# *El teorema de Liapunov en el mecanismo de veto*

POR CARMELO NUÑEZ*

Presentada en la sesión científica
del día 2 de diciembre de 1.992

En 1972, D. Schmeidler proved that an atomless economy with finitely many commodities satisfies the following:

"If a coalition A improves upon an initial endowment by another allocation $x$, then, for every $\varepsilon > 0$, $\mu(A) < \varepsilon$, there exists $A_\varepsilon \subseteq A$ such that

i) $\mu(A_\varepsilon) = \varepsilon$

ii) $A_\varepsilon$ improves the initial endowment by the same allocation $x$.

We shown in this note that this result is, in general, false, when there are infinitely many commodities. Several related questions are raised.

## Introducción

**Definición 1.** Decimos que E es una economía de intercambio sin átomos cuando E se expresa de la forma siguiente:

$$\mathrm{E} = \{(\Omega, \Sigma, \mu), E, w(t), <_t, t \in \Omega\}$$

Expliquemos el significado de estos símbolos.

$(\Omega, \Sigma, \mu)$ es un espacio de medida sin átomos, siendo
$\Omega$ = conjunto de agentes.
$\Sigma$ = conjunto de coaliciones.
$\mu(A)$ = tamaño de la coalición $A$.

$E$ es un retículo de Banach que representa el espacio de mercancías. Si $E$ es de dimensión finita, el número de mercancías coincide con la dimensión de $E$.

---

* Departamento de Economía. Univ. Carlos III. Getafe. Madrid.

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto de investigación DGICYT PS91-0042.

$w:\Omega \to E_+$, la dotación inicial de la economía, es una aplicación $\mu$-integrable. Cualquier otra asignación factible $f:\Omega \to E_+$ ha de ser $\mu$-integrable y satisfacer la ecuación

$$\int_\Omega w = \int_\Omega f$$

$<_t$ simboliza las preferencias del agente $t$ en $E_+$. A menudo estas preferencias están representadas mediante una función de utilidad $U_t: E_+ \to \mathbf{R}$.

**Definición 2.** Dada la economía E, decimos que la coalición $A$ de agentes veta la dotación inicial $w$ vía la asignación factible $x$ cuando $x$ y $A$ cumplen:

i) $\int_A x = \int_A w$

ii) $x(t) >_t w(t), \forall t \in A$

Pues bien, el resultado más importante sobre el tamaño de las coaliciones vetadoras es el ya citado de Schmeidler. El teorema de Schmeidler es una aplicación directa del teorema de Liapunov, el cual afirma que una medida valorada en un espacio vectorial de dimensión finita tiene rango convexo.

El interés económico del teorema de Schmeidler radica en que podemos suponer la existencia de una relación directa entre el tamaño de una coalición y el coste de creación de la misma coalición. Como la coalición vetadora puede ser arbitrariamente pequeña, el resultado de Schmeidler nos asegura que el coste de creación de coaliciones vetadoras puede ser tan pequeño como queramos.

Probaremos a continuación que dicho enunciado no es cierto en el contexto de economías con infinitas mercancías.

Agradezco al profesor Carlos Hervés la generosa ayuda (no solo científica) prestada.

## 1. El ejemplo.

Sea $E$ el retículo de Banach $l^\infty$, esto es, el espacio de las sucesiones reales acotadas, con la norma del supremo y el orden natural. Y sea $(\Omega, \Sigma, \mu)$ el intervalo $(0,1)$, con la medida de Lebesgue.

$\forall j \in \mathbf{N}$ tomo $n(j)$, $h(j) \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ de esta manera:

$n(j)$ cumple que $2^{n(j)} \leq j < 2^{n(j)+1}$

$h(j) = j - 2^{n(j)}$

Pues bien, defino $w = (w_j : j = 1, \ldots)$ así:

$$w_j(t) = \begin{cases} C(j) & si\ t \in (h(j)/2^{n(j)}, (h(j)+1)/2^{n(j)}) = B_j \\ 0 & resto \end{cases}$$

$C(j) > 0$ lo elijo de forma que cumpla:

i) $C(j) = C(j')$ si $n(j) = n(j')$.

ii) $C(j) \to 0$ cuando $j \to \infty$.

Es evidente que, gracias a ii), $w \in L^\infty(\mu, l^\infty)$, siendo $\mu$ la medida de Lebesgue de (0,1), y $L^\infty(\mu, l^\infty)$ las funciones esencialmente acotadas y $\mu-$ integrables, en el sentido de Bochner.

