Puntos óptimos y puntos de silla en los juegos bipersonales de suma cero con varios objetivos

I. **Introducción**

II. **Juegos escalares bipersonales de suma cero**

III. **Generalización al caso de múltiples objetivos**

I. Introducción

Desde que, a mediados del presente siglo, el concepto de juego fue introducido por el matemático J. von Newman y el economista O. Morgenstern en su libro «Theory of games and economic behaviour»[7], un gran número de investigadores ha centrado sus esfuerzos en estudiar las propiedades de los distintos tipos de juegos. La mayor parte de esta investigación ha sido aplicada a juegos en los que las pérdidas o ganancias son unidimensionales, representando normalmente costos. Sin embargo, en la realidad la elección de una alternativa suele implicar pérdidas o ganancias simultáneas en más de un atributo: piénsese que no sólo el coste, sino atributos tales como el riesgo, el tiempo, la calidad, etc., determinan la bondad de una decisión. Resulta claro, por tanto, que el estudio de juegos con objetivos múltiples permite la construcción de modelos más ajustados a la realidad.

La Programación Multiobjetivo, dedicada al estudio de programas matemáticos con varias funciones objetivo, ha conocido un desarrollo espectacular en los últimos veinte años. De la amplia bibliografía al respecto, hemos creído conveniente destacar las referencias[1,4,6,] en donde se exponen con detalle las diferentes técnicas que permiten encontrar y caracterizar los diferentes tipos de óptimos. Desgraciadamente el desarrollo de la Teoría de Juegos Multiobjetivo ha sido bastante más limitado, y ni siquiera se dispone en el momento actual de una definición de óptimo universalmente aceptada. Destacamos, en esta materia, las referencias bibliográficas[2,3,5,8].

Motivados por las razones que acabamos de exponer, en el presente artículo pretendemos profundizar en el estudio de los Juegos Multiobjetivo en su versión más importante: los Juegos Bipersonales de suma cero. Dividiremos nuestra exposición en dos partes: en la primera comentamos sucintamente las definiciones y propiedades de los Juegos Escalares Bipersonales de suma cero, haciendo especial hincapié en el concepto de punto de silla. En la segunda parte, proponemos y discutimos varias definiciones alternativas de óptimo de un juego multiobjetivo bipersonal y de suma cero; posteriormente, generalizamos al caso multiobjetivo la noción de punto de silla y estudiamos las relaciones entre los distintos tipos de óptimos y de puntos de silla; finalmente, establecemos un resultado que permite obtener óptimos de un juego multiobjetivo a partir de los óptimos de ciertos juegos escalares asociados a él.

II. JUEGOS ESCALARES BIPERSONALES DE SUMA CERO

La Teoría de Juegos se ocupa de resolver los problemas de optimización en los que intervienen varios decisores, cuyos intereses están en principio enfrentados. De entre todos los tipos de juegos posibles, sin duda los más simples y mejor conocidos son los JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA CERO, caracterizados por las dos hipótesis siguientes:

a) Existen dos jugadores A y B; el jugador A realiza su elección dentro del conjunto $X^{\cdot}$, y el jugador B dentro del conjunto Λ.
b) Existe una función

$$U: X^{\cdot} \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

que representa la pérdida del jugador A y la ganancia del jugador B cuando ambos realizan la elección $(x,\lambda) \in X^{\cdot} \times \Lambda$.

Obsérvese que las pérdidas de un jugador coinciden con las ganancias del otro, razón por la que el juego es llamado «de suma cero». Obviamente, pueden estar medidas en unidades monetarias o de cualquier otro tipo de bien.

