), quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & P_{G1}C_{G1} + P_{G2}C_{G2} \\ \text{sujeto a:} \quad & P_{Gi} - P_{Di} - V_i \sum_{k=1}^n y_{ik} V_k \cos(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) = 0 \\ & Q_{Gi} - Q_{Di} - V_i \sum_{k=1}^n y_{ik} V_k \text{sen}(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) = 0 \\ & 0 \leq P_{G1} \leq 3 \\ & 0 \leq P_{G2} \leq 3 \\ & -1 \leq Q_{G1} \leq 2 \\ & -1 \leq Q_{G2} \leq 2 \\ & 0,9 \leq V_1 \leq 1,1 \\ & 0,9 \leq V_2 \leq 1,1 \\ & 0,9 \leq V_3 \leq 1,1 \\ & -\pi/3 \leq \delta_1 \leq \pi/3 \\ & -\pi/3 \leq \delta_2 \leq \pi/3 \end{aligned}$$

Se toma de forma arbitraria el Nudo 3, como referencia para las variables del sistema, por lo tanto $\delta_3 = 0$, y se define vector \mathbf{x} de la siguiente forma:

$$\mathbf{x} = \left(P_{G1} \ P_{G2} \ Q_{G1} \ Q_{G2} \ V_1 \ V_2 \ V_3 \ \delta_1 \ \delta_2 \right)^T \quad (2.89)$$

Las ecuaciones (2.82) y (2.83), balance de potencia por cada nudo, corresponden a las restricciones de igualdad.

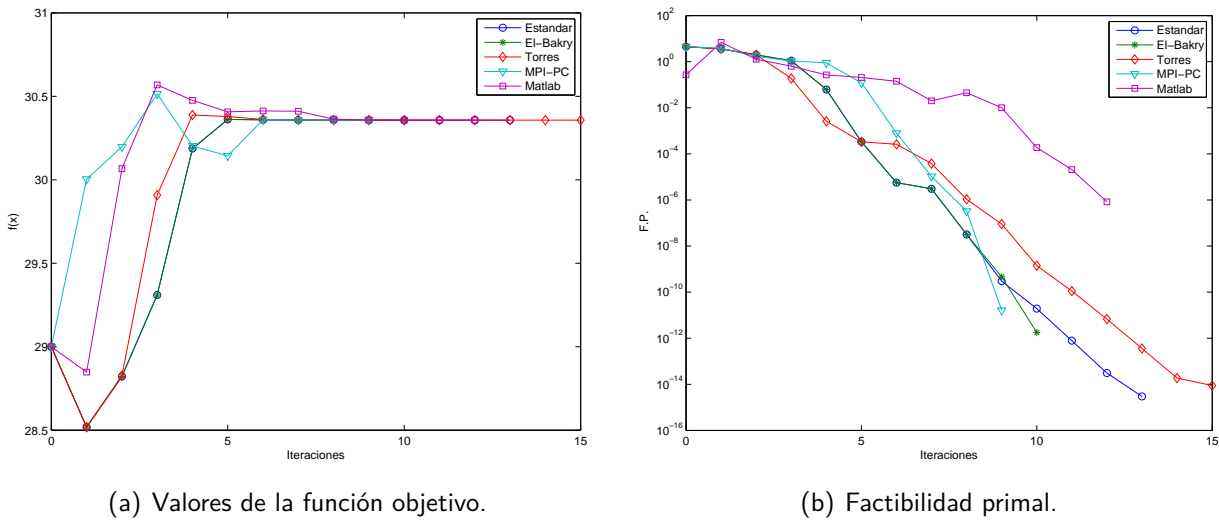


Figura 2.6.: Comparación de los diferentes MPI, caso OPF

Los límites de generación, las ecuaciones (2.86), (2.87) y tabla 2.4; límites en los módulos y argumentos de la tensión, ecuaciones (2.84) y (2.85); representan los límites para el vector x .

Resultados obtenidos: La gráfica 2.6(a) muestra el valor que toma la función objetivo en cada iteración. De forma clara, se puede apreciar que todos los algoritmos convergen al mismo valor. En la gráfica 2.6(b), se puede ver el error máximo que toman las restricciones de igualdad y desigualdad (Factibilidad primal), ecuación (2.56). Esta última gráfica interpreta la relación entre la reducción del error de las restricciones sobre las iteraciones del algoritmo.

MPI	$f(x)$	Desvío	Iter
Estándar	3,04e+01	1,32e-08	13
El-Bakry	3,04e+01	4,93e-09	10
Torres	3,04e+01	1,02e-08	15
MPI-PC	3,04e+01	0,00e+00	9
Matlab	3,04e+01	2,41e-07	12

Tabla 2.6.: Comparación diferentes versiones del MPI, caso OPF

Los resultados agrupados en la tabla 2.6 se interpretan de la siguiente forma: la columna marcada como « $f(x)$ », muestra el valor que toma la función objetivo al final del proceso iterativo, las diferencias entre los diferentes algoritmos no son apreciables debido a que los valores sólo cambian a partir del séptimo decimal. Las siguientes columnas dan una medida del desempeño

de cada algoritmo. La columna marcada como «Desvío»⁸ representa el desvío sobre el mejor resultado (el valor mínimo encontrado, entre todos los algoritmos). El algoritmo con el valor «0,00e + 00», será el algoritmo que encontró el valor mínimo y los valores diferentes darán una medida del desvío comparado con este mínimo. Todos los algoritmos convergen a un valor validado por los criterios de parada, que son comunes para todos ellos. La columna marcada como «Iter», se refiere al número de iteraciones que requiere cada algoritmo para alcanzar los criterios de parada. En este caso, un menor número de iteraciones significa algoritmo más eficiente en tiempo computacional.

Para este problema el MPI-PC fue el algoritmo que consiguió cumplir con los criterios de parada en el menor número de iteraciones.

2.6. Conclusiones

Se comprobó que los diferentes algoritmos del MPI consiguen resolver problemas de PNL con un buen desempeño. Adicionalmente, en el proceso de implementación, se comprobó que su estructura no es complicada y que son métodos de relativa simplicidad.

Existe una idea generalizada sobre el MPI, de la necesidad estricta de ajustar muy precisamente sus parámetros. En la práctica, el MPI puede prescindir de un ajuste de parámetros y aplicarse con un ajuste por defecto de los criterios de parada y el parámetro de centralización.

El MPI-PC demostró ser el más eficiente y eficaz de los algoritmos desarrollados. De forma general, todos los algoritmos desarrollados, consiguieron valores muy cercanos a los obtenidos con MATLAB. Teniendo en cuenta los resultados conseguidos, no se puede asegurar que los algoritmos aquí desarrollados son superiores al ofrecido por la herramientas comerciales, pues no han sido evaluados criterios de robustez y talla. Sin embargo, sí son muy alentadores para la primera versión de un prototipo de carácter académico.

⁸Donde:

$$\text{Desvío} = f_i(x) - \min(f_{ES}(x) \ f_{EB}(x) \ f_{TOR}(x) \ f_{MPI-PC}(x) \ f_{Matlab}(x))$$

3. Simulación de trayectorias de producción eólica para horizontes de corto plazo

Resumen

Para cuantificar la incertidumbre en la predicción de la potencia eólica a corto plazo (uno o dos días de antelación), se propone un método que simula la trayectorias que recrean la dinámica de la producción eólica. Estas trayectorias son generadas a partir de la covarianza de los errores históricos con diferentes horizontes de futuro y condicionadas a la previsión de potencia eólica y la varianza de los errores históricos en cada horizonte. Con la información conseguida es posible definir los intervalos de predicción y los posibles desvíos de energía para un período futuro. Como característica destacada, es usada la distribución Beta para representar el comportamiento de la producción eólica, para una mejor aproximación a la situación real de producción.

Finalmente, el método es validado analizando el comportamiento de los errores en las trayectorias simuladas con los errores históricos y utilizando los datos de producción histórica, con el objetivo de validar las transformaciones estadísticas propuestas en el método.

3.1. Introducción

Cuando se trabaja con energía eólica, una de las tareas más difíciles es considerar la incertidumbre asociada a la producción futura. Desde el punto de vista técnico, todos los errores en la previsión de energía eólica deben ser compensados por otro generador para suministrar la potencia demandada por la carga. Desde el punto de vista del mercado de electricidad, la incertidumbre en la predicción, aumenta el riesgo al que los agentes están expuestos, ya que los desvíos en la producción significan sobrecostos. Estos factores aumentan el precio de la energía, siendo éstas las razones principales que llevan a tratar de cuantificar la incertidumbre en la previsión de la energía eólica y, de esta forma, conseguir una operación más eficiente.

Los agentes se basan en herramientas de previsión eólica, ya sean meteorológicas, estadísticas

o una combinación de las anteriores, para estimar la producción de potencia eólica en un período a corto plazo. Esta información generalmente es requerida por el OS para realizar los programas de operación y los agentes deben presentarlo con anterioridad a la operación. No obstante, esta información es utilizada también para el desarrollo de estrategias de mercado, haciendo estos datos necesarios y valiosos.

La información entregada por las herramientas de predicción consiste en la estimación de la producción en un horizonte de tiempo, y los niveles de fiabilidad asociados a ésta. Sin embargo, dicha información no es generalmente suficiente si se requiere conocer el orden de los posibles desvíos de potencia y energía en el horizonte de predicción.

En [46], la producción eólica y la energía demandada son analizadas como dos variables aleatorias, para determinar la incertidumbre y cuantificar ésta. El caso de estudio es una isla, donde la proporción de energía eólica es relevante comparada con la demanda total. En ese trabajo, el error en la predicción no es relacionado con el horizonte de predicción y los desvíos son calculados de forma absoluta. Finalmente el método es aplicado utilizando perfiles de días típicos y cuantificando los desvíos de una forma económica, a partir de escenarios con diferentes niveles de incertidumbre.

Una aproximación para el cálculo del error en la predicción es utilizada en [12], como una función dependiente del horizonte de predicción y la potencia instalada. En [10] es usada una aproximación empírica para calcular el error en la predicción, como una proporción de la producción eólica y dependiendo solamente del horizonte de predicción.

En [14], los errores en la predicción son calculados a partir de simulaciones, considerando diferentes horizontes de predicción en una variable multivariable creada a partir de la matriz de covarianza de los errores históricos con diferentes horizontes y la previsión para el período futuro. En ese trabajo, la producción eólica es representada como una función No-Paramétrica y de esta forma se representa el comportamiento de la variable.

La producción de la potencia eólica es representada como una distribución Beta en [47], y es usada para calcular la función de probabilidad de los errores en la predicción. Sin embargo, es introducido un factor de ponderación que se ajusta de forma empírica. Para el cálculo de los errores, el horizonte de predicción es usado para determinar los parámetros que condicionan la función de probabilidad.

La motivación para desarrollar el presente trabajo es la necesidad de cuantificar los posibles desvíos de potencia y energía, considerando la interdependencia entre los errores, y la producción eólica en diferentes horizontes. Una Distribución de Probabilidad Conjunta podría ser una solución para conseguir los posibles desvíos de energía durante un período futuro, pero las características de no-linealidad y de no-Normalidad de la producción eólica hacen esta tarea compleja. Por esta razón se realiza un análisis de los datos históricos y se propone un método para si-

mular posibles producciones de potencia eólica para un período de corto plazo. Partiendo de la simulación de los posibles errores y luego utilizando estos como una semilla, se consiguen las trayectorias de posibles producciones eólicas. Con estos datos, es posible realizar estimaciones en la incertidumbre asociadas a un nivel de probabilidad.

La cuantificación de los posibles desvíos de la energía y la definición de los intervalos de predicción son necesarios para conseguir una operación apropiada del sistema eléctrico a través del dimensionamiento de los elementos de almacenaje, del desarrollo de programas de reservas y de estrategias de mercado, además de otros problemas de operación.

3.2. Consideraciones

3.2.1. Caso de estudio

Para el caso de estudio, se utiliza un conjunto de datos de un parque eólico, disponiendo de la producción de potencia eólica, hora a hora, y la previsión de esta, hecha h horas antes, durante dos años consecutivos. La predicción para la potencia generada por el parque eólico fue obtenida a través de un sistema de predicción a corto plazo, basado en modelos estadísticos que utilizan como datos de entrada predicciones de velocidad y dirección del viento, además de medidas de potencia generada en los parques [48, 49]. Con este conjunto de datos son calculados los errores en el modelo de predicción y la matriz de covarianzas a diferentes horizontes temporales.

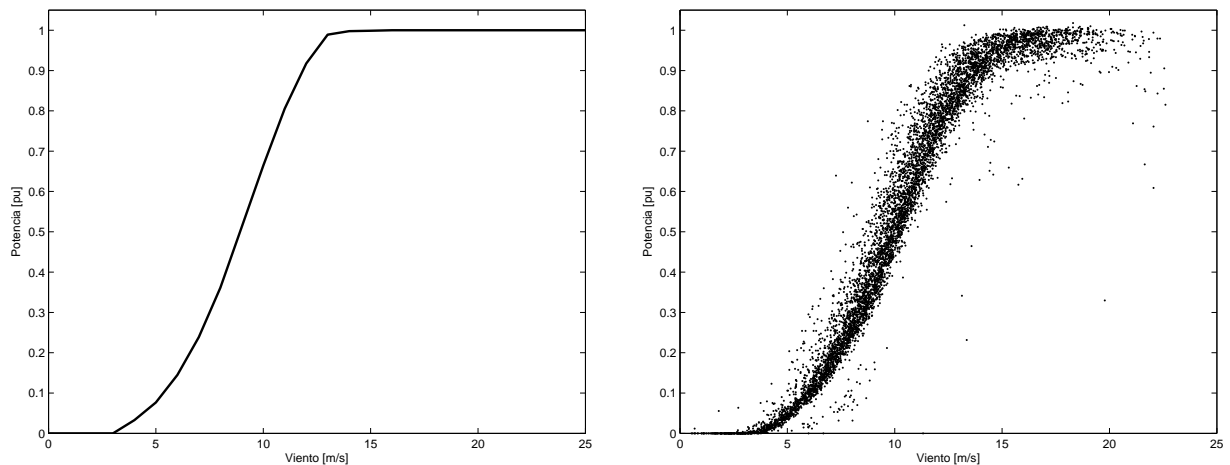
Todos los datos utilizados fueron normalizados con la potencia nominal del parque. Se dispone de 18.937 medidas de producción eólica y las predicciones para cada una de éstas. Sin embargo, no todos los datos son válidos, debido a interrupciones en el funcionamiento del parque o de la herramienta de predicción, por lo tanto son aplicados filtros para aprovechar la mayor cantidad de datos e información posibles.

3.2.2. Incertidumbre en la producción de potencia eólica

La relación entre la velocidad del viento y potencia producida en un generador eólico está dada por la siguiente ecuación:

$$p = \frac{1}{2} \rho A v^3 C_{Pe} \quad (3.1)$$

Donde A es el área que abarca las aspas al girar en $[m^2]$, v es la velocidad del viento en $[m/s]$, ρ es la densidad del viento en $[Kg/m^3]$ y $C_{Pe}(v)$ es el *coeficiente de potencia eléctrico* que relaciona el rendimiento mecánico y eléctrico del aerogenerador [50]. Los constructores de generadores eólicos utilizan túneles de viento para mantener las condiciones constantes y caracterizar sus



(a) Curva típica de un generador eólico en un túnel de viento. (b) Curva real de un generador eólico en un parque.

Figura 3.1.: Relación de la velocidad del viento y la potencia producida por un generador eólico.

productos, un ejemplo de esto es mostrado en la figura 3.1(a) [49], que corresponde de forma muy cercana a la representación matemática, ecuación (3.1). Sin embargo, en la figura 3.1(b) [49], se puede observar una familia de puntos que corresponde a la velocidad del viento frente a la potencia de salida de un generador eólico. En esta gráfica se puede ver que para una misma velocidad de viento, existen varios valores de potencia producida. Con esto se podría asegurar que aún contando con una predicción perfecta de la velocidad de viento, y si se basara en ésta, siempre se tendrían errores o desvíos, debido a que hay factores como la energía del viento y la dirección del mismo que pueden cambiar de forma instantánea y afectan considerablemente la potencia de salida de los aerogeneradores. Adicionalmente, si se consideran los fallos en los aerogeneradores o incluso las salidas por mantenimiento, hacen aún más compleja la tarea de realizar estimaciones para parques eólicos y zonas donde se concentren un grupo de ellos.

