El uso de bases y *frames* en teoría de muestreo

por

Antonio G. García

Resumen. En este artículo se trata de la recuperación de $x \in \mathcal{H}$, siendo $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, a partir de la sucesión de escalares $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ obtenida mediante una sucesión dada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$. El exigir que se cumpla el concepto de ℓ^2-estabilidad nos lleva directamente a la definición de *frame* en $\mathcal{H}$, siendo las bases ortonormales y las bases de Riesz dos casos particulares. Después de una breve excursión por las propiedades más importantes de los *frames*, y de su contrapartida en el caso de bases ortonormales y de bases de Riesz, nos centraremos en el caso en que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de funciones y la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ consiste en muestras de x y/o de ciertas funciones relacionadas con ella. Como ilustración de la teoría anterior obtendremos teoremas de muestreo en los espacios clásicos de Paley–Wiener, así como en otros espacios invariantes por traslación en $L^2(\mathbb{R})$, i.e., subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ generados por las traslaciones en los enteros de una cierta función φ de $L^2(\mathbb{R})$.

1. Planteamiento del problema

Un problema muy frecuente en teoría de la señal, que nos va a servir para motivar nuestra discusión, es el siguiente: Dada una señal x en un cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (en general, de energía finita, i.e., perteneciente al espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, ya que la energía de una señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede estimarse a partir de $E_f := \|f\|^2$), se muestrea utilizando un operador de muestreo lineal y acotado $\mathcal{M}$,

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty} . \end{array}$$

La sucesión $\{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ es la información de la señal x que se utilizará para almacenarla y, eventualmente, transmitirla a través de un cierto canal. Cada componente de la aplicación anterior, $x \mapsto \mathcal{M}x(n)$, será un funcional lineal y acotado; por el teorema de representación de Riesz, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $x_n \in \mathcal{H}$ tal que $\mathcal{M}x(n) = \langle x, x_n\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. La cuestión radica en qué propiedad debe verificar la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ para que el receptor pueda recuperar la señal x, de manera estable (concepto que será precisado más adelante), a partir de la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$.

En primer lugar, si queremos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ determine unívocamente cada elemento x de $\mathcal{H}$, deberemos pedir que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea un *sistema* *completo* en $\mathcal{H}$, es decir, el único vector de $\mathcal{H}$ ortogonal a todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea el vector nulo. Aunque sabemos que en este caso se verifica que $\overline{\text{span}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathcal{H}$ (i.e., las combinaciones lineales finitas de los elementos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ son densas en el espacio $\mathcal{H}$), no se conoce, en general, ninguna manera practicable de recuperar x a partir de la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$. Por tanto, a la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ deberemos exigirle alguna condición adicional, por ejemplo, el concepto de ℓ^2-estabilidad que introducimos a continuación de manera intuitiva: Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es ℓ^2-*estable* en $\mathcal{H}$ si para todo $x, y \in \mathcal{H}$ se verifica

$$\|\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} - \{\langle y, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \text{ «pequeño» } \iff \|x-y\|_{\mathcal{H}} \text{ «pequeño»}\,.$$

El concepto de ℓ^2-estabilidad nos lleva al de *frame* en un espacio de Hilbert, concepto éste introducido por Duffin y Shaeffer en [7]:

Definición. *Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un* frame *en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ si existen dos constantes positivas $0 < A \leq B$ (llamadas cotas* frame*) tales que*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \quad \textit{para todo } x \in \mathcal{H}\,. \tag{1}$$

Asociado a un *frame* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$, se define el operador *preframe*:

$$\begin{array}{rccc} T: & \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & \{c_n\}_{n=1}^{\infty} & \longmapsto & \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\,. \end{array} \tag{2}$$

Este operador está bien definido y es acotado con $\|T\| \leq \sqrt{B}$. De hecho, un operador como éste está bien definido y es continuo si y sólo si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Bessel, es decir, se cumple la desigualdad de la derecha en la definición (1) de frame (ver [4, p. 52]). Su operador adjunto T^* está dado por

$$\begin{array}{rccc} T^*: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

ya que

$$\langle T\{c_n\}, x\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, x \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \overline{\langle x, x_n\rangle}_{\mathcal{H}} = \langle \{c_n\}, T^* x\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})}\,.$$

En la siguiente sección haremos una breve exposición de las propiedades más importantes de los *frames* que necesitaremos en lo que sigue. Intentaremos que sea lo más autosuficiente posible de cara al resto del trabajo. Por economía expositiva, introduciremos directamente las bases ortonormales y las bases de Riesz en un espacio de Hilbert como casos particulares de *frames*.

2. Principales resultados de la teoría de frames

Las propiedades más importantes de los *frames* en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se derivan de las propiedades del *operador frame* que se define como $S := TT^*$, i.e.,

$$\begin{array}{rccl} S: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & x & \longmapsto & Sx = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n \,. \end{array}$$

Las propiedades más importantes del operador S se pueden resumir como:

1. $S = TT^*$ es un operador acotado al ser composición de operadores acotados; además, $\|S\| \leq B$.
2. S es un operador positivo ($S \geq 0$) ya que $\langle Sx, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Teniendo en cuenta la relación de orden en los operadores positivos ($S \leq R$ si y sólo si $R - S \geq 0$), la definición de *frame* se puede expresar como $AI \leq S \leq BI$.
3. S es un operador autoadjunto ya que $S^* = (TT^*)^* = (T^*)^* T^* = TT^* = S$. También se podría comprobar directamente que $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.
4. S es un operador invertible ya que $\|I - B^{-1}S\| < 1$. En efecto, por ser $I - B^{-1}S$ un operador autoadjunto, se tiene que (ver [2, p. 378])
$$\|I - B^{-1}S\| = \sup_{\|x\|=1} \big|\langle (I - B^{-1}S)x, x \rangle\big| \leq \frac{B - A}{B} < 1 \,.$$
La teoría de las series de Neumann (ver, por ejemplo, [2, p. 315]) nos dice que $I - (I - B^{-1}S) = B^{-1}S$ es invertible; además, $S^{-1} = B^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (I - B^{-1}S)^k$.
5. La sucesión $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es otro *frame* en $\mathcal{H}$, llamado *frame dual canónico* de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, cuyo operador frame es, precisamente, S^{-1}.
Veamos que $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un *frame* en $\mathcal{H}$: Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\langle x, S^{-1}x_n \rangle = \langle S^{-1}x, x_n \rangle$, ya que el operador S^{-1} también es autoadjunto, se verifica que
$$A\|S^{-1}x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, S^{-1}x_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle S^{-1}x, x_n \rangle|^2 \leq B\|S^{-1}x\|^2 \,, \quad x \in \mathcal{H} \,,$$
de donde se deduce el resultado teniendo en cuenta que $\|S^{-1}x\| \geq \|x\|/\|S\|$ y que $\|S^{-1}x\| \leq \|S^{-1}\|\|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Calculemos ahora su *operador frame*:
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, S^{-1}x_n \rangle S^{-1}x_n &= S^{-1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, S^{-1}x_n \rangle x_n\Big) = S^{-1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \langle S^{-1}x, x_n \rangle x_n\Big) \\ &= S^{-1}\big(S(S^{-1}x)\big) = S^{-1}x \,, \quad x \in \mathcal{H} \,. \end{aligned}$$
Las cotas *frame* óptimas de $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ son $1/B$ y $1/A$ si lo son A y B de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ver [4, p. 90]).

6. Para cada elemento $x \in \mathcal{H}$, a partir de las igualdades $x = S^{-1}Sx = SS^{-1}x$ se deducen los desarrollos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle S^{-1} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, S^{-1} x_n \rangle x_n \,. \tag{3}$$

El primer desarrollo en (3) nos da una manera de recuperar x a partir de la sucesión $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$, en el supuesto de que conocemos la sucesión $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$. En general, esta manera de recuperar x no es la única posible como pondremos de manifiesto más adelante. No obstante, disponemos del siguiente algoritmo para el caso en que no sea posible utilizar el operador S^{-1}:

Algoritmo frame: El denominado *algoritmo frame* [7], nos permite recuperar $x \in \mathcal{H}$, a partir de la información conocida $\mathcal{A}x := \frac{2}{A+B} Sx$, mediante el límite de la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{H}$ generada de manera recursiva como

$$\begin{cases} y_1 = \mathcal{A}x \\ y_n = y_{n-1} + \mathcal{A}(x - y_{n-1}) \quad \text{para } n \geq 2 \,. \end{cases}$$

En efecto, se verifica que

$$\|I - \mathcal{A}\| = \sup_{\|x\|=1} \big|\langle (I - \mathcal{A})x, x\rangle\big| \leq \gamma := \frac{B - A}{A + B} < 1 \,,$$

de donde se obtiene

$$y_n - x = y_{n-1} - x + \mathcal{A}(x - y_{n-1}) = (I - \mathcal{A})(y_{n-1} - x)$$

y por tanto

$$\|y_n - x\| \leq \gamma \|y_{n-1} - x\| \leq \cdots \leq \gamma^{n-1} \|y_1 - x\| \leq \gamma^n \|x\| \,.$$

La bondad de la convergencia de este algoritmo depende de lo pequeña que sea la diferencia $B - A$, y pone de manifiesto la necesidad de disponer de buenas cotas *frame*.

2.1. Bases ortonormales y bases de Riesz como casos particulares

Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un *frame* en $\mathcal{H}$, el operador preframe T definido en (2) es un operador lineal acotado, que también es sobre, i.e., $T\big(\ell^2(\mathbb{N})\big) = \mathcal{H}$, teniendo en cuenta la anterior propiedad 6. De hecho, esta propiedad caracteriza a los *frames* [4, p. 102]. Dos casos particulares son de interés:

(a) El operador T es inyectivo: En este caso T es un operador acotado e invertible verificando $T\delta_n = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde δ_n denota la sucesión que tiene todos sus términos nulos salvo el que ocupa el lugar n-ésimo que vale 1. Como la sucesión $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ es base ortonormal del espacio $\ell^2(\mathbb{N})$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es, por definición [4, p. 63], una *base de Riesz* para $\mathcal{H}$. En particular, la sucesión $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^\infty$ es su base biortonormal. En efecto, como

$$S^{-1}x_n = (TT^*)^{-1}x_n = (T^*)^{-1}T^{-1}x_n = (T^{-1})^*\delta_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

y el operador $(T^{-1})^*$ es acotado e invertible, la sucesión $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^\infty$ también es base de Riesz. Además,

$$\langle S^{-1}x_n, x_m\rangle = \langle (T^{-1})^*\delta_n, T\delta_m\rangle = \langle \delta_n, \delta_m\rangle = \delta_{n,m}\,,$$

lo que implica la biortonormalidad de las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^\infty$. Los desarrollos (3) son las únicas maneras de representar $x \in \mathcal{H}$ en términos de las bases de Riesz biortonormales $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^\infty$.

