

## Teoría de aproximación

GUILLERMO LÓPEZ LAGOMASINO

Departamento de Matemáticas, Univ. Carlos III de Madrid

### 1 Presentación

Este artículo resume el contenido de las tres conferencias de la sesión monográfica dedicada a la Teoría de Aproximación que se me encargó organizar en el marco del CEDYA2005. A la hora de seleccionar los temas y ponentes me guié por los siguientes principios: que los temas fuesen de actualidad y perspectiva tanto en métodos como en áreas de aplicación y que los ponentes fuesen matemáticos jóvenes españoles que en mi opinión destacan por sus contribuciones en sus áreas de trabajo. En orden alfabético los ponentes fueron Manuel Bello Hernández, Andrei Márquez Finkelshtein y Xavier Tolsa. En ese mismo orden sus ponencias versaron sobre ortogonalidad múltiple y la aproximación racional simultánea, problemas de frontera en la teoría de polinomios ortogonales, y capacidad analítica continua y la aproximación racional uniforme.

Estas notas fueron elaboradas con la activa participación de Andrei, Manuel y Xavier. Mi aportación se limitó a esta breve presentación y la unificación del estilo y el formato de las distintas secciones para ajustarlos a las normas establecidas. Cada sección resume una de las tres ponencias y su contenido corresponde a lo que los propios autores propusieron. En la unificación debo lamentar la pérdida de parte del material por razones de espacio. De esto me hago entero responsable. A solicitud mía, las charlas fueron orientadas a dar una visión general del tema para una audiencia no especializada sin entrar en detalles técnicos ni insistir en las aportaciones personales de los conferenciantes.

### 2 Ortogonalidad múltiple y la aproximación simultánea

Sean  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ ,  $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2 + \dots + n_m$  y  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  un vector de medidas complejas con soporte compacto en  $\mathbb{C}$ ; un polinomio  $Q_{\mathbf{n}}$ ,  $Q_{\mathbf{n}} \neq 0$ , de grado  $\leq |\mathbf{n}|$  es multi-ortogonal (PMO) respecto a  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$  para el multi-índice  $\mathbf{n}$  si

$$\int \zeta^j Q_{\mathbf{n}}(\zeta) d\mu_k(\zeta) = 0, \quad j = 0, \dots, n_k - 1, \quad k = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Tal polinomio existe ya que las  $|\mathbf{n}| + 1$  ecuaciones anteriores determinan un sistema li-neal homogéneo en sus  $|\mathbf{n}|$  coeficientes. En general, no hay un único PMO, pero queda determinado completamente, por ejemplo, si exigimos que sea mónico y de grado mínimo.

Para abreviar citaremos principalmente monografías o artículos que resumen el tema en los que se puede encontrar referencias a los trabajos originales.

## 2.1 Aproximantes de Hermite-Padé

Los PMO aparecen en la aproximación racional simultánea de funciones analíticas como los denominadores de los aproximantes Hermite-Padé (AHP) asociados a un sistema de funciones de Markov. Sea  $\hat{\mu}_j(z) = \int (z-x)^{-1} d\mu_j(x)$  la función de Markov asociada a  $\mu_j$ , ella es analítica en un entorno de infinito; como  $\hat{\mu}(\infty) = 0$ , si  $\tilde{Q}_{\mathbf{n}}$  es un polinomio de grado  $\leq |\mathbf{n}|$ , el término principal del desarrollo de Laurent en el infinito de  $\tilde{Q}_{\mathbf{n}}(z)\hat{\mu}_j(z)$  es un polinomio,  $P_{\mathbf{n},j}$ , de grado  $\leq |\mathbf{n}|-1$ . Más exactamente,  $P_{\mathbf{n},j}(z) = \int (\tilde{Q}_{\mathbf{n}}(z) - \tilde{Q}_{\mathbf{n}}(x))/(z-x) d\mu_j(x)$ ; por tanto,  $\tilde{Q}_{\mathbf{n}}(z)\hat{\mu}_j(z) - P_{\mathbf{n},j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)} \int x^k \tilde{Q}_{\mathbf{n}}(x) d\mu_j(x)$ . De modo que  $\tilde{Q}_{\mathbf{n}}(z)\hat{\mu}_j(z) - P_{\mathbf{n},j}(z) = \mathcal{O}(z^{-(n_j+1)})$  si y sólo si  $\tilde{Q}_{\mathbf{n}} = Q_{\mathbf{n}}$  satisface (1); en otras palabras, (1) es equivalente a  $Q_{\mathbf{n}} \neq 0$ , de grado  $\leq |\mathbf{n}|$ ,  $\text{grad}(P_{\mathbf{n},j}) \leq |\mathbf{n}| - 1$ , y

$$Q_{\mathbf{n}}(z)\hat{\mu}_j(z) - P_{\mathbf{n},j}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right). \quad (2)$$

El vector  $(P_{\mathbf{n},1}/Q_{\mathbf{n}}, \dots, P_{\mathbf{n},m}/Q_{\mathbf{n}})$  es el AHP para  $(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_m)$  asociado al multi-índice  $\mathbf{n}$ . A los AHP se les llaman también aproximantes simultáneos. Teniendo presente la fórmula para el resto  $\hat{\mu}_j(z) - P_{\mathbf{n},j}(z)/Q_{\mathbf{n}}(z) = 1/Q_{\mathbf{n}}(z) \int Q_{\mathbf{n}}(z)/(z-x) d\mu_j(x)$ , para estudiar la convergencia de los aproximantes Hermite-Padé es útil conocer la ubicación de los de ceros de  $Q_{\mathbf{n}}$  y su comportamiento asintótico ([3], [9]; a los resultados sobre asintótica nos referiremos más adelante). En muchos casos es posible probar convergencia, incluso geométrica, de los AHP; esto hace que sean utilizados en la teoría de números; precisamente la aparición de ellos se dió en este contexto al demostrar Hermite la trascendencia de "e" ([9]); él construyó aproximantes racionales simultáneos para funciones exponenciales. Más recientemente, la demostración de Apery de la irracionalidad de  $\zeta(3)$  se hizo más trasparente al utilizar aproximantes simultáneos a funciones de Markov para las medidas en  $[-1, 1]$  cuyos pesos son  $1, -\log x, \log^2 x$  ([5]); otra aplicación interesante a la teoría de números es la medida de la trascendencia del número  $\pi$  que hace Sorokin al estudiar el crecimiento de unas sumas con coeficientes racionales donde intervienen potencias de  $\pi$  ([10]).

## 2.2 Multi-ortogonalidad y ecuaciones diferenciales

La relación entre multi-ortogonalidad y ecuaciones diferenciales se revela al considerar medidas cuyos pesos  $w$  satisfacen la ecuación de Pearson

$$(\Phi w)' + \Psi w = 0, \quad (3)$$

donde  $\Phi$  y  $\Psi$  son polinomios tales que  $\text{grad}(\Phi) \geq 0$ ,  $\text{grad}(\Psi) \geq 1$ . Sea  $\Gamma$  una curva o arco de Jordan, tal que  $\Delta_\Gamma \Phi w P = 0$ , para todo polinomio  $P$ , donde  $\Delta_\Gamma$  representa el operador diferencia en los extremos de la curva  $\Gamma$ ; un par  $(w, \Gamma)$  que satisface las condiciones anteriores tiene asociado el funcional generador de momentos dado por  $\int_\Gamma z^k dw(z)$ . En el caso semi-clásico,  $S = \max\{\text{grad}(\Phi) - 2, \text{grad}(\Psi) - 1\} \geq 1$ , existen  $S + 1$  curvas  $\Gamma_j$  (únicas homotópicamente), que determinan funcionales generadores de momentos linealmente independientes. En tal caso, para cada multi-índice existe  $Q_n$  tal que

$$\int_{\Gamma_j} z^k Q_n(z) w(z) dz = 0, \quad k = 0, \dots, n_j - 1.$$

Observar que aunque el peso es el mismo, cambian las curvas de integración. Para va-rios tipos de pesos se ha demostrado que los correspondientes PMO satisfacen relaciones diferenciales. Por ejemplo, si  $\Phi(z) = z^2(z - a)$ ,  $w(z) = z^{\alpha_0}(z - a)^{\alpha_1} e^{\gamma/z}$  y los multi-índices son de la forma  $(n, \dots, n)$ , se ha probado que se cumple la fórmula de Rodrigues  $Q_n(z) = \frac{1}{w(z)} D^n(\Phi^n(z)w(z))$ , donde  $D = \frac{d}{dz}$ . Dichos polinomios satisfacen la ecuación

$$\Phi^2(z)y''' - 2\Psi(z)\Phi(z)y'' + A_1(z; n)y' + A_2(z; n)y = 0,$$

donde  $A_1, A_2$  son polinomios expresables en función de  $\Phi, \Psi$  y sus derivadas (ver [2], [12]).