3.2.3. Relación entre la producción y la predicción de potencia eólica

En la figura 3.2 se observa un ejemplo del problema de la incertidumbre en la predicción eólica. La línea vertical en el tiempo cero representa el tiempo presente, hacia la izquierda se encuentran los datos históricos, producciones y sus respectivas predicciones, estas últimas no dibujadas; a la derecha de la línea vertical, se encuentra la predicción para el horizonte futuro representada con una línea continua y la producción real del parque, representada con la línea continua con círculos. En esta figura se pueden observar los desvíos entre la predicción y la producción real, en términos de potencia para cada hora y, adicionalmente, el área entre las dos curvas, representa los desvíos en términos de energía. Los datos utilizados para la figura 3.2

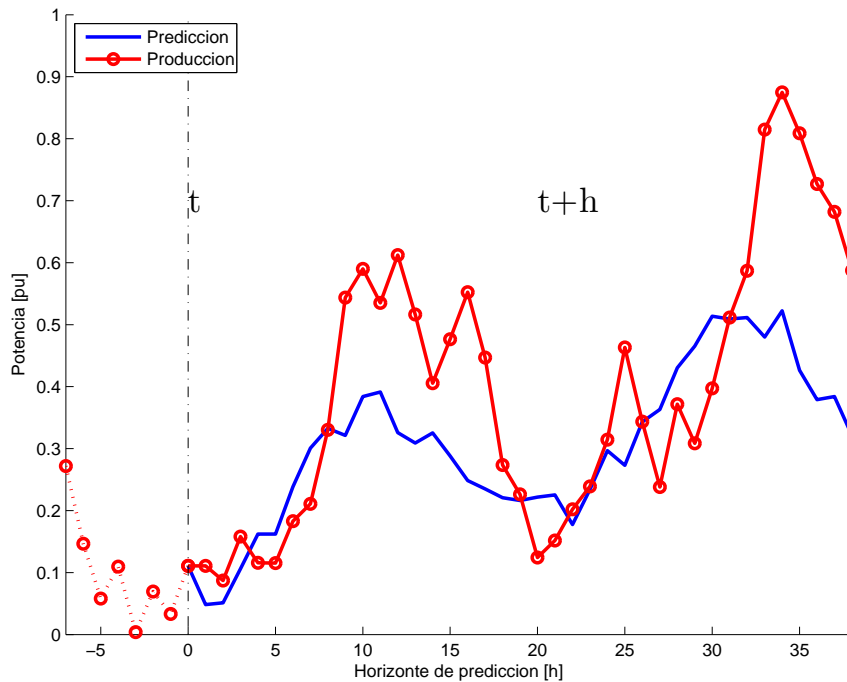


Figura 3.2.: Predicción ($\hat{p}_{t+h|t}$), y producción (p_{t+h}), de la potencia eólica, donde $t+h|t$ se refiere a la predicción hecha para la hora $t+h$ en el tiempo t , y $h = [1, 2, \dots, H]$

corresponden al caso de estudio descrito en la sección 3.2.1.

En la figura 3.3, es utilizada la representación de diagrama de caja, en inglés «box plot», para mostrar cómo se relaciona la predicción con la producción de potencia eólica. Para este caso en particular fueron tomados todos los datos históricos, para el horizonte de predicción $h = 18[h]$. Con el diagrama de caja se puede identificar la simetría y la forma de la distribución de los datos. Para valores de predicción bajos y altos se puede observar que los datos están concentrados y que tienen una forma asimétrica. Los datos atípicos son representados con cruces y se justifica la presencia mayoritaria de estos en los niveles bajos de potencia, debido a que el rango de operación del parque eólico comúnmente no supera el 80% de su capacidad nominal. Para predicciones entre 0.5 y 0.6 por unidad, los datos son casi simétricos y están menos concentrados. Estas características generales son habituales en la relación entre la predicción y la producción, para todos los horizontes de predicción.

Como características de la relación entre la predicción y la producción se puede considerar:

- La varianza incrementa con el horizonte de predicción h .
- Existe una covarianza diferente de cero entre los horizontes h y $h+i$.
- La varianza está relacionada con el horizonte de predicción, h , y la predicción, $\hat{p}_{t+h|t}$.

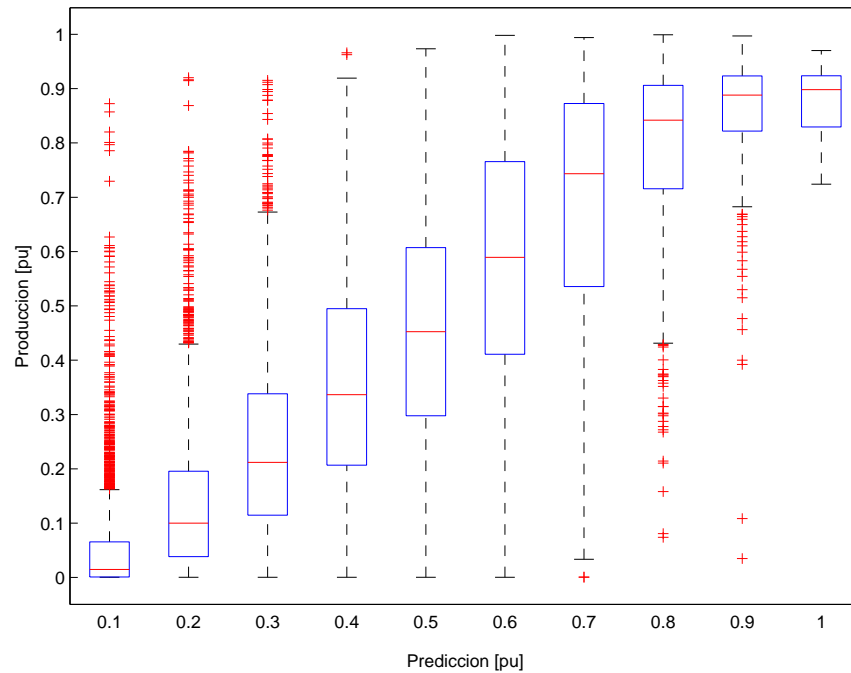


Figura 3.3.: Relación de la predicción y la producción de potencia eólica usando un diagrama de cajas.

- Para predicciones bajas y altas los datos se agrupan de forma asimétrica y están concentrados.
- Para predicciones entre 0.5 y 0.6 por unidad, los datos son casi simétricos y no están concentrados

El uso de la función Beta para la representación de la producción eólica está justificado porque se ajusta de una forma más adecuada al comportamiento de la variable. Está acotada entre $[0, 1]$, su comportamiento es no-lineal y la distribución de los datos depende del valor de los parámetros que la condicionan, haciendo que sea una buena aproximación para el problema considerado [47, 51, 52, 53].

Distribución Beta

En la teoría de la probabilidad y la estadística, la distribución Beta pertenece a la familia de las distribuciones continuas, es definida en el intervalo $[0, 1]$ y parametrizada por dos números positivos que generalmente son denotados por α y β , cuya función de densidad es la ecuación (3.2), donde B es la función Beta.

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad (3.2)$$

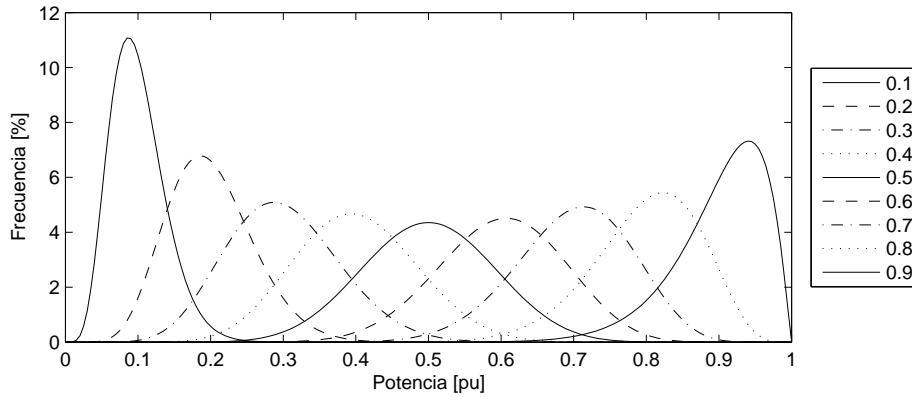


Figura 3.4.: Aproximación de la producción de potencia eólica a diferentes niveles de predicción, usando la distribución Beta

El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria X con distribución Beta es:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (3.3)$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)} \quad (3.4)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (3.5)$$

La figura 3.4 muestra un ejemplo del comportamiento de la producción de potencia eólica, a ser representada por la distribución Beta. Para este ejemplo, han sido dibujadas diferentes curvas y cada una de ellas fue parametrizada con el valor medio de la predicción y la varianza asociada a ésta [47].

3.2.4. Relación entre los errores y el horizonte de predicción

En la figura 3.5, están dibujados los errores relativos de la predicción respecto a la producción real, mostrados en la figura 3.2. En esta figura se puede observar que la varianza del error aumenta con el horizonte de predicción, por lo que se pueden ver magnitudes mayores de los errores a horizontes mayores. También se aprecia que el error depende del nivel de potencia prevista, por ejemplo para los horizontes $h = 22[h]$ al y $h = 25[h]$ donde el nivel de potencia prevista está dentro de 0.2 y 0.3 por unidad, los errores son considerablemente pequeños. Para los horizontes $h = 33[h]$ y superiores, donde la potencia prevista es cerca al 0.5 por unidad, la magnitud de los errores es mayor. Adicionalmente, se puede asegurar que existe una covarianza diferente de cero entre los errores de predicción para horizontes h y $h + i$, tal como es mostrado

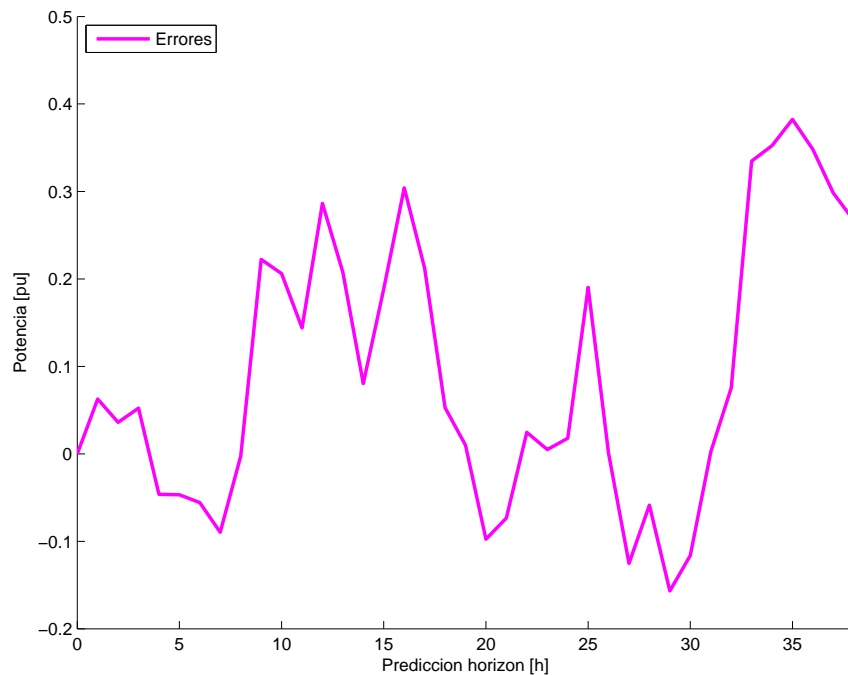


Figura 3.5.: Errores entre la predicción y producción de la potencia eólica, donde $\hat{e}_{t+h|t} = p_{t+h} - \hat{p}_{t+h|t}$.

más adelante en la figura 3.7(a). Los datos utilizados para la figura 3.5 corresponden al caso de estudio descrito en el comienzo del capítulo.

En la figura 3.6, se dibuja la relación entre el horizonte de predicción y la magnitud de los errores en la predicción. Para este diagrama de caja fueron utilizados todos los datos históricos del caso de estudio descrito al comienzo del capítulo. En este caso se puede observar como característica general, que la varianza en la magnitud de los errores aumenta con el horizonte de predicción. Adicionalmente se puede asumir que la distribución de los errores, para cada horizonte de predicción, es aproximadamente simétrica y puede ser representada como una distribución Normal.

Como características generales para los errores en la predicción de potencia eólica se puede considerar:

- La varianza incrementa con el horizonte de predicción h .
- Existe una covarianza diferente de cero entre los horizontes h y $h + i$.
- Para cada horizonte de predicción h , la distribución de los errores pueden ser aproximados a una distribución Normal.

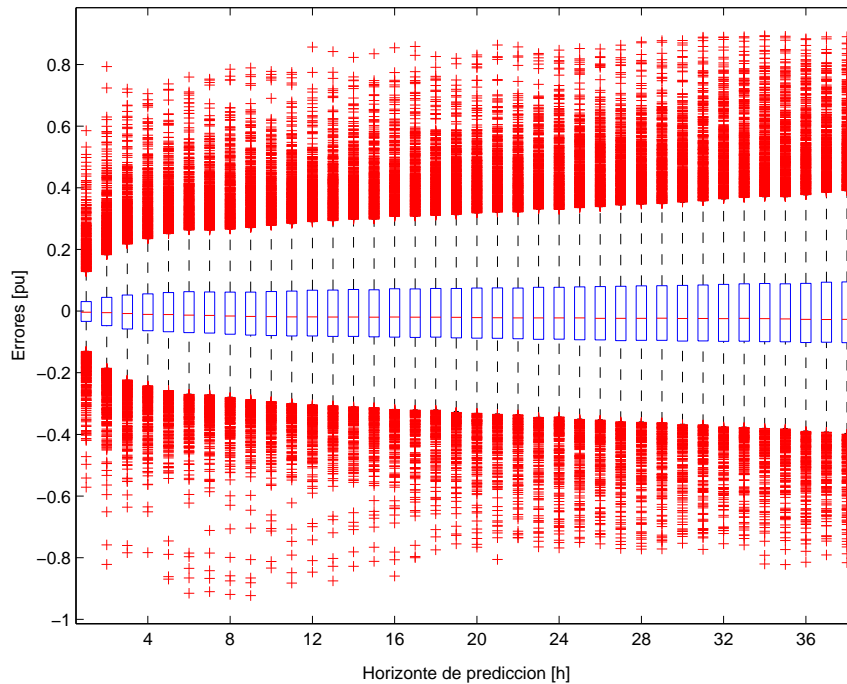


Figura 3.6.: Relación de la predicción eólica y la producción usando un diagrama de cajas.

Distribución Normal

En estadística y probabilidad se llama distribución Normal, distribución de Gauss o distribución Gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece en fenómenos reales.

Función de densidad Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución Normal de parámetros μ y σ y se denota $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

Donde μ (mu) es la media y σ (sigma) es la desviación típica (σ^2 es la varianza).

Se llama «Distribución Normal Estándar» a aquella en la que sus parámetros toman los valores $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. En este caso la función de densidad tiene la siguiente expresión:

$$f(x) = f_{0,1}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

Función de distribución La función de distribución de la distribución Normal está definida como sigue:

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{\mu,\sigma^2}(u) du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

Por tanto, la función de distribución de la Normal estándar es:

$$\Phi(x) = \Phi_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.9)$$

3.3. Método propuesto

Para realizar una simulación directa de los posibles trayectorias de producción de potencia eólica, sería necesario una variable Beta multivariante de dimensión H . Esta tarea es complicada, puesto que se parte de modelar la covarianza de los horizontes de predicción h y $h+i$, que están condicionados al nivel de potencia. Idealmente sería necesaria una cantidad de datos históricos infinita donde se pueda relacionar todos los niveles de producción a diferentes horizontes de predicción.