(b) El operador T es unitario: En este caso $T^* = T^{-1}$, por lo que $S^{-1} = I$ y la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$; cada $x \in \mathcal{H}$ tiene el desarrollo $x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, x_n\rangle x_n$.

En el caso de que el *frame* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ no sea base de $\mathcal{H}$, lo que se denomina un *overcomplete frame* en la terminología inglesa, el operador *preframe* T no es inyectivo y por tanto existirán diferentes maneras de escribir un elemento $x \in \mathcal{H}$ en términos del *frame* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. En particular, se podrá encontrar otro *frame* $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{H}$, distinto de $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^\infty$, tal que cada $x \in \mathcal{H}$ tiene los desarrollos [4, p. 111]

$$x = \sum_{n=1}^\infty \langle x, y_n\rangle x_n = \sum_{n=1}^\infty \langle x, x_n\rangle y_n\,.$$

En este caso se dice que los *frames* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ son *frames duales* en $\mathcal{H}$.

Como veremos en la siguiente sección, para *overcomplete frames* disponemos de infinitas representaciones para $x \in \mathcal{H}$ involucrando la información disponible $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^\infty$; este hecho puede ser explotado para obtener alguna ventaja adicional en el problema tratado.

Para finalizar esta sección, veamos, mediante un argumento muy simple, una motivación para el uso de *frames* en teoría de la señal. Supongamos que un emisor $\mathcal{E}$ muestrea una señal $x \in \mathcal{H}$ como $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^\infty$ a partir de un *frame* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y la envía a través de un canal a un receptor $\mathcal{R}$. Éste recibirá la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle + c_n\}_{n=1}^\infty$ afectada de un ruido (error) $\{c_n\}_{n=1}^\infty$. Para recuperar la señal original, el receptor aplica el operador S^{-1} obteniendo:

$$\sum_{n=1}^\infty (\langle x, x_n\rangle + c_n)S^{-1}x_n = x + S^{-1}\left(\sum_{n=1}^\infty c_n x_n\right).$$

En el caso de que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ fuese, por ejemplo, una base ortonormal, el error cometido en la reconstrucción sería $\sqrt{\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2} > 0$. Sin embargo, en el caso de *frames* que no son base, por ser T un operador no inyectivo se podría reducir el error de reconstrucción, ya que $\sum_{n=1}^\infty c_n x_n$ podría ser 0 sin serlo necesariamente la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^\infty$: Es el denominado efecto *noise suppresing* (ver [4, p. 117] y las referencias citadas).

3. Aplicación a la teoría de muestreo

En esta sección suponemos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de funciones continuas y que la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ se reduce a una sucesión de muestras de la función x y/o de alguna función relacionada con ella. Hablando de manera genérica, la teoría de muestreo trata sobre el problema de la recuperación de una función, perteneciente a un cierto espacio funcional, a partir de una sucesión de sus valores o, en general, a partir de una sucesión de valores de ciertas funciones relacionadas con ella (muestreo generalizado o multicanal). En primer lugar, estudiaremos el celebrado teorema de Whittaker–Shannon–Kotel'nikov:

3.1. El resultado clásico de Whittaker–Shannon–Kotel'nikov

Consideremos el espacio de las señales bandalimitadas al intervalo $[-\pi,\pi]$, i.e., funciones de $L^2(\mathbb{R})$ cuya transformada de Fourier se anula fuera del intervalo $[-\pi,\pi]$. Desde el punto de vista matemático se corresponde con el espacio de Paley–Wiener definido como

$$PW_\pi := \big\{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{sop} \widehat{f} \subseteq [-\pi,\pi]\big\} = \mathcal{F}^{-1}\big(L^2[-\pi,\pi]\big)\,,$$

que es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$. Cada función $f \in PW_\pi$ puede escribirse, utilizando la transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$, como

$$f(t) = \left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

Fijado $a \in \mathbb{R}$, consideremos la base ortonormal $\{e^{-i(n+a)w}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[-\pi,\pi]$; entonces, la sucesión de muestras $\{f(a+n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de f se corresponde con la sucesión $\big\{\langle \widehat{f}, \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}\big\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, desarrollando la función $e^{-itw}/\sqrt{2\pi} \in L^2[-\pi,\pi]$ con respecto a la base anterior obtenemos

$$\frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)}\,\frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} \ \text{ en } \ L^2[-\pi,\pi]\,.$$

Sustituyendo en (4) se obtiene la fórmula de Shannon:

$$\begin{aligned} f(t) &= \left\langle \widehat{f}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)}\,\frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)} \left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a)\frac{\operatorname{sen}\pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Al escribir la fórmula de Shannon en la forma anterior se pone de manifiesto que lo importante no son los puntos $\{a+n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en donde se muestrea la función f, sino el hecho de que estén equiespaciados (en este caso, con un período de muestreo $T_s = 1$). Por lo que respecta a la convergencia de la serie anterior, nótese en primer lugar que su convergencia puntual es absoluta debido al carácter incondicional de una base ortonormal (en general, de cualquier *frame*), i.e., cualquier reordenación de una base ortonormal sigue siendo una base ortonormal. La serie también converge en el sentido de la norma de $L^2(\mathbb{R})$: En efecto, desarrollando $\widehat{f} \in L^2[-\pi, \pi]$ con respecto de la base ortonormal $\{e^{-i(n+a)w}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ obtenemos

$$\widehat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a) \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en } L^2[-\pi, \pi]\,;$$

aplicando la transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$,

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a) \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} \right)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}).$$

