

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



TRANSPORTE RADIAL DE TRAZADORES EN SIMULACIONES DE TURBULENCIA EN PLASMAS DE FUSIÓN NUCLEAR

Memoria presentada por

Guillermo Sánchez Burillo

para optar al grado de Doctor

Dirigida por:

Dr. Boudewijn Ph. van Milligen
Asociación EURATOM-CIEMAT para Fusión
Avda. Complutense 22, 28040, Madrid

Madrid, Julio de 2010

A mis padres

Índice general

Agradecimientos	xiii
Resumen	xv
1. Fusión nuclear por confinamiento magnético y física del plasma	1
1.1. Introducción	1
1.2. Fusión termonuclear	2
1.2.1. El criterio de Lawson	5
1.3. Dispositivos de Fusión Nuclear por Confinamiento Magnético y operación	6
1.3.1. Tokamak	7
1.3.2. Stellarator	8
1.3.3. ITER	9
1.3.4. Calentamiento y alimentación o abastecimiento	9
1.4. Transporte en el Plasma	10
1.4.1. Transporte clásico	12
1.4.2. Transporte neoclásico	13
1.4.3. Transporte anómalo	14
1.4.4. Confinamiento mejorado: Modo H	15
2. <i>Continuous Time Random Walk</i> y transporte difusivo	17
2.1. Random Walk	17
2.2. Continuous Time Random Walk	18
2.3. Del <i>CTRW</i> a la <i>Ecuación Maestra</i>	19
2.4. Transporte Fickiano	22
2.4.1. Ley de Fick y ecuación de la difusión	23
2.4.2. Las sumas de variables independiente e idénticamente distribuidas	23
2.4.3. GME y transporte Fickiano	23
2.4.4. Escalas características	25

3. <i>Continuous Time Random Walk</i> y transporte en plasmas de fusión por confinamiento magnético	27
3.1. La ausencia de escalas características en dispositivos de fusión	27
3.1.1. Degradación del confinamiento	28
3.1.2. Propagación de perturbaciones	29
3.1.3. Rigidez de perfiles	31
3.1.4. Tiempos de inactividad	31
3.2. <i>CTRW</i> y Transporte no difusivo	33
3.2.1. No localidad en el espacio	33
3.2.2. No localidad en el tiempo	38
3.3. Escenarios en transporte no difusivo	39
4. CUTIE	41
4.1. Líneas generales	41
4.1.1. Los aspectos clave	42
4.2. Ecuaciones de partida	43
4.3. Tokamak: Aproximaciones de las ecuaciones	44
4.4. La evolución de los campos	44
4.4.1. La autorregulación	45
4.5. Simulaciones realizadas: modo L y modo H	48
4.5.1. Simulación en modo L	48
4.5.2. Simulación en modo H	53
5. Tracers. Trayectorias y métodos de interpolación.	63
5.1. Tracers	63
5.2. Interpolación Spline	63
5.2.1. Comprobación	64
5.3. Interpolación temporal	67
5.4. Integración de trayectorias	68
5.4.1. Trayectorias de impurezas	68
6. Técnicas de análisis	71
6.1. Funciones de distribución	71
6.1.1. Distribución radial	71
6.1.2. Distribución del tamaño del salto y del tiempo de espera	72
6.2. Correlaciones de la velocidad radial	74
6.2.1. Correlación Lagrangiana	75
6.2.2. <i>Rescaled Range</i>	75
6.2.3. Velocidad acumulativa	76
6.2.4. Funciones de Estructura	76
6.3. Rango de validez del ajuste	77

7. Resultados	79
7.1. Modo L	79
7.1.1. Distribución radial	79
7.1.2. Función de distribución acumulativa	81
7.1.3. Distribución del tamaño del paso	81
7.1.4. Distribución del tiempo de espera	84
7.1.5. Funciones de Estructura	86
7.1.6. Rescaled Range	89
7.1.7. Velocidad Acumulativa	91
7.1.8. Recopilación de resultados	92
7.2. Modo H	93
7.2.1. Distribución radial	93
7.2.2. Función de distribución acumulativa	96
7.2.3. Distribución del tamaño del paso	97
7.2.4. Distribución del tiempo de espera	99
7.2.5. Funciones de Estructura	101
7.2.6. Rescaled Range	104
7.2.7. Velocidad acumulativa	105
7.2.8. Recopilación de los resultados	107
7.3. Movimiento de los trazadores en modos L y H	109
7.3.1. Asimetría en los pasos	109
7.3.2. Perfiles del tamaño del paso	110
7.3.3. Perfiles del tiempo de espera	111
7.3.4. Coeficiente de difusión fraccionario	111
7.3.5. Impacto de los ELMs	112
8. Interpretación de los resultados y Conclusiones	115
8.1. Características generales del estudio	115
8.2. Parámetros autosimilares	116
8.2.1. Modo L	116
8.2.2. Modo H	117
8.3. Movimiento de trazadores	119
8.4. Conclusiones	121
8.5. Proyectos Futuros	121
8.5.1. Trazadores en experimentos reales y simulaciones más realistas	121
8.5.2. Topología y Transporte	122
8.5.3. Estudios Neoclásicos	122
A. Transporte de trazadores en ESEL	125
A.1. El código ESEL	125
A.2. Trazadores en la simulación	126
A.3. Diagnósticos	126

A.3.1. Distribución del tamaño del paso	126
A.3.2. Distribución del tiempo de espera	129
A.3.3. Funciones de Estructura	130
A.3.4. Rescaled Range	131
A.4. Conclusiones	132
Bibliografía	135

Índice de figuras

1.1.	Energía de enlace por nucleón frente al número másico	3
1.2.	Secciones eficaces de distintas reacciones de fusión en función de la temperatura.	4
1.3.	Vista esquemática del diseño del tokamak.	7
1.4.	Vista esquemática del diseño de un stellarator.	8
3.1.	Evolución de la temperatura electrónica en varias posiciones radiales, tras el pulso frío(ver [24]).	29
3.2.	Propagación de fluctuaciones en temperatura electrónica (ver [25]) .	30
3.3.	Perfil en Temperatura: Resultados experimentales (puntos), ajuste (línea sólida) y predicción teórica (línea de puntos) a partir de las fuentes de calentamiento OH y ECH [26]	31
3.4.	Ejemplo a partir de datos de W-7AS. Ver [27].	32
3.5.	Distribuciones de Lévy en el espacio real.	35
3.6.	<i>CTRWs</i> con distribuciones tipo Lévy($\alpha = 1$) y Gaussiana.	35
3.7.	Espacio paramétrico α - β	40
4.1.	Perfiles de densidad y temperatura electrónica en estado estacionario.	49
4.2.	Perfiles de v_{pol} y $v_{E \times B}$ en estado estacionario.	50
4.3.	Perfil del factor de seguridad en CUTIE en $t = 4$ ms.	50
4.4.	Turbulencia electrostática cuantificada como $\langle (\delta v_r / v_d)^2 \rangle$	51
4.5.	Turbulencia magnética cuantificada como $\langle (\delta B_r / B_{\text{pol}})^2 \rangle$	51
4.6.	Fluctuaciones en la densidad electrónica en unidades de 10^{10} cm^{-3}	52
4.7.	Representación esquemática de la fuente y el sumidero en CUTIE.	54
4.8.	Perfiles de densidad en modo L y modo H	55
4.9.	Perfiles de temperatura electrónica en modo L y modo H	56
4.10.	Perfiles de temperatura iónica en modo L y modo H	56
4.11.	Frecuencia de colisiones en modo L y H	57
4.12.	Perfiles de velocidad poloidal del fluido en modo L y modo H	57
4.13.	Perfil de la densidad electrónica antes y durante un ELM.	58
4.14.	Perfil de la temperatura electrónica antes y durante un ELM.	59

4.15. Evolución temporal de $\langle n_e \rangle$ y $\delta n_e(r/a = 0.9)/\langle n_e \rangle$. El impacto de los ELMs es visible.	59
4.16. Fluctuaciones en la densidad electrónica en modo H en unidades de 10^{10} cm^{-3}	60
4.17. Turbulencia electrostática en modo H.	61
4.18. Turbulencia magnética en modo H.	61
5.1. Comparación entre los campos de velocidades poloidales calculados utilizando interpolación <i>spline</i> y reconstrucción de Fourier ($0 \leq r \leq a$, $\theta = \pi$, $z = Z_{\text{MAX}}/2$).	66
5.2. Comparación entre los campos de velocidades radiales calculados utilizando interpolación <i>spline</i> y reconstrucción de Fourier ($r = a/2$, $\theta = \pi$, $0 \leq z \leq Z_{\text{MAX}}$).	67
5.3. Comparación entre los campos de velocidades radiales calculados utilizando interpolación <i>spline</i> en una rejilla con $n_{z_{\text{new}}} = 65$ y reconstrucción de Fourier ($r = a/2$, $\theta = \pi$, $0 \leq z \leq Z_{\text{MAX}}$).	68
5.4. Ejemplos de trayectoria radial.	69
6.1. Trayectorias “real” y reducidas a <i>CTRW</i> para dos umbrales, junto con la señal de velocidad.	78
7.1. Distribución radial de trazadores en distintos instantes de tiempo, junto con ajuste.	80
7.2. Función de distribución acumulativa, e intervalo de ley de potencia. En el interior: Intervalo del ajuste y función de ajuste.	82
7.3. Distribución del tamaño del paso para distintos valores de v_{th} , junto con el mejor ajuste y rango de decaimiento potencial. La escala es logarítmica y el tamaño del paso se normaliza por el radio menor a	83
7.4. Distribución del tiempo de espera para distintos valores de v_{th} , junto con el mejor ajuste y rango de decaimiento potencial. La escala es logarítmica.	84
7.5. Distribuciones del tiempo de espera para distintos valores de v_{th} en escala lin-log. En $v_{\text{th}} = 100 \text{ m/s}$ el transporte está dominado por el movimiento dentro de eddies.	86
7.6. Perfil del tiempo de decorrelación definido como tiempo t_d tal que la autocorrelación de la densidad $C_{n_e}(r/a, t_d) = e^{-1}$	87
7.7. Ejemplo de Funciones de estructura de la velocidad de un tracer para distintos órdenes, junto con sus correspondientes ajustes.	88
7.8. Ejemplo de función R/S de la velocidad de un tracer, junto con su ajuste (Escala logarítmica).	90

7.9. Distribución de la velocidad acumulativa durante intervalos de tiempo $\tau_M = 5$ ms, junto con ajuste y rango de decaimiento potencial (Escala lineal-logarítmica).	91
7.10. Distribución radial de trazadores en modo H en diferentes instantes de tiempo tras su lanzamiento. (Escala lineal-logarítmica).	94
7.11. Distribución radial de trazadores en modos L y H 8 ms tras su lanzamiento.	95
7.12. Ajustes de las distribuciones radiales en $t = 8$ ms. La escala es logarítmica. En modo L se representa $PDF_L \rho_{0L} - \rho $. En modo H $PDF_H \rho - \rho_{0H} $	96
7.13. Función de distribución acumulativa en modo H e intervalo de ley de potencia. En el interior: Intervalo del ajuste y función de ajuste.	97
7.14. Posición y velocidad radiales de una partícula a lo largo de la simulación en modo H. Nótese cómo la velocidad varía en al menos un orden de magnitud cuando la posición es $r/a \lesssim 0.35$	98
7.15. Distribuciones del tamaño del paso obtenidas en modo H para distintos v_{th} . Escala logarítmica.	99
7.16. Mejores ajustes en modo L y H. Escala logarítmica.	100
7.17. Distribuciones del tiempo del paso para distintos umbrales en modo H. Escala logarítmica.	101
7.18. Mejores ajustes para las distribuciones del tiempo de espera en modo L y H. Escala logarítmica.	102
7.19. Funciones de estructura de tipo I y II, junto con ajustes. Obsérvese el pico presente en el tipo II para τ bajos, y ausente en tipo II.	103
7.20. Ejemplos de curvas R/S en modo H, junto con ajustes. Escala logarítmica.	105
7.21. Barrido en τ : Distribuciones de velocidad acumulativa en modo H, junto con el mejor resultado en modo L. Escala Lineal-Logarítmica	106
7.22. Distribuciones de velocidad acumulativa en modos L y H, junto con los mejores ajustes. Escala Logarítmica.	107
7.23. Mecanismo por el que se producen largas excursiones radiales, con diferencias entre el modo L y el modo H.	108
7.24. Perfiles de los pasos medios positivos y negativos en modos L y H	110
7.25. Perfiles del promedio del cuadrado de los desplazamientos en modo L y H, junto con número de eventos	110
7.26. Perfiles del tiempo medio de atrapamiento en simulaciones de modo L y H, junto con el número de eventos	111
7.27. Perfiles de las cantidades $D_{\alpha,\beta}$ en modo L y H, junto con número de eventos.	112
7.28. Trayectorias (componente radial) de dos trazadores en las inmediaciones del pedestal.	113

A.1. Componente radial de la trayectoria de distintos trazadores en ESEL.	127
A.2. Distribuciones del tamaño del paso en ESEL para distintos valores del umbral de velocidad. Escala Logarítmica	128
A.3. Distribuciones del tiempo de espera en ESEL para $v_{th} = 0.020$. Escala Logarítmica	129
A.4. Ejemplo de Función de estructura de orden $q = 1$ en ESEL. Escala Logarítmica	130
A.5. Ejemplo de curva R/S en ESEL. Escala Logarítmica	131

Agradecimientos

El trabajo de esta tesis ha sido realizado gracias a la ayuda y los ánimos que he recibido por parte de muchas personas a las que quiero mostrar mi gratitud. No es una tarea fácil enfrentarse a la realización de una tesis doctoral: requiere un nivel de constancia y creatividad que es difícil mantener, y mucho más difícil habría sido para mi, sin duda, sin todos esos apoyos que mucha gente que aprecio me ha brindado.

Al doctor Boudewijn Ph. van Milligen le agradezco su labor como director, además de ser como científico un ejemplo a seguir. Su dedicación ha estado muy por encima de sus obligaciones y sus consejos y su paciencia me han servido de incentivo constante, y me han ayudado a ir avanzando hasta completar la memoria que aquí presento. Por todo ello le doy las gracias.

También agradezco a cuantos me han ayudado dentro del Laboratorio Nacional de Fusión. Las charlas con Víctor Tribaldos han sido más que didácticas, y a Iván Calvo le agradezco que me haya echado una mano en más de una ocasión y que me haya brindado la oportunidad de trabajar con él en un nuevo proyecto. Además le tengo que dar las gracias a Carlos Hidalgo por el interés que siempre ha mostrado hacia mi trabajo y, fuera del Laboratorio, a Raúl Sánchez por haber hecho un hueco en su apretada agenda siempre que he necesitado su ayuda.

Durante mis estancias en Inglaterra he tenido el placer de trabajar con Chippy Thyagaraja. Probablemente nunca leerá esta memoria, por estar escrita en castellano, pero no por eso debo dejar de decir que su capacidad de trabajo y la ilusión que muestra día a día por todos sus proyectos me han servido para tomar impulso y continuar con mi tesis. Es un científico brillante y le agradezco que me diera la oportunidad de colaborar con él.

Me he dado cuenta en estos años de lo importante que es tener unos buenos compañeros para hacer frente a los momentos duros. Es mas, muchas veces me he parado a pensar en cómo hubiesen sido mis años de estudiante de doctorado si, cuando llegué a Madrid sin conocer a nadie, no me hubiese encontrado con el ambiente de trabajo en el que he vivido tan buenos ratos. Recordaré siempre con cariño el tiempo que he pasado con todos y cada uno de mis compañeros. Por lo tanto no puedo dejar de agradecer los momentos compartidos con ellos, tanto en nuestro Edificio 20 como fuera de el, en nuestro tiempo libre. Agradezco, pues, la

acogida que he tenido por los que estaban cuando llegué y la disposición de los que han ido viniendo después: David Jiménez Rey, José Manuel García, Josep María Fontdecaba, Giuseppe Rattá, Laura Barrera, Alfonso Ros, Arturo Alonso, Daniel Carralero, Andrés Bustos, Tim Happel e Iván Vargas.

A mis amigos de Zaragoza, Jorge, José Carlos, Alberto, Vanesa y Elisa les agradezco los buenos momentos que he pasado con ellos en la Glorieta y que espero seguir pasando, porque es uno de los mejores momentos de la semana para mí.

Tengo que agradecer a mi familia el afecto y el apoyo que he recibido. Han mostrado siempre mucho interés por lo que he estado haciendo y sé que se han preocupado mucho por mí. A mis padres les he dedicado esta memoria porque es la forma que tengo de agradecerles que me hayan dado, con su esfuerzo diario, acceso a la educación y que siempre me animasen a estudiar en la universidad, que me abrió las puertas para obtener la beca FPI-CIEMAT con la que he realizado mi trabajo. A mis hermanos Irene y Eduardo les agradezco que siempre que hayan tenido oportunidad se hayan interesado por mi trabajo y me hayan animado para seguir adelante, y a mi tía Asun también le doy las gracias porque cada fin de semana ha mostrado su inquietud por cómo me han ido las cosas.

He dejado para el final mi agradecimiento a Alba, mi amor, porque su comprensión, su paciencia y su cariño han sido un esfuerzo que no sé cómo podré compensar. Reconozco que ha habido momentos en los que sin su apoyo entusiasta y sincero habría sido todo mucho más difícil, y los sacrificios que he realizado en este tiempo han sido también los suyos y por eso le dedico estas últimas palabras, para que sepa cuanto reconozco y agradezco lo que hace por mí.

Estoy convencido de que tendría que agradecer a mucha más gente porque cuando uno se pone a recapitular tras tanto tiempo siempre se quedan cosas en el tintero, y siempre se olvida a alguien importante. Espero que aquéllos que echen en falta su nombre en estas dos páginas me perdonen por mi despiste y sepan que también les estoy agradecido.

Guillermo Sánchez Burillo
Madrid, Mayo de 2010.

Resumen

El entendimiento de los mecanismos físicos responsables del transporte en plasmas de fusión confinados magnéticamente es de gran importancia para la fusión nuclear. Tanto la comprensión como el control de dichos mecanismos es esencial para el desarrollo y el diseño de futuros reactores.

Sin embargo, ciertos aspectos del transporte en plasmas no se comprenden bien en la actualidad. Un plasma en un dispositivo toroidal de fusión se encuentra en un estado muy alejado del equilibrio termodinámico, lo cual induce la aparición de determinados tipos de inestabilidades que hacen que el transporte sea turbulento, deteriorándose la calidad del confinamiento y por lo tanto el rendimiento del reactor. Para intentar minimizar estos efectos es necesario entender la naturaleza del transporte turbulento, para lo cual se han desarrollado diversos modelos teóricos, así como simulaciones.

En presencia de turbulencia, las estimaciones de la magnitud del transporte radial –la dirección más importante de cara al confinamiento– lo infravaloran frecuentemente, en ocasiones en varios órdenes de magnitud. Por otra parte, se observan habitualmente gran cantidad de fenómenos que contradicen el marco difusivo con el que tradicionalmente se ha pretendido describir el transporte.

Se ha sugerido que el error cometido a la hora de realizar tales estimaciones estriba en el hecho de que se asume que el transporte es local y Markoviano, es decir, que espacialmente sólo depende de las condiciones en un entorno local del punto donde se quiere medir el transporte, y temporalmente sólo depende del valor en los instantes inmediatamente anteriores, y no hay ningún efecto de memoria. Se puede demostrar que cuando el transporte es Markoviano y local, el movimiento está dominado por escalas características espacio-temporales. Evidencias experimentales de la existencia de fenómenos de correlaciones de larga distancia y larga duración indican que la hipótesis de localidad y Markovianidad en el transporte es errónea en general. Dicho de otra manera, no existen en el transporte escalas espacio-temporales características.

Algunos de los avances realizados en los últimos años van en dicha dirección. Enfoques novedosos como el del transporte por avalanchas, en el contexto de la Críticidad Auto Organizada (SOC, iniciales del inglés “Self-Organized Criticality”), o el desarrollo de modelos que describen la formación de estructuras turbulen-

tas de tipo serpentina (“streamers” en inglés) han permitido abordar el problema sin considerar escalas características. Otra manera de atacar el problema consiste en utilizar el formalismo del Camino Aleatorio de Tiempo Continuo (*CTRW* o “Continuous Time Random Walk” en inglés) para describir desde un punto de vista probabilístico el transporte, utilizando funciones de distribución que carezcan de escalas características. En este contexto, se puede obtener una ecuación de transporte, llamada ecuación de transporte fraccionario, cuya forma está determinada por ciertos parámetros (α , β) relacionados con las funciones de distribución tomadas en consideración. Esta ecuación, al carecer de escalas espacio-temporales características, puede modelar fenómenos de correlaciones a larga distancia y larga persistencia temporal. Esta ecuación es una alternativa a la ecuación de transporte difusivo utilizada habitualmente, la cual es un caso particular de la fraccionaria, más general.

Una de las herramientas más potentes para analizar el transporte de partículas es el uso de trazadores (“tracers” en inglés) pasivos. El estudio de una cantidad estadísticamente significativa de trayectorias de partículas permite conocer de primera mano lo que está sucediendo en el interior del sistema que se quiere entender. Es técnicamente muy complicado realizar estos estudios en dispositivos experimentales. Sin embargo se encuentran en la literatura numerosos trabajos en los que se estudia el transporte de trazadores en simulaciones de plasmas turbulentos. En general, dichas simulaciones modelan la turbulencia generada por un determinado tipo de inestabilidad. Además se centran en el análisis de trayectorias de partículas pasivas en la zona de influencia de la inestabilidad modelada. De esta manera se puede entender cómo un determinado tipo de turbulencia afecta al transporte, si éste es o no de tipo fraccionario, y, en caso afirmativo, determinar los valores de α y β .

Sin embargo no se encuentran con facilidad estudios de transporte de trazadores (i) a nivel global y efectivo, ni tampoco (ii) en simulaciones más completas y que modelen la turbulencia generada por un mayor número de inestabilidades. En los dispositivos de fusión que operan en la actualidad, es habitual encontrarse con situaciones donde la turbulencia está generada por varios tipos inestabilidades que actúan simultáneamente y que tienen orígenes diversos. Por lo tanto, es importante conocer el transporte en dichas condiciones. Además es necesario saber cómo es el transporte a nivel efectivo y global que se produce durante la operación de una máquina para conocer la calidad del confinamiento, y también se ha de tener en cuenta a la hora del diseño de futuros reactores.

El objetivo de esta tesis es ocupar en parte este hueco. En el trabajo que aquí se presenta se ha estudiado y caracterizado el transporte de trazadores en un código de turbulencia. Para hacer tal estudio es necesario que se den algunas condiciones en la simulación escogida, como que el modelado de la turbulencia sea autoconsistente. El código escogido, llamado **CUTIE**, modela diversos tipos de

inestabilidades y por lo tanto ofrece un marco más realista en el sentido de que es más completo. Por otra parte, el análisis ha sido realizado a nivel global, sin restringir, a priori, el dominio radial a analizar.

A la hora de emprender un trabajo de estas características, se encuentran algunas dificultades. El efecto que las barreras causan en el transporte neto es evidente, y distorsiona las medidas. Además, al tratarse de una simulación con vocación de ser realista, los diversos tipos de inestabilidades presentes en el código conviven con otros elementos, como barreras de transporte internas. Esto afecta sin duda a la limpieza de los resultados. No obstante, aquí se ha conseguido analizar con éxito el transporte en una simulación en modo L. Se ha observado que el transporte está mejor descrito por la ecuación de difusión fraccionaria que por la ecuación difusiva tradicional, pudiéndose determinar los índices autosimilares α y β .

También se ha trabajado con trazadores inyectados en una simulación de similares características pero en un régimen de confinamiento mejorado o modo H. Esta parte del trabajo aquí presentado es novedoso asimismo, puesto que no existen en la literatura científica comparaciones entre el transporte de trazadores en modo L y modo H. En el análisis de las trayectorias en este último caso, se ha observado un fuerte impacto de las barreras del sistema en el movimiento de las partículas, mayor que en la anterior simulación.

Esto hace que el transporte tenga un carácter más local, y que por lo tanto la ecuación de difusión fraccionaria no sea tan buena candidata para la descripción del movimiento en modo H.

Al margen de la medida de los parámetros autosimilares, el estudio de las trayectorias ha permitido extraer información relevante acerca de las diferencias entre el transporte en modo L y modo H. Se observa, por ejemplo que en la segunda simulación el tamaño medio de los pasos que dan las partículas (entendiendo el transporte como una realización del *CTRW*) es mayor que en la primera, a pesar de que en modo L la difusión es mayor. También se han encontrado que los perfiles del tamaño de los pasos son claramente distintos en ambas simulaciones, o el fuerte impacto que los ELMs (“Edge Localised Modes”) llegan a tener en el transporte.

Esta memoria se estructura del siguiente modo: en el primer capítulo se introduce brevemente la fusión termonuclear controlada, explicando los principios básicos e introduciendo la noción de plasma y el transporte. En este capítulo también se ven las diferencias entre los regímenes de transporte L y H. En el segundo capítulo se introduce el formalismo *CTRW* y se muestra cómo puede obtenerse una Ecuación Maestra para describir el transporte. También se verá cómo a partir de la ecuación maestra se puede obtener la ecuación de difusión utilizando determinadas funciones de distribución, con escalas características, que describen el movimiento de las partículas. En el capítulo 3 se explican, con varios ejemplos, los problemas que aparecen cuando se intenta describir el transporte mediante

escalas características espacio-temporales. En el mismo capítulo se explica cómo la utilización de funciones de distribución sin escalas características para modelar el transporte da lugar a descripciones alternativas a la difusiva tradicional. Se trata de la ecuación del transporte fraccionario, que contempla fenómenos de largas correlaciones espacio-temporales. En el capítulo 4 se introduce el código de turbulencia CUTIE, con el que se ha trabajado. Se explican sus principales características, así como los motivos por los que ha sido escogido para nuestro estudio. Finalmente se muestran las características de las simulaciones realizadas. En el quinto capítulo se explica cómo se ha realizado la inyección de las partículas en el código y como se ha implementado el seguimiento de partículas. En el capítulo 6 se introducen los métodos de diagnóstico utilizados para analizar las trayectorias y extraer información de las mismas acerca de la naturaleza del transporte. El capítulo 7 recopila los resultados de la aplicación de los diagnósticos explicados en el capítulo anterior. Los resultados de cada técnica de análisis son presentados. Se han analizado tanto las trayectorias de la simulación en modo L como las de modo H. También se incluyen en este capítulo comparaciones entre ambas simulaciones mediante métodos ajenos a los del capítulo 6. Finalmente el capítulo de Conclusiones interpreta los resultados y se detallan las principales características del transporte, obtenidas a partir de los análisis realizados. Además se presentan al final las conclusiones así como los proyectos futuros de interés, relacionados con lo expuesto en esta memoria. La memoria termina con un breve apéndice donde se analiza el transporte en otro código, ESEL. Se comprueba que las características propias del transporte en dicho código hacen que el movimiento de las partículas sea quizá demasiado complejo para ser descrito con los modelos tomados como referencia en este trabajo.

Fruto de el trabajo recogido en esta memoria han sido publicados dos artículos en revistas científicas:

- “Analysis of the radial transport of tracers in a turbulence simulation”.
G. Sánchez Burillo, B. Ph. van Milligen and A. Thyagaraja, *Phys. Plasmas* **16**, 042319 (2009).
- “Test particle analysis in L- and H-mode simulations”.
G. Sánchez Burillo, B. Ph. van Milligen and A. Thyagaraja, *Phys. Plasmas* **17**, 052304 (2010).

Además parte de este trabajo ha sido presentado en congresos:

- 35th EPS Conference on Plasma Physics en Hersonissos, Grecia. Junio de 2008.
 - Sesión de póster: “Study of radial transport of tracers in CUTIE”.
- 13th EU-US Transport Task Force Workshop and 1st EFDA Transport Topical Group Meeting, en Copenhague, Dinamarca. Septiembre de 2008.

- Sesión de póster: “Tracers as plasma diagnostic”.
- 2nd EFDA-TTG Workshop en JET, Culham, Reino Unido. Septiembre de 2009.
 - Contribución oral: “Tracer particle analysis in L and H mode simulations”.

Capítulo 1

Fusión nuclear por confinamiento magnético y física del plasma

1.1. Introducción

El energético es sin duda uno de los retos más importantes a los que se enfrenta la humanidad en el siglo XXI. El incremento de la demanda de energía en las últimas décadas es consecuencia del aumento de la población mundial así como del desarrollo económico e industrial global, tendencias que se espera que continúen al alza. Mientras, el aprovechamiento de energía procedente de combustibles fósiles o nucleares está condicionado por las reservas de los mismos, y su techo de producción puede ser alcanzado durante las próximas décadas.

Los combustibles fósiles como el petróleo, el carbón o el gas natural, se acumulan en reservas limitadas. Además ofrecen el inconveniente de la emisión de gases contaminantes a los que se relaciona con el calentamiento global.

Por otra parte, la fisión nuclear presenta otros inconvenientes, como su fuerte rechazo social y una gestión de residuos cuya actividad perdura durante largo tiempo.

Países como España, por añadidura, tienen una dependencia del exterior casi total a la hora de producir energía utilizable a través de cualquiera de estas fuentes.

Las fuentes de energía renovables son una alternativa en auge, limpia, y que ofrece un alto grado de autonomía energética al no tener que adquirir combustibles procedentes del exterior. Sin embargo son de menor eficiencia, y no pueden garantizar un suministro estable puesto que su producción depende, por ejemplo, de las condiciones climatológicas, que son fluctuantes.

La fusión nuclear es una alternativa de gran potencial por diversas razones. La liberación de energía por gramo de combustible es mucho mayor que cualquiera de sus competidoras, no emite gases causantes del efecto invernadero, las reservas de

combustible son prácticamente ilimitadas, no genera cantidades significativas de residuos radiactivos, y la actividad de éstos es de corta vida media (~ 100 años) en comparación con los residuos de la fisión.

Todo esto hace que la fusión sea vista como una esperanza de cara al futuro, pero también es todo un desafío científico y tecnológico, puesto que hasta el momento no se ha conseguido producir energía de manera viable por esta vía.

La demostración de la viabilidad energética y económica de la fusión termonuclear es el principal objetivo del reactor experimental ITER, actualmente en construcción. Pese a que es un dispositivo destinado al estudio científico, se espera que abra la puerta a proyectos futuros de desarrollo de plantas de fusión nuclear comerciales.

1.2. Fusión termonuclear

En física, la fusión nuclear es la unión de núcleos de átomos ligeros para dar lugar a otro núcleo más masivo. Durante el proceso de fusión la masa no se conserva, existe una diferencia entre las masas inicial (de los reactivos) y final (de los productos), que se expresa como $\Delta m = m_{\text{fin}} - m_{\text{ini}}$. Esto quiere decir que se ha liberado una cantidad de energía que viene determinada por la ecuación derivada por Einstein en 1905: $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$.

Por ejemplo, F. W. Aston descubrió en 1920 que la masa del núcleo de Helio es ligeramente inferior a cuatro veces la masa del núcleo de Hidrógeno.

En 1928 George Gamow descubrió que, en el contexto de la mecánica cuántica, existe una probabilidad diferente de cero de que dos partículas con carga positiva (como los núcleos atómicos) superen la repulsión electrostática que las repele entre sí.

Una década más tarde, Hans Bethe propuso una serie de procesos nucleares mediante los cuales, en el interior de las estrellas, el hidrógeno se fusiona para producir helio.

En efecto, el paradigma de la fusión nuclear lo tenemos en los procesos que acontecen en el núcleo de las estrellas, donde las reacciones de fusión suceden de forma natural. La energía que nos llega procedente del Sol no es sino producto de la fusión que en su interior se produce, fundamentalmente entre núcleos de hidrógeno para dar como resultado núcleos de helio.

De manera que la fusión nuclear es el proceso contrario a la fisión, en la que núcleos pesados se separan en otros más ligeros. Si se representa la energía de enlace por nucleón frente al número másico de un elemento, se observa que la mayor cantidad de energía es liberada al fusionar átomos ligeros (ver figura 1.1).

La probabilidad de que de que se produzca la fusión entre núcleos atómicos es tan baja que en la práctica no se produce de forma espontánea en la Tierra, salvo en unas determinadas condiciones físicas. A la hora de escoger una reacción

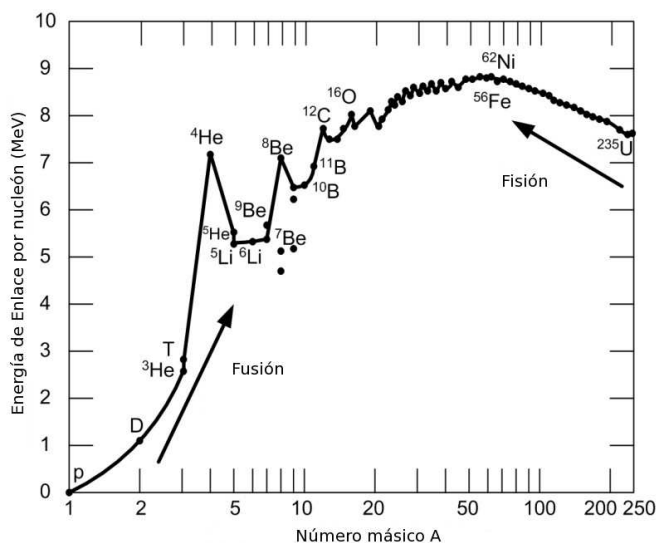


Figura 1.1: Energía de enlace por nucleón frente al número másico

de fusión apropiada para la producción de energía se ha de tener en cuenta no sólo la cantidad de energía liberada sino también la probabilidad de que dicha reacción se lleve a cabo. La sección eficaz (σ) es la magnitud física que da cuenta de la probabilidad de interacción entre dos partículas. Tiene dimensiones de superficie y habitualmente se mide en barns ($1b = 10^{-28} \text{ m}^2$).

La sección eficaz de cada reacción depende de la temperatura, puesto que ésta se relaciona con la energía cinética de las partículas, y cuanto mayor sea su velocidad mayor será la probabilidad de que superen la barrera de potencial electrostático.

En el interior de las estrellas, merced a su gran campo gravitatorio, se combinan una muy alta temperatura y elevadísima densidad, que favorece las interacciones entre núcleos, lo cual facilita el proceso de fusión. Debido a la alta temperatura, el Hidrógeno no se encuentra en estado gaseoso sino que está completamente ionizado. Los núcleos atómicos han perdido los electrones, formándose lo que llamamos un plasma. Los estudios referentes a la fusión por confinamiento magnético tienen como fin la reproducción de este tipo de reacciones para el aprovechamiento de los humanos. El confinamiento, en lugar de realizarse mediante un campo gravitatorio, se pretende conseguir utilizando campos electromagnéticos aprovechando que el plasma está compuesto de partículas con carga eléctrica. Por eso es tan importante el conocimiento de la naturaleza del plasma.

Según la gráfica 1.2 la reacción entre partículas de Deuterio y Tritio es la más atractiva para el aprovechamiento de la energía de fusión nuclear, por ser su sección eficaz mayor que las demás y porque el máximo se produce a temperaturas más bajas. Por lo tanto la reacción $D - T$ sería la idónea, al menos para los primeros

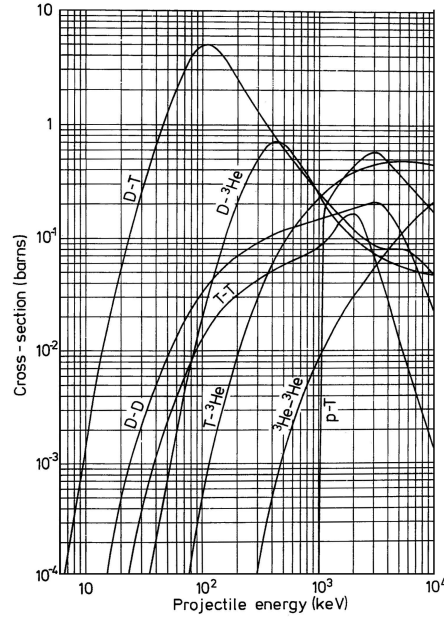
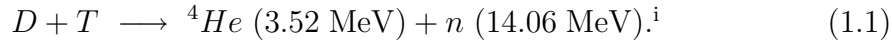


Figura 1.2: Secciones eficaces de distintas reacciones de fusión en función de la temperatura.

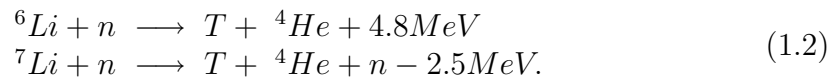
reactores con fines comerciales.

La reacción es la siguiente:



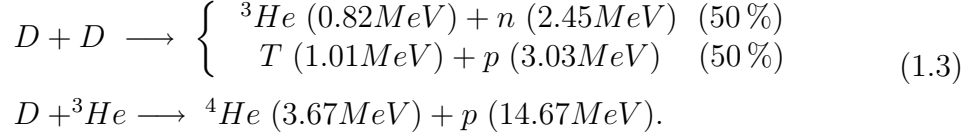
Los productos son un neutrón y una partícula alfa, donde el primero lleva la mayor parte de la energía.

Los reactivos, como se ha dicho, son núcleos de Tritio y Deuterio. El Deuterio es abundante ya que se puede extraer de los océanos. El 0.015 % del agua es agua pesada, D_2O . Las moléculas de agua semipesada, HDO , representan aproximadamente un 0.031 % del agua. El Tritio sin embargo es muy escaso debido a su naturaleza radiactiva, con una vida media de 12 años. No obstante se puede obtener aprovechando los neutrones producto de la reacción detallada en la ecuación (1.1) para hacerlos reaccionar con Litio, relativamente abundante en la corteza terrestre y fácil de obtener.



Otras reacciones secundarias serían las siguientes.

ⁱLa energía se expresa en electrón-Voltios (eV). $1 \text{ eV} = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.



De hecho, una hipotética segunda generación de reactores comerciales estaría basada en la reacciones de fusión entre núcleos de Deuterio. Tendrían la ventaja de producir menos neutrones y éstos de menor energía. Con esto se limitarían los daños que los neutrones ocasionan en la pared de los dispositivos de fusión.

1.2.1. El criterio de Lawson

Para que un reactor de fusión sea rentable energéticamente, ha de obtener un balance positivo entre la energía invertida y obtenida. La energía que se libera como consecuencia de las reacciones de fusión ha de ser suficiente para compensar las pérdidas, además de la energía necesaria para operar.

Teniendo en cuenta la sección eficaz de la reacción de fusión pertinente, se ha de cumplir una relación entre la temperatura, la densidad y el tiempo durante el cual se confina la energía producida para que la operación sea rentable.

En un lado del balance energético, situamos la potencia de fusión, que es el término que da cuenta de la energía obtenida por las reacciones de fusión producidas en el plasma. Sólo tenemos en cuenta la energía asociada a las partículas alfa, puesto que los neutrones, al ser eléctricamente neutros, no pueden ser confinados utilizando campos electromagnéticos. Por ejemplo en la reacción (1.1), y para cantidades iguales de Deuterio y Tritio, la potencia de fusión (P_α) sería:

$$P_\alpha = n_D n_T \langle \sigma v \rangle E_\alpha = \frac{1}{4} n_e^2 \langle \sigma v \rangle E_\alpha \tag{1.4}$$

donde las densidades de Tritio y Deuterio, respectivamente son n_T y n_D , v es la velocidad relativa entre los dos núcleos y σ su sección eficaz con lo que $\langle \sigma v \rangle$ es la tasa de reacciones y E_α es la energía de una partícula alfa resultante de la reacción. La densidad de electrones es n_e , que es igual a la densidad total de iones, es decir $n_{\text{ion}} = n_T + n_D = n_e$. El factor $\frac{1}{4}$ de la ecuación (1.4) es consecuencia de la igualdad de densidades $n_T = n_D$, puesto que $n_T n_D = (\frac{1}{2} n_e)^2$.

En el lado opuesto del balance tenemos las pérdidas, que principalmente se producen por transporte de calor, fuga de partículas y radiación (por ejemplo bremsstrahlung). La densidad de potencia perdida total es P_{loss} .

Suponiendo que la cantidad de deuterio y de tritio es la misma, que ambas especies tienen la misma temperatura T , y que no hay ninguna otra especie iónica en el plasma, la densidad de energía térmica del plasma es $3n_e T$ ⁱⁱ. Entonces el

ⁱⁱLa temperatura expresada en electrón-Voltios (eV). $1 \text{ eV} = 1.1604 \cdot 10^4 \text{ K}$.

tiempo característico de pérdida de energía (τ_E), llamado tiempo de confinamiento de la energía es la relación entre la densidad de energía y la tasa de pérdidas, es decir:

$$\tau_E = \frac{3n_e T}{P_{\text{loss}}}. \quad (1.5)$$

Lawson [1] estableció un criterio para la operación de dispositivos de fusión con producción neta de energía. El criterio de Lawson dice que la potencia de fusión ha de compensar las pérdidas, es decir: $P_\alpha \geq P_{\text{loss}}$, que se puede escribir utilizando las expresiones (1.4) y (1.5) como:

$$n_e T \tau_E \geq \frac{12}{E_\alpha} \frac{T^2}{\langle \sigma v \rangle}. \quad (1.6)$$

La cantidad $T^2/\langle \sigma v \rangle$ es función de la temperatura. Su mínimo absoluto indica el valor más bajo que puede tener el producto triple $n_e T \tau_E$. En la reacción (1.1) el mínimo vale aproximadamente $10^{21} \text{keVsm}^{-3}$. El criterio de Lawson establece, por lo tanto, que para que un reactor de fusión sea eficiente ha de cumplirse que:

$$n_e T \tau_E \geq 10^{21} \text{keVsm}^{-3}. \quad (1.7)$$

Es el llamado triple producto de Lawson.

1.3. Dispositivos de Fusión Nuclear por Confinamiento Magnético y operación

En la fusión nuclear por confinamiento magnético se emplean campos magnéticos para confinar el plasma, a los que las partículas que lo forman son sensibles, al tener carga eléctrica. Los dispositivos de fusión por confinamiento magnético tienen el objetivo de alcanzar el triple producto establecido por el criterio de Lawson, para demostrar la viabilidad de la fusión. Pese a utilizar densidades relativamente bajas, se persigue alcanzar el triple producto intentando prolongar el tiempo de confinamiento y con elevadas temperaturas. Otra manera de atacar el problema consiste en utilizar bajos tiempos de confinamiento pero muy altas densidades, como en la fusión inercial.

Los dispositivos de fusión por confinamiento magnético más exitosos tienen geometría toroidal. Las partículas siguen líneas de campo, creado por bobinas magnéticas, que se cierran sobre si mismas. El plasma sigue la geometría marcada por las líneas de campo, a su vez dependientes de las bobinas. Las dimensiones del toroide dependen de las bobinas. El radio menor y mayor del toro se denotan como a y R , respectivamente. La relación de aspecto es R/a . Para las direcciones radial, poloidal, y toroidal se suelen utilizar los símbolos r , θ y ϕ , respectivamente.

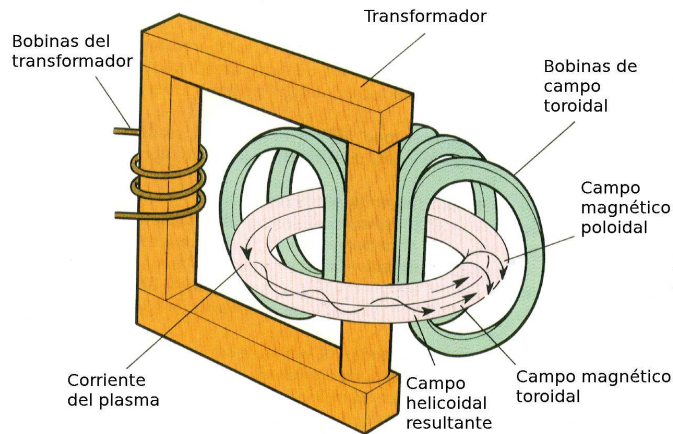


Figura 1.3: Vista esquemática del diseño del tokamak.

Sin embargo, en un sistema de campo magnético puramente toroidal, la curvatura y el gradiente del módulo del propio campo hacen que aparezcan separaciones de cargas que inducen derivas hacia el exterior del plasma, lo cual hace que la configuración puramente toroidal tenga pérdidas. Para solucionarlo se establece una nueva componente magnética, en la dirección poloidal, que retuerce las líneas de campo. En condiciones ideales, de ausencia de estocasticidad, cada línea de campo define una superficie magnética.

Existen dos estrategias posibles a la hora de crear el campo magnético poloidal: Se puede inducir una corriente toroidal en el plasma que lo genere, o se pueden utilizar las bobinas externas.

1.3.1. Tokamak

Los Tokamaks son dispositivos de fusión por confinamiento magnético toroidales donde el campo poloidal se crea mediante una corriente en el plasma. Fueron propuestos por los científicos rusos Sajarov y Tamm en 1951 [2]. Utilizando el propio plasma como el secundario de un transformador, se genera una corriente en el plasma en la dirección toroidal, lo cual induce la aparición de un campo magnético poloidal, que sumado a las bobinas externas que generan el campo magnético toroidal, establece la configuración magnética de la máquina. El funcionamiento del Tokamak se representa esquemáticamente en la figura 1.3.

El hecho de utilizar un transformador implica que el funcionamiento del tokamak ha de ser pulsado, no puede trabajar de forma continua.

La configuración magnética en los tokamaks convencionales requiere, para ser estable, que la componente del campo magnético en la dirección toroidal (B_ϕ) sea

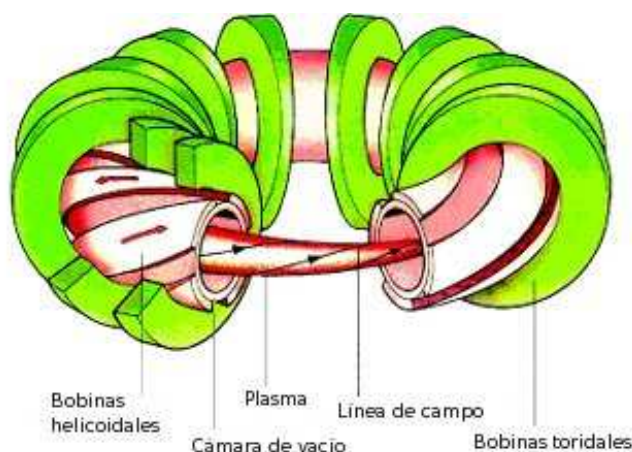


Figura 1.4: Vista esquemática del diseño de un stellarator.

mucho mayor que la poloidal (B_θ) (los RFP, iniciales de “reversed field pinch”, pese a ser muy parecidos a los tokamaks, son una excepción en este aspecto. La corriente toroidal del plasma en los RFP es mayor que en los tokamaks convencionales y $B_\theta \sim B_\phi$).

Además se requiere que la componente toroidal tenga una dependencia radial del tipo $B_\phi \propto 1/r$ [3].

Relacionado con la configuración magnética está el llamado factor de seguridad q , que se define:

$$q = \frac{rB_\phi}{RB_\theta} \quad (1.8)$$

El perfil de q suele variar de 1 a 5, aproximadamente.

El mayor tokamak operando en la actualidad es JET, en Culham, Reino Unido.

1.3.2. Stellarator

En los Stellarators el campo magnético poloidal se crea mediante bobinas exteriores al plasma. Por lo tanto, no existen corrientes apreciables en el plasma, y todas las componentes del campo magnético son creadas por las bobinas externas. Las bobinas que generan el campo poloidal pueden ser helicoidales, a las que se unen las bobinas toroidales similares a las de los tokamaks. Otros diseños utilizan unas bobinas no planas, consistentes en módulos, que genera todo el campo.

El stellarator fue propuesto por Spitzer en 1958 [4]. Se representa esquemáticamente su funcionamiento en la figura 1.4.

Al carecer de transformador, el Stellarator tiene la ventaja frente al tokamak de poder operar de forma continua. Sin embargo presenta el inconveniente de

su complicado diseño, especialmente del bobinado, desde el punto de vista de ingeniería.

En Stellarators, en lugar del factor q se utiliza su inversa, $\iota/2\pi$.

Ejemplos de stellarators que operan en la actualidad son LHD en Toki, Japón, o TJ-II en Madrid, España. En Greiswald, Alemania, está en construcción el stellarator W7X, de nueva generación.

