



est/ps

trikenside

Arter Nial

Bujalancu



D. VENANCIO ÁLVAREZ GONZÁLEZ

con D.N.I.: 11.426.507.

A U T O R I Z A :

Que su tesis doctoral con el título
"ESTRUCTURA DE SUPERFICIES DE RIEMANN,
DESIGUALDADES ISOPERIMÉTRICAS Y MEDIDA
P-ARMÓNICA EN GRAFOS"
pueda ser utilizada para fines de investigación por parte
de la Universidad Carlos III de Madrid.

Leganés ,2 de junio de 1.999.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Venancio", with a stylized flourish underneath.

Fdo.: Venancio Álvarez González

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Matemáticas



Estructura de superficies de Riemann, desigualdades isoperimétricas y medida p -armónica en grafos

Venancio Alvarez González
22 de marzo de 1999

Programa de Doctorado en Ingeniería Matemática

Director de tesis: José Manuel Rodríguez García
Codirector: Domingo Pestana Galván



A mis padres

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincera gratitud a mi director de tesis José Manuel Rodríguez sin quien este trabajo no hubiera sido posible y que no sólo ha sido para mí un verdadero maestro sino también un amigo y un ejemplo a seguir como persona. Gracias también a Domingo Pestana, mi codirector de tesis por toda su ayuda y por saber hacer más llevaderas las horas de investigación.

Tengo que dar mis gracias más expresivas a Dmitry V. Yakubovich a quien conocí por un capricho del destino y que hizo que mi vida diera un gran giro cuando me puso en contacto con José Manuel y Domingo.

Gracias a todos los que me han ayudado en mi investigación científica: José Luis Fernández, Elena Romera, Jesús Gonzalo y todo el grupo de variable compleja de la Universidad Autónoma.

Muchas gracias a todo el departamento de Matemáticas de la universidad Carlos III de Madrid por todo su apoyo, en especial a quienes han sido mis compañeros de despacho, Sorín Micu, Rodolfo Cuerno y Ariel Sánchez. Gracias también a mis alumnos por los buenos ratos que he pasado dando clase.

Por último, muchas gracias al Círculo Mágico de Madrid, a la orquesta de Leganés, a la Orquesta de las escuelas de música de Madrid, a las sesiones de música celta de la Taberna Elisa y muy especialmente a mi violín por haberme ayudado a mantener bajo mi nivel de estrés todos estos años.

Índice General

Agradecimientos	iii
1 Introducción	1
1.1 La métrica hiperbólica	1
1.1.1 Métrica en un dominio	1
1.1.2 La métrica de Poincaré	2
1.2 Superficies de Riemann	3
1.2.1 Definición	4
1.2.2 Ejemplos	4
1.2.3 Aplicaciones conformes	4
1.2.4 Superficies de Riemann hiperbólicas	5
1.2.5 Dominios planos	6
1.2.6 Punturas y foniles	7
1.3 El exponente de convergencia	9
1.4 La desigualdad isoperimétrica	11
1.4.1 Ejemplos	11
1.4.2 Resultados previos	12
1.4.3 Dominios geodésicos	12
1.5 Estructura de la tesis	13
1.5.1 Descomposición de superficies	13
1.5.2 Desigualdad isoperimétrica en superficies de Riemann con punturas	14
1.5.3 Desigualdad isoperimétrica en dominios de Denjoy	16
1.5.4 Desigualdad isoperimétrica en superficies de Riemann generales	16
1.5.5 Medida p -armónica	17
1.6 Notaciones	17
2 Un Teorema de descomposición de superficies	19
2.1 Introducción	19
2.1.1 Notaciones	20
2.2 Definiciones y resultados	20
2.3 Geodésicas y dominios geodésicos	21
2.4 Demostración de los resultados	23
3 Superficies de Riemann con punturas	29
3.1 Introducción	29
3.2 Demostración del Teorema 3.1	30
3.3 Collares y bolas	35