El primer problema planteado por este tipo de juegos radica en la definición de elección óptima para los jugadores A y B, asumiendo una actuación precavida por parte de ambos jugadores, convendremos que toda elección que minimiza la máxima pérdida del jugador A es un óptimo para A, y que toda elección que maximiza la mínima ganancia del jugador B es un óptimo para B. Los criterios anteriores son conocidos respectivamente como criterios de MINIMAX y de MAXIMIN, y dan lugar a las siguientes definiciones:

— $\times_0 \epsilon X^{\cdot}$ es un OPTIMO PARA EL JUGADOR A si es solución del programa

$$\underset{\times\, \epsilon\, X^{\cdot}}{\text{Min}} \quad (\text{Sup}\ \{\ U(\times,\lambda) : \lambda\ \epsilon \Lambda\})$$

— $\lambda_0 \epsilon\ \Lambda$ es un OPTIMO PARA EL JUGADOR B si es solución del programa

$$\underset{\lambda\, \epsilon \Lambda}{\text{Max}} \quad (\ \text{Inf}\ \{\ U(\times,\lambda) : \times\ \epsilon\ X^{\cdot}\ \}\ )$$

Un concepto que ha demostrado ser sumamente útil en la Teoría de Juegos Bipersonales de Suma Cero es el de Punto de Silla. Se dice que $(\times_0, \lambda_0)\ \epsilon\ X^{\cdot} \times \Lambda$ es un PUNTO DE SILLA cuando se verifica que

$$U(\times_0, \lambda) \leqslant U(\times_0, \lambda_0) \leqslant U(\times, \lambda_0), \quad \forall\ \times \epsilon\ X^{\cdot}, \ \forall\ \lambda\ \epsilon \Lambda$$

Es posible demostrar que, si $(\times_0, \lambda_0)\ \epsilon\ X^{\cdot} \times \Lambda$ es un punto de silla, entonces $\times_0$ es óptimo para el jugador A y λ_0 es óptimo para el jugador B (verificándose además la coincidencia entre la pérdida óptima de A y la ganancia óptima de B). La existencia de un punto de silla en un juego constituye, pues, una condición suficiente para la existencia de óptimos del juego para ambos jugadores.

Cuando en un juego existe un punto de silla, se dice que el juego está TOTALMENTE DETERMINADO; existen varios tipos de juegos totalmente determinados, pero quizás los más importantes y conocidos de todos ellos son los JUEGOS RECTANGULARES (véase [1]).

En el siguiente apartado discutiremos varias formas posibles de generalizar los conceptos que acabamos de exponer al caso de juegos con varios objetivos. (Para simplificar dificultades técnicas se toma la hipótesis de que todos los supremos utilizados son alcanzables).

III. Generalización al caso de múltiples objetivos

Supongamos de nuevo un juego en el que dos jugadores A y B realizan sus elecciones en los conjuntos X y Λ respectivamente. Si existen *p* funciones

$$U_1,\ldots, U_p : X^- \times \Lambda \to \mathbb{R}$$

representando las pérdidas del jugador A y las ganancias del jugador B en cada uno de *p* posibles objetivos cuando ambos realizan la elección $(x, \lambda) \in X^- \times \Lambda$, estaremos ante un JUEGO MULTIOBJETIVO BIPERSONAL DE SUMA CERO. Obsérvese que la ganancia de cada jugador respecto a cada uno de los objetivos coincide con la pérdida del otro. Obsérvese, también, que tomando $p=1$ obtenemos los Juegos Bipersonales de Suma Cero estudiado en el apartado anterior.

Estudiaremos a continuación varias posibles definiciones de óptimo en este tipo de juego, que respondan en la medida de lo posible a criterios de actuación «precavidos» por parte de los jugadores.