1.3.3. ITER

A día de hoy ningún dispositivo experimental de fusión por confinamiento magnético ha conseguido tener un rendimiento energético suficientemente elevado desde el punto de vista comercial. El proyecto internacional ITER (“International Thermonuclear Experimental Reactor”) tiene el objetivo de demostrar la viabilidad de la fusión como fuente de energía. Será un reactor de tipo Tokamak, por su más sencilla construcción y diseño, y porque los Tokamaks están una generación por delante de los Stellarators en cuanto a prestaciones. El dispositivo se instalará en Cadarache, Francia.

1.3.4. Calentamiento y alimentación o abastecimiento

El calentamiento del plasma es de trascendental importancia para el éxito de la fusión. Cuanto más alta sea la temperatura más cerca se estará del punto triple (ecuación (1.7)) del criterio de Lawson. Una vez que el plasma entra en ignición, la temperatura del plasma se mantiene gracias al calentamiento aportado por las partículas alfa liberadas durante las fusiones nucleares. Sin embargo, para alcanzar dicho punto es necesario utilizar sistemas de calentamiento para aumentar la temperatura del plasma.

Los métodos de calentamiento utilizados son:

- Calentamiento Óhmico. En los dispositivos de corriente, es decir, los tokamaks, se tiene una componente de calentamiento Óhmico por disipación de Joule de la corriente toroidal que circula por el plasma debida a la resistividad del medio. No es suficiente para llevar el reactor a temperaturas relevantes para que se produzca la fusión porque, al aumentar la temperatura, disminuye la resistividad del plasma y por lo tanto el rendimiento del calentamiento Óhmico. En los stellarators, por carecer de corrientes toroidales significativas, no existe este calentamiento, o éste es insignificante.
- Calentamiento por Radiofrecuencia. Consiste en la utilización de ondas electromagnéticas de alta potencia para calentar el plasma. Dependiendo de su frecuencia, y de las características del plasma, diferentes especies del mismo son calentadas. Por ejemplo, en el caso de utilizar ondas electromagnéticas

de la frecuencia de resonancia ciclotrónica de los electrones (del orden de las microondas) se obtiene calentamiento por resonancia electrónica ciclotrónica o ECRH (iniciales del inglés “Electron Cyclotron Resonance Heating”).

- Calentamiento por inyección de neutros. Consiste en la inyección de un haz de átomos neutros de alta energía que atraviesan las líneas magnéticas y alcanzan el plasma. Los neutros se ionizan y quedan confinados en el plasma, al que transfieren su energía por colisiones. Se denomina calentamiento NBI (iniciales del inglés “Neutral Beam Inyection”).

Por otra parte, la alimentación (“fuelling” en inglés) o el abastecimiento de combustible es importante para atacar dicho producto triple incrementando la densidad. Las técnicas empleadas para aumentar la densidad son las siguientes:

- Inyección de gas (“gas puffing” en inglés). Consiste en la inyección de ráfagas de gas. Normalmente se realiza utilizando válvulas piezoeléctricas. No se alcanza el centro del plasma.
- “Pellets” o inyección de proyectiles. El combustible se inyecta en estado sólido. Conforme penetra en el plasma, mediante ablación del pellet se crea una nube de gas neutro de baja temperatura, que posteriormente se ioniza y expande a lo largo de las líneas de campo.
- NBI. La inyección de neutros, además de para el calentamiento, también sirve para aumentar la densidad. Se diferencia en el “puffing” fundamentalmente en la velocidad con la que entran los neutros en el plasma, que en NBI es mucho mayor y permite que las partículas inyectadas alcancen el centro del plasma.

1.4. Transporte en el Plasma

Se denomina Plasma a los gases ionizados y por lo tanto constituidos por iones y electrones, cargados eléctricamente, aunque generalmente el plasma es cuasi neutro macroscópicamente. Por el hecho de estar compuesto por partículas cargadas, la dinámica del plasma presenta efectos colectivos, consecuencia de las interacciones electromagnéticas de largo alcance entre las cargas eléctricas.

Uno de los objetivos de la fusión por confinamiento magnético es incrementar en la medida de lo posible el tiempo de confinamiento de partículas y energía. Cuanto más altos sean estos tiempos, más tardarán en escaparse las partículas, más tiempo se mantendrá la temperatura, y la probabilidad de obtener reacciones de fusión será mayor.

Para la fusión nuclear, es también importante otra magnitud, β_{PI} , que, promediando sobre el volumen del plasma, relaciona la presión cinética del mismo con la

presión magnética:

$$\beta_{\text{PI}} = \frac{\langle p \rangle}{B^2/(2\mu_0)} \quad (1.9)$$

β_{PI} una medida de la eficiencia económica del confinamiento puesto que la potencia de fusión escala aproximadamente con el cuadrado de la presión, mientras que B es el campo que ha de ser generado externamente.

El entendimiento del transporte, de energía y partículas, es clave para mejorar los tiempos de confinamiento y la beta del plasma. En una situación ideal, las partículas verían sujetas sus trayectorias a las líneas de campo, con lo que no habría fugas y el tiempo de confinamiento sería ilimitado. Se dice entonces que el transporte es paralelo a las líneas de campo. Sin embargo en la práctica existen derivas, colisiones y turbulencia que disminuyen la calidad del confinamiento, porque introducen una componente de transporte perpendicular a las líneas de campo.

El transporte paralelo suele ser dominante con respecto al perpendicular, pero es muy importante controlar este último puesto que es determinante respecto a la calidad del confinamiento. El transporte puede, por lo tanto, entenderse como una combinación del movimiento ideal, paralelo a las líneas de campo, y el radial, es decir, perpendicular a las líneas de campo, debido a las colisiones y derivas, a lo que hay que añadir la componente introducida por la turbulencia.

Como consecuencia de los campos electromagnéticos existentes, la dinámica de las partículas constituyentes del plasma se ve determinada por la fuerza de Lorentz:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.10)$$

Existen en el seno del plasma varios tipos de deriva, ocasionados por los campos. Por ejemplo de la ecuación (1.10) se deduce que, para campos \vec{E} y \vec{B} uniformes, se tiene la llamada velocidad $\vec{E} \times \vec{B}$, que afecta por igual a iones y electrones, puesto que no depende de la masa de la partícula ni de su carga eléctrica:

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (1.11)$$

aunque hay otras componentes que aparecen como consecuencia de las inhomogeneidades de los campos, una de ellas es la deriva por curvatura de \vec{B} :

$$\vec{v}_{\text{curv}} = \frac{2W_{\parallel}}{q} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B^3}. \quad (1.12)$$

donde la energía cinética de la partícula asociada a la velocidad en dirección paralela al campo es W_{\parallel} . Otra componente es la deriva por gradiente de \vec{B} :

$$\vec{v}_{\text{grad}} = \frac{W_{\perp}}{q} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} B}{B^3}. \quad (1.13)$$

donde W_{\perp} es la energía cinética asociada a la componente de la velocidad perpendicular al campo.

Para obtener el transporte perpendicular a las líneas de campo, de crucial importancia de cara al confinamiento, se estudia el flujo (Γ) de partículas a través de una superficie magnética (definida por las líneas de campo).

El flujo de partículas en ausencia de turbulencia tradicionalmente se escribe como:

$$\vec{\Gamma} = -D\vec{\nabla}n + n\vec{v}_p. \quad (1.14)$$

donde D es el coeficiente de difusión, que da cuenta del recorrido libre medio de las partículas, y v_p es la velocidad de deriva convectiva que afecta al conjunto de las partículas.

1.4.1. Transporte clásico

La manera más sencilla de estimar los coeficientes de difusión consiste en asumir que el transporte radial está dominado por colisiones entre partículas. Desde el enfoque clásico se supone que existe una distancia característica Δx perpendicular al campo B . También se supone la existencia de un tiempo característico Δt entre colisiones. Entonces el coeficiente de difusión viene dado por la expresión:

$$D \sim \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}. \quad (1.15)$$

El tiempo Δt se obtiene a partir de la frecuencia de colisiones, que depende de las especies (iones-iones, iones-electrones ...). En el caso de que el plasma tenga un sólo tipo de iones, las frecuencias de colisión entre electrones (ν_{ee}), entre iones (ν_{ii}) entre iones y electrones (ν_{ie}) y entre electrones e iones (ν_{ei}) son [5]:

$$\begin{aligned} \nu_{ee} &\simeq \nu_{ei} \propto \frac{nq^4}{m_e^{1/2}T_e^{3/2}}, \\ \nu_{ie} &= \frac{m_e}{m_i}\nu_{ee}, \\ \nu_{ii} &= \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \nu_{ee}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde m_e , m_i representa las masas de los electrones e iones, respectivamente, y T_e , T_i las temperaturas, mientras que q es la carga eléctrica.

La cantidad Δx que se utiliza es la expresión del radio de Larmor (ρ_L), que se define como el radio con el que las partículas cargadas describen sus órbitas alrededor de las líneas de campo magnético B , y por lo tanto es la típica distancia de separación de una partícula de su línea de campo:

$$\Delta x = \rho_L = \frac{\sqrt{2m_{i,e}T_{i,e}}}{qB} \quad (1.17)$$

Sólo existe difusión neta cuando se producen colisiones entre partículas de diferentes especies. La difusión clásica iónica, y la electrónica es:

$$D_{e,class} = \nu_{ei}\rho_{L,e}^2 = \nu_{ie}\rho_{L,i}^2 = D_{i,class} \quad (1.18)$$

En este modelo clásico se calcula un coeficiente de difusión teniendo en cuenta sólo las interacciones Coulombianas entre partículas, pero no se consideran efectos geométricos en el confinamiento.

1.4.2. Transporte neoclásico

El transporte neoclásico da cuenta de la geometría toroidal de la máquina en que está confinado el plasma a la hora de estimar la difusividad. En transporte clásico no existe curvatura en las líneas de campo, con lo que se podría decir que su geometría es tipo slab. Con respecto a ese caso, la geometría toroidal implica dos diferencias importantes:

- El valor absoluto del campo magnético a lo largo de una línea de campo no es constante. Debido a la componente poloidal introducida, las líneas de campo pasan de la zona externa del toro a la interna, es decir, desde una zona de campo débil a una de campo más intenso. Esto puede dar lugar a la aparición de espejos magnéticos como consecuencia de la conservación del momento magnético de las partículas a lo largo de sus trayectorias. Se puede demostrar que, según la relación entre las velocidades paralela y perpendicular que tengan, algunas partículas llamadas atrapadas se ven reflejadas cuando se aproximan a las zonas de campo magnético intenso. Las que no lo hacen son partículas pasantes [6].
- Aparecen nuevas derivas por efecto del gradiente del campo magnético y su curvatura. Esto hace que la proyección de las órbitas de las partículas atrapadas sobre un plano poloidal recuerde a la forma de un plátano. Son las denominadas órbitas banana.

Para las órbitas banana se define una frecuencia de colisión efectiva, $\nu_{\text{eff}} \approx \nu_c/2\epsilon$, donde ν_c es la frecuencia colisional clásica y $\epsilon = a/R$ es la inversa de la relación de aspecto del dispositivo. También es importante la cantidad $\nu_* = \nu_{\text{eff}}/\nu_t$, donde ν_t es el tiempo que una partícula tarda en recorrer una órbita banana completa. En función del valor de ν_* , se distinguen tres regímenes dentro del transporte neoclásico:

- Régimen colisional o de Pfirsch-Schlüter, donde $\nu_* > 1$, es decir, las partículas colisionan y son desviadas de sus trayectorias antes de poder completar una órbita. Entonces se utiliza un coeficiente de difusión:

$$D_{\text{PS}} = q^2 \rho_L^2 \nu_c = q^2 D_{\text{class}}. \quad (1.19)$$

Es decir, si el factor de seguridad q es mayor que la unidad, el transporte aumenta fuertemente.

- Régimen “banana”, donde $\nu_* < \epsilon^{3/2}$. Las partículas son capaces de describir varias órbitas banana antes de colisionar. Tomando como grosor de la banana la cantidad ρ_B , se tiene el siguiente coeficiente de difusión:

$$D_B \propto \sqrt{2\epsilon} \rho_B^2 \nu_{\text{eff}} = \frac{\rho_L^2 q^2}{\epsilon^{3/2}} \nu_c = \frac{q^2}{\epsilon^{3/2}} D_{\text{class}}. \quad (1.20)$$

Es decir, para valores típicos $\epsilon \sim 1/3$ y $q \sim 5$, se tiene que $D_B = 130 D_{\text{class}}$.

- Régimen “plateau”, o régimen intermedio, $1 > \nu_* > \epsilon^{3/2}$. La difusividad vale:

$$D_{\text{PI}} \sim v_{\text{th}} \rho_L^2 q / R. \quad (1.21)$$

donde v_{th} es la velocidad térmica. La difusividad no depende de la colisionabilidad, y su valor numérico está entre D_B y D_{PS} .

Si se suman los términos de transporte clásico y neoclásico, los primeros pueden ser despreciados por ser la componente neoclásica alrededor de 2 órdenes de magnitud superior.

1.4.3. Transporte anómalo

Las predicciones del transporte clásico y neoclásico no son aplicables con toda generalidad, puesto que se observan casos donde el transporte es claramente mayor. Es habitual encontrarse con situaciones en que los niveles de transporte exceden en un orden de magnitud las predicciones neoclásicas [7]. Se dice entonces que existe una componente del transporte llamada anómala, a la que se achacan las desavenencias entre la teoría y el experimento.

A esto se han de añadir los numerosos fenómenos existentes en los que el transporte anómalo se manifiesta, como por ejemplo en las leyes de escalado no difusivas del tiempo de confinamiento con la potencia de calentamiento o la aparición de rigidez en los perfiles.

Se relaciona el transporte anómalo con la turbulencia en el plasma, cuyo origen está en ciertas micro-inestabilidades que aparecen en el sistema. Estas inestabilidades aparecen puesto que, de hecho, un plasma en un dispositivo de fusión por confinamiento magnético está lejos del equilibrio termodinámico, presentando fuertes gradientes de densidad, presión y temperatura. En estas condiciones, las inestabilidades se desarrollan cuando, por ejemplo, se sobrepasan gradientes críticos de temperatura iónica, electrónica, presión, etc.

Sin embargo, cuando se consigue reducir la turbulencia, por ejemplo al generarse las barreras de transporte en el borde cuando se entra en modo H, el nivel de transporte, al menos de forma local, se reduce hasta los niveles neoclásicos.

Con todo, el transporte anómalo no se entiende bien. No existe ninguna teoría capaz de predecir de manera global cómo ni cuánto afecta la turbulencia al transporte.

La teoría neoclásica es un modelo colisional en el que se asume la existencia de longitudes e intervalos de tiempo característicos (i.e. el tiempo medio y la distancia media recorrida entre colisiones). Se sabe sin embargo que en turbulencia aparecen a menudo estructuras de tipo torbellino con un largo tiempo de pervivencia que hace que la distribución de los tiempos de espera entre desplazamientos no tenga una cantidad característica asociada. También es típica en regímenes turbulentos la aparición de “streamers” (que se traduciría como serpentinas), estructuras capaces de desplazar las partículas a lo largo de grandes distancias radiales, lo cual hace que la distribución de longitudes también carezca de una escala característica asociada. Es decir, no se puede, en un contexto turbulento, describir el transporte mediante un modelo que presupone la existencia de escalas características, puesto que hay nuevas componentes del transporte de tipo no colisional.

El entendimiento del transporte anómalo es de crucial importancia para el diseño de reactores comerciales de fusión por confinamiento magnético, puesto que es sabido que si el transporte radial es mayor de lo esperado, el confinamiento será de menor calidad, con lo que se necesitaría construir dispositivos mayores y más caros.

1.4.4. Confinamiento mejorado: Modo H

Buena parte del transporte radial de partículas y energía en dispositivos de fusión típicamente es debida a la turbulencia. En algunos casos el nivel de turbulencia puede ser suprimido o reducido, dando lugar a un nivel de transporte de energía y partículas menor en un volumen de plasma reducido. La turbulencia se puede reducir por ejemplo cuando aparece una cizalla en la velocidad poloidal, lo cual hace que las estructuras turbulentas, responsables del transporte anómalo, se vean decorrelacionadas, y se supriman las fluctuaciones. Cuando este fenómeno se produce en el borde, el tiempo de confinamiento tiende a mejorar sensiblemente. A éste régimen de operación se le denomina modo H (del inglés “High Confinement”). En contraposición a este régimen, se comenzó a denominar al anterior como modo L (del inglés “Low Confinement”).

El modo H se alcanzó por primera vez en el tokamak ASDEX [8], y después ha sido observado en otros tokamaks. En Stellarators se obtuvo por primera vez en el dispositivo W7-AS [9]. Las principales diferencias entre ambos modos son las siguientes:

- En modo H existe un fuerte gradiente de presión en el borde del plasma, denominado pedestal.
- En la zona del pedestal en modo H hay una barrera de transporte.

- El tiempo de confinamiento de la energía en modo H es aproximadamente el doble que en modo L.
- Aparecen unos modos localizados en modo H llamados ELMs (iniciales del inglés “Edge Localized Modes”). En algunas máquinas (como W7-AS) se ha logrado operar con un modo H libre de ELMs.

La transición L-H, que dura unos $100 \mu\text{s}$, se inicia en el borde del plasma. Al aumentar la potencia de calentamiento auxiliar por encima de un determinado umbral, aparece cerca del borde una cizalla en la componente radial del campo eléctrico. Como consecuencia de lo anterior, se genera una fuerte cizalla en la componente poloidal de la velocidad $E \times B$ que actúa como barrera de transporte. En dicha zona del plasma se elevan los pedestales y el nivel de turbulencia se reduce. Una vez este proceso se ha completado, las nuevas condiciones de contorno facilitan la mejora del confinamiento [10].

Una vez que la barrera de transporte se ha formado en el borde, el confinamiento en el centro del plasma también se mejora, aunque no de forma tan rápida como la formación de la barrera en el borde.

La mejora en el confinamiento en el centro conduce a un aumento en la temperatura, la densidad y la potencia radiada. Entonces empiezan a producirse los ELMs, inestabilidades intermitentes localizadas en el borde del plasma. La barrera de transporte se rompe durante cada ELM para posteriormente volver a constituirse.

Capítulo 2

Continuous Time Random Walk y transporte difusivo

El *CTRW* (iniciales del inglés *C*ontinuous *T*ime *R*andom *W*alk, que se puede traducir como Camino aleatorio de tiempo continuo en castellano) es un formalismo o un conjunto de modelos que sirven para describir un amplio rango de movimientos colectivos y aleatorios desde un punto de vista probabilístico. Esto lo convierte en un formalismo muy potente a la hora de caracterizar el fenómenos de transporte.

A lo largo de este capítulo se presentará el *CTRW*, y la manera en que se aplica para modelar el transporte, utilizando para ello la que llamaremos Ecuación Maestra Generalizada. Veremos como en una realización simple del formalismo, y a modo de ejemplo ilustrativo, el *CTRW* sirve para describir el transporte tal y como se deduce de la ley de Fick.

2.1. Random Walk

El modelo del Random Walk (del inglés Camino Aleatorio) sirve para describir la dinámica de partículas cuyos desplazamientos son aleatorios y además tienen lugar a intervalos regulares de tiempo. La longitud y la dirección de dichos desplazamientos viene dada por una función de distribución de la probabilidad. En el caso browniano, dicha distribución tiene una varianza finita. Como se verá a lo largo del capítulo, esto significa desde el punto de vista físico que existe en el transporte una escala de longitud bien definida. Por otra parte, existe una escala temporal característica, que es el intervalo temporal –constante– entre dos pasos consecutivos.

El *CTRW* es la generalización del random walk, en la que el tiempo ya no es discreto.

2.2. Continuous Time Random Walk

El Continuous Time Random Walk [11, 12] es un formalismo basado en la idea de que el movimiento de una partícula consiste en una serie de saltos, separados por lapsos de tiempo. Nos centraremos, por simplicidad, en el caso unidimensional, que además como veremos más adelante es el que nos ocupará a lo largo de esta tesis.

Asumimos que una partícula se encuentra en una posición dada (x', t') , permanece inmóvil durante un intervalo de tiempo $\Delta t = t - t' \geq 0$ para a continuación dar un salto de longitud $\Delta x = x - x'$. El proceso es iterativo: desde su nueva posición, la partícula, tras un nuevo tiempo de espera, dará otro paso, etc.

Se postula la existencia de una función de distribución de la probabilidad (pdf) $\xi(x - x', x', t - t', t')$ [13] normalizada que define la longitud del salto así como el tiempo de espera.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\infty} dt \xi(x - x', x', t - t', t') = 1. \quad (2.1)$$

El *CTRW* es muy utilizado en diversos campos. Su naturaleza probabilística lo convierte en un formalismo muy general que se puede utilizar a la hora de modelar el transporte en multitud de procesos físicos. Desde el transporte en fluidos hasta el análisis de la evolución de los mercados financieros [14] pasando por el estudio de la difusión de los epicentros de los movimientos sísmicos [15].

A partir del caso general, se suelen asumir o imponer dos condiciones que simplifican el modelo. Las enumeramos a continuación:

i) Asumimos que los saltos y los atrapamientos son independientes. Por lo tanto esta pdf es separable en dos pdfs independientes: Por una parte está la distribución del tamaño del salto y por otra la distribución del tiempo de espera.

ii) Imponemos invariancia bajo traslaciones en espacio y en tiempo, es decir, homogeneidad y estacionaridad.

Así, el problema se simplifica desde el punto de vista matemático manteniendo un gran abanico de posibles procesos que describen una dinámica suficientemente rica, como veremos más adelante.

Como consecuencia de las condiciones (i) y (ii) podemos escribir ξ como:

$$\xi(x - x', x', t - t', t') = p(x - x') \cdot \psi(t - t'). \quad (2.2)$$

De modo que $p(x - x')$ es la probabilidad de que una partícula que se encuentra en la posición x' dé un salto de tamaño $\Delta x = x - x'$, totalmente independiente de $\psi(t - t')$, que es la probabilidad de que una partícula situada en dicha posición permanezca inmóvil durante un intervalo de tiempo $\Delta t = t - t'$.

2.3. Del CTRW a la Ecuación Maestra

Cuando el número de partículas (N) es muy alto es posible introducir el concepto de densidad de probabilidad. La ecuación maestra generalizada o GME, siglas del inglés *Generalized Master Equation* es una ecuación para la evolución de la densidad de probabilidad local, cuando $N \rightarrow \infty$, de encontrar una partícula en una posición e instante de tiempo determinados [16, 17]. Asumiendo que $n(x, t)$ es la densidad de partículas en (x, t) , y $K(x', x - x', t', t - t')$ la probabilidad de transición o de encontrar en (x, t) una partícula que estuvo en (x', t') , la GME en un dominio finito se puede derivar de la ecuación (2.2) de manera exacta, llegando a la siguiente expresión [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = & \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x', x - x'; t', t - t') n(x', t') \\ & - \int_0^t dt' n(x, t') \int_{-\infty}^{\infty} dx' K(x, x' - x; t', t - t'). \end{aligned} \quad (2.3)$$

El primer término a la derecha de la ecuación da cuenta de la contribución de las partículas que llegan a x en cualquier instante de tiempo $t' \leq t$, y el segundo se refiere a la contribución de aquéllas que abandonan x , también antes del instante de tiempo t . La conservación del número de partículas implica:

$$\int_{t'}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx K(x', x - x'; t, t - t') = 1. \quad (2.4)$$

A continuación se derivará la GME partiendo de la distribución de probabilidad del CTRW. Para ello se seguirá el procedimiento más general de [13] para clarificar el rango de aplicabilidad de la GME, notando que existe una derivación más sencilla pero más restrictiva en [18].

$$\xi(x - x', x'; t - t', t') = p(x - x', x'; t) \cdot \psi(x'; t - t') \quad (2.5)$$

La finalidad de esta elección es demostrar que la GME es válida en casos más generales que el de la ec. (2.2), es decir, procesos gobernados por distribuciones de probabilidad que dependen del espacio y del tiempo.

Para poder escribir la GME en función de las distribuciones de la ec. (2.5) es necesario comenzar interpretando $n(x, t)$ a partir de dos nuevas funciones de probabilidad:

$$n(x, t) = \int_0^t \eta(x; t - t') Q(x; t') dt'. \quad (2.6)$$

Se define $\eta(x; t - t')$ como la probabilidad de que una partícula en (x, t') permanezca inmóvil hasta el instante de tiempo t . Entonces η se puede entender como

la unidad menos la probabilidad de dar un salto:

$$\eta(x; t - t') = 1 - \int_{t'}^t dt'' \psi(x', t'' - t'). \quad (2.7)$$

Por otra parte, $Q(x; t)$ es la probabilidad total de que una partícula llegue a (x, t) mediante cualquiera de las rutas o secuencias de saltos posibles, de manera que se puede escribir como la suma de las probabilidades de llegar a (x, t) mediante todos los números posibles de saltos:

$$Q(x; t) = \sum_0^{\infty} Q^j(x; t). \quad (2.8)$$

siendo $Q^j(x; t)$ la probabilidad de llegar a (x, t) tras j saltos. Además, por definición:

$$Q^j(x; t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^t dt' \xi(x - x', x'; t - t', t') Q^{j-1}(x'; t'). \quad (2.9)$$

y la condición inicial es:

$$Q^0(x; t) = \delta(x) \delta(t). \quad (2.10)$$

puesto que una partícula no puede moverse en un intervalo temporal nulo.

Ahora, combinando las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10) se obtiene una relación de recursividad para $Q(x; t)$:

$$Q(x; t) - \delta(x) \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^t dt' \xi(x - x', x'; t - t', t') Q(x'; t'). \quad (2.11)$$

Llegados a este punto se puede reemplazar ξ utilizando la expresión (2.5). Un caso más sencillo, como se ha dicho, consistiría en escoger las distribuciones que cumplan las imposiciones (i) y (ii); sin embargo por ahora relajamos la condición de invariancia. La ecuación (2.11) se reescribe como:

$$Q(x; t) - \delta(x) \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' p(x - x', x'; t) \int_0^t dt' \psi(x'; t - t') Q(x'; t'). \quad (2.12)$$

Ahora, para continuar, es necesario utilizar la transformada de Laplace, que se define:

$$L[f(t)] = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.13)$$

y, teniendo en cuenta el teorema de convolución que dice que:

$$f_1(s) \cdot f_2(s) = L \left[\int_0^t f_1(t-z)f_2(z)dz \right]. \quad (2.14)$$

se reescribe la ecuación (2.6) de una manera mucho más manejable:

$$n(x, s) = \eta(x; s)Q(x, s). \quad (2.15)$$

además necesitaremos una distribución auxiliar:

$$\phi(x; s) = \frac{\psi(x; s)}{\eta(x; s)}. \quad (2.16)$$

con lo que ahora podemos escribir la segunda integral del lado derecho de la ecuación (2.12) de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt' \psi(x'; t-t')Q(x'; t') = \\ & = L^{-1}[\psi(x'; s)Q(x', s)] = L^{-1}[\phi(x', s)n(x', s)] = \\ & = \int_0^t dt' \phi(x'; t-t')n(x', t'). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Quedando (2.12) así:

$$Q(x; t) - \delta(x)\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' p(x-x', x'; t) \int_0^t dt' \phi(x'; t-t')n(x', t'). \quad (2.18)$$

Teniendo en cuenta que $L[\delta(t)] = 1$ podemos ahora proceder a realizar la transformada de Laplace de la ecuación (2.18):

$$\begin{aligned} & Q(x; s) - \delta(x) = g(x; s) = \\ & = L \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx' p(x-x', x'; t) \int_0^t dt' \phi(x'; t-t')n(x', t') \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Multiplicando por $s\eta(x; s)$, y teniendo en cuenta que según (2.15) podemos escribir $Q(x; s) = n(x, s)/\eta(x; s)$ se obtiene:

$$[sn(x, s) - \delta(x)] - \delta(x)[s\eta(x; s) - 1] = [s\eta(x; s) + 1 - 1]g(x; s). \quad (2.20)$$

ahora, utilizando la propiedad de la transformada de Laplace $L[\partial f/\partial t] = sf(s) - f(0)$, y haciendo la transformada invertida de Laplace, podemos escribir la ec. (2.20) así:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \delta(x) \frac{\partial \eta(x; t)}{\partial t} & + \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi(x'; t-t') p(x-x', x'; t) n(x', t') \\ & + L^{-1} [[s\eta(x; s) - 1]g(x; s)]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde el término de la izquierda procede de $[s\eta(x, s) - \delta(x)]$, el primer término a la derecha viene de $-\delta(x)[s\eta(x; s) - 1]$, el segundo término de la derecha es la inversa de $g(x; s)$ y el tercero engloba al resto de la ecuación (2.20). Precisamente, para simplificar éste último término, utilizaremos de nuevo la ecuación (2.19):

$$g(x; s) = \frac{n(x, s)}{\eta(x; s)} - \delta(x). \quad (2.22)$$

Esta expresión, combinada con la transformada de Laplace de la expresión (2.7):

$$L[\eta(x'; t)] = \frac{1}{s}[1 - \psi(x', s)]. \quad (2.23)$$

nos permite escribir el tercer sumando del lado izquierdo de la ecuación (2.21) de la siguiente manera:

$$[s\eta(x; s) - 1]g(x; s) = \delta(x)\psi(x; s) - \phi(x; s)n(x, s). \quad (2.24)$$

y haciendo la transformada inversa:

$$\begin{aligned} L^{-1}[[s\eta(x; s) - 1]g(x; s)] &= L^{-1}[\delta(x)\psi(x; s) - \phi(x; s)n(x, s)] \\ &= \delta(x)\psi(x, t - t') - \int_0^t dt' \phi(x; t - t')n(x, t'). \end{aligned} \quad (2.25)$$

de manera que la ecuación (2.21) finalmente queda así:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \phi(x'; t - t')p(x - x', x'; t)n(x', t') - \int_0^t dt' \phi(x; t - t')n(x, t'). \quad (2.26)$$

puesto que $\partial\eta(x; t)/\partial t = -\psi(x', t - t')$ por la ecuación (2.7). Nótese que K de (2.3) es entonces:

$$K(x, x' - x; t', t - t') = \phi(x'; t - t')p(x - x', x'; t). \quad (2.27)$$

donde, como consecuencia de las ecuaciones (2.23) y (2.16) se tiene que:

$$\phi(x; s) = \frac{s\psi(x; s)}{1 - \psi(x; s)}. \quad (2.28)$$

ϕ es la llamada función de *memoria*.

2.4. Transporte Fickiano

La GME sirve para describir el transporte colectivo de partículas idénticas, introduciéndose toda la información referente a la dinámica del caso concreto que queramos modelar en las distribuciones de la ec. (2.2) (o el caso más general de la ecuación (2.5)). La ecuación de la densidad en transporte Fickiano es sólo un caso particular que puede describirse a partir de la GME.

2.4.1. Ley de Fick y ecuación de la difusión

Se habla de transporte Fickiano allá donde se cumple la ley de Fick, que relaciona el flujo con el gradiente de densidad. La relación se establece a través de un coeficiente de proporcionalidad D que llamaremos coeficiente de difusión, y que en caso estacionario puede depender de la posición:

$$\Gamma(x, t) = -D(x) \frac{\partial}{\partial x} n(x, t). \quad (2.29)$$

A partir de la ecuación (2.29) en combinación con la ley de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, t). \quad (2.30)$$

se obtiene de manera inmediata la ecuación del transporte difusivo:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (2.31)$$

2.4.2. Las sumas de variables independiente e idénticamente distribuidas

La distribución $p(\Delta x)$ está construida a partir de la suma de variables aleatorias que intervienen en el movimiento a nivel microscópico. En el caso de que dichas variables sean independientes e idénticamente distribuidas (iid) y p tenga varianza finita se cumple el teorema del límite central [19].

Teorema: Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias iid, a partir de las cuales definimos la variable $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Si, convenientemente normalizada, la distribución de Y_n converge en el límite $n \rightarrow \infty$ a una distribución F cuya varianza es finita, dicha distribución ha de ser una Gaussiana.

2.4.3. GME y transporte Fickiano

Existe una elección particular de distribuciones para (2.2) tal que a partir de la GME se deduce la ecuación (2.31).

$$\begin{aligned} p(x - x', x'; t) &= \frac{e^{-(x-x')^2/4\sigma^2}}{2\sigma\sqrt{\pi}}, \\ \psi(x'; t - t') &= \frac{e^{-\Delta t/\tau_D}}{\tau_D}, \\ \xi(x - x', x'; \Delta t, t') &= \frac{e^{-(x-x')^2/4\sigma^2}}{2\sigma\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\Delta t/\tau_D}}{\tau_D}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Esta elección responde a dos imposiciones que hacemos:

i) Se impone que la distribución del tamaño del salto ha de cumplir el teorema del límite central.

ii) Se asume que el movimiento es Markoviano, es decir, no depende de la historia del sistema, o dicho de otro modo, no hay memoria.

Veamos qué sucede si introducimos en la GME las distribuciones de (2.32). Comenzamos por los tiempos de espera:

$$\begin{aligned}\psi(x'; t - t') &= \psi(\Delta t) = \frac{e^{-\Delta t/\tau_D}}{\tau_D}, \\ \phi(x', t - t') &= \phi(\Delta t) = \frac{\delta(t - t')}{\tau_D}.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Se obtiene que la GME correspondiente es:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau_D} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx' p(x - x', x'; t) n(x', t) - n(x, t) \right]. \quad (2.34)$$

Véase que en la ecuación (2.34), y debido a la elección hecha de ψ , se ha eliminado la dependencia de $t' < t$ que sí existía en general (ec. (2.26)). Por lo tanto se cumple la imposición (ii) que establece que no hay efectos de memoria.

A continuación se procede con la distribución p . En primer lugar realizamos una expansión de Taylor de $n(x', t)$ en (2.34), siendo $x' = x - \Delta x$.

$$n(x', t) = n(x - \Delta x) = n(x, t) - \Delta x \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \dots \quad (2.35)$$

Ahora se ha de tener en cuenta que, por las características de la pdf $p(x - x')$ definida en (2.32) de normalización y simetría, sus momentos de orden 0, 1, y 2 son:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta x) d\Delta x &= 1, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Delta x p(\Delta x) d\Delta x &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Delta x^2 p(\Delta x) d\Delta x &= 2\sigma^2.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Entonces, introduciendo la expansión en series de potencias de $n(x', t)$ en la integral de (2.34) y teniendo en cuenta las ecuaciones (2.36) se llega a que la ecuación (2.34) para una distribución Gaussiana en $p(x - x')$ es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau_D} \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta x) \left[p(\Delta x)n(x, t) - \Delta x p(\Delta x) \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} \right. \\ \left. + \Delta x^2 p(\Delta x) \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} \right] - n(x, t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial n}{\partial t} \approx \frac{\sigma^2}{\tau_D} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (2.38)$$

Que es la ecuación de la difusión estándar o fickiana de (2.31), cuando el coeficiente D es una constante en la ecuación (2.31). Con distribuciones asimétricas, tales que el momento de orden 1 en la expresión (2.36) no se anule, es posible modelar la ecuación (2.31) con un coeficiente de difusión no homogéneo, $D = D(x)$. En la expresión (2.38) el coeficiente de difusión D es una cantidad fija definida como $D = \sigma^2/\tau_D$. σ^2 es el segundo momento de $p(x - x')$ y τ_D es el primer momento de $\psi(t - t')$.

Nótese que para la derivación de la ecuación (2.38), al utilizar y asumir como válido el desarrollo de Taylor, tácitamente se ha asumido que variaciones apreciables de n se producen en escalas de longitud muy grandes en comparación con σ , i.e. $\frac{n}{\partial n/\partial x} \gg \sigma$.

Obsérvese que el escenario difusivo que se plantea en un sistema descrito por la ecuación (2.38) implica que:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = D \Delta t \quad (2.39)$$

2.4.4. Escalas características

Veremos a continuación cómo la elección hecha en el apartado anterior tiene como implicación la existencia de escalas características de tiempo y espacio involucradas en el proceso de transporte.

Nótese que, en la práctica, las dimensiones del sistema son limitadas, de modo que, si el tamaño del sistema es L , los extremos de integración en (2.34) cambian:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = S(x, t) + \frac{1}{\tau_D} \left[\int_{-L/2}^{L/2} dx' p(x - x', x'; t) n(x', t) - n(x, t) \right]. \quad (2.40)$$

Puesto que ahora tenemos pérdidas, es necesario añadir un término fuente S para poder alcanzar un estado estacionario. Al margen de este detalle, esto no tiene implicaciones demasiado importantes en el caso de escoger una distribución Gaussiana para el tamaño de los pasos, mientras se cumpla que (i) $\sigma \ll L$, y siempre y cuando (ii) nos limitemos a zonas donde $|x| - L/2 \gg \sigma$. El motivo es que se

puede considerarse como una buena aproximación considerar que los momentos de p apenas varían con respecto al caso infinito:

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta x^n p(\Delta x) d\Delta x \approx \\ &\approx \int_{-L/2}^{L/2} \Delta x^n p(\Delta x) d\Delta x = \langle \Delta x^n \rangle_L. \end{aligned} \quad (2.41)$$

debido al decaimiento exponencial de $p(x - x')$ la contribución a la integral de las zonas de Δx grandes es despreciable.

De manera que, mientras se cumplan las condiciones (i) y (ii), el transporte seguiría siendo Fickiano, y vendría regido por:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S(x, t) + \frac{\sigma^2}{\tau_D} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = S(x, t) + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \quad (2.42)$$

Al tiempo que se cumple que:

1. El transporte será independiente de L , y por lo tanto, la única escala de longitud característica será σ .
2. El valor de σ puede ser estimado en un sistema de L arbitrario, a partir de las propiedades del mismo, mientras se cumplan (i) y (ii).
3. De manera análoga, τ_D de la ecuación (2.32) es la escala temporal que caracteriza el transporte de nuestro sistema. Esto se cumple en caso de que $\tau_D \ll \tau_{Tot}$, siendo τ_{Tot} el tiempo que se deja evolucionar nuestro sistema.

Entonces, podemos estimar dichas magnitudes características, y por lo tanto el coeficiente de difusión, a partir de las propiedades del sistema.

Con respecto al tiempo durante el cual dejamos evolucionar a nuestro sistema, conviene aclarar que es necesario que τ_{Tot} no sea suficientemente grande como para que las barreras $\pm L/2$ empiecen a ser importantes puesto que a tiempo infinito todo sistema se ve perturbado por sus barreras [20].

Capítulo 3

Continuous Time Random Walk y transporte en plasmas de fusión por confinamiento magnético

A continuación vamos a utilizar el *CTRW* para describir el transporte en plasmas de fusión nuclear. En concreto nos centraremos en el transporte en la dirección radial, que es la más importante de cara a la calidad del confinamiento. Como veremos, la difusión Fickiana no sirve, en general, para describir toda la dinámica observada. Veremos por qué falla esta descripción y, dentro del marco que ofrece el *CTRW*, buscaremos un modelo alternativo para caracterizar el transporte.

3.1. La ausencia de escalas características en dispositivos de fusión

Tal y como hemos visto en el capítulo 2, en todo sistema físico donde el transporte pueda ser descrito por la ecuación de transporte Fickiano hay escalas espacio-temporales típicas. Estas escalas sirven además para estimar el coeficiente de difusión.

Hay situaciones en las que no es posible deducir el coeficiente de difusión a partir de escalas características. El transporte radial en un tokamak es uno de esos casos.

Se ha pretendido describir el transporte en plasmas de fusión como un proceso difusivo, utilizando escalas características para estimar el coeficiente de difusión, según lo expuesto en las secciones 1.4.1 y 1.4.2. Sin embargo evidencias experimentales muestran que mediante el uso de escalas características no se logra modelar de forma satisfactoria el transporte, a pesar de que se ha intentado de diversas maneras:

(i) Se puede considerar que el transporte está dominado por procesos colisionales clásicos, véase apartado 1.4.1. En ese caso, se estima que la escala de longitud típica, de cara al transporte radial, es el radio de Larmor ρ_L de las partículas en el seno del campo magnético dado, mientras que la escala temporal es la inversa de la frecuencia de colisión o tiempo de colisión $1/\nu_C$. El coeficiente de difusión que se deduce es por lo tanto $D \approx \rho_L^2 \cdot \nu_C$.

(ii) Se puede asumir que el transporte es neoclásico. Esto, más que una alternativa a la descripción anterior es una extensión de la misma, puesto que la teoría neoclásica básicamente es una teoría colisional en la que se consideran los efectos geométricos (véase apartado 1.4.2). La anchura r_B de las órbitas del tipo banana sería la escala de longitud característica dominante, de manera que se obtendría un coeficiente de difusión $D \approx r_B^2 \cdot \nu_C$, que en general es algo mayor que en transporte colisional.

(iii) Una tercera hipótesis utilizada normalmente consiste en considerar que el transporte no es colisional sino que está dominado por procesos turbulentos. En este contexto se estima que la escala de longitud es el tamaño medio de las estructuras tipo *eddy* l_e , mientras que la de tiempos es el tiempo de vida medio de dichas estructuras, o tiempo de decorrelación de la turbulencia, τ_d . El coeficiente de difusión es $D \approx l_e^2/\tau_d$. Este razonamiento está basado en la suposición implícita de que no existe ningún tipo de correlación en el movimiento, lo cual es, cuando menos, cuestionable en el contexto turbulento.

Observaciones empíricas ponen de manifiesto que todas estas predicciones están en profundo desacuerdo con los resultados experimentales [21]. Es a partir de entonces cuando se empieza a hablar de *transporte no difusivo*, y se pone en entredicho la existencia de las citadas escalas características del transporte.

Por otra parte, se han observado otros fenómenos relacionados con el transporte cuya explicación no tiene cabida en el contexto de la ecuación del transporte Fickiano [22].

A continuación se exponen algunos de éstos fenómenos que contradicen la presencia de escalas. Muchos de los resultados mostrados tienen que ver con la evolución de la temperatura. Es experimentalmente mucho más factible la medición de temperatura que la de densidad. Hay que destacar que, pese a que el transporte de energía y el de partículas comparten similitudes, han de salvarse las distancias y tener en cuenta que, por ejemplo, la temperatura no es una cantidad conservada. No obstante, los ejemplos que tienen que ver con transporte de calor que se muestran (secciones 3.1.2 y 3.1.3) son ilustrativos para conocer algunos fenómenos de transporte no local.

3.1.1. Degradación del confinamiento

En estado estacionario, el tiempo de confinamiento de las partículas, τ_P se define como:

$$\tau_P = \frac{N}{S_P} \quad (3.1)$$

siendo N y S_P el número y la fuente de partículas, respectivamente.

La teoría del transporte neoclásica no es difusiva, pero cuando se aplica si que se suelen realizar aproximaciones de carácter difusivo. Por lo tanto predice que, para los plasmas confinados en tokamaks, el tiempo de confinamiento ha de escalar con las dimensiones del sistema según la relación $\tau_P \propto a^2$, siendo a el radio menor [23].

Sin embargo en la práctica se ha observado una mejora del confinamiento más baja de la predicha, del tipo $\tau_P \propto a^\delta$, siendo $\delta < 2$ [13]. Un problema similar, de escalado no difusivo del tiempo de confinamiento, es la degradación del mismo al aumentar la fuente.

Estos problemas tienen lugar en plasmas de 'bajo confinamiento' o modo L. Aunque en modo H, donde el confinamiento mejora, el desacuerdo es menor, siguen sin conocerse las razones por las que las predicciones fallan.

3.1.2. Propagación de perturbaciones

Según la ecuación (2.38), la evolución de la densidad en un punto depende únicamente de la forma que tenga el perfil en el entorno de dicho punto, es decir, el transporte es *local*. La localidad es una característica del transporte difusivo estándar.

Mediante técnicas perturbativas se puede comprobar en experimentos si el transporte en plasmas es o no local, o más bien si existe algún efecto de transporte no local. Dada una fuente de perturbación ideal $S(x, t) \propto \delta(x - x_0)\delta(t - t_0)$, entendemos por efecto de transporte no local cualquier respuesta que se produzca en una posición e instante de tiempo (x', t') tales que la distancia $x' - x_0$ es mucho mayor que la escala de longitud que puede propagarse la perturbación en caso de transporte difusivo en un lapso de tiempo $t' - t_0$, es decir, si dado un coeficiente de difusión χ para la cantidad perturbada, $x' - x_0 \gg \sqrt{\chi(t' - t_0)}$.

En un experimento llevado a cabo en el TEXT Tokamak [24], se introdujeron impurezas radiativas de carbono en el borde del plasma. Esto se realizó gracias a

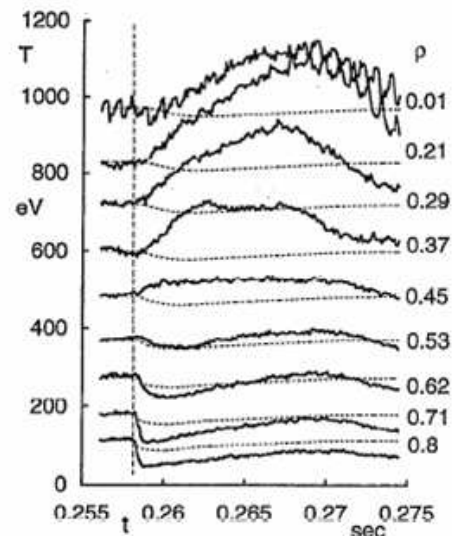


Figura 3.1: Evolución de la temperatura electrónica en varias posiciones radiales, tras el pulso frío (ver [24]).

técnicas de ablación láser, que permiten controlar eficazmente tanto la duración como la localización de la inyección de las impurezas.

En la figura 3.1 se representa la evolución temporal de la temperatura a distintos radios a partir de la introducción de las impurezas, junto con la predicción teórica. En la parte externa del plasma, se aprecia como tras la inyección de las partículas de carbono, la temperatura desciende rápidamente para luego, poco a poco, ir recuperando el valor inicial.

Sin embargo la sorpresa aparece en la parte interna del plasma, que parece reaccionar de manera súbita al pulso frío mediante un fuerte aumento de la temperatura. Esta respuesta es tan extraordinariamente rápida que no encaja con el modelo difusivo estándar ni con la existencia de escalas características, puesto que se trata de una correlación a larga distancia.

No sólo eso, sino que se observa que el plasma responde a la perturbación negativa de temperatura en el borde aumentándola en el centro. Es decir, la perturbación no se propaga de forma difusiva, puesto que en tal caso no se contempla un cambio en el signo de la perturbación, que pasa de negativa a positiva. Se trata por lo tanto de un efecto de transporte no difusivo.

Otro caso interesante lo constituye el que se recoge en la figura 3.2, donde se muestran las medidas de fluctuaciones de temperatura electrónica del plasma [25]. Dichas fluctuaciones se propagan, como se muestra en la zona sombreada, a distancias comparables el radio menor con velocidad constante. Se trata por lo tanto de un efecto de transporte no local.

En definitiva, parece que existen fenómenos que escalan con las dimensiones del sistema, que no pueden explicarse en el contexto de transporte difusivo (y por lo tanto local).

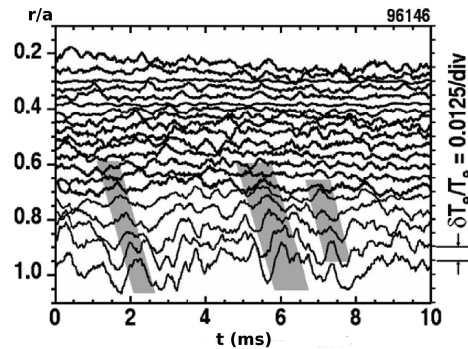


Figura 3.2: Propagación de fluctuaciones en temperatura electrónica (ver [25])

3.1.3. Rigidez de perfiles

Otro llamado efecto anómalo, muy habitual, se produce cuando se tiene una fuente, ya sea de partículas o de calor, fuera del eje magnético (*off axis fuelling / heating*).

Partiendo de la ecuación (2.42), en situación estacionaria el perfil de cualquier cantidad (por ejemplo n) descrita difusivamente, ha de cumplir que $\partial^2 n / \partial x^2 = 0$ en las zonas donde no hay fuentes, es decir, el perfil ha de ser una recta. La única excepción la constituyen las fuentes, que suponemos puntuales y alejadas del eje magnético, donde puede cambiar la pendiente. Si a esto le añadimos la condición de simetría en el eje, se deduce que el perfil ha de ser plano en dicha zona.