### 2.3 Teoría de operadores, sistemas de Angelesco y Nikishin

Un concepto clave al estudiar los PMO es el de normalidad; un multi-índice  $\mathbf{n}$  se dice normal para un vector de medidas si el correspondiente PMO tiene grado exactamente  $|\mathbf{n}|$ . Si todos los multi-índices son normales, entonces el sistema de medidas (o de las correspondientes funciones de Markov) es perfecto. Como ejemplo de sistemas perfectos tenemos a los sistemas de Angelesco que están formados por funciones de Markov asociadas a medidas positivas con soporte incluidos en intervalos disjuntos del eje real  $\{\Delta_j\}_{j=1}^m$ ; la normalidad sigue del hecho de que cada PMO respecto al multi-índice  $\mathbf{n}$  tiene exactamente  $n_j$  ceros en  $\Delta_j$ , para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Los PMO para sistemas de Angelesco han sido ampliamente estudiados: Gonchar y Rakhmanov [9] probaron la convergencia de los AHP, describiendo la velocidad de convergencia en términos de la solución de cierto problema extremal de teoría de potencial vectorial; Aptekarev [1] estudió la asintótica fuerte (o de Szegö) de tales polinomios.

Otros sistemas muy estudiados son los de Nikishin que se definen recursivamente; sea  $\sigma_j$  una medida positiva con soporte compacto incluido en un intervalo  $\Delta_j$  del eje real,  $j = 1, \dots, m$ ; para cada  $j = 1, \dots, m - 1$ , se supone que  $\Delta_j \cap \Delta_{j+1} = \emptyset$ ; sea

$$d\mu_1 = d\sigma_1, \quad d\mu_2 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\sigma}_2 d\sigma_1, \dots, \quad d\mu_m = \langle \sigma_1, \langle \sigma_2, \dots, \sigma_m \rangle \rangle;$$

$(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_m)$  es el sistema de Nikishin asociado a  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ . Todas las medidas  $\mu_1, \dots, \mu_m$  son absolutamente continuas respecto a la medida  $\sigma_1$  y su soporte

coincide con el de esta, en este sentido los sistemas de Nikishin representan un ejemplo opuesto a los de Angelesco.

Para los sistemas de Nikishin se ha demostrado que los multi-índices en

$$I = \{(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1), \dots\}$$

son normales [1]. Para  $m = 2$  ([9]) y  $m = 3$  (Fidalgo-López) se ha probado que estos sistemas son perfectos. La convergencia de los correspondientes AHP para dos funciones fue demostrado por Nikishin [9] y para el caso general por Bustamante-López [6]. Aptekarev [1] ha obtenido la asintótica fuerte de los correspondientes PMO. Usando grafos planos Gonchar-Rakhmanov-Sorokin [8] definen unos sistemas (llamados mixtos) de funciones que tienen por casos extremos los sistemas de Nikishin y Angelesco.

Cada multi-índice en  $I$  está completamente determinado por su módulo (podemos escribir  $Q_{|\mathbf{n}|} = Q_{\mathbf{n}}$ ); así, si ellos son normales para un sistema de medidas (por ejemplo, los casos de sistemas de Nikishin o Angelesco), utilizando la definición de ortogonalidad se obtiene

$$x Q_{|\mathbf{n}|}(x) = Q_{|\mathbf{n}|+1}(x) + a_{|\mathbf{n}|,|\mathbf{n}|} Q_{|\mathbf{n}|}(x) + \dots + a_{|\mathbf{n}|,|\mathbf{n}|-m} Q_{|\mathbf{n}|-m}(x), \quad |\mathbf{n}| = 0, 1, \dots \quad (4)$$

$Q_{-m}(x) = \dots = Q_{-1}(x) = 0$ ,  $Q_0(x) = 1$ . De aquí se sigue que los ceros  $\{\lambda_{n+1,k} : k = 1, \dots, n+1\}$  de  $Q_{n+1}$  son valores propios de

$$A_n := \begin{pmatrix} a_{0,0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,0} & a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & 0 \\ 0 & a_{m+1,1} & a_{m+2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

y los correspondientes vectores propios son  $(Q_0(\lambda_{n+1,k}), Q_1(\lambda_{n+1,k}), \dots, Q_n(\lambda_{n+1,k}))^t$ . De ese modo los PMO juegan un papel esencial al estudiar el espectro del operador matricial no simétrico generado por (4). Recientemente, Aptekarev-López-Rocha obtuvieron la asintótica del cociente de PMO para sistemas de Nikishin asumiendo que  $\sigma'_j > 0$  en casi todo punto de  $\Delta_j$  respecto a la medida de Lebesgue. Para PMO asociados a sistemas de Angelesco y Nikishin, Aptekarev-Kalyagine-López-Rocha probaron la propiedad de entrelazamiento de ceros y para sistemas de Nikishin, usando la asintótica del cociente, estudiaron el comportamiento asintótico de  $\{a_{n,k}\}$  asumiendo la referida condición para las derivadas de las medidas.

## 2.4 Polinomios ortogonales respecto a medidas variantes

La técnica básica para obtener todos los resultados asintóticos mencionados anteriormente es la utilización de polinomios ortogonales respecto a medidas variantes. Veamos como ellos aparecen en la AHP de sistemas de Angelesco.

Como ya dijimos, las relaciones de ortogonalidad implican que  $Q_n$  tiene  $n_j$  ceros en cada intervalo  $\Delta_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ ; si denotamos por  $q_{n_j}$  el polinomio mónico de grado  $n_j$  que tiene esos ceros, tendremos  $Q_n(z) = \prod_{k=1}^m q_{n_k}(z)$ . Por tanto, podemos escribir

$$\int q_{n_k}(\zeta) \zeta^j \left( \prod_{j \neq k} q_{n_j}(\zeta) d\mu_k(\zeta) \right) = 0, \quad j = 0, \dots, n_k - 1,$$

de modo que cada  $q_{n_k}$  satisface relaciones de ortogonalidad respecto a  $\prod_{j \neq k} q_{n_j}(\zeta) d\mu_k(\zeta)$  que varía según cambia  $q_{n_k}$ .

A modo de ejemplo citamos un resultado de Gonchar-Rakhmanov [7], extendido por Stahl-Totik [11], que da la asintótica de la raíz  $n$ -ésima para polinomios ortogonales respecto a medidas variantes.

Sea  $\mu$  una medida positiva cuyo soporte  $\text{sop}(\mu)$  está contenido en el eje real y  $\{\ell_n\}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a  $\mu$ . Se dice que  $\mu$  es regular si  $\lim_n |\ell_n(z)|^{1/n} = \exp g(z; \infty)$  uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu)$  donde  $g(z; \infty)$  denota la función de Green con singularidad en  $\infty$  respecto a  $\mathbb{C} \setminus \text{sop}(\mu)$ .

**Theorem 1** Sean  $\{\phi_n\}$  una sucesión de funciones continuas en un intervalo  $\Delta \subset \mathbb{R}$ ,  $\mu$  una medida positiva y regular con  $\text{sop}(\mu) = \Delta$ ,  $S_n$  polinomios mónicos de grado  $n$  y

$$\int S_n(t) t^k \phi_n(t) d\mu(t) = 0, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Si  $\lim_n \frac{1}{2n} \log \frac{1}{|\phi_n|} = v$  uniformemente en  $\Delta$ , y  $v$  es una función real en  $\Delta$ , entonces

$$\nu_{S_n} \xrightarrow{*} \nu, \quad \lim_n \left( \int |S_n|^2 \phi_n d\mu \right)^{1/2n} = e^{-w},$$

donde  $\nu_{S_n} = \frac{1}{n} \sum_{S_n(x)=0} \delta_x$  es la medida contadora de ceros de  $S_n$  y  $\nu$  es la única medida que resuelve el problema de equilibrio

$$V^\nu(x) + v(x) \begin{cases} = w, & x \in \text{sop}(\nu), \\ \geq w, & x \in \Delta, \end{cases} \quad (5)$$

donde  $V^\nu(z) = - \int \log |z - x| d\nu(x)$  es el potencial logarítmico asociado a  $\nu$ . De estas relaciones se deduce que  $\lim_n |S_n(z)|^{1/n} = e^{-V^\nu(z)}$  uniformemente en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{C} \setminus \Delta$ .

López y colaboradores han obtenido resultados sobre asintótica fuerte y relativa de polinomios ortogonales respecto a medidas variantes que juegan un papel importante para probar la asintótica de PMO para sistemas de Angelesco y Nikishin.