Considerando en primer lugar las decisiones del jugador A, comenzaremos definiendo una elección $x_0 \in X^-$ como óptima, cuando la elección de cualquier otro punto $x_1 \in X^-$ podría implicar, para ciertas elecciones $\lambda_1 \in \Lambda$ del jugador B, pérdidas simultáneas en todos los objetivos. Formalmente: $x_0 \in X^-$ es OPTIMO PARA EL JUGADOR A si,

$$\forall x_1 \in X^- \exists \lambda_1 \in \Lambda \text{ tal que } U_i(x_0,\lambda_1) \geqslant U_i(x_0, \lambda),\ \forall \lambda \in \Lambda, \forall_i=1\ldots p.$$

En lo sucesivo utilizaremos la siguiente notación: dados dos vectores $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^p$, diremos que,

$$\bar{x} \leqslant \bar{y} \Leftrightarrow x_i \leqslant y_i,\ \forall_i=1\ldots p.$$
$$\bar{x} < \bar{y} \Leftrightarrow \bar{x} \leqslant \bar{y},\ \bar{x} \neq \bar{y}.$$

En consecuencia, considerando la función vectorial,

$$\bar{U} = (u_1\ldots u_p) : X^- \times \Lambda \to \mathbb{R}^p,$$

la definición anterior podrá expresarse de la siguiente manera:

[A1] $x_0 \in X^-$ es OPTIMO PARA EL JUGADOR A si,

$\forall \times_1 \in X^- \exists \lambda_1 \in \Lambda$ tal que $\overline{U} (\times_1, \lambda_1) \leqslant \overline{U} (\times_o, \lambda), \forall \lambda \in \Lambda$.

En la práctica los requisitos exigidos en la definición [A1] resultan a menudo demasiado exigentes, e implicarían inexistencia de óptimos en numerosos juegos multiobjetivo. En la siguiente definición rebajaremos tales requisitos, definiendo una elección $\times_o \in X^{\cdot}$ como óptima cuando no sea posible encontrar un $\lambda \in \Lambda$ que implique pérdidas superiores en cada uno de los objetivos que las que hubiera originado otra posible elección $x_1 \in X^{\cdot}$. Formalmente:

$\times_o \in X^{\cdot}$ es OPTIMO PARA EL JUGADOR A cuando no existen $\lambda \in \Lambda$, $\times_1 \in X^{\cdot}$ tales que,

$\overline{U} (X_1, \lambda_1) < \overline{U}(\times_o, \lambda), \forall \lambda_1 \in \Lambda$

o equivalente;

[A2] $\times_o \in X^{\cdot}$ es OPTIMO PARA EL JUGADOR A si,

$\forall \times_1 \in X^{\cdot} \ \exists \ \lambda_1 \in \Lambda$ tal que $\overline{U}(\times_1, \lambda_1) \nless \overline{U}(\times_o, \lambda), \forall \lambda \in \Lambda$

(en donde «$\nless$» significa «no $<$ que»)

Es evidente que todo óptimo según la definición [A1] lo es también según la definición [A2], y que no es cierta la implicación contraria, por lo que las condiciones exigidas en [A2] son más débiles que las exigidas en [A1].

También es fácil comprobar que ambas definiciones [A1] y [A2] son generalizaciones el caso multiobjetivo de la definición de óptimo de un juego escalar estudiada en el apartado segundo. En efecto, si $p = 1$ ambas definiciones se reducen a la siguiente:

$\forall \times_1 \in X^{\cdot} \ \exists \ \lambda_1 \in \Lambda$ tal que $U (\times_o, \lambda) \leqslant U(\times_1, \lambda_1), \forall \lambda \in \Lambda$

lo cual es equivalente a que

$$\sup_{\lambda} \{ U(\times_o, \lambda) \} \leqslant \sup_{\lambda} \{ U(\times_1, \lambda) \}, \quad \forall \times_1 \in X^{\cdot}$$

es decir, a que x_0 sea solución de programa

$$\min_{x \in X^{\cdot}} \left(\sup_{\lambda} \{ U(x,\lambda) \}\right),$$

que es precisamente la definición de óptimo del jugador A en un juego escalar.