En casos en que la fuente está alejada del eje es muy normal encontrarse situaciones estacionarias donde el perfil radial de n (si la fuente es de partículas, perfil de T si se trata de una fuente de calor) tiene el pico máximo exactamente en el eje magnético (ver gráfico 3.3, ver [26]). Esta situación es por lo tanto un claro contraejemplo de lo dicho anteriormente: el transporte es no difusivo.

Es decir, tienen lugar situaciones, como la de la figura 3.3, donde existe un mecanismo de transporte que mantiene unos perfiles radiales incompatibles con el flujo que dicta la ley de Fick.

3.1.4. Tiempos de inactividad

No sólo se encuentran ejemplos ilustrativos de la ausencia de escalas espaciales en el transporte. Se han estudiado fenómenos relacionados con las escalas temporales donde se observan características propias de sistemas dominados por leyes de potencia. El estudio de “tiempos de inactividad” en el flujo turbulento en el borde del plasma en diversos dispositivos constituye un claro ejemplo. Véase referencia [27], donde dicho análisis se lleva a cabo en tres dispositivos distintos (Wendelstein-7AS, Jet y TJ-II). En este trabajo se midió el flujo turbulento en el borde del plasma, a partir de datos de sondas de Langmuir. Conocidos la densidad fluctuante \tilde{n} en un punto (r, θ, φ) y en un instante de tiempo t , y el potencial eléctrico en dos posiciones muy próximas tal que $\phi_1 = \phi(r, \theta - \delta\theta, \varphi)$ y

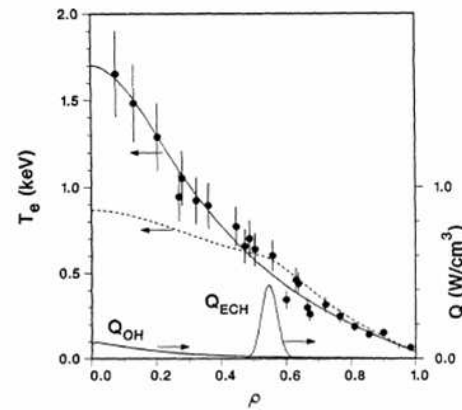


Figura 3.3: Perfil en Temperatura: Resultados experimentales (puntos), ajuste (línea sólida) y predicción teórica (línea de puntos) a partir de las fuentes de calentamiento OH y ECH [26]

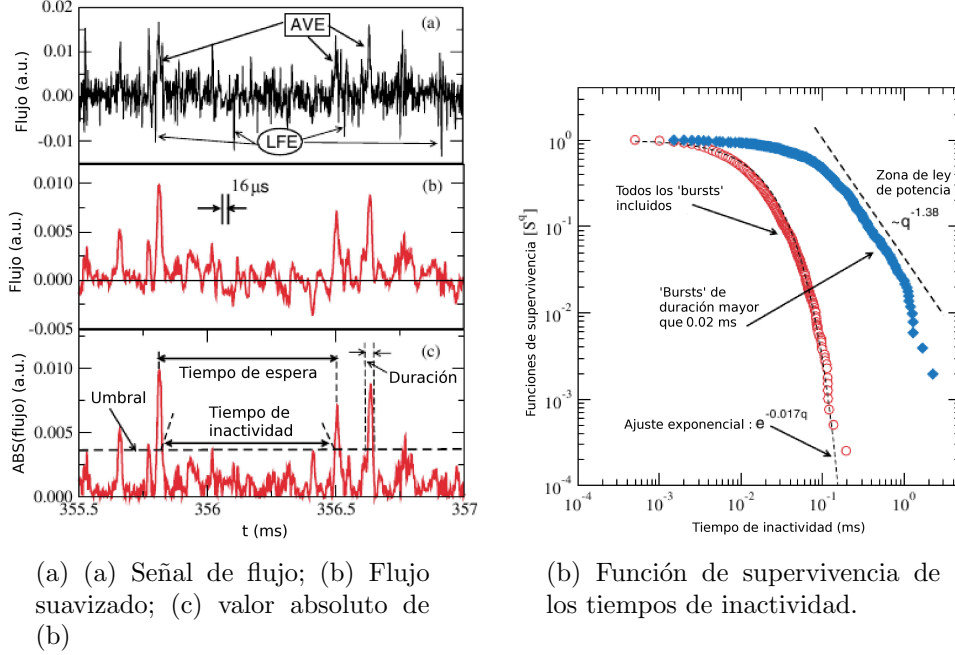


Figura 3.4: Ejemplo a partir de datos de W-7AS. Ver [27].

$\phi_2 = \phi(r, \theta + \delta\theta, \varphi)$, el flujo de partículas se estima como $\Gamma \propto \tilde{n}(\phi_2 - \phi_1)$.

La evolución temporal del flujo, procesada debidamente (suavizada, y tomado el valor absoluto) da una señal que se puede entender como una serie de intervalos temporales de inactividad separados por violentos incrementos del flujo. Los intervalos de inactividad son intervalos de tiempo donde el flujo (procesado) no rebasa un umbral dado. El umbral es superado durante los incrementos de flujo o “bursts” casi instantáneos (de una duración mucho menor que los tiempos de inactividad). La función de supervivencia $S^q(s)$ es la probabilidad de que un tiempo de inactividad q sea mayor que el tiempo s . Se observa que la función de supervivencia decae como una ley de potencia cuando sólo se consideran los tiempos de inactividad separados por “bursts” suficientemente duraderos (más de $20 \mu\text{s}$).

Existen en resumen diversos fenómenos que no tienen cabida en el marco del transporte difusivo: fluctuaciones que se propagan súbitamente y con un cambio de signo, o de forma balística a lo largo de distancias comparables con el tamaño del sistema, perfiles incompatibles con el transporte difusivo, etcétera. Una posible causa de estos (y otros) hechos es la ausencia de escalas características en el transporte radial turbulento. Es decir, hay fenómenos de largo alcance que escalan con el tamaño del sistema, así como otros que persisten mientras dure la señal. Hasta ahora, a partir del *CTRW*, hemos construido un modelo para la difusión (2.42) en el que se deduce que existen escalas características tanto de longitud como de tiempo. Estas escalas proceden de las funciones de distribución que hemos utiliza-

do para deducirlo. Puesto que parece evidente que en algunos casos este modelo no funciona, vamos a explicar en la siguiente sección cómo se generaliza utilizando distribuciones libres de escalas características.

3.2. *CTRW* y Transporte no difusivo

Hasta ahora hemos trabajado en el marco del *CTRW* sin explotar todas las posibilidades que ofrece este formalismo. Aunque, como hemos visto, sirve para explicar la difusión clásica o Fickiana, se puede trabajar con otras distribuciones, lo cual valida al *CTRW* para describir distintas dinámicas. De hecho, mediante este formalismo, se pueden describir diferentes modelos de transporte, incluyendo procesos en los que no se cumplen las condiciones de localidad ni Markovianidad [13, 22, 27–29].

3.2.1. No localidad en el espacio

En primer lugar nos ocupamos de la distribución del tamaño de los pasos.

Hasta ahora hemos visto que, para modelar el transporte, se toma en consideración la distribución Gaussiana del tamaño de los pasos por ser la única distribución límite de sumas de variables independientes e idénticamente distribuidas que, según el teorema del límite central, tiene varianza finita.

Se ha comprobado que cuando el transporte está bien descrito por un *CTRW* con una distribución $p(\Delta x)$ Gaussiana, la varianza de ésta $-\sigma$ en la expresión (2.32)– es la única escala característica espacial en el transporte.

Sin embargo hemos visto en las secciones anteriores de este capítulo que existen algunas situaciones en las que parece que no existen las escalas características en el transporte, y que por lo tanto no pueden modelarse correctamente utilizando una distribución Gaussiana. Esto nos lleva a relajar la condición de varianza finita en el teorema del límite central, y considerar en su lugar el teorema de Gnedenko [30], que es una generalización del anterior. El teorema de Gnedenko dice que los posibles límites de las sumas de variables independientes e idénticamente distribuidas convergen a una familia de distribuciones denominadas distribuciones de Lévy. Obsérvese que no se ha impuesto varianza finita, con lo que la distribución de Gauss es un caso particular de esta familia de distribuciones.

Las distribuciones de Lévy no Gaussianas decaen como una ley de potencia, y esto hace que carezcan de escalas características puesto que sus momentos no son todos finitos. Esto las convierte en distribuciones muy interesantes para describir procesos de transporte que no están dominados por ninguna escala característica.

Distribuciones de Lévy simétricas

A continuación vamos a ver cuales son las distribuciones de Lévy que pueden utilizarse para describir el tamaño de los pasos. Más adelante se mostrará el modo en que se introducen en la Ecuación Maestra y las implicaciones que tiene.

Las candidatas a funciones de distribución para la longitud de los saltos son distribuciones simétricas de Lévy o estables, definidas en el espacio de Fourier como:

$$P_{(\alpha,\gamma=0,\sigma)}(k) = \exp(-\sigma^\alpha |k|^\alpha) \quad (3.2)$$

siendo $\alpha \leq 2$. En el límite $\alpha \rightarrow 2$ tenemos una distribución Gaussiana. El subíndice $\gamma = 0$ indica simetría en k . Esto, en el espacio real, se traduce en que $p(\Delta x) = p(-\Delta x)$.

En el espacio real (de Δx en nuestro caso) las distribuciones de Lévy con $\alpha < 2$ tienen un decaimiento tipo ley de potencia para valores 'grandes' de Δx : $P_{(\alpha,0,\sigma)}(\Delta x) \propto c \cdot |\Delta x|^{-(1+\alpha)}$, con lo que, con respecto al caso $\alpha = 2$ se relaja la condición de decaimiento exponencial de la pdf. Entendemos por valores grandes de Δx aquellos tales que $\Delta x \gg \sigma$.

Algunas propiedades, además del comportamiento asintótico de ley de potencia y de la divergencia de la varianza cuando $\alpha < 2$, son las siguientes:

- Los momentos de orden δ , con $0 \leq \delta < \alpha \leq 2$ del valor absoluto de x sí que son finitos.
- Para $\alpha = 2$ y $\gamma = 0$, la distribución estable es una distribución normal o Gaussiana.
- Cuando $\alpha = 1$ y $\gamma = 0$ la distribución estable es una distribución de Cauchy o Lorentz.

Obsérvese que el decaimiento es el aspecto cualitativo más importante que diferencia a la distribución Gaussiana del resto de distribuciones de Lévy estables y simétricas.

En escala logarítmica se observa más fácilmente el diferente comportamiento de las colas de las distribuciones. En el caso $\alpha < 2$ el decaimiento es mucho más lento que en la Gaussiana.

De ahí se infiere que en un sistema donde el transporte esté correctamente modelado por una distribución de Lévy no Gaussiana, los fenómenos de correlación a largas distancias estarán contemplados, puesto que dichas distribuciones decaen de manera más lenta. Un *random walk* donde la pdf de las distancias de los vuelos sea $P_{(\alpha,0,\sigma)}(\Delta x)$, con $\alpha < 2$ tendrá mayor número de pasos 'largos' que los que tendría si $\alpha = 2$. En la figura 3.6 tenemos un ejemplo en 2 dimensiones. Este ejemplo ha sido calculado con tiempos de espera fijos.

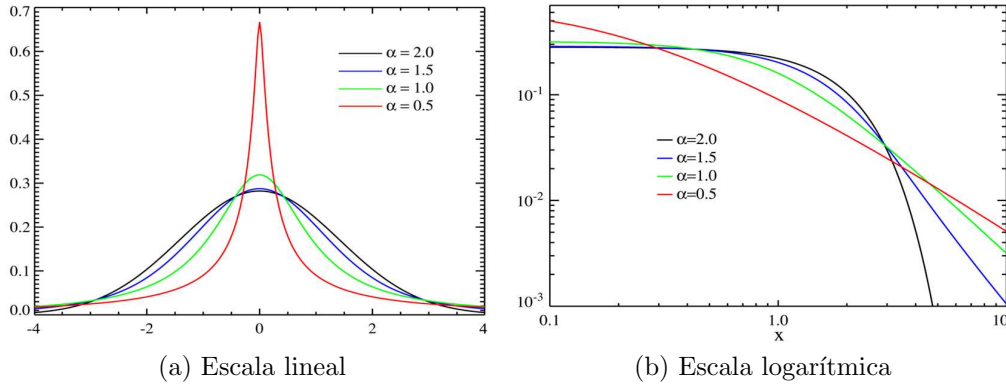


Figura 3.5: Distribuciones de Lévy en el espacio real.

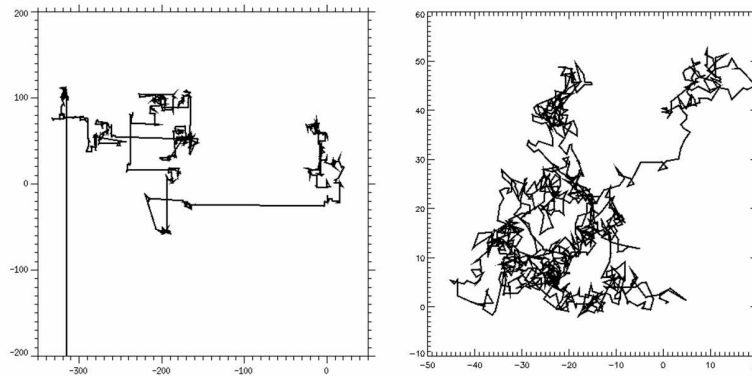


Figura 3.6: CTRWs con distribuciones tipo Lévy($\alpha = 1$) y Gaussiana.

El dibujo de la izquierda corresponde a una trayectoria de una partícula cuya función de distribución para la longitud de los saltos es una distribución de Lévy con $\alpha = 1.2$ mientras que a la derecha tenemos el mismo caso, con $\alpha = 2$, es decir, una distribución Gaussiana. Ambas partículas parten del mismo punto $(0, 0)$, y han dado el mismo número de pasos (1000). Nótese que la partícula de la izquierda realiza algunos saltos muy largos. Nótese además que la escala no es la misma en los dos casos.

En un *random walk* tal que la distribución del tamaño del paso sea la ecuación (3.2), con $\alpha < 2$ las partículas darán pasos de todos los tamaños, porque ésta es una distribución libre de escalas. Aunque con $\alpha = 2$ también puedan darse pasos de todos los tamaños, la probabilidad de que se produzcan pasos 'grandes' es despreciable frente al caso no Gaussiano.

Al ser $p(\Delta x)$ una Lévy no Gaussiana, que decae a distancias largas de manera algebraica, la contribución de la parte lejana de la distribución no es despreciable,

con lo que ya no se cumple aproximación que en (2.41) si era válida,

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Delta x^n p(\Delta x) d\Delta x \approx \\ &\int_{-L/2}^{L/2} \Delta x^n p(\Delta x) d\Delta x = \langle \Delta x^n \rangle_L \end{aligned} \quad (3.3)$$

(donde \approx indica que no es buena aproximación) sino que los momentos de $p(\Delta x)$ ahora sí que dependen del tamaño del sistema L :

$$\begin{aligned} \langle \Delta x^n \rangle &= \infty, \quad n \geq \alpha \\ \langle \Delta x^n \rangle &= A_\alpha \sigma^\alpha \quad n < \alpha \\ \langle \Delta x^n \rangle_L &\propto L^{n-\alpha} \quad n \geq \alpha \\ \langle \Delta x^n \rangle_L &= A_\alpha(L) \sigma^\alpha \quad n < \alpha \end{aligned} \quad (3.4)$$

Es decir, el transporte no es independiente del tamaño del sistema, al depender los momentos de la distribución de más de una cantidad (L y σ); dicho de otro modo, en el transporte no existen escalas características de longitud, y para describirlo bien es necesario conocer el valor de α .

El hecho de introducir una pdf del tamaño del paso de tipo Lévy tiene importantes implicaciones en la ecuación (2.34) que vimos en el capítulo anterior. Es apropiado realizar la transformada de Fourier para poder trabajar con estas distribuciones.

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau_D} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx' p(x - x'; t) n(x', t) - n(x, t) \right] \quad (3.5)$$

Una vez realizada la transformada de Fourier queda así:

$$\frac{\partial \hat{n}(k, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau_D} [\hat{p}(k) \hat{n}(k, t) - \hat{n}(k, t)] \quad (3.6)$$

donde la notación $\hat{f}(k)$ indica transformada de Fourier de la función $f(x)$.

El límite fluido

Antes de continuar es necesario introducir el llamado *límite fluido*. Cuando se trabaja en el espacio de Fourier, el límite fluido se incorpora en la escala de longitudes como $k \rightarrow 0$. La interpretación física en un caso como el de la expresión (3.6) es la siguiente: $n(k)$ está dominado por frecuencias bajas, de manera que es suave y no tiene un “perfil abrupto”. Las aproximaciones hechas al introducir en la ecuación (2.34) la distribución $p(\Delta x)$ Gaussiana para deducir la expresión (2.37)

equivalen a introducir de forma implícita el límite fluido, en este caso en el espacio real.

Como se verá más adelante, también se puede introducir el límite fluido en la escala de tiempos, es decir, en lo que respecta a la dependencia temporal de la función pertinente. En dicha escala, la transformación de Fourier se reemplaza por la de Laplace, y en lugar de trabajar con el tiempo t se trabaja con la variable transformada s . Entonces en el límite fluido $s \rightarrow 0$, lo que equivale a decir que la evolución temporal de la función de interés es suave, y por lo tanto está dominada por frecuencias bajas.

Difusión no Gaussiana en el límite fluido

Para continuar con el límite fluido en el caso no Gaussiano, aproximamos: $\hat{p}(k) = \exp(-\sigma^\alpha |k|^\alpha) \simeq 1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha$ puesto que consideramos que \hat{p} está dominado por valores de k muy pequeños. Esta expresión se puede ahora introducir en (3.5):

$$\frac{\partial \hat{n}(k, t)}{\partial t} \approx -\frac{\sigma^\alpha}{\tau_D} |k|^\alpha \hat{n}(k, t) \quad (3.7)$$

y una vez realizada la transformada de Fourier inversa, se obtiene la nueva ecuación de difusión:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} \approx \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} [D_\alpha n(x, t)] \quad (3.8)$$

Podemos entender la ecuación (3.8) comparándola con (2.38). Destacan dos diferencias: En lugar del coeficiente de difusión D hemos escrito D_α , cuya definición es $D_\alpha \equiv \sigma^\alpha / \tau_D$, siendo σ^α el momento de orden α de la pdf $p(\Delta x)$, y τ_D el primer momento de la distribución $\psi(\Delta t)$. La cantidad D_α jugaría el rol de coeficiente de difusión, aunque se mida en unidades distintas.

Por otra parte, en lugar de la segunda derivada de (2.38) tenemos el operador $\partial^\alpha / \partial |x|^\alpha$. La transformada de Fourier de la derivada segunda de una cantidad es: $F[d^2 f / dx^2] \propto k^2 \hat{f}(k)$. En la ecuación (3.5) aparece la cantidad $|k|^\alpha \hat{n}(k, t)$. Por lo tanto parece natural denominar a la transformada inversa de esta cantidad derivada de orden α .

Se trata del llamado operador diferencial fraccionario de Riesz que se define [31]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} [D_\alpha n(x, t)] &= \frac{\cos^{-1}(\pi\alpha/2)}{2\Gamma(p-\alpha)} \frac{d^p}{dx^p} \left(\int_{-\infty}^x \frac{D_\alpha(x') n(x', t) dx'}{(x-x')^{\alpha-p+1}} \right) - \\ &\quad \frac{\cos^{-1}(\pi\alpha/2)}{2\Gamma(p-\alpha)} \frac{d^p}{d(-x)^p} \left(\int_x^\infty \frac{D_\alpha(x') n(x', t) dx'}{(x'-x)^{\alpha-p+1}} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde p es un entero tal que $p-1 \leq \alpha < p$, y Γ es la función Gamma. $\partial^\alpha / \partial |x|^\alpha$ es por lo tanto un operador integro-diferencial en lugar de la derivada de la expresión (2.38). En (3.8), la evolución de $n(x, t)$ no depende únicamente del valor de la

función en un entorno local, sino que depende del valor en todo el dominio. En el caso $\alpha = 2$ el operador de Riesz converge a la derivada segunda.

3.2.2. No localidad en el tiempo

De manera análoga se puede trabajar con las escalas temporales. Para ello se puede proceder definiendo una pdf para el tiempo de espera distinta a la que veníamos utilizando desde (2.32). La distribución exponencial de (2.32) corresponde a un movimiento Markoviano, en el que el movimiento de la partícula no depende de los movimientos anteriores, es decir, no hay *memoria*.

Distribuciones de Lévy asimétricas

Recuérdese que con la distribución de tiempos de espera (2.33) se obtuvo una función memoria ϕ tal que la integral en tiempo en la GME (2.26) daba como resultado una ecuación Master que no dependía de los acontecimientos pasados, sino que la evolución en el instante de tiempo t solamente depende del valor de $n(x, t)$ y $p(x - x', x', t)$ (ver (2.34)). Esto es consecuencia de la asunción de que el transporte es un proceso de Poisson, es decir, la elección de una $\psi(\Delta t)$ que es la distribución límite de una serie en la que a cada instante existe la posibilidad, totalmente aleatoria, de dar o no un salto, siendo, obviamente, los tiempos de espera positivos.

Sin embargo, si queremos dar un nuevo paso en la generalización de la ecuación de difusión, se puede introducir la *no localidad temporal* escogiendo una distribución de Lévy totalmente asimétrica, por ser los tiempos definidos no negativos, y por lo tanto definida en el espacio de Laplace:

$$P_{(\beta, \gamma=1, \mu)}(s) = \exp(-\mu^\beta s^\beta) \quad (3.10)$$

con $0 < \beta \leq 1$. En el límite $\beta \rightarrow 1$ tenemos la función ψ Markoviana de la ecuación (2.32). El subíndice $\gamma = 1$ indica asimetría. En el espacio de tiempos (de las t) esta distribución decae tal que $P_{(\beta < 1, 1, \mu)}(\Delta t) \rightarrow \Delta t^{-(1+\beta)}$ para Δt grande. Utilizando este tipo de distribuciones de Lévy se generaliza la expresión (3.8) porque estarían contemplados procesos de correlación temporal 'larga'. Para proceder partiendo de (2.26), transformamos en Laplace y Fourier para poder introducir las distribuciones de Lévy $\hat{\psi}(s)$ y $\hat{p}(k)$:

$$s\hat{n}(k, s) - \hat{n}(k, 0) = \phi(s) [\hat{p}(k)\hat{n}(k, s) - \hat{n}(k, s)] \quad (3.11)$$

Difusión no Gaussiana y no Markoviana en el límite fluido

Extendemos a continuación el límite fluido aplicándolo tanto al espacio como al tiempo: $k, s \rightarrow 0$. En dicho límite, la función memoria es:

$$\begin{aligned} \psi(s) = \exp(-\mu^\beta s^\beta) &\rightarrow \psi(s) \approx 1 - \mu^\beta s^\beta \rightarrow \\ \phi(s) &\approx \mu^{-\beta} s^{1-\beta} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Además sabemos que con $k \rightarrow 0$, $\hat{p}(k) \approx 1 - \sigma^\alpha |k|^\alpha$. Introduciendo estas dos aproximaciones en (3.11):

$$\begin{aligned} s\hat{n}(k, s) - \hat{n}(k, 0) &\approx -\frac{\sigma^\alpha}{\mu^\beta} |k|^\alpha s^{1-\beta} \hat{n}(k, s) \rightarrow \\ \rightarrow s^\beta \hat{n}(k, s) - s^{\beta-1} \hat{n}(k, 0) &\approx -\frac{\sigma^\alpha}{\mu^\beta} |k|^\alpha \hat{n}(k, s) \end{aligned} \quad (3.13)$$

y finalmente, realizando la transformada inversa de Laplace y Fourier, se obtiene la ecuación general para la difusión fraccionaria [20, 32–37]:

$$\frac{\partial^\beta n(x, t)}{\partial t^\beta} \approx \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} [D_{\alpha, \beta} n(x, t)] \quad (3.14)$$

Ahora el lugar del clásico coeficiente de difusión lo ocupa la cantidad $D_{\alpha, \beta}$, que definimos $D_{\alpha, \beta} \equiv \sigma^\alpha / \mu^\beta$, siendo σ^α el momento de orden α de la función de distribución $p(\Delta x)$, y μ^β el momento de orden β de la función de distribución $\psi(\Delta t)$.

El operador $\partial^\beta / \partial t^\beta$ es el operador diferencial fraccionario de Caputo y se define [31]:

$$\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} n(x, t) = \frac{\cos^{-1}(\pi\beta/2)}{2\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{n(x', t') dt'}{(t-t')^\beta} \right) \quad (3.15)$$

La presencia de FDO's en (3.14) tiene implicaciones muy importantes en el transporte, puesto que deja de ser local (debido a (3.9), la evolución de la densidad depende del valor de la densidad en todo el dominio) y deja de ser Markoviano (depende de los tiempos anteriores, por (3.15)).

Nótese que la ecuación de transporte difusivo (2.31) es un caso particular de (3.14) cuando $\alpha = 2$ y $\beta = 1$.

3.3. Escenarios en transporte no difusivo

Como hemos visto, generalizando mediante distribuciones de tipo Lévy la ecuación de difusión “estándar” se obtiene una ecuación de difusión fraccionaria en la que aparecen los parámetros de decaimiento de las pdfs de los pasos (α) y de

los tiempos de espera (β). En función de los respectivos valores de α y β nos encontramos con diferentes escenarios.

En el caso de transporte difusivo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Dn) \rightarrow \\ &\rightarrow \langle \Delta x^2 \rangle^{1/2} \propto t^{1/2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mientras que, con $\alpha < 2$ y $\beta < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\beta n(x, t)}{\partial t^\beta} &\approx \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} [D_{\alpha, \beta} n(x, t)] \rightarrow \\ &\rightarrow \langle \Delta x^\alpha \rangle^{1/\alpha} \propto t^{\beta/\alpha} = t^H \end{aligned} \quad (3.17)$$

Donde resulta útil definir el exponente de Hurst como $H \equiv \beta/\alpha$. Se distinguen los siguientes escenarios: Llamamos transporte difusivo al caso $H = 1/2$, diremos que el transporte es subdifusivo si $H < 1/2$, superdifusivo si $1/2 < H < 1$ y por último balístico cuando $H = 1$.

El espacio de parámetros $\alpha - \beta$ se representa en la figura 3.7, donde la ecuación (2.31) está representada por el punto rojo ($\alpha = 2$, $\beta = 1$: Transporte local y Markoviano) mientras que con la expresión (3.14) se consideran muchas más posibilidades. Es importante destacar que si el transporte es Markoviano y Gaussiano, es también difusivo ($H = 1/2$), mientras que lo contrario no es necesariamente cierto. Podemos tener un transporte difusivo pero no Gaussiano ni Markoviano, porque $H = 1/2$ implica que estamos en la línea roja, habiendo muchas combinaciones posibles de los parámetros de las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

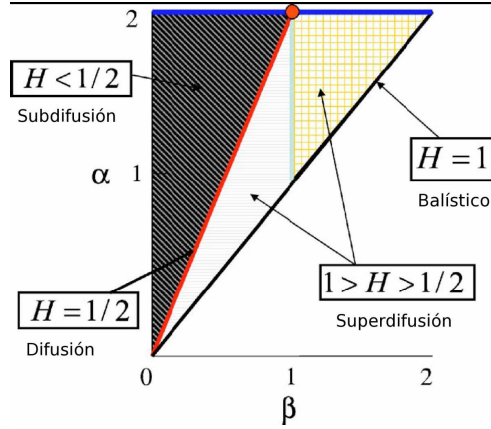


Figura 3.7: Espacio paramétrico α - β

Capítulo 4

CUTIE

A lo largo del presente capítulo describiremos el código de transporte turbulento CUTIE [38–41] explicando sus principales características. Se trata de una aproximación que sirve como referencia a nivel cualitativo, a pesar de lo cual se podrá comprobar que CUTIE es sumamente interesante de cara a la realización de estudios como el presentado en este trabajo. Por tanto, nos basaremos en las ideas descritas anteriormente para analizar el transporte radial en el código.

4.1. Líneas generales

CUTIE simula la turbulencia electromagnética en tokamaks. Es un código tridimensional de dos fluidos, que mantiene la condición de cuasi neutralidad.

El plasma simulado consta de electrones y una sola especie de iones. La cuasi neutralidad se impone a través de las ecuaciones:

$$n_e \simeq Z_i n_i = n \quad (4.1)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} \quad (4.2)$$

La razón para imponer la cuasi-neutralidad estriba en el hecho de que el código está diseñado para modelar la física que tiene lugar a escalas mayores que la longitud de Debye (λ_{Debye}) y con frecuencias pequeñas en comparación con la frecuencia del plasma (ω_{pe}), con lo que se satisface la relación (4.1) (en plasmas de Hidrógeno con $Z_H = 1$). Por otro lado, la corriente de desplazamiento es despreciable y la ley de Ampère se escribe como (4.2) (esto es válido a la hora de modelar la turbulencia; la corriente de desplazamiento *si* que se incluye a la hora de describir la propagación en el plasma de ondas electromagnéticas de alta frecuencia).

Las dos especies tratadas son localmente Maxwellianas, aunque en general sus temperaturas son distintas, $T_e \neq T_i$.

El dominio de la simulación es un cilindro tridimensional. Las coordenadas radial, poloidal y longitudinal son, respectivamente r , θ y ζ . El cilindro es periódico en la dirección ζ . Se incluyen efectos de curvatura en los campos, pero no se tienen en cuenta efectos estabilizadores (Shafranov shifts).

En lugar de tratar explícitamente las impurezas, se impone un perfil del número de carga medio o efectivo, $Z_{\text{eff}}(r/a)$. El perfil es monótonamente creciente y tal que $Z_{\text{eff}}(0) = 1$.

Esto tiene repercusiones en la resistividad del plasma, ya que se tiene en cuenta la contribución de los iones. Sin embargo se desprecia el posible efecto que tendría en las pérdidas radiativas.

Las fuentes de energía y partículas tienen unos perfiles de deposición impuestos aunque realistas. El calentamiento tiene las contribuciones Óhmica y de resonancia ECRH (Electron Cyclotron Resonance Heating).

El modelo incluye diversos modos de tipo fluido. Ondas de cizalla de Alfvén lineales y no lineales, modos magnetoacústicos lentos, modos de tipo “ballooning” ideal y viscorresistivo, inestabilidades originadas por el gradiente de temperatura iónica (obviamente, sólo la contribución fluida), modos de deriva “tearing”.

El transporte tiene una componente que procede de la descripción neoclásica. A la hora de realizar aproximaciones, la inercia electrónica se desprecia puesto que sus efectos sólo son apreciables en escalas tales que es necesario trabajar con una resolución espacial tan elevada que el tiempo de simulación se dispararía. Además se ha de tener en cuenta que un modelo fluido no es el más apropiado para modelar la física en escalas de longitud menores que el radio de giro de los iones.

4.1.1. Los aspectos clave

CUTIE es un código interesante para nuestro trabajo en tanto en cuanto satisface dos requisitos cruciales para que se produzcan fenómenos de correlaciones a larga distancia y procesos autosimilares.

(i) El código modela las “meso escalas”. No existen escalas características sino que se modela en escalas de tiempo entre el tiempo de Alfvén ($\tau_A = qR_0/V_A$, $V_A = B_{\text{tor}}/(\mu_0 m_i n_e)^{1/2}$) y el tiempo resistivo ($\tau_{\text{res}} = a^2/\mu_0 \eta_{\text{mc}}$), y escalas de longitud que van desde el tamaño del sistema a hasta un radio de giro efectivo ρ_s . Siendo la frecuencia de giro iónica $\omega_{\text{ci}} = eB_{\text{tor}}/m_i$, se define ρ_s a partir de la relación $\rho_s^2 \omega_{\text{ci}}^2 = (T_e + T_i)/m_i$. Como hemos visto en el capítulo 3, los procesos libres de escalas presentan un gran interés.

(ii) Además, CUTIE incluye un mecanismo de autorregulación que hace que los perfiles interactúen de manera no lineal con la turbulencia. Es decir, los gradientes (de los perfiles) coevolucionan con el nivel de turbulencia de manera autoconsistente. Esta autorregulación se espera que dé lugar a cierto nivel de autosimilaridad.

Como sabemos, la ausencia de escalas, así como la autosimilaridad, son características propias de procesos dominados por leyes de potencia, con lo que es de

esperar que las distribuciones de tipo Lévy no Gaussianas y no Markovianas hagan acto de presencia en el transporte de un código como CUTIE. Las leyes de potencia carecen de escalas y, para una estructura autosimilar, se espera que las distribuciones tipo ley de potencia estén presentes. Por lo tanto, estamos ante un código que tiene suficientes ingredientes para despertar nuestro interés y convertirlo en un buen banco de pruebas para el estudio de las ideas expuestas en los anteriores capítulos en una simulación con un alto grado de realismo.

4.2. Ecuaciones de partida

CUTIE, realizando una serie de aproximaciones, y respetando la conservación de partículas, de energía, de momento y las leyes de Maxwell, calcula la evolución de los siguientes campos: densidad número ($n = n_i = n_e$), temperatura de las especies (T_e, T_i), velocidad del fluido (\mathbf{v} , se desprecia la inercia de los electrones), el potencial electrostático (Φ) y la componente paralela del potencial vector (Ψ , equivalente a la función flujo poloidal).

El siguiente conjunto de ecuaciones representa el punto de partida:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = S_p \quad (4.3)$$

$$m_i n \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_{\text{eff}} \quad (4.4)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial T_{e,i}}{\partial t} + \mathbf{v}_{i,e} \cdot \nabla T_{i,e} \right) + n T_{i,e} \nabla \cdot \mathbf{v}_{i,e} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_{i,e} + \mathbf{P}_{e,i} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = -\frac{1}{ne} \nabla p_e + \mathbf{R}_e \quad (4.6)$$

El conjunto de ecuaciones de conservación se cerraría con la (4.2). La ecuación (4.3) representa el balance de partículas, incluidas las fuentes externas. \mathbf{v} es la velocidad del fluido ($(m_i + m_e)\mathbf{v} = m_i\mathbf{v}_i + m_e\mathbf{v}_e$). Al ser los iones mucho más masivos que los electrones, es válida la aproximación $\mathbf{v} \simeq \mathbf{v}_i$.

La ecuación del balance de momento es la (4.4), que se obtiene teniendo en cuenta la presión del plasma ($p = p_e + p_i$), la fuerza de Lorentz y las demás fuerzas efectivas actuando sobre el plasma (\mathbf{F}_{eff}) resultantes de los efectos de viscosidad y las colisiones. Se desprecia el efecto de la gravedad. La densidad de corriente que aparece en la expresión (4.4) se obtiene a partir de la relación $\mathbf{j} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$. Su menor inercia hace que la contribución de los electrones sea la dominante en \mathbf{j} , mientras que se puede despreciar en el balance de momentos.

Por otra parte el campo magnético se expresa como suma de las contribuciones paralela y perpendicular a la dirección toroidal \mathbf{b}_t según la relación $\mathbf{B} = \nabla\psi \times \mathbf{b}_t + B_0\mathbf{b}_t$. El campo magnético toroidal viene prescrito.

El balance de energía de las especies queda recogido en la expresión (4.5). El balance dependerá en gran medida de la forma que tomen tanto los flujos de calor $\mathbf{q}_{i,e}$ como las fuentes $\mathbf{P}_{i,e}$.

Finalmente tenemos la expresión del balance de momento de los electrones (4.6), o ley de Ohm generalizada, donde se tienen en cuenta los efectos “Hall” y diamagnético de los electrones.

El campo eléctrico se escribe en función de los potenciales ψ , ϕ , como $\mathbf{E} = -\partial\psi/\partial t\mathbf{b}_t - \nabla\phi$. El término \mathbf{R}_e es una fuerza que engloba los efectos de fricción.

4.3. Tokamak: Aproximaciones de las ecuaciones

A las aproximaciones realizadas en la sección anterior, consecuencia de la relación entre las masas de iones y electrones ($m_i/m_e \gg 1$), se añaden otras que reflejan situaciones típicas en la práctica en tokamaks,

$$B_{\text{pol}} \ll B_{\text{tor}} \quad (4.7)$$

$$\beta_{\text{PI}} \ll 1 \quad (4.8)$$

$$k_{\parallel} \ll k_{\perp} \quad (4.9)$$

En tokamaks convencionales el campo magnético toroidal, generado principalmente por las bobinas, es considerablemente mayor que el poloidal, generado por la propia corriente del plasma (4.7). También es sabido que (sobre todo en dispositivos de tamaño relativamente pequeño) la energía interna del plasma es mucho menor que la energía magnética (4.8). Finalmente, la turbulencia en tokamaks se caracteriza por tener unas longitudes de onda asociadas que en la dirección paralela son del orden de magnitud de las dimensiones del sistema, mientras que en la dirección perpendicular éstas son mucho menores (4.9).

Se simula un tokamak de relación de aspecto grande, $R/a \gg 1$. Las superficies de flujo están anidadas y etiquetadas con la coordenada radial r .

Los efectos de curvatura se incluyen introduciendo en las ecuaciones la inversa de la relación de aspecto ϵ .

Las fluctuaciones del campo magnético que se propagan en dirección paralela a las líneas de campo de equilibrio (el toroidal), se desprecian frente a aquéllas que se propagan en la dirección perpendicular.

4.4. La evolución de los campos

Todas las variables que evolucionan en el código se escriben en una forma adimensional y posteriormente se dividen en dos componentes, dejando toda dependencia angular en la componente “fluctuante” que se separa de la “media”:

$f(r, \theta, \zeta, t) = f_0(r, t) + f^*(r, \theta, \zeta, t)$. De manera que se pueden desarrollar los f^* en series de Fourier:

$$f^* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{m,n}(r, t) \exp(im\theta + in\zeta) \quad (4.10)$$

Nótese que la “media” $f_0(r, t)$ es la componente $m = 0$, $n = 0$ del desarrollo de Fourier de la variable $f(r, \theta, \zeta, t)$.

Al trabajar con cantidades reales, el tratamiento se simplifica porque las componentes de Fourier cumplen la condición $\hat{f}_{m,n} = \hat{f}_{-m,-n}$.

Las partes llamadas “fluctuantes” son las que, tras su transformación en cantidades adimensionales utilizando parámetros convenientes, se calculan en el espacio de Fourier.

La evolución de las cantidades denominadas “fluctuantes” se deduce de las ecuaciones de partida, utilizando las aproximaciones citadas. Más detalles se pueden encontrar en las referencias [38, 39].

Es importante destacar que para garantizar, desde el punto de vista computacional, la viabilidad del modelo, es importante incluir en las ecuaciones términos difusivos. El objetivo de éstos términos introducidos ad hoc no es otro que evitar efectos de crecimiento autoconsistente aunque espúreo que, en computación, pueden desarrollarse y provocar el colapso por crecimiento exponencial. Desde el punto de vista físico, estos términos también tienen su justificación, puesto que contienen todos los efectos de las colisiones y otros mecanismos cinéticos que disipan la energía, actuando como sumideros para las fluctuaciones de número de onda suficientemente elevado.

4.4.1. La autorregulación

Para completar el modelo, se utilizan las ecuaciones del movimiento para calcular la evolución de las cantidades ‘medias’ n_0 , $T_{e,i 0}$, $B_{\theta 0}$, $v_{\theta 0}$, $v_{\zeta 0}$.

Dichas cantidades medias se obtienen resolviendo las ecuaciones de manera exacta. Se tienen en cuenta las fuentes externas y los coeficientes de transporte neoclásicos.

En general, las cantidades medias f_0 (o componentes $m = 0$, $n = 0$ de la descomposición de Fourier) evolucionan según una ecuación del tipo:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\Gamma_f(r, t)) + S_f(r, t) \quad (4.11)$$

donde, teniendo en cuenta las contribuciones colisional (neoclásica) y turbulenta, el flujo total de la cantidad f a través de una superficie de flujo es $\Gamma_f = \Gamma_{f \text{ neo}} + \Gamma_{f \text{ turb}}$. De la literatura [42] se extraen los $\Gamma_{f \text{ neo}}$, que pueden ser advectivos o difusivos, mientras que las derivas de fluctuaciones tipo $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ a través de las superficies de

flujo hacen que los flujos turbulentos sean principalmente advectivos. Los flujos turbulentos tienen la forma general:

$$\Gamma_{f \text{ turb}} = \langle \delta v_r^E f^* \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta v_r^E(r, \theta, \zeta, t) f^*(r, \theta, \zeta, t) d\theta d\zeta \quad (4.12)$$

donde δv_r^E es la fluctuación de la componente radial de la velocidad $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ y f^* la parte fluctuante de la cantidad f . Obsérvese que, puesto que estas componentes turbulentas pueden variar fuertemente, se introducen, localmente, variaciones en las cantidades medias —es decir, la turbulencia afecta a los perfiles.

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r [\Gamma_{\text{nc}} + \langle \delta n_e \delta v_r^E \rangle]) + S_p(r, t) \quad (4.13)$$

$$\frac{3}{2} n_0 \frac{\partial T_{i,e}^0}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left[Q_{\text{nc}}^{i,e} + \frac{5}{2} \langle \delta p_{i,e} \delta v_r^E \rangle + Q_m^{i,e} \right] \right) + P_{i,e}(r, t) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial B_{\theta 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta_{\text{nc}} \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_{\theta 0})}{\partial r} - j_{\text{bs}} - j_{\text{dyn}} \right) \right] \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial t} = -\nu_{\text{nc}}(v_{\theta 0} - v_{\theta \text{nc}}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle \delta v_r^E \delta v_{\theta}^E \rangle) + \left\langle \frac{\delta j_{\parallel} \delta B_r}{m_i n_0} \right\rangle \quad (4.16)$$

$$E_{r0} = \frac{1}{en_0} \frac{\partial p_{i0}}{\partial r} + v_{\zeta 0} B_{\theta 0} - v_{\theta 0} B_{\zeta 0} \quad (4.17)$$

En este conjunto de ecuaciones vemos como la teoría neoclásica proporciona un nivel mínimo de transporte, a través de las cantidades f_{nc} . Por ejemplo en la ecuación (4.13), que se deriva de la ecuación del balance de partículas (4.3), el flujo tiene dos componentes, Γ_{nc} se obtiene de la teoría neoclásica mientras que el flujo turbulento y ambipolar de partículas es $\Gamma_{\text{turb}} = \langle \delta n \delta v_r^E \rangle$, donde

$$\delta v_r^E = -\frac{1}{B} \frac{1}{r} \frac{\partial \delta \phi}{\partial \theta} \quad (4.18)$$

Finalmente, para mantener la densidad de línea en el valor deseado, tenemos el término S_p que se activa cuando la densidad de línea es menor que la prefijada, según un mecanismo que se verá más adelante.

La ecuación (4.14) se deriva del balance de energía (4.5). En el cálculo de las temperaturas electrónica e iónica están involucrados flujos neoclásicos $Q_{\text{nc}}^{i,e}$, turbulentos $Q_{\text{turb}}^{i,e} = \frac{5}{2} \langle \delta p_{i,e} \delta v_r^E \rangle$ además de las fuentes de calentamiento $P_{i,e}$ (Óhmico y por resonancia ciclotrónica de los electrones). Queda la posibilidad de añadir otras contribuciones en Q_m , como por ejemplo términos relacionados con el transporte debido a fluctuaciones magnéticas.

La ecuación (4.15) es la que evoluciona el campo magnético. Se puede deducir a partir de la ecuación de inducción de Faraday:

$$\frac{\partial B_{\theta 0}}{\partial t} = \frac{\partial E_{\zeta}}{\partial r} \quad (4.19)$$

donde el campo eléctrico recibe las contribuciones de varias corrientes: $E_\zeta = \eta_{nc}(\langle j_\zeta \rangle - j_{bs} - j_{dyn})$.

La resistividad neoclásica y la corriente de “bootstrap” se obtienen a partir de expresiones estándares de la teoría neoclásica [43] mientras que la densidad de corriente toroidal se expresa en función del campo poloidal utilizando la ley de Ampère, quedando:

$$j_\zeta = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_{\theta 0})}{\partial r} \quad (4.20)$$

además, se puede añadir el término de corriente de dínamo, es decir, la ocasionada por las correlaciones entre las fluctuaciones de velocidad y campo magnético: $j_{dyn} = \langle \hat{e}_\zeta \cdot (\delta \mathbf{v} \times \delta \mathbf{B}) \rangle / \eta_{nc}$.

Nótese que la evolución del campo poloidal conlleva la evolución del factor de seguridad, definido en la ecuación (1.8).

Por otra parte, la ecuación (4.16) da cuenta de la velocidad poloidal promediando sobre los ángulos en la componente poloidal de la ecuación (4.4). Se asume a inexistencia de fuentes externas de momento poloidal. En el término $-\nu_{nc}(v_{\theta 0} - v_{\theta nc})$, ν_{nc} es la colisionalidad neoclásica, y $v_{\theta nc}$ es la velocidad poloidal neoclásica. El resto son aceleraciones poloidales ocasionadas por la propia turbulencia.

El momento toroidal normalmente se expresa en función de la velocidad térmica de los iones como $v_{\zeta 0} = v_{th,i} M_a$, dejando fijo el número de Mach de los iones M_a .

El campo eléctrico radial (“en equilibrio”) se deduce a partir de la componente correspondiente de la ecuación del balance de momento de los iones.

Para resolver las ecuaciones es necesario imponer una serie de condiciones de contorno.

La condición de regularidad exige que todas las cantidades fluctuantes desaparezcan en $r = 0$. También se anulan todas las fluctuaciones en $r = a$, así como algunos gradientes como los de densidad y temperatura. Además se impone un pequeño pedestal apropiado físicamente en el borde del plasma.

Las cantidades medias o de equilibrio (4.13) y (4.14) se resuelven dejando evolucionar las condiciones iniciales (Gaussianas arbitrarias) imponiendo la anulación de los gradientes en el eje magnético y valores físicamente apropiados en el borde (pedestales).

Las condiciones de contorno para la resolución de la ecuación (4.15) son $B_{\theta 0}(a) = \mu_0 I_p / 2\pi a$ (I_p es la corriente del plasma) y $B_{\theta 0}(0) = 0$.

Al separar las cantidades en una parte de ‘equilibrio’ y otra parte ‘fluctuante’ (por ejemplo $T_e = T_{e0}(r, t) + \delta T_e(r, \theta, \zeta, t)$.) es conveniente calcular la primera parte por separado en el espacio de Fourier. Esto tiene la ventaja de que se puede hacer que el primer término sea sensible tanto a las fuentes externas como a los flujos turbulentos (o al promedio de éstos en cada superficie de flujo). Por tanto, se dice que el término $f_0(r, t)$ desarrolla su propia estructura fina, puesto que puede fluctuar en tiempos muy cortos comparados con el tiempo de confinamiento y en

distancias mucho menores que el tamaño del sistema (a). Éstas “corrugaciones” afectan al desarrollo de la turbulencia, lo cual tiene importantes repercusiones en la evolución del sistema.

Es decir, las modificaciones en la turbulencia (el orden de la llamada “mesoescala”) afecta a la evolución de los perfiles, o sus gradientes (variaciones del orden de la macroescala), mientras que la perturbación de éstos últimos también condiciona a la propia turbulencia.

Es por esto que se dice que el código CUTIE modela tanto la macroescala como la “mesoescala” y sus interacciones mutuas de forma autoconsistente.

4.5. Simulaciones realizadas: modo L y modo H

Con el código se han realizado dos simulaciones, en dos escenarios operacionales distintos, para el análisis de trayectorias de tracers: modo L y modo H. En ambos casos se ha trabajado con simulaciones de COMPASS-D [44], tokamak de pequeño tamaño que actualmente opera en el Instituto de Física del Plasma de Praga, República Checa. El plasma simulado consta de dos especies: electrones y núcleos de deuterio.

4.5.1. Simulación en modo L

Las dimensiones del dispositivo son las siguientes: Radio mayor $R_0 = 0.56 m$ y radio menor $a = 0.24 m$. El campo magnético en el eje magnético en operación es $B_0 = 2.1 T$ y la corriente del plasma es de hasta $I_p = 240 kA$. Además de calentamiento Óhmico (aproximadamente con una potencia $P_{Ohm} \sim 30 kW$) está el calentamiento ECRH (Electron Cyclotron Resonance Heating). La potencia ECRH depositada obedece a una distribución Gaussiana cuyo máximo coincide con el eje magnético —ECRH *on axis*— y alcanza valores $P_{ECRH} = 340 kW$ (potencia depositada, no inyectada).