Como $\mathcal{F}^{-1}$ es un operador unitario se obtiene que la sucesión $\left\{ \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal del espacio PW_π. Nótese que la identidad de Parseval correspondiente al desarrollo anterior nos dice que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n+a)|^2\,, \quad f \in PW_\pi\,,$$

es decir, la energía de la señal $f \in PW_\pi$ está contenida en la sucesión de sus muestras. Finalmente, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en (4) obtenemos

$$|f(t)| \leq \|\widehat{f}\| \left\| \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \right\| = \|f\|\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

que nos dice que la convergencia en la L^2-norma implica convergencia uniforme en $\mathbb{R}$. Otros ejemplos de teoremas de muestreo asociados con bases ortonormales pueden encontrarse en [9].

Nótese que la recuperación estable de $f \in PW_\pi$ a partir de una sucesión de muestras irregulares $\{f(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ nos llevaría, necesariamente, al estudio de bases de Riesz o de *frames* en $L^2[-\pi, \pi]$ del tipo $\left\{e^{-it_n w}/\sqrt{2\pi}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que se enmarcan dentro del análisis de Fourier no armónico [21], *leitmotiv* del trabajo original de Duffin y Shaeffer [7]. Para el caso de bases de Riesz, se tiene el siguiente resultado debido a Kadec (ver [21, p. 42]): Si la sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ verifica que $\sup_{n\in\mathbb{Z}} |t_n - n| < 1/4$, entonces la sucesión $\left\{e^{-it_n w}/\sqrt{2\pi}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz en $L^2[-\pi, \pi]$.

Análogamente se trataría el caso general del espacio de Paley–Wiener $PW_{\pi\sigma}$ de las funciones de $L^2(\mathbb{R})$ bandalimitadas al intervalo $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$, obteniéndose el período de muestreo $T_s = 1/\sigma$. Una recopilación de las propiedades más importantes de las funciones bandalimitada puede encontrarse en [10].

El teorema WSK, tomando $a = 0$, nos permite escribir el espacio de Paley–Wiener como

$$PW_\pi = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \operatorname{senc}(t-n) \;\middle|\; \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\},$$

es decir, el espacio PW_π es un subespacio invariante por traslación de $L^2(\mathbb{R})$, generado por la función *seno cardinal*, $\operatorname{senc} t := \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t}$. Aunque el teorema WSK es un resultado teórico que ha tenido un gran impacto tecnológico, presenta, desde el punto de vista práctico, los problemas señalados en [19] que se explican a continuación:

1. Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal. Matemáticamente, se corresponde con multiplicar el espectro de la señal, i.e., su transformada de Fourier, por la función característica $\chi_{[-\pi,\pi]}$, lo que equivale en el dominio temporal a convolucionar con la función senc, que no se anula en el intervalo $(-\infty, 0)$. En la práctica no se puede construir de manera exacta tal filtro ya que ello implicaría conocer el futuro para calcular la salida del filtro en el momento actual (el filtro no es causal o físicamente realizable):
$$(f * \operatorname{senc})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \operatorname{senc} x \, dx \,, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$
2. La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita. Una función bandalimitada puede extenderse a todo el plano complejo $\mathbb{C}$ resultando una función entera (ver (4)), que no podrá anularse en un intervalo de $\mathbb{R}$ salvo que sea la función nula.
3. La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs.
4. La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente, lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal. Por ejemplo, si queremos calcular $f(1/2)$ a partir de la sucesión de muestras $\{f(n) + \varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, el error que se comete, $\big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{\pi(\frac{1}{2} - n)} \big|$, podría ser infinito incluso cuando $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{Z}$; y, finalmente, y relacionado con lo anterior:
5. El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia ya que toda su energía está concentrada en $[-\pi, \pi]$ pero, sin embargo, muy *mal localizada* en tiempo ya que $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\operatorname{senc} t|^2 \, dt = +\infty$.

Todos estos inconvenientes han llevado, en los últimos años, a estudiar los problemas de muestreo y reconstrucción en espacios invariantes por traslación donde el generador φ sea una función con mejores propiedades que el *seno cardinal*; por ejemplo, los B-splines u otra función de escala φ asociada a un análisis multirresolución que de origen a una base de *wavelets* (ver, entre otras, las referencias [1, 11, 20, 22]).

3.2. Muestreo regular en espacios invariantes por traslación

Sea φ una función en $L^2(\mathbb{R})$ tal que la sucesión de sus trasladadas en los enteros $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sea una base de Riesz en $\overline{\operatorname{span}}\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$; consideramos el espacio
$$V_\varphi := \overline{\operatorname{span}}\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \Big\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \, \varphi(t-n) \;\Big|\; \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\} .$$

Supondremos también que el generador φ es una función continua en $\mathbb{R}$ y que la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$. Se prueba, utilizando el teorema de Banach–Steinhaus, que las dos condiciones anteriores son equivalentes a que V_φ sea un espacio de Hilbert de funciones continuas en $\mathbb{R}$ (ver [22]), requisito deseable para todo espacio en el que vaya a desarrollarse una teoría de muestreo.