## 2.5 Aproximantes de Frobenius-Padé

A continuación veremos como aparecen los PMO en los aproximantes de Frobenius-Padé para sistemas de Angelesco y la descripción de la convergencia en términos de la solución de un problema de equilibrio de potencial logarítmico vectorial.

Restringiremos nuestra atención al caso de dos medidas; sean  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$  un sistema de Angelesco con medidas cuyos soportes están incluidos en intervalos disjuntos  $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$  y sea  $\sigma$  una medida soportada en el intervalo  $[c, d]$  disjunto con los intervalos anteriores. Denotemos por  $\{\varphi_n\}$  la sucesión de polinomios ortonormales asociada a  $\sigma$ . Dada  $f \in L_1(\sigma)$  sus coeficientes de Fourier con respecto al sistema anterior son  $c_n(f) = \int f \varphi_n d\sigma$ . Los aproximantes simultáneos de Frobenius-Padé de  $(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$  para el multi-índice  $(n_1, n_2)$  respecto a la medida  $\sigma$  es el vector de fracciones racionales  $(P_{\mathbf{n},1}/Q_{\mathbf{n}}, P_{\mathbf{n},2}/Q_{\mathbf{n}})$  tales que:  $Q_{\mathbf{n}} \neq 0$ ,  $\text{grad}(Q_{\mathbf{n}}) \leq |\mathbf{n}|$ ,  $\text{grad}(P_{\mathbf{n},1}) \leq |\mathbf{n}| - 1$ ,  $\text{grad}(P_{\mathbf{n},2}) \leq |\mathbf{n}| - 1$  y

$$c_k(Q_{\mathbf{n}}\hat{\mu}_j - P_{\mathbf{n},j}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\mathbf{n}| + n_j, \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

donde  $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2$ . Es decir, los aproximantes simultáneos de Frobenius-Padé recuperan desarrollos de Fourier en el sentido Padé. También hemos estudiado fracciones que recuperan desarrollos de Fourier directamente (los aproximantes no-lineales de Fourier-Padé, ver [4]).

Los aproximantes simultáneos de Frobenius-Padé existen porque el sistema de ecuaciones (6) es lineal y homogéneo con  $3|\mathbf{n}| + 2$  ecuaciones en los  $3|\mathbf{n}| + 1$  coeficientes de  $Q_{\mathbf{n}}, P_{\mathbf{n},1}, P_{\mathbf{n},2}$ . Veremos que dichos aproximantes son únicos porque los denominadores tienen grado exactamente  $|\mathbf{n}|$ . En efecto, de (6) deducimos

$$\int (Q_{\mathbf{n}}(x)\hat{\mu}_j(x) - P_{\mathbf{n},j}(x))\varphi_k(x) d\sigma(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\mathbf{n}| + n_j, \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

que por las técnicas usuales de ortogonalidad nos lleva a que  $Q_{\mathbf{n}}\hat{\mu}_j - P_{\mathbf{n},j}$  tiene al menos  $|\mathbf{n}| + n_j$  ceros en  $(c, d)$ . Sea  $W_{\mathbf{n},j}$  el polinomio mónico que se anula en  $|\mathbf{n}| + n_j$  de estos ceros; por tanto,  $(Q_{\mathbf{n}}\hat{\mu}_j - P_{\mathbf{n},j})/W_{\mathbf{n},j}$  es analítica en un abierto que contiene a  $[c, d]$ ; si  $\Gamma$  es un contorno cerrado que contiene en su interior a  $[c, d]$  y en su exterior están los intervalos  $[a_i, b_i]$ . Aplicando los teoremas de Cauchy y Fubini tenemos que para todo  $k = 0, \dots, n_j - 1$ ,

$$\int_{\Gamma} \zeta^k \frac{Q_{\mathbf{n}}(\zeta)\hat{\mu}_j(\zeta) - P_{\mathbf{n},j}(\zeta)}{W_{\mathbf{n},j}(\zeta)} d\zeta = 0 \Leftrightarrow \int x^k Q_{\mathbf{n}}(x) \frac{d\mu_j(x)}{W_{\mathbf{n},j}(x)} = 0. \quad (8)$$

Es decir, ¡ $Q_{\mathbf{n}}$  satisface relaciones de multi-ortogonalidad variantes! Y de ahí obtenemos que  $Q_{\mathbf{n}}$  tiene  $n_j$  ceros simples en el intervalo  $[a_j, b_j]$  para cada  $j = 1, 2$ . Asumimos en lo que sigue que  $Q_{\mathbf{n}}$  es el PMO respecto a las medidas  $d\mu_1/W_{\mathbf{n},1}, d\mu_2/W_{\mathbf{n},2}$  y  $Q_{\mathbf{n}} = q_{\mathbf{n},1}q_{\mathbf{n},2}$ , donde  $q_{\mathbf{n},j}$  es el polinomio mónico de grado  $n_j$  que se anula en los ceros de  $Q_{\mathbf{n}}$  en  $[a_j, b_j]$ . Así,  $q_{\mathbf{n},1}$  es el polinomio mónico de grado  $n_1$  que cumple

$$\int x^k q_{\mathbf{n},1}(x) \frac{q_{\mathbf{n},2}d\mu_j(x)}{W_{\mathbf{n},j}(x)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n_1 - 1; \quad (9)$$

y para  $q_{n,2}$  tenemos una relación análoga.

Por otra parte, de la relación (8) obtenemos que  $Q_n \hat{\mu}_j - P_{n,j}$  tiene exactamente  $|\mathbf{n}| + n_j$  ceros en  $(c, d)$ ; además,  $Q_n(z) \hat{\mu}_j(z) - P_{n,j}(z) = \frac{W_{n,j}(z)}{q_{n,j}(z)} \int \frac{Q_n(x) q_{n,j}(x)}{z-x} \frac{d\mu_j(x)}{W_{n,j}(x)}$ ,  $j = 1, 2$ , y de (7) deducimos

$$\int z^k \frac{W_{n,j}(z)}{q_{n,j}(z)} \int \frac{Q_n(x) q_{n,j}(x)}{z-x} \frac{d\mu_j(x)}{W_{n,j}(x)} d\sigma(z) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, |\mathbf{n}| + n_j, \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

Sea  $\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^2$  tal que  $\lim_{\mathbf{n} \in \Lambda} n_i/|\mathbf{n}| = p_i$ ,  $i = 1, 2$ . Sea  $\Lambda' \subset \Lambda$  tal que las sucesiones de medidas contadoras asociadas a los polinomios  $q_{n,1}, q_{n,2}, W_{n,2}$  y  $W_{n,1}$  tengan límite débil  $\nu_1, \nu_2, \lambda_1, \lambda_2$ , respectivamente. Supongamos que  $\mu_1, \mu_2$  y  $\sigma$  son medidas regulares. Combinando (9), (10) y el Teorema 1 obtenemos un sistema de cuatro relaciones extremales que relacionan los potenciales logarítmicos  $V^{\nu_1}, V^{\nu_2}, V^{\lambda_1}, V^{\lambda_2}$  correspondientes a estas medidas. A saber:

$$\begin{aligned} 2p_1^2 V^{\nu_1}(z) + p_1 p_2 V^{\nu_2}(z) - p_1(1+p_1) V^{\lambda_1}(z) &= \alpha_1, & z \in \text{supp}(\nu_1), \\ p_1 p_2 V^{\nu_1}(z) + 2p_2^2 V^{\nu_2}(z) - p_2(1+p_2) V^{\lambda_2}(z) &= \alpha_2, & z \in \text{supp}(\nu_2), \\ -p_1(1+p_1) V^{\nu_1}(z) + 2(1+p_1)^2 V^{\lambda_1}(z) &= \alpha_3, & z \in \text{supp}(\lambda_1), \\ -p_2(1+p_2) V^{\nu_2}(z) + 2(1+p_2)^2 V^{\lambda_2}(z) &= \alpha_4, & z \in \text{supp}(\lambda_2) \end{aligned}$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  denotan el ínfimo en  $[a_1, b_1]$  y  $[a_2, b_2]$  de las partes izquierdas de las relaciones respectivas mientras que  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$  los ínfimos de las relaciones correspondientes en  $[c, d]$ . Como la matriz del sistema anterior es simétrica y definida positiva, el problema tiene solución única, de donde se deduce la convergencia débil de las medidas contadoras y consecuentemente para la sucesión  $\{|Q_n|^{1/|\mathbf{n}|}\}$ ,  $\mathbf{n} \in \Lambda$ . La demostración de este resultado para el caso general de sistemas de Angelesco de  $m$  funciones aparece en [4].