La fuente de partículas está asociada a un mecanismo que la activa cuando la densidad de línea media del plasma es inferior a una densidad de referencia. La densidad de control o de referencia en la simulación de modo L es ($\bar{n}_{ref} = 1.8 \times 10^{19} m^{-3}$).

A continuación se representan algunos perfiles, que sugieren que la simulación tiene las características propias del modo L en CUTIE. Los perfiles que se muestran están tomados una vez que la turbulencia ya ha sido desarrollada y se ha alcanzado el estado estacionario.

Los perfiles de densidad y temperatura electrónica se muestran en la figura 4.1.

Obsérvese que no hay ningún pedestal desarrollado.

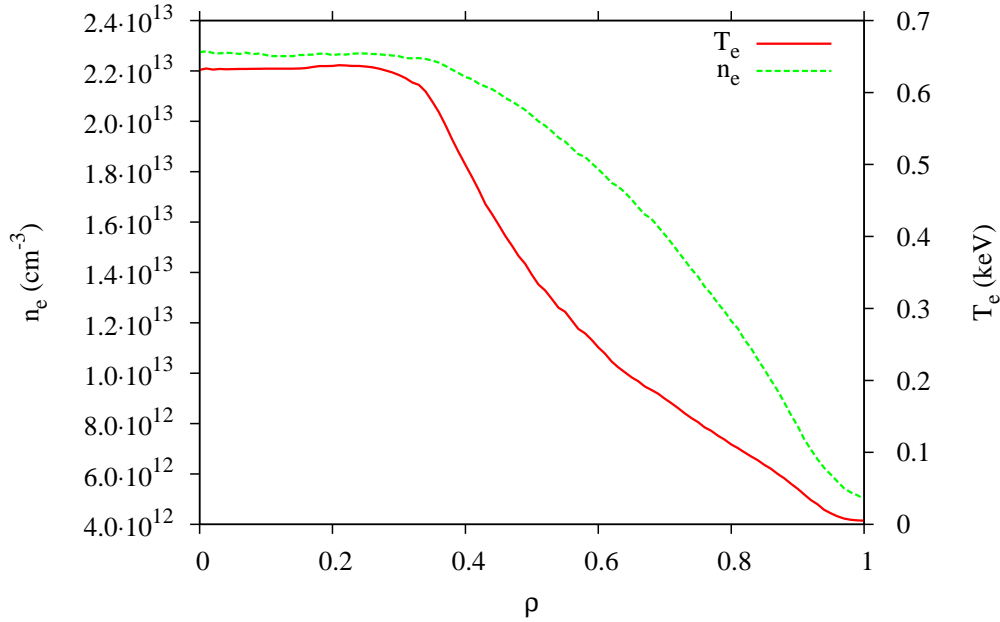


Figura 4.1: Perfiles de densidad y temperatura electrónica en estado estacionario.

A continuación se muestra la velocidad poloidal, tanto la total como su componente $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ en la figura 4.2.

Es de destacar el aplanamiento de los perfiles de densidad y temperatura de la figura 4.1 en el interior de $r/a \simeq 0.3$, posición radial donde se observa una cizalla importante en la velocidad poloidal. Es en $r/a = 0.3$ donde el perfil del factor de seguridad (figura 4.3) se aplanan ($q(r/a < 0.3) = 1$).

Como se ha dicho (1.8) el perfil de q evoluciona en el tiempo. En la práctica, sin embargo, no se observan variaciones importantes en el mismo.

Una manera efectiva de cuantificar el nivel de turbulencia se presenta en las figuras 4.4 y 4.5 donde se mide el nivel de turbulencia electrostática y magnética, respectivamente. La primera se mide como la amplitud de las fluctuaciones de la velocidad radial normalizando con la velocidad de deriva poloidal, mientras que la segunda se cuantifica a partir de la amplitud de las fluctuaciones del campo magnético radial, normalizada por el campo magnético en la dirección poloidal.

El nivel de la turbulencia no es muy alto. No obstante, se detectan eventos cuasi-periódicos durante los cuales la turbulencia se incrementa notablemente. Estos eventos quedan reflejados en la densidad, puesto que los relacionamos con las propagaciones en las fluctuaciones de densidad electrónica que podemos observar en la figura 4.6.

Las fluctuaciones de densidad se calculan como $\delta n_e = n_e - \langle n_e \rangle$. Destacan las relajaciones que tienen su origen en el borde del plasma y que se propagan, en forma de oscilación cuasi-periódica, hacia el interior del mismo. Puesto que la distancia

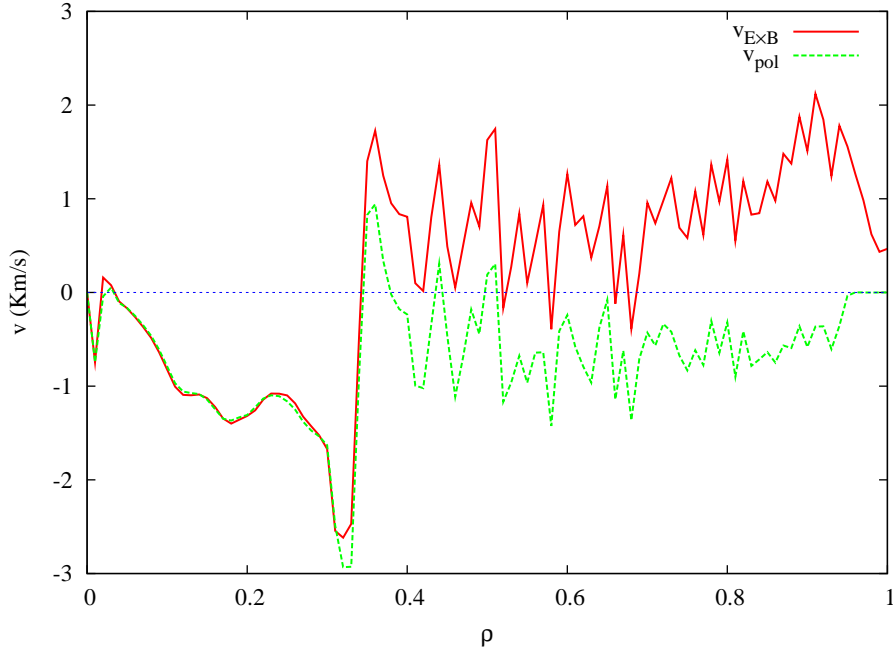


Figura 4.2: Perfiles de v_{pol} y $v_{E \times B}$ en estado estacionario.

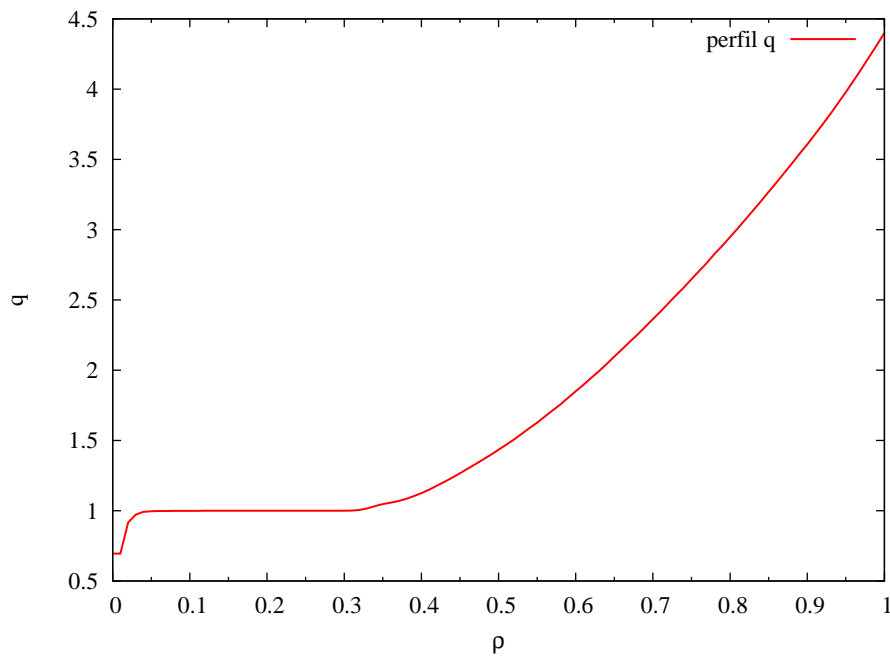
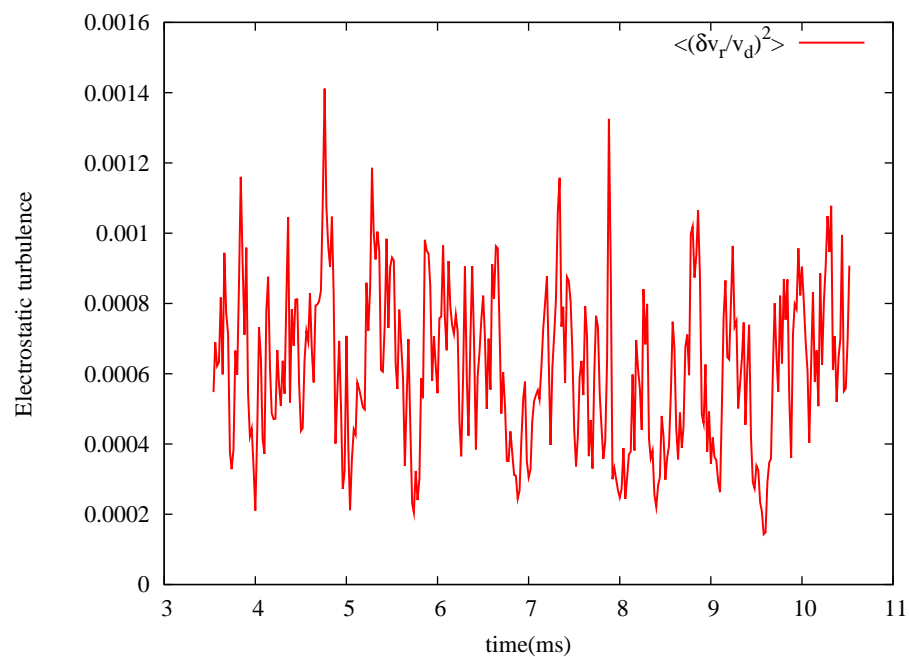
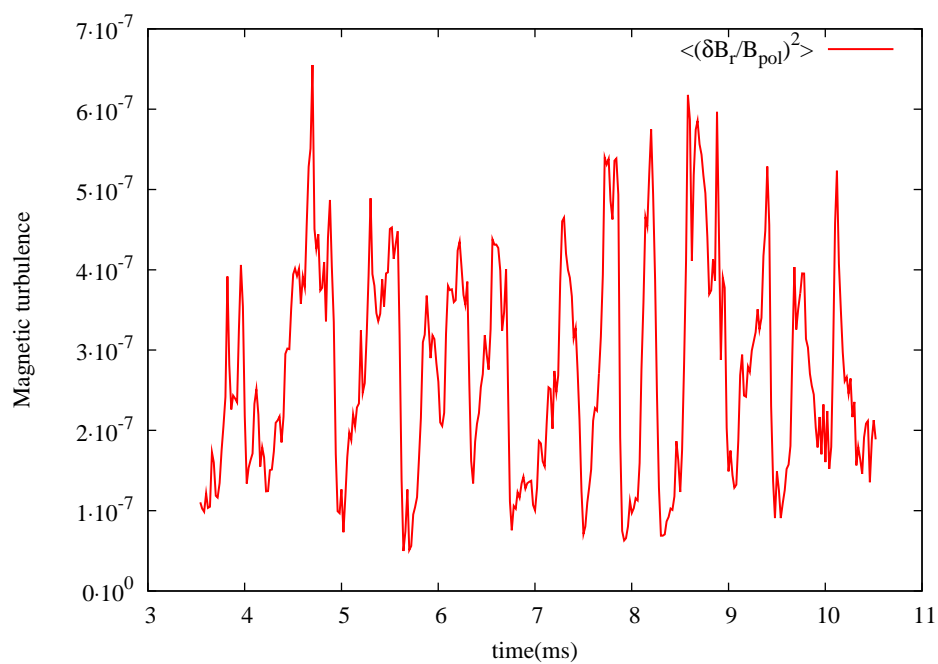


Figura 4.3: Perfil del factor de seguridad en CUTIE en $t = 4$ ms.

Figura 4.4: Turbulencia electrostática cuantificada como $\langle(\delta v_r/v_d)^2\rangle$ Figura 4.5: Turbulencia magnética cuantificada como $\langle(\delta B_r/B_{pol})^2\rangle$

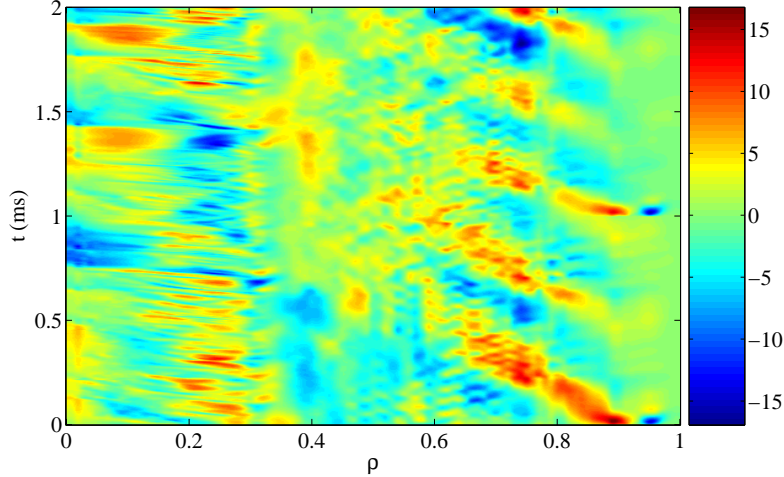


Figura 4.6: Fluctuaciones en la densidad electrónica en unidades de 10^{10} cm^{-3} .

recorrida por las oscilaciones es comparable con el tamaño radial del dispositivo simulado, estamos ante una manifestación de no-localidad en el transporte. Se espera que el comportamiento de los tracers se vea influenciado en mayor o menor medida por este fenómeno.

La figura 4.6 se puede dividir en distintas regiones donde cabría esperar un comportamiento distinto del plasma. Las oscilaciones se propagan desde $r/a = 0.95$, donde nacen, hasta al menos $r/a = 0.60$. El perfil de q también condiciona la forma de la figura 4.6 puesto que se observa una barrera en $r/a = 0.8$, que coincide con la superficie racional $q = 3$, de manera que la región radial que recorren las relajaciones se puede dividir en dos zonas. Además, en $r/a < 0.3$, es decir, con $q = 1$ y dentro de la cizalla reflejada en el gráfico 4.2, el comportamiento del plasma es muy diferente al observado fuera de dicha región: las fluctuaciones se propagan hacia el eje magnético muy rápidamente. La última zona sería la delimitada entre la posición radial donde se 'frenan' las oscilaciones y la superficie racional $q = 1$, es decir, en $0.3 < r/a < 0.6$. En total cuatro zonas radiales que, yendo desde el borde hacia el eje magnético son:

- $r/a > 0.95$: Corresponde al Scrape-Off-Layer. El modelado físico se limita a imponer valores muy bajos de los perfiles y reducir el nivel de fluctuaciones hasta anularlas en $r/a = 1$.
- $0.95 > r/a > 0.8$: Desde el origen de las oscilaciones hasta la barrera de $q = 3$,
- $0.8 > r/a > 0.6$: Desde la barrera de transporte hasta la superficie donde las

oscilaciones se detienen,

- $0.6 > r/a > 0.3$: Región sin importantes oscilaciones cuasiperiódicas fuera de la cizalla de $q = 1$,
- $0.3 > r/a$: Interior de la superficie de cizalla de $r/a = 0.3$.

4.5.2. Simulación en modo H

El código también puede trabajar en un estado que se asemeja al modo H en ciertos aspectos [45]. De ahora en adelante, nos referiremos a ésta simulación como modo H.

En un código como CUTIE se puede reproducir la transición de modo L a modo H. Juegan un papel importante tanto la fuente de partículas como el uso de un adecuado sumidero.

La transición tiene lugar al incrementar el nivel de control de la densidad de línea desde $\bar{n}_{\text{ref}} = 1.8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ hasta $5.8 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ manteniendo las mismas condiciones de calentamiento ECRH. Es decir, tanto la potencia de calentamiento como la corriente y el campo magnético son los mismos que en modo L.

Cuando la densidad de línea es inferior a la de referencia, la fuente de partículas tiene la forma general $S_p = S(r/a)(\bar{n}_{\text{ref}} - \bar{n})/\tau_r$, donde $S(r/a)$ es un perfil impuesto con su máximo absoluto en $r/a = 0.95$ y $\tau_r = 100 \mu\text{s}$ un "tiempo de inyección." "Fuelling time".

El incremento súbito del parámetro \bar{n}_{ref} activa el mecanismo de control de densidad incrementando fuertemente el ritmo de inyección de partículas.

La presencia de un sumidero en la región $r/a > 0.95$ es de trascendental importancia, puesto que provoca, junto con la descrita fuente de partículas, la formación de un fuerte gradiente de densidad en el borde similar al obtenido experimentalmente en modo H.

El dominio radial "efectivo" del plasma es $0 < r/a < 0.95$, mientras que el Scrape-Off-Layer lo constituye el resto del dominio radial. La superficie radial que actúa como frontera queda establecida por la combinación sumidero-fuente, tal y como se representa en la figura 4.7.

Justo en el interior está la fuente, y justo en el exterior está el sumidero, lo cual induce la aparición de un fuerte gradiente de densidad, el pedestal, en el interior de la superficie $r/a = 0.95$.

Mientras que el ritmo de inyección de partículas de la fuente varía en el tiempo por el mecanismo de activación en función de la densidad, el ritmo al que el sumidero actúa es constante.

Dentro del plasma, aunque cerca del borde, es donde se desarrolla el gradiente de densidad, donde hay que buscar el origen de la barrera externa de transporte que hace que identifiquemos la simulación con un típico modo H en tokamaks.

La pared se encuentra en $r/a = 1$. En CUTIE el SOL en modo H se sitúa en el exterior de la barrera externa de transporte.

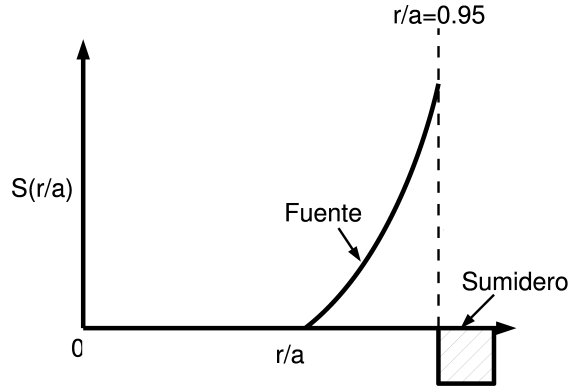


Figura 4.7: Representación esquemática de la fuente y el sumidero en CUTIE.

Modo H sin ELMs

Como respuesta al incremento de la densidad de control, la fuente se dispara incrementándose notablemente el ritmo de inyección de partículas. En tiempos del orden de τ_r se alcanzan densidades similares a \bar{n}_{ref} . Durante unos milisegundos de simulación (alrededor de 10 ms) el plasma evoluciona desde una situación transitoria, debido al abrupto incremento de densidad hacia un modo H. Se desarrollan las barreras externas de transporte, y se observa una supresión significativa del nivel de turbulencia en el borde. Sin embargo, no se detecta actividad alguna de modos localizados en el borde (ELM, del inglés *Edge Localised Mode*) que suelen aparecer en modo H.

Esta fase no se ha analizado por ser de corta duración y estar alejada del estado estacionario.

Modo H con ELMs

Aproximadamente 10 – 12 ms después del incremento en \bar{n}_{ref} comienza la actividad de los ELMs.

El estado del plasma es claramente diferente con respecto al modo L. La densidad se ha incrementado, llegando a triplicarse en el eje magnético (ver figura 4.8).

Se observa la presencia de un fuerte gradiente de n_e (y p_e) en el borde en modo H, de manera que el perfil se eleva sobre un pedestal. Esta situación en el borde del plasma ($r/a \sim 0.9$) se reproduce también en los perfiles de temperatura electrónica e iónica. La temperatura electrónica (Figura 4.9) disminuye en modo H debido a que el aumento de densidad no viene acompañado de un incremento en

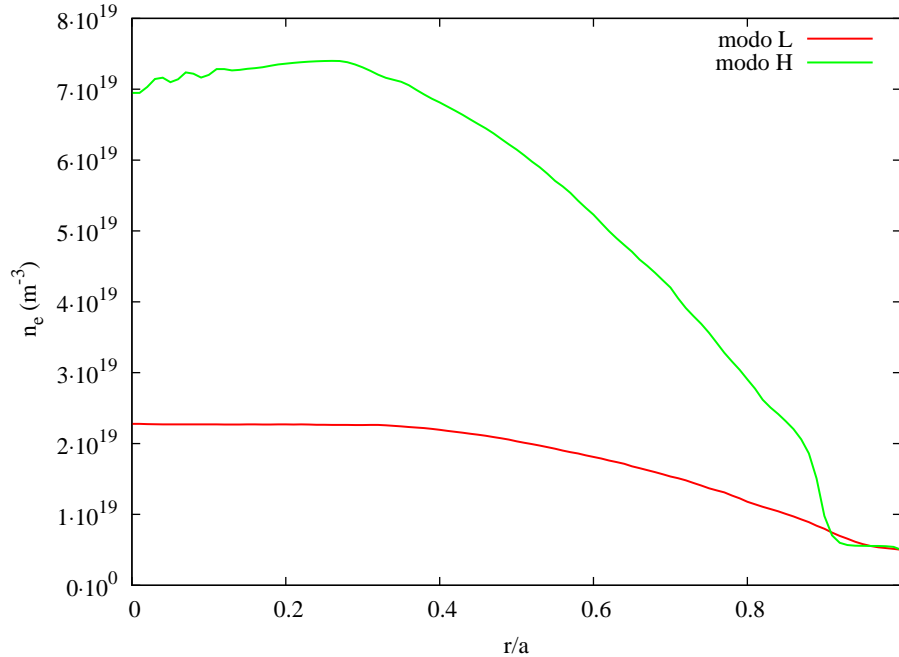


Figura 4.8: Perfiles de densidad en modo L y modo H

la potencia de calentamiento *ECRH*, sino que ésta permanece constante. De modo que la temperatura electrónica disminuye.

Sin embargo la temperatura de los iones (Figura 4.10) aumenta. Esto no debe sorprendernos puesto que la fuente de calentamiento del fluido iónico son las colisiones con los electrones, y $T_e \gg T_i$. La frecuencia (ν_{ei}) de colisión entre iones y electrones depende de la densidad y temperatura electrónica según la relación $\nu_{ei} \propto n/T_e^{3/2}$ (ecuación (1.16)). Por lo tanto la colisionalidad aumenta (Figura 4.11) al subir la densidad y bajar la temperatura en la transición L-H.

A pesar de los distintos comportamientos de las temperaturas T_e y T_i después de la transición L-H, podemos constatar como ambos perfiles comparten un pedestal en el borde típico del modo H en tokamaks.

La barrera de transporte en el borde, que se deduce a partir los pedestales en los perfiles en modo H, es consecuencia del máximo de la velocidad poloidal en $r/a \sim 0.9$ que se puede ver en la figura 4.12. Este pico es otra de las características importantes del modo H.

En modo H aparece un pico en v_θ en $r/a \simeq 0.9$, cerca del borde del plasma, denominado capa de cizalladura del flujo (“sheared flow layer” en inglés), que es donde se desarrolla la barrera de transporte del borde. Es en esta posición donde los gradientes de los perfiles de densidad y temperatura son máximos.

Durante los ELMs los perfiles cambian. Como podemos ver en la densidad

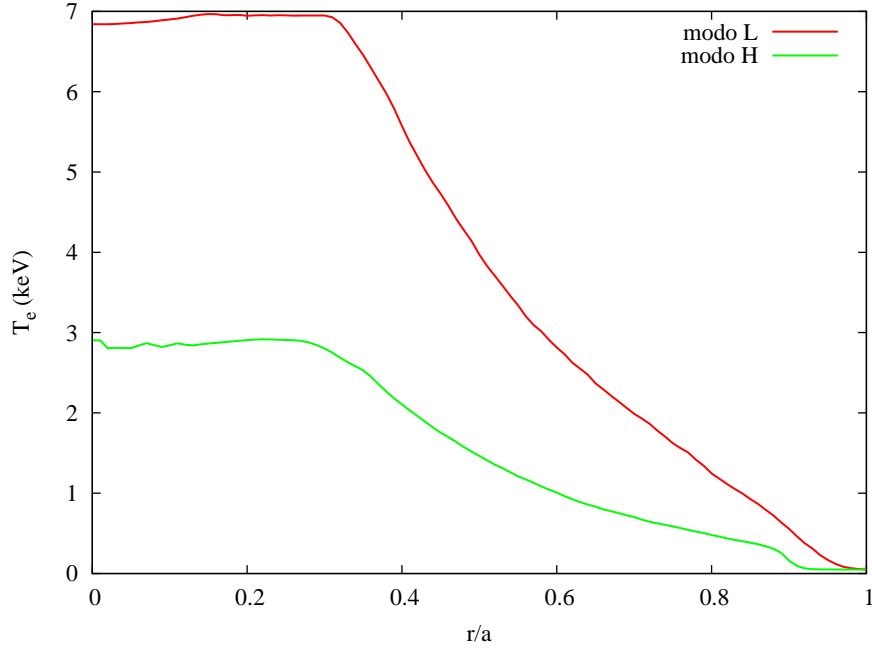


Figura 4.9: Perfiles de temperatura electrónica en modo L y modo H

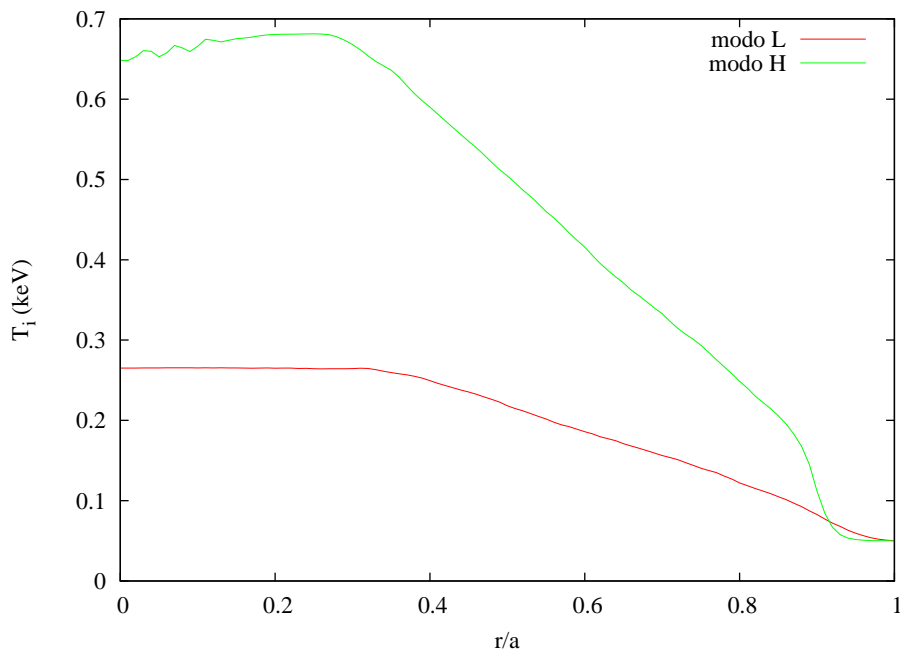


Figura 4.10: Perfiles de temperatura iónica en modo L y modo H

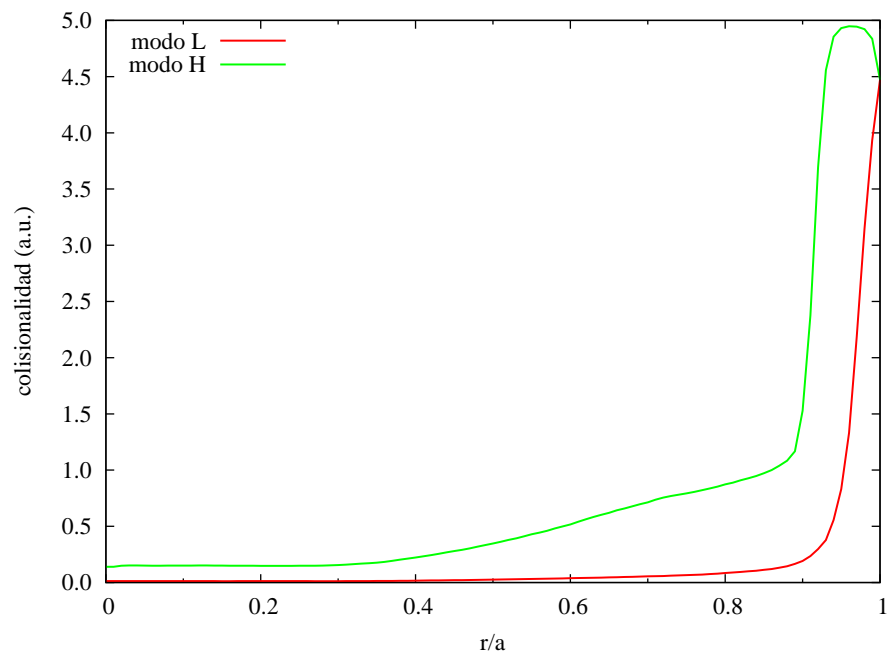


Figura 4.11: Frecuencia de colisiones en modo L y H

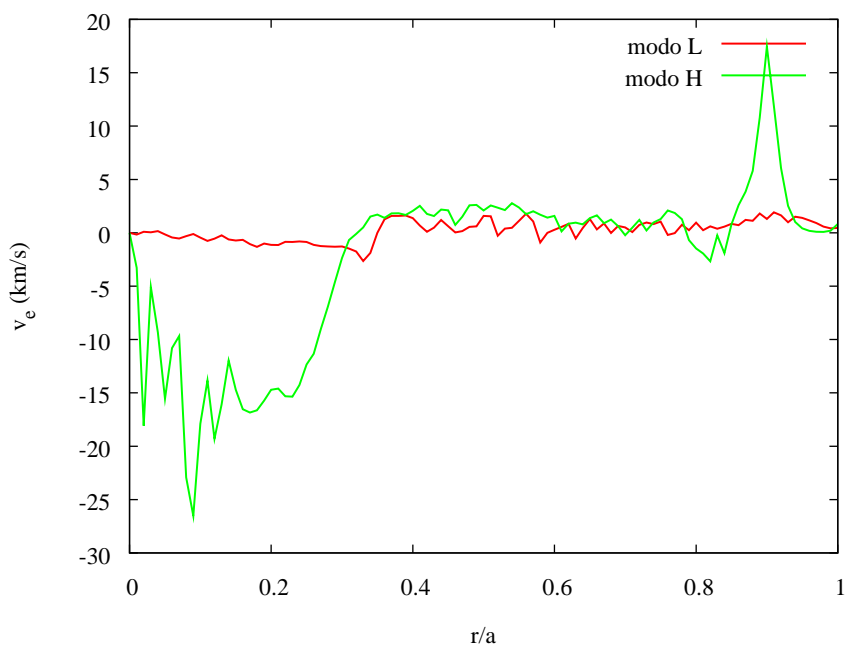


Figura 4.12: Perfiles de velocidad poloidal del fluido en modo L y modo H

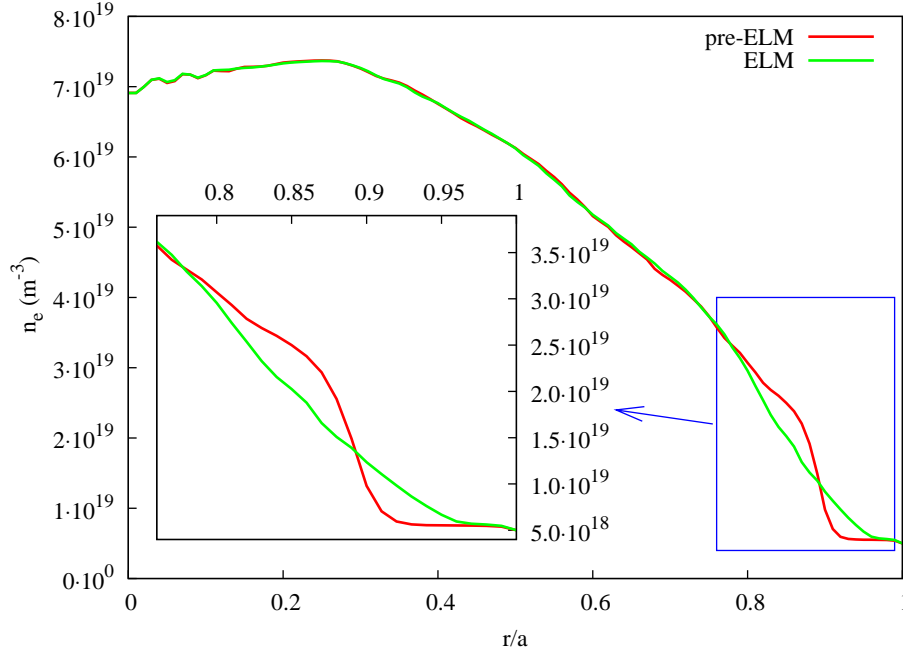


Figura 4.13: Perfil de la densidad electrónica antes y durante un ELM.

electrónica (ver figura 4.13), los cambios que se producen se ciñen a la parte exterior del plasma, en los alrededores del pedestal.

Análogamente sucede con la temperatura electrónica (Figura 4.14). Durante los ELMS, el fuerte gradiente de los perfiles $n_e(r/a)$ y $T_e(r/a)$ se relaja, desapareciendo el pedestal del borde, mientras que en $r/a \lesssim 0.7$ el perfil apenas cambia.

Veamos a modo de ejemplo cómo afectan a la densidad electrónica. Los ELMs repercuten en la densidad de línea pero donde realmente se ven afectados los perfiles es en el borde. Véase figura 4.15. El gráfico principal muestra un detalle de dos milisegundos de la evolución de $\langle n_e \rangle$, donde se pueden observar variaciones a causa de los eventos periódicos del orden del 1%. Además vemos las variaciones en la densidad en $r/a = 0.9$ frente a la densidad en el eje magnético, donde la variación es porcentualmente muy superior. A lo largo de toda la simulación se obtiene el siguiente valor promedio para el periodo de los ELMs:

$$\tau_{\text{ELM}} = 0.36 \text{ ms} \quad (4.21)$$

Es interesante estudiar la respuesta de la densidad fluctuante frente a las relajaciones del pedestal. Al igual que en la figura 4.6, representamos, ahora en modo H, la densidad electrónica fluctuante para estudiar su comportamiento durante los ELMs. Véase la figura 4.16.

Se observan relajaciones originadas en el borde del plasma que, como en la

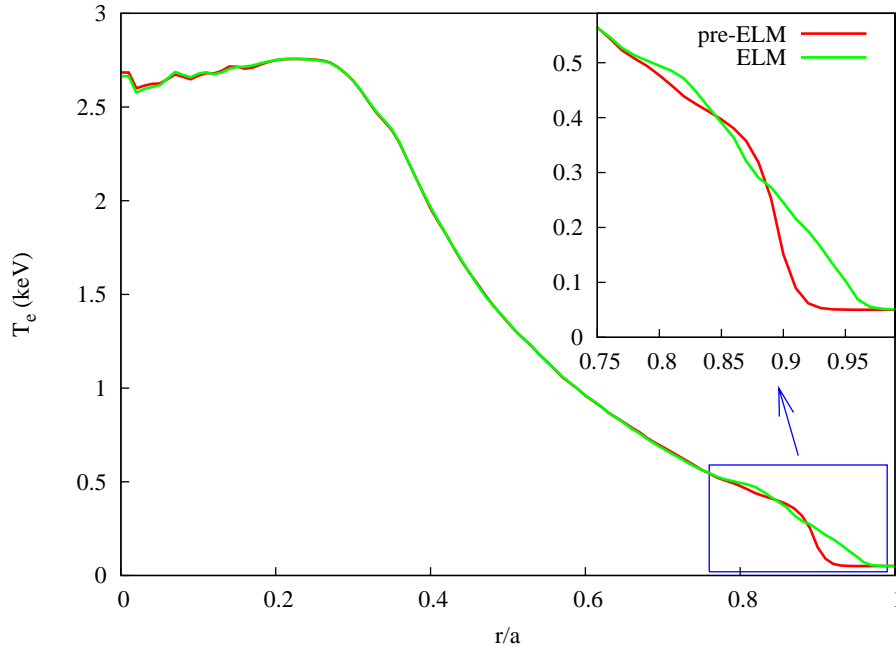


Figura 4.14: Perfil de la temperatura electrónica antes y durante un ELM.

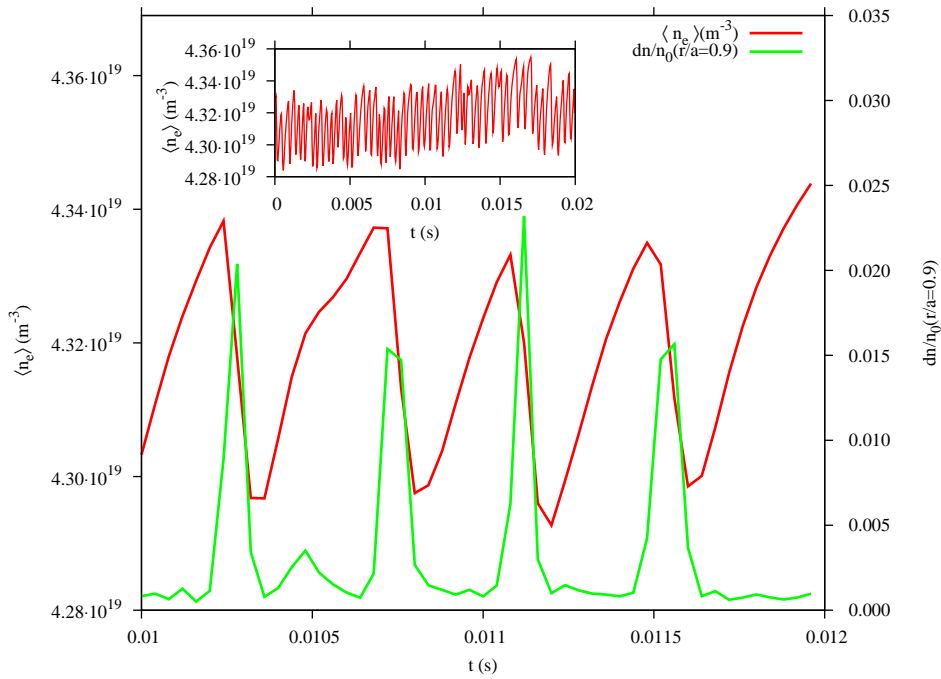


Figura 4.15: Evolución temporal de $\langle n_e \rangle$ y $\delta n_e(r/a = 0.9)/\langle n_e \rangle$. El impacto de los ELMs es visible.

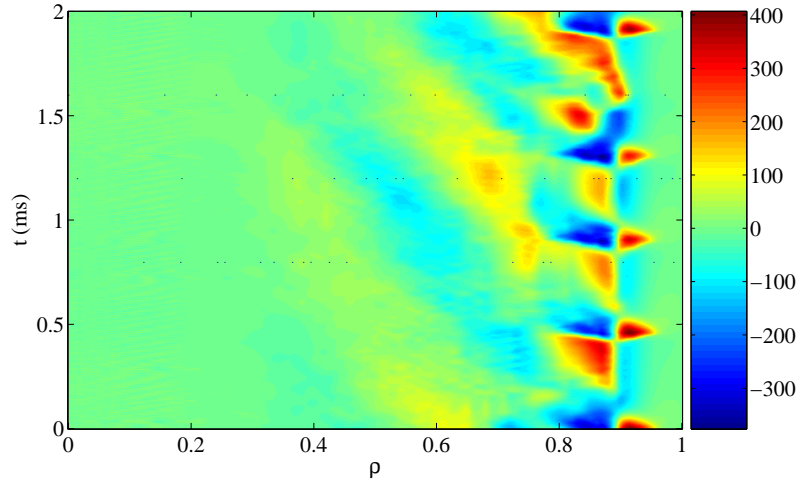


Figura 4.16: Fluctuaciones en la densidad electrónica en modo H en unidades de 10^{10} cm^{-3} .

figura 4.6 se originan en el borde del plasma y se propagan hacia el interior.

Se observan sin embargo algunas diferencias. La velocidad a la que viajan las perturbaciones es menor que en modo L mientras que la amplitud que alcanzan es mucho mayor.

El nivel de turbulencia se puede medir, al igual que en modo L, para comprobar si se observan variaciones relevantes relacionados con las relajaciones en el borde. La turbulencia electrostática aparece en la figura 4.17, mientras que la magnética la representamos en la figura 4.18.

No se observan cambios destacables en la turbulencia durante los ELMs.

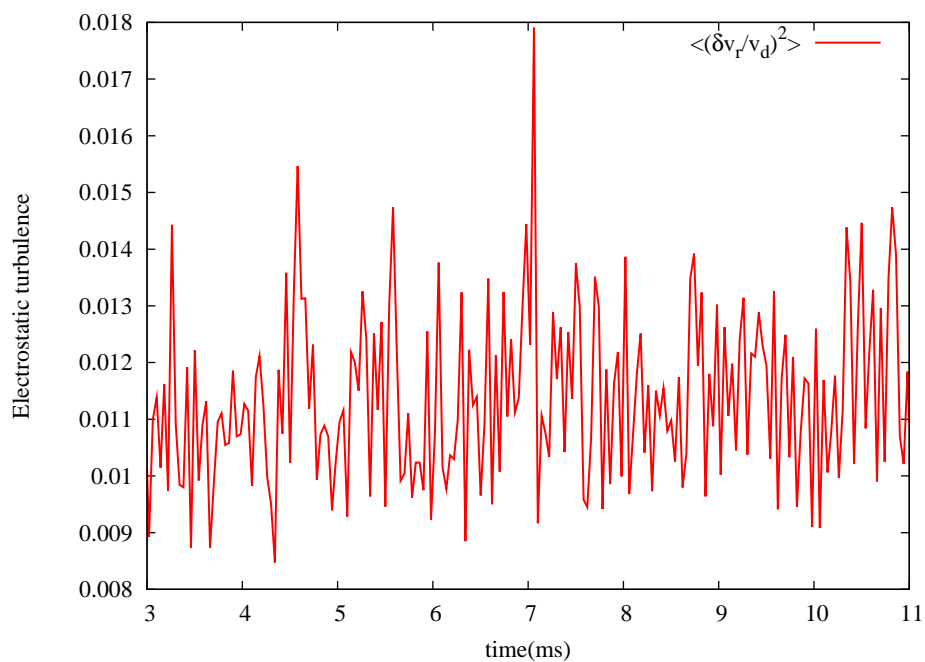


Figura 4.17: Turbulencia electrostática en modo H.

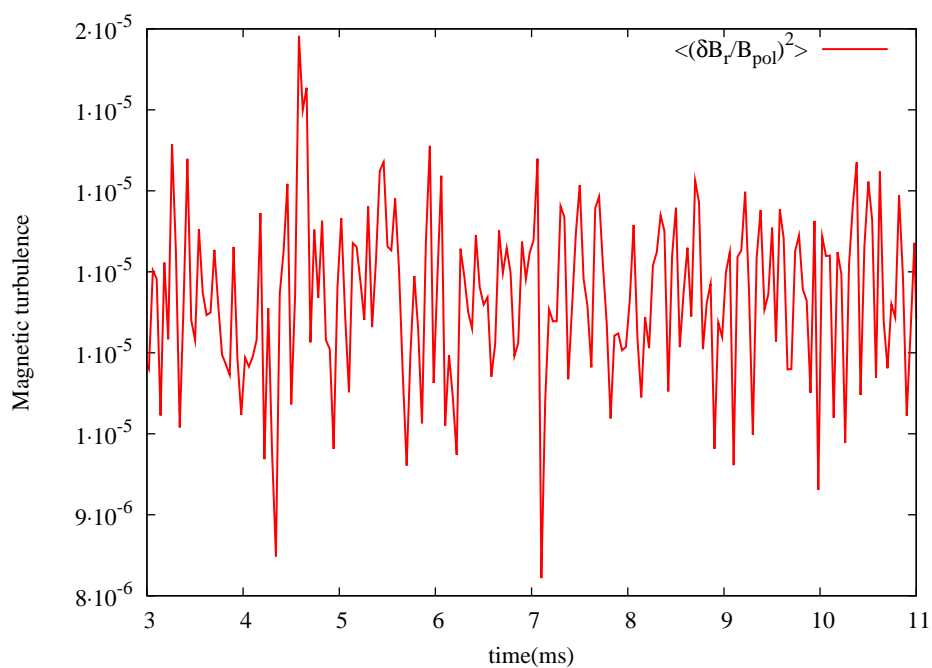


Figura 4.18: Turbulencia magnética en modo H.

Capítulo 5

Tracers. Trayectorias y métodos de interpolación.

A continuación veremos cómo se han introducido y seguido los tracers en las simulaciones con las que hemos trabajado. Se explicarán las técnicas de interpolación utilizadas y los métodos que se han empleado para analizar las trayectorias obtenidas.

5.1. Tracers

Una vez alcanzada la situación estacionaria en el código, se han lanzado 10000 tracers. Las partículas se depositan simultáneamente en la misma posición radial $r/a = 1/2$ con posiciones aleatorias en las direcciones θ y $z = \zeta/R_0$. La velocidad inicial de cada tracer es la del fluido en la posición donde ha sido introducido.

CUTIE calcula, y proporciona, la velocidad del fluido en los puntos de su rejilla interna, que consta de $n_R = 101$ puntos radiales, $n_\theta = 65$ puntos en la dirección poloidal y $n_Z = 17$ en la toroidal. La rejilla es relativamente gruesa y es necesario recurrir a técnicas de interpolación para calcular el valor de la velocidad en todo el espacio.

Los tracers se mueven de acuerdo con la velocidad del fluido. Por lo tanto se trata de partículas ideales, que no afectan a los perfiles ni a la física de la simulación.

5.2. Interpolación Spline

Existe un numeroso elenco de métodos de interpolación. En nuestro caso hemos descartado, tras probarla, la interpolación lineal por no garantizar la derivabilidad ni ofrecer precisión suficiente. Otra opción que ha sido desechada es la interpolación *Shepard* 3D, que no es apropiada para campos con una estructura suficientemente

complicada (como en nuestro caso) puesto que induce a la aparición de fuertes oscilaciones de longitud de onda menor que el tamaño de la rejilla.

El método escogido ha sido el de la interpolación *spline* cúbica en tres dimensiones. La interpolación *spline* garantiza a la función interpolada continuidad, derivabilidad hasta segundo orden y máxima suavidad posible.

A modo ilustrativo, se explica la técnica en el caso de una sola dimensión. Sea $y(x)$ una función que se quiere reconstruir, conocidos n puntos de la misma: $y(x_i) = y_i$ $i = 1, \dots, n$.

La función que se desea obtener es una función que consiste en $n - 1$ tramos:

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x) & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ s_2(x) & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \\ s_{n-1}(x) & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (5.1)$$

donde cada parte $s_i(x)$ es un polinomio de tercer grado que se define:

$$s_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (5.2)$$

Se escogen los coeficientes a_i , b_i , c_i , d_i que cumplan que la función $S(x)$ verifique los siguientes requisitos:

- $S(x)$ pasa por todos los puntos conocidos y_i .
- $S(x)$ es continua en el intervalo $[x_1, x_n]$.
- $S'(x)$ existe y es continua en el intervalo $[x_1, x_n]$.
- $S''(x)$ existe y es continua en el intervalo $[x_1, x_n]$.

Cuando se desea emplear este método para interpolar funciones en tres dimensiones, se recurre a procedimientos iterativos. De esta manera, se puede obtener una estimación del campo a interpolar en cualquier punto del espacio.

5.2.1. Comprobación

A partir de los valores del campo de velocidades en los puntos de la rejilla, hemos construido un campo de velocidades analítico utilizando el teorema de Fourier.