Para cada $t \in (0,1)$, considero $U_t = U : l_+^\infty \to \mathbf{R}$

$$U(z_j : j = 1, \ldots) = \sum_{j \geq 1} \alpha(j) \sqrt{z_j}$$

Y exigimos a $\alpha(j) > 0$ que cumpla:

i) $\alpha(j) = \alpha(j')$ si $n(j) = n(j')$.

ii) $\sum_{j \geq 1} \alpha(j) < \infty$.

Llamando $C_n = C(j)$ y $\alpha_n = \alpha(j)$ cuando $n(j) = n$, observamos que $U$ cumple:

$$U(w_j(t)) \leq \sum_{n \geq 0} \alpha_n \sqrt{C_n} \quad \forall t \in (0,1)$$

convirtiéndose dicha desigualdad en estricta si $t \in D$, y en igualdad en caso contrario, siendo

$$D = \{k / 2^m : m \in \mathbf{N}, k = 1, \ldots, 2^m - 1\}$$

Pues bien, dicha asignación inicial $w$ puede ser claramente mejorada mediante la cooperación de todos los agentes.

Concreamente, la coalición formada por todos los agentes veta la dotación inicial $w$ mediante la asignación igualitaria

$$x=(x_j : j=1,\ldots) \text{ definida por } x_j(t)=C(j)/2^{n(j)}$$

Es evidente que

$$U(x_j(t))=\sum_{n\geq 0}\alpha_n\left(\sum_{2^n\leq j<2^{n+1}}\sqrt{C_n/2^n}\right)=$$

$$=\sum_{n\geq 0}\alpha_n\left(2/\sqrt{2}\right)^n\sqrt{C_n}>U\left(w_j(t)\right),\ \forall t\in(0,1)$$

Sin embargo, ¿qué sucede si tomamos la coalición $A$ de agentes, siendo $A\subset(0,1)$, $0<\mu(A)<1$?. Lo primero que debe cumplir dicha coalición para vetar la dotación inicial $w$ vía la asignación $x$ es:

$$(*)\quad \int_A w=\int_A x$$

Pues bien, dicha condición no puede satisfacerse. En efecto, observemos que si tomo $j>1$, $2^n\leq j<2^{n+1}$, las cordenadas j-ésimas de la ecuación (*) serían:

$$C(j)\,\mu(A\cap B_j)=\int_A w_j=\int_A x_j=(C(j)/2^{n(j)})\mu(A)$$

Tomando los términos extremos y eliminando $C(j)$, esas $2^n$ ecuaciones implican que

$$\mu(A\cap B_j)=\mu(A)/2^{n(j)}$$

Llamando $n(j)=n$, $h(j)=i$, puedo reescribir esas $2^n$ ecuaciones de la forma

$$\mu(A\cap(i/2^n,(i+1)/2^n))=\mu(A)/2^n$$

siendo $i=0,\ldots,2^n-1$. Eso significa que, si yo parto el intervalo (0,1) en los $2^n$ subintervalos de la forma $(i/2^n,(i+1)/2^n)$, siendo $i=0,\ldots,2^n-1$, la medida del conjunto $A$ queda distribuida de la misma manera entre dichos subintervalos.

Nuestra intuición nos dice que eso no puede suceder simultáneamente para todo $i$ y $n$. El teorema de diferenciación de Lebesgue nos confirma dicha intuición. En efecto, como $A$ es medible, consideremos la función

$$F_A(x)=\int_0^x \chi_A \, d\mu$$

El teorema citado nos dice que, salvo un conjunto $B$ de medida nula, $F'_A(x)=\chi_A(x)$. Sea

i) $x_0 \in (0,1)\setminus(D\cup B)$

ii) $a_m, b_m > 0$ tales que

$x_0 - b_m = k_m/2^m < x_0 < x_0 + a_m = (k_m+1)/2^m$

siendo $m \in \mathbf{N}$, $k_m \in \{0,\dots,2^m-1\}$. Entonces se cumple que

$$F'(x_0)=\lim_{m\to\infty}\frac{F(x_0+a_m)-F(x_0-b_m)}{a_m+b_m}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\mu((k_m/2^m,(k_m+1)/2^m)\cap A)}{1/2^m}=(**)$$

y ahora, debido a que la medida de $A$ está idénticamente distribuida sobre los subintervalos de la forma

$(i/2^n,(i+1)/2^n)$, resulta que

$\mu((k_m/2^m,(k_m+1)/2^m)\cap A)=\mu(A)/2^m$, luego

$(**)=\mu(A)$

lo que contradice el teorema citado de Lebesgue, pues $0<\mu(A)<1$, y, por otro lado, $\chi_A(x_0)$ será 0 ó 1.