### 3 Problemas de frontera en la teoría de polinomios ortogonales

Los problemas de frontera o de Riemann-Hilbert para funciones analíticas han resultado ser una herramienta fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como parciales, estando en la base de técnicas tan fundamentales como el scattering inverso y otros. A partir de los trabajos de Fokas, Its y Kitaev en los años '90 estos métodos han empezado a jugar un papel preponderante en la teoría de polinomios ortogonales. Este es un breve e informal resumen de las técnicas de Riemann-Hilbert y del papel de puente que las mismas juegan entre la teoría de sistemas integrables, la teoría moderna de funciones especiales, y los polinomios ortogonales.

#### 3.1 Problemas de frontera clásicos para funciones analíticas

Supongamos que  $\gamma$  es una curva o contorno (o unión de los mismos) en el plano complejo  $\mathbb{C}$ ; buscando simplicidad y en aras de una visión global del

problema vamos a imponer en lo adelante tantas hipótesis sobre los objetos con que operamos como sean necesarias. En particular, vamos a suponer que  $\gamma$  es suave a trozos, denotando por  $\gamma^o$  el conjunto de sus puntos regulares, es decir, aquellos que no sean extremos de un arco o puntos de intersección. Si fijamos una orientación arbitraria de  $\gamma$ , entonces dada una función  $f$  analítica en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , vamos a denotar en lo adelante por  $f_+$  y  $f_-$  los valores de frontera de  $f$  por la izquierda y por la derecha en  $\gamma$ , respectivamente (si estos existen).

Si sobre  $\gamma$  tenemos definida una función compleja  $v$ , entonces su *integral tipo Cauchy* es

$$\mathcal{C}(v)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{v(t)}{t-z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma. \quad (11)$$

Si  $v$  es, digamos, Hölder a trozos, entonces  $\mathcal{C}(v)$  es una función analítica en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , que posee valores de frontera continuos en  $\gamma^o$ . Uno de los teoremas fundamentales en la teoría de valores de frontera para funciones analíticas es el de *Sokhotsky-Plemelj* (ver por ejemplo [13]) que afirma que si  $f = \mathcal{C}(v)$  entonces

$$f_+(t) - f_-(t) = v(t), \quad t \in \gamma^o.$$

O sea, podemos recuperar el valor del integrando en (11) como el “salto” (aditivo) de la integral tipo Cauchy a través de  $\gamma$ . En otras palabras, si dados  $\gamma$  y  $v$  como antes, queremos encontrar una función  $f$  que sea holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  y cuyos valores de frontera satisfagan la siguiente condición de *salto aditivo*,

$$f_+(t) = f_-(t) + v(t), \quad t \in \gamma^o,$$

entonces una posible solución es  $\mathcal{C}(v)$ . Obviamente, la solución no es única:  $\mathcal{C}(v) + g$ , donde  $g$  es entera, tiene el mismo salto a través de  $\gamma$ . Para lograr la unicidad debemos imponer algunas condiciones adicionales sobre  $f$ , tal como que  $f(\infty) = 0$ , y describir su comportamiento en los puntos irregulares  $\gamma \setminus \gamma^o$ .

Un problema de *salto multiplicativo* (o de *Riemann-Hilbert* homogéneo) es el de encontrar una función  $f$  que sea holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , cuyos valores de frontera satisfagan

$$f_+(t) = f_-(t)v(t), \quad t \in \gamma^o,$$

unido a la condición asintótica  $f(z) = 1 + \mathcal{O}(1/z)$ ,  $z \rightarrow \infty$ . En determinadas ocasiones (por ejemplo, si  $\gamma$  es un contorno de Jordan y  $v$  es real y positiva sobre el mismo) el problema multiplicativo se puede reducir al aditivo tomando logaritmos:

$$\begin{aligned} (\log f)_+(t) &= (\log f)_-(t) + \log v(t), \quad t \in \gamma^o, \\ \log f(z) &= \mathcal{O}(1/z), \quad z \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

siendo una posible solución

$$f(z) = \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\log v(t)}{t-z} dt \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma.$$

La situación se complica si en vez de considerar funciones escalares pasamos al caso matricial: dada una función  $V : \gamma \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$  encontrar una función  $F : \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$  holomorfa (es decir, todos sus elementos son funciones holomorfas), cuyos valores de frontera satisfagan

$$F_+(t) = F_-(t)V(t), \quad t \in \gamma^o, \quad (12)$$

$$F(z) = I + \mathcal{O}(1/z), \quad z \rightarrow \infty, \quad (13)$$

donde  $I$  es la matriz identidad. La no conmutatividad del problema es esencial. De hecho, la mera existencia de su solución no es nada trivial y ha sido estudiada exhaustivamente por Gohberg, Krein y colaboradores. Por ejemplo, la fórmula

$$F(z) = \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{\log V(t)}{t-z} dt \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$$

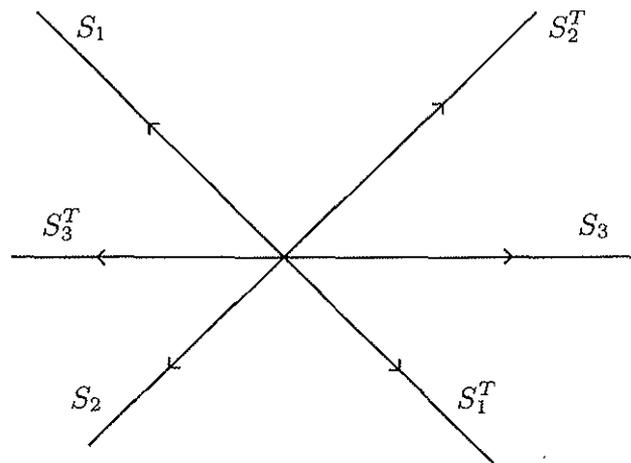
es válida sólo en el caso abeliano, cuando

$$[V(z), V(w)] \stackrel{\text{def}}{=} V(z)V(w) - V(w)V(z) = 0 \quad \text{para todo } z, w \in \gamma.$$

El problema matricial (12)–(13) aparece de forma natural en varios problemas del análisis. Por limitaciones de espacio veamos sólo un ejemplo. Las ecuaciones diferenciales de Painlevé fueron descubiertas a inicios del siglo XX por Painlevé, Gambier y sus colaboradores, que clasificaron todas las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden  $y'' = f(x, y, y')$  con  $f$  racional en  $y, y'$ , tales que sus soluciones no poseen puntos de ramificación dependientes de las constantes de integración. De los 50 casos hallados por Painlevé y sus colegas, 6 no se reducían a ecuaciones más simples ni podían ser resueltas por medio de funciones especiales conocidas. Éstas ecuaciones se conocen como *ecuaciones diferenciales de Painlevé*, y sus soluciones son los *trascendentes de Painlevé*. Aunque éstos fueron descubiertos a partir de razones teóricas, estas ecuaciones han encontrado aplicación fundamental en la mecánica estadística, física del plasma, ondas no lineales, gravedad cuántica, óptica no lineal, etc.

Un ejemplo de ecuación de Painlevé II es (una versión “no lineal” de la ecuación de Airy)

$$u_{xx} = 2u^3 + xu, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (14)$$



Como se ha dicho antes, no podemos esperar poder escribir las soluciones explícitamente, en términos de funciones especiales conocidas. Necesitamos un procedimiento alternativo para su solución, que fue hallado en los años '90 por Flaschka y Newell. Tome tres parámetros complejos  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  y defina tres matrices  $S = S_i$ , con

$$S_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & s_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

La única restricción que debemos imponer sobre los parámetros es

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_1 s_2 s_3 = 0.$$

Con las tres matrices anteriores, asociadas a 6 rayos en el plano  $\mathbb{C}$  tal y como se muestra en la figura (y que denotaremos genéricamente por  $S$ ), vamos a construir una matriz de salto

$$V_x(z) = e^{-i(4z^3/3+xz)\sigma_3} S e^{i(4z^3/3+xz)\sigma_3},$$

donde para abreviar usamos la notación

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad a^{\sigma_3} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Observe que la matriz  $V_x$  depende de un parámetro real  $x$ . Ahora podemos resolver el problema (12)–(13) para  $F$  con  $\gamma$  dada por la unión de los 6 rayos y la matriz de salto  $V_x$ . La solución  $F$  satisface entonces

$$F_x(z) = I + \frac{M(x)}{z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Flaschka y Newell [18] probaron que podemos recuperar la solución de la ecuación (14) a partir del elemento (1, 2) de la matriz  $M$ :  $u(x) = 2i M_{12}(x)$ .