Una función periódica siempre se puede escribir como una expansión de modos de Fourier:

$$f(x, y, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a(l, m, n) \exp\{-i(lx + my + nz)\} \quad (5.3)$$

Se exige que una función periódica en CUTIE no presente oscilaciones con números de onda mayores que la inversa del grosor de la rejilla (en la dirección correspondiente). Esto limita el número de modos que contribuirían a la expansión:

$$f(x, y, z) = \sum_{l=0}^{(n_R-1)/2} \sum_{m=0}^{(n_\theta-1)/2} \sum_{n=0}^{(n_Z-1)/2} a(l, m, n) \exp\{-i(lx + my + nz)\} \quad (5.4)$$

Los campos de velocidades en CUTIE son periódicos en las direcciones poloidal y toroidal, pero no en la dirección radial. Sin embargo, podemos imponer la condición de periodicidad en la dirección radial para realizar la comprobación de la interpolación. De esta manera, utilizando el teorema de Fourier, podemos calcular los coeficientes a , aprovechando la condición de ortogonalidad de los modos:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz e^{-i(lx+my+nz)} \cdot e^{-i(l'x+m'y+n'z)} = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \quad (5.5)$$

Los coeficientes a se pueden determinar puesto que el número de éstos a calcular coincide con el total de puntos donde es conocido el valor del campo $n_{\text{Tot}} = n_R n_\theta n_Z$.

Una vez son conocidos los coeficientes a , se puede realizar la transformada de Fourier inversa. La ventaja de utilizar este método para construir los campos reside en el hecho de que mediante la transformada inversa se puede obtener el valor exacto de la función en cualquier punto del espacio. Por ello nos es muy útil a la hora de comprobar la validez del esquema de interpolación empleado.

Hemos modificado los campos de velocidades radial, poloidal y toroidal para que los tres sean periódicos en la dirección radial, haciendo que la velocidad en los puntos de la rejilla $(1, l, m)$ y (n_R, l, m) coincida, para que sea aplicable el método de comprobación.

A partir de los valores en la rejilla de esos campos, ya modificados, se ha ensayado la interpolación spline cúbica de tres dimensiones, y comparado sus resultados con los campos tenidos por “reales”, deducidos a partir del teorema de Fourier. De hecho, CUTIE trabaja internamente en el espacio de Fourier en las direcciones θ y ζ , así que dichas componentes Fourier contienen toda la información de los campos. Aunque en dirección radial eso no se aplica, veremos una buena concordancia que indica que estas transformaciones de Fourier captan bien la dependencia radial.

Para realizar la comprobación, se utiliza un campo estático y se escogen líneas en las que dos de las coordenadas con constantes y la otra variable (por ejemplo, r, Z constantes, θ variable). A lo largo de la línea trazada se verifica si hay diferencias entre el campo real y el *spline*. Se ha comprobado que la interpolación da buenos resultados en los tres campos cuando nos movemos en líneas en las que Z no es la coordenada variable (por ejemplo, ver figura 5.1). Sin embargo, en el caso en que es Z la coordenada que dejamos variable la interpolación falla claramente en los tres campos de velocidades (ver figura 5.2). Esto sugiere que la interpolación falla lejos de los puntos que la rejilla tiene en esta última dirección.

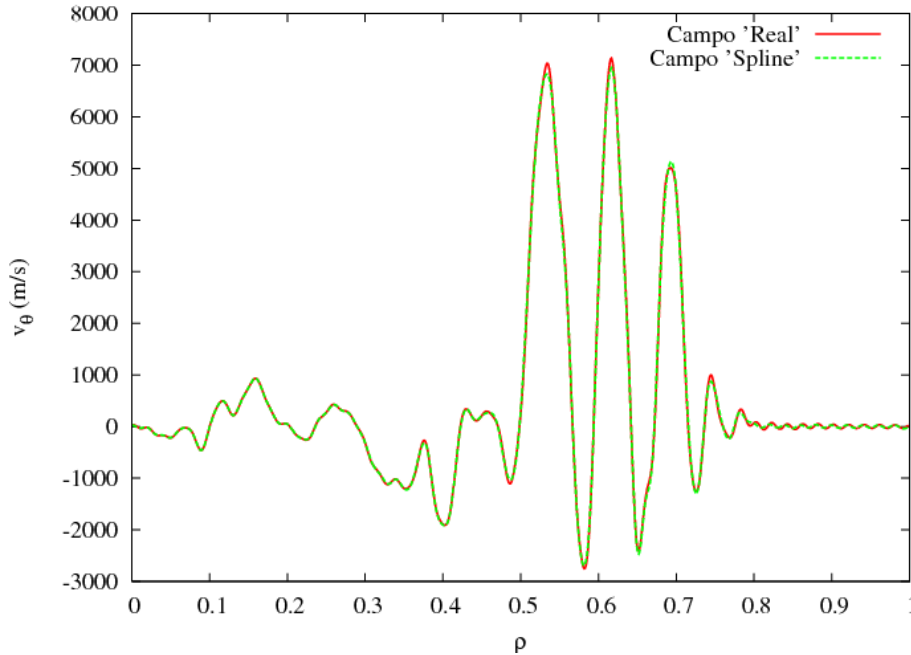


Figura 5.1: Comparación entre los campos de velocidades poloidales calculados utilizando interpolación *spline* y reconstrucción de Fourier ($0 \leq r \leq a$, $\theta = \pi$, $z = Z_{\text{MAX}}/2$).

La separación de la rejilla de CUTIE en la dirección toroidal es excesivamente grande para que la interpolación sea fiable.

Este problema se ha resuelto utilizando de nuevo el teorema de Fourier. Mediante técnicas de Transformada Rápida de Fourier en una dimensión, se han calculado los coeficientes del campo sólo en la dirección toroidal (la dirección en la que la interpolación da problemas), utilizando los datos conocidos en la rejilla. Posteriormente se realiza la transformada inversa, reinterpretando el campo como si tuviera más modos, de amplitud nula, en la dirección toroidal para obtener en Z una rejilla más fina. Se ha supuesto, para ello, que el número de modos con que el código trabaja es suficiente para captar la física del sistema, y que al aportar más modos de amplitud nula no se introduce ninguna alteración.

Utilizando este esquema, hemos *extendido* o *afinado* la rejilla en la dirección toroidal para pasar de tener $n_Z = 17$ puntos a $n_{Z_{\text{new}}} = 65$ con lo que hemos multiplicado por un factor cuatro. Esto supone una mayor precisión a la hora de realizar la interpolación.

Se han vuelto a hacer las comprobaciones efectuadas anteriormente, para constatar la mejoría de la fiabilidad de la interpolación con la nueva rejilla. Se observa que las divergencias observadas entre los campos “real” y “spline” han desapa-

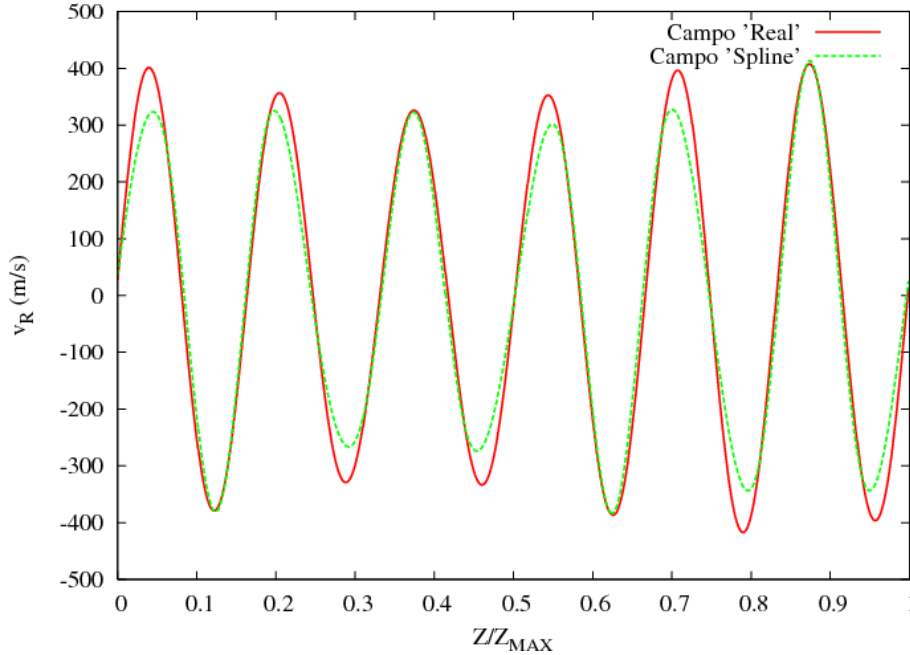


Figura 5.2: Comparación entre los campos de velocidades radiales calculados utilizando interpolación *spline* y reconstrucción de Fourier ($r = a/2$, $\theta = \pi$, $0 \leq z \leq Z_{MAX}$).

recido, coincidiendo éstos con suficiente grado de precisión como para considerar que la estimación obtenida con el método de interpolación es correcta. Se ilustra mediante la repetición, con la nueva rejilla, del cálculo realizado para obtener la figura 5.2. El resultado se muestra en la gráfica 5.3

5.3. Interpolación temporal

El código proporciona la velocidad a tiempos discretos, con lo que es necesario realizar una segunda interpolación, ésta en el tiempo. La frecuencia de actualización de CUTIE es suficientemente alta como para considerar razonable la interpolación lineal de los campos.

En concreto, el paso temporal es de $\delta t \equiv \tau_{CUTIE} \sim 10^{-8} s$.

Se ha comprobado que con tiempos suficientemente bajos, como el escogido, el resultado no depende de la elección de δt . Además, este tiempo, como se muestra a posteriori, es varios órdenes de magnitud inferior al tiempo de autocorrelación de la densidad electrónica.

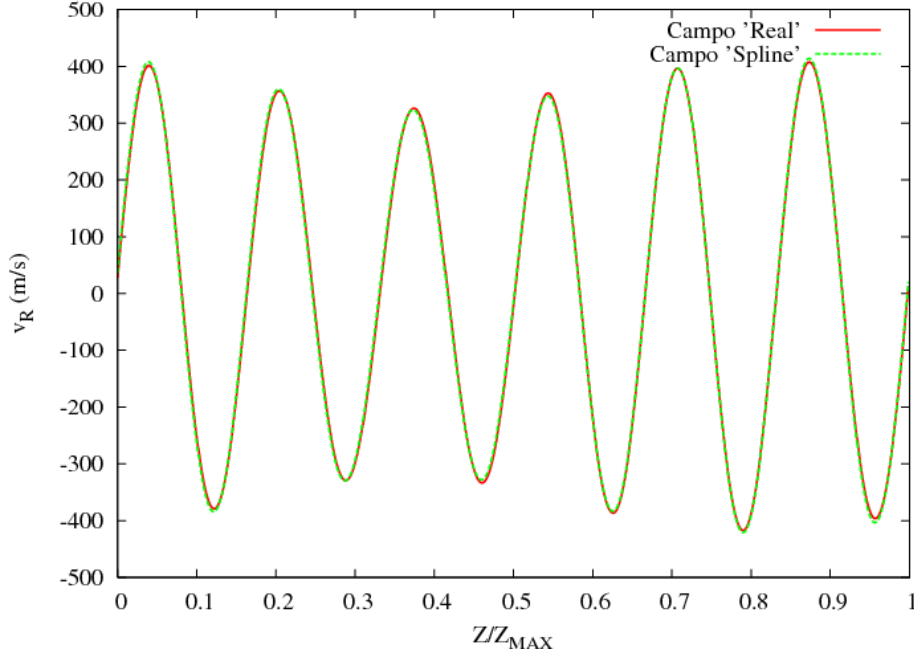


Figura 5.3: Comparación entre los campos de velocidades radiales calculados utilizando interpolación *spline* en una rejilla con $n_{Z_{new}} = 65$ y reconstrucción de Fourier ($r = a/2$, $\theta = \pi$, $0 \leq z \leq Z_{MAX}$).

5.4. Integración de trayectorias

Una vez conocidas las velocidades en cada punto del espacio y a cada instante, se lleva a cabo la integración de trayectorias. El mecanismo utilizado para ello es el más sencillo posible, se trata de un simple esquema Euleriano. Utilizando un tiempo de integración δt mucho menor que el tiempo de actualización de CUTIE, el esquema es suficiente para calcular las trayectorias. Sea \vec{v}_{int} la velocidad interpolada, la actualización de la posición \vec{x} se calcula:

$$\vec{x}_{new} = \vec{x} + \delta t \cdot \vec{v}_{int} \quad (5.6)$$

A continuación se muestran algunas trayectorias a modo de ejemplo:

Trayectorias como las de la figura 5.4 son las que se han analizado mediante las diversas técnicas que se detallan en el siguiente tema.

5.4.1. Trayectorias de impurezas

En este estudio se ha trabajado con partículas ideales en el sentido de que se mueven con la velocidad del fluido, es decir, se mueven como los iones que

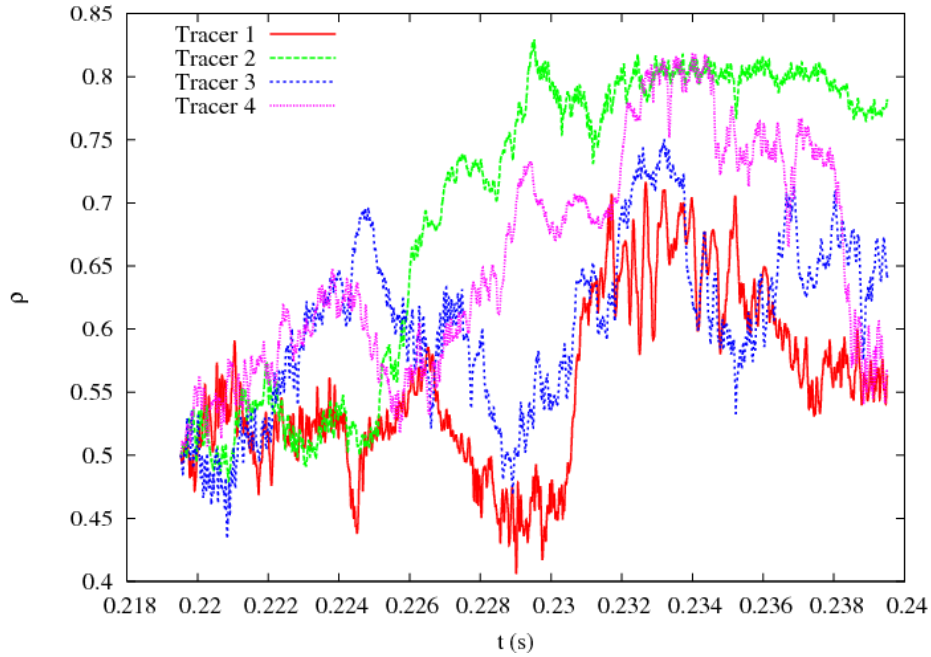


Figura 5.4: Ejemplos de trayectoria radial.

constituyen el plasma (deuterio en nuestra simulación). Existe la posibilidad de trabajar con los campos eléctrico y magnético proporcionados por CUTIE en lugar de la velocidad del fluido. Entonces, utilizando la ecuación de la fuerza de Lorentz se obtiene una ecuación del movimiento general:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.7)$$

Se pueden calcular trayectorias en función de la relación entre la carga eléctrica y la masa q/m que tengan los iones (impurezas) con los que se quiera trabajar.

Capítulo 6

Técnicas de análisis

En el presente capítulo se explicarán las diversas técnicas utilizadas para analizar y entender el transporte en nuestro sistema a partir de las trayectorias de las partículas test o tracers que hemos inyectado.

El objetivo de estas técnicas es doble: por un lado se busca determinar si el transporte está regido por la difusión “estándar” o si por el contrario la difusión es fraccionaria. Por otro lado, se persigue determinar los coeficientes introducidos en capítulos anteriores, α , β y H . Ello se hará en los supuestos establecidos, es decir, que la dinámica del sistema se pueda modelar con un *CTRW* separable en distribuciones del tamaño del paso y del tiempo de espera independientes, y que además éstas sean invariantes bajo traslaciones espacio-temporales.

Por la naturaleza de los métodos de análisis empleados, éstos se pueden dividir en dos grandes grupos: los que propiamente miden distribuciones, y los que estudian las correlaciones en la velocidad.

Como se ha dicho, nos centraremos en el transporte de tracers en la dirección radial, por ser ésta la más importante de cara al confinamiento.

6.1. Funciones de distribución

6.1.1. Distribución radial

Suponiendo que la pdf del tamaño del salto $p(\Delta x)$ sea una distribución de tipo Lévy simétrica y estable, esperamos que la distribución radial de tracers $p_0(r/a)$, o histograma, tenga la misma forma, siempre y cuando la inyección tenga lugar en el mismo punto radial r/a y el tiempo transcurrido sea mayor que el transitorio inicial, y menor que el tiempo de confinamiento del sistema. Es necesario dejar evolucionar la distribución puesto que la inicial es una distribución delta, que no es solución de la ecuación fraccionaria. Por otro lado, a tiempos muy largos, las barreras del sistema distorsionarían la distribución.

Esta distribución se puede calcular discretizando el dominio radial utilizando N puntos equiespaciados ρ_i de manera que se divide en ventanas de tamaño constante $\Delta_{\text{win}}(N)$. La distribución se calcula contando el número de tracers que hay en cada ventana en un instante de tiempo determinado. Después, si es preciso, se puede normalizar para que $\sum p_0(\rho_i) = 1$.

Con un número de partículas $n_{\text{part}} \rightarrow \infty$, si $N \rightarrow \infty$ y por lo tanto $\Delta_{\text{win}} \rightarrow 0$, se puede obtener la distribución de manera exacta.

Sin embargo, cuando se trabaja con un número finito de partículas es necesario ensanchar suficientemente las ventanas para que el cálculo sea estadísticamente relevante, puesto que el error asociado a cada valor se calcula según la estadística de Poisson.

Trabajando con la posición radial normalizada ($\rho = r/a$), en el caso de que $p(\Delta\rho)$ tenga un índice de decaimiento α , se espera que $p_0(\rho - \rho_0) \propto |\rho - \rho_0|^{-1-\alpha}$ para valores grandes de $\rho - \rho_0$ y siendo ρ_0 el centro de la distribución.

Función de distribución acumulativa

La división del dominio en ventanas conlleva una pérdida de información, puesto que la distribución no se calcula a partir de la posición *exacta* de la partícula. La función de distribución acumulativa, o *rank function* constituye un método mejorado en ese sentido. Se define:

$$R(\rho, t) = \int_{-\infty}^{\rho} d(\rho') p_0(\rho', t). \quad (6.1)$$

La función $R(\rho, t)$ es la fracción de partículas cuya posición cumple que $\rho' < \rho$ en el instante de tiempo t . Por lo tanto se puede calcular fácilmente ordenando las partículas de acuerdo con su posición radial. Suponiendo que la distribución decae algebraicamente, $p_0(\rho, t) \rightarrow |\rho - \rho_0|^{-1-\alpha}$, aplicando directamente la definición (6.1), se deduce que la cola izquierda de la acumulativa también ha de decaer como una ley de potencia: $R(\rho, t) \rightarrow |\rho - \rho_0|^{-\alpha}$. Análogamente, la cola derecha de la distribución se comportaría como: $R(\rho, t) \rightarrow 1 - |\rho - \rho_0|^{-\alpha}$.

6.1.2. Distribución del tamaño del salto y del tiempo de espera

Los parámetros α y β también se pueden medir directamente a partir de las distribuciones del tamaño del salto y del tiempo de espera.

Con esta finalidad, se ha desarrollado un algoritmo para “reducir” las trayectorias radiales $r(t_i)$ de los tracers a trayectorias de tipo *CTRW*. Se transforma cada trayectoria en una aproximación de la misma consistente en una serie de saltos y de atrapamientos. De este modo, es decir, conocidos los tamaños de todos los saltos, se podrá, a posteriori, calcular las pdfs $p(\Delta\rho)$ y $\psi(\Delta t)$.

El hecho de reducir las trayectorias conlleva ineludiblemente la definición arbitraria de lo que es un salto y un atrapamiento. La arbitrariedad la hemos introducido mediante una velocidad umbral, a partir del algoritmo que describimos a continuación:

1.– Se introduce una velocidad umbral v_{TH} . Asumimos que las partículas saltan si el valor absoluto de su velocidad radial $|v_r(t_i)|$ excede dicho umbral arbitrario.

2.– Un salto inevitablemente ha de venir seguido de un atrapamiento, por lo tanto se ha de buscar el primer instante de tiempo posterior al salto en que la velocidad radial del tracer sea nula.

3.– Seguidamente, se busca el salto inmediatamente posterior al último punto de velocidad radial cero. Existe la posibilidad de que entre dos saltos consecutivos haya más de un punto sin velocidad radial; se considera que ambos son constituyentes del mismo atrapamiento. También es posible que entre dos puntos consecutivos de velocidad radial cero haya más de un punto de velocidad radial mayor que el umbral. En este caso sólo puede haber un salto, como consecuencia de lo impuesto en el punto 2 (y debido a que se supone v_r es continua). Se considera que el salto tiene lugar en el instante de mayor velocidad.

4.– Los saltos son instantáneos y la partícula está atrapada entre dos saltos consecutivos. Sean t_i y t_k ($t_k > t_i$) los instantes de tiempo en que han tenido lugar dos saltos consecutivos. Entonces la posición de la partícula durante el atrapamiento que los separa, en nuestra aproximación al *CTRW*, es $r_{ik}^{\text{trap}} = \langle r(t_j) \rangle_{i < j < k}$. El tiempo de atrapamiento es $\Delta t_{ik} = t_k - t_i$.

5.– Si, caso de que se produzca, el posterior salto tuviese lugar en el instante de tiempo t_l , se podrá calcular la posición de atrapamiento r_{kl}^{trap} , y el tamaño del salto acontecido en el instante t_k es $\Delta r_k = r_{kl}^{\text{trap}} - r_{ik}^{\text{trap}}$.

6.– Una vez han sido calculados, y almacenados, los pasos y los tiempos de atrapamiento, para las trayectorias de todos los tracers, se pueden calcular las distribuciones $p(\Delta\rho)$ y $\psi(\Delta t)$.

7.– Para terminar, se espera calcular los coeficientes α y β a partir de las correspondientes distribuciones, mediante los ajustes pertinentes, además de $H = \beta/\alpha$.

Es evidente que, debido a la introducción de un parámetro arbitrario que condiciona el resultado, es importante estudiar la sensibilidad del resultado bajo cambios de v_{TH} . Por ejemplo, se puede dar la circunstancia de que un tramo de una trayectoria, con un umbral suficientemente elevado sea tenido por un sólo atrapamiento, pero, al disminuir v_{TH} pueden aparecer saltos. Obviamente, todo estudio realizado a partir del algoritmo aquí detallado debe ir acompañado de un barrido en el parámetro arbitrario, para intentar encontrar un entorno del mismo donde su variación no afecte de forma significativa al resultado.

El mecanismo utilizado para dividir la trayectoria en saltos y atrapamientos queda mejor ilustrado si se observan las figuras 6.1. Obsérvese que el salto tiene

lugar en el momento de máxima velocidad radial si ésta excede el umbral. Obsérvese también que la trayectoria tipo *CTRW* obtenida cambia en función del valor de dicho umbral.

En presencia de turbulencia, las partículas no están en reposo nunca. Sin embargo, este método es coherente con la idea intuitiva de que las partículas están atrapadas cuando se encuentran dentro de un “eddy”, con velocidad baja y variando de signo rápidamente, mientras que durante los saltos su velocidad es elevada.

Distribución de la longitud del salto

Una vez conocidos los saltos de todos los tracers, se pueden calcular la distribución de la longitud del paso $p(\Delta\rho)$. La manera en que ésta se obtiene es similar a la utilizada con la distribución radial $p_0(\rho)$, es decir, se discretiza el dominio de longitudes de saltos $\Delta\rho$, pasando del continuo a M puntos $\Delta\rho_i$ ($i = 1, \dots, M$) separados por una distancia constante $\delta(\Delta\rho)$. El valor de la distribución para $\Delta\rho = \Delta\rho_i$ se obtiene contando el número total de saltos de todas las trayectorias de todos los tracers cuya longitud $\Delta\rho$ cumple que $\Delta\rho_i - \delta(\Delta\rho)/2 < |\Delta\rho| \leq \Delta\rho_i + \delta(\Delta\rho)/2$.

Distribución del tiempo de atrapamiento

El cálculo de las distribuciones de los tiempos de espera es análogo al cálculo de la pdf del tamaño de los pasos. Los tiempos de espera se obtienen utilizando el procedimiento anteriormente descrito, y la distribución se calcula mediante la discretización del espacio de tiempos de atrapamiento.

6.2. Correlaciones de la velocidad radial

En esta sección explicaremos cómo se ha medido la autosimilaridad en el movimiento mediante dos técnicas: Funciones de estructura y *Rescaled Range*. En particular se caracteriza el movimiento de los tracers en la turbulencia generada por CUTIE midiendo el exponente de Hurst H . Como se ha dicho, se espera que la difusión sea tal que la densidad satisfaga la ecuación de difusión fraccionaria en lugar de la difusión estándar (o Fickiana).

El parámetro H está relacionado con el desplazamiento medio de los tracers ya que, para todo $s > 0$:

$$\langle |\Delta x|^s \rangle \propto t^{sH} \quad (6.2)$$

donde $\langle f \rangle$ es el promedio de la cantidad f .

Como se explicó, en transporte difusivo $H = \frac{1}{2}$, donde no hay correlaciones, mientras que en procesos persistentes se tiene que $H > \frac{1}{2}$ y se dice que el transporte es superdifusivo. Finalmente, si $H < \frac{1}{2}$, procesos antipersistentes, se dice que el

transporte es subdifusivo. El exponente de Hurst es un parámetro que mide la autosimilaridad.

6.2.1. Correlación Lagrangiana

La correlación Lagrangiana de las velocidades es una forma de medir la autosimilaridad del movimiento [34]. El procedimiento directo es la aplicación de la definición de correlación entre dos señales para medir la autocorrelación de la componente radial de la velocidad de cada tracer:

$$C_L(\Delta t) = \int_0^{t_{\text{tot}}} V_r[r_i(t), t; r_{0i}, 0] \cdot V_r[r_i(t + \Delta t), t + \Delta t, r_{0i}, 0] dt \quad (6.3)$$

donde $V_r[r_i(t), t; r_{0i}, 0]$ es la velocidad en el instante t de la partícula i que se encuentra en la posición $r_i(t)$, y cuya posición en el instante $t = 0$ era r_{0i} .

Esta cantidad se puede relacionar con el exponente H :

$$C_L(\Delta t) \propto C_0 |\Delta t|^{-2(H-1)} \quad (6.4)$$

No obstante, este método para el cálculo de H requiere una gran cantidad de datos. De hecho, en la práctica no se mide directamente la correlación Lagrangiana, por ser una técnica computacionalmente costosa, sino que se recurre a otras alternativas.

6.2.2. Rescaled Range

La técnica *Rescaled Range* sirve para determinar el exponente H midiendo indirectamente la correlación Lagrangiana, de una forma solvente y eficaz desde el punto de vista computacional.

Este método sirve para detectar correlaciones en señales temporales. En un sistema dado, se analiza la señal generadora de los incrementos en el Random Walk, en nuestro caso la velocidad radial.

Este método de diagnóstico consiste en la determinación del cociente R/S para cada partícula individual a lo largo de su trayectoria. Dado un intervalo de tiempo τ , R es el rango máximo de la integral de la velocidad de la partícula (es decir, su desplazamiento) con respecto a una referencia, mientras que S es el momento de orden s de la velocidad. Ha de escogerse un valor de s que cumpla $s < \alpha$, con lo que es preciso calcular previamente α . La definición, siendo n el número de puntos discretos de la señal de velocidad $(v_r(t_1), v_r(t_2), \dots, v_r(t_n))$ en el intervalo τ , es [47]:

$$\frac{R(n)}{S(n)} = \frac{\text{máx}(0, W_1, W_2, \dots, W_n) - \text{mín}(0, W_1, W_2, \dots, W_n)}{\langle |v_r|^s \rangle^{1/s}}. \quad (6.5)$$

donde W_k es:

$$W_k = \sum_{i=1}^k v_r(t_i) - k \langle v_r(n) \rangle \quad (6.6)$$

Se mide el cociente $R(n)/S(n)$ para distintos intervalos de tiempo τ_n (si la señal $v_r(t)$ es dada a intervalos Δt , $\tau_n = n\Delta t$) para cada trayectoria.

Si la señal $v_r(t)$ es autosimilar en el tiempo, se espera que exista un intervalo de tiempo en el que la cantidad R/S escale como una potencia de τ :

$$\left\langle \frac{R(n)}{S(n)} \right\rangle_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \tau_n^H \quad (6.7)$$

Con una estadística robusta, promediando sobre el total de las partículas se espera minimizar los posibles errores y desviaciones.

6.2.3. Velocidad acumulativa

Un análisis alternativo, pero que también permite estudiar las correlaciones en la velocidad, es el que ofrece el estudio de la 'velocidad acumulativa', o la distribución $p(d)$ del desplazamiento neto d en un intervalo de tiempo fijo τ_M [48]. Se espera que la cola de dicha distribución se comporte de igual manera que la distribución del tamaño del paso, es decir:

$$p(d) \rightarrow C \cdot d^{-1-\alpha} \quad (6.8)$$

con el mismo índice de decaimiento que $p(\Delta x)$, donde C es una constante.

Las correlaciones de larga distancia no se pueden detectar si se miden los desplazamientos d en tiempos τ_M demasiado cortos como para que se aprecien las colas algebraicas, aunque es importante que tampoco sean demasiado largos para evitar que la distribución se vea distorsionada por el tamaño finito del sistema.

6.2.4. Funciones de Estructura

Las funciones de estructura (SF) son funciones de correlación generalizadas. Se pueden estudiar las correlaciones en la turbulencia del plasma mediante esta técnica para medir el exponente de Hurst.

Dada una señal temporal $Y(t_i)$, no estacionaria, con incrementos estacionarios, la función de estructura de orden ν de dicha señal se define:

$$S_\nu(\tau) \equiv \langle |Y(t_i + \tau) - Y(t_i)|^\nu \rangle \quad (6.9)$$

donde τ es un tiempo determinado y $\nu > 0$ el orden de la SF . Si $Y(t)$ es invariante bajo cambios de escala y autosimilar, entonces, se espera que exista un intervalo de tiempos $\tau_1 < \tau < \tau_2$ donde la función de estructura escala:

$$S_\nu(\tau) = C_\nu \tau^{\xi(\nu)} \quad (6.10)$$

C_ν es una función de τ que varía muy lentamente comparado con cualquier potencia de τ , por lo que en la práctica se puede considerar constante. Cuando $Y(t_i)$ es una función acotada, el exponente de la SF , $\xi(\nu)$ está relacionado con el parámetro de Hurst:

$$H(\nu) = \xi(\nu)/\nu \quad (6.11)$$

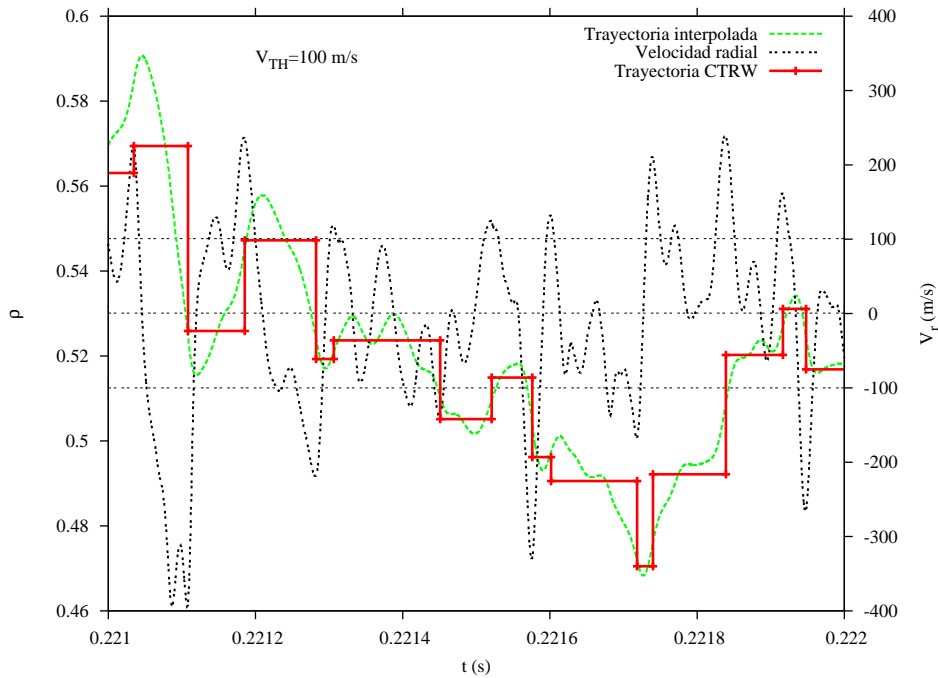
Así pues, para procesos monofractales y no estacionarios, se espera que $\xi(\nu)$ sea lineal [49].

6.3. Rango de validez del ajuste

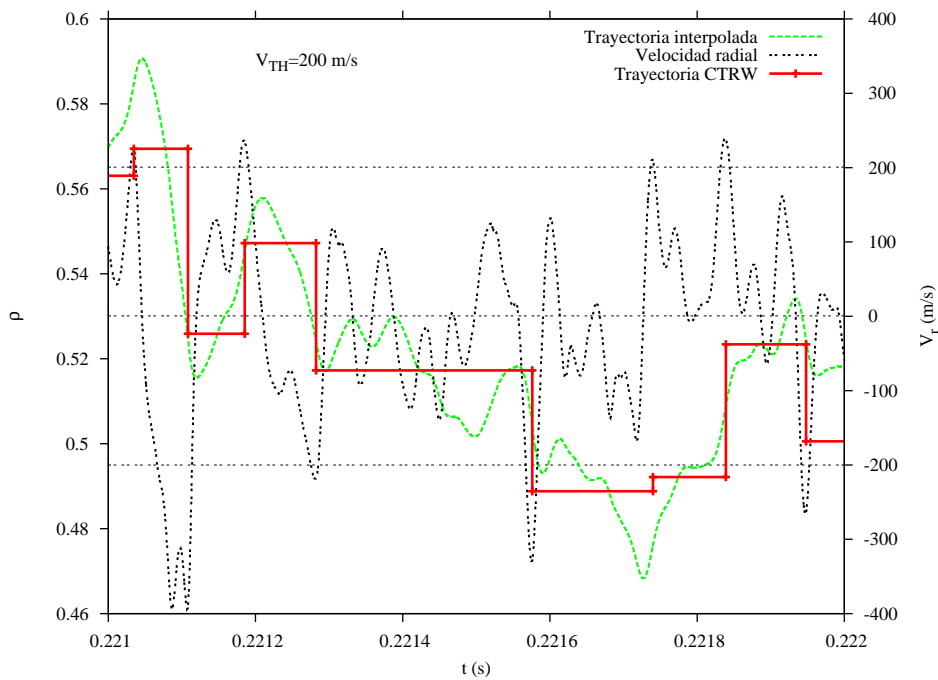
Durante la aplicación de las técnicas de análisis que se han explicado, nos serviremos de un método para comprobar la validez de los ajustes realizados. Se trata de la determinación de la longitud de decaimiento potencial. Para una serie de datos, que se ajustan a una ley de potencia $f(x) = C|x - x_0|^\delta$ en un intervalo $x_1 < x < x_2$, la longitud del ajuste la definimos como:

$$L_{\text{fit}} = \log_{10} \left(\frac{|x_2 - x_0|}{|x_1 - x_0|} \right) \quad (6.12)$$

L_{fit} es por tanto un indicador de cuan significativo es un ajuste. De forma arbitraria, se suelen considerar válidos los ajustes a leyes de potencia cuando la longitud $L_{\text{fit}} \geq 1$, es decir, una década, puesto que la ley de potencia cubre un orden de magnitud en el dominio.



(a) Umbral $v_{th} = 100\text{m/s}$



(b) Umbral $v_{th} = 200\text{m/s}$

Figura 6.1: Trayectorias “real” y reducidas a *CTRW* para dos umbrales, junto con la señal de velocidad.

Capítulo 7

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de la aplicación de los métodos descritos en el capítulo 6 para el estudio y la caracterización del transporte de trazadores en los plasmas descritos en la sección 4.5, en modo L y H.

7.1. Modo L

Comenzamos con la descripción del modo L. El lanzamiento de tracers se produce una vez que el código ha desarrollado la turbulencia y se ha alcanzado un estado estacionario. El estado del plasma es el descrito en la sección 4.5.1.

Los tracers son inicializados simultáneamente en la misma posición radial. Las posiciones iniciales angulares, tanto poloidal como toroidal son aleatorias.

El tiempo total de simulación es de 20 *ms*, similar al tiempo de confinamiento de la energía y del orden de 3–4 veces el tiempo de confinamiento de las partículas.

Los distintos métodos utilizados para el análisis del transporte arrojan resultados que sugieren que la difusión no es “estándar” sino más bien fraccionaria.

7.1.1. Distribución radial

Determinada por el punto de inyección de los tracers, la distribución radial inicial de las partículas es $p(r/a) = \delta(r/a - 1/2)$. Se espera que dicha distribución evolucione con el tiempo de manera que se ensanche lo suficiente como para que se pueda determinar la forma de las colas de la misma. Al estar alejada la posición inicial de los bordes, se espera limitar en la medida de lo posible las perturbaciones de las trayectorias con motivo de las dimensiones finitas del sistema. Como se dijo en el apartado 6.1.1 los efectos de las barreras, en simulaciones suficientemente largas, deberían terminar por hacerse notar, razón por la cual sólo se puede simular un tiempo finito. Es decir, el análisis se optimiza para un tiempo intermedio,

suficientemente largo como para que las colas se definan, pero no tanto como para que las barreras del sistema empiecen a ser importantes.

Mostramos en la figura 7.1 el histograma o distribución radial en distintos instantes de tiempo. Desde un primer momento es notoria la barrera de transporte situada aproximadamente en $r/a = 0.8$ que impide a los trazadores salir. Esta barrera está asociada a la presencia de la superficie racional $q = 3$. También notamos la existencia de una deriva hacia el exterior. El pico de la distribución se va desplazando hacia el borde del plasma. Estos dos efectos (barrera y deriva) hacen que los trazadores se acumulen en $r/a \lesssim 0.8$.

Obsérvese también que la práctica totalidad de las partículas introducidas en $r/a = 0.5$ permanecen en el intervalo $0.3 < r/a < 0.8$. Por lo tanto, de ahora en adelante nuestros análisis para la presente simulación quedan limitados al estudio del transporte en éste intervalo radial.

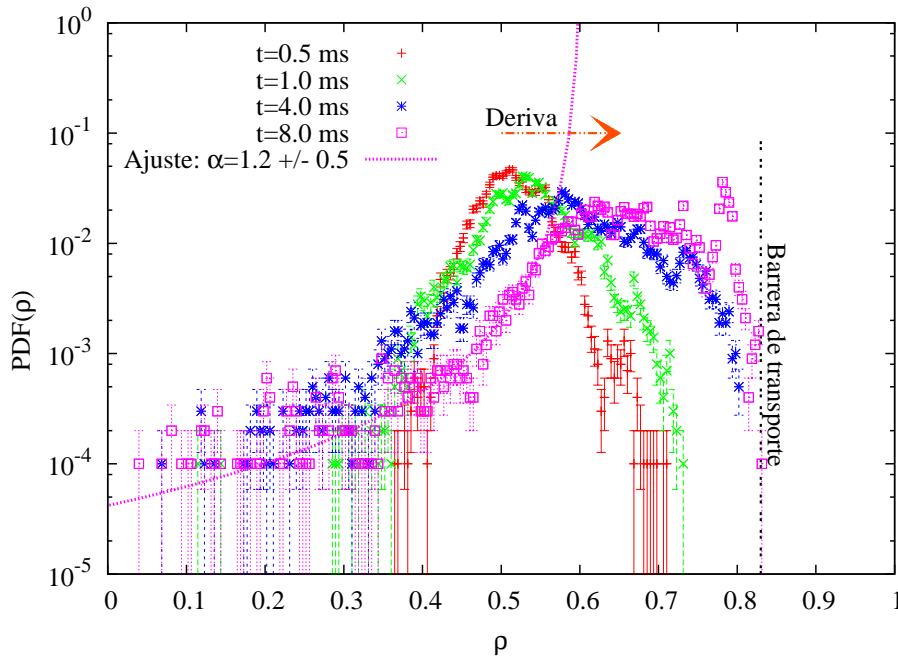


Figura 7.1: Distribución radial de trazadores en distintos instantes de tiempo, junto con ajuste.

En consecuencia, la cola externa de la distribución no puede ser una cola algebraica (tipo $p(\Delta\rho) \propto |\Delta\rho|^{-1-\alpha}$) que nos permita la medición del parámetro α . A todo esto hay que añadir que, debido a la presencia de barreras de transporte y al proceso de *binning* (división del dominio radial en ventanas), la distribución no tiene una forma muy suave, sino que más bien parece quebrarse en algunos puntos, dificultando aún más el análisis.

No obstante, observando la cola del histograma hacia el interior, si que se observa un decaimiento lento, que no puede ser el de una función Gaussiana.

Se ha llevado a cabo el ajuste correspondiente para obtener un valor de α . El ajuste, así como el resultado obtenido, no es suficientemente robusto como para ser concluyente. No obstante, y pese al relativamente alto error asociado, si que sirve como estimación.

$$\alpha = 1.2 \pm 0.5 \quad (7.1)$$

La longitud de decaimiento exponencial es $L_{\text{fit}} = 1.1$, más de una década.

La distribución para la que hemos hecho el ajuste es la de $t = 8$ ms. Es tiempo suficiente para que, superado el transitorio inicial, se desarrolle la cola algebraica, que se observa durante varios milisegundos. Más tarde, la distribución queda demasiado deformada por la deriva y las barreras.

7.1.2. Función de distribución acumulativa

Se muestra en la figura 7.2 la función *rank*. La función representada es la correspondiente al mismo instante de tiempo en el que se ha ajustado el histograma, $t = 8$ ms. Para calcularla se ha utilizado $\rho_0 = 0.63$, que coincide con el pico de la distribución radial de la figura 7.1.

Por las razones explicadas en el capítulo 6, este método facilita el análisis porque se obtienen funciones más suaves. Ello es debido a que, como se ha dicho, no hay división del dominio radial en ventanas, como en el cálculo de la distribución radial, y por lo tanto no hay pérdida de información y con lo que la estadística es mejor. En consecuencia, el ajuste parece más fiable que en el caso del histograma, y de hecho, el error asociado a α es claramente inferior.

$$\alpha = 1.43 \pm 0.11 \quad (7.2)$$

Dentro de los márgenes de error, los resultados obtenidos hasta el momento, (7.1) y (7.2), son compatibles.

Además, la longitud de decaimiento exponencial es casi una década: $L_{\text{fit}} = 0.90$.

7.1.3. Distribución del tamaño del paso

Mediante el método descrito en 6.1.2 se han detectado todos los pasos o saltos dados por cada uno de los tracers a lo largo de la simulación.

Es importante repetir el proceso para distintos valores de la velocidad umbral porque, como se explicó durante el desarrollo del algoritmo, es de esperar que se produzcan diferencias relevantes al variar v_{th} , por ser un parámetro arbitrario.

El resultado lo tenemos en la figura 7.3.

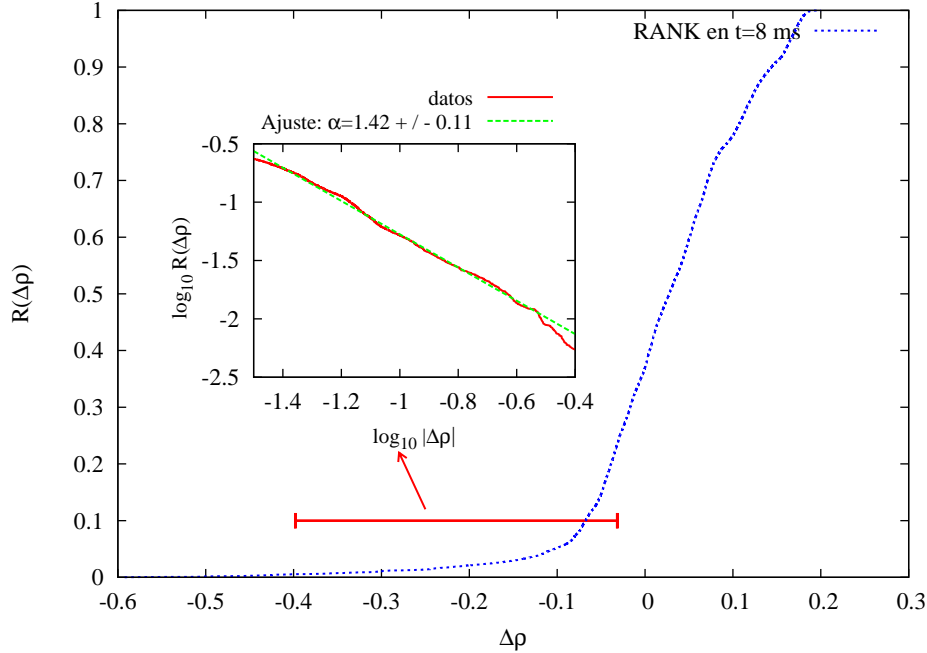


Figura 7.2: Función de distribución acumulativa, e intervalo de ley de potencia. En el interior: Intervalo del ajuste y función de ajuste.

Se observa cómo las distribuciones se van elevando según el umbral aumenta. En nuestra interpretación, cuando el umbral es bajo ($v_{th} \leq 200$ m/s) el movimiento local dentro de los “eddies” domina el transporte haciendo que las distribuciones decaigan más rápido: La distribución recoge numerosos desplazamientos pequeños, comparados con el tamaño del sistema, que tienen lugar dentro de un “eddy”, es decir, porciones de la trayectoria que deberían ser considerados atrapamientos.

Esta situación se puede revertir aumentando el valor del umbral, con lo que es necesario que la velocidad sea mayor para que cualquier desplazamiento se considere salto, esto es, aplicamos un filtro más exigente. Esto hace que ganen peso en la distribución los saltos más largos. Por tanto, la cola de la distribución se va elevando poco a poco y se organiza según una ley de potencia, del tipo $p(\Delta\rho) \propto |\Delta\rho|^{-1-\alpha}$.

Sin embargo por encima de cierto valor del umbral ($v_{th} \geq 400$ m/s) el peso que en la distribución tienen los saltos de longitud comparable con el tamaño del sistema (radio menor a) empieza a ser importante. En estas condiciones la distribución se ve distorsionada por el llamado efecto de tamaño finito, que hace que el rango de decaimiento tipo ley de potencia se vea reducido por la forma irregular que adopta la distribución, al estar limitado el tamaño de los saltos.

Por lo tanto, es necesario encontrar un umbral intermedio en el que sea visible

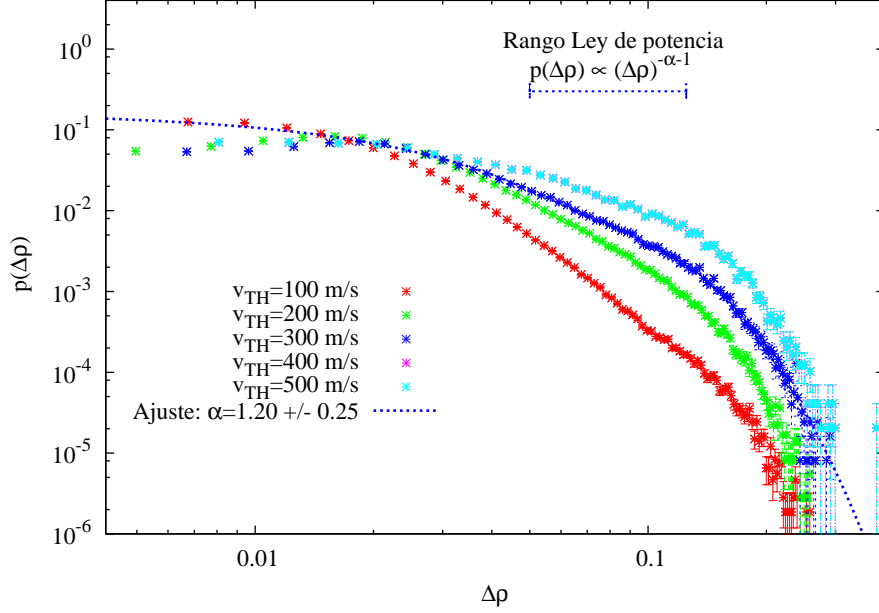


Figura 7.3: Distribución del tamaño del paso para distintos valores de v_{th} , junto con el mejor ajuste y rango de decaimiento potencial. La escala es logarítmica y el tamaño del paso se normaliza por el radio menor a .

la ley de potencia pero el efecto de tamaño finito esté limitado en la medida de lo posible.