4	Dominios de Denjoy	41
4.1	Introducción	41
4.1.1	Notaciones	41
4.1.2	Definiciones y resultados	42
4.2	Prueba del Teorema 4.1.	43
4.3	Propiedad DIL en dominios de Denjoy	51
4.4	Desigualdad isoperimétrica, polarización y simetrización	58
4.5	Dominios geodésicos con tres curvas frontera	58
4.6	Un problema abierto	60
5	Superficies de Riemann generales	63
5.1	Introducción	63
5.2	Generalización de los resultados	63
5.3	Localización	77
6	Medida p-Armónica	79
6.1	Introducción	79
6.2	Pruebas de los Teoremas 6.1 y 6.2	87
6.2.1	El caso de ν arbitraria	90
6.3	Pruebas de los Teoremas 6.3 y 6.4	90
6.4	Demostración del Teorema 6.5	93
6.5	Demostración de los Teoremas 6.6 y 6.7	97
6.6	El caso $p = \infty$	98

Capítulo 1

Introducción

El tema principal de esta memoria es el estudio de la desigualdad isoperimétrica lineal en superficies de Riemann, aunque también se abordan otros temas afines. En este primer capítulo vamos a introducir algunos conceptos que serán de gran importancia para poder exponer los resultados obtenidos y describiremos de forma breve cuáles son estos.

1.1 La métrica hiperbólica

1.1.1 Métrica en un dominio

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio (abierto y conexo), entonces una *métrica* en Ω es una función continua $\lambda(z) \geq 0$ en Ω que se anula a lo sumo en un conjunto discreto y que es dos veces diferenciable en $\{z \in \Omega : \lambda(z) > 0\}$. Si $z \in \Omega$ y $\xi \in \mathbb{C}$ es un vector entonces definimos la *longitud* de ξ en z como

$$\|\xi\|_{\lambda,z} := \lambda(z)|\xi|,$$

donde $|\xi|$ denota la longitud euclídea.

En análisis clásico estas métricas se llaman a veces *métricas conformes* y se suelen escribir de la forma $\lambda(z)|dz|$ y a la función λ se le llama *densidad de la métrica*.

Dada una curva continuamente diferenciable $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ vamos a definir su longitud en la métrica λ como

$$L_\lambda(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\lambda,\gamma(t)} dt.$$

La longitud de una curva continuamente diferenciable a trozos se define como la suma de las longitudes de sus trozos continuamente diferenciables.

Cuando la métrica que estamos considerando es la función constante $\lambda(z) = 1$ (métrica euclídea) esta definición coincide con la definición usual de longitud (longitud euclídea).

Utilizaremos también la siguiente notación

$$L_\lambda(\gamma) = \int_\gamma \lambda(z)|dz|.$$

Sean dos puntos $p, q \in \Omega$, definimos la λ -*distancia* entre p y q en la métrica λ como

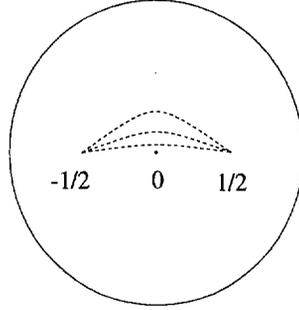
$$d_\lambda(p, q) = \inf\{L_\lambda(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}_\Omega(p, q)\},$$

donde $\mathcal{C}_\Omega(p, q)$ es el conjunto de todas las curvas continuamente diferenciables a trozos $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ tales que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Se puede denotar también como d_Ω si la métrica se sobreentiende.

Se puede demostrar que la función $d_\lambda : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia y (Ω, d_λ) es un espacio métrico.

Obsérvese que si $\lambda(z) = 1$ y $\Omega = \mathbb{C}$ entonces d_λ es la distancia euclídea usual.

En general no tiene por qué existir la curva de menor longitud que une dos puntos, como se puede ver en la figura, donde hemos representado el disco menos un punto $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ con la restricción de la métrica euclídea y vemos que no existe ninguna geodésica que una los puntos $-1/2$ y $1/2$. Por esta razón es necesario usar el *ínfimo* en la definición de d_λ .