### 3.2 Problema de Riemann-Hilbert para polinomios ortogonales

Vamos a considerar la situación más simple (en cierto sentido) cuando tenemos un peso positivo e integrable  $w$  sobre  $\mathbb{R}$ , con todos los momentos

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^n w(x) dx < +\infty,$$

de modo que existen polinomios ortogonales mónicos  $P_n(x) = x^n + \dots$ ,  $n \geq 0$ , que satisfacen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x) P_m(x) w(x) dx = h_n \delta_{mn}, \quad h_n > 0. \quad (16)$$

Estos polinomios poseen propiedades muy notables y bien conocidas. Por ejemplo, los  $P_n$  satisfacen una relación de recurrencia a tres términos y sus ceros son reales y simples.

Vamos a considerar el problema de encontrar una función  $Y : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$  que sea holomorfa y satisfaga

$$Y_+(t) = Y_-(t) \begin{pmatrix} 1 & w(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$Y(z) = [I + \mathcal{O}(1/z)] \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (18)$$

**Teorema [19]:** *existen  $\kappa_n > 0$  tales que*

$$Y(z) = \begin{pmatrix} P_n(z) & \mathcal{C}(P_n w)(z) \\ \kappa_{n-1} P_{n-1}(z) & \kappa_{n-1} \mathcal{C}(P_{n-1} w)(z) \end{pmatrix}$$

*es la única solución de (17)-(18).*

La demostración es elemental y sólo usa dos hechos fundamentales del análisis complejo: la fórmula de Sokhotsky-Plemelj y el teorema de Liouville (¿se atreve el lector probarlo?).

Una de las ventajas de la caracterización por medio del problema de RH es que ella puede extenderse a otros esquemas de ortogonalidad, esta vez no estándar, tales como la ortogonalidad sobre la circunferencia unidad [21], la ortogonalidad discreta [14] (es decir, donde la integral en (16) se sustituye por una suma), la ortogonalidad múltiple [23], matricial y otras. La consecuencia fundamental de este enfoque ha sido un importante cambio de paradigma: *en todos los casos el objeto primario deja de ser la ortogonalidad y su lugar ocupa el problema de frontera.*

Para ilustrarlo, veamos el caso del peso de ortogonalidad

$$w(x) = e^{-NV(x)}, \quad V(x) = \frac{tx^2}{2} + \frac{gx^4}{4}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (19)$$

donde  $g, N > 0$  y  $t < 0$  son parámetros. Vamos a deducir algunas propiedades de los polinomios ortogonales mónicos  $P_n$  correspondientes usando la filosofía

$$\boxed{\text{Problema de RH}} \Rightarrow \boxed{\text{Par de Lax}} \Rightarrow \boxed{\text{Ecuación de compatibilidad}}$$

utilizada comúnmente en la investigación de sistemas integrables de ecuaciones diferenciales o en diferencias.

Partimos nuevamente del problema de Riemann-Hilbert (17)-(18), introduciendo una notación para el siguiente término del desarrollo asintótico de  $Y$  en el infinito:  $Y = Y_n : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$  es holomorfa y tal que

$$Y_{n,+}(x) = Y_{n,-}(x) J(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$Y_n(z) z^{-n\sigma_3} = I + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} + \mathcal{O}(z^{-2}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Para obtener la primera mitad del par de Lax observe que  $J$  no depende de  $n$ , por lo que  $R_n(z) = Y_n Y_{n-1}^{-1}$  es una función matricial entera. Por (21),

$$R_n(z) = \begin{pmatrix} z - a_{n-1} + a_n & -b_{n-1} \\ d_n & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty,$$

y por el teorema de Liouville,

$$R_n(z) = \begin{pmatrix} z - a_{n-1} + a_n & -b_{n-1} \\ d_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,  $Y_n(z) = R_n(z)Y_{n-1}(z)$ . Si escribimos esta expresión elemento a elemento llegamos a

$$zP_n(z) = P_{n+1}(z) + \alpha_n P_{n-1}(z),$$

donde  $\alpha_n$  se expresa explícitamente en función de  $a_n$ ,  $b_n$  y  $d_n$ . Esto no es otra cosa que la conocida relación de recurrencia a tres términos que satisfacen los polinomios  $P_n$ .

Para la segunda mitad del par de Lax nos fijamos en el segundo parámetro del problema, la variable continua  $x$ . Sin embargo, el salto original  $J$  en (20) depende de  $x$ , por lo que necesitamos hacer una transformación adicional, definiendo  $T_n(z) = w^{-\sigma_n/2} Y_n(z) w^{\sigma_n/2}$  (recuerde la notación (15)). Ahora  $T_n$  tiene el salto

$$T_{n,+}(x) = T_{n,-}(x) J_T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad J_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que no depende de  $x$ , y podemos derivar en ambos miembros de la igualdad, obteniendo que

$$T_{n,+}(x) = T_{n,-}(x) J_T, \quad \text{y} \quad T'_{n,+}(x) = T'_{n,-}(x) J_T,$$

de donde nuevamente  $U_n = T'_n T_n^{-1}$  es entera; la fórmula  $T'_n = U_n(z) T_n$  implica una ecuación diferencial para los  $P_n$ .

Resumiendo, hemos obtenido un sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} T_n = \tilde{R}_n(z) T_{n-1} \\ T'_n = U_n(z) T_n \end{cases}$$

para la matriz  $T_n$ , que por tanto debe cumplir condiciones de compatibilidad para la existencia de solución. Es fácil ver que éstas son

$$\tilde{R}'_n = U_n \tilde{R}_n - \tilde{R}_n U_{n-1},$$

que escritas elemento a elemento implican la siguiente ecuación no lineal en los coeficientes

$$n = N\alpha_n (t + g(\alpha_{n-1} + \alpha_n + \alpha_{n+1})), \quad n \geq 1, \quad (22)$$

conocida por los físicos como la *ecuación de cuerda discreta* y por los especialistas en polinomios ortogonales, como la *ecuación de Freud*. De hecho, esta ecuación es clasificada como una ecuación de Painlevé discreta, y su análisis asintótico directo cuando  $n$  ó  $N \rightarrow \infty$  es muy complicado. Sin embargo, si nos atenemos al nuevo paradigma de Riemann-Hilbert, en vez de estudiar esta recurrencia, deberíamos centrarnos en el problema de frontera (20)–(21) y en su evolución, y al final sacar conclusiones sobre las soluciones  $\alpha_n$ . En esto consiste el método de descenso más rápido no lineal descubierto por Deift y Zhou (ver por ejemplo [16], así como la monografía [17]).

### 3.3 Asintótica de polinomios ortogonales

Queremos estudiar la asymptótica de los polinomios ortogonales  $P_n$  o de algunas de las magnitudes relevantes asociadas ( $\alpha_n$ , etc.). La idea fundamental del método de Deift y Zhou se puede resumir de la siguiente forma:

Partiendo del problema de Reimann-Hilbert (17)–(18) lleve a cabo transformaciones *explícitas e inversibles*

$$Y \rightarrow \dots \rightarrow S$$

tales que al final  $S(\infty) \approx I$ , los saltos de  $S$  sean  $\approx I$ , y concluya que  $S \approx I$  en todo el plano complejo. Entonces deshaga las transformaciones anteriores y vea qué ha obtenido para  $Y$ .

Obviamente esta idea tiene que ser complementada con una serie de “trucos técnicos” muy sofisticados. Observe el punto de partida, el problema (17)–(18); uno de los primeros objetivos es “normalizar” el comportamiento en el infinito, redefiniendo la matriz  $Y$ . El ingrediente principal de la transformación que necesitamos es la *medida de equilibrio*  $\nu$  que satisface condiciones tipo (5) con campo externo  $v(x) = NV(x)/(2n)$ . Armados de esta medida definimos la función  $G(z) = \exp(-n \int \log(t-x) d\nu(t))$  y hacemos

$$T(z) \stackrel{\text{def}}{=} k_n^{-\sigma_n/2} Y(z) G(z)^{\sigma_3}.$$

Entonces  $T$  es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = I$ , y sobre  $\text{supp}(\mu_n)$ ,

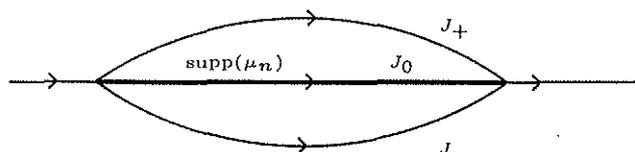
$$T_+(x) = T_-(x) \begin{pmatrix} g^n(x) & 1 \\ 0 & g^{-n}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } |g_n| = 1.$$

Hemos logrado el primero objetivo, normalizar el problema en el infinito. El precio que hemos pagado es un comportamiento altamente oscilatorio de la matriz de salto sobre el soporte de  $\mu_n$  (algo que no debe sorprender mucho, pues recuerde que es el lugar donde residen los ceros de  $P_n$ ). Para librarnos de estas oscilaciones realizamos una segunda transformación, consistente en una factorización analítica de la matriz de salto, de la forma

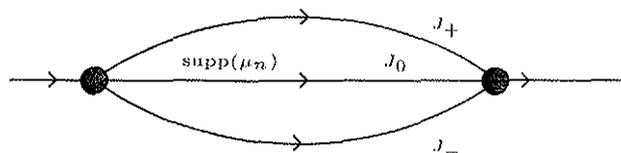
$$\begin{pmatrix} g^n(x) & 1 \\ 0 & g^{-n}(x) \end{pmatrix} = J_- J_0 J_+, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo  $J_- \approx I$  en  $\Im z < 0$  y  $J_+ \approx I$  en  $\Im z > 0$ .