Por esta razón, se partió del análisis de los errores para diferentes horizontes de predicción, donde se dispone de suficiente información. Utilizando una variable Normal multivariante de dimensión H , es posible simular los errores y luego utilizar estos como las semillas para la generación de trayectorias de producción eólica, las cuales serán condicionadas para el nivel de potencia prevista y la varianza asociada teniendo en cuenta el horizonte de predicción.

3.3.1. Secuencia de los pasos desarrollados

Para conseguir la simulación de trayectorias de producción de potencia eólica fueron realizados los siguientes pasos, que más adelante serán explicados de una forma más amplia.

- Simulación de los errores:
 - Cálculo de los errores en la predicción a partir de los datos históricos.
 - Cálculo de la matriz de covarianza de los errores en la predicción para diferentes horizontes, Σ_t .
 - Simulación de los errores usando un generador de números aleatorios Normal multivariante, $X_h^{(s)} \sim \mathcal{N}_h(\mu_0, \Sigma_t)$.
- Simulación de la producción de potencia eólica, condicionado a h y $\hat{p}_{t+h|t}$.
 - Transformación estadística.
 - Trayectorias de errores \rightarrow Trayectorias de potencia eólica.

- Normal multivariante \Rightarrow Beta condicional univariante.
- $\text{beta}(\hat{\alpha}_{t,h}, \hat{\beta}_{t,h}) \rightarrow \hat{\alpha}_{t,h}(\hat{\mu}_{t,h}, \hat{\sigma}_{t,h}^2)$ y $\hat{\beta}_{t,h}(\hat{\mu}_{t,h}, \hat{\sigma}_{t,h}^2)$
donde $\hat{\mu}_{t,h} = \hat{p}_{t+h|t}$ y $\hat{\sigma}_{t,h}^2 = \hat{\sigma}^2(h, \hat{p}_{t+h|t})$
- Resultados
 - Intervalos de predicción de potencia eólica
 - Posibles desvíos de energía eólica

3.3.2. Simulación de los errores

Los errores en la predicción son calculados como la diferencia entre la potencia producida y las predicciones hechas con anterioridad para cada período de producción. La información requerida consiste en la medida de la potencia eólica del parque, hora a hora, y las predicciones hechas en el pasado con la herramienta de predicción para cada hora, calculada h horas antes:

$$\begin{aligned} \hat{e}_{t+h|t} &= p_{t+h} - \hat{p}_{t+h|t} \quad \forall t, h \\ \varepsilon_t &= [\hat{e}_{t|t-1}, \hat{e}_{t|t-2}, \dots, \hat{e}_{t|t-H}]^T \quad \forall t, h \end{aligned} \quad (3.10)$$

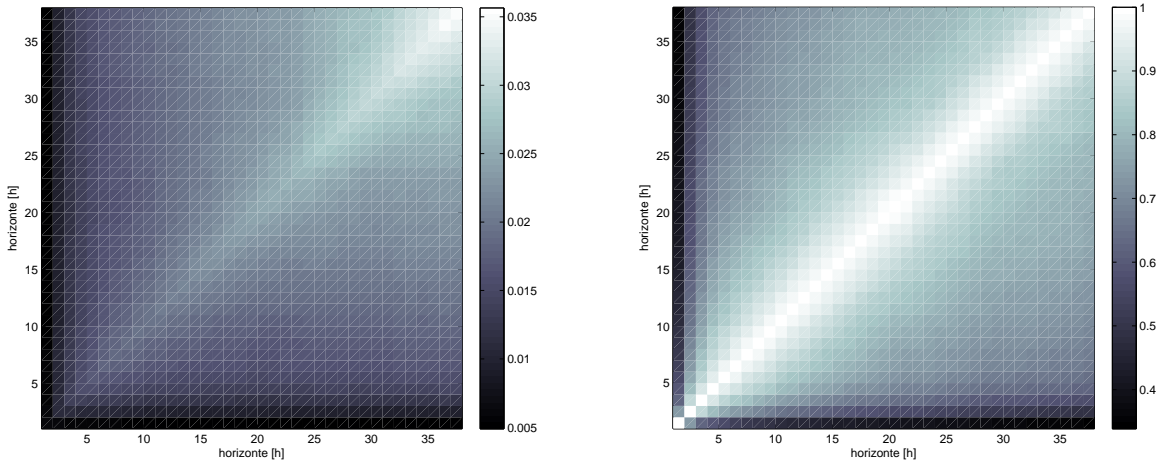
Donde la notación $t+h|t$ se refiere a las predicciones hechas para la hora $t+h$ en la hora t ; y $h = [1, 2, \dots, H]$. La información presente en los errores históricos es concentrada en el cálculo de la matriz de covarianza Σ_t , ecuación (3.10).

Los errores para cada instante h , pueden ser representados como una distribución Normal [46, 54]. Sin embargo, la distribución de errores condicionada por el valor de la previsión no lo es [53].

$$\Sigma_t = (\varepsilon_t \varepsilon_t^T) \quad (3.11)$$

La matriz de covarianza concentra la información presente de los errores históricos. Para este caso es utilizado un cálculo estacionario, sin embargo puede ser actualizada con datos nuevos tal como se hace en [14]. La figura 3.7(a) representa la matriz de covarianza calculada con todos los datos históricos del caso de estudio, al igual que la figura 3.7(b), que representa la matriz de correlación de los errores en la previsión, lo que permite ver la relación lineal entre cada uno los diferentes horizontes h .

La estrategia propuesta estima los desvíos de energía y potencia a corto plazo a través de una función condicionada que se acerca lo más posible al comportamiento de la distribución conjunta de los errores en la predicción. Para esto, son simulados los posibles errores de la producción futura como trayectorias de las que se quiere obtener el comportamiento de la variable real respecto a la predicción. Luego es aplicada una transformación para pasar las trayectorias de los



(a) Matriz de covarianza.

(b) Matriz de correlación.

Figura 3.7.: Análisis de los errores históricos en la predicción eólica.

errores por medio de una distribución Beta condicionada para cada horizonte, que finalmente representa las posibles trayectorias de producción de potencia eólica. Un esquema de los pasos principales en la transformación estadística es mostrado en la figura 3.8.

Usando un generador de números aleatorios Normal Multivariante, es creada una variable de dimensión H , que simula el comportamiento de los errores en la previsión, $X_h^{(s)}$, ecuación (3.12).

$$X_h \sim \mathcal{N}_h(\mu_0, \Sigma_t) \quad (3.12)$$

Con μ_0 , media cero, y Σ_t , como la matriz de covarianzas de los errores históricos. De esta forma son generados s veces, posibles trayectorias de los errores en la predicción. La variable X_h mantiene la estructura e incertidumbre de los errores, según los datos históricos.

3.3.3. Simulación de la producción eólica

Por simplicidad, la predicción de los errores es asumida como estacionaria de segundo orden y con media cero. De acuerdo al anterior supuesto, es aplicada una transformación estadística pasando de una distribución Normal conjunta a una distribución condicional Beta. Para este proceso son requeridos dos pasos, primero el paso de una distribución Normal a una variable con distribución Uniforme, ecuación (3.13).

$$Y_h^{(s)} = F(X_h^{(s)} | \mu_h, \sigma_h) \quad \forall s, h \quad (3.13)$$

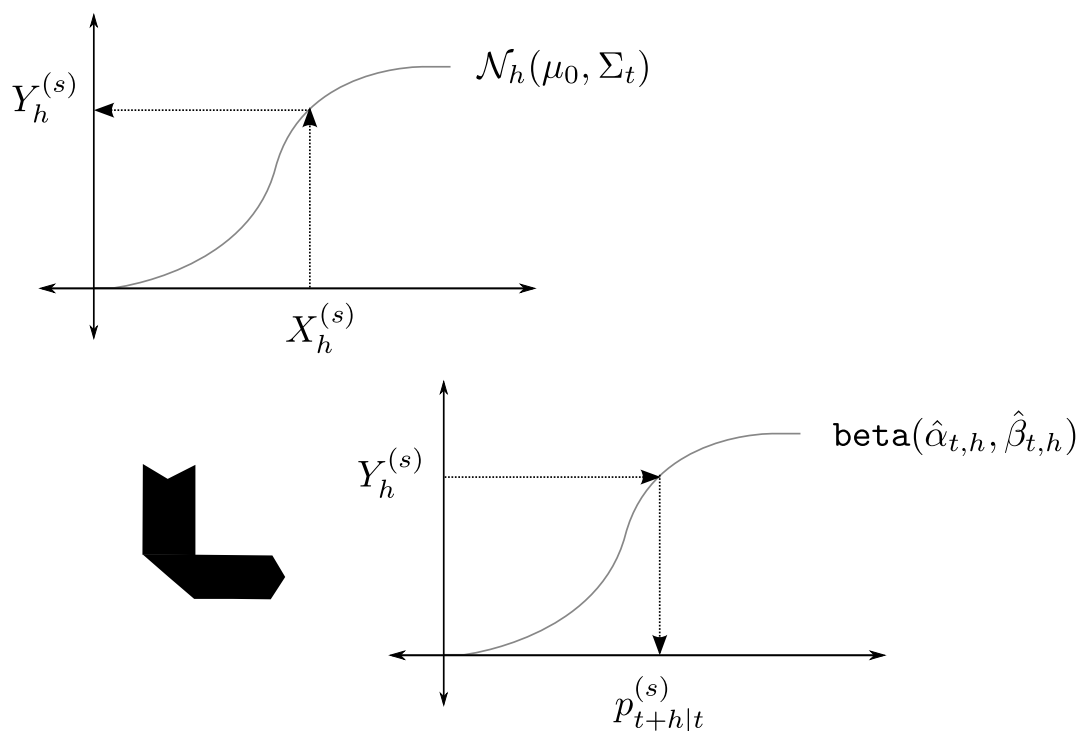


Figura 3.8.: Esquema de la transformación estadística para generar trayectorias.

Donde μ_h es un vector de ceros y σ_h es el vector que contiene la desviación estándar de los errores en la predicción, $\text{std}(\hat{\epsilon}_{t|t-h})$. La variable con distribución Uniforme puede ser considerada como una semilla aleatoria de los errores simulados, para luego obtener la producción de potencia eólica mediante distribución condicionada Beta, ecuación (3.14).

Las trayectorias simuladas de producción de potencia eólica para el período futuro, $p_{t+h|t}^{(s)}$, son representadas usando una distribución Beta, y son obtenidas en la segundo paso de la transformación:

$$p_{t+h|t}^{(s)} = F^{-1}(Y_h^{(s)} | \hat{\alpha}_{t,h}, \hat{\beta}_{t,h}) \quad \forall s, h \quad (3.14)$$

En la ecuación (3.14), los parámetros de la distribución condicionada Beta, $\hat{\alpha}_{t,h}$ y $\hat{\beta}_{t,h}$ son calculados en función de $\hat{\mu}_{t,h}$ y $\hat{\sigma}_{t,h}^2$, como es mostrado en las ecuaciones (3.15) y (3.16).

$$\hat{\alpha}_{t,h} = \hat{\mu}_{t,h} \left(\frac{\hat{\mu}_{t,h} (1 - \hat{\mu}_{t,h})}{\hat{\sigma}_{t,h}^2} - 1 \right) \quad \forall h \quad (3.15)$$

$$\hat{\beta}_{t,h} = (1 - \hat{\mu}_{t,h}) \left(\frac{\hat{\mu}_{t,h} (1 - \hat{\mu}_{t,h})}{\hat{\sigma}_{t,h}^2} - 1 \right) \quad \forall h \quad (3.16)$$

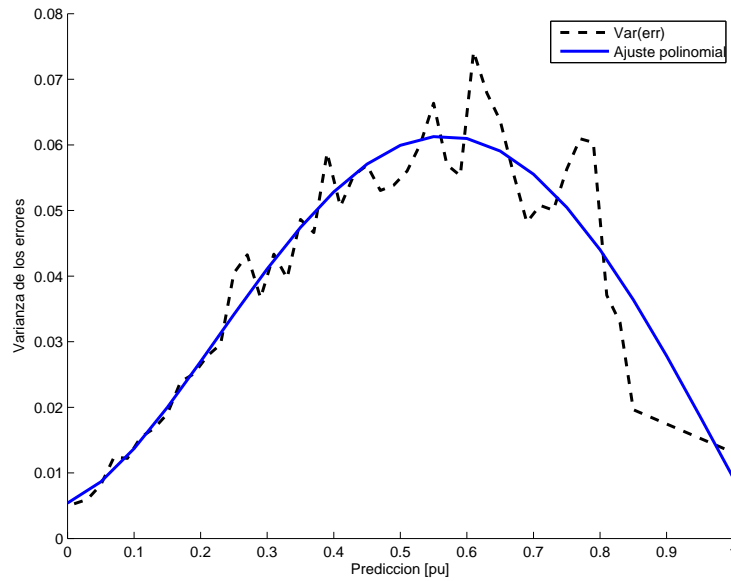


Figura 3.9.: Función para el cálculo aproximado de la varianza de los errores, considerando el nivel de predicción y el horizonte ($h = 28$).

Donde el valor medio es considerado como la producción esperada para el futuro, predicción, $\hat{\mu}_{t,h} = \hat{p}_{t+h|t}$.

La varianza de los errores es calculada, para cada horizonte h , como un polinomio de cuarto orden en función de la potencia prevista, $\hat{\sigma}_{t,h}^2 = \sigma^2(h, \hat{p}_{t+h|t})$, y el horizonte de predicción. Este polinomio es obtenido por medio de la técnica de los mínimos cuadrados, usando los datos históricos. Para cada horizonte h , se tomaron intervalos de 0.02[pu] de potencia producida (el último intervalo es más grande debido a que el rango de operación del parque eólico usualmente no supera el 85% de su capacidad). Para cada uno de los intervalos se calcula la varianza de los errores de la predicción y finalmente se ajusta la curva [13]. Un ejemplo de este proceso se puede ver en la figura 3.9.

3.4. Resultados

En el instante t se tiene la matriz de covarianza de los errores, Σ_t , y la predicción de la potencia eólica, $\hat{p}_{t+h|t}$. El horizonte de predicción ha sido escogido como $H = 38$ horas, teniendo como referencia la regulación española, donde los agentes deben informar al OM la estimación de la producción de un día (24 horas) 14 horas antes [22]. Para el análisis propuesto, son simulados 10,000 escenarios para cuantificar la incertidumbre de la predicción. El método propuesto es rápido en lo que respecta a cálculo numérico, por lo que para otro tipo de análisis el número de escenarios podría ser incrementado.

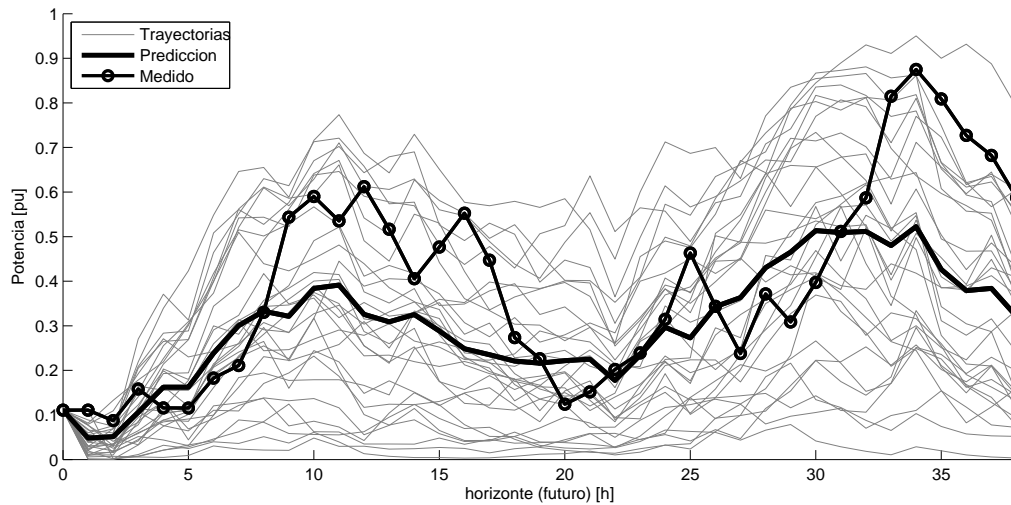


Figura 3.10.: Trayectorias posibles, producción y predicción de la potencia eólica

Basados en las trayectorias simuladas, son calculados los posibles desvíos de energía y los intervalos en la predicción.