Todavía es posible plantear más definiciones razonables de óptimo de un juego multiobjetivo. Por ejemplo, tiene sentido definir a una elección $x_0 \in X^{\cdot}$ como elección óptima del jugador A cuando cualquier otra elección $x \in X^{\cdot}$ lleve a pérdidas mayores en todos los objetivos, siempre que no varíe la elección $\lambda \in \Lambda$ del jugador B. Formalmente:

[A3] $x_0 \in X^{\cdot}$ es OPTIMO PARA EL JUGADOR A si,

$\forall x \in X^{\cdot}$ y $\forall \lambda \in \Lambda$, se tiene que $\overline{U}(x_0, \lambda) \leqslant \overline{U}(x, \lambda)$.

Por último en la siguiente definición se relajan las condiciones exigidas en la anterior:

[A4] $x_0 \in X^{\cdot}$ es OPTIMO PARA EL JUGADOR A si,

$\forall x \in X^{\cdot}$ y $\forall \lambda \in \Lambda$, se tiene que $\overline{U}(x_0, \lambda) \not> \overline{U}(x, \lambda)$.

Desgraciadamente, las dos últimas definiciones no son generalizaciones al caso multiobjetivo de la definición de óptimo de un juego escalar. En efecto si $p=1$ la definición anterior se convierte en

$\forall x \in X^{\cdot}$ y $\forall \lambda \in \Lambda$, $U(x_0, \lambda) \leqslant U(x, \lambda)$, lo que implica evidentemente, que $\sup_{\lambda} \{ U(X_0, \lambda) \} \leqslant \sup_{\lambda} \{ U(x, \lambda) \}$, $\forall x \in \overline{X}$, pero la implicación contraria no es, en general, cierta. En consecuencia, únicamente consideraremos como óptimos de un juego multiobjetivo a los que verifiquen la definición [A2] (o el caso particular [A1]).

Por otro lado, las definiciones anteriores se refieren únicamente a las elecciones óptimas del jugador A. Á continuación enunciaremos las definiciones análogas referidas al jugador B:

[B1] $\lambda_0 \in \Lambda$ es OPTIMO PARA EL JUGADOR B si,

$\forall \lambda_1 \in \Lambda \quad \exists\, x_1 \in X$ tal que $\overline{U}\,(x_1, \lambda_1) \leqslant \overline{U}\,(x, \lambda_0), \quad \forall x \in X$

[B2] $\lambda_0 \in \Lambda$ es OPTIMO PARA EL JUGADOR B sí,

$\forall \lambda_1 \in \Lambda \quad \exists\, x_1 \in X$ tal que $\overline{U}\,(x_1, \lambda_1) \not> \overline{U}\,(x, \lambda_0), \quad \forall x \in X$

Es inmediato demostrar que la condición [B2] es más débil que [B1] y que ambas son generalizaciones al caso multiobjetivo de la definición de óptimo de un juego escalar expuesta en el apartado segundo (a saber, que λ_0 sea la solución del programa

$$\underset{\lambda \in \Lambda}{\mathrm{Max}} \; \left(\underset{x}{\mathrm{Inf}} \left\{ U\,(x, \lambda) \right\} \right)$$

Para distinguir entre ambos tipos de óptimos, llamaremos OPTIMOS FUERTES a los definidos mediante [A1] y [B1], y OPTIMOS DEBILES a los definidos mediante [A2] y [B2].

A continuación extenderemos al caso multiobjetivo el concepto de Punto de Silla y estudiaremos las relaciones entre los distintos tipos de puntos de silla y los distintos tipos de óptimos.

Recordemos que, en el caso de un juego escalar bipersonal de suma cero, un punto $(x_0, \lambda_0) \in \overline{X} \times \Lambda$ se dice PUNTO DE SILLA si se verifica que,

$U\,(x_0, \lambda) \leqslant U\,(x_0, \lambda_0) \leqslant U\,(x, \lambda_0), \quad \forall x \in X$ y $\forall \lambda \in \Lambda$

Recordemos, asimismo, que la existencia de un punto de silla en un juego escalar es una condición suficiente para que existan x_0 y λ_0 soluciones del juego para los jugadores A y B respectivamente.