Vemos como con $v_{th} = 300$ m/s se alcanza dicho estado intermedio. La ley de potencia es relativamente clara, mientras que la deformación causada por el borde del plasma es menos evidente que con velocidades mayores. El índice de decaimiento α medido es:

$$\alpha = 1.20 \pm 0.25 \quad (7.3)$$

Los mejores ajustes se obtienen ajustando la curva entera a una función consistente en tres secciones conexas, exponencial-potencial-exponencial. El intervalo de decaimiento potencial es $\Delta\rho_1 < \Delta\rho < \Delta\rho_2$, donde ambos límites son obtenidos mediante un ajuste del tipo:

$$p(\Delta\rho) = \begin{cases} b_1 \cdot \exp[-(\Delta\rho/\Delta_1)] & \text{si } \Delta\rho \leq \Delta\rho_1 \\ a^2 \cdot \Delta\rho^{-1-\alpha} & \text{si } \Delta\rho_1 < \Delta\rho \leq \Delta\rho_2 \\ b_2 \cdot \exp[-(\Delta\rho/\Delta_2)] & \text{si } \Delta\rho_2 < \Delta\rho \end{cases} \quad (7.4)$$

donde, al imponer condición de continuidad, se deduce que $b_1 = a^2 \Delta\rho_1^{-1-\alpha} \exp[\Delta\rho_1/\Delta_1]$, mientras que $b_2 = a^2 \Delta\rho_2^{-1-\alpha} \exp[\Delta\rho_2/\Delta_2]$, reduciéndose el número de parámetros libres en el ajuste.

Para que el ajuste sea fiable, el rango de decaimiento según una ley de potencia tiene que ser aproximadamente una década. Sin embargo en nuestro caso es bastante más corto, con una longitud de decaimiento algebraico de menos de media década: $L_{\text{fit}} = 0.40$. El intervalo de decaimiento como ley de potencia se ve acotado por un lado por el efecto del tamaño finito del sistema, y por otro por el tamaño de la rejilla de CUTIE en la dirección radial.

No obstante, son varias las razones que nos llevan a considerar válido el ajuste realizado. En primer lugar, α , que crece con v_{th} para umbrales bajos, parece estabilizarse en $v_{\text{th}} = 300$ m/s. Por otro lado, de todos los ajustes ensayados, el de éste umbral es el que arroja un intervalo de decaimiento algebraico más largo. Finalmente, también se trata del mejor ajuste en términos de χ^2 .

El tramo final de la función de ajuste, de tipo ley exponencial, es típico de distribuciones deformadas como consecuencia del efecto tamaño finito del sistema.

7.1.4. Distribución del tiempo de espera

El método utilizado para obtener los pasos que dan los trazadores sirve también para la detección de los tiempos de espera. Al igual que en el caso anterior, es necesario repetir el cálculo para diversos valores del umbral v_{th} . En la figura 7.4 podemos ver un barrido.

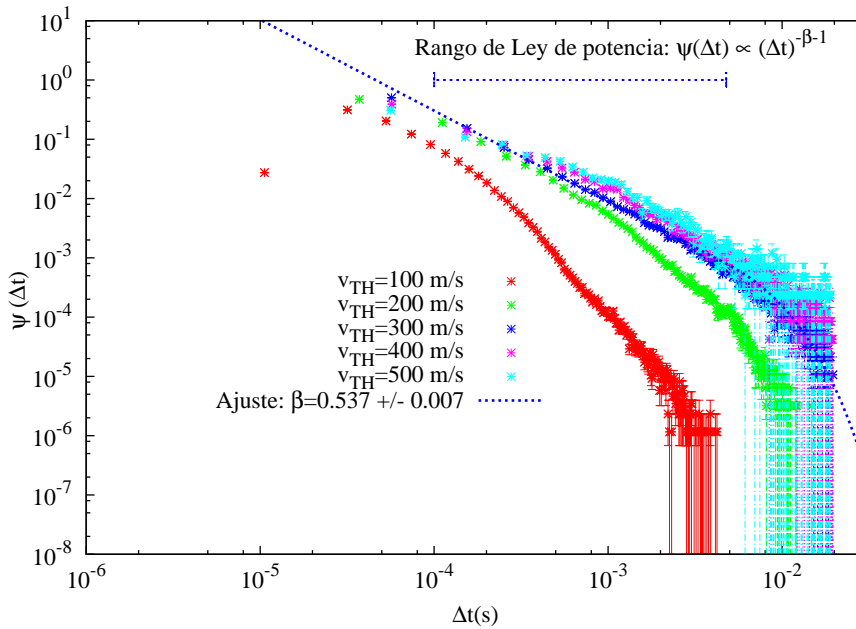


Figura 7.4: Distribución del tiempo de espera para distintos valores de v_{th} , junto con el mejor ajuste y rango de decaimiento potencial. La escala es logarítmica.

A la vista de la figura 7.4 hay dos aspectos importantes a destacar. En primer lugar, y de un modo similar a las distribuciones del tamaño del paso, la cola de $\psi(\Delta t)$ sube según incrementamos el umbral. Sin embargo una diferencia importante con respecto a las distribuciones $p(\Delta\rho)$ es el mucho menos notorio efecto de “tiempo” finito, que sería el análogo del efecto del tamaño finito en el tamaño del paso. La causa de esta diferencia radica en el hecho de que el tiempo de simulación es el único límite que se puede imponer a los tiempos de espera. La consecuencia no es otra que la mayor longitud del intervalo de decaimiento potencial que observamos en 7.4, lo cual facilita el ajuste

La forma de realizarlo que mejor resultado da consiste en utilizar como función de ajuste una función con dos tramos conectados, el primero de tipo ley de potencia ($\psi(\Delta t) \propto \Delta t^{-1-\beta}$) y el segundo exponencial:

$$\psi(\Delta t) = \begin{cases} a^2 \cdot \Delta t^{-1-\beta} & \text{si } \Delta t \leq \Delta t_0 \\ b \cdot \exp[-(\Delta t/\Delta_0)] & \text{si } \Delta t_0 < \Delta t \end{cases} \quad (7.5)$$

donde la condición de continuidad se consigue imponiendo la relación entre parámetros $b = a^2 \Delta t_0^{-1-\beta} \exp[\Delta t_0/\Delta_0]$.

Una vez más, el mejor ajuste, en términos de χ^2 , menor error asociado y mayor intervalo algebraico se produce con $v_{\text{th}} = 300$ m/s. Al igual que en el tamaño del paso, se observa que el valor del índice de decaimiento (β) se estabiliza en torno a dicho umbral.

$$\beta = 0.51 \pm 0.05 \quad (7.6)$$

Las dos décadas de longitud del ajuste potencial son más que suficiente para considerarlo válido: $L_{\text{fit}} = 2.0$.

Este resultado, además del obtenido en el cálculo de α (ver eq. (7.3)), se ve reforzado por el hecho de que ambos ajustes han sido realizados con idéntico umbral, $v_{\text{th}} = 300$ m/s, lo cual es significativo. Tanto la distribución del tamaño de los pasos como la del tiempo de espera se obtienen para el mismo umbral, lo que indica que las trayectorias de tipo *CTRW* calculadas a partir de las reales suponen una correcta representación del movimiento real.

Como se ha dicho anteriormente, el movimiento local dentro de “eddies” es el que domina las distribuciones cuando se calculan a partir de un umbral bajo. La distribución del tiempo de espera para el menor de los v_{th} se puede ajustar, para valores pequeños de Δt , a una distribución exponencial del tipo $\psi(\Delta t) \propto \exp(-\Delta t/\tau_{\text{ED}})$, tal y como podemos ver en la figura 7.5.

Aquí τ_{ED} es el llamado *eddy turnover time* o tiempo de circulación en las estructuras de tipo “torbellino”. Este ajuste nos permite realizar una estimación de dicha cantidad: $\tau_{\text{ED}} = (9.6 \pm 0.3) \times 10^{-5}$ s. Este tiempo es una buena aproximación del tiempo de decorrelación de la turbulencia, que en CUTIE oscila alrededor de 50–

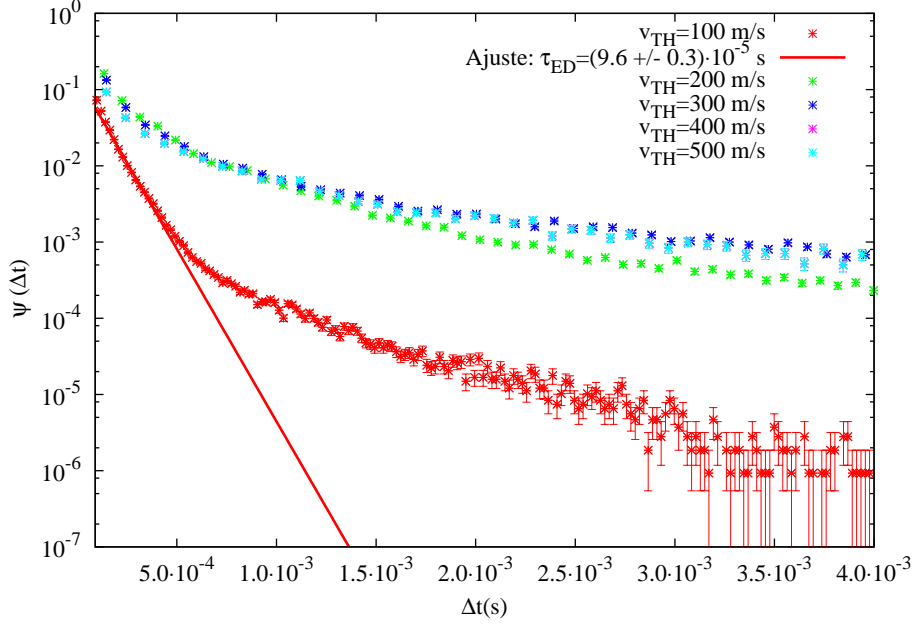


Figura 7.5: Distribuciones del tiempo de espera para distintos valores de v_{th} en escala lin-log. En $v_{th} = 100$ m/s el transporte está dominado por el movimiento dentro de eddies.

80 μ s, según se deduce del análisis de la autocorrelación de la densidad electrónica (Ver figura 7.6).

Denotamos como $C_{n_e}(r/a, \Delta t)$ a la correlación, en el punto r/a entre la densidad electrónica en los instantes t y $t' = t + \Delta t$. Su valor se calcula como:

$$C_{n_e}(r/a, \Delta t) = \int_0^{t_{tot}} n_e[r/a, t] \cdot n_e[r/a, (t + \Delta t)] dt \quad (7.7)$$

Por la definición de la función de correlación, $C_{n_e}(r/a, 0) = 1$.

Definimos tiempo de decorrelación el tiempo t_d tal que $C_{n_e}(r/a, t_d) = e^{-1}$.

7.1.5. Funciones de Estructura

Las funciones de estructura de la velocidad radial han sido calculadas utilizando el algoritmo explicado en la sección 6.2.4.

Se ha utilizado este diagnóstico para analizar la velocidad de los 10000 trazadores a lo largo de sus 20 ms de trayectoria. Se ha llevado a cabo el cálculo para diferentes órdenes: $\nu = 1/2, 1, 3/2, \dots, 5$.

Los resultados aparecen en la figura 7.7.

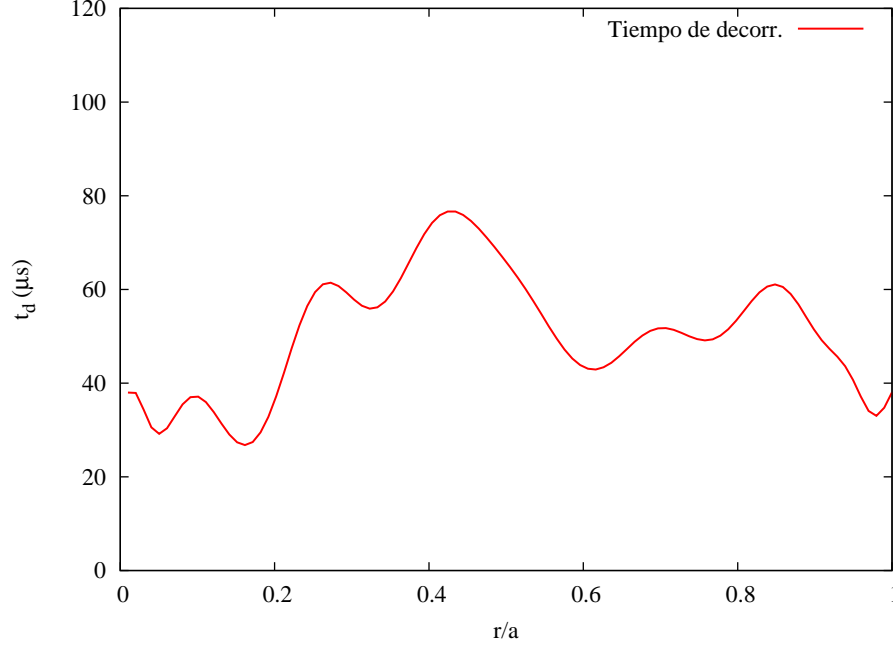


Figura 7.6: Perfil del tiempo de decorrelación definido como tiempo t_d tal que la autocorrelación de la densidad $C_{n_e}(r/a, t_d) = e^{-1}$.

El ajuste más fiable se obtiene utilizando una función que consta de dos tramos conexos, con leyes de potencia, del tipo:

$$SF_\nu(\tau) = \begin{cases} a \cdot \tau^{\nu H_0} & \text{si } \tau \leq \tau_1 \\ b \cdot \tau^{\nu H} & \text{si } \tau_1 < \tau \end{cases} \quad (7.8)$$

donde se la continuidad se traduce en $a = b\tau_1^{\nu(H-H_0)}$. Para el ajuste se descartan las ventanas temporales $\tau \geq 2.5$ ms, por ser comparables al tiempo de simulación, existen pocos datos y por lo tanto la estadística es insuficiente.

El tiempo τ_1 para el cual se produce el cambio de tendencia, es un parámetro libre en el ajuste. Merece la pena destacar que su valor $\tau_1 \approx 30 \mu\text{s}$ coincide razonablemente bien (dentro de un factor ~ 2) con el tiempo de circulación en “eddies” τ_{ED} calculado en el análisis de tiempos de espera, y con el tiempo de decorrelación de la turbulencia t_d .

Esto es esperable puesto que en intervalos de tiempo suficientemente breves la función de estructura, relacionada de alguna manera con los momentos de la distribución de velocidades Lagrangianas, se comporta como una ley de potencia con $H_0 \lesssim 1$. Esto sucede porque son intervalos más breves que el tiempo necesario para que la señal de la velocidad radial cambie de signo. Por lo tanto, para $\tau < \tau_{ED}$ esperamos que la cantidad $\langle |Y(t_i + \tau) - Y(t_i)| \rangle$ crezca linealmente con τ .

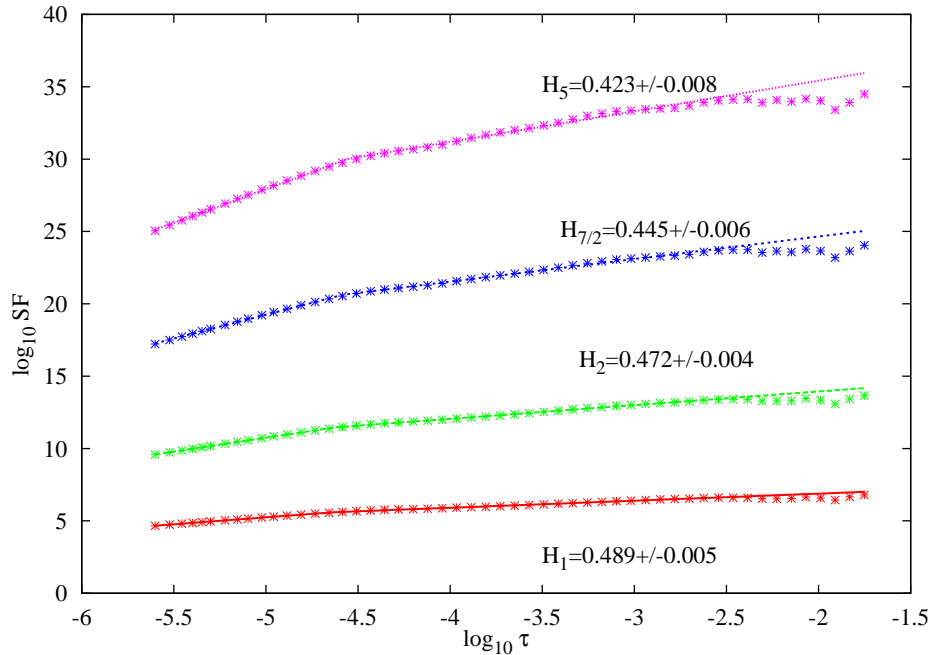


Figura 7.7: Ejemplo de Funciones de estructura de la velocidad de un tracer para distintos órdenes, junto con sus correspondientes ajustes.

En tiempos mayores que τ_{ED} si que se espera que el ritmo de crecimiento de la función de estructura sea más lento y se pueda detectar el grado de autosimilaridad existente en el movimiento. No obstante, para intervalos de tiempo comparables al tiempo de confinamiento, la función se satura, y por eso descartamos los últimos puntos (que por tener menor estadística tienen un error asociado mayor) a la hora de realizar el ajuste.

El valor de H en la región de intervalos temporales intermedios es la que nos interesa.

ν	$\langle H \rangle$	ΔH
0.5	0.46	0.05
1.0	0.46	0.05
1.5	0.46	0.05
2.0	0.46	0.06
2.5	0.46	0.06
3.0	0.45	0.07
3.5	0.44	0.07
4.0	0.44	0.07
4.5	0.43	0.08
5.0	0.42	0.08

El proceso se ha realizado para los citados órdenes ν . Observamos un ligero decrecimiento en el valor medio de H al incrementar ν , que podría indicar un cierto grado de multifractalidad. No obstante, consideramos que, teniendo en cuenta su error asociado, lo más razonable es tomarlo por constante.

Para cada ν se obtiene H_ν como el promedio para los 10000 trazadores, así como su desviación típica. El resultado $\langle H \rangle$ es la media de todos los H_ν ponderando por su error asociado:

$$\langle H \rangle = 0.452 \pm 0.019 \quad (7.9)$$

Se trata de un resultado difusivo o ligeramente subdifusivo.

7.1.6. Rescaled Range

Se ha aplicado también la técnica R/S para estudiar la autosimilaridad de la señal de la velocidad Lagrangiana, siguiendo el método descrito en el apartado 6.2.2. Al igual que en el caso de las funciones de estructura, el método se utiliza para analizar cada trayectoria individual por separado, con el objeto de promediar el resultado de H para minimizar el error, merced a la estadística de 10000 datos.

Los resultados obtenidos hasta el momento mediante la aplicación de otros métodos de diagnóstico, sugieren que $\alpha < 1$, con lo que en la ecuación (6.5) hemos escogido $s = 1$ para realizar los cálculos.

A continuación mostramos un ejemplo de la función R/S de uno de los trazadores (escogido al azar) en la figura 7.8.

Las funciones R/S se comportan de manera similar a las funciones de estructura: para tiempos más cortos que el tiempo de decorrelación de la turbulencia, observamos un rango con $H_0 \simeq 1$, una zona final de saturación con $H \simeq 0$, poco fiable por la falta de estadística, y una zona de tiempos intermedios donde queda reflejada en H la autosimilaridad en el movimiento.

Sin embargo, en comparación con las funciones de estructura, el tiempo para el que se satura la curva es una cantidad menos acotada, con lo que es preferible, a la

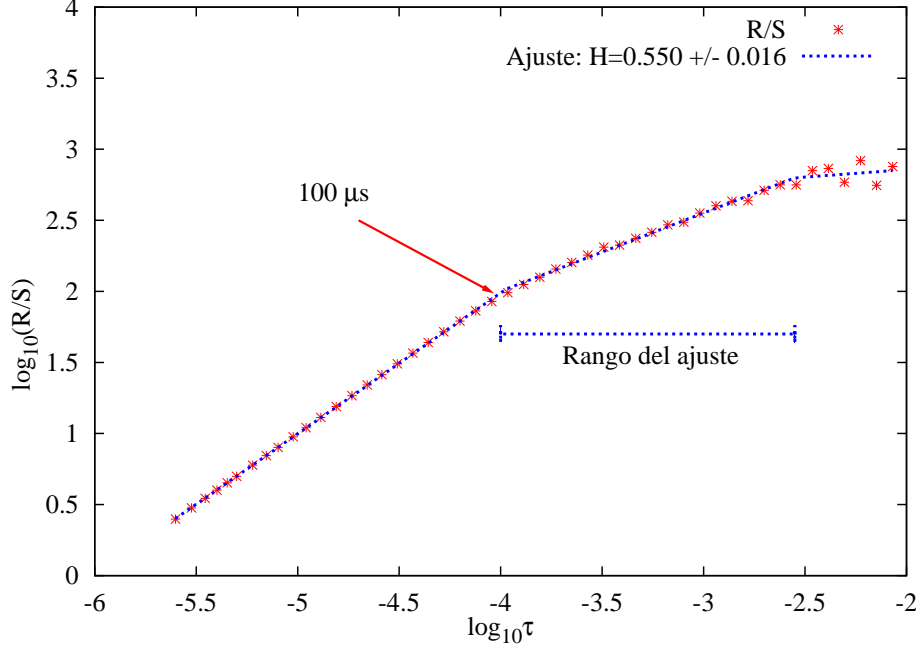


Figura 7.8: Ejemplo de función R/S de la velocidad de un tracer, junto con su ajuste (Escala logarítmica).

hora de realizar el ajuste, utilizar una función de tres tramos conectados con una potencia distinta, dejando los dos puntos de unión entre tramos como parámetros libres:

$$R/S(\tau) = \begin{cases} a \cdot \tau^{H_0} & \text{si } \tau \leq \tau_1 \\ b \cdot \tau^H & \text{si } \tau_1 < \tau \leq \tau_2 \\ c \cdot \tau^{H_1} & \text{si } \tau > \tau_2 \end{cases} \quad (7.10)$$

La condición de continuidad implica que $a = b\tau^{H-H_0}$ y $c = b\tau^{H-H_1}$.

El intervalo de tiempo para el cual se produce el primer 'codo' de la curva de ajuste tiene como valor medio $\tau_{1(RS)} \simeq 100 \mu\text{s}$: es ligeramente superior, aunque del mismo orden, al tiempo τ_{ED} y $\tau_{1(SF)}$, lo cual confirma que éstos tres métodos de diagnóstico suponen una medida eficiente del tiempo de decorrelación de la turbulencia t_d .

Por otra parte, el promedio del exponente de Hurst, ponderado por el error asociado al parámetro durante el ajuste, teniendo en cuenta las 10000 trayectorias a lo largo de los 20 ms de simulación es:

$$\langle H \rangle = 0.54 \pm 0.05 \quad (7.11)$$

Este valor, aproximadamente difusivo, es similar al obtenido utilizando el método de las funciones de estructura.

7.1.7. Velocidad Acumulativa

Finalmente, hemos estudiado indirectamente la distribución de las velocidades Lagrangianas analizando la distribución de desplazamientos netos $p(d)$ en intervalos fijos de tiempo, con el objetivo de detectar decaimientos del tipo de las leyes de potencia $p(d) \propto d^{-1-\alpha}$ que nos permitan calcular α .

Es necesario utilizar tiempos largos para que podamos detectar distribuciones de Lévy, a pesar de la importante deformación de las curvas obtenidas por el efecto de las barreras del sistema, que se hace más patente conforme aumentamos el intervalo de tiempo con el que se realiza el cálculo.

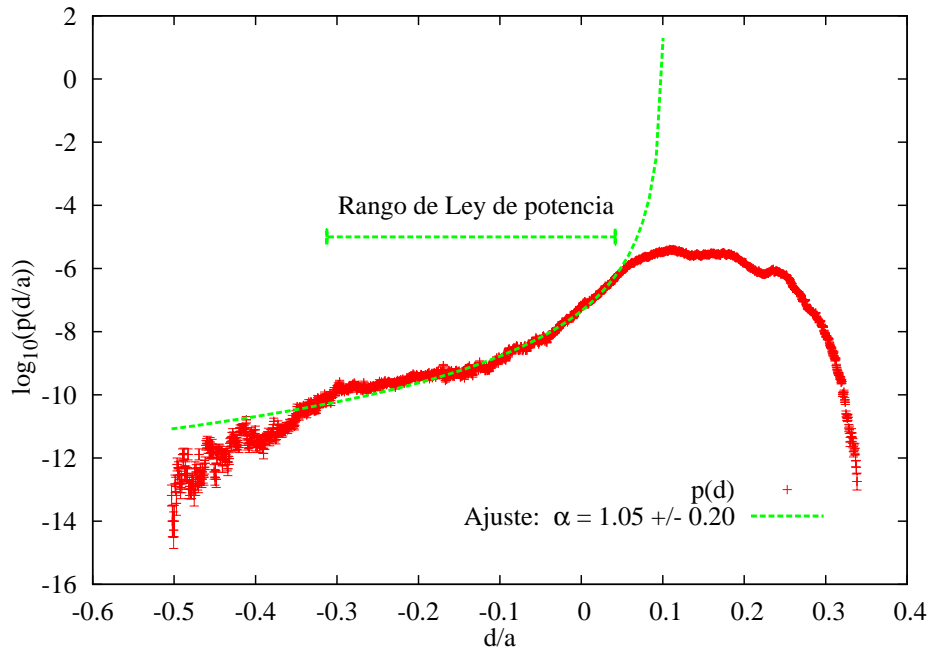


Figura 7.9: Distribución de la velocidad acumulativa durante intervalos de tiempo $\tau_M = 5$ ms, junto con ajuste y rango de decaimiento potencial (Escala lineal-logarítmica).

El mejor ajuste, para el que se estabiliza la distribución y se optimiza tanto la longitud de decaimiento potencial como el parámetro de ajuste χ^2 , es $\tau_M = 5$ ms. Se muestra la curva en el gráfico 7.9.

Como podemos observar, sólo se consigue detectar la cola algebraica si nos fijamos en la parte interna de la distribución, es decir, si prestamos atención a los

desplazamientos largos hacia el eje magnético.

Observamos que la deriva ya detectada en el gráfico 7.1 queda reflejada en la figura 7.9 en la posición del pico de la distribución, que acontece para desplazamientos positivos $d/a \sim 0.1$. Esta deriva, en combinación con los efectos de la barrera de transporte (véase 7.1), hace que las grandes excursiones dirigidas hacia el interior del plasma sean mucho más probables que hacia el borde del mismo, y que por lo tanto se consiga detectar la cola algebraica sólo si nos fijamos en la parte interna de la distribución, es decir, si prestamos atención a los desplazamientos largos hacia el eje magnético. Es destacable asimismo la semejanza, cualitativamente hablando, que se observa entre las distribuciones de las figuras 7.1 y 7.9, aunque ésta última está mejor definida.

Se ha ajustado la distribución a una función de decaimiento tipo ley de potencia con el siguiente resultado:

$$\alpha = 1.10 \pm 0.20 \quad (7.12)$$

El rango de decaimiento algebraico es algo inferior a la década: $L_{\text{fit}} = 0.75$.

Este resultado, dentro del margen establecido por su error asociado, es compatible con los obtenidos hasta ahora a partir del estudio del histograma, la función *rank* y la distribución del tamaño del paso.

7.1.8. Recopilación de resultados

Se han medido los parámetros relacionados con la autosimilaridad mediante diversas técnicas. La siguiente tabla recopila todos los resultados obtenidos para los parámetros α , β , y H según los diferentes métodos de diagnóstico aplicados:

Compilación de resultados				
Técnica	α	β	H	
Distribución radial	1.2 ± 0.5			
Función <i>Rank</i>	1.43 ± 0.11			
Distribución del tamaño del paso	1.20 ± 0.25			
Distribución del tiempo de espera		0.51 ± 0.04		
Funciones de Estructura			0.452 ± 0.019	
<i>R/S</i>			0.54 ± 0.05	
Velocidad acumulativa	1.10 ± 0.2			
Mejor estimación	1.35 ± 0.10	0.51 ± 0.04	0.46 ± 0.03	

Como podemos ver en la tabla 7.1.8, las distintas medidas, según la técnica empleada, de un mismo parámetro ofrecen resultados similares, lo que da una idea de la consistencia de los resultados.

Para comprobar la consistencia de los resultados se puede recalcular H a partir de la relación $H = \beta/\alpha$, a partir de la mejor estimación de cada parámetro. Según esa estimación, obtenemos que $H = 0.38 \pm 0.04$, resultado consistente con la mejor medida de H según aparece en la tabla.

El transporte efectivo no es local, como indica el resultado $\alpha \simeq 1.3 < 2$. Por otro lado, el resultado $\beta \simeq 1/2$ indica no Markovianidad (efecto memoria, o *no localidad en el tiempo*), a pesar del valor $H \simeq 1/2$ compatible con el transporte difusivo.

Conviene recordar que el valor que se obtiene cuando el transporte es difusivo ($H = 1/2$) también se puede obtener en situaciones en que la difusión es diferente, con $\alpha \neq 2$ y $\beta \neq 1$ pero $\beta/\alpha = 1/2$ (Ver Figura 3.7).

Para más detalles se puede consultar la referencia [50].

7.2. Modo H

Comenzamos con la descripción del modo H. Los trazadores son lanzados una vez se ha desarrollado el modo H con ELMs. El estado del plasma es el descrito en el apartado de Modo H con ELMs de la sección 4.5.2.

Los tracers son lanzados de igual manera que en la simulación en modo L, simultáneamente, en la posición radial $r/a = 1/2$, con ángulos poloidal y toroidal aleatorios y sin otra velocidad inicial que la correspondiente al fluido en el punto en que son depositados. El tiempo de simulación, de nuevo igual que en la otra simulación, es de 20 ms, lo que supone unas 5 – 7 veces el tiempo de confinamiento de las partículas.

Los resultados obtenidos a partir de la aplicación de los diagnósticos explicados en el capítulo 6 se presentan junto con la comparación con el modo L, con el objeto de analizar las diferencias en el transporte entre ambas simulaciones.

7.2.1. Distribución radial

Mostramos a continuación la gráfica de la distribución radial en diferentes instantes de tiempo. En la figura 7.10 mostramos la curva suavizada en escala lineal-logarítmica.

Se observan diferencias importantes si lo comparamos con el gráfico correspondiente en modo L, como podemos ver en el gráfico 7.11. Enumeramos a continuación las más destacadas:

1. En primer lugar, el pico de la distribución, se desplaza hacia el interior del plasma según avanza el tiempo, lo que nos indica que la deriva es en sentido opuesto al modo L.

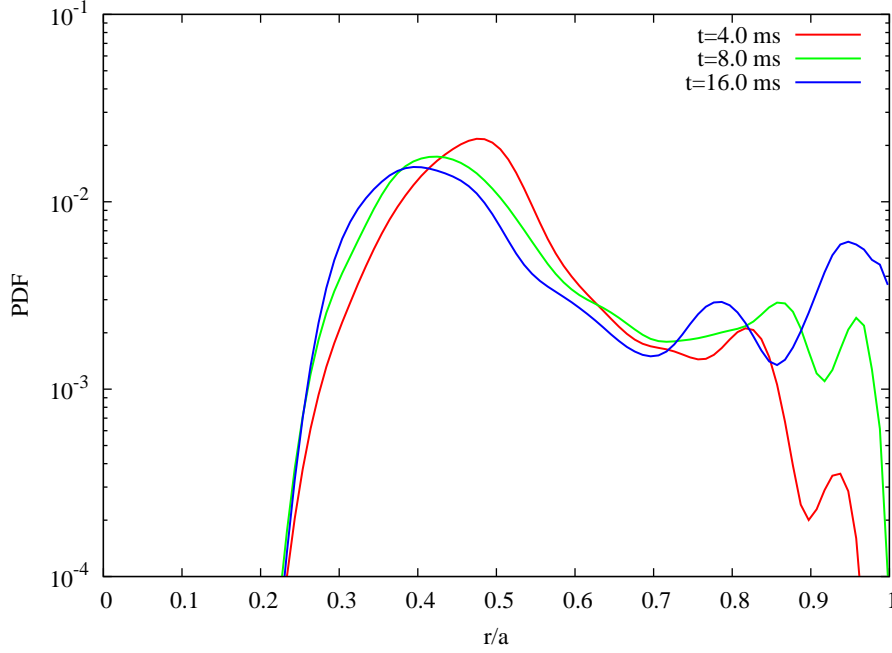


Figura 7.10: Distribución radial de trazadores en modo H en diferentes instantes de tiempo tras su lanzamiento. (Escala lineal-logarítmica).

2. Por otra parte, se observa que la distribución es más estrecha que en modo L. Sea σ_L la varianza de la distribución en modo L y σ_H la cantidad análoga en modo H: se cumple que $\sigma_L^2 \sim 2\sigma_H^2$.
3. Finalmente, las relajaciones con motivo de los EMLs desplazan a los tracers hasta situarlos más allá de la barrera de transporte de $r/a \simeq 0.8$, mientras que en modo L dicha barrera es infranqueable.

También se observa que en $r/a \approx 0.3$ se desarrolla una barrera de transporte. Esta barrera está asociada con la superficie racional $q = 1$. En modo L esta barrera también está presente, pero no es apenas apreciable utilizando las distribuciones radiales, debido a que la deriva aleja a las partículas de dicha posición radial.

En consecuencia, la curva es muy asimétrica, y hacia el interior se descarta la posibilidad de detectar un decaimiento algebraico. No obstante, la forma de la cola externa de la distribución si que invita a realizar un ajuste.

El resultado, una vez más comparado con el ajuste en modo L, se muestra en la figura 7.12, donde se representa, en escala logarítmica, la PDF $p_H(\Delta\rho_H)$, con $\Delta\rho_H = |r - r_{0H}|/a$ y $p_L(\Delta\rho_L)$ donde definimos $\Delta\rho_L = |r_{0L} - r|/a$. Los picos de ambas distribuciones están en r_{0H} y r_{0L} , respectivamente. La distribución en modo L está invertida por estar la cola algebraica de ésta última en posiciones $r < r_{0L}$.

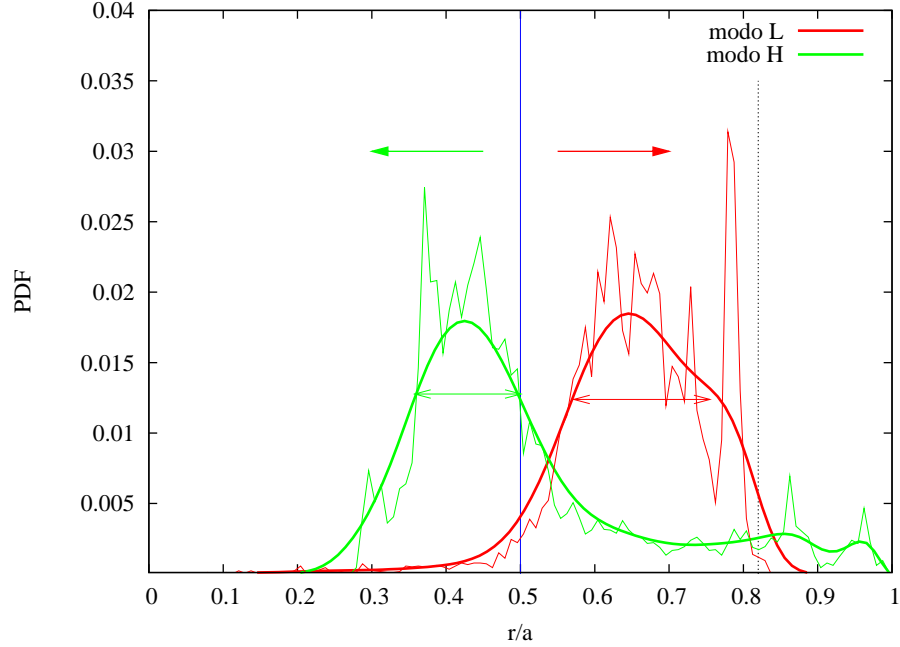


Figura 7.11: Distribución radial de trazadores en modos L y H 8 ms tras su lanzamiento.

Observamos que la contribución de las posiciones radiales “lejanas” (es decir, con $a\Delta\rho$ comparable con el radio menor a) está presente en ambas distribuciones, pero su peso relativo es mucho mayor en el histograma en modo H. La consecuencia es una mayor distorsión de la distribución radial en este último por el efecto del tamaño finito del sistema: En modo H las barreras influyen más en la forma del histograma y por eso cualquier intento de detectar una cola algebraica será menos exitoso, la forma es más irregular y la longitud del ajuste es menor que en modo L.

La longitud del ajuste, a partir de la definición (6.12) de las partes de decaimiento potencial en modos L y H es:

$$L_{\text{fit,L}} = 1.1$$

$$L_{\text{fit,H}} = 0.8$$

De donde se infiere que el ajuste en modo L es más creíble.

El resultado de α en modo H:

$$\alpha = 0.12 \pm 0.06 \quad (7.13)$$

se trata de un valor prácticamente marginal. Por otra parte, su error asociado es relativamente muy grande. Esto, unido a la menor longitud del ajuste, pone en

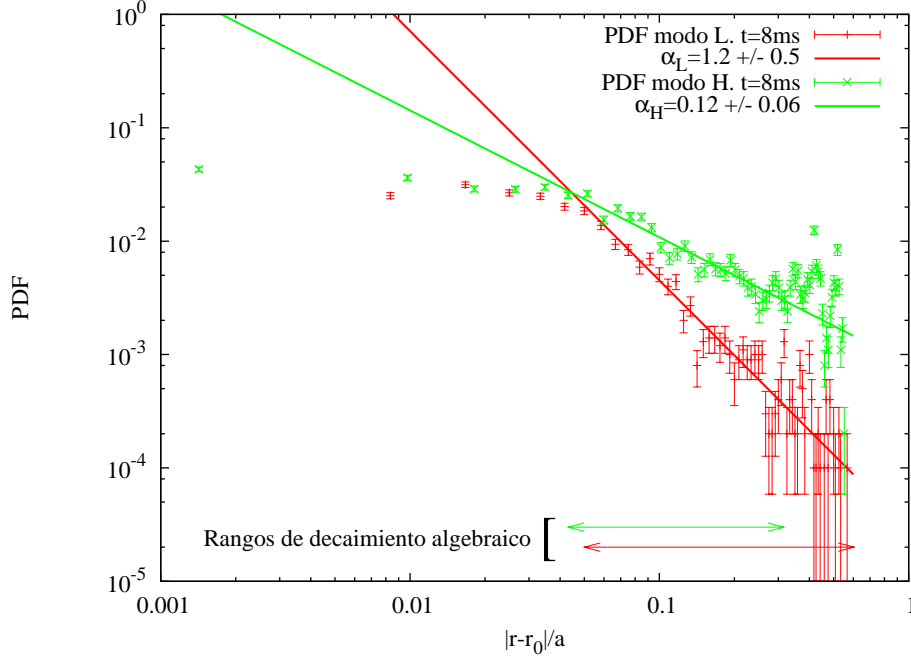


Figura 7.12: Ajustes de las distribuciones radiales en $t = 8$ ms. La escala es logarítmica. En modo L se representa $PDF_L|\rho_{0L} - \rho|$. En modo H $PDF_H|\rho - \rho_{0H}|$.

duda la validez del resultado al menos hasta que haya sido confirmado mediante algún otro diagnóstico.

7.2.2. Función de distribución acumulativa

También se ha obtenido la función *rank* para el modo H. En la figura 7.13 se muestra el resultado, con un detalle de la parte de ley de potencia. Nótese que es visible la zona algebraica en posiciones $\Delta\rho > 0$.

El resultado, como era de esperar, es similar al obtenido en el análisis de la distribución radial.

$$\alpha = 0.14 \pm 0.05 \quad (7.14)$$

Aunque el ajuste parece bueno y el error se modera con respecto al asociado a α calculado a partir del histograma, hay que destacar que el intervalo de función de potencia es más bajo que en modo L:

$$L_{\text{fit,L}} = 0.90$$

$$L_{\text{fit,H}} = 0.62$$

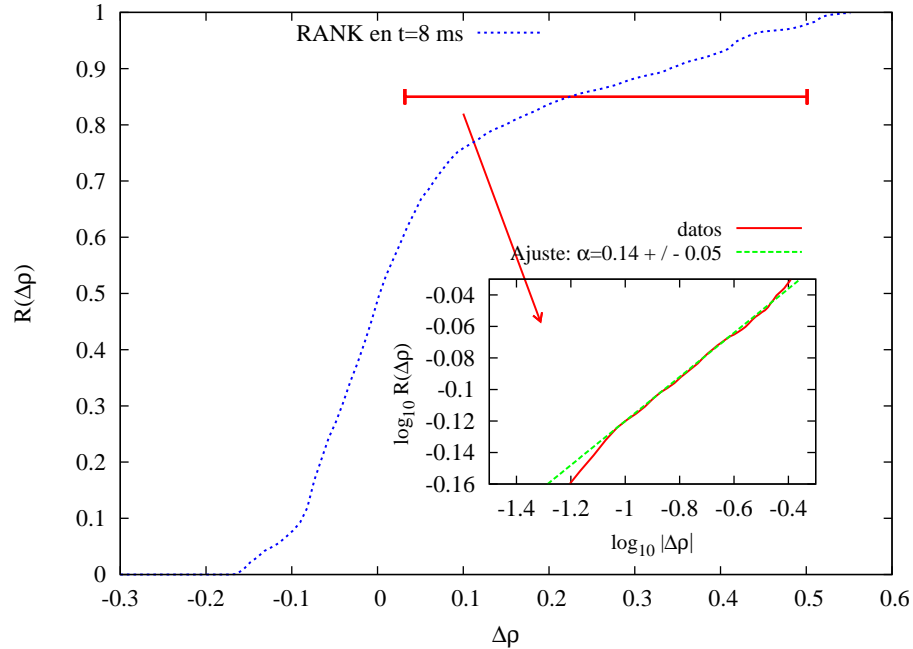


Figura 7.13: Función de distribución acumulativa en modo H e intervalo de ley de potencia. En el interior: Intervalo del ajuste y función de ajuste.

Es decir, es un ajuste menos robusto que en la simulación anterior.

7.2.3. Distribución del tamaño del paso

De forma análoga a la simulación en modo L, se han obtenido y clasificado los pasos que dan los trazadores una vez sus trayectorias se han “reducido” a trayectorias del tipo *CTRW* a partir de un umbral de velocidad arbitrario y las señales de posición y velocidad radiales de cada partícula, tal y como se explicó en el apartado 6.1.2.

En la simulación que nos ocupa, se detecta un fuerte incremento de la velocidad radial cuando las partículas penetran en la región $r/a \lesssim 0.35$, en aproximadamente un factor 10, como mostramos en la figura 7.14.

Por lo tanto, el algoritmo se ha modificado para que sólo sean tenidos en cuenta los desplazamientos acontecidos dentro de la zona $0.35 < r/a < 1.0$. Nos centramos, por lo tanto, en la región del plasma que coincide con la estudiada en la simulación en modo L.

Es importante que el proceso se repita para distintos valores del umbral con el objetivo de encontrar un rango de v_{th} donde el resultado sea insensible a dicho parámetro.

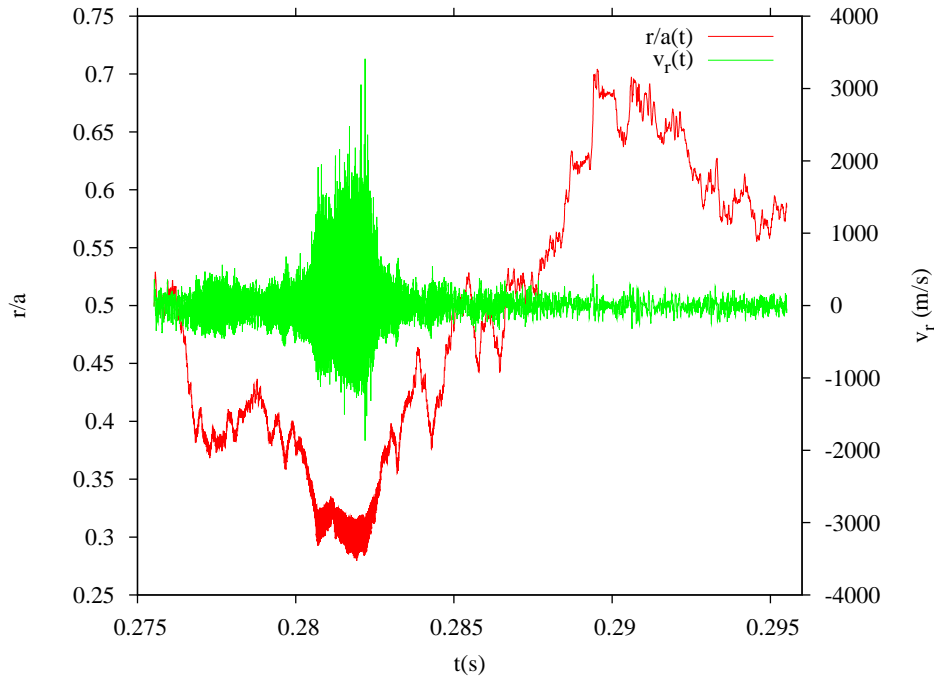


Figura 7.14: Posición y velocidad radiales de una partícula a lo largo de la simulación en modo H. Nótese cómo la velocidad varía en al menos un orden de magnitud cuando la posición es $r/a \lesssim 0.35$.

Mostramos en la figura 7.15 las distribuciones del tamaño del paso obtenidas tras realizar un amplio barrido en v_{th} .

Como se puede observar en la figura, el comportamiento de las distribuciones guarda ciertas similitudes con el análogo en modo L. Al aumentar el umbral la cola de la distribución se levanta, mientras que el efecto de las barreras se va haciendo cada vez más patente, lo cual dificulta el análisis. Sin embargo no se encuentra aparentemente un intervalo de valores del umbral para el que la distribución no experimente cambios.

Utilizando el mismo método que en modo L para realizar un ajuste, se ha encontrado que el mejor resultado, tanto en términos de longitud de ajuste como de χ^2 se consigue con $v_{th} = 500$ m/s. Los mejores ajustes en modo L y H se muestran en la figura 7.16.

El resultado obtenido en modo H es:

$$\alpha = 2.0 \pm 0.25 \quad (7.15)$$

No obstante, en este caso no se detecta un rango de v_{th} donde el valor de α se estabilice, tal y como se dijo con anterioridad. La distribución resultante es una exponencial para umbrales bajos, se detecta un rango de decaimiento algebraico

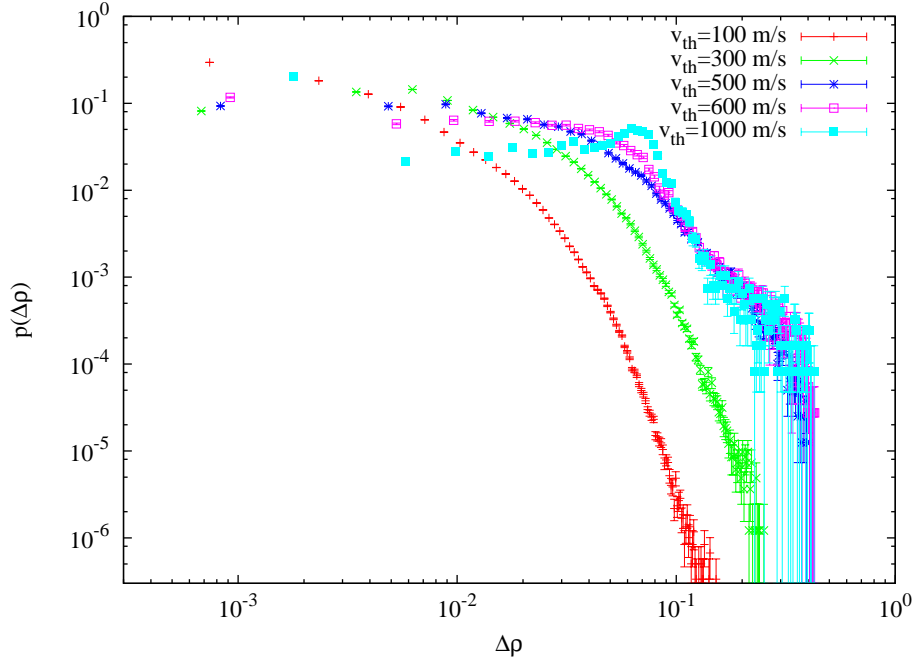


Figura 7.15: Distribuciones del tamaño del paso obtenidas en modo H para distintos v_{th} . Escala logarítmica.

en $v_{th} = 500$ m/s, y para valores mayores del umbral, el efecto tamaño finito es el dominante, a lo que hay que añadir que las distribuciones tienen su máximo en $\Delta\rho \sim 0.06 - 0.07$. Este pico está relacionado con el movimiento que experimentan los trazadores cuando se encuentran en la zona de influencia de los ELMs, como se verá más adelante.