3.4.1. Simulación de trayectorias

En la figura 3.10 son dibujadas sólo treinta del total de las trayectorias simuladas, $p_{t+h|t}^{(s)}$; la predicción de la potencia eólica, $\hat{p}_{t+h|t}$; y la producción real, p_{t+h} . Cada trayectoria sigue una secuencia que hereda la interrelación de los errores. Esto quiere decir que cada punto de las trayectorias depende de su valor anterior, de la varianza de los errores históricos y del valor de la potencia prevista.

En la figura 3.11, son dibujados los intervalos de predicción obtenidos a partir de todas las trayectorias simuladas. Éstas son representadas como bandas; adicionalmente es dibujada la previsión de potencia obtenida con la herramienta de predicción, $\hat{p}_{t+h|t}$; y la producción real, p_{t+h} . Cada banda representa la probabilidad que tiene la producción de potencia eólica futura de estar dentro de los valores comprendidos por el área de ésta en cada instante h . La banda de mayor área corresponde al 90 % y sobre ésta, conteniéndola, está la banda del 80 %, siendo un poco más estrecha y oscura. Continúa de esta forma hasta llegar a la banda del 10 %, siendo la más estrecha y oscura de todas ellas. Lo cual quiere decir, que cuanto menor sea el área de la banda, menor será la probabilidad de que la producción de potencia eólica esté dentro de ésta.

La principal ventaja de la metodología propuesta es la simplicidad para conseguir las trayectorias simuladas y la posibilidad de cuantificar la incertidumbre en la predicción de la potencia eólica, considerando la relación abstraída de los datos históricos que hay entre los errores en la

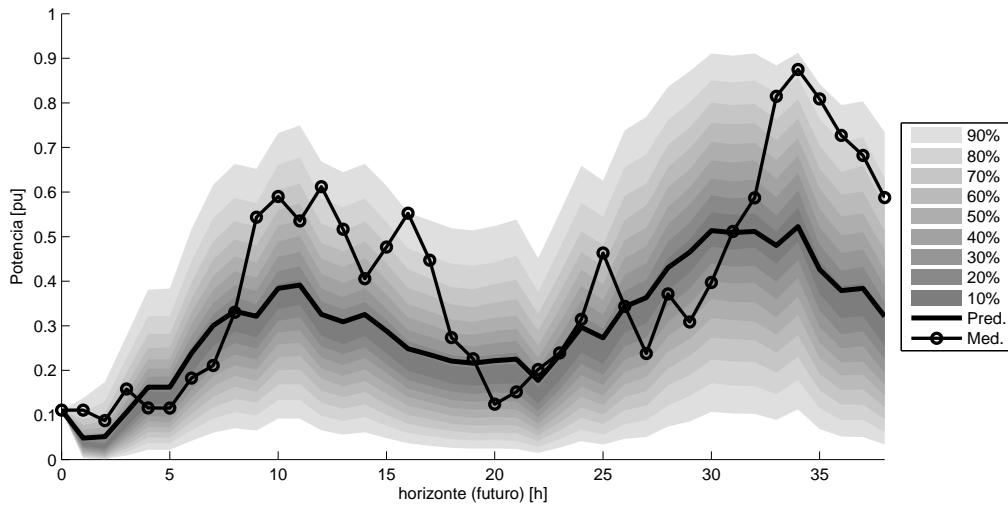


Figura 3.11.: Intervalos de predicción basados en la simulación de trayectorias

previsión y la producción de la potencia eólica.

3.4.2. Desvíos de energía

Debido a la incertidumbre de la previsión de potencia eólica es necesario reservar una cantidad de energía para cubrir los desvíos entre el programa previsto y la energía que es finalmente generada. La cantidad de energía reservada, en algunos casos, es sobre dimensionada o calculada de forma heurística con la intención de evitar problemas en la operación. Sin embargo, estas estrategias conservadoras hacen que los recursos no sean aprovechados de una forma adecuada y en algunos casos son desperdiciados recursos energéticos.

Se usan las trayectorias simuladas para obtener el desvío de energía respecto a la previsión, obteniendo las magnitudes de los desvíos y la frecuencia con que estos ocurren. Estos desvíos son calculadas como la integral de la diferencia entre la predicción de la potencia eólica y cada uno de las trayectorias simuladas, ecuación (3.17). Para este cálculo son consideradas solamente las últimas 24 horas del horizonte simulado, $h_1 = 15$ y $h_2 = 38$, tomando como referencia la regulación del mercado en España, donde son realizadas las ofertas. La figura 3.12 muestra el histograma de los posibles desvíos de energía, además en la tabla 3.1, son presentados algunos de los percentiles de la muestra. Con esta información es posible determinar la cantidad de energía a reservar en función de su probabilidad.

$$E^{(s)} = \int_{h_1}^{h_2} (p_{t+h|t}^{(s)} - \hat{p}_{t+h|t}) dh \quad \forall s \quad (3.17)$$

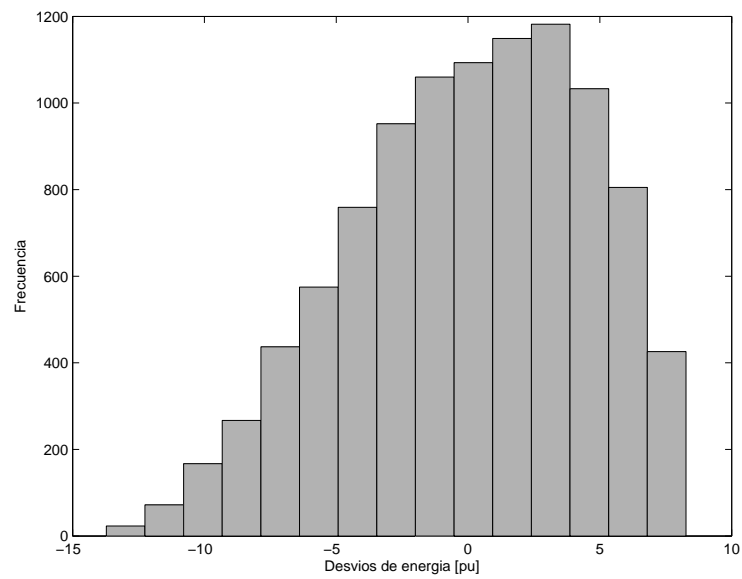


Figura 3.12.: Desvíos de energía para un período de 24h

Tabla 3.1.: Percentiles de los desvíos de energía

Percentiles	Desvíos
0 %	-13.72
10 %	-6,29
20 %	-4,01
30 %	-2,36
40 %	-0,95
50 %	0,43
60 %	1,71
70 %	2,94
80 %	4,23
90 %	5,67
100 %	8.27

La información obtenida a través de los desvíos de energía, usando las trayectorias simuladas, es suficiente para tomar decisiones asociadas a un nivel de confianza.

La principal ventaja asociada a los resultados obtenidos es que las trayectorias usadas, consideran los errores de una forma conjunta, tal y como se comporta la variable real. En los desvíos de energía, figura 3.12, se aprecia de forma clara que los valores más frecuentes son cercanos al desvío nulo, lo que indica que los errores se compensan en la mayoría de los casos.

3.5. Validación del método

3.5.1. Seguimiento de la estructura de los errores

Como validación al procedimiento del método, se calculan los errores de las trayectorias simuladas, $p_{t+h|t}^{(s)}$, respecto a la predicción de la potencia eólica, $\hat{p}_{t+h|t}$. Con esta información se obtienen la matriz de correlación de los errores de los datos simulados, figura 3.13, comparado de forma gráfica con los de la matriz obtenida de los datos históricos, figura 3.7(b). Es posible ver que las correlaciones mantienen las mismas estructuras y las magnitudes son muy similares. De forma adicional, son calculados: el mayor desvío, el menor desvío, el promedio y la desviación estándar, entre los elementos de las matrices de correlación de datos históricos y simulados, para tener una idea de su diferencia.

$$\begin{aligned} \text{máx} \left(\text{corr}(\varepsilon_t) - \text{corr} \left(\varepsilon_{t+h|t}^{(s)} \right) \right) &= 0,0751 \\ \text{mín} \left(\text{corr}(\varepsilon_t) - \text{corr} \left(\varepsilon_{t+h|t}^{(s)} \right) \right) &= 0,0000 \\ \text{std} \left(\text{corr}(\varepsilon_t) - \text{corr} \left(\varepsilon_{t+h|t}^{(s)} \right) \right) &= 0,0133 \\ \text{promedio} \left(\text{corr}(\varepsilon_t) - \text{corr} \left(\varepsilon_{t+h|t}^{(s)} \right) \right) &= 0,0189 \end{aligned}$$

3.5.2. Verificación de la generación de escenarios de producción eólica

Para validar que la generación de las trayectorias es correcta desde el punto de vista estadístico, son utilizados los datos históricos y es aplicado el método de forma inversa. En otras palabras, lo que se busca es aplicar la inversa de la transformación estadística a los datos de producción eólica, y como resultado se debe obtener una variable aproximadamente Uniforme. Un esquema de esta transformación es mostrado en la figura 3.14

En el segundo paso de la transformación estadística, sección 3.3.3, es verificado si respeta la distribución marginal de los datos utilizados como entrada. Si la distribución marginal de datos

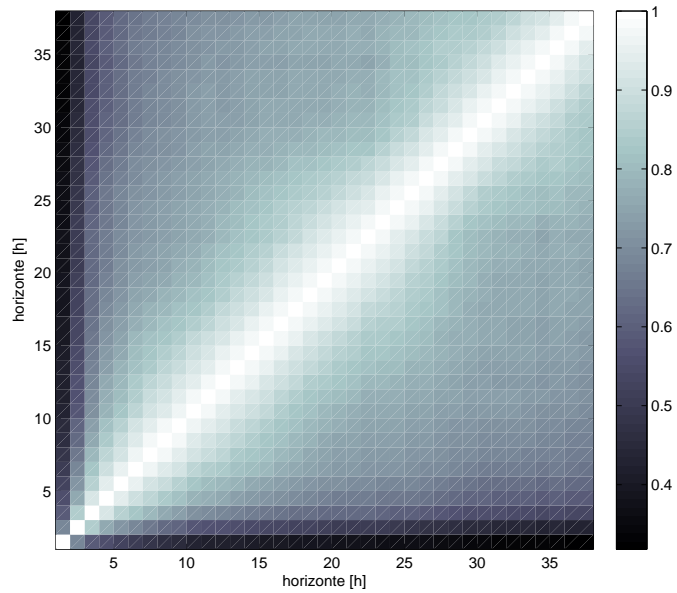


Figura 3.13.: Matriz de correlación, análisis de los errores para las trayectorias simuladas

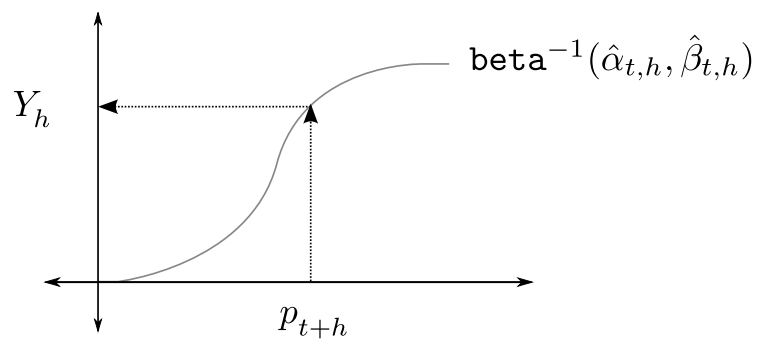


Figura 3.14.: Esquema de la transformación estadística para verificar el método propuesto

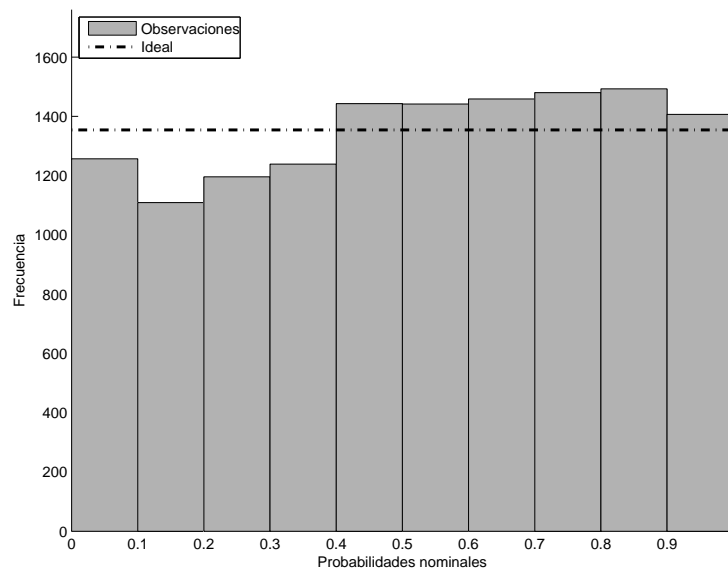


Figura 3.15.: Validación del método propuesto para generar trayectorias de producción eólica.

de entrada no es confiable, las trayectorias generadas tampoco serían confiables. La confiabilidad del método es comprobada si la distribución de los datos obtenidos por la transformación inversa están cercanos a los de una variable con distribución Uniforme. Después de aplicar a todos los datos históricos la transformación inversa, el resultado obtenido es mostrado en el histograma de la figura 3.15. Con una línea horizontal discontinua, se marca el resultado ideal. La distribución de datos obtenida es bastante buena, incluso comparada con un caso obtenido a partir de un generador de números aleatorios Uniforme.

3.6. Conclusiones

La metodología presentada permite el cálculo de los posibles errores en la predicción de la producción de potencia eólica a través de trayectorias simuladas. Como base se ha tomado la interdependencia de los errores en la previsión, extraída de los datos históricos.

Se consiguió replicar la incertidumbre del comportamiento de la producción de potencia eólica con la simulación de las trayectorias. La principal ventaja del método es que cada punto en las trayectorias depende de los valores de los puntos previos y del valor de la predicción de la potencia eólica, recreando de esta forma la naturaleza de la variable original. Esto hace posible modelar el comportamiento no lineal y la asimetría de la producción de potencia eólica.

El cálculo de las trayectorias simuladas es muy prometedor ya que permite la obtención de los posibles desvíos de energía y los intervalos de predicción, facilitando la comprensión del comportamiento de la producción de la energía eólica y la relación con su predicción.

La información conseguida es útil para calcular el funcionamiento óptimo de los centros de control de energías renovables, para diseñar estrategias de inversión, para calcular el funcionamiento óptimo de los sistemas con capacidad de almacenamiento y resuelve entre otros problemas de operación.

Nota

Resultados preliminares del trabajo presentado en este capítulo fueron publicados en la «Conferencia Hispano-Lusa de Ingeniería Eléctrica (11CHLIE)¹» [55].

¹<http://www.aedie.org/principal-chlie-es.htm>

4. Desarrollo del problema

Resumen

En el presente capítulo se desarrolla una propuesta del uso del almacenamiento de energía por medio de una planta hidráulica reversible con la intención de mitigar los desvíos de un productor eólico debido a la incertidumbre en la predicción de la potencia eólica.