Veamos que la obtención de muestreo regular en el espacio V_φ involucra, en general, bases de Riesz. Para utilizar la misma metodología que en la sección anterior, definimos el operador

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{T}_\varphi : & L^2[0,1] & \longrightarrow & V_\varphi \\ & \{e^{-2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & \{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\,, \end{array}$$

que envía la base ortonormal $\{e^{-2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[0,1]$ sobre la base de Riesz $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de V_φ. Este operador $\mathcal{T}_\varphi$ es acotado e invertible al ser $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ base de Riesz de V_φ. Para cada $F \in L^2[0,1]$, teniendo en cuenta que si $\{x_n\}$ es base ortonormal se cumple $\langle x, y\rangle = \sum_n \langle x, x_n\rangle \overline{\langle y, x_n\rangle}$, se obtiene que

$$\mathcal{T}_\varphi F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle F, e^{-2\pi inx}\rangle \varphi(t-n) = \left\langle F, \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi(t-n)} e^{-2\pi inx} \right\rangle = \langle F, K_t\rangle\,, \quad t\in\mathbb{R}\,,$$

donde, para cada $t \in \mathbb{R}$, la función $K_t \in L^2[0,1]$ está dada por

$$K_t(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\varphi(t-n)} e^{-2\pi inx} = \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(t+n) e^{-2\pi inx}} = \overline{Z\varphi(t,x)}\,,$$

siendo $Z\varphi(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(t+n)e^{-2\pi inx}$ la denominada *transformada de Zak* de la función φ, hecho anecdótico para nuestro estudio. De esta manera, las muestras $\{f(a+m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de $f \in V_\varphi$, con $a \in [0,1)$ fijo, se escriben como

$$f(a+m) = \langle F, K_{a+m}\rangle = \langle F, e^{-2\pi imx} K_a\rangle\,,\ m\in\mathbb{Z}\,, \quad \text{donde}\ \ F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f\,.$$

Por tanto, la recuperación estable de $f \in V_\varphi$ a partir de la sucesión $\{f(a+m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, se reduce al estudio de la sucesión $\{e^{-2\pi imx}K_a(x)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ en $L^2[0,1]$.

Es un problema sencillo probar el siguiente resultado:

La sucesión $\{e^{-2\pi imx}K_a(x)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *es una base de Riesz en* $L^2[0,1]$ *si y sólo si se verifica la condición:* $0 < \|K_a\|_0 \le \|K_a\|_\infty < \infty$*, donde* $\|K_a\|_0 := \sup\operatorname{esen}_{x\in[0,1]} |K_a(x)|$ *y* $\|K_a\|_\infty := \inf\operatorname{esen}_{x\in[0,1]} |K_a(x)|$*. Además, su base biortonormal viene dada por* $\{e^{-2\pi imx}/\overline{K_a(x)}\}_{m\in\mathbb{Z}}$.

La base anterior será ortonormal si y sólo si $\|K_a\|_0 = \|K_a\|_\infty = 1$, i.e., $|K_a(x)| = 1$ en casi todo punto de $[0,1]$.

Ahora estamos en condiciones de probar un teorema de muestreo regular en V_φ. En efecto, sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \|K_a\|_0 \le \|K_a\|_\infty < \infty$; dada $f \in V_\varphi$, desarrollamos la función $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f \in L^2[0,1]$ con respecto a la base de Riesz $\{e^{-2\pi inx}/\overline{K_a(x)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, obteniendo

$$F = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle F, K_{a+n}\rangle \frac{e^{-2\pi inx}}{\overline{K_a(x)}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n) \frac{e^{-2\pi inx}}{\overline{K_a(x)}} \quad \text{en}\ \ L^2[0,1]\,.$$

Aplicando el operador $\mathcal{T}_\varphi$ llegamos finalmente a

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n)\mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi i n x}/\overline{K_a(x)}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(a+n)S_a(t-n) \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R})\,,$$

donde $S_a = \mathcal{T}_\varphi(1/\overline{K_a})$, ya que para $n \in \mathbb{Z}$ se verifica que $\mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi i n x}F)(t) = (\mathcal{T}_\varphi F)(t-n)$, $t \in \mathbb{R}$. La convergencia en la norma L^2 implica, como antes, convergencia puntual, que será uniforme en subconjuntos de $\mathbb{R}$ en donde $\|K_t\|$ esté acotado ya que para cada $f \in V_\varphi$ se tiene

$$|f(t)| \le \|F\|\|K_t\| \le \|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\|\|K_t\|\|f\|\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

La convergencia también es absoluta debido al carácter incondicional de una base de Riesz.

Nótese que los espacios de Hilbert V_φ, en particular PW_π, son espacios de Hilbert de funciones para los que los funcionales evaluación $E_t(f) := f(t)$ son continuos (ver (5)): Pertenecen a la clase de los denominados espacios de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS en su acrónimo inglés). Ver la referencia [18] sobre los espacios RKHS y sus aplicaciones.