Podemos interpretar el salto a través de  $\text{supp}(\mu_n)$  como combinación de tres saltos, tal y como se indica en la figura, donde sólo el salto a través de  $\text{supp}(\mu_n)$  es relevante y explícitamente soluble (y cuya solución es el “modelo” exterior que denotaremos por  $N(z)$ ).



La matriz  $TN^{-1}$  es  $\approx I$  en el  $\infty$  y tiene saltos  $\approx I$  en todas partes, excepto en los entornos de los extremos del soporte de  $\mu_n$ , pequeños discos que aparecen en la figura siguiente.



En esos entornos necesitamos construir “modelos locales”  $L$  que tengan los mismos saltos que  $T$  y se ajusten a  $N$  en la frontera de los discos. La solución (técnicamente complicada) se escribe en términos de funciones especiales. Cuáles exactamente depende del comportamiento local del peso de ortogonalidad  $w$ .

Como paso final, definimos

$$S = \begin{cases} TN^{-1}, & \text{lejos de los extremos de } \text{supp}(\mu_n), \\ TL^{-1}, & \text{cerca de los extremos de } \text{supp}(\mu_n). \end{cases}$$

Entonces  $S(z) \approx I$ ,  $z \rightarrow \infty$  y tiene saltos  $\approx I$  en todas partes. La conclusión (que siempre debe ser justificada cuidadosamente) es que  $S \approx I$  *uniformemente* en  $\mathbb{C}$ . Queda “despejar” la matriz original  $Y$  y mirar qué resultado hemos obtenido, digamos, para el polinomio  $P_n = Y_{11}$ .

Para terminar, volvamos al ejemplo del peso de ortogonalidad (19) que en la sección anterior nos permitió deducir la ecuación de Freud (22). ¿Cuál es el comportamiento asintótico de los coeficientes de recurrencia  $\alpha_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$  conjuntamente con el parámetro  $N$ , de tal modo que  $n/N \rightarrow \lambda$ ? Bleher e Its [15], usando el método recién descrito, probaron que existe un valor crítico  $\lambda_c = t^2/(4g)$  donde el comportamiento de  $\{\alpha_n\}$  tiene una bifurcación. Si  $n/N \rightarrow \lambda_c$ , el comportamiento de los  $\alpha_n$  se describe por... ¡una solución particular (llamada solución de Hastings-McLeod) de la ecuación Painlevé II (14)!

Resumiendo, los problemas de frontera, tanto discretos como continuos, juegan un papel fundamental en la teoría de los polinomios ortogonales. La versión discreta está íntimamente ligada con la recurrencia a tres términos, característica de dichos polinomios, y con la teoría espectral de operadores, mientras que el problema continuo en su versión matricial sirve de base para las potentes técnicas de Riemann-Hilbert, que se encuentran actualmente en pleno desarrollo, y que, es de esperar, darán importantes frutos en un futuro inmediato.

#### 4 Capacidad analítica continua y aproximación racional uniforme

La capacidad analítica continua de un conjunto compacto  $E \subset \mathbb{C}$  se define como

$$\alpha(E) = \sup |f'(\infty)|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones continuas en  $\mathbb{C}$ , analíticas en  $\mathbb{C} \setminus E$  que satisfacen  $|f(z)| \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  y  $f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty))$ . Para un conjunto general  $F$  tomamos  $\alpha(F) = \sup\{\alpha(E) : E \subset F, E \text{ compacto}\}$ .

Si en el supremo anterior renunciamos a la continuidad de  $f$  en  $\mathbb{C}$  (o sea solo pedimos que  $f$  sea analítica en  $\mathbb{C} \setminus E$  y  $|f(z)| \leq 1$  para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus E$ ), obtenemos la capacidad analítica  $\gamma$  del compacto  $E$ . Para  $F$  general se toma  $\gamma(F) = \sup\{\gamma(E) : E \subset F, E \text{ compacto}\}$ .

La noción de capacidad analítica continua fué introducida por Erokhin y Vitushkin (véase [37]) en los 1950's con vista a estudiar problemas de aproximación racional uniforme en subconjuntos compactos del plano complejo. Vitushkin probó que la capacidad analítica continua juega un papel central en este tipo de problemas.

Por otra parte, la capacidad analítica  $\gamma$  fué introducida por Ahlfors en los años 1940's [24] para el estudio del llamado problema de Painlevé, es decir, el problema de caracterizar geoméricamente los conjuntos de singularidades evitables de funciones analíticas acotadas. Recordamos que un conjunto compacto  $E \subset \mathbb{C}$  se dice que es evitable para funciones analíticas acotadas si para cualquier conjunto abierto  $\Omega$  que contiene a  $E$  toda función analítica y acotada en  $\Omega \setminus E$  tiene extensión analítica a  $\Omega$ .

Como  $\alpha$  resulta más útil que  $\gamma$  para problemas de aproximación racional uniforme, nos centraremos en la capacidad analítica continua. No obstante, el lector debe ser consciente que una buena comprensión de la capacidad  $\alpha$  no es factible sin un previo estudio de  $\gamma$ .

#### 4.1 Propiedades básicas de la capacidad analítica continua

Debe tenerse presente que la capacidad analítica continua mide el tamaño de un conjunto "en relación con funciones analíticas continuas y acotadas". Una consecuencia directa de la definición es que

$$E \subset F \Rightarrow \alpha(E) \leq \alpha(F).$$

Más aún, es fácil verificar que  $\alpha$  es invariante por traslación:

$$\alpha(z + E) = \alpha(E) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Con respecto a las dilataciones se tiene

$$\alpha(\lambda E) = |\lambda| \alpha(E) \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Además, si  $E$  es un abierto y conexo, entonces

$$\text{diam}(E)/4 \leq \alpha(E) \leq \text{diam}(E).$$

La segunda desigualdad (que se cumple para cualquier conjunto compacto  $E$ ) es consecuencia del hecho que la capacidad analítica continua de un disco coincide con su radio y la primera del teorema 1/4 de Koebe (ver, por ejemplo, [27, Chapter VIII] para más detalles).

## 4.2 Relación con la medida de Hausdorff

La relación entre la medida de Hausdorff y la capacidad analítica continua es la siguiente:

- Si  $\dim_H(E) > 1$  (aquí  $\dim_H$  representa la dimensión de Hausdorff), entonces  $\alpha(E) > 0$ . Esto es consecuencia directa del Lema de Frostman.
- Si  $\mathcal{H}^1(E) < \infty$ , donde  $\mathcal{H}^1$  es medida de Hausdorff unidimensional, o longitud, entonces  $\alpha(E) = 0$ . En particular, se deduce que si  $\dim_H(E) < 1$ , entonces  $\alpha(E) = 0$ .