Se plantea primero un problema para obtener el programa óptimo de la planta hidráulica reversible que funciona de forma independiente, luego es modificado el problema original para introducir la cobertura de los desvíos de potencia y las reservas necesarias de energía para asegurar el cumplimiento del programa informado con antelación del productor eólico. El programa obtenido es puesto a prueba analizando la producción real de la planta.

Finalmente son calculados y analizados los costos de los programas planteados para los agentes y los beneficios al operar de forma conjunta. Para este análisis son considerados diferentes perfiles típicos de precios y producciones.

4.1. Introducción

Para aumentar la penetración de la generación eólica en los sistemas eléctricos se debe considerar la incertidumbre asociada al viento, ya que al ser una fuente variable con dificultad de predicción puede hacer inestable el sistema eléctrico. Cuando hay variaciones repentinas en la velocidad del viento se producen cambios en la potencia eólica esperada, lo cual puede afectar el equilibrio del sistema eléctrico, y más aún cuando la penetración de potencia eólica es alta. Por otro lado los costos de la operación del sistema aumentan, en la medida que es necesario compensar los desvíos en la producción utilizando el mercado de reservas. Para mitigar la incertidumbre en la predicción son utilizados los dispositivos de almacenamiento de energía, que permiten almacenar en cada instante toda la sobreproducción de energía y luego aprovechar ésta de forma controlada cuando el sistema lo requiere, mitigando de esta forma los desvíos y beneficiándose de la energía de una forma eficiente.

Sobre el almacenamiento se han venido desarrollando nuevas tecnologías y mejorando las existentes, sin embargo, para el estado actual de desarrollo, la opción más práctica y rentable para

almacenar la energía eólica son las plantas de generación hidráulicas reversibles [56, 57], debido a su eficiencia, capacidad de control y sus características de almacenamiento. Adicionalmente, muchas de estas plantas ya existen en España lo cual no involucra instalar una nueva infraestructura, en otros casos, es posible modificar embalses dedicados al riego, al abastecimiento de agua potable o al uso industrial, lo cual potencia aún más esta alternativa [19].

4.2. Consideraciones

Para encontrar el programa de operación óptima conjunta de una planta hidráulica reversible y un generador eólico se parte del planteamiento individual de la planta hidráulica reversible, y luego es este modificado para que cubra los desvíos del productor eólico y consiga el programa de operación apropiado.

Se analizará en este trabajo la programación futura a corto plazo. Se considerará una predicción perfecta del precio de la energía en el mercado y como fuentes de incertidumbre solo se introduce la potencia eólica producida. La predicción perfecta del precio no es posible, sin embargo, la predicción a corto plazo del precio de la energía tiene una menor incertidumbre comparada con la producción de potencia eólica [16, 5]. Los precios de la energía utilizados se refieren a unidades monetarias, [um], y los resultados se compararán a modo de porcentajes para dar una idea simple de los beneficios o pérdidas.

Los datos utilizados sobre la predicción y producción eólica son los analizados en el capítulo 3, estos pueden ser vistos en la figura 3.11; estos datos serán tomados como caso base para el desarrollo del problema.

Teniendo como referencia la regulación española, donde los agentes presentan las ofertas al OM, siendo normalmente la estimación de la producción de un día (24 horas), 14 horas antes [22]. Por esta razón, en el planteamiento del problema de optimización, solo se considerarán las últimas 24 horas de programación, mercado diario. El mercado intradiario no será considerado en el presente análisis.

Para los embalses de la planta hidráulica reversible, se presume que no hay aportaciones externas que sean considerables o que afecten el nivel de los embalses. En el problema de optimización, no serán modelados los costos debidos a las paradas y arranques de la planta.

4.3. Operación óptima para una planta hidráulica reversible

El objetivo de este problema es conseguir el programa óptimo que maximice el beneficio de una planta hidráulica reversible que opera de forma independiente. La planta bombea agua para almacenar energía en un embalse en períodos donde el precio de la energía en el mercado es bajo y luego opera como un generador hidráulico, descargando el agua almacenada en períodos donde el precio de la energía es alto [21, 58].

$$\text{máx} \sum_{i=1}^n (c_i \bar{P}_{Hi} - c_{Pi} \bar{P}_{Pi}) \quad (4.1)$$

sujeto a:

$$E_{i+1} = E_i + t \left(\eta_P \bar{P}_{Pi} - \frac{\bar{P}_{Hi}}{\eta_H} \right) \quad (4.2)$$

$$E_1 = E_1^{\text{esp}} \quad (4.3)$$

$$E_{n+1} = E_{n+1}^{\text{esp}} \quad (4.4)$$

$$P_H^l \leq \bar{P}_{Hi} \leq P_H^u \quad (4.5)$$

$$\bar{P}_{Hi} \leq \eta_H \frac{E_i}{t} \quad (4.6)$$

$$P_P^l \leq \bar{P}_{Pi} \leq P_P^u \quad (4.7)$$

$$0 \leq E_i \leq E^u \quad (4.8)$$

$$\forall \quad i = 1, \dots, n$$

Donde:

\bar{P}_{Hi} Potencia hidráulica programada para cada período i .

\bar{P}_{Pi} Potencia programada a consumir por el bombeo en cada período i .

c_i Precio horario de la energía en el mercado.

c_{Pi} Costo horario de la operación de bombeo.

E_i Capacidad de almacenamiento de energía en el embalse.

$E_1^{\text{esp}} \wedge E_{n+1}^{\text{esp}}$ Niveles esperados de energía almacenada en el embalse.

E^u Límite superior de la energía almacenada en el embalse.

η_H Eficiencia del generador hidráulico y el embalse.

η_P Eficiencia de la bomba y las tuberías.

$P_H^l \wedge P_H^u$ Límites de operación, inferior y superior, operando como generador.

$P_P^l \wedge P_P^u$ Límites de operación, inferior y superior, operando como bomba.

t Duración de cada período, en este caso una hora.

n Número de períodos.

En la notación, se marcará con una barra en la parte superior de las variables, « $\bar{}$ », la programación anticipada. Cuando no esté la barra, se referirá al valor real de después de la operación.

Con la función objetivo (4.1) se busca maximizar la cantidad de energía almacenada en períodos de precios bajos, minimizando el costo de operación durante el bombeo y maximizando el beneficio total al vender la energía almacenada en períodos de precios altos. El costo del bombeo será considerado como el costo por comprar energía en el mercado más el costo interno de operación.

En la ecuación (4.2) es calculado el nivel de energía almacenada para el siguiente período, el cual es afectado por la operación de bombeo o de generación. El nivel inicial del embalse es conocido, y el nivel final es el deseado. Para este caso los dos niveles son ajustados al mismo valor, sin embargo, podría tomar valores diferentes; ecuaciones (4.3) y (4.4) respectivamente.

La cantidad de potencia inyectada a la red está determinada por la capacidad física del generador, ecuación (4.5). Adicionalmente, ésta no puede ser mayor a la energía disponible en el embalse considerando la eficiencia de la misma, ecuación (4.6). La cantidad de potencia consumida durante el bombeo también está determinado por la capacidad física de la máquina, ecuación (4.7). Finalmente el embalse está limitado por su capacidad física, ecuación (4.8).

El problema de optimización definido en las ecuaciones (4.1)-(4.8) es resuelto utilizando el Método de Puntos Interiores descrito en el capítulo 2.

Como caso de estudio son tomados datos de una planta hidráulica reversible con la que se espera cubrir los desvíos en la predicción de un productor eólico, estos datos son listados en la tabla 4.1.

E_u [pu]	P_H^u [pu]	P_P^u [pu]	η_H [%]	η_P [%]
8.00	1.09	1.34	88	92

Tabla 4.1.: Datos técnicos de la planta hidráulica reversible.

4.3.1. Resultados

El resultado del problema definido en las ecuaciones (4.1)-(4.8) es mostrado en la figura 4.1, en esta figura se puede apreciar la operación de la planta como bomba, \bar{P}_{P_i} ; la operación de la planta como generador hidráulico, \bar{P}_{H_i} ; el nivel de energía almacenada en el embalse, E_i y el precio de la energía en el mercado según la predicción, c_i . El precio de la energía es decisivo en

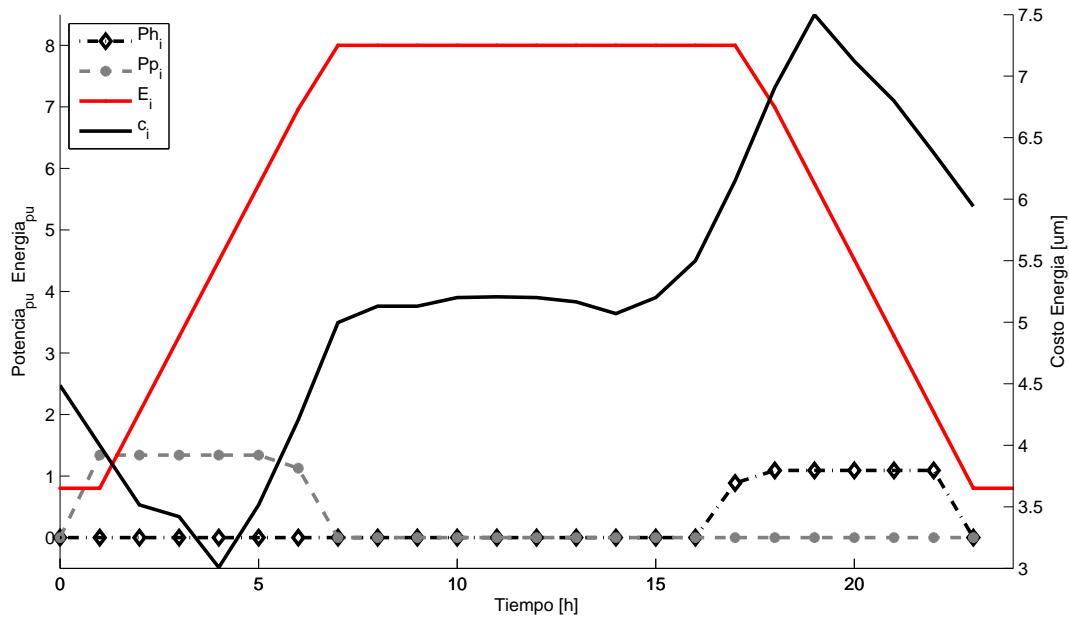


Figura 4.1.: Operación óptima para una planta hidráulica reversible.

el resultado del programa óptimo, por causa de esto, un perfil diferente del precio de la energía significaría un programa óptimo diferente.

La operación obtenida comienza en la primera hora sin realizar ninguna actuación sobre la planta, esto se debe a que está a la espera de precios bajos antes de comenzar a operar como bomba; al comienzo, el nivel de la energía almacenada en el embalse es E_1^{esp} . Cuando los precios son lo suficientemente bajos, la planta comienza a operar como bomba hasta que se llena o consigue la energía almacenada óptima, de la hora 2 al final de la hora 7, para luego vender ésta en los períodos de precios altos. Luego de las horas 8 a 17, la planta espera hasta que los precios son lo suficientemente altos para vender la energía almacenada y así conseguir el máximo beneficio. En el período entre la hora 18 y el final de la hora 23, la planta hidráulica reversible opera como generador y vende la energía almacenada al mercado, hasta que llega al valor final requerido de energía en el embalse, E_{n+1}^{esp} . En la última hora de programa no se realiza ninguna actuación sobre la planta, y el nivel de energía es mantenido en el embalse.

4.4. Operación conjunta de una planta hidráulica reversible y un productor eólico

El objetivo de este problema es optimizar el beneficio de una planta de hidráulica reversible, al cubrir los desvíos de un productor eólico. Como en el caso anterior, la planta bombea agua para almacenar energía en un embalse en períodos donde el precio de la energía en el mercado es bajo, y luego opera como un generador hidráulico, descargando el agua almacenada en períodos donde el precio de la energía es alto. Durante todo el programa de operación, la planta debe ajustarse para cubrir los desvíos del productor eólico; ya sea reduciendo o aumentando su producción hidráulica o reduciendo o aumentando la carga debida al bombeo. De esta forma, a los ojos de los operadores, el productor eólico siempre seguiría el programa de producción informado con anterioridad.

Este problema supone una adaptación al problema original de la operación óptima de una planta hidráulica reversible, ecuaciones (4.1)-(4.8). Para el nuevo problema es necesario conocer las magnitudes de los posibles desvíos del productor eólico y la cantidad de energía reservada para cubrir los desvíos por el tiempo en que estos ocurren. Esta información no se obtiene de forma directa con las herramientas de predicción; por esta razón son utilizados los registros históricos de producción y predicción de potencia eólicos, para realizar un análisis estadístico donde se simulan trayectorias de producción posibles para un horizonte a corto plazo. Con estas trayectorias se puede cuantificar la incertidumbre en la predicción, y de esta forma tener una estimación cercana a la realidad de la magnitud de los posibles desvíos de potencia y de los posibles desvíos de energía para un período de corto plazo. En el capítulo 3, es desarrollado y explicado el método utilizado para llegar a estos resultados. En este mismo capítulo, la predicción de potencia eólica se denominó como $\hat{p}_{t+h|t}$. para evitar confusiones de índices y notación en el planteamiento del problema de optimización, en este capítulo se denominará la misma variable, como \hat{P}_{Wi} .

Siendo \hat{P}_{Wi} la predicción de potencia eólica, son tomadas las estimaciones de los posibles desvíos de potencia para cada hora en el futuro a corto plazo P_{Wi}^M y P_{Wi}^m , que representan los desvíos máximos y mínimos respectivamente, según los cálculos realizados en el capítulo 3.

4.4.1. Desvíos de potencia

Cuando el productor eólico produce menos potencia de la informada en su programa de operación, la planta que opera como generador debe reservar una cantidad de potencia para cubrir el desvío, por lo que la potencia máxima que generará en cada período será $P_{Wi}^M - \hat{P}_{Wi}$. Para el caso contrario, donde el productor eólico produce más potencia de la informada en su

programa de operación, la planta que opera como bomba, debe cubrir este desvío consumiendo la sobreproducción, por lo que la potencia máxima que consumirá en cada período será $\hat{P}_{Wi} - P_{Wi}^m$. Se debe de comportar de forma análoga en el período de inactividad, entre la operación de llenado y descarga del embalse, donde también será necesaria la actuación de la planta para cubrir los desvíos.

Para determinar los niveles de potencia a reservar, es utilizado el método propuesto en el capítulo 3, sección 3.4.1, donde a partir de las posibles trayectorias de producción, son determinados los valores correspondientes a los percentiles (medidas de posición no central) 5% y 95% para cada intervalo i . De esta forma se puede asociar un nivel de cobertura, que para este caso, correspondería al 90%, lo que quiere decir que se garantiza una cobertura del 90% de los casos, según los datos simulados, que a su vez están basados en los registros históricos del generador eólico.

4.4.2. Reservas de energía

Para compensar las sobreproducciones del productor eólico respecto a su predicción se debe reservar una capacidad de almacenamiento en el embalse en cada período i , esto quiere decir, que no se debe llenar el embalse en su totalidad y se debe mantener esta capacidad de almacenamiento hasta que comienza la operación como generador, ya que a partir de este momento la compensación se realiza modificando la operación de la planta como generador, por lo que solo se descargaría agua del embalse.

También se debe reservar una cantidad de energía mínima almacenada al comienzo de la operación de la planta, cuando la planta aun está inactiva. Ésta debe tener un mínimo de energía almacenada, para poder compensar los desvíos del productor eólico cuando éste no alcanza a producir la potencia informada operando como generador. También después del período de bombeo se debe asegurar un mínimo de energía almacenada, que pueda compensar los desvíos hasta el final del día.