1.1.2 La métrica de Poincaré

En el disco unidad abierto $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ podemos definir una métrica que va a jugar un papel muy importante en esta tesis. Se trata de la métrica de Poincaré

$$\lambda(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}.$$

Hay que señalar que algunos autores utilizan otra constante en el numerador. Lo interesante es que el disco con esta métrica es una superficie con curvatura constante negativa. El coeficiente 2 en el numerador es la constante adecuada para obtener curvatura $K = -1$ (si pusiéramos 1 en el numerador obtendríamos curvatura -4). En este contexto, es decir, cuando tenemos un dominio en el plano, la curvatura se puede calcular con la fórmula (ver [Kra90, Capítulo 2])

$$K(z) = \frac{-\Delta \log \lambda(z)}{\lambda(z)^2}.$$

Obsérvese que como λ es dos veces diferenciable, esta fórmula tiene sentido. La curvatura es un invariante conforme.

La métrica de Poincaré posee propiedades muy interesantes; por ejemplo, coincide con las métricas de Carathéodory y Kobayashi (ver [Kra90, Capítulo 3]).

“Precisamente fue Henri Poincaré quién descubrió que las isometrías de \mathbb{D} (con esta métrica) son exactamente las aplicaciones de Möbius del disco en sí mismo. Por isometrías entendemos funciones que preservan distancias y también orientación. Podemos citar al mismo Poincaré en una conferencia que pronunció en la Sociedad Psicológica de París (tomado de [Poi95])

Por entonces salí de Caen, donde a la sazón vivía, para participar en una excursión geológica organizada por la escuela de minas. Las incidencias del viaje me hicieron olvidar mis trabajos matemáticos. En determinado momento, estábamos en Coutances y habíamos de subir a un ómnibus para desplazarnos a otro sitio. Justo al poner el pie en el estribo, sin que ninguno de mis pensamientos precedentes pareciera haberla propiciado, me vino la idea de que las transformaciones que había usado para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la geometría no euclídea. No proseguí el razonamiento, ni hubiese tenido ocasión de ello, pues me senté en mi asiento y continué una conversación previa, pero estaba completamente seguro. A mi retorno a Caen lo comprobé concienzudamente, por pundonor.”

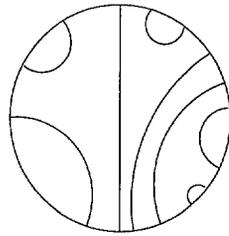
Este grupo de isometrías, al que se denota por $\text{Möb}(\mathbb{D})$, es el conjunto de transformaciones

$$\text{Möb}(\mathbb{D}) = \left\{ T : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \quad \text{tal que} \quad T(z) = e^{i\theta} \frac{z+a}{1+\bar{a}z} \quad \text{con } a \in \mathbb{D} \text{ y } \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

En la métrica de Poincaré es posible calcular explícitamente cual es la distancia entre dos puntos del disco (ver [Kra90, Capítulo 1])

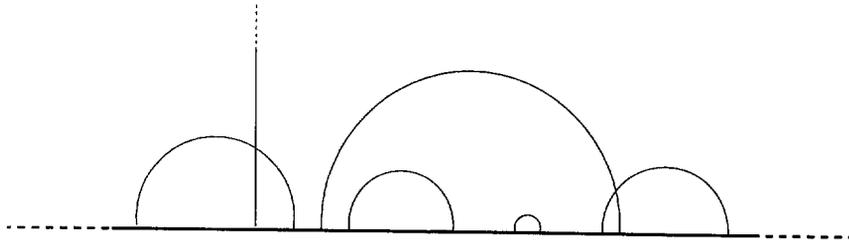
$$d_\lambda(p, q) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{p-q}{1-\bar{p}q} \right|}{1 - \left| \frac{p-q}{1-\bar{p}q} \right|} \right).$$

El disco con esta métrica constituye un modelo para la geometría hiperbólica, en el que las geodésicas (curvas que minimizan la distancia localmente) son los arcos de circunferencia perpendiculares a $\partial\mathbb{D}$ y los diámetros.



La geometría hiperbólica verifica todos los axiomas de Euclides excepto el quinto. En esta geometría dada una recta r y un punto p exterior a ella existen infinitas rectas paralelas a r que contienen el punto p .

Otro modelo, conforme e isométricamente equivalente a éste, es el semiplano superior con la métrica $\lambda(z) = 1/y$ que denotaremos por \mathbb{U} .