Esto hace que el valor obtenido para α no sea concluyente. Es más, se trata de un resultado muy distinto del obtenido en el análisis de la distribución radial.

Por otra parte, la longitud de decaimiento algebraico es de sólo $L_{fit,H} = 0.30$, acortándose frente a $L_{fit,L} = 0.40$, obtenida en modo L.

7.2.4. Distribución del tiempo de espera

De manera análoga al tamaño del paso se procede con los tiempos de espera, para tratar de determinar el valor del parámetro β y conocer desde un punto de vista cualitativo si el transporte es o no Markoviano.

En la figura 7.17 se muestran las distribuciones obtenidas al realizar un barrido en v_{th} .

De la figura destacamos la forma muy irregular de las distribuciones. Se observa una vez más la elevación de la cola de la distribución al aumentar v_{th} . Además es

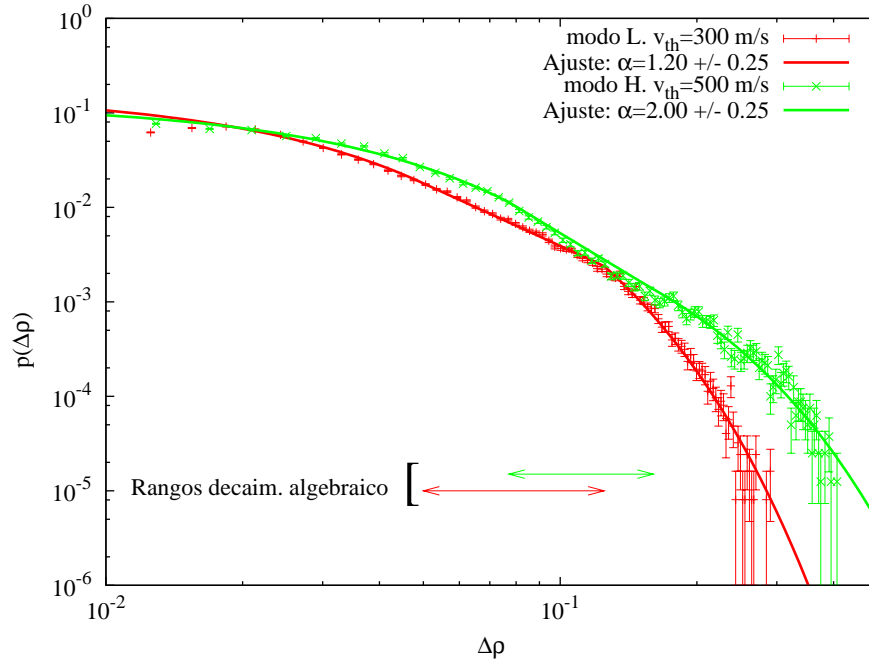


Figura 7.16: Mejores ajustes en modo L y H. Escala logarítmica.

interesante la aparición de un pequeño pico correspondiente a $\Delta t = 0.4$ ms, que asociamos al periodo de los ELMs.

El ajuste a realizar, del mismo tipo que en la anterior simulación, es factible para ciertos valores del umbral. El mejor ajuste se realiza con $v_{th} = 500$ m/s, con el siguiente resultado:

$$\beta = 0.59 \pm 0.03 \quad (7.16)$$

Comparamos los ajustes en modo L y H en la figura 7.18.

Si bien ambas distribuciones tienen una forma similar, y prácticamente el mismo valor de β , destaca la diferencia en los intervalos de decaimiento algebraico en ambos casos. En modo L la distribución decae como ley de potencia durante dos décadas, $L_{fit,L} = 2.0$, lo cual supone un rango más que suficiente, mientras que en modo H este rango se ve reducido drásticamente, alcanzando apenas una década: $L_{fit,H} = 0.9$. Si bien L_{fit} no debe considerarse insuficiente, puesto que la ley de potencia alcanza casi una década en Δt , es evidente que el ajuste es mejor en modo L, y por lo tanto el resultado en β más fiable en la primera simulación realizada.

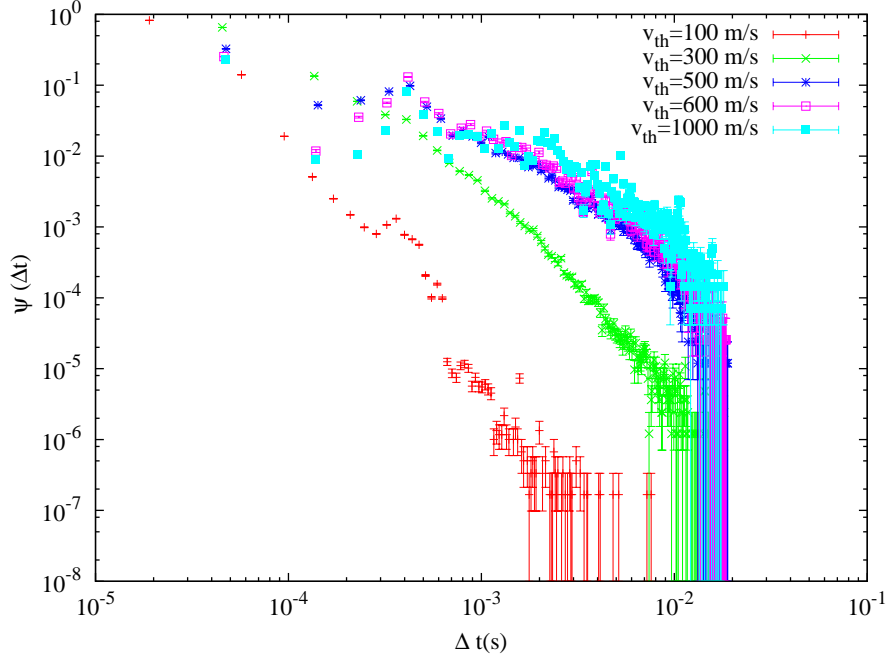


Figura 7.17: Distribuciones del tiempo del paso para distintos umbrales en modo H. Escala logarítmica.

7.2.5. Funciones de Estructura

También han sido analizadas las funciones de estructura SF_ν en modo H, para diferentes órdenes ν . Como se ha explicado en la sección 6.2.4, y se ha comprobado en el apartado de éste capítulo 7.1.5, existe un rango de intervalos temporales τ , correspondiente a la mesoescala, donde esperamos que las funciones de estructura escalen según la relación $SF_\nu(\tau) \propto \tau^{H\nu}$. Este rango, la mesoescala, estaría comprendido entre un rango de tiempos muy cortos (transitorio inicial de la SF , tiempos menores que el tiempo de decorrelación de la turbulencia) con $H \sim 1$, y otro rango de tiempos más largos (comparables con el tiempo de confinamiento) donde $H \sim 0$.

Sin embargo las funciones de estructura de buena parte de las partículas no tienen esa forma, sino que tienen un pico alrededor de $\tau = 10 \mu\text{s}$, esto es, inmerso en lo que sería el transitorio inicial, quedando deformada la curva, con respecto a su forma esperada. El pico observado tiene lugar para un intervalo de tiempo comparable con el periodo de las oscilaciones rápidas que acontecen en la región $r/a < 0.35$.

Al tratarse de un análisis de la velocidad, se va a ver irremediamente afectado por los profundos cambios que tienen lugar en la señal de la velocidad radial cuando cada partícula se encuentra a uno u otro lado de la superficie $r/a \simeq 0.35$. Una

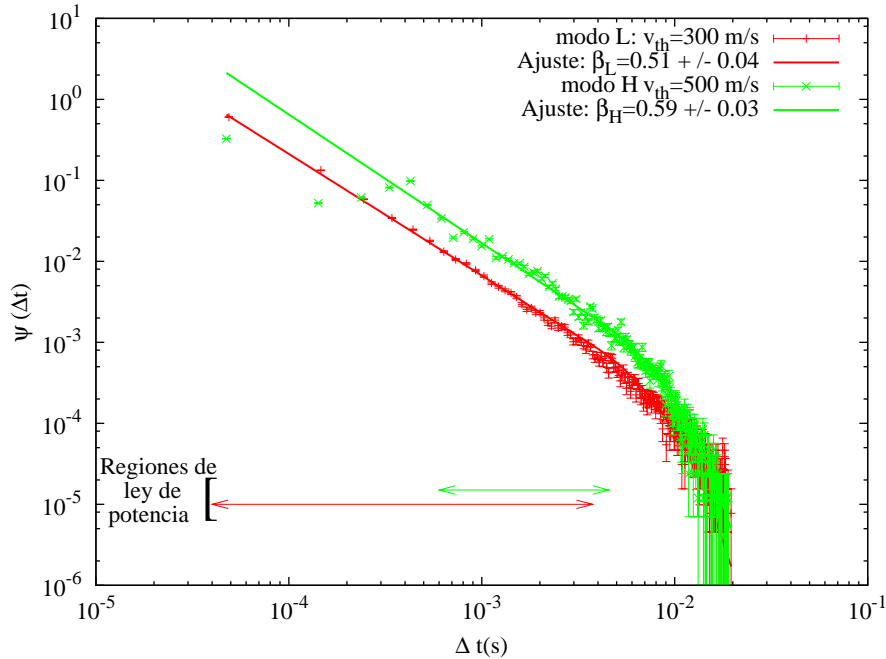


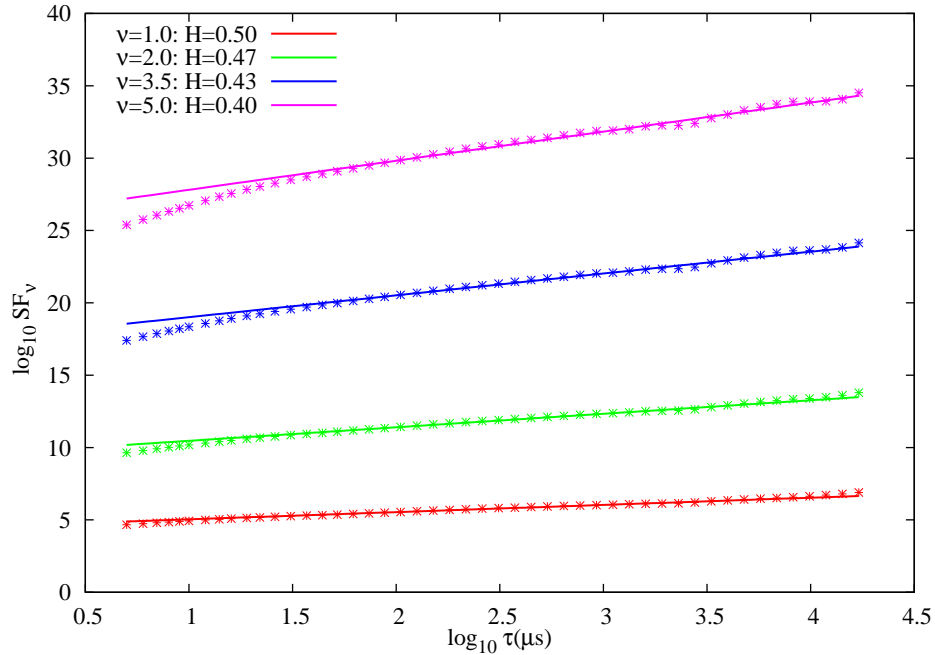
Figura 7.18: Mejores ajustes para las distribuciones del tiempo de espera en modo L y H. Escala logarítmica.

fracción apreciable del total de trayectorias seguidas, alrededor del 50 %, cruzan dicha superficie en una o más ocasiones. Mientras se encuentran en la citada región del plasma, la velocidad es mucho mayor y oscila fuertemente.

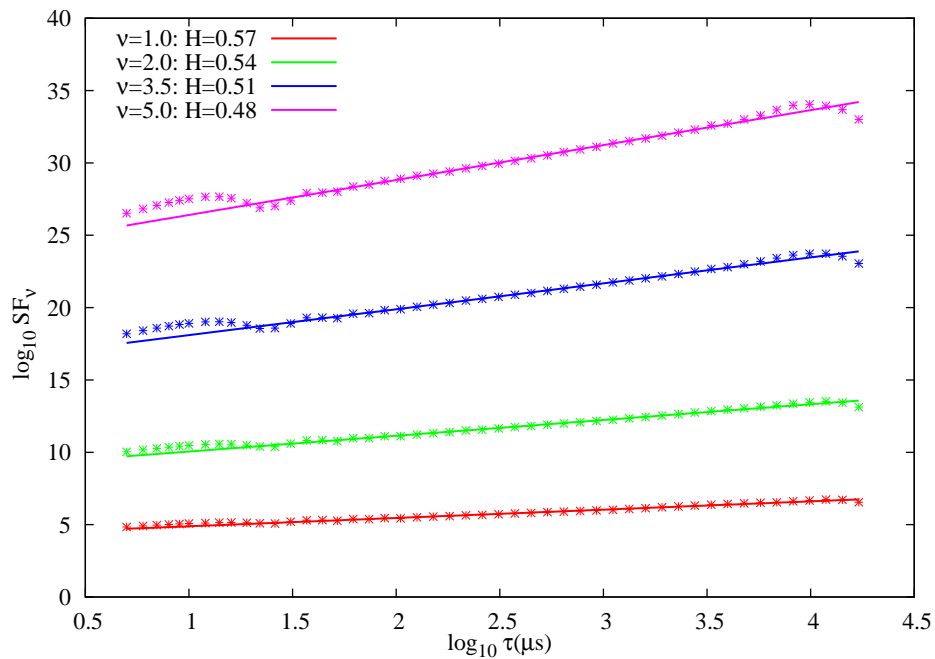
Dividimos nuestras Funciones de Estructura en dos tipos:

- Tipo I: Las funciones de estructura de las partículas que no entran en $r/a \lesssim 0.35$. Las curvas obtenidas tienen las tres partes bien definidas $H \sim 0$, $H \sim 0.5$ y $H \sim 1$. Ver Figura 7.19a
- Tipo II: Son las funciones de estructura de las partículas que si que han entrado en la zona $r/a \lesssim 0.35$. La diferencia está en la parte baja de la curva de la SF, que no es del tipo $SF \propto \tau^{H\nu}$ sino que tiene el citado pico. La zona intermedia tiene $H \sim 0.5$ y, para tiempos comparables al tiempo de confinamiento de las partículas, $H \sim 0$. Ver Figura 7.19b

La única diferencia apreciable se encuentra en la parte baja de las curvas, puesto que el valor de H obtenido para la región de la mesoescala no parece depender del tipo de SF. Por existir dos tipos de funciones de estructura, cada una con una forma distinta, se ha realizado un ajuste a una ley de potencia, en el que no se han tomado en consideración los puntos iniciales.



(a) Tipo I



(b) Tipo II

Figura 7.19: Funciones de estructura de tipo I y II, junto con ajustes. Obsérvese el pico presente en el tipo II para τ bajos, y ausente en tipo I.

El ligero decrecimiento que se observa en el resultado de H conforme ν aumenta no es suficiente como para considerar que estamos ante un caso de multifractalidad, puesto que dentro de su error estadístico se puede asumir constante.

Tabla 3: $\langle H \rangle_\nu$ en modo H

ν	$\langle H \rangle \pm \Delta H$
0.5	0.52 ± 0.10
1.0	0.53 ± 0.08
1.5	0.52 ± 0.07
2.0	0.51 ± 0.07
2.5	0.50 ± 0.07
3.0	0.49 ± 0.07
3.5	0.48 ± 0.07
4.0	0.48 ± 0.07
4.5	0.47 ± 0.07
5.0	0.46 ± 0.07

El resultado, promediando sobre todos los órdenes en que se han calculado las SF es:

$$\langle H \rangle = 0.494 \pm 0.007 \quad (7.17)$$

Se trata de un valor de H difusivo, muy similar al obtenido en la simulación en modo L.

Por otra parte, en las funciones de estructura de tipo I es interesante estudiar el tiempo en el que se produce el cambio del transitorio inicial al rango de tiempos intermedios. Esta transición se produce en $\tau_H = 30 \mu\text{s}$. Se trata de un tiempo sensiblemente inferior (alrededor de un factor 3) al obtenido en modo L.

7.2.6. Rescaled Range

También se ha estudiado la función R/S calculada a partir de las trayectorias de los trazadores. Varios ejemplos de las curvas obtenidas se pueden ver en el gráfico 7.20.

Los ajustes se realizan de forma análoga al mismo estudio en la simulación anterior. El resultado, promediando sobre todos los tracers es:

$$\langle H \rangle = 0.55 \pm 0.06 \quad (7.18)$$

El resultado es el mismo que en modo L. No parece que las funciones R/S se vean afectadas por la transición de modo L a H.

Al igual que en las funciones de estructura, detectamos un acortamiento del tiempo de decorrelación de la turbulencia, medido como el intervalo de tiempo para el cual se produce la transición en la curva que se produce entre los tiempos muy breves, donde el crecimiento de $R/S(\tau)$ es balístico, y los tiempos de la meso escala.

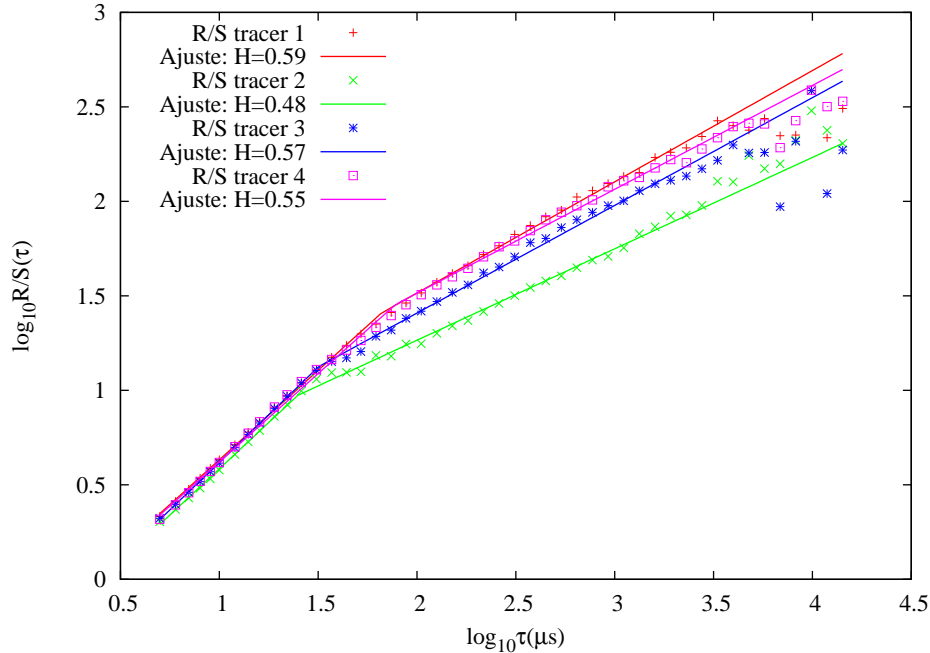


Figura 7.20: Ejemplos de curvas R/S en modo H, junto con ajustes. Escala logarítmica.

El “codo” de la curva (ver gráfico) se produce en $\tau_H \sim 30 \mu s$, aproximadamente 3 veces más corto que en modo L.

Este dato, junto con el análogo deducido a partir del análisis de las funciones de estructura de tipo I, indica que como consecuencia de la transición L-H el tiempo de decorrelación de la turbulencia disminuye sensiblemente.

7.2.7. Velocidad acumulativa

Finalmente se presenta el análisis de la velocidad acumulativa. Se espera que, de existir, las correlaciones en la velocidad se manifiesten en la distribución $p_\tau(d)$, de desplazamientos d netos en un tiempo τ .

Al igual que en el análisis de modo L, es necesario estudiar la distribución obtenida para tiempos largos para que se desarrollen las colas típicas de las distribuciones de Lévy, i.e. $p(d) \propto d^{-1-\alpha}$. Ver figura 7.21.

La forma de la figura recuerda a la del histograma en modo H, y es casi la imagen especular de la distribución $p(d)$ calculada en la simulación en modo L. El pico se ha desplazado hacia los desplazamientos negativos (deriva hacia el interior) mientras que sólo se ven grandes desplazamientos positivos, no negativos (la deriva aproxima los tracers a la barrera de transporte de $r/a \simeq 0.3$). Como es de esperar,

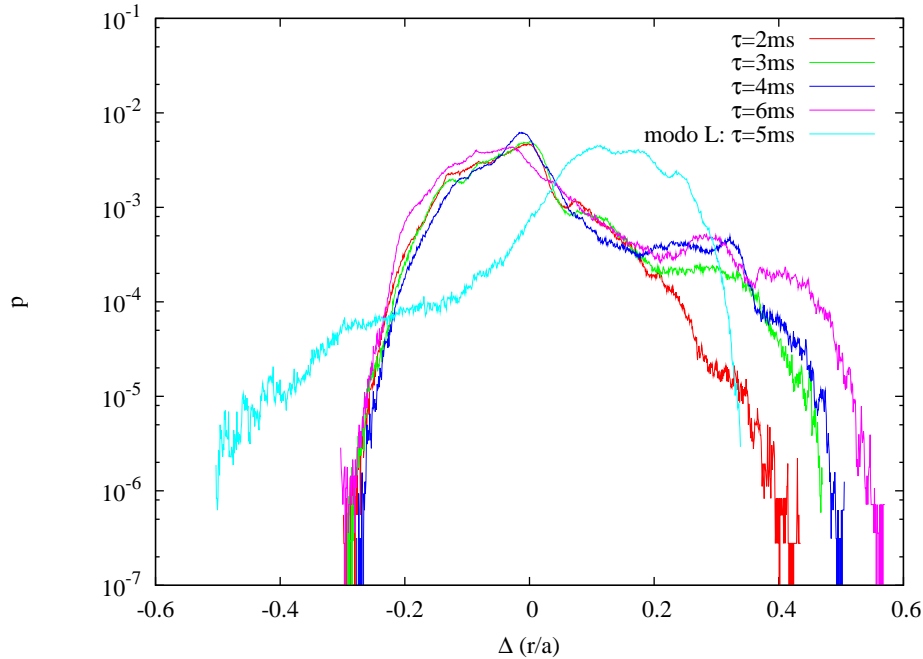


Figura 7.21: Barrido en τ : Distribuciones de velocidad acumulativa en modo H, junto con el mejor resultado en modo L. Escala Lineal-Logarítmica

la cola de la distribución se eleva con τ_0 , aunque también las barreras provocan una mayor distorsión.

A la hora de realizar el ajuste de la curva a una función de decaimiento potencial, comprobamos que el efecto tamaño finito afecta claramente al resultado. Una nueva comparación con el caso del modo L ilustra las diferencias. En la figura 7.22 se muestran las distribuciones en ambas simulaciones, centradas de modo que el máximo de cada una de ellas se sitúe en $d/a = 0$ (con lo que en escala logarítmica la ley de potencia ha de verse como una recta).

La parte de decaimiento como ley de potencia se ajusta a una función $f(d) = A \cdot d^{-1-\alpha}$, obteniéndose para modo H un índice de decaimiento:

$$\alpha = 1.07 \pm 0.11 \quad (7.19)$$

Se observa un pico que interrumpe la caída de la cola de la distribución en modo H, correspondiente a los desplazamientos $d/a \sim 0.4$. Esta longitud de desplazamientos corresponde aproximadamente con la distancia entre el pico de la distribución radial y la barrera de transporte en $r/a \sim 0.8$ (ver gráficos 7.10, 7.11). Por tanto, la longitud relativa de decaimiento algebraico en la distribución es más corta que en modo L. $L_{\text{fit,L}} = 0.75$, cercano a la década, mientras que en modo

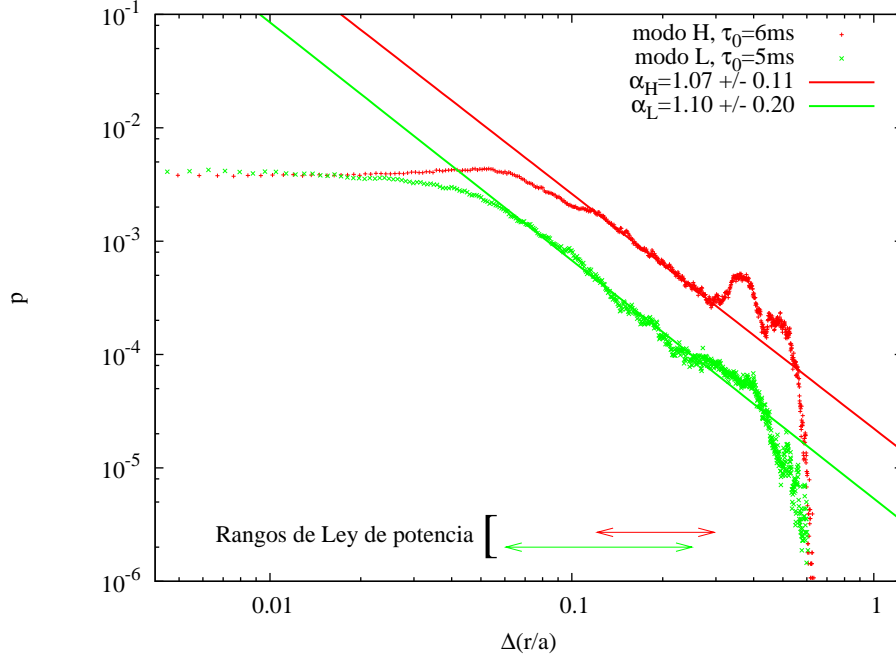


Figura 7.22: Distribuciones de velocidad acumulativa en modos L y H, junto con los mejores ajustes. Escala Logarítmica.

H, dependiendo del tiempo τ , se obtienen longitudes de $L_{\text{fit,H}} = 0.39 - 0.47$. El resultado del ajuste, por lo tanto, no puede considerarse igual de fiable en ambos casos.

7.2.8. Recopilación de los resultados

Como se ha visto, con distintas técnicas de análisis no se obtienen los mismos resultados, como sucedía en modo L. Esto es debido principalmente al fuerte impacto de las barreras del sistema.

Hay que destacar además que las oscilaciones de la densidad electrónica fluctuante, coincidentes con los ELMs, tienen una amplitud mucho mayor que en modo L. Éstas se propagan en dirección radial decreciente. A esto se añade que la deriva acerca a los trazadores a la barrera de transporte $q = 1$, y por lo tanto las grandes excursiones radiales (es decir, comparables al tamaño del sistema) podrían darse en dirección radial positiva, hasta la barrera de $q = 3$. Por lo tanto, cualquier largo desplazamiento de las partículas (correlación a larga distancia) habría de producirse en sentido contrario al de propagación de estas relajaciones.

En modo L, estas oscilaciones son mucho más suaves, pero también se propagan

hacia el interior. Las largas correlaciones se encuentran con más facilidad en este caso puesto que la deriva concentra a las partículas lejos de la barrera de $q = 1$, y los desplazamientos hacia dicha posición se ven favorecidos por las oscilaciones cuasiperiódicas. Esquemáticamente, la diferencia entre el caso de modo L y modo H se representa en la gráfica 7.23.

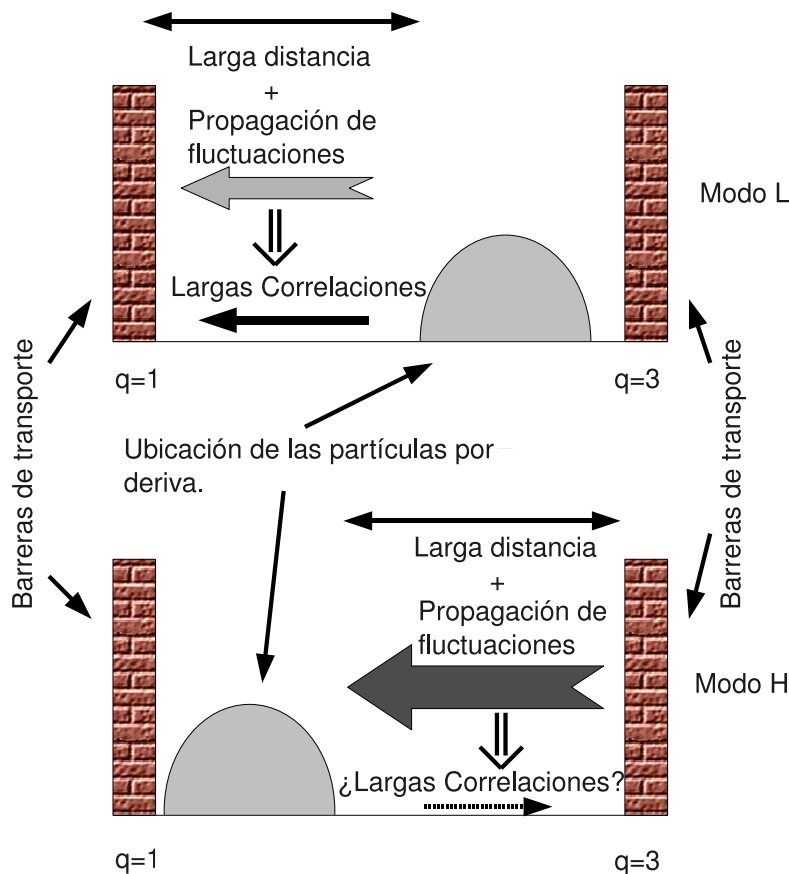


Figura 7.23: Mecanismo por el que se producen largas excursiones radiales, con diferencias entre el modo L y el modo H.

No se puede extraer un valor de consenso en α en modo H. Sin embargo, los parámetros β y H tienen resultados más claros.

- Mediante el análisis de la distribución de los tiempos de espera se obtiene $\beta \sim 1/2$

- Mediante el análisis de las correlaciones en la velocidad radial (Funciones de Estructura y RS), se obtiene que $H \simeq 1/2$.

Estos resultados en β y H son similares a los de la anterior simulación. Indican, respectivamente, no Markovianidad y compatibilidad con el transporte difusivo.

Para más detalles se puede consultar la referencia [51].

7.3. Movimiento de los trazadores en modos L y H

En los apartados anteriores de este capítulo hemos visto que los diagnósticos aplicados al estudio de la autosimilaridad y las largas correlaciones en las trayectorias de los trazadores indican la existencia de claras diferencias en el transporte con motivo de la transición L-H. Sin embargo las evidencias que se exponen aquí no se presentan como resultados de los diagnósticos utilizados en las secciones previas, es decir, no se presentan como diferencias cuantitativas en los parámetros autosimilares α , β y H , sino que, a partir del estudio de las trayectorias se presenta un conjunto de diferencias en otros aspectos, como son la asimetría en los pasos de los trazadores, perfiles del tiempo de espera y del tamaño del paso, coeficiente de difusión fraccionario e impacto de los ELMs en el movimiento.

7.3.1. Asimetría en los pasos

Al cuantificar, por separado, el tamaño medio de los pasos positivos y negativos en función de la posición radial se calculan interesantes perfiles para modo H y modo L. Los pasos se calculan utilizando el algoritmo de la sección 6.1.2. Contabilizando todos los pasos de todos los tracers a lo largo de las respectivas simulaciones, se obtiene el resultado que se muestra en la figura 7.24.

Como se puede observar en la figura, en modo L existe una gran asimetría entre los saltos positivos y negativos. Esto es incompatible con un transporte local, en el sentido de que la asimetría local en la distribución de los pasos depende de condiciones que no son estrictamente locales (como las condiciones de contorno). Nótese que en modo H esta asimetría prácticamente desaparece, teniendo los saltos positivos un valor medio muy similar a los negativos en todo el dominio. Por lo tanto, interpretamos que el transporte es en modo H un proceso marcadamente más local que en modo L. Desde un punto de vista de la física de tokamaks esto quiere decir que estructuras no locales del tipo de los *streamers*, etc, de existir en modo H, son menos importantes, al menos en el rango de radios analizado.

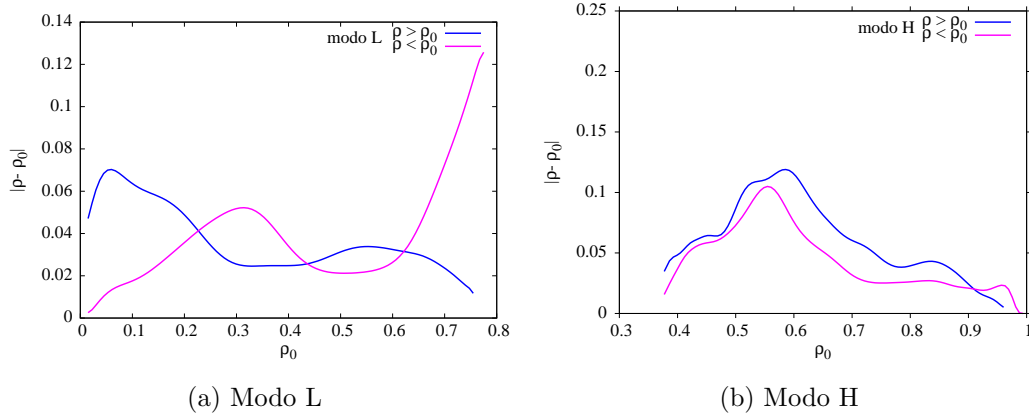


Figura 7.24: Perfiles de los pasos medios positivos y negativos en modos L y H

7.3.2. Perfiles del tamaño del paso

A continuación se muestran los perfiles de la cantidad $\langle \Delta \rho^2 \rangle(r/a)$ en ambas simulaciones. Para calcular esta cantidad se contabilizan todos los saltos acontecidos desde cada posición radial (previamente dividido el dominio $0 < r/a < 1$ en ventanas iguales). El resultado se muestra en las gráficas 7.25.

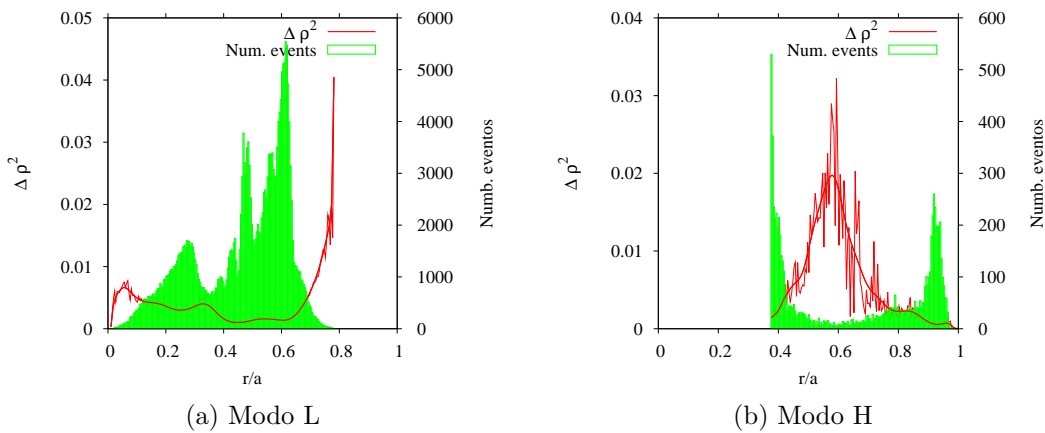


Figura 7.25: Perfiles del promedio del cuadrado de los desplazamientos en modo L y H, junto con número de eventos

Nótese que en la figura el perfil $\langle \Delta \rho^2 \rangle(r/a)$ se presenta acompañado del número de saltos. Tal y como es de esperar, en cada uno de los perfiles los incrementos de $\langle \Delta \rho^2 \rangle$ vienen siempre acompañados de una reducción del número de eventos.

Es interesante destacar que los pasos son sensiblemente más largos en modo H, $\langle \Delta \rho^2 \rangle_H \sim 10 \times \langle \Delta \rho^2 \rangle_L$ mientras que el número de pasos es también 10 veces más

bajo, lo cual hace que el perfil en modo H sea menos nítida por la mayor dispersión de los puntos debida a la menor estadística.

Destaca el pico que se produce en modo H en $r/a \sim 0.6$, mientras que en modo L $\langle \Delta \rho^2 \rangle(r/a)$ se mantiene aproximadamente constante mientras está suficientemente alejada de la barrera de transporte de $r/a = 0.8$.

7.3.3. Perfiles del tiempo de espera

Análogamente, se han calculado los perfiles del tiempo medio de espera. Se muestran en la figura 7.26.

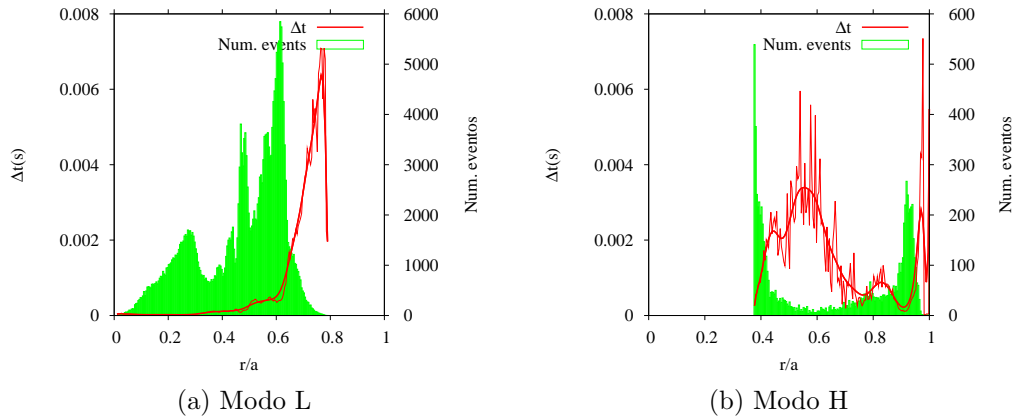


Figura 7.26: Perfiles del tiempo medio de atrapamiento en simulaciones de modo L y H, junto con el número de eventos

Como se puede observar, las curvas de la figura recuerdan a las de los gráficos 7.25. El máximo tiempo de espera en modo H se produce en la posición radial $r/a \sim 0.6$, justo donde el número de atrapamientos es menor, y coincidiendo también con el máximo en la longitud de los pasos. Nótese que el tiempo de espera en modo L es menor que en modo H, en la parte central del plasma, mientras que conforme nos aproximamos a la barrera de $r/a \sim 0.8$ el tiempo de espera en modo L se dispara, razón por la cual las partículas se acumulan en esas posiciones. Por otro lado, de acuerdo con lo observado en la figura 7.25, el número de eventos es mucho mayor en modo L.

7.3.4. Coeficiente de difusión fraccionario

En el escenario de la difusión fraccionaria, con valores no estándares de α y β , el papel del coeficiente de difusión lo juega la cantidad $D_{\alpha,\beta}$ [46]. Por ello, se ha calculado esta cantidad a partir de los datos recabados en el seguimiento de trayectorias de trazadores en las simulaciones en modo L y H realizadas con CUTIE.

Si bien en modo L los diagnósticos demostraron funcionar bien, obteniéndose, aproximadamente $\alpha_L \approx 1$, $\beta_L \approx 1/2$, y $H_L \approx 1/2$, en la simulación en modo H el único resultado que puede considerarse robusto es $H_H \approx 1/2$. Asumiendo el resultado del análisis de los tiempos de espera (ver 7.2.4) $\beta_H \approx 1/2$, se puede decir que los parámetros fraccionarios no cambian significativamente durante la transición L–H. Utilizando estos valores, y los tiempos de espera y saltos calculados al transformar la trayectoria en una tipo *CTRW* (ver 6.1.2), se ha calculado el coeficiente de difusión efectivo en modos L y H. Véase figuras 7.27.

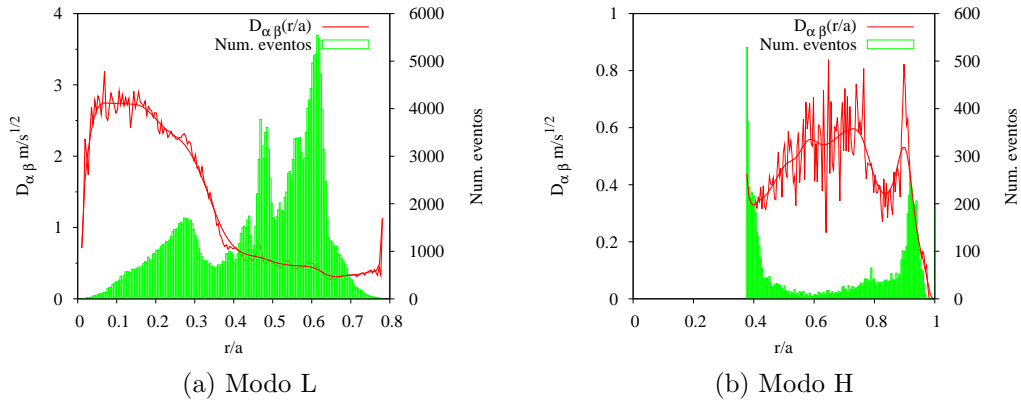


Figura 7.27: Perfiles de las cantidades $D_{\alpha,\beta}$ en modo L y H, junto con número de eventos.

En modo L, $D_{\alpha,\beta;L}$ decrece monótonamente (en la zona de interés $0.35 \lesssim r/a \lesssim 0.8$ para este caso) con r/a mientras que en modo H la curva $D_{\alpha,\beta;H}$ tiene una estructura más compleja, con un máximo en $r/a \sim 0.6$, justamente donde el número de atrapamientos y saltos es menor.

Aparentemente en la segunda simulación, al contrario que en modo L, existen dos posiciones privilegiadas que son en las que los trazadores tienden a permanecer. Dichas posiciones son los mínimos locales de $D_{\alpha,\beta;H}$ en $r/a \sim 0.4$ y en $r/a \sim 0.8$.

7.3.5. Impacto de los ELMs

Es interesante estudiar la sensibilidad de las trayectorias ante los ELMs cuando los trazadores se sitúan en la zona del pedestal en modo H.

Se muestran dos ejemplos en la figura 7.28.

Mientras que en zonas del plasma interiores al pedestal las trayectorias parecen obedecer al camino aleatorio, en la zona marcada con rayas azules el movimiento está dominado por las relajaciones ocasionadas durante los ELMs, con un periodo aproximado que coincide con τ_{ELM} (ver (4.21)).

Para más detalles se puede consultar la referencia [51].

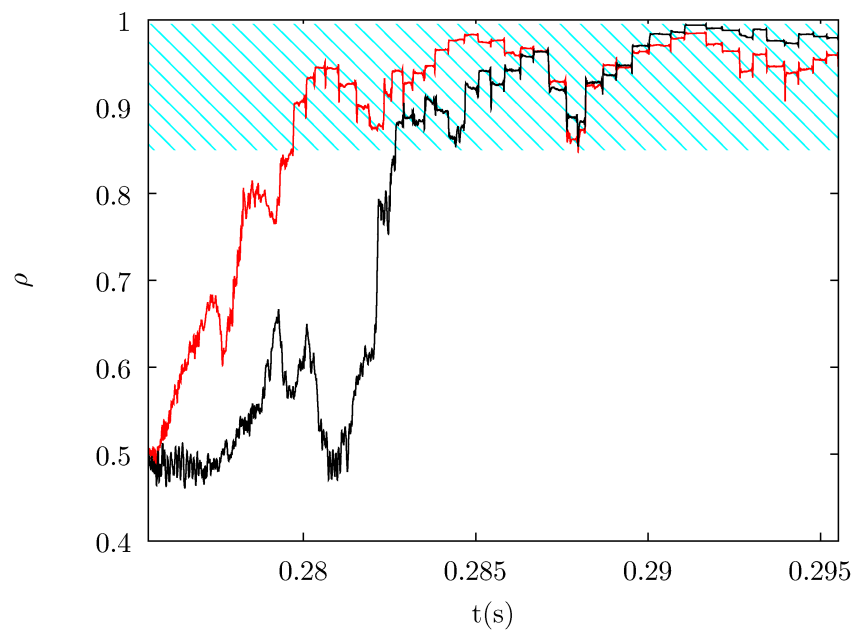


Figura 7.28: Trayectorias (componente radial) de dos trazadores en las inmediaciones del pedestal.

Capítulo 8

Interpretación de los resultados y Conclusiones

A lo largo de esta memoria se han presentado diversas técnicas para analizar el transporte radial de trazadores en dos simulaciones de plasmas del tokamak COMPASS-D, utilizando el código de turbulencia CUTIE. El objeto de tales técnicas no es otro que la caracterización cualitativa y cuantitativa de la naturaleza del transporte efectivo o global, en concreto enfocándolo desde el punto de vista del formalismo *CTRW*.

8.1. Características generales del estudio

Existen en la literatura científica numerosos estudios de similares características, donde se analiza la naturaleza del transporte en diversos escenarios pero siempre en las inmediaciones de cierto tipo de inestabilidades (de tipo ballooning [52], inestabilidades por intercambio [53], flujos de cizalla [54], ondas de deriva [55]...). La novedad aportada por este trabajo radica en dos de sus características:

1. Se trata de un estudio del transporte global, sin centrarnos, a priori, en regiones concretas del plasma asociadas a inestabilidades. Se caracteriza el transporte buscando los coeficientes autosimilares que describen el movimiento a nivel efectivo.
2. La simulación utilizada es más realista en el sentido de que simula varios tipos de inestabilidades (ver capítulo 4) activas en el plasma, tal y como sucede en experimentos.

Como hemos podido comprobar, el estudio ha sido restringido, por razones prácticas, a una región del plasma concreta, aproximadamente $0.3 \lesssim r/a \lesssim 0.8$. Pese a todo se trata de un rango suficientemente amplio como para que podamos decir que se ha hecho un análisis del transporte radial a nivel global.

8.2. Parámetros autosimilares

Al tratarse de un estudio global, ha de estar inherentemente condicionado por la presencia de barreras: tanto las barreras internas del plasma como los límites físicos del sistema. Esta circunstancia hace más difícil la interpretación de los resultados. A pesar de ello es posible sacar varias conclusiones de los análisis realizados.

8.2.1. Modo L

Comenzamos por el modo L. En esta simulación se han aplicado las técnicas descritas previamente para estudiar las trayectorias de los trazadores. Se pueden agrupar en dos grandes bloques, uno de análisis de funciones de distribución (puntos 1-4) y otro de correlaciones en la velocidad (5-7). Resumimos los resultados de las mismas:

1. La distribución radial: Se detectan dos factores importantes en el movimiento. En primer lugar existe una deriva hacia el exterior del plasma, y en segundo lugar, hay una barrera de transporte prácticamente infranqueable en la parte exterior. Pese a que con la estadística existente hay un elevado grado de dispersión, se detecta una ley de potencia en la cola “interna” de la distribución, con un decaimiento tal que $\alpha = 1.2 \pm 0.5$. Por los factores citados, no se detecta decaimiento algebraico en la cola exterior.
2. Distribución acumulativa (o función *rank*): Se observan las mismas características que en la anterior, aunque al no existir pérdida de información el resultado es más fiable: $\alpha = 1.43 \pm 0.11$.
3. Distribución del tamaño del paso: Para cierto valor del umbral de velocidades utilizado ($v_{th} = 300$ m/s) se detecta una cola algebraica con $\alpha = 1.20 \pm 0.25$. El efecto tamaño finito queda puesto de manifiesto, ya que acorta la parte de decaimiento algebraico, apareciendo un tramo final de la distribución que decae como una exponencial.
4. Distribución del tiempo de espera: Para el mismo umbral que en el punto anterior se obtiene una clara ley de potencia, $\beta = 0.51 \pm 0.05$. El efecto tamaño finito es mucho menor. Además, se ha obtenido una buena estimación del tiempo de decorrelación de la turbulencia, de alrededor de $90 - 100 \mu s$.
5. Funciones de Estructura: Existe una región de intervalos temporales intermedios, la mesoescala, donde se ha medido el exponente de Hurst, con el resultado promediado de $H = 0.452 \pm 0.019$. Además, se ha calculado de forma alternativa el tiempo de decorrelación de la turbulencia, de $30 \mu s$.