Tomando como referencias el programa obtenido del problema descrito en las ecuaciones (4.1)-(4.8), se pueden definir los siguientes estados de la planta: períodos de inactividad: primera hora del programa, de la hora 8 al final de la hora 17 y en la última hora del programa; período de bombeo: de la hora 2 al final de la hora 7; período de descarga: de la hora 18 al final de la hora 23. Partiendo de este programa son tomados los tiempos de cada uno de los períodos como una aproximación, para calcular las reservas de energía necesarias en los periodos de inactividad, ya que con antelación a la solución del problema no se conocen los períodos de actuación real de la planta. Posteriormente, las reservas de energía son calculadas considerando estos intervalos de tiempo, como los posibles desvíos de energía según la simulación de trayectorias de producción, capítulo 3, subsección 3.4.2.

La capacidad de almacenamiento de energía que se debe reservar en el período de inactividad entre el bombeo y la descarga, se calcula para cada hora, comenzando por $E_{i=8}^R$, donde la reserva considera los desvíos posibles del período comprendido entre la hora 8 y el final de la hora 17, utilizando la ecuación (3.17), con los parámetros $h_1 = 8$ y $h_2 = 17$. Para el período $i = 9$, los parámetros de la ecuación (3.17), cambiarán de la siguiente forma $h_1 = 9$ y $h_2 = 17$, y continuará de esta forma hasta llegar al intervalo $i = 17$, donde los parámetros serán $h_1 = 17$ y $h_2 = 17$. La capacidad de almacenamiento de energía, cuando la planta está operando como bomba, entre la hora 2 y el final de la hora 7, será ajustada al valor máximo del intervalo comprendido entre la hora 8 y al final de la hora 17; de igual forma será al comienzo del ciclo de operación de la planta, cuando está inactiva, hora 1. Para el intervalo comprendido entre la hora 18 y el final de la hora 24 la planta opera como generador, por lo que la capacidad de almacenamiento no será necesaria, tomando un valor nulo.

De forma análoga se determina la energía mínima inicial E_1^{esp} utilizando la ecuación (3.17), donde son calculados los posibles errores de energía para el primer período de inactividad, antes de que comience la acción de bombeo. Después de la acción de bombeo, es calculada la energía mínima necesaria para cubrir los desvíos cuando este no alcanza a producir la energía informada hasta el final del día. De forma semejante es utilizada la ecuación (3.17), con los parámetros $h_1 = 8$ y $h_2 = 24$, correspondiendo a la mínima energía almacenada en el embalse, $E_{i=8}^S$. De forma semejante para el período $i = 9$, los parámetros de la ecuación (3.17), cambiarán de la siguiente forma $h_1 = 9$ y $h_2 = 24$, y continuará de esta forma hasta llegar al intervalo $i = 24$, donde los parámetros serán $h_1 = 24$ y $h_2 = 24$.

El nivel de cobertura es ajustado al igual que en caso de los desvíos de potencia, 90 % de los casos simulados, utilizando las medidas de posición no central, percentiles. Tanto para los desvíos positivos (sobrepoducción, donde es necesario reservar una capacidad de almacenamiento de energía), como para los desvíos negativos (subpoducción, donde se debe mantener una cantidad de energía mínima almacenada).

4.4.3. Resultados de la operación conjunta

El problema para obtener el programa de operación conjunta de una planta hidráulica reversible que cubre los desvíos de un productor eólico es descrito en las ecuaciones (4.9)-(4.16). Para éste problema, la potencia del productor eólico, los desvíos de potencia y de energía son considerados en por unidad.

$$\text{máx} \sum_{i=1}^n (c_i \bar{P}_{Hi} - c_{Pi} \bar{P}_{Pi}) \quad (4.9)$$

sujeto a:

$$E_{i+1} = E_i + t \left(\eta_P \bar{P}_{Pi} - \frac{\bar{P}_{Hi}}{\eta_H} \right) \quad (4.10)$$

$$E_1 = E_1^{\text{esp}} \quad (4.11)$$

$$E_{n+1} = E_{n+1}^{\text{esp}} \quad (4.12)$$

$$P_H^l \leq \bar{P}_{Hi} \leq (P_H^u - P_{Wi}^m) \quad (4.13)$$

$$\bar{P}_{Hi} \leq \eta_H \frac{E_i}{t} \quad (4.14)$$

$$P_P^l \leq \bar{P}_{Pi} \leq (P_P^u - P_{Wi}^M) \quad (4.15)$$

$$E_i^S \leq E_i \leq (E^u - E_i^R) \quad (4.16)$$

$$\forall \quad i = 1, \dots, n$$

Donde:

$P_{Wi}^M \wedge P_{Wi}^m$ Desvíos máximos y mínimos del productor eólico cada período i .

E_i^R Capacidad de almacenamiento de energía a reservar, para cada período i .

E_i^S Capacidad de energía almacenada se debe mantener, para cada período i .

En la figura 4.2 se puede apreciar la operación de la planta como bomba, \bar{P}_{Hi} ; la operación de la planta como generador hidráulico, \bar{P}_{Pi} ; el nivel de energía almacenada en el embalse, E_i y el precio de la energía en el mercado según la predicción, c_i . Comparando con la figura 4.1, se nota una reducción en la energía almacenada en el embalse, al igual que los niveles a los que opera como bomba y como generador, esto se debe a las restricciones impuestas por los desvíos máximos y mínimos del productor eólico y a la necesidad de reservar una cierta capacidad de energía a almacenar como energía mínima en el embalse.

El programa de operación conseguido, cubrirá el 90 % de los casos posibles, según las simulaciones realizadas en el capítulo 3. El nuevo programa da la posibilidad al productor eólico, de controlar el riesgo desde el punto de vista técnico y económico, esto significa una ventaja estratégica frente a otros competidores, disminuyendo el riesgo en la operación.

No se están cubriendo todos los posibles casos sorteados en las simulaciones, ya que se tomaron el 90 % de los mismos. Sin embargo, si se aumentara la cobertura hasta un 95 %, se necesitaría reservar un 18 % más de espacio en el embalse para los errores positivos, y 26 % más de energía almacenada, para los errores negativos, lo cual limitaría la operación de la planta, y en algunos casos, podría hacer inviable el programa de cobertura, ya que las dimensiones actuales del embalse no serían suficientes para cubrir los posibles desvíos.

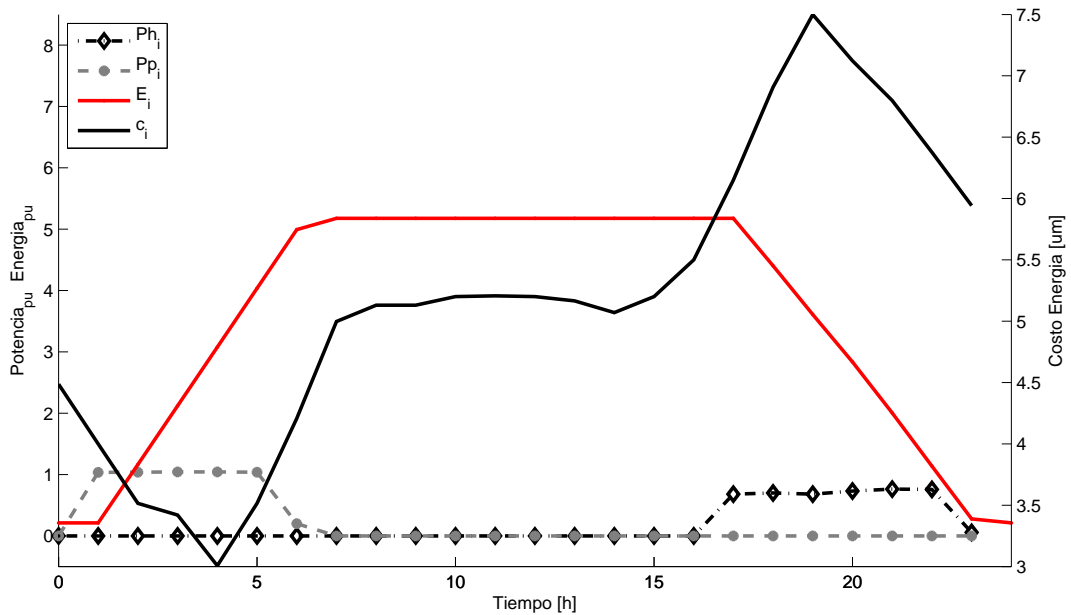


Figura 4.2.: Operación óptima para una planta hidráulica reversible que cubre los errores de un productor eólico.

4.5. Operación real de la planta hidráulica reversible cubriendo los desvíos del productor eólico

La estrategia propuesta para cubrir los desvíos es puesta a prueba usando los datos reales de la producción eólica para el día considerado y adaptando la producción de la planta hidráulica reversible para cubrirlos éstos desvíos.

En la figura 4.3(a) se puede ver la diferencia de energía almacenada resultante. Para este caso particular los desvíos de energía fueron predominantemente positivos, esto quiere decir que hubo una sobreproducción, sin embargo también ocurrieron con algunos períodos de errores negativos, subproducción. La sobreproducción fue aprovechada almacenando energía en el embalse, esto se puede ver en la figura 4.3(b), desde el comienzo de la operación y hasta el final de la hora 5, luego en las horas 11 y 24 donde se pueden observar las operaciones de bombeo debidas a las sobreproducciones de potencia eólica. De forma contraria, hay una reducción en la operación de bombeo entre la hora 6 y final de la hora 7, cuando ocurrieron errores negativos.

En la figura 4.3(c) se puede ver la adaptación en la operación de la planta cuando opera como generador, en este caso cubre los errores negativos entre la hora 12 y final de la hora 16. Luego reduce la producción de energía debido a la sobreproducción eólica, en el período comprendido entre la hora 17 y final de la hora 23.

Se verifica en este caso la correcta programación de la central hidráulica reversible, capaz de compensar los errores reales producidos en el horizonte programado.

4.6. Costos de la programación anticipada y de la operación real

El beneficio de la planta hidráulica reversible operando de forma independiente, primer problema planteado, es de 14.58 [um]. En el segundo problema, el beneficio de la planta hidráulica reversible que opera de forma conjunta con el productor eólico, es de 10.32 [um], lo que supone un 29.22 % menos. La diferencia de estas dos cantidades es llamada costo de oportunidad, ya que es la cantidad de dinero que deja de ganar la planta hidráulica reversible al asumir en su nuevo programa los posibles desvíos del productor eólico.

Los beneficios debidos al nuevo programa para la planta hidráulica reversible son menores debido a que no opera a su capacidad máxima, sin embargo los beneficios reales serán calculados después de la operación real de la planta, a partir de la potencia generada por el productor eólico y el programa ajustado de la planta hidráulica reversible, consumos al operar como bomba y potencia generada al descargar el agua.

El beneficio real del productor eólico después de la operación, es calculado de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^n (c_i P_{Wi} - \omega c_i |P_{Wi} - \hat{P}_{Wi}|) \quad (4.17)$$

Donde:

P_{Wi} Potencia producida por el productor eólico en cada período i .

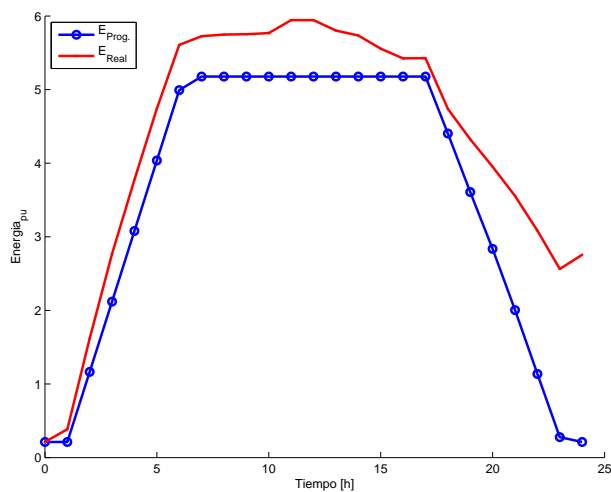
\hat{P}_{Wi} Predicción de la potencia eólica en cada período i .

ω Factor de cobro para los desvíos de energía.

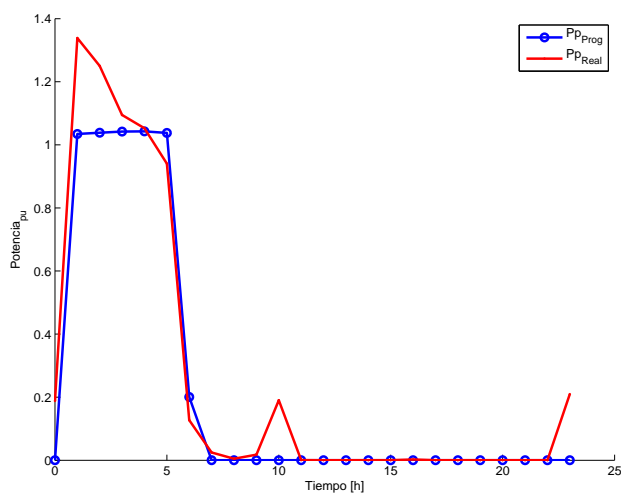
Finalmente, el beneficio real de la planta hidráulica reversible y el productor eólico, se calcula de forma conjunta a partir de las dos ofertas presentadas al OM y de la producción real de ambos. En este caso todos los desvíos son pagados de forma proporcional al precio horario de la energía en el mercado, considerando $\omega = 110\%$.

$$\sum_{i=1}^n [c_i (P_{Wi} + P_{Hi} - P_{Pi}) - \omega c_i |(P_{Wi} + P_{Hi} - P_{Pi}) - (\hat{P}_{Wi} + \bar{P}_{Hi} - \bar{P}_{Pi})|] \quad (4.18)$$

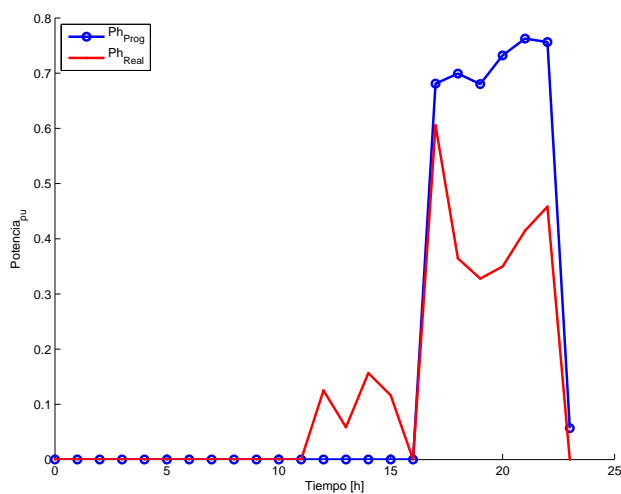
Donde:



(a) Nivel de la energía en el embalse, programado y real.

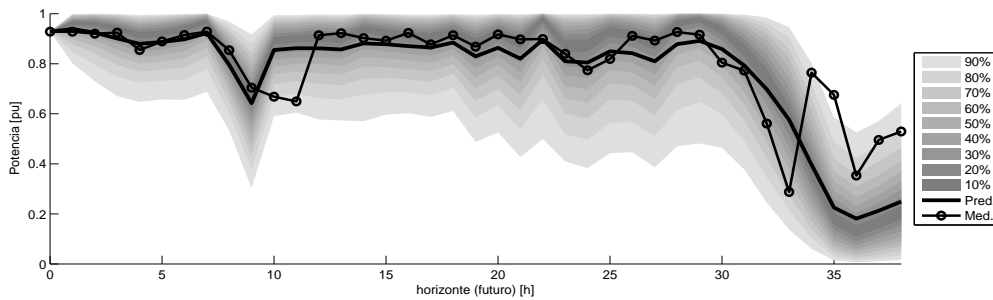


(b) Potencia consumida por el bombeo, programado y real.