Por el Teorema de la aplicación de Riemann, cualquier simplemente conexo Ω contenido propiamente en el plano, es equivalente a éstos con la métrica que verifica $\lambda_\Omega(f(z))|f'(z)| = \lambda_{\mathbb{D}}(z)$, donde $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ es una aplicación biholomorfa.

Veremos después (subsección 1.2.4) cómo la métrica de Poincaré se puede trasladar a una superficie más general.

1.2 Superficies de Riemann

Intuitivamente una superficie de Riemann es una variedad diferenciable de dimensión dos tal que los cambios de carta son funciones holomorfas.

El concepto de superficie de Riemann se puede introducir desde diferentes puntos de vista. Nosotros vamos a usar la teoría de aplicaciones conformes porque de este modo subrayamos sus aspectos geométricos (las funciones conformes preservan ángulos y orientación). Se pueden dar definiciones esencialmente equivalentes usando funciones analíticas o usando la teoría de funciones armónicas.

1.2.1 Definición

Sea \mathcal{S} un espacio topológico Hausdorff y conexo. Vamos a imponerle a \mathcal{S} unas condiciones en forma de relaciones entre una familia de homeomorfismos locales. Sea $\{(V_\alpha, h_\alpha)\}$ una familia de cartas locales con las siguientes propiedades:

1. Los conjuntos V_α forman un cubrimiento abierto de \mathcal{S} .
2. Cada h_α es un homeomorfismo de V_α en un subconjunto abierto del plano complejo \mathbb{C} .
3. Si $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, entonces el cambio de carta $h_{\alpha\beta} := h_\beta \circ h_\alpha^{-1}$ es una aplicación conforme en $h_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$.

Se dice que una familia de cartas locales que cumpla estas condiciones es una *base* para una *estructura conforme* en \mathcal{S} . (ver la definición exacta de estructura conforme en [AS60, p. 114]).

Definición. Una *superficie de Riemann* (\mathcal{S}, Ψ) es un par ordenado donde \mathcal{S} es un espacio topológico Hausdorff y conexo y Ψ una familia de homeomorfismos locales en \mathcal{S} que definen una estructura conforme en \mathcal{S} .

Muchas veces utilizaremos la notación \mathcal{S} en lugar de (\mathcal{S}, Ψ) . Está claro que topológicamente una superficie de Riemann es una superficie. Además, como todas las aplicaciones de la forma $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ conservan la orientación, \mathcal{S} es una superficie orientable.

Si las aplicaciones h_α tuvieran como rango un abierto en la topología relativa del semiplano superior cerrado, en lugar de un abierto de \mathbb{C} se hablaría de superficie de Riemann con borde.

1.2.2 Ejemplos

Para el plano complejo, o cualquier subregión del plano complejo, la aplicación identidad se puede considerar como una base para una estructura conforme. A no ser que se diga expresamente lo contrario siempre consideraremos esta estructura para el plano complejo.

En el caso de la esfera $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, consideraremos una base formada por dos aplicaciones, la identidad definida en \mathbb{C} , y la aplicación $z \rightarrow 1/z$ definida para $z \neq 0$ y extendida al punto del infinito por $\infty \rightarrow 0$. Estas dos aplicaciones determinan una estructura conforme y la esfera con esta estructura se denomina *esfera de Riemann*.

Hay que señalar también que a cualquier subregión \mathcal{S}_1 (subconjunto abierto y conexo) de una superficie de Riemann se le puede dotar de estructura de superficie de Riemann sin más que considerar las restricciones de las cartas locales a \mathcal{S}_1 . Siempre que hablemos de una subregión, estaremos considerando esta estructura inducida.

Toda variedad topológica admite una base tal que los cambios de carta son de clase C^∞ . Si además es orientable, las coordenadas isotermales permiten elegir una base tal que los cambios de carta son conformes.

1.2.3 Aplicaciones conformes

Es posible definir aplicaciones holomorfas entre dos superficies de Riemann. Empezaremos considerando el caso de una *función holomorfa* que es una aplicación de una superficie de Riemann en el plano complejo.

Definición. Diremos que una *función compleja* $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ es *holomorfa* en la superficie de Riemann \mathcal{S} si y sólo si $f \circ h^{-1}$ es analítica en $h(V)$, en el sentido clásico, para toda carta local (V, h) .