Finalmente, un breve comentario sobre muestreo irregular en espacios invariantes por traslación. Supongamos que disponemos de una sucesión de muestras $\{f(a+n+\delta_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ obtenida a partir de una perturbación en los puntos de muestreo regulares. En este caso,

$$f(a+n+\delta_n) = \langle F, K_{a+n+\delta_n}\rangle = \langle F, e^{-2\pi i n x}K_{a+\delta_n}\rangle\,,\ n \in \mathbb{Z}\,, \quad \text{donde} \ \ F = \mathcal{T}_\varphi^{-1}f\,.$$

Por tanto, el problema se reduce a estudiar para qué perturbaciones $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $(-1,1)$ la sucesión de funciones $\{e^{-2\pi i n x}K_{a+\delta_n}(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ también es una base de Riesz de $L^2[0,1]$; la herramienta matemática adecuada será la teoría clásica de perturbación de bases aplicada a la base de Riesz $\{e^{-2\pi i n x}K_a(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[0,1]$ (ver [12]).

3.3. Muestreo generalizado regular en espacios invariantes por traslación

En esta sección vamos a considerar un ejemplo en el que las muestras disponibles son del tipo $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^\infty$, donde la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es un *overcomplete frame*. Esto nos dice que existe una cierta redundancia en la información de la que disponemos. Para fijar ideas, supongamos que tenemos tres versiones *filtradas* $f_j := f * h_j$, $j = 1,2,3$, de cada función $f \in V_\varphi$. En ingeniería, los operadores de convolución, es decir, operadores (continuos) que conmutan con las traslaciones, reciben el nombre de *filtros* o sistemas lineales invariantes por traslación. Formalmente, $\widehat{f * h_j} = \widehat{f}\,\widehat{h_j}$, es decir, el operador modifica (filtra) el espectro de f (su transformada de Fourier) según sea el espectro $\widehat{h_j}$ (*función de transferencia* del filtro) de la función h_j (*respuesta al impulso* del filtro) que nos define el filtro. En la práctica, es más realista suponer que se dispone de muestras de f_j (valores medios de la función alrededor de un punto) que de muestras de la propia función f.

Volviendo a nuestro problema, nos planteamos recuperar la función $f \in V_\varphi$ a partir de la sucesión de muestras: $\{f_j(2n)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,3}$. Suponiendo que las funciones $h_j \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $j = 1,2,3$, se prueba, utilizando la desigualdad de Minkowski, que para cada $t \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{\varphi_j(t+n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, donde $\varphi_j = \varphi * h_j$, $j = 1,2,3$ (ver [11]). Nuestros filtros definen operadores lineales continuos de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$ que conmutan con las traslaciones; en particular, para $j = 1,2,3$ se tiene que

$$f_j(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle F, e^{-2\pi inx}\rangle \varphi_j(t-n) = \langle F, \overline{Z\varphi_j}(t,\cdot)\rangle\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

de donde

$$f_j(2n) = \langle F, \overline{Z\varphi_j}(2n,\cdot)\rangle = \langle F, \overline{Z\varphi_j}(0,\cdot) e^{-4\pi inw}\rangle\,,\ n \in \mathbb{Z}\,,\ j = 1,2,3\,.$$

Llamando $g_j(w) := Z\varphi_j(0,w)$, $j = 1,2,3$, el problema se reduce a estudiar cuándo será la sucesión $\{\overline{g_j(w)} e^{-4\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,3}$ un frame de $L^2[0,1]$. Para ello consideramos la matriz

$$\mathbb{G}(w) := \begin{bmatrix} g_1(w) & g_1(w+\frac{1}{2}) \\ g_2(w) & g_2(w+\frac{1}{2}) \\ g_3(w) & g_3(w+\frac{1}{2}) \end{bmatrix}\,,$$

y las constantes

$$\alpha_\mathbb{G} := \operatorname*{sup\,esen}_{w\in[0,1/2]} \lambda_{\text{mín}}[\mathbb{G}^*(w)\mathbb{G}(w)]\,, \quad \beta_\mathbb{G} := \operatorname*{ínf\,esen}_{w\in[0,1/2]} \lambda_{\text{máx}}[\mathbb{G}^*(w)\mathbb{G}(w)]\,,$$

donde $\mathbb{G}^*(w)$ denota la matriz traspuesta conjugada de $\mathbb{G}(w)$, y $\lambda_{\text{mín}}$ ($\lambda_{\text{máx}}$) el autovalor más pequeño (más grande) de la matriz semidefinida positiva $\mathbb{G}^*(w)\mathbb{G}(w)$. En estas condiciones, se cumplen los siguientes resultados cuya prueba, para el caso general, puede verse en [11]:

1. *La sucesión* $\{\overline{g_j(w)} e^{-4\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,3}$ *es una sucesión Bessel en* $L^2[0,1]$ *si y sólo si se verifica que* $\beta_\mathbb{G} < \infty$*, lo que es equivalente a que* $g_j \in L^\infty[0,1]$*,* $j = 1,2,3$.
2. *La sucesión* $\{\overline{g_j(w)} e^{-4\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,3}$ *es un* frame *en* $L^2[0,1]$ *si y sólo si se verifica que* $0 < \alpha_\mathbb{G} \le \beta_\mathbb{G} < \infty$*. En este caso, las cotas* frame *óptimas son* $\alpha_\mathbb{G}/2$ *y* $\beta_\mathbb{G}/2$.
3. *La sucesión* $\{\overline{g_j(w)} e^{-4\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,3}$ *es una base de Riesz en* $L^2[0,1]$ *si y sólo si es un frame con exactamente dos funciones* g_1 *y* g_2.