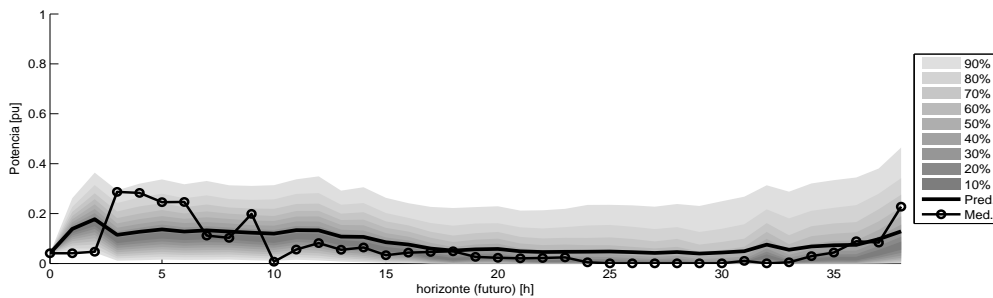


(c) Potencia generada, programada y real.

Figura 4.3.: Comparación del programa obtenido con antelación y la operación real



(a) Caso de producción alta.



(b) Caso de producción baja.

Figura 4.4.: Intervalos de predicción basados en la simulación de trayectorias

P_{Hi} Potencia producida por la planta hidráulica en cada período i .

P_{Pi} Potencia consumida por la planta operando como bomba en cada período i .

El problema analizado, en la sección 4.4, se considera un caso de producción de potencia media con un perfil de precios de un día de semana típico. Adicionalmente, se analizan y comparan dos casos más de producción, alta y baja, tal como se ve en las figura 4.4(a) y 4.4(b) respectivamente; y perfiles de precios tipos para los días sábado y domingo, tal como se ven en la figura 4.5. Se compararán los beneficios antes y después de la operación, tanto de forma independiente como conjunta, los resultados son presentados en la tabla 4.2.

La tabla 4.2, tiene nueve columnas, agrupadas en grupos de tres, cada uno de estos grupos representa precios de días típicos: día de semana, sábado y domingo respectivamente; y para uno de los días hay tres tipos de producción: media, alta y baja, respectivamente. Como aclaración, se distingue con «I» la operación independiente de los agentes y con «C» la operación conjunta.

En la tabla 4.2, el «Beneficio hidráulico (I)» representa la ganancia que la planta hidráulica reversible consigue de forma independiente gracias al programa óptimo, « $E_{i=n}$ (I)» es el nivel de la energía en el embalse al final del programa, en este caso es constante ya que el valor es ajustado en el problema de optimización (4.4).

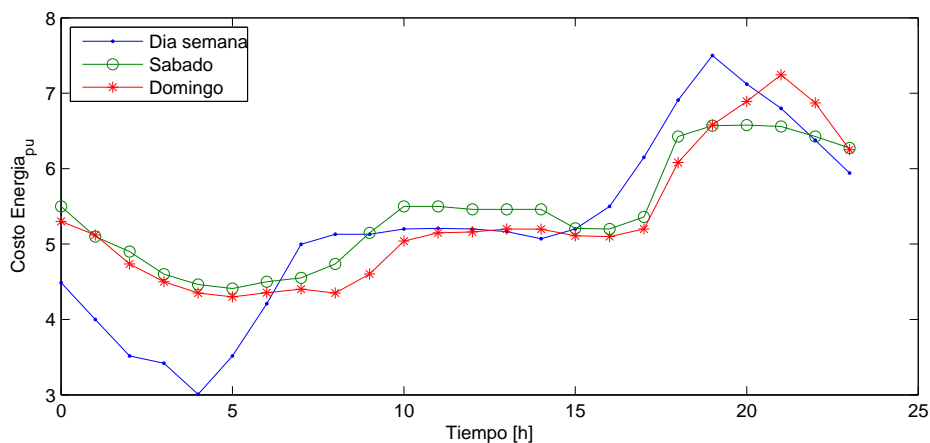


Figura 4.5.: Diferentes perfiles de precios para los días típicos de una semana.

Día	Semana			Sábado			Domingo		
	Media	Alta	Baja	Media	Alta	Baja	Media	Alta	Baja
Producción									
Beneficio hidráulico (I)	14,6	14,6	14,6	4,8	4,8	4,8	7,4	7,4	7,4
E_{n+1} (I)	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
Beneficio eólico (I)	37,2	74,3	9,6	37,4	80,2	9,6	36,8	77,4	9,7
Beneficio total (I)	51,8	88,9	24,1	42,2	85,0	14,5	44,2	84,7	17,1
Beneficio hidráulico (C)	10,3	11,4	12,5	3,3	3,9	4,1	4,9	5,9	6,3
Costo de oportunidad	-4,3	-3,2	-2,1	-1,5	-0,9	-0,7	-2,5	-1,4	-1,0
	-29,2%	-21,9%	-14,4%	-31,4%	-18,9%	-14,8%	-33,6%	-19,4%	-14,1%
Beneficio real (C)	56,1	94,8	31,5	49,8	92,9	23,7	50,6	91,8	25,6
E_{n+1} (C)	2,8	1,7	0,0	2,8	1,7	0,1	2,8	1,7	0,1
Diferencia beneficios	4,3	6,0	7,3	7,6	7,9	9,3	6,4	7,0	8,5
	8,2%	6,7%	30,3%	18,0%	9,2%	64,1%	14,4%	8,3%	49,7%

Tabla 4.2.: Costos de operación de la planta hidráulica reversible y el productor eólico.

El «Beneficio eólico (I)» representa los beneficios que tiene el productor eólico operando de forma independiente, al final de la operación real, calculados por medio de la ecuación (4.17). El «Beneficio total (I)» es la suma de los beneficios de los dos agentes operando de forma independiente.

El «Beneficio hidráulico (C)» representa la ganancia que la planta hidráulica reversible obtiene, al cubrir en su programa los desvíos del productor eólico. Con este valor y el «Beneficio hidráulico (I)» son calculados los «Costos de oportunidad» para la planta hidráulica que representan la pérdida de la planta hidráulica reversible al modificar su punto de operación. Este valor es dado en unidades monetarias y en porcentaje.

El «Beneficio real (C)», es el beneficio que obtienen la planta hidráulica reversible y el productor eólico operando de forma conjunta, este valor es calculado con la ecuación (4.18) después que ha terminado el día analizado. « $E_{i=n}$ (C)» es el nivel de energía almacenada en el embalse superior después que ha terminado el día analizado.

Finalmente «Diferencia beneficios» es la relación que hay entre los beneficios totales de la planta hidráulica reversible y el productor eólico, operando de forma independiente y conjunta. Este valor es dado en unidades monetarias y en porcentaje.

Los resultados conseguidos son muy prometedores, ya que para los casos analizados, los beneficios totales de la planta hidráulica reversible y el productor eólico operando de forma conjunta son positivos, esto quiere decir que se obtuvo un beneficio extra al cubrir los errores. De manera adicional, los costos de oportunidad son menores que los beneficios totales, esto quiere decir que se pudo cubrir las expectativas económicas de los agentes al obtener ganancias mayores.

Al final del período analizado, los niveles de energía en el embalse se ven afectados de una forma significativa, ya que en algunos casos queda una cantidad considerable de energía almacenada, lo cual significa una necesidad menor de bombear al día siguiente. Sin embargo también en algunos casos la energía es menor a la esperada, lo cual podría hacer inviable la operación del día siguiente.

4.7. Conclusiones

El método propuesto permite al productor eólico mantener controlado el riesgo al que está expuesto debido a la incertidumbre de la predicción de la potencia eólica, evitando los desvíos en la producción.

La acción de la planta hidráulica reversible es utilizado para minimizar los desvíos debidos a los errores en la previsión de potencia eólica. La energía necesaria en el embalse está directamente relacionada con la magnitud de los errores. Por esta razón, es necesario evaluar en un largo

plazo la operación de la planta hidráulica reversible, para determinar la viabilidad y rentabilidad de su uso y no caer en la subutilización de la misma.

5. Conclusiones

- En esta tesis fue formulado un modelo de optimización para determinar la operación óptima de una planta hidráulica reversible que cubre los desvíos en la predicción de un productor eólico. El resultado conseguido por medio del MPI consiste en la programación diaria, discretizada de forma horaria, para la planta hidráulica reversible. El programa conseguido está condicionado a la predicción de la potencia eólica, por medio de un análisis estadístico de la misma, donde fueron determinados niveles de cobertura dando la posibilidad al productor eólico de decidir el riesgo al que esta expuesto debido a la incertidumbre en la predicción.
- En el desarrollo teórico y en la implementación de los algoritmos del MPI se demostró la relativa simplicidad de este tipo de métodos. Se compararon los resultados de los diferentes algoritmos analizados, incluso la versión comercial disponible en MATLAB®. En los dos casos analizados se consiguió un mejor desempeño utilizando el MPI-PC. De forma semejante, la herramienta comercial fue la que tuvo el rendimiento más bajo en cuanto a la precisión comparado con los otros algoritmos. Sin embargo todos los algoritmos comparados alcanzaron los criterios de parada, en otras palabras, encontraron soluciones lo suficientemente precisas y cercanas al óptimo.
- Con la implementación de los algoritmos y los resultados obtenidos, se demostró la posibilidad de desarrollar alternativas independientes a las aplicaciones comerciales para encontrar soluciones a problemas de optimización. Esto abre nuevas posibilidades para aplicar el MPI en problemas cotidianos sin incurrir en gastos de licencias de herramientas específicas.
- El análisis de la predicción eólica y de los errores respecto a la producción real, fueron decisivos para la obtención del modelo de la producción eólica utilizando la distribución Beta. Posteriormente el sorteo de trayectorias, basadas en la interrelación de los errores históricos, permitió cuantificar la incertidumbre en la predicción de forma anticipada para un horizonte de corto plazo.
- El modelo de la distribución Beta condicionada, para modelar la producción eólica, fue validado utilizando los datos históricos, donde se consiguieron resultados bastante cercanos

a los teóricos, lo cual asegura que el modelo propuesto es adecuado para este tipo de simulaciones.

- Una de las ventajas principales del método estadístico presentado, es la versatilidad en los datos de entrada (registros históricos), ya que puede ser utilizado con cualquier herramienta de predicción y no es necesario ningún dato diferente a la predicción de la producción eólica y la producción real para los análisis estadísticos.
- La utilización de la planta hidráulica reversible para cubrir los desvíos del productor eólico permite el cumplimiento del programa presentado con anticipación por parte del productor eólico y de esta forma se evita los cobros por su incumplimiento. Adicionalmente, todos los excedentes de producción eólica son aprovechados durante la ejecución del programa por medio de la planta hidráulica reversible. Lo más destacable en los casos analizados es el aumento de los beneficios económicos en la operación conjunta de los agentes.
- Con los diferentes casos de producción y de costos analizados, en el problema de optimización, se puede ver que hay un menor beneficio para el caso de producción alta, y se tiene un mayor beneficio para el caso de producción baja, esto se debe a que la magnitud de los errores esta condicionada al nivel de producción. Para el caso de producción baja, se consiguen cubrir los errores y adicionalmente se utiliza la energía restante en el embalse, la cual es vendida en el mercado. Para el caso de producción alta, los errores son cubiertos, sin embargo una cantidad considerable de energía es mantiene en el embalse por lo que los beneficios son menores al caso de producción baja.
- Una alternativa para el almacenamiento sería considerar este como un servicio más, dentro del mercado de energía, donde cada productor pueda adquirir una cierta capacidad de cobertura necesaria en cada período con el objetivo de minimizar los desvíos en la producción. El método propuesto en este trabajo podría ser utilizado para el dimensionamiento de las unidades de almacenamiento, asociando la dimensión y servicio a un nivel de cobertura. Otra alternativa es la posibilidad de ofertar de forma conjunta al mercado, sin embargo, esta posibilidad esta condicionada a las regulaciones impuestas en el sistema.
- El uso del almacenamiento y las plantas hidráulicas reversibles permite el aumento en la proporción de potencia eólica instalada en un sistema eléctrico, además, mejorando los beneficios económicos y la capacidad de control en el sistema.

5.1. Trabajos futuros

- El método planteado puede ser usado como base para introducir el servicio de cubrimiento de los desvíos en el mercado de energía para la cobertura de los productores eólicos, asociando éste al riesgo debido a la incertidumbre en la predicción eólica. Adicionalmente, puede ser usado para calcular el costo de éste servicio.
- El método presentado en la tesis puede ser utilizada desde el punto de vista del operador del sistema, para calcular las reservas hidráulicas, basadas en la incertidumbre en la producción eólica y de esta forma asegurar la estabilidad del sistema eléctrico.
- Los intervalos de predicción y los niveles de energía para cubrir los desvíos son calculados a partir de los percentiles tomando valores simétricos, esto quiere decir que los datos utilizados están centrados en la media. Otro tipo de intervalos podría ser utilizado, centrandos los datos utilizados en la moda, con esto se podría minimizaría la magnitud de los intervalos de predicción y los niveles de energía para cubrir los desvíos.
- Solucionar el problema del mercado intradiario, modelando estrategias para aprovechar de una forma más eficiente la energía almacenada y las posibilidades que el propio mercado ofrecería.
- Una evaluación del desempeño del método durante un largo período podría entregar información suficiente para especificar el dimensionamiento de una planta hidráulica reversible. Adicionalmente, se podría introducir información sobre los costos regulatorios para realizar decisiones más apropiadas considerando la volatilidad de las variables y los costos de producción.
- El problema propuesto solo considera el caso diario donde se busca cubrir los posibles desvíos, sin embargo no todo el riesgo puede ser controlado, otras estrategias considerando mercados financieros, como las opciones de compra de energía, pueden ser alternativas interesantes para cubrir los desvíos en la previsión y de esta forma minimizar los costos de inversión en el almacenamiento [59]

Referencias

- [1] S. Granville. «Optimal reactive dispatch through interior point methods». *Power Systems, IEEE Transactions on*, tomo 9, págs. 136–146, 1994.
- [2] E. D. Castronuovo. *Aplicação do método de pontos interiores no fluxo de potência ótimo não linear com utilização de processamento de alto desempenho*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- [3] M. J. R. Flores. *Planejamento da Expansão de Sistemas de Transmissão Usando os Modelos CC–CA e Técnicas de Programação Não–Linear*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- [4] V. H. Quintana, G. L. Torres y J. Medina-Palomo. «Interior-point methods and their applications to power systems: a classification of publications and software codes». *Power Systems, IEEE Transactions on*, tomo 15, págs. 170–176, 2000.
- [5] A. Conejo, M. Plazas, R. Espinola y A. Molina. «Day-ahead electricity price forecasting using the wavelet transform and ARIMA models». *Power Systems, IEEE Transactions on*, tomo 20(2), págs. 1035–1042, 2005.
- [6] H. Daneshi. «Price forecasting in deregulated electricity markets - a bibliographical survey». En *Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies, 2008. DRPT 2008. Third International Conference on*, 2008, págs. 657–661.
- [7] H. Hahn, S. Meyer-Nieberg y S. Pickl. «Electric load forecasting methods: Tools for decision making». *European Journal of Operational Research*, tomo 199(3), págs. 902–907, dic. 2009.
- [8] M. Lei, L. Shiyan, J. Chuanwen, L. Hongling y Z. Yan. «A review on the forecasting of wind speed and generated power». *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, tomo 13(4), págs. 915–920, mayo 2009.
- [9] «Eu2007 - accord historique sur la protection climatique». http://www.eu2007.de/fr/News/Press_Releases/March/0309BKBruessel.html, 2007.