En el caso de aplicaciones entre dos superficies de Riemann la definición es como sigue.

Definición. Una aplicación continua f entre una superficie de Riemann S_1 y otra superficie de Riemann S_2 se dice holomorfa si toda función de la forma $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$ con h_1 carta local de S_1 y h_2 carta local de S_2 es analítica en su dominio de definición.

Si h_1 y h_2 están definidas en los dominios V_1 y V_2 respectivamente, la composición $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$ está definida en $h_1(V_1 \cap f^{-1}(V_2))$. La continuidad de f garantiza que este dominio sea abierto. Es fácil ver que estas dos definiciones coinciden cuando $S_2 = \mathbb{C}$ tomando como h_2 la aplicación identidad.

Si f es biyectiva hablamos de aplicación conforme. En este caso se puede demostrar fácilmente que f es un homeomorfismo y que f^{-1} es holomorfa. Si existe una aplicación conforme entre dos superficies de Riemann decimos que son *conformemente equivalentes*. Uno de los problemas centrales en la teoría de superficies de Riemann es encontrar condiciones explícitas para la equivalencia conforme.

En muchos contextos también es necesario considerar estructuras más generales. En particular, será necesario en ocasiones considerar aplicaciones y funciones diferenciables no necesariamente holomorfas.

1.2.4 Superficies de Riemann hiperbólicas

Vamos a introducir una clase de superficies de Riemann que son de gran interés debido a que van a heredar del disco unidad la métrica hiperbólica (de una forma que precisaremos más adelante) lo cual constituye una herramienta muy potente para generalizar resultados clásicos en el plano complejo (como por ejemplo el Teorema de Picard) a superficies.

Sea \mathcal{R} una superficie de Riemann. Un *cubrimiento* de \mathcal{R} es un par (S, f) donde S es una superficie de Riemann y $f : S \rightarrow \mathcal{R}$ es holomorfa y homeomorfismo local. Si (S_1, f_1) es un cubrimiento de \mathcal{R} , y (S_2, f_2) es una superficie de cubrimiento de S_1 , está claro que entonces $(S_2, f_1 \circ f_2)$ es de nuevo un cubrimiento, que diremos *más fuerte*, de \mathcal{R} . Obsérvese que si dos cubrimientos son mutuamente uno más fuerte que el otro, entonces son conformemente equivalentes y pueden considerarse esencialmente el mismo.

Se puede demostrar (ver [Ahl73]) que existe un cubrimiento de \mathcal{R} que es *el más fuerte* de todos. Tal cubrimiento $(\tilde{\mathcal{R}}, \pi)$ se llama *cubrimiento universal* de \mathcal{R} y tiene la propiedad de que su grupo fundamental $\Pi_1(\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{p}_0)$ con punto base $\tilde{p}_0 \in \tilde{\mathcal{R}}$, es trivial. En otras palabras, $\tilde{\mathcal{R}}$ es una superficie simplemente conexa.

Si \mathcal{R} es una superficie de Riemann y $\pi : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \mathcal{R}$ es su cubrimiento universal, llamamos *grupo de cubrimiento* Γ de \mathcal{R} (asociado a π) al grupo de transformaciones biholomorfas $\gamma : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}$ tales que $\pi \circ \gamma = \pi$ (lo que equivale a decir que p y $\gamma(p)$ tienen la misma proyección). Un hecho realmente sorprendente es que Γ es isomorfo al grupo fundamental $\Pi_1(\mathcal{R}, p_0)$ (ver [Ahl73]).

El grupo Γ actúa discontinuamente y sin puntos fijos y \mathcal{R} es conformemente equivalente a $\tilde{\mathcal{R}}/\Gamma$. En sentido recíproco, dado cualquier grupo Γ de transformaciones biholomorfas $\gamma : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}$ que actúe discontinuamente y sin puntos fijos, $\tilde{\mathcal{R}}/\Gamma$ es una superficie de Riemann y $\pi : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \tilde{\mathcal{R}}/\Gamma$ es su recubrimiento universal. Un tal grupo Γ se llama un *grupo Fuchsiano* si $\tilde{\mathcal{R}} = \mathbb{D}$.