Teniendo en cuenta que $\{2e^{-4\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $L^2[0,\frac{1}{2}]$, se tiene que

$$f_j(2n) = \Big\langle F(w)g_j(w) + F\Big(w+\frac{1}{2}\Big)g_j\Big(w+\frac{1}{2}\Big), e^{-4\pi inw}\Big\rangle_{L^2[0,\frac{1}{2}]}\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

de donde se obtiene el desarrollo en serie de Fourier

$$2\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_j(2n)e^{-4\pi inw} = F(w)g_j(w) + F\Big(w+\frac{1}{2}\Big)g_j\Big(w+\frac{1}{2}\Big) \ \text{ en } \ L^2[0,1/2]\,.$$

Si consideramos las extensiones 1-periódicas de F y g_j, $j = 1,2,3$, el desarrollo anterior es válido el $L^2[0,1]$ y se puede escribir matricialmente como

$$2\begin{bmatrix} \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_1(2n)e^{-4\pi inw} \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_2(2n)e^{-4\pi inw} \\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_3(2n)e^{-4\pi inw} \end{bmatrix} = \mathbb{G}(w)\begin{bmatrix} F(w) \\ F(w+\frac{1}{2}) \end{bmatrix} \quad \text{en } L^2[0,1]\,. \tag{6}$$

Supongamos, por el momento, que disponemos de un vector $[a_1(w), a_2(w), a_3(w)]^\top$, con entradas en $L^\infty[0,1]$, tal que

$$[a_1(w), a_2(w), a_3(w)]\ \mathbb{G}(w) = [1,0] \quad \text{a.e. en } L^2[0,1]\,, \tag{7}$$

es decir, la primera fila de una inversa por la izquierda de la matriz $\mathbb{G}(w)$. Multiplicando a la izquierda (6) por $[a_1(w), a_2(w), a_3(w)]$, obtendríamos, en $L^2[0,1]$,

$$F = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big[f_1(2n)a_1(w)e^{-4\pi inw} + f_2(2n)a_2(w)e^{-4\pi inw} + f_3(2n)a_3(w)e^{-4\pi inw}\big]. \tag{8}$$

Aplicando el operador $\mathcal{T}_\varphi$ en (8) obtenemos, en V_φ,

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\sum_{n\in\mathbb{Z}}\big[f_1(2n)(\mathcal{T}_\varphi a_1)(t-2n) + f_2(2n)(\mathcal{T}_\varphi a_2)(t-2n) + f_3(2n)(\mathcal{T}_\varphi a_3)(t-2n)\big] \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\big[f_1(2n)S_1(t-2n) + f_2(2n)S_2(t-2n) + f_3(2n)S_3(t-2n)\big], \ \ t\in\mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

donde $S_j = \mathcal{T}_\varphi(2a_j)$, $j = 1,2,3$. Como en la sección anterior, la serie muestral converge en la L^2-norma, y esto implica convergencia puntual, que es uniforme en los subconjuntos de $\mathbb{R}$ en donde $\|K_t\|$ esté acotada.

Nótese que el desarrollo (8) en $L^2[0,1]$ nos dice que las sucesiones

$$\big\{\overline{g_j(w)}e^{-4\pi inw}\big\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,3} \quad \text{y} \quad \big\{2a_j(w)e^{-4\pi inw}\big\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,3}$$

son *frames* duales en $L^2[0,1]$ (ver [4, p. 112]).

Queda por justificar la existencia del vector $[a_1(w), a_2(w), a_3(w)]^\top$ verificando (7). Los términos de la matriz pseudo-inversa $\mathbb{G}^\dagger(w) := [\mathbb{G}^*(w)\mathbb{G}(w)]^{-1}\mathbb{G}^*(w)$ pertenecen a $L^\infty[0,1]$ ya que $0 < \alpha_\mathbb{G}$; además, su primera fila satisface (7). Otras soluciones de (7) están dadas por la primera fila de las matrices de la forma

$$\mathbb{G}^\dagger(w) + \mathbb{U}(w)[\mathbb{I}_3 - \mathbb{G}(w)\mathbb{G}^*(w)],$$

donde $\mathbb{U}(w)$ representa una matriz arbitraria 2×3 con entradas en $L^\infty[0,1]$ e $\mathbb{I}_3$ la matriz unidad 3×3.

Como consecuencia del desarrollo anterior, se concluye que cada función f en V_φ se puede recuperar a partir de la sucesión de muestras $\{f_j(2n)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,3}$, pudiéndose utilizar para ello infinitas funciones de reconstrucción S_j, $j = 1,2,3$. Por tanto se abre la posibilidad de tratar de escoger éstas con buenas propiedades: que tengan, por ejemplo, soporte compacto o que posean decrecimiento exponencial.

4. Comentarios finales

En este trabajo se motiva el que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea un *frame* en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ partiendo del problema de la recuperación estable de cada vector $x \in \mathcal{H}$, conociendo la sucesión de escalares $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$. El concepto de *frame* incluye, en particular, a las bases ortonormales y a las bases de Riesz de $\mathcal{H}$. El problema de la recuperación estable ha sido ilustrado en el caso de la teoría de muestreo con distintos ejemplos, que abarcan casi toda la casuística posible.