De las afirmaciones anteriores resulta que la dimensión 1 es crítica en relación con la capacidad analítica continua. Más aún, surge una pregunta natural: es cierto que  $\alpha(E) > 0$  si y solo si  $\dim(E) > 1$  (o quizás si y solo si  $\mathcal{H}^1(E) = \infty$ )? Vitushkin demostró que la respuesta es negativa. Resulta que la caracterización de  $\alpha$  no es sólo cuestión del tamaño del conjunto  $E$ , sino también de la forma de  $E$ . En particular, la rectificabilidad juega un papel importante en la comprensión de  $\alpha$ , y aún más en el caso de  $\gamma$ . Para ilustrar este hecho reseñamos el siguiente resultado debido a Guy David [25] relativo a la capacidad analítica  $\gamma$  (aunque está más relacionado con el problema de Painlevé que con la aproximación racional):

**Theorem 2** *Sea  $E \subset \mathbb{C}$  un compacto con  $\mathcal{H}^1(E) < \infty$ . Entonces  $\gamma(E) = 0$  si y solo si  $E$  es puramente no rectificable; o sea, que intersecta a una curva rectificable a lo sumo en un conjunto de longitud zero.*

Este resultado, conocido anteriormente como conjetura de Vitushkin, resuelve el problema de Painlevé para conjuntos de longitud finita ya que un conjunto  $E$  es evitable para funciones analíticas acotadas si y solo si  $\gamma(E) = 0$ . Para ser más precisos, subrayamos que la parte “si” del teorema no es de David. De hecho se sigue del teorema de Calderón sobre la acotación  $L^2$  de la transformada de Cauchy sobre grafos de clase Lipschitz con constante de Lipschitz pequeña. La parte “solo si” del teorema, que es más difícil, es la probada por David. Vea también [31] y [29] para algunas contribuciones iniciales.

## 4.3 Teorema de Vitushkin sobre aproximación racional uniforme

Debemos introducir cierta terminología adicional relativa a la aproximación racional uniforme. Dado un compacto  $E \subset \mathbb{C}$  mediante  $R(E)$  denotamos el álgebra de las funciones complejas en  $E$  que son límite uniforme en  $E$  de funciones analíticas en una vecindad de  $E$  (o sea, cada función es analítica en una vecindad de  $E$ ). Recuérdese que el teorema de Runge implica que una función está en  $R(E)$  si y solo si es límite uniforme de funciones racionales con polos fuera de  $E$ .

Por  $A(E)$  denotamos el álgebra de aquellas funciones complejas que son continuas en  $E$  y analíticas en el interior  $E^\circ$  de  $E$ . Obviamente, tenemos que

$R(E) \subset A(E)$ . Estamos interesados en obtener criterios que permitan decidir cuándo  $A(E)$  coincide con  $R(E)$ . Equivalentemente, cuándo una función que es analítica en  $E^\circ$  y continua en  $E$  puede ser aproximada mediante funciones analíticas en una vecindad de  $E$ . Por ejemplo, si  $\mathbb{C} \setminus E$  es conexo, el teorema de Mergelyan afirma que  $A(E) = R(E)$ .

El siguiente teorema de Vitushkin es la solución del problema descrito anteriormente.

**Theorem 3** *Sea  $E \subset \mathbb{C}$  un compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a)  $R(E) = A(E)$ .
- (b)  $\alpha(\Delta \setminus E^\circ) = \alpha(\Delta \setminus E)$  para todo disco abierto  $\Delta$ .
- (c) Existe una constante  $C$  tal que  $\alpha(\Delta \setminus E^\circ) \leq C \alpha(\Delta \setminus E)$  para todo disco  $\Delta$ .

Como se mencionó anteriormente, este resultado da un criterio preciso para decidir cuando  $A(E) = R(E)$ . Su mayor inconveniente, al menos cuando Vitushkin lo demostró, era la ausencia de una caracterización métrica/geométrica de  $\alpha$ . Por ejemplo, hasta hace poco estuvo abierta la pregunta de si  $\alpha$  es semiaditiva como función de conjuntos; o sea, si

$$\alpha(E \cup F) \leq C(\alpha(E) + \alpha(F)),$$

para conjuntos compactos  $E, F \subset \mathbb{C}$ , donde  $C$  es una constante absoluta. Se demostró que una respuesta afirmativa a esta cuestión implicaría la así llamada "conjetura de la frontera interior" (ver [38, Conjecture 2]).

La frontera interior de  $E$ , que se denota mediante  $\partial_i E$ , es el conjunto de puntos frontera que no pertenecen a la frontera de ninguna de las componentes conexas de  $\mathbb{C} \setminus E$ . La conjetura de la frontera interior afirma que si  $\alpha(\partial_i E) = 0$ , entonces debe ser cierto que  $R(E) = A(E)$ . En el caso particular en que  $\dim_H(\partial_i E) < 1$  (que a su vez implica  $\alpha(\partial_i E) = 0$ ) Davie y Øksendal [26] demostraron que la conjetura es cierta; o sea,  $R(E) = A(E)$ .

#### 4.4 Caracterización de $\alpha$ en términos de la curvatura y la transformada de Cauchy

##### 4.4.1 La transformada de Cauchy y la curvatura de medidas

Dada una medida finita y compleja de Radon  $\nu$  en  $\mathbb{C}$ , la transformada de Cauchy de  $\nu$  es

$$C\nu(z) = \int \frac{1}{\xi - z} d\nu(\xi).$$

Aunque la integral anterior es absolutamente convergente casi dondequiera con respecto a la medida de Lebesgue, en general no tiene sentido para  $z \in \text{supp}(\nu)$ .

Esta es la razón por la que se considera la *transformada de Cauchy truncada* de  $\nu$ , que se define mediante

$$C_\varepsilon \nu(z) = \int_{|\xi-z|>\varepsilon} \frac{1}{\xi-z} d\nu(\xi),$$

para todo  $\varepsilon > 0$  y  $z \in \mathbb{C}$ .

Dada una medida positiva de Radon  $\mu$  y una función  $\mu$  medible  $f$  en  $\mathbb{C}$ , denotamos

$$C_\mu f(z) := C(f d\mu)(z)$$

para  $z \notin \text{supp}(f)$ , y

$$C_{\mu,\varepsilon} f(z) := C_\varepsilon(f d\mu)(z)$$

para todo  $\varepsilon > 0$  y  $z \in \mathbb{C}$ . Decimos que  $C_\mu$  está acotada en  $L^2(\mu)$  si los operadores  $C_{\mu,\varepsilon}$  están acotados en  $L^2(\mu)$  uniformemente con respecto a  $\varepsilon > 0$ .

Decimos que  $\mu$  tiene crecimiento lineal si existe alguna constante  $a > 0$  tal que  $\mu(B(z,r)) \leq ar$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ . La densidad lineal de  $\mu$  en  $x \in \mathbb{C}$  es (caso de que exista)

$$\Theta_\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r}.$$

Dados tres puntos distintos dos a dos  $x, y, z \in \mathbb{C}$ , su *curvatura Menger* es

$$c(x, y, z) = \frac{1}{R(x, y, z)},$$

donde  $R(x, y, z)$  es el radio de la circunferencia que pasa por  $x, y, z$  (con  $R(x, y, z) = \infty$ ,  $c(x, y, z) = 0$  si  $x, y, z$  están en una misma recta). Si dos de estos puntos coinciden hacemos  $c(x, y, z) = 0$ . Para una medida de Radon  $\mu$ , definimos la *curvatura de  $\mu$*  mediante

$$c^2(\mu) = \iint\int c(x, y, z)^2 d\mu(x)d\mu(y)d\mu(z). \quad (23)$$

La noción de curvatura de una medida fué introducida por Melnikov [32] al estudiar la versión discreta de la capacidad analítica. Es una de las ideas responsable de los grandes avances recientes en relación con la capacidad analítica. La noción de curvatura está conectada con la transformada de Cauchy por el siguiente resultado debido a Melnikov y Verdera [33].

**Proposition 4** *Sea  $\mu$  una medida de Radon en  $\mathbb{C}$  de crecimiento lineal. Tenemos*

$$\|C_\varepsilon \mu\|_{L^2(\mu)}^2 = \frac{1}{6} c_\varepsilon^2(\mu) + O(\mu(\mathbb{C})), \quad (24)$$

donde  $|O(\mu(\mathbb{C}))| \leq C\mu(\mathbb{C})$ .

En esta proposición  $c_\varepsilon^2(\mu)$  representa la versión  $\varepsilon$ -truncada de  $c^2(\mu)$  (definida como en la parte derecha de (23) pero con la integral triple sobre  $\{x, y, z \in \mathbb{C} : |x-y|, |y-z|, |x-z| > \varepsilon\}$ ).

La identidad (24) sorprende pues relaciona una noción analítica (la transformada de Cauchy de una medida) con una métrico-geométrica (la curvatura). Más aún, la noción de curvatura está relacionada con la de rectificabilidad (ver [29]), y existe una conexión fuerte con los coeficientes  $\beta$  que aparecen en el teorema de vendedor viajante de P. Jones [28].

#### 4.4.2 Resultados principales

El siguiente teorema demostrado en in [36] da una caracterización de  $\alpha$  in terminos de la curvatura de medidas de densidad cero y también en términos de estimados de Cauchy.