6. Rescaled Range: Los resultados son similares a los del punto anterior. $H = 0.54 \pm 0.05$ con un tiempo de decorrelación de la turbulencia $\tau = 100 \mu\text{s}$.
7. Velocidad Acumulativa: Se obtiene una distribución muy semejante a la del punto 1, compatible con la deriva y la barrera de transporte detectadas en dicho punto. La cola algebraica detectada en la parte de desplazamientos negativos indica que $\alpha = 1.10 \pm 0.20$.

Es decir, se obtiene un promedio $\alpha \sim 1.3$, $\beta \sim 0.5$ y $H \sim 0.5$, que indican que el transporte es, respectivamente, no local, no Markoviano y compatible con el difusivo.

De este análisis se desprende que el transporte radial de trazadores en el caso estudiado está mejor descrito por una ecuación de difusión fraccionaria (ver ecuación (3.14)) con $\alpha \sim 1.3$ y $\beta \sim 1/2$ que por la ecuación de difusión estándar (ver ecuación (2.31)).

A la hora de interpretar físicamente los resultados, se asocia parcialmente el valor no Gaussiano de α con los efectos de tipo “avalancha” detectados en la figura 4.6: oscilaciones de la densidad electrónica se propagan a velocidad constante desde el borde del plasma hacia el interior. Estos fenómenos sin duda influyen en el transporte radial de trazadores, puesto que las correlaciones de larga distancia detectadas tienen que ver con desplazamientos radiales con $\Delta(r/a) < 0$.

Por otro lado, la presencia de algunas barreras de transporte estaría relacionada con el valor no Markoviano de β . La más evidente es la zona de atrapamiento de $r/a \sim 0.8$ (ver figura 7.26a) que coincide con la superficie racional $q = 3$.

8.2.2. Modo H

En la simulación con el código funcionando en modo H, se han realizado los mismos análisis que en modo L.

Este estudio tiene interés en si mismo, por ser un análisis del transporte con una medida de los parámetros autosimilares globales y efectivos. Pero además, se trata de la primera comparación de este tipo entre dos simulaciones en modo L y modo H.

Los resultados de la aplicación de dichos métodos de análisis muestran que la distorsión ocasionada por el efecto tamaño finito es mayor que en modo L.

1. Distribución radial: Se detectan tanto la barrera de transporte de $r/a \sim 0.8$ como otra en $r/a \sim 0.3$. Por otra parte, la deriva radial detectada tiene el sentido opuesto a la de modo L. La cola de decaimiento lento que se detecta es por tanto la exterior. Sin embargo el efecto tamaño finito hace que la longitud de decaimiento algebraico sea muy corta y el resultado no concluyente. Además está casi fuera del rango de validez, con $\alpha \sim 0$.

2. Distribución acumulativa (o función *rank*): Se observan las mismas características apuntadas en el análisis de la distribución radial. El ajuste es mejor que en la PDF, y el resultado casi idéntico.
3. Distribución del tamaño del paso: El efecto de las barreras es muy distorsionador. El resultado obtenido de α es prácticamente Gaussiano y muy diferente a los dos análisis anteriores.
4. Distribución del tiempo de espera: Menor distorsión por el efecto tamaño finito. La longitud del ajuste es prácticamente una década, con un resultado similar al de la anterior simulación.
5. Funciones de Estructura: Se observan dos tipos de SF's, al haber diferencias importantes entre las que entran en la zona de $r/a \lesssim 0.35$ y las que no. En cualquier caso, se obtiene un resultado muy similar en H en ambos tipos, resultado que a su vez apenas cambia con respecto al modo L, $H \sim 1/2$. Además se ha observado que el tiempo de decorrelación de la turbulencia es un orden 3 menor que en modo L.
6. Rescaled Range: El resultado es similar al análisis análogo llevado a cabo en modo L, así como a las funciones de estructura del punto anterior. $H \sim 1/2$. Al igual que en el punto anterior, se detecta una disminución de orden 3 en el tiempo de decorrelación de la turbulencia.
7. Velocidad acumulativa: De manera paralela a la simulación en modo L, la curva obtenida se asemeja a la de la distribución radial, con un resultado $\alpha \sim 1$. No obstante, como en las demás medidas de α en modo H, la longitud de validez del ajuste de ley de potencia es insuficiente como para que el ajuste se pueda considerar suficientemente robusto.

La primera conclusión de este análisis es que las barreras de transporte ejercen una mayor influencia en el movimiento de los trazadores en la simulación en modo H. Más adelante incidiremos en este aspecto. La consecuencia de ello es la menor longitud de decaimiento algebraico observada en los diagnósticos en los que se miden las largas correlaciones radiales, i.e., en las mediciones de α . Los datos a partir de los cuales se obtiene dicho parámetro no son plenamente satisfactorios, de ahí que con distintos diagnósticos obtengamos valores que no son consistentes, al contrario que en modo L.

La deriva es ahora hacia el interior. Esto puede tener su explicación en la mayor magnitud de las perturbaciones de densidad propagándose hacia el interior detectados en la gráfica 4.16 al compararla con la 4.6. Es decir, ahora estas perturbaciones son más dominantes que en modo L. Estas perturbaciones se propagan hacia la barrera de transporte $q = 1$. La deriva hace que la posición media de

las partículas sea cada vez más cercana a la barrera de transporte que supone la superficie racional $q = 1$ (en $r/a \simeq 0.3$). La barrera de transporte importante más lejana a la posición media de los trazadores es la $q = 3$ (situada en $r/a \simeq 0.8$), por lo tanto las largas correlaciones sólo se pueden detectar si las partículas viajan en la dirección contraria a las perturbaciones de la gráfica 4.16.

Por otra parte, los diagnósticos para el cálculo de β y en H son más sólidos, pese a que el primero sólo ha sido medido con una técnica.

Los resultados son $\beta \sim 1/2$ y $H \sim 1/2$. De donde se deduce, a partir de la relación $H \equiv \beta/\alpha$, que $\alpha \sim 1$.

Con todo, y pese a las reservas con que hay que tomar los datos de que se dispone, los parámetros de difusión fraccionaria con que mejor se describiría el transporte en modo H son $\alpha = 1$ y $\beta = 1/2$.

8.3. Movimiento de trazadores

Además del estudio de los parámetros autosimilares para la detección de correlaciones, las trayectorias de los trazadores también ofrecen otros tipos de diagnóstico, que nos permiten entender mejor las diferencias en transporte radial entre ambas simulaciones, en modo L y el modo H.

1. El tamaño medio del paso es mayor en modo H (Fig. 7.25). Esto explica los problemas asociados al efecto tamaño finito y la distorsión que provoca en las distribuciones. No obstante, se observa que la difusión es mayor en modo L, puesto que las anchuras de las distribuciones radiales en ambas simulaciones son tales que la varianza en modo H es mayor en un factor 2 (ver figura 7.11). La aparente contradicción existente entre una mayor longitud de los pasos y la disminución de la difusividad no es tal: el aumento del tamaño de los pasos se ve contrarrestado por la importancia que en el transporte ganan los atrapamientos en modo H.
2. Los perfiles respectivos del tamaño medio de los pasos positivos y negativos muestra que el movimiento es altamente asimétrico en modo L, mientras que en modo H ambos perfiles son prácticamente iguales (Fig. 7.24). Esto se interpreta como consecuencia de la mayor localidad del transporte en modo H, de acuerdo con la idea de que las regiones de atrapamiento tienen un considerable impacto. El movimiento de partículas que quedan atrapadas está decorrelacionado con lo que ocurre en regiones del plasma alejadas. Este argumento se sostiene además con la presencia de zonas radiales “atractoras”, donde el coeficiente de difusión es localmente mínimo (véase figura 7.27).
3. La propagación hacia el interior de los eventos cuasi-periódicos (figuras 4.6, 4.16) tiene mayor velocidad en modo L que en modo H. Ésto sugiere que

en el primer caso los perfiles son más rígidos (*stiff* en inglés). No obstante, la mayor distancia recorrida por estas propagaciones en modo H indica que la zona de rigidez es más ancha en modo H. Esto estaría de acuerdo con un transporte menos local en modo L, al menos en la zona de rigidez. El transporte está condicionado pero no determinado por éstos eventos cuasi-periódicos, puesto que no es balístico (lo cual supondría que $H \simeq 1$).

4. El análisis R/S muestra que el punto de separación entre la primera y segunda pendiente logarítmica es, en modo H, un tiempo tres veces menor que su análogo en modo L (figuras 7.8 y 7.20). La situación es similar en las funciones de estructura de tipo I. El tiempo en el que se produce el cambio de pendiente en modo H es un tercio del correspondiente en modo L (figuras 7.7 y 7.19a). Este resultado se interpreta como una reducción del tiempo de decorrelación de la turbulencia como consecuencia de la transición a modo H, lo que estaría de acuerdo con algunas evidencias experimentales y predicciones teóricas.
5. Por último se constata la importancia en el transporte que tienen los ELMs, a nivel local. En modo H, se observa que el movimiento de los trazadores en la zona del pedestal y fuera de ella es muy diferente (ver figura 7.28). En la primera, el movimiento está dominado por los ELMs. El movimiento de las partículas consiste en una serie de bruscos desplazamientos, separados por tiempos de espera que coinciden con el periodo de los ELMs. Esto se ve reflejado en el pico de la distribución de tiempos de espera, en $\Delta t \sim 0.4$ ms (ver figura 7.17). Además, en la distribución del tamaño de los pasos, cuando la velocidad umbral es suficientemente alta, aparece un pico, que asociamos al movimiento de trazadores en la zona del pedestal, puesto que se trata de velocidades muy altas que no se dan en el resto del dominio $0.35 < r/a < 1$ estudiado, y el pico tiene lugar en $\Delta \rho \sim 0.06 - 0.07$ (ver figura 7.15), coincidiendo bien con los desplazamientos que se observan en la gráfica 7.28.

En otro orden de cosas, se ha observado que las barreras internas más efectivas, por ser difícilmente franqueables por los trazadores, son aquéllas situadas exactamente sobre superficies racionales de bajo orden, en $q = 1$ y $q = 3$. Este fenómeno no puede ser pasado por alto puesto que guarda cierto paralelismo con el llamado modelo $q - comb$ [56]. Este modelo fenomenológico ha sido propuesto para explicar el transporte de energía a través de superficies racionales. Al igual que en el $q - comb$, pero en el plano del transporte de partículas, se detecta que éste es sensible a las superficies racionales de bajo orden. Al menos las superficies $q = 1$ y $q = 3$ tienen un claro impacto en el transporte.

8.4. Conclusiones

A partir de los análisis realizados se ha comprobado que el transporte radial de trazadores en la simulación de COMPASS-D con CUTIE en modo L no es local ni Markoviano. Como consecuencia de ello, el transporte efectivo no está bien descrito por la ecuación de difusión estándar.

Por otra parte, se ha comprobado que, desde el punto de vista de los resultados de los parámetros autosimilares, el transporte prácticamente no cambia, cuando se produce la transición a confinamiento mejorado. Si bien es importante destacar que dichas mediciones son menos fiables en modo H que en modo L. Por ejemplo, la determinación de α se ve dificultada por el fuerte impacto que las barreras tienen en el transporte. La no determinación de dicho parámetro sugiere la menor presencia de correlaciones de larga distancia, es decir, el transporte es más local en la simulación en modo H.

Este estudio es la primera comparación de este tipo llevada a cabo entre simulaciones de modo H y modo L.

No obstante, si que se han observado otros aspectos importantes que permiten diferenciar el transporte radial de trazadores antes y después de la transición. Algunas de éstas observaciones, como la simetría entre pasos positivos/negativos, o la anchura de las distribuciones radiales, sugieren que el movimiento en modo H se aproxima más al transporte local que en modo L, lo cual explica la ausencia de resultados concluyentes en la medida del parámetro α , mientras que β no cambia significativamente debido a la existencia de regiones de atrapamiento ($q = 1$ y $q = 3$).

8.5. Proyectos Futuros

8.5.1. Trazadores en experimentos reales y simulaciones más realistas

Hasta ahora no se han realizado experimentos reales con trazadores. La principal razón estriba en las importantes dificultades técnicas que ello implicaría. Experimentalmente, el seguimiento de trayectorias en dispositivos reales de fusión por confinamiento magnético es un reto para la física del plasma. Es muy complicado poder seguir trayectorias completas de partículas individuales para la aplicación de las técnicas aquí expuestas. Sin embargo, algunos estudios como el análisis del propagador se pueden realizar sin necesidad de seguir a cada trazador. Actualmente se empieza a trabajar con el seguimiento de nubes de impurezas introducidas en el plasma mediante, por ejemplo, la inyección de “pellets”. Ésto ha sido posible en parte gracias a los progresos realizados en los últimos años con la utilización de cámaras rápidas como diagnóstico del plasma [57, 58]. El seguimiento de una

nube de partículas con una radiación distinta que la del plasma de fondo supone una medida de la distribución radial de esas partículas, lo cual puede permitir, con suficiente resolución, la detección de colas algebraicas.

Como se ha dicho, en caso de llevarse a cabo tales experimentos, los trazadores deberían ser impurezas, detectables y distinguibles del resto del plasma. Por tanto, es de gran interés la realización de estudios del tipo de los aquí presentados con partículas distintas del fluido. Se trataría por lo tanto de estudios utilizando partículas con propiedades físicas propias, i.e. carga eléctrica y masa, que las diferencien de los iones que forman parte del plasma. Por la ecuación de la fuerza de Lorentz, la dinámica de las partículas ha de depender de la razón carga/masa. Aunque el comportamiento sería diferente que los iones del gas base, se espera extraer información relevante.

8.5.2. Topología y Transporte

En el marco del proyecto científico “Influencia de los flujos globales y su topología sobre el transporte en plasmas turbulentos”, financiado por el ministerio de Ciencia e Innovación, se pretende, mediante el estudio de trayectorias de partículas en simulaciones, estudiar la relación entre la naturaleza del transporte de partículas y la topología del flujo. Para ello se utilizará una simulación del flujo inducido en un plasma toroidal dominado por una inestabilidad por gradiente de presión (“pressure-gradient-driven”). Dependiendo del número de modos toroidales que intervengan en la inestabilidad, la estructura topológica del flujo generado será más o menos compleja. El objetivo de este estudio es establecer una relación entre ciertos invariantes topológicos (los números de Betti) del flujo y las características del transporte observado. El entendimiento de esta topología puede llevar a una mejor comprensión del origen del comportamiento autosimilar con $\alpha < 2$ y $\beta < 1$.

8.5.3. Estudios Neoclásicos

En la teoría neoclásica se trabaja con una ecuación cinética (DKE, del inglés “Drift Kinetic Equation”) que describe el movimiento en plasmas confinados magnéticamente de forma aproximada, promediando los detalles microscópicos en escalas del orden del radio de giro. Como se ha explicado con anterioridad, esta teoría no consigue describir correctamente el transporte en un gran número de casos. Se ha observado que experimentalmente el transporte es varios órdenes de magnitud mayor que las predicciones de los modelos.

En la teoría neoclásica, la DKE se simplifica promediando sobre superficies de flujo. Además, se “linealiza” utilizando tanto la energía como la posición radial como parámetros, es decir, se realiza un tratamiento monoenergético y un *ansatz* local, respectivamente. Esta última aproximación permite describir el transporte

con ecuaciones diferenciales ordinarias. Se ha demostrado que eliminando esta última aproximación [59], la teoría neoclásica sí que puede reproducir ciertos efectos no difusivos y no locales, y que por lo tanto es una mejor descripción de los plasmas reales.

Por lo tanto un interesante proyecto futuro sería la realización de estudios de transporte de trazadores en simulaciones neoclásicas en las que se relaje la condición de *ansatz* local para caracterizar el transporte en dichas condiciones. Al no conocer las ecuaciones diferenciales que modelan el transporte, este estudio se llevaría a cabo siguiendo las trayectorias utilizando técnicas de Montecarlo.

Apéndice A

Transporte de trazadores en ESEL

En este apéndice se explican las acciones llevadas a cabo para estudiar el transporte en el código de turbulencia ESEL. Por tratarse de un análisis preliminar se presenta en el formato de apéndice. La conclusión, a priori desfavorable, es que es imposible determinar con las técnicas utilizadas los parámetros α , β , H . Sin embargo, no por ello debe considerarse un estudio en vano, puesto que se conocen bien las razones por las que tales medidas no se han podido completar con éxito: el fuerte efecto que las barreras del sistema tienen en las trayectorias de los trazadores y el tipo de transporte, ya que una vez analizado se deduce que, globalmente, no puede ser correctamente descrito mediante la difusión fraccionaria.

A.1. El código ESEL

El código trabaja en geometría “slab” en dos dimensiones, donde simula la turbulencia generada por inestabilidades de tipo intercambio en tokamaks en la parte exterior del plasma. El dominio radial simulado se separa en tres zonas claramente diferenciadas: El borde del plasma, todavía dentro de la última superficie de flujo cerrada, el Scrape-Off Layer y la pared del plasma. El código describe de forma autoconsistente el transporte intermitente de partículas y calor, al incluir la evolución (autoconsistente) de los perfiles termodinámicos y de flujo. El código modela de manera no lineal y acoplada los campos de densidad de partículas, vorticidad y temperatura electrónica, teniendo en cuenta la curvatura del campo magnético en el borde del plasma.

La turbulencia tiene su origen en las microinestabilidades de tipo intercambio que aparecen con motivo de la inhomogeneidad del campo magnético, y se mantiene debido a los fuertes gradientes de presión que hay en el borde del plasma. La intermitencia, que se manifiesta a través de la emisión de estructuras de tipo “blob”, se ve ocasionada por relajaciones en los perfiles. De hecho, como resultado de la simulación de la turbulencia de intercambio, es un código muy apropiado

para el estudio de la formación y transporte de las estructuras tipo “blob”.

Sin embargo, la autoconsistencia presente en ESEL lo convierte en un código interesante para estudiar el transporte de trazadores: Se espera que la autoconsistencia, “captada” por las partículas, se refleje en sus trayectorias, y que por lo tanto, su movimiento no sea aleatorio sino autosimilar.

Más información del código puede encontrarse en las referencias [60–62].

A.2. Trazadores en la simulación

En la simulación estudiada, el sistema consta de 150×100 puntos en las direcciones $x - y$ (radial y poloidal, respectivamente). En la dirección radial el dominio está dividido en tres zonas, el borde del plasma está en $0 < x < 50$, en $x = 50$ está la última superficie de flujo cerrada, el SOL se encuentra en $50 < x < 100$ y por último la pared en $100 < x < 150$. Por pared se entiende la zona de las superficies de flujo abiertas que, a diferencia del SOL, alcanzan la pared física del sistema simulado.

En la dirección poloidal (y) el sistema es periódico.

Los tracers son lanzados simultáneamente en la misma posición radial $x = 25$ con posición poloidal inicial aleatoria. El número total de partículas es 20000. La duración de la simulación es de 200000 unidades de tiempo de ESEL. Es aproximadamente unas 5-6 veces el periodo de formación de los “blobs”.

Los trazadores son partículas sin masa ni carga eléctrica, que no interactúan con la turbulencia en el sentido de que ésta no se ve afectada por su presencia. Su velocidad viene dada por la velocidad del fluido proporcionada por el código. La rejilla (150×100) es suficientemente fina como para que la interpolación *spline* en 2D capte correctamente la turbulencia.

En la figura A.1 se muestran algunos ejemplos de trayectorias obtenidas.

A.3. Diagnósticos

Los diagnósticos utilizados son la mayor parte de los explicados en el capítulo 6: Distribuciones del tamaño del paso y del tiempo de espera, y análisis de la correlación en las velocidades con las técnicas R/S y las funciones de estructura.

Los otros diagnósticos, el análisis del propagador (y la función rank) y la distribución de la velocidad acumulativa, son descartados por el fuerte impacto del efecto tamaño finito sobre los resultados de los mismos.

A.3.1. Distribución del tamaño del paso

El método (ver 6.1.2) para obtener los pasos y los tiempos de espera es el mismo que en el estudio del transporte de trazadores en CUTIE: se utiliza un valor umbral

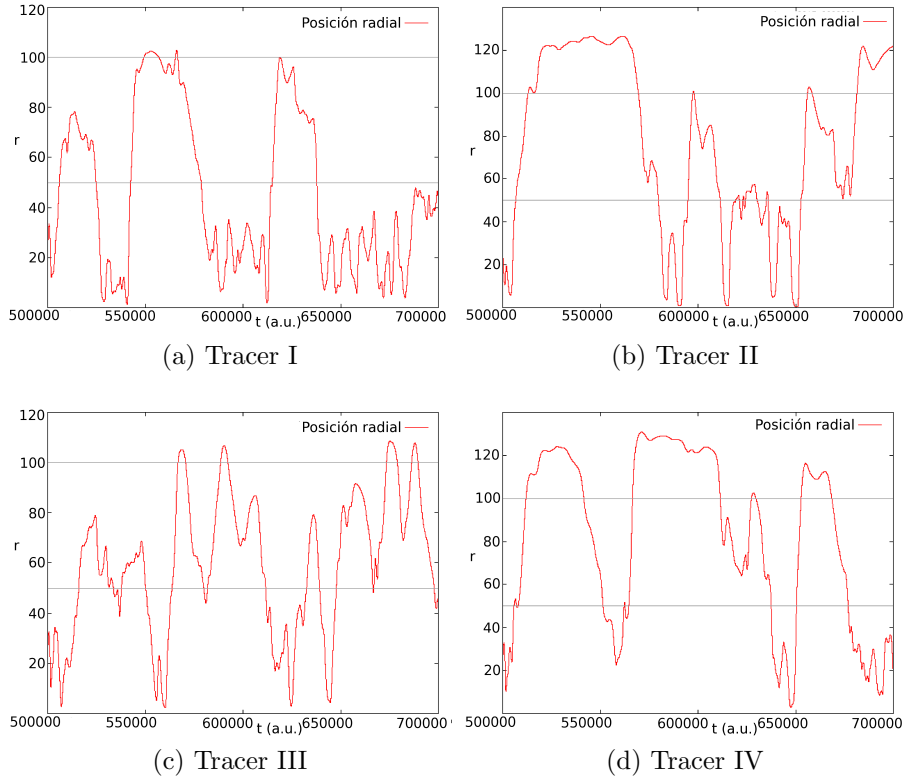


Figura A.1: Componente radial de la trayectoria de distintos trazadores en ESEL.

de la velocidad radial para descomponer la trayectoria en una secuencia de pasos y esperas. La función de distribución de la probabilidad ha sido calculada para distintos valores del umbral v_{th} . La finalidad no es otra que obtener una distribución donde el decaimiento algebraico sea lo más nítido posible, para facilitar el cálculo de α . El resultado se muestra en la figura A.2.

Si la trayectoria de las partículas se puede describir como un *CTRW*, se espera que la distribución del tamaño del paso tenga un decaimiento algebraico con un valor de α comprendido en el rango $0 < \alpha < 2$. Para el ajuste es deseable que se cumplan algunas condiciones: que la longitud de dicho decaimiento sea de una década, que χ^2 alcance un valor óptimo, que se minimice la sensibilidad del resultado con v_{th} . En este caso no es posible detectar una ley de potencia que cumpla estas exigencias.

En esta simulación se observa que los tracers protagonizan excursiones radiales muy largas (prácticamente del tamaño del sistema).

En el caso de ESEL estas excursiones largas tienen lugar cuando un tracer forma parte de una nueva estructura “blob”. Los “blobs” tienen su origen cerca

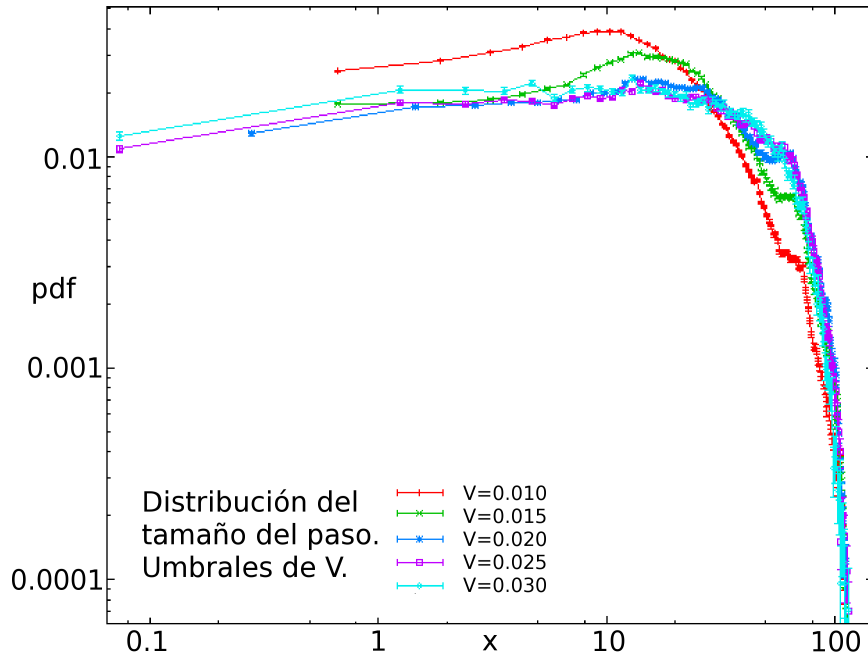


Figura A.2: Distribuciones del tamaño del paso en ESEL para distintos valores del umbral de velocidad. Escala Logarítmica

de la última superficie de flujo cerrada y se propagan radialmente hasta la región de la pared. Entonces, las partículas que se encuentran dentro de una de estas estructuras, experimentan largos desplazamientos radiales. Esto quiere decir que la distribución del tamaño del paso está fuertemente condicionada por las barreras del sistema, y que el efecto tamaño finito provoca una distorsión de la misma que hace inviable el cálculo.

Esto también se deduce de la observación de las figuras A.1: El movimiento de los trazadores consiste en muchos saltos relativamente pequeños ($\Delta x \sim 10$, i.e. 10 veces menores que el dominio radial simulado) junto con unos pocos grandes saltos. Cada vez que se genera un “blob”, éste se propaga sin encontrar oposición alguna, y desaparece en la pared. Sin embargo quedan allí las partículas que ha arrastrado, porque la velocidad radial en las inmediaciones de la pared es cero, cuando el “blob” se ha “disuelto”. Por lo tanto, la estructura de partículas queda allí hasta que el siguiente “blob” alcanza la zona, y los tracers que estaban en la pared son impulsados hacia la última superficie cerrada, en un nuevo desplazamiento largo.

En resumen, existen pasos pequeños y pasos grandes truncados por las barreras, pero no pasos de tamaño intermedio. Se puede decir que el transporte tiene una componente balística, con la limitación impuesta por el tamaño del sistema, y otra componente local, con una escala de longitud dominante $\Delta x \sim 10$. En estas

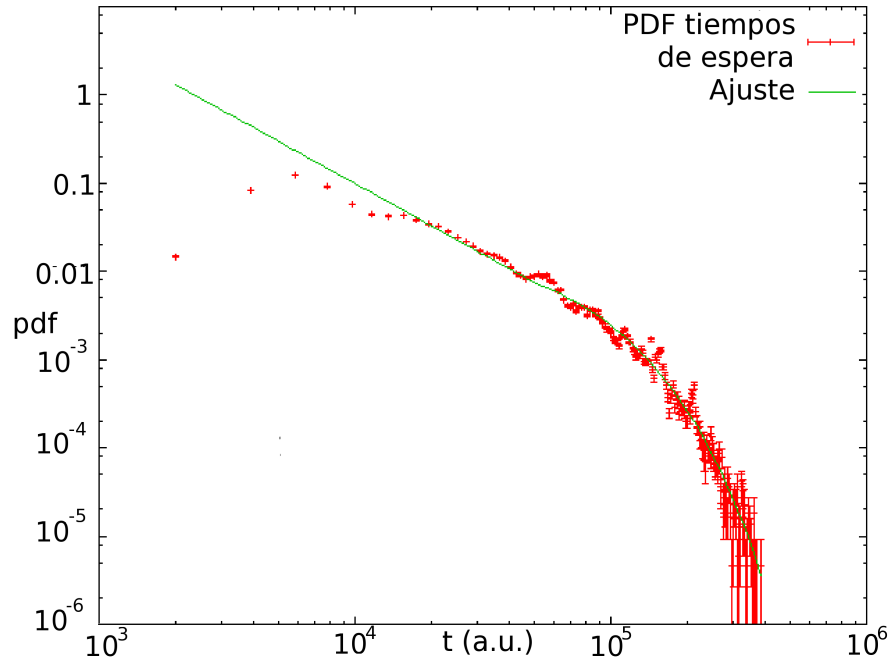


Figura A.3: Distribuciones del tiempo de espera en ESEL para $v_{th} = 0.020$. Escala Logarítmica

condiciones el transporte no está gobernado por distribuciones de tipo Lévy no Gaussianas, y por lo tanto no es esperable la detección de colas algebraicas.

A.3.2. Distribución del tiempo de espera

Este análisis viene asociado al anterior, puesto que ambas distribuciones se obtienen a partir de la misma separación del movimiento en pasos y tiempos de espera.

Como es sabido, estas distribuciones no acusan tan fuertemente el efecto tamaño finito, puesto que la duración de los tiempos de espera más largos está limitada por la duración de la simulación.

En nuestra simulación, para $v_{th} = 0.020$ la distribución resultante $\psi(\Delta t)$ (ver gráfico A.3) puede ajustarse a una función con dos tramos conexos, uno de ley de potencia y otro de decaimiento exponencial, como los respectivos ajustes en CUTIE para el mismo análisis (ver ecuación (7.5)).

Estrictamente la distribución no decae como una línea recta en escala logarítmica, pero consideramos que el ajuste funciona relativamente bien. El dominio durante el cual consideramos que decae algebraicamente es aproximadamente una

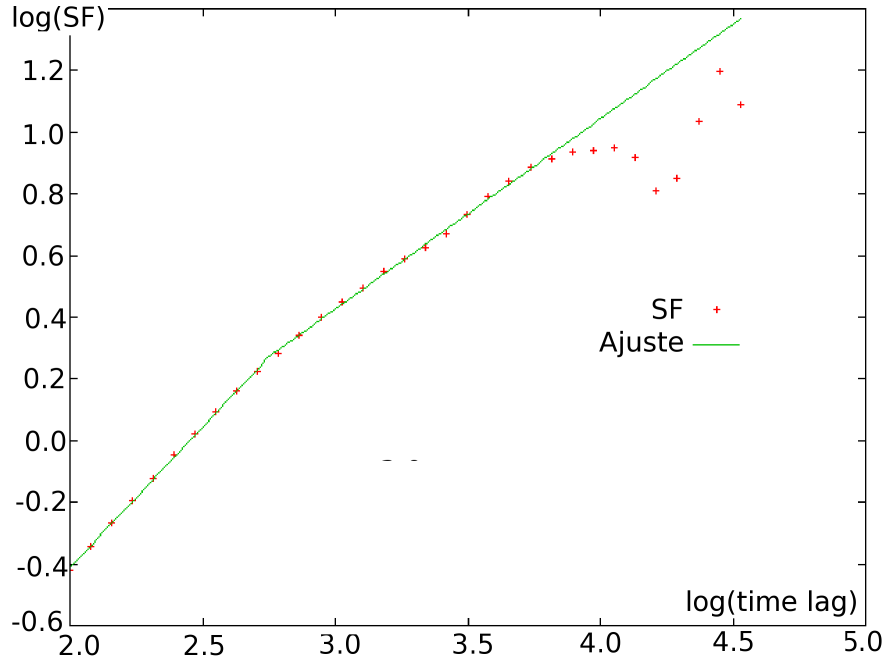


Figura A.4: Ejemplo de Función de estructura de orden $q = 1$ en ESEL. Escala Logarítmica

década, y el resultado de la medición de β es:

$$\beta = 0.7 \pm 0.2 \quad (\text{A.1})$$

Dentro de su error, el valor obtenido es muy cercano a la unidad, es decir, con la distribución del tiempo de espera de tipo Markoviano.

A.3.3. Funciones de Estructura

Las funciones de estructura han sido también utilizadas para analizar las correlaciones existentes en la velocidad de las partículas y medir el exponente de Hurst H .

Se ha llevado a cabo el análisis con diferentes órdenes, $q = 1, 2, \dots, 5$. En la figura A.4 se muestra un ejemplo.

La curva presenta la estructura esperable en estos análisis: una zona de crecimiento balístico ($H \sim 1$) para tiempos muy cortos, una zona de saturación ($H \sim 0$) para tiempos comparables con el tiempo de simulación, y en los tiempos intermedios la zona de la mesoescala, donde medimos H . El paso de la zona balística a la mesoescala se produce en $t \sim 5 \cdot 10^2 \sim 10^3$ Eut (Unidades de tiempo en ESEL). Esta sería, por lo tanto, una buena estimación del tiempo de decorrelación de la turbulencia en la simulación.

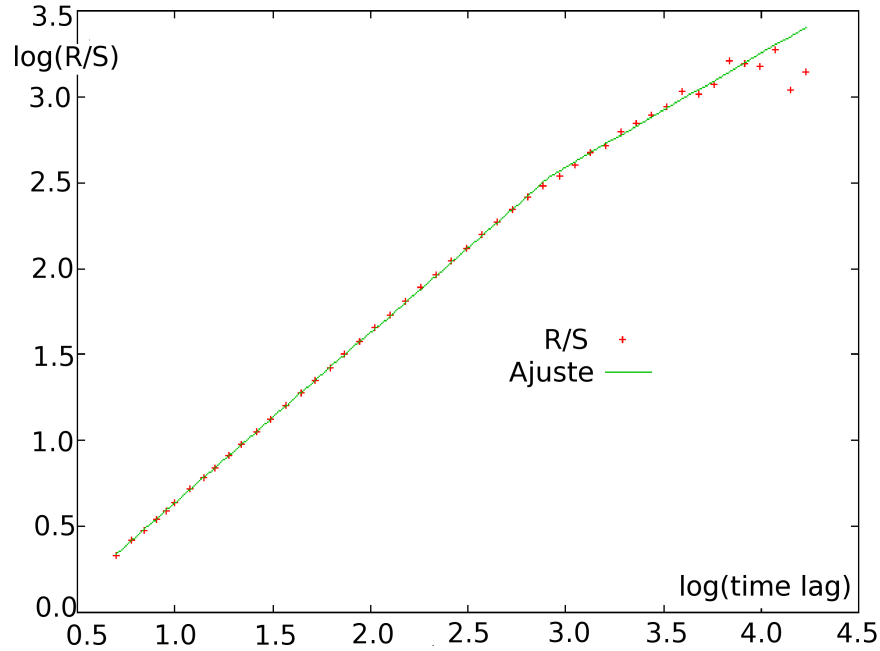


Figura A.5: Ejemplo de curva R/S en ESEL. Escala Logarítmica

Promediando sobre el total de los $2 \cdot 10^4$ trazadores, obtenemos:

$$\langle H \rangle = 0.63 \pm 0.13 \quad (\text{A.2})$$

Sin embargo, los resultados obtenidos para órdenes $q > 1$ no son concluyentes y, por extensión, dejan en entredicho el de $q = 1$. Se observa un excesivo decrecimiento de H con q , lo cual indicaría un fuerte grado de multi-fractalidad. Una simulación más larga debería confirmar este punto.

A.3.4. Rescaled Range

Este método también ha sido utilizado para medir la correlación Lagrangiana de la velocidad radial. Midiendo la cantidad R/S para cada tracer, se consigue una estimación de H . Se muestra un ejemplo, para una trayectoria escogida al azar, de la curva $R/S(\tau)$ en la figura A.5:

La curva tiene una forma similar a la exhibida por la Función de Estructura representada en A.4, es decir, una zona con $H \sim 1$ para intervalos temporales bajos, una zona intermedia con $H \sim 0.6$ y finalmente la zona de saturación con $H \sim 0$. La conexión entre las secciones primera y segunda tiene lugar en $t \sim 10^3$ Eut, valor similar al obtenido en las funciones de estructura de orden 1 y que por

lo tanto consideramos un resultado válido para el tiempo de decorrelación de la turbulencia.

Promediando sobre el conjunto de $2 \cdot 10^4$ trazadores, obtenemos que:

$$\langle H \rangle = 0.63 \pm 0.09 \quad (\text{A.3})$$

Este valor coincide con el resultado de (A.2).

A.4. Conclusiones

Se han utilizado diversas técnicas de diagnóstico para estudiar el transporte radial de partículas trazadoras en ESEL. Al tratarse de un código que simula el borde del plasma, el efecto tamaño finito es más importante que en CUTIE, con la consiguiente distorsión de las distribuciones de la probabilidad. Así ha sido constatado, por ejemplo, en el análisis de la distribución del tamaño del paso, que no decae como una ley de potencia. Sin embargo, el código incluye mecanismos de autorregulación, con lo que se espera que fenómenos propios del transporte no difusivo (largas correlaciones) hagan acto de presencia, así como las distribuciones de Lévy.

El estudio de la distribución del tiempo de espera parece funcionar aunque el resultado de β obtenido no tiene la misma robustez que los resultados (7.6) y (7.16), por la menor longitud del ajuste y por no poder ser validado utilizando otros datos (por ejemplo $\beta = H \cdot \alpha$).

Contando con su error, casi es 1, valor Markoviano.

En cambio el resultado de H ha sido calculado utilizando dos técnicas independientes que estudian las correlaciones en la velocidad. Aunque el resultado en las funciones de estructura parece necesitar una confirmación con ulteriores análisis, es relevante su coincidencia con el resultado del R/S , diagnóstico que funciona mejor en esta simulación. Teniendo en cuenta ambos diagnósticos estimamos $\langle H \rangle = 0.63 \pm 0.11$.

Nuestros análisis sugieren que la medición independiente de α no es factible, al menos con el método utilizado.

Tenemos, por lo tanto, los resultados de β y H con sus respectivos errores asociados, lo que sugeriría que, en el contexto del Continuous Time Random Walk con difusión fraccionaria, $\alpha \approx 1.1 \pm 0.4$, según se deduce de la relación entre los tres parámetros. Sin embargo se ha de tener en cuenta que, tras estudiar los resultados obtenidos, no parece que la difusión fraccionaria proporcione una descripción correcta del transporte global en ESEL.

La forma de la distribución del tamaño de los pasos, junto con el aspecto de las trayectorias radiales, sugieren que el transporte no es de tipo Lévy, y por lo tanto no existiría tal índice de decaimiento α . El transporte parece ser una combinación

de transporte local y movimientos de tipo balístico, cada uno con una escala característica propia, y que por lo tanto no se puede describir como un CRTW con una misma función de distribución. El transporte local se produce dentro de la última superficie cerrada de flujo, con una escala de transporte característica ($\Delta x \sim 10$), mientras que los movimientos balísticos de los trazadores, con una escala de longitud característica diferente ($\Delta x \sim 100$, la distancia entre la última superficie de flujo cerrada y la barrera del sistema) se observan cuando el movimiento de éstos está asociado a la presencia de estructuras de tipo blob que se propagan hasta el borde del sistema a velocidad prácticamente constante.

A pesar de que no haya una sola escala dominante en el transporte, el transporte no es autosimilar porque no intervienen en él las escalas intermedias. Además, la mayor de las escalas características, parece estar limitada por el tamaño del sistema.

No obstante, estas conclusiones deberían ser confirmadas con posteriores estudios. Sería conveniente trabajar con un dominio radial más amplio para confirmar el efecto que las barreras del transporte tienen en el movimiento, y comprobar que al cambiar las dimensiones del transporte, la escala característica de la parte balística del transporte cambia, mientras que el canal de transporte local no se ve afectado.

Bibliografía

- [1] J. D. Lawson, *Proc. Phys. Soc. B* **70**, 6 (1957).
- [2] I. Y. Tamm and A. Sakharov, *Theory of a Magnetic Thermonuclear Reactor*, Pergamon, Oxford (1961).
- [3] R. A. Cairn, *Plasma Physics*, Blackie and Son, Glasgow (1985).
- [4] L. Spitzer *Physics of Fluids* **1**, 253 (1958).
- [5] H. Zohm *Summer University for Plasma Physics* Ch. 5, IPP Munich (2006).
- [6] R. J. Goldston and P. H. Rutherford *Introduction to Plasma Physics* IPO Publishing, Bristol and Philadelphia (1995).
- [7] A. J. Wootton, B. A. Carreras, H. Matsumoto, K. McGuire, W. A. Peebles, Ch. P. Ritz, P. W. Terry and S. J. Zweben, *Phys. Fluids B* **2**, 2879 (1990).
- [8] ASDEX Team, *Nucl. Fusion* **29**, 1959 (1989).
- [9] F. Wagner, J. Baldzuhn, R. Brakel, R. Burhenn, V. Erckmann, T. Estrada, P. Grigull, H. J. Hartfuss, G. Herre, M. Hirsch, J. V. Hofmann, R. Jaenicke, A. Rudyj, U. Stroh, A. Weller and the W7-AS TEAMS, *Plasma Phys. Control. Fusion* **36**, A61 (1994).
- [10] R. J. Groebner, *Phys. Fluids* **5** (7), 2343 (1993).
- [11] E. Montroll and G. Weiss, *J. Math. Phys.* **6**, 167 (1965).
- [12] W. Shugard and H. J. Reiss, *J. Math. Phys.* **65**, 2827 (1976).
- [13] B. Ph. van Milligen, R. Sánchez and B. Carreras, *Phys. Plasmas* **11**, 2272 (2004).
- [14] E. Scalas, T. Kaizoji, M. Kirchler, J. Huber and A. Tedeschi, *Physica A* **366**, 463 (2006).
- [15] A. Helmstetter and D. Sornette, *Phys. Rev. E* **1**, 1104 (2002).

-
- [16] V. Kenkre, E. Montroll and M. Shlesinger, *J. Stat. Phys.* **9**, 45 (1973).
- [17] J. Klafter and R. Silbery, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 55 (1980).
- [18] E. W. Montroll and M. F. Schlesinger, in *Studies in Statistical Mechanics*, edited by M. Lebowitz and E. W. Montroll. North-Holland, Amsterdam, (1984).
- [19] C. M. Grinstead and J. L. Snell (1997).
- [20] B. Ph. van Milligen, I. Calvo and R. Sánchez, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 215004 (2008).
- [21] B. Carreras, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **25**, 1281 (1997).
- [22] R. Balescu, *Aspects of anomalous transport in plasmas*, Institute of Physics, University of Reading, Berkshire (2005).
- [23] R. Balescu, *Transport processes in plasmas. (V. 2: Neoclassical Transport theory*, North-Holland, Amsterdam, (1988).
- [24] K. W. Gentle et al., *Phys. Plasmas* **2**, 2292 (1995).
- [25] P. Politzer et al., *Phys. Plasmas* **9**, 1962 (2002).
- [26] Luce et al., *Phys. Rev. Lett.* **1**, 62 (1992).
- [27] R. Sánchez, B. Ph. van Milligen, D. Newman and B. Carreras *Phys. Rev. Lett.* **90**, 185005 (2003).
- [28] B. Ph. van Milligen, B. Carreras and R. Sánchez, *Phys. Plasmas* **11**, 3787 (2004).
- [29] R. Balescu, *Phys. Rev. E* **51**, 4807 (1995).
- [30] V. B. Gnedenko, *Uspekhi. Matem. Nauk* **3**, 187 (1948).
- [31] I. Podlubny, *Academic Press* (1998).
- [32] R. Metzler and J. Klafter, *Phys. Rep.* **339**, 1 (2000).
- [33] G. Zaslavsky *Phys. Rep.* **371**, 416 (2002).
- [34] R. Sánchez, B. Ph. van Milligen and B. Carreras, *Phys. Plasmas* **12**, 056105 (2005).
- [35] I. Calvo, B. Carreras, R. Sánchez and B. Ph. van Milligen, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 13511 (2007).

-
- [36] I. Calvo, R. Sánchez, B. Carreras and B. Ph. van Milligen, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 230603 (2007).
- [37] I. Calvo, L. García, B. Carreras, R. Sánchez and B. Ph. van Milligen, *Phys. Plasmas* **15**, 042302 (2008).
- [38] A. Thyagaraja, *Plasma Phys. Control. Fusion* **42** B255 (2000).
- [39] A. Thyagaraja, P. J. Knight and N. Loureiro, *Eur. J. Mech/Fluids* **23**, 475 (2004).
- [40] A. Thyagaraja, P. J. Knight, M. R. de Baar, G. M. D. Hogeweyj and E. Min, *Phys. Plasmas* **12**, 090907 (2005).
- [41] M. R. de Baar, A. Thyagaraja, G. M. D. Hogeweyj, P. J. Knight and E. Min, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 035002 (2005).
- [42] P. Helander and D. J. Sigmar, *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [43] R. D. Hazeltine and H. D. Meiss, *Plasma Confinement*, Addison-Wesley, New York (1992).
- [44] R. Pánek, O. Bilyková, V. Fuchs, M. Hron, P. Cháska, P. Pavlo, J. Stöckel, J. Urban, V. Weinzettl, J. Zajac and F. Záček, *Czech. J. Phys.* **56** (suppl. B.) B125 (2006).
- [45] A. Thyagaraja, M. Valovic and P. J. Knight, *Phys. Plasmas* **17** 042507 (2010).
- [46] R. Sánchez, B. Carreras, and B. Ph. van Milligen *Phys. Rev. E* **71** 011111 (2005).
- [47] B. Carreras, B. Ph. van Milligen, M. A. Pedrosa et al., *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4438 (1998).
- [48] R. Sánchez, B. Carreras, D. Newman and B. Ph. van Milligen, *Phys. Rev. E* **74**, 016305 (2006).
- [49] C. X. Yu, M. Gilmore et al., *Phys. Plasmas* **10**, 2772 (2003).
- [50] G. Sánchez Burillo, B. Ph. van Milligen and A. Thyagaraja, *Phys. Plasmas* **16**, 042319 (2009).
- [51] G. Sánchez Burillo, B. Ph. van Milligen and A. Thyagaraja, *Phys. Plasmas* **17**, 052304 (2010).
- [52] L. García and B. Carreras, *Phys. Plasmas* **13**, 022310 (2006).

-
- [53] D. del Castillo-Negrete, B. Carreras and V. Lynch, *Phys. Plasmas* **11**, 3854 (2004).
- [54] R. Sánchez, D.E. Newman, J.N. Leboeuf, V.K. Decyk and B.A. Carreras, *Phys. Rev. Lett.* **101** 165001 (2008).
- [55] J. Mier, R. Sánchez, L. García, D. Newman and B. Carreras, *Phys. Plasmas* **15** 112301 (2008).
- [56] N. J. Lopes Cardozo and G. M. D. Hogeweyj et al., *Plasma Phys. Control. Fusion* **39**, B203 (1997).
- [57] J. A. Alonso, S. J. Zweben, P. Carvalho, J. L. de Pablos, E. de la Cal, C. Hidalgo, T. Klinger, B. Ph. van Milligen, R. J. Maqueda, M. A. Pedrosa, C. Silva, M. Spolaore, H. Thomsen and the TJ-II team, *Plasma Phys. Control. Fusion* **48** B465 (2006).
- [58] D. Carralero, M. Shoji, E. de la Cal, B. Ph. van Milligen, J. L. de Pablos, C. Hidalgo and H. Yamada, “Observations of Filamentary Structures on the Boundary Region of the LHD Stellarator”, *Accepted for publication in Contributions to Plasma Physics* (2010).
- [59] V. Tribaldos and J. Guasp, *Plasma Phys. Control. Fusion* **47** 545 (2005).
- [60] O. E. Garcia, V. Naulin, A. H. Nielsen and J. Juul Rasmussen, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 165003 (2004).
- [61] O. E. Garcia, J. Horacek, R. A. Pitts, A. H. Nielsen, W. Fundamenski, J. P. Graves, V. Naulin and J. Juul Rasmussen, *Plasma Phys. Control. Fusion* **48** (2006).
- [62] O. E. Garcia, V. Naulin, A. H. Nielsen and J. Juul Rasmussen, *Phys. Plasmas* **12** 062309 (2005).