Para un estudio más profundo de la teoría de *frames* se recomienda la monografía [4] (ver también la referencia [3]). Los resultados básicos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert pueden encontrarse, por ejemplo, en [2]. El concepto de *frame* fue introducido por Duffin y Shaeffer en [7] para el tratamiento de las series de exponenciales complejas no armónicas (ver también [21]). En este trabajo, entre otros resultados, encontraron condiciones sobre la sucesión de puntos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ para que la sucesión de exponenciales complejas $\{e^{it_n w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea un *frame* en el espacio $L^2(-\pi d, \pi d)$. En la década de los 80 del siglo pasado, el concepto de *frame* reapareció en los nuevos contextos del análisis de Gabor y de la teoría de *wavelets*: ver referencias [4, 6, 14, 15, 17]. Aunque es posible encontrar bases ortonormales (o de Riesz) en $L^2(\mathbb{R})$ del tipo $\left\{e^{2\pi int}g(t-m)\right\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ (tómese por ejemplo $g(t) = \chi_{[0,1)}(t)$ o $g(t) = \operatorname{senc} t$), el teorema de Balian–Low (1981) nos dice que la función ventana $g \in L^2(\mathbb{R})$, que podemos suponer una función real y par con $\|g\|_2 = 1$, estará, necesariamente, muy mal localizada en tiempo o en frecuencia, i.e., $\int_{-\infty}^{\infty} t^2|g(t)|^2\,dt = \infty$ o $\int_{-\infty}^{\infty} w^2|\widehat{g}(w)|^2\,dw = \infty$ (ver la prueba en [15]). Desde un punto de vista práctico no había otra solución más que buscar *overcomplete frames* en $L^2(\mathbb{R})$ de la forma $\left\{e^{2\pi inat}g(t-mb)\right\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ (con $a, b > 0$), dando origen a los *frames de Gabor* en $L^2(\mathbb{R})$, donde necesariamente $ab < 1$ (ver [4, p. 174]); el trabajo seminal sobre *frames de Gabor* es el de Daubechies, Grossman y Meyer [5]. Aunque es posible encontrar bases ortonormales de *wavelets* en $L^2(\mathbb{R})$, por ejemplo, a partir de un Análisis Multirresolución [16], los *frames de wavelets* han sido también muy estudiados (ver, por ejemplo, [4, 6, 15, 17]).

La *transformada de Zak* Zf, formalmente definida para una función f como $Zf(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)e^{-2\pi inx}$, define un operador unitario entre los espacios $L^2(\mathbb{R})$ y $L^2([0,1]\times[0,1])$; constituye una herramienta fundamental en el análisis de Gabor [14].

El algoritmo *frame* de la sección 2, originalmente propuesto por Duffin y Schaeffer en [7], ha sido utilizado, con ciertas modificaciones, por Feichtinger et al. en el contexto del muestreo irregular en los espacios de Paley-Wiener [8]. El algoritmo *frame* estándar puede utilizarse en combinación con los métodos de aceleración de Chebysev o del gradiente conjugado para reducir el número de iteraciones [4, 13].

Agradecimientos. Me gustaría agradecer la lectura crítica de este trabajo por parte de los profesores Alberto Ibort (Universidad Carlos III de Madrid) y Gerardo Pérez-Villalón (Universidad Politécnica de Madrid). Este trabajo ha sido financiado por el proyecto MTM2006-09737 de la D.G.I. del *Ministerio de Ciencia y Tecnología*.

Referencias

[1] A. Aldroubi y K. Gröchenig, Non-uniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces, *SIAM Rev.* **43** (2001), 585–620.

[2] G. Bachman y L. Narici, *Functional Analysis*, Dover, 2000.

[3] G. Bachman, L. Narici y E. Beckenstein, *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer, 2000.

[4] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, 2003.

[5] I. Daubechies, A. Grossmann y Y. Meyer, Painless nonorthogonal expansions, *J. Math. Phys.* **27** (1986), 1271–1283.

[6] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.

[7] R. J. Duffin y A. C. Shaeffer, A class of nonharmonic Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **72** (1952), 341–366.

[8] H. G. Feichtinger y K. Gröchenig, Theory and practice of irregular sampling, in *Wavelets: Mathematics and Applications*, CRC Press, 1994.

[9] A. G. García, Orthogonal sampling theorems: an unified approach, *SIAM Rev.* **42** (2000), 499–512.

[10] A. G. García, A brief walk through Sampling Theory, *Advances in Imaging and Electron Physics* **124** (2002), 63–137.

[11] A. G. García y G. Pérez-Villalón, Dual frames in $L^2(0,1)$ connected with generalized sampling in shift-invariant spaces, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **20** (2006), 422–433.

[12] A. G. García y G. Pérez-Villalón, Generalized irregular sampling in shift-invariant spaces, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.* **5** (2007), 369–387.

[13] K. Gröchenig, Acceleration of the frame algorithm, *IEEE Trans. Signal Processing* **41** (1993), 3331–3340.

[14] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, 2001.

[15] E. Hernández y G. Weiss, *A first course on wavelets*, CRC Press, 1996.

[16] S. Mallat, Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **315** (1989), 69–87.

[17] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1999.

[18] S. Saitoh, *Integral Transforms, Reproducing Kernels and their Applications*, Longman, 1997.

[19] M. Unser, Sampling 50 Years After Shannon, *Proc. IEEE* **88** (2000), 569–587.

[20] G. G. Walter, A sampling theorem for wavelet subspaces, *IEEE Trans. Inform. Theory* **3** (1992), 881–884.

[21] R. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Academic Press, 1980.

[22] X. Zhou y W. Sun, On the sampling theorem for wavelet subspaces, *J. Fourier Anal. Appl.* **5** (1999), 347–354.

Antonio G. García, Dpto. de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid
Correo electrónico: agarcia@math.uc3m.es