URL http://www.eu2007.de/fr/News/Press_Releases/March/0309BKBruessel.html

- [10] G. Koepfel y M. Korp\aa. «Increasing the network in-feed accuracy of wind turbines with energy storage devices». Torino, Italia, jul. 2006.
- [11] J. Matevosyan y L. Söder. «Short-term hydropower planning coordinated with wind power in areas with congestion problems». *Wind Energy*, tomo 10(3), págs. 195–208, 2007.
- [12] R. Doherty y M. O'Malley. «A new approach to quantify reserve demand in systems with significant installed wind capacity». *Power Systems, IEEE Transactions on*, tomo 20(2), págs. 587–595, 2005.
- [13] H. Holttinen y J. Ikäheimo. «Wind prediction and bids in denmark». Inf. téc., VTT Energia, jun. 2007.
- [14] P. Pinson, H. Madsen, H. A. Nielsen, G. Papaefthymiou y B. Klöckl. «From probabilistic forecasts to statistical scenarios of short-term wind power production». *Wind Energy*, tomo 12(1), págs. 51–62, 2009.
- [15] P. Pinson, P. George, K. Bernd y V. Jody. «Dynamic sizing of energy storage for hedging wind power forecast uncertainty». Calgary, Canada, jul. 2009.
- [16] J. García-González, R. de la Muela, L. Santos y A. Gonzalez. «Stochastic joint optimization of wind generation and Pumped-Storage units in an electricity market». *Power Systems, IEEE Transactions on*, tomo 23(2), págs. 460–468, 2008.
- [17] J. S. Anagnostopoulos y D. E. Papantonis. «Pumping station design for a pumped-storage wind-hydro power plant». *Energy Conversion and Management*, tomo 48(11), págs. 3009–3017, 2007.
- [18] C. Bueno y J. Carta. «Wind powered pumped hydro storage systems, a means of increasing the penetration of renewable energy in the canary islands». *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, tomo 10(4), págs. 312–340, ago. 2006.
- [19] F. Vieira y H. Ramos. «Hybrid solution and pump-storage optimization in water supply system efficiency: A case study». *Energy Policy*, tomo 36(11), págs. 4142–4148, nov. 2008.
- [20] P. Brown, J. P. Lopes y M. Matos. «Optimization of pumped storage capacity in an isolated power system with large renewable penetration». *Power Systems, IEEE Transactions on*, tomo 23(2), págs. 523–531, 2008.

- [21] E. D. Castronuovo y J. A. P. Lopes. «On the optimization of the daily operation of a wind-hydro power plant». *Power Systems, IEEE Transactions on*, tomo 19(3), págs. 1599–1606, 2004.
- [22] J. M. Angarita y J. G. Usaola. «Combining hydro-generation and wind energy biddings and operation on electricity spot markets». *Electric Power Systems Research*, tomo 77(5-6), págs. 393–400, 2007.
- [23] E. Castronuovo, J. Usaola y Álvaro Jaramillo. «Delegated dispatching of wind farms: an optimal approach considering continuous control and interruption capabilities». *Wind Energy*, sep. 2008.
- [24] D. A. Pierre. *Optimization Theory with Applications*. Dover Publications, 1986.
- [25] J. J. O'Connor y E. F. Robertson. *MacTutor History of Mathematics*, 2008.
- [26] K. R. Frisch. «The logarithmic potential method of convex programming». *Memorandum, University Institute of Economics, Oslo*, 1955.
- [27] A. V. Fiacco y G. P. McCormick. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. John Wiley & Sons, New York, 1968.
- [28] H. Dommel y W. Tinney. «Optimal power flow solutions». *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, tomo PAS-87, págs. 1866–1876, 1968.
- [29] L. G. Khachiyan. «A polynomial time algorithm for linear programming». *Soviet Mathematics Doklady*, tomo 20, págs. 191–194, 1979.
- [30] R. Burchett, H. Happ y D. Vierath. «Quadratically convergent optimal power flow». *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, tomo PAS-103, págs. 3267–3275, 1984.
- [31] D. Sun, B. Ashley, B. Brewer, A. Hughes y W. Tinney. «Optimal power flow by newton approach». *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, tomo PAS-103, págs. 2864–2880, 1984.
- [32] N. Karmarkar. «A new polynomial-time algorithm for linear programming». *Combinatorica*, tomo 4, págs. 373–395, 1984.
- [33] N. Megiddo. «Pathways to the optimal set in linear programming». *Progress in Mathematical Programming: Interior Point and Related Methods*, tomo 158, 1989.
- [34] S. Mehrotra. «On the implementation of a primal-dual interior point method». *SIAM Journal on Optimization*, tomo 2, pág. 575, 1992.

- [35] V. H. Quintana y G. L. Torres. «Introduction to interior-point methods». *University of Waterloo*, feb. 2000.
URL <http://thunderbox.uwaterloo.ca/~ieee-ipm/IEEE-TF.pdf>
- [36] J. E. Mitchell. *Bibliography on interior point optimization*, Apr. 2009.
URL <http://liinwww.ira.uka.de/bibliography/Math/optim.html>
- [37] «Optimization online». Optimization Online, sep. 2008.
URL <http://www.optimization-online.org/>
- [38] H. D. Mittelmann. «Decison tree for optimization software», 2008.
URL <http://plato.asu.edu/guide.html>
- [39] V. H. Quintana. «Interior point methods task force», feb. 2000.
URL <http://thunderbox.uwaterloo.ca/~ieee-ipm/>
- [40] A. E. Castillo, A. J. Conejo, P. Pedregal, R. García y N. Alguacil. «Formulación y resolución de modelos de programación matemática en ingeniería», feb. 2002.
URL <http://departamentos.unican.es/macc/personal/profesores/castillo/Libro.htm>
- [41] A. E. Castillo, A. J. Conejo, P. Pedregal, R. García y N. Alguacil. *Formulación y resolución de modelos de programación matemática en Ingeniería*, feb. 2002.
- [42] A. S. El-Bakry, R. A. Tapia, T. Tsuchiya y Y. Zhang. «On the formulation and theory of the primal-dual newton interior-point method for nonlinear programming». *Journal of Optimization Theory and Applications*, tomo 89, págs. 507–541, 1996.
- [43] K. Zollenkopf. *Bi-factorization-Basic Computational Algorithm and Programming Techniques*, págs. 75–96. John k. reid ed^{ón}, 1971.
- [44] G. L. Torres y V. H. Quintana. «An interior-point method for nonlinear optimal power flow using voltage rectangular coordinates». *Power Systems, IEEE Transactions on*, tomo 13, págs. 1211–1218, 1998.
- [45] A. Wächter y L. T. Biegler. «On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming». *Mathematical Programming*, tomo 106, págs. 25–57, 2006.
- [46] A. Tsikalakis, Y. Katsigiannis, P. Georgilakis y N. Hatzigryriou. «Determining and exploiting the distribution function of wind power forecasting error for the economic operation of

- autonomous power systems». En *Power Engineering Society General Meeting, 2006. IEEE*, 2006, pág. 8 pp.
- [47] H. Bludszuweit, J. Dominguez-Navarro y A. Llombart. «Statistical analysis of wind power forecast error». *Power Systems, IEEE Transactions on*, tomo 23(3), págs. 983–991, 2008.
- [48] I. Sánchez, J. Usaola, O. Ravelo, C. Velasco, J. Domínguez, M. G. Lobo, G. González, F. Soto, B. Diaz-Guerra y M. Alonso. «Sipreólico-a wind power prediction system based on flexible combination of dynamic models. application to the spanish power system». En *World Wind Energy Conference in Berlin, Germany*, 2002.
- [49] I. Sánchez. «Short-term prediction of wind energy production». *International Journal of Forecasting*, tomo 22(1), págs. 43–56, 2006.
- [50] J. L. R. Amenedo, J. C. B. Díaz y S. A. Gómez. *Sistemas eólicos de producción de energía eléctrica*. Editorial Rueda, 2003.
- [51] S. Bofinger, A. Luig y H. G. Beyer. «Qualification of wind power forecasts». En *Proceedings of the Global Wind Power Conference*, 2002.
- [52] A. Fabbri, T. GomezSanRoman, J. RivierAbbad y V. MendezQuezada. «Assessment of the cost associated with wind generation prediction errors in a liberalized electricity market». *Power Systems, IEEE Transactions on*, tomo 20(3), págs. 1440–1446, ago. 2005.
- [53] J. B. Bremnes. «A comparison of a few statistical models for making quantile wind power forecasts». *Wind Energy*, tomo 9(1-2), págs. 3–11, 2006.
- [54] R. D. Cook y S. Weisberg. *Residuals and Influence in Regression*, 1982.
- [55] Álvaro Jaramillo, I. Sánchez, E. Castronuovo y J. Usaola. «Simulating scenarios and prediction intervals in wind power forecasting with the beta distribution». En *11th. Spanish-Portuguese Conference on Electrical Engineering (11CHLIE)*. Zaragoza, Spain, jun. 2009, pág. 5.
- [56] B. Yang, Y. Makarov, J. Desteese, V. Viswanathan, P. Nyeng, B. McManus y J. Pease. «On the use of energy storage technologies for regulation services in electric power systems with significant penetration of wind energy». En *2008 5th International Conference on the European Electricity Market*. Lisboa, Portugal, 2008, págs. 1–6.
- [57] P. J. Luickx, E. D. Delarue y W. D. D'haeseleer. «The examination of different energy storage methods for wind power integration». working paper WP EN2009-001, Katholieke

Universiteit Leuven, Energy Institute, 2009.

URL <http://www.mech.kuleuven.be/energy/>

- [58] E. D. Castronuovo y J. A. P. Lopes. «Optimal operation and hydro storage sizing of a wind-hydro power plant». *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, tomo 26(10), págs. 771–778, dic. 2004.
- [59] K. W. Hedman y G. B. Sheble. «Comparing hedging methods for wind power: Using pumped storage hydro units vs. options purchasing». En *2006 International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems*. Stockholm, Sweden, 2006, págs. 1–6.

A. Conceptos matemáticas

A.1. Condiciones de optimalidad de Karush Kuhn Tucker (KKT)

Condiciones necesarias de optimalidad de primer orden [3]

1. Condición Dual

$$\nabla_x l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) |_* = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{J}_g(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\lambda}^* + \mathbf{J}_h(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{0}$$

Donde:

$\nabla f(\mathbf{x}^*) \in \mathbb{R}^{nx}$: es el vector gradiente de la función objetivo.

$\mathbf{J}_g(\mathbf{x}^*) \in \mathbb{R}^{ng \times nx}$: es el Jacobiano de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$.

$\mathbf{J}_h(\mathbf{x}^*) \in \mathbb{R}^{nh \times nx}$: es el Jacobiano de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

2. Condición de Igualdad Primal

$$\nabla_{\lambda} l |_* = \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

3. Condición de Desigualdad Primal

$$\nabla_{\omega} l |_* = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0}$$

4. Condición de Complementariedad y Factibilidad Dual

$$\omega_i^* h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{y} \quad \omega_i^* \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, nh$$

Condiciones necesarias de optimalidad de segundo orden [3]

$$\nabla_{xx}^2 l(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}) |_* = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{ng} \lambda_j^* \mathbf{G}_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^{nh} \omega_i^* \mathbf{H}_i(\mathbf{x}^*) > \mathbf{0}$$

en

$$\nabla g_j(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\eta} = 0, \quad j = 1, \dots, ng, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x}^*) := \{ & \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{nx} : \nabla g_j(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\eta} = 0, \quad j = 1, \dots, ng, \text{ y} \\ & \nabla h_i(\mathbf{x}^*)^T \boldsymbol{\eta} = 0, \quad i : h_i(\mathbf{x}^*) = 0 \text{ y } \omega_i^* \geq 0 \} \end{aligned}$$

Donde:

$\nabla_{xx}^2 l \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$: Hessiana de la Función de Lagrange.

$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$: Hessiana de la función objetivo $f(\mathbf{x})$.

$\mathbf{G}_j(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$: Hessiana de la restricción de igualdad $g_j(\mathbf{x})$.

$\mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{nx \times nx}$: Hessiana de la restricción de desigualdad $h_i(\mathbf{x})$.

$\tilde{\mathbf{M}}(\mathbf{x})$: Subespacio tangente en \mathbf{x} de las restricciones activas.

A.2. Definiciones matemáticas

Algunos de los operadores matemáticos utilizados en este documento, son formulados de forma explícita, con la intención de evitar confusiones de orden y geometría.

Gradiente

El gradiente normalmente denota una dirección en el espacio según la cual se aprecia una variación de una determinada propiedad o magnitud física.

El gradiente de un campo escalar, que sea diferenciable en el entorno de un punto, es un vector definido como el único vector que permite hallar la derivada direccional en cualquier dirección, tal como:

$$\text{grad}\phi = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_{nx}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Jacobiano

En cálculo vectorial, el jacobiano es una abreviación de la matriz Jacobiana y su determinante, el determinante Jacobiano. Son llamados así en honor al matemático Carl Gustav Jacobi.

La matriz Jacobiana es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función. Una de las aplicaciones más interesantes de esta matriz es la posibilidad de aproximar linealmente a la función en un punto. En este sentido, el Jacobiano representa la derivada de una función multivariable.

Supongamos $F : R^n \rightarrow R^m$ es una función que va del espacio euclidiano n -dimensional a otro espacio euclidiano m -dimensional. Esta función está determinada por m funciones reales: $y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)$. Las derivadas parciales de estas (si existen) pueden ser organizadas en una matriz m por n , la matriz Jacobiana de F :

$$\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_{nh})}{\partial(x_1, \dots, x_{nx})} = \mathbf{J}_\phi(x_1, \dots, x_{nx}) = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_{nx}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_{nh}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\phi_{nh}}{\partial x_{nx}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Matriz Hessiana

La matriz Hessiana de una función f de n variables es la matriz cuadrada de $n \times n$, de las segundas derivadas parciales.

Dada una función real f de n variables reales:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_{nx})$$

Si todas las segundas derivadas parciales de f existen, se define cualquier elemento dentro de la matriz Hessiana de f como: $H_f(\mathbf{x})$, donde:

$$H_f(\mathbf{x})_{i,j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$$

tomando la siguiente forma:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_{nx}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_{nx}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_{nx} \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{nx} \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_{nx}^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Definición de norma euclídea

En un espacio euclídeo ordinario los vectores son representables como segmentos orientados entre puntos de dicho espacio. Dado un vector de un espacio vectorial euclídeo, la norma de un vector se define como la distancia entre dos puntos A y B que delimitan dicho vector.

- En dos dimensiones:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

siendo: $\vec{OA} = (a_1, a_2)$ y $\vec{OB} = (b_1, b_2)$ y O el origen de coordenadas de dicho espacio.

- Extendiendo lo anterior al espacio euclídeo de tres dimensiones, es también elemental que:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

siendo: $\vec{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{OB} = (b_1, b_2, b_3)$

- En el caso general de un espacio euclídeo de n dimensiones se tiene:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

siendo: $\vec{OA} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\vec{OB} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

De lo anterior se sigue que, fijada una base orto-normal \mathcal{B} en las que un vector \mathbf{v} , dado por sus componentes en esta base $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, entonces la norma de dicho vector viene dada por:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Esto genera la siguiente definición matemática:

Sea \mathbf{V} un espacio vectorial afín sobre un cuerpo \mathbb{K} y \vec{x} un vector del espacio. Se dice que $\|\cdot\| : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}$ es un operador que define la norma de \vec{x} , y escribimos $\|\vec{x}\|$, si cumple:

- Para todo \vec{x} de \mathbf{V} su norma ha de ser positiva, y será cero si y sólo si \vec{x} es el vector cero:
 $0 < \|\vec{x}\|$ si $\vec{x} \neq \vec{0}$ y $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$
- Para todo \vec{x} de \mathbf{V} y para todo k de \mathbb{K} se satisface que $\|k\vec{x}\| = |k| \cdot \|\vec{x}\|$
- Para todos \vec{x} e \vec{y} de \mathbf{V} se cumple que $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (desigualdad triangular).

Cualquier operador que cumpla estas tres condiciones, y en cualquier geometría, será un operador norma.

A continuación se muestran algunos ejemplos de posibles operadores norma, que satisfacen la definición matemática general:

- Para un vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se define la norma- p como:

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p}$$

- Así, para el caso $p = 1$ se obtiene $\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$, y para el caso $p = 2$ se obtiene la norma euclídea explicada más arriba.
- Otro operador norma sería $\|\vec{x}\|_{\infty} = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$
 Donde $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Esta norma se debe al hecho de que: $\lim_{p \rightarrow \infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_{\infty}$.