**Theorem 5** *Para todo compacto  $E \subset \mathbb{C}$ , tenemos*

$$\begin{aligned} \alpha(E) &\approx \sup\{\mu(E) : \text{supp}(\mu) \subset E, \Theta_\mu(x) = 0 \forall x \in E, c^2(\mu) \leq \mu(E)\} \\ &\approx \sup\{\mu(E) : \text{supp}(\mu) \subset E, \Theta_\mu(x) = 0, \|C\|_{L^2(\mu), L^2(\mu)} \leq 1\}, \end{aligned} \quad (25)$$

con constantes absolutas.

La notación  $A \approx B$  significa que  $A$  es comparable con  $B$ ; es decir, existe una constante absoluta positiva tal que  $C^{-1}A \leq B \leq CA$ . Por otra parte,  $\|C_\mu\|_{L^2(\mu), L^2(\mu)}$  denota la norma  $L^2(\mu)$  de la transformada de Cauchy; o sea,  $\|C_\mu\|_{L^2(\mu), L^2(\mu)} = \sup_{\varepsilon > 0} \|C_{\mu, \varepsilon}\|_{L^2(\mu), L^2(\mu)}$ .

Mencionamos que la demostración de este resultado usa herramientas de la teoría de Calderón-Zygmund con medidas no doblantes (en particular, requiere del así llamado teorema  $T(b)$  de Nazarov, Treil and Volberg [34]), así como ideas de la teoría de potencial y teoría geométrica de medidas. Véase también [30] para el caso particular pero importante de conjuntos de Cantor.

Como el último término de (25) es semiaditivo (con constante 1), deducimos que  $\alpha$  es numerablemente semiaditiva:

**Theorem 6** *Sean  $E_i$ ,  $i \geq 1$  conjuntos de Borel en  $\mathbb{C}$ . Entonces*

$$\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq C \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(E_i),$$

donde  $C$  es una constante absoluta.

Para resultados concernientes a la capacidad analítica  $\gamma$ , vea [35].

Como se mencionó anteriormente, la semiaditividad de  $\alpha$  implica la conjetura de la frontera interior:

**Theorem 7 (Conjetura de la frontera interior)** *Si  $\alpha(\partial_i E) = 0$ , entonces  $R(E) = A(E)$ .*

## References

- [1] A.I. APTEKAREV. *Multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. 99 (1998) 423–447.
- [2] A.I. APTEKAREV, F. MARCELLÁN, I.A. ROCHA. *Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi- Bessel polynomials*. J. Approx. Theory 90 (1997) 117–146.
- [3] A. APTEKAREV, H. STAHL, *Asymptotics of Hermite-Padé polynomials*. in: A. Gonchar, E.B. Saff (Eds.), Progress in Approximation Theory, vol. 19, Springer Ser. Comput. Math. Springer, Berlin, 1992, pp. 127–167.
- [4] M. BELLO, G. LÓPEZ, J. MÍNGUEZ. *Fourier-Padé approximants for Angelesco systems*. Preprint (2005); math. CA/0510611.
- [5] F. BEUKERS. *A note on the irrationality of  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$* . Bull. London Math. Soc. 11(33) (1978) 268–272.
- [6] J. BUSTAMANTE, G. LÓPEZ. *Hermite-Padé approximation to a Nikishin type system of analytic functions*,. Russian Ac. Sci. Sb. Math. 77 (1994) 367–384.
- [7] A.A. GONCHAR, E.A. RAKHMANOV. *The equilibrium measure and distribution of zeros of extremal polynomials*. Math. USSR-Sb. 53 (1986), 119–130.
- [8] A.A. GONCHAR, E.A. RAKHMANOV, V.N. SOROKIN. *On Hermite-Padé approximants for systems of functions of Markov type*. Sbornik Math. 188 (1997), 671–696
- [9] E.M. NIKISHIN, V.N. SOROKIN. *Rational approximations and orthogonality*. Transl. of Math. Monographs Vol. 92, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.
- [10] V.N. SOROKIN. *A transcendence measure for  $\pi^2$*  Sbornik Math. 187 (1986) 1819–1852.
- [11] H. STAHL, V. TOTIK. *General orthogonal polynomials*. Enc. Math. Vol. 43, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).
- [12] W. VAN ASSCHE, E. COUSSEMENT. *Some semiclassical multiple orthogonal polynomials*. J. Comp. Appl. Math. 127 (2001) 317–347.
- [13] M.J. ABLOWITZ, A.S. FOKAS. *Complex Variables. Introduction and Applications*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 2003.
- [14] J. BAIK, T. KRIECHERBAUER, K.T.R. MCLAUGHLIN, P. D. MILLER. *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a general class of discrete weights and universality results for associated ensembles: announcement of results*. Int. Math. Res. Not., 15 (2003), 821–858.

- [15] P. BLEHER, A.R. ITS. *Double scaling limit in the random matrix model: the Riemann-Hilbert approach*. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56 (2003), 433–516.
- [16] P. DEIFT, T. KRIECHERBAUER, K.T.R. MCLAUGHLIN, S. VENAKIDES, X. ZHOU. *A Riemann-Hilbert approach to asymptotic questions for orthogonal polynomials*. In *Proceedings of the Fifth International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and their Applications (Patras, 1999)*, volume 133, pages 47–63, 2001.
- [17] P.A. DEIFT. *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann-Hilbert approach*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999.
- [18] H. FLASCHKA, A.C. NEWELL. *Monodromy- and spectrum-preserving deformations. I*. *Comm. Math. Phys.*, 76 (1980), 65–116.
- [19] A.S. FOKAS, A.R. ITS, A.V. KITAEV. *The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity*. *Comm. Math. Phys.*, 147 (1992), 395–430.
- [20] A.R. ITS. *The Riemann-Hilbert problem and integrable systems*. *Notices Amer. Math. Soc.*, 50 (2003), 1389–1400.
- [21] A. MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, K.T.R. MCLAUGHLIN, E. B. SAFF. *Szegő orthogonal polynomials with respect to an analytic weight: canonical representation and strong asymptotics*. *Constr. Approx.*, 2005. in press.
- [22] E.B. SAFF, V. TOTIK. *Logarithmic Potentials with External Fields*, volume 316 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [23] W. VAN ASSCHE, J.S. GERONIMO, A.B.J. KUIJLAARS. *Riemann-Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials*. In *Special functions 2000: current perspective and future directions (Tempe, AZ)*, volume 30 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 23–59. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
- [24] L. AHLFORS, *Bounded analytic functions*, *Duke Math. J.* 14 (1947), 1–11.
- [25] G. DAVID. *Unrectifiable 1-sets have vanishing analytic capacity*. *Revista Mat. Iberoamericana* 14(2) (1998), 369–479.
- [26] A.M. DAVIE, B. ØKSENDAL. *Analytic capacity and differentiability properties of finely harmonic functions*. *Acta Math.* 149 (1982), 127–152.
- [27] T. GAMELIN, *Uniform Algebras*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1969.
- [28] P.W. JONES, *Rectifiable sets and the traveling salesman problem*, *Invent. Math.* 102 (1990), 1–15.

- [29] J.C. LÉGER, *Menger curvature and rectifiability*, Ann. of Math. 149 (1999), 831–869.
- [30] J. MATEU, X. TOLSA, J. VERDERA, *The planar Cantor sets of zero analytic capacity and the local  $T(b)$ -Theorem*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 19–28.
- [31] P. MATTILA, M.S. MELNIKOV, J. VERDERA, *The Cauchy integral, analytic capacity, and uniform rectifiability*, Ann. of Math. (2) 144 (1996), 127–136.
- [32] M.S. MELNIKOV. *Analytic capacity: discrete approach and curvature of a measure*. Sbornik: Mathematics 186 (1995), 827-846.
- [33] M.S. MELNIKOV, J. VERDERA. *A geometric proof of the  $L^2$  boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz graphs*. Internat. Math. Res. Notices (1995), 325-331.
- [34] F. NAZAROV, S. TREIL, A. VOLBERG. *How to prove Vitushkin's conjecture by pulling ourselves up by the hair*. Preprint (2000).
- [35] X. TOLSA, *Painlevé's problem and the semiadditivity of analytic capacity*, Acta Math. 190 (2003), 105–149.
- [36] X. TOLSA, *The semiadditivity of continuous analytic capacity and the inner boundary conjecture*, American J. Math. 126 (2004), 523–567.
- [37] A.G. VITUSHKIN, *The analytic capacity of sets in problems of approximation theory*. Russian Math. Surveys 22 (1967), 139-200.
- [38] A.G. VITUSHKIN, M.S. MELNIKOV. , *Analytic capacity and rational approximation*, Linear and complex analysis, Problem book, Lecture Notes in Math. 1403, Springer-Verlag, Berlin, 1984.