## 2. Comentarios

1) El ejemplo anterior funciona debido a que no se cumple el teorema de Liapunov para la medida $m:\Sigma\to\mathbf{R}\times l^\infty$, siendo

$$m(A) = \int_A (1, w - x)\, d\mu$$

pues $m(\phi) = (0,0)$, $m((0,1)) = (1,0)$ y, como hemos visto,
$\forall A \in \Sigma$ se obtiene que $m(A) \neq (\alpha, 0)$, $\forall \alpha \in (0,1)$.

2) Lo que el ejemplo prueba realmente es que no se cumple el teorema de Schmeidler, en su versión fuerte, en el contexto de economías con infinitas mercancías. El teorema de Schmeidler, en otra versión más débil afirmaría lo siguiente:

"Si una coalición $A$ veta una dotación inicial $w$ por medio de una asignación $x$, entonces, para cada $\in > 0, \mu(A) < \varepsilon$, existe $A_\varepsilon \subseteq A$, y $x'$ *asignación posiblemente distinta de* $x$ tales que

i) $\mu(A_\varepsilon) = \varepsilon$

ii) $A_\varepsilon$ veta la dotación inicial $w$ por medio de la asignación $x'$ ".

No conocemos la solución a este problema. En el ejemplo anterior, tomando $A_{2\varepsilon}$ el conjunto $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$, se observa fácilmente que el citado conjunto veta la dotación inicial $w$ mediante la asignación factible $x' = \left(x_j'\right)$ definida por

$$x_j' = x_j, \forall j = 1,2,3, \; ; \; x_j' = w_j, \forall j > 3$$

Por supuesto, una versión aún más débil del teorema de Schmeidler sería sustituyendo $x'$ por $x_\varepsilon$, siendo $x_\varepsilon$ *asignación dependiente de* $\varepsilon$.

3) El ejemplo visto en la sección 1 se simplifica bastante si tomamos $C(j) = 1, \forall j$. Sin embargo, en este último caso, el precio a pagar es que la dotación inicial $w$ es una función integrable en el sentido de Pettis, pero no en el sentido de Bochner. Más detalles acerca de estas integrales pueden consultarse en (3), capítulo II.

4) La elección de $l^\infty$ como retículo de Banach es gratuita. De hecho, tomamdo $C(j)$ tal que $\sum_{j \geq 1} C(j) < \infty$, el ejemplo es válido en cualquier retículo de Banach que contenga una sucesión básica incondicional. Esto incluye a

todos los retículos de Banach que contengan a un subretículo infinito-dimensional orden-continuo, como puede comprobarse en (4), teorema 1c9.

5) Entre las buenas propiedades de las preferencias definidas por la función de utilidad $U$ (estricta convexidad, estricta monotonía, continuidad, etc.) debe destacarse la miopía. Esta propiedad, cuando se posee, afirma que la función de utilidad es orden-continua, o lo que es lo mismo, las coordenadas con mayor subíndice son cada vez menos importantes.

Destacamos esta propiedad porque existen ejemplos que ponen de manifiesto que, con preferencias no miopes, puede darse la inexistencia de asignaciones óptimas.

Más detalles pueden consultarse en (1) o (2).

## Bibliografía

1. M. ALI KHAN y N.C. YANNELIS (Eds.): *"Equilibrium theory in infinite-dimensional spaces"*. Ed. Springer-Verlag. Heidelberg, 1991.
2. C.D. ALIPRANTIS, D.J. BROWN y O. BURKINSHAW: *"Existence and optimality of competitive equilibria"*. Ed. Srpinger-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1989.
3. J. DIESTEL y J.J. UHL, Jr.: *"Vector measures"*. Ed. American Mathematical Society. Providence, 1977.
4. J. LINDENSTRAUSS y L. TZAFRIRI: *"Classical Banach spaces"*. Ed. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 1979.
5. D. SCHMEIDLER: *"A remark on the core of an atomless economy"*. Econometrica 40, pp. 579-580, 1972.