Una generalización evidente de concepto de punto de silla al caso de juegos con objetivos múltiples es la siguiente:

[S1] $(x_0, \lambda_0) \in \overline{X} \times \Lambda$ es PUNTO DE SILLA si se verifica que,

$$\overline{U}\,(x_0, \lambda) \leqslant \overline{U}\,(x_0, \lambda_0) \leqslant \overline{U}\,(x, \lambda_0), \quad \forall x \in X \text{ y } \forall \lambda \in \Lambda$$

Es fácil comprobar que existe una relación entre los puntos de silla y los óptimos de un juego multiobjetivo, que generaliza a la existente en el caso escalar, siempre que consideremos como óptimos multiobjetivo a los definidos mediante [A1] [B1] (es decir a los óptimos fuertes).

En efecto, si (x_o, λ_o) es punto de silla según la definición [S1] entonces,

— $\forall x_1 \in X$ se verifica $\overline{U}(x_o, \lambda) \leqslant \overline{U}(x_1, \lambda_o)$, $\forall \lambda \in \Lambda$.

luego x_o es óptimo (fuerte) del jugador A.

— $\forall \lambda_1 \in \Lambda$ se verifica $\overline{U}(x_o, \lambda_1) \leqslant \overline{U}(x, \lambda_o)$ $\forall x \in X$.

luego λ_o es óptimo (fuerte) del jugador B.

En consecuencia, la definición [S1] de punto de silla constituye una condición suficiente para la existencia de óptimos fuertes en un juego multiobjetivo.

Si en la definición [S1] cambiamos «$\leqslant$» por «$\not>$», obtendremos una definición de punto de silla, que también generaliza el caso escalar, y que es menos exigente que la anterior:

[S2] $(x_o, \lambda_o) \in \overline{X} \times \Lambda$ es PUNTO DE SILLA si se verifica que,

$$\overline{U}(x_o, \lambda) \not> \overline{U}(x_o, \lambda_o) \not> \overline{U}(x, \lambda_o), \ \forall x \in X \text{ y } \forall \lambda \in \Lambda .$$

Sin embargo, la no transitividad de la relación «$\not>$» impide que la existencia de un punto de silla en el sentido [S2] implique la existencia de óptimos débiles del juego multiobjetivo (óptimos definidos mediante [A2] y [B2].

Una tercera definición de punto de silla, que sí implica la existencia de óptimos débiles, es la siguiente:

[S3] $(x_o, \lambda_o) \in X \times \Lambda$ es PUNTO DE SILLA si se verifica que,

$$\overline{U}(x_o, \lambda) \not> \overline{U}(x, \lambda_o), \ \forall x \in X \text{ y } \forall \lambda \in \Lambda.$$

Comprobemos, en primer lugar, que la definición [S3] constituye una generalización de la definición de punto de silla en el caso escalar: en efecto, si es $p=1$ [S3] equivale a,

$$U(x_o, \lambda) \leqslant U(x, \lambda_o), \ \forall x \in X \text{ y } \forall x \ \forall \lambda \in \Lambda,$$

y por tanto,

$U(\times_o, \lambda)_o) \leqslant U(\times, \lambda_o), \ \forall \times \in X$; y $U(\times_o, \lambda) \leqslant U(\times_o, \lambda_o), \ \forall \lambda \in \Lambda$,

luego

$U(\times_o, \lambda) \leqslant U(\times_o, \lambda_o) \leqslant U(\times, \lambda_o), \ \forall \times \in X$ y $\forall \lambda \in \Lambda$,

además si,

$(\times_o, \lambda_o)$ es punto de silla según [S3], entonces;

— $\forall \ \times_1 \in X$ se verifica $\overline{U}(\times_o, \lambda) \not> \overline{U}(\times_1 . \lambda_o), \ \forall \lambda \in \Lambda$.

luego $\times_o$ es óptimo (débil) del jugador A.

— $\forall \lambda_1 \in \forall$ se verifica $\overline{U}(\times_o, \lambda_1) \not> \overline{U}(\times, \lambda_o), \ \forall \times \in X$,

luego λ_o es óptimo (débil) del jugador B.

En consecuencia, la definición [S3] de punto de silla constituye una condición suficiente para la existencia de óptimos débiles en un juego multiobjetivo.

Después de haber estudiado los distintos tipos de óptimos y puntos de silla de un juego bipersonal de suma cero con objetivos múltiples, concluiremos exponiendo un método que permite obtener óptimos débiles del juego a partir de los óptimos de ciertos juegos escalares asociados con él.

Consideremos p números reales $\mu_1 \ldots \mu_p > 0$, y planteemos un juego «escalarizado» asociado al juego multiobjetivo, en el que el jugador A pierde

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i U_i(\times, \lambda)$$

y el jugador B gana la misma cantidad, cuando ambos realizan la elección $(\times, \lambda) \in X \times \Lambda$.

Evidentemente, $\times_o \in X$ será solución del juego escalar para el jugador A cuando $\forall x_1 \in X \ \exists \ \lambda_1 \in \Lambda$ tal que,

$$\sum_{1}^{p} \mu_i U_i (\times_1, \lambda_1) \geqslant \sum_{1}^{p} \mu_i U_i (\times_o, \lambda), \ \forall \lambda \in \Lambda,$$

y en tal caso no puede suceder que,

$$U_1 (\times_1, \lambda_1) \leqslant (\times_o, \lambda) \ldots U_p (\times_1, \lambda_1) \leqslant U_p (\times_o, \lambda), \forall \lambda \in \Lambda,$$

siendo al menos una desigualdad estricta. Por tanto,

$$\overline{U} (\times_1, \lambda_1) \nless \overline{U} (\times_o, \lambda), \ \forall \lambda \in \Lambda,$$

por lo que $\times_o$ resulta ser óptimo débil del juego multiobjetivo para el jugador A.

En definitiva, si $\times_o$ es óptimo para A de un juego escalarizado mediante ciertos $\mu_1 \ldots \mu_p > 0$, también será óptimo débil para A del juego multiobjetivo.

Evidentemente, es posible establecer un resultado análogo referido a los óptimos del jugador B.

Mediante el método que acabamos de exponer no es posible, en general, encontrar todos los óptimos del juego multiobjetivo. En sucesivos artículos esperamos profundizar en el estudio de las relaciones existentes entre los óptimos de un juego multiobjetivo y de los infinitos juegos escalarizados asociados con él.

Alejandro BALBAS DE LA CORTE
Antonio HERAS MARTINEZ
Obdulia SAMAMED RODRIGUEZ
Universidad Complutense

BIBLIOGRAFIA

BALBAS, A. y GIL FANA, J. A., *Programación Matemática*, Madrid 1990, p. 249.

BERGSTRESSER, K. y YU, P. L., «Domination structures and Multicriteria problems in n-person games», en *Theory and Decision*, 8 (1977) 5-48.

COOK, W. D., «Zero-Sum games with multiple goals», en *Naval Research Logistics Quarterly*, 23 (1976) 615-622.

GOICOECHEA, A., HANSEN, D. y DUCKSTEIN, L., *Multiobjetive Decision Analysis with Engineering and Business Applications*, New York 1982.

HANNAN, E. L., «Reformulating zero-sum games with multiple goals», en *Naval Research Logistics Quarterly*, 29 (1982) 113-118.

HERAS, A., *Programación Multiobjetivo estática y dinámica. Aplicaciones a la Economía y a la Empresa* (tesis doctoral), Madrid 1990.

VON NEWMANN, J. y MORGENSTERN, O., *Theory of Games and Economic Behaviour*, New York 1944.

ZELENY, M., «Games with multiple payoffs», en *International Journal of Game Theory*, 4 (1976) 179-191.