Como queda dicho más arriba, dada una superficie de Riemann \mathcal{R} , su recubrimiento universal $\tilde{\mathcal{R}}$ ha de ser una superficie simplemente conexa. El Teorema de uniformización nos dice que existen muy pocas superficies simplemente conexas.

Teorema de uniformización. ([Ahl73, p. 142]) *Toda superficie de Riemann simplemente conexa $\tilde{\mathcal{R}}$ es conformemente equivalente al disco unidad \mathbb{D} del plano complejo, al propio plano complejo \mathbb{C} , o a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Por tanto $\tilde{\mathcal{R}}$ tiene que ser una de estas tres superficies: \mathbb{D} , \mathbb{C} o $\hat{\mathbb{C}}$.

Si $\tilde{\mathcal{R}} = \hat{\mathbb{C}}$, entonces \mathcal{R} ha de ser necesariamente $\hat{\mathbb{C}}$, ya que $\hat{\mathbb{C}}$ sólo puede ser espacio recubridor de sí mismo.

Si $\tilde{\mathcal{R}} = \mathbb{C}$, el grupo de cubrimiento ha de estar formado necesariamente por transformaciones del tipo $\gamma(z) = z + a$ para que no haya puntos fijos en \mathbb{C} . Como además, el grupo debe actuar discontinuamente, Γ ha de ser o bien el grupo trivial o bien debe tener uno o dos generadores. Por tanto \mathcal{R} tiene que ser conformemente equivalente a \mathbb{C} , $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, o a un toro, respectivamente (hay toda una variedad unidimensional de toros no conformemente equivalentes entre sí). Nótese a modo de ilustración que en el caso $\mathcal{R} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ podemos tomar como aplicación recubridora la función exponencial.

Por último, todas aquellas superficies \mathcal{R} que tienen como recubridor universal al disco \mathbb{D} se llaman *superficies hiperbólicas*. Todas las demás (que como hemos visto son muy pocas) se llaman *superficies excepcionales*.

Es conveniente señalar que esta definición de superficie de Riemann hiperbólica no es aceptada universalmente, ya que a veces la palabra *hiperbólica* se refiere a la existencia de función de Green.

Hay que señalar también que en general es muy difícil calcular explícitamente la aplicación recubridora; de hecho, esto sólo se puede hacer en casos muy particulares.

Vamos a ver ahora cómo el disco unidad \mathbb{D} va a inducir una métrica (la métrica hiperbólica) en la superficie \mathcal{R} .

Dada cualquier superficie de Riemann hiperbólica \mathcal{R} , si $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{R}$ es su recubrimiento universal, y dada $T \in \text{Möb}(\mathbb{D})$, entonces $\pi \circ T : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{R}$ es también un recubrimiento universal y de hecho estos son todos los posibles. Por tanto, al elegir un cubrimiento universal podemos fijar $\pi(0)$.

Obsérvese ahora que el grupo de cubrimiento Γ asociado a $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{R}$ es un subgrupo de $\text{Möb}(\mathbb{D})$ y como \mathcal{R} es conformemente equivalente a \mathbb{D}/Γ , los grupos Fuchsianos Γ que podemos elegir son únicos salvo conjugación por un elemento de $\text{Möb}(\mathbb{D})$. En otras palabras, existe una biyección entre el conjunto de superficies de Riemann (salvo equivalencia conforme) y el conjunto de subgrupos Fuchsianos de $\text{Möb}(\mathbb{D})$ (salvo conjugación). Por otro lado, como Γ es un grupo de isometrías en la métrica de Poincaré de \mathbb{D} , puede proyectarse dicha métrica mediante π obteniéndose una métrica Riemanniana conforme, completa y con curvatura $K = -1$ en $\mathcal{R} = \mathbb{D}/\Gamma$, la métrica hiperbólica o de Poincaré. Siempre que no se diga expresamente lo contrario, toda superficie de Riemann hiperbólica se considera con la métrica de Poincaré.

Una superficie de Riemann hiperbólica dotada de su métrica hiperbólica es un espacio métrico completo cuya topología coincide con la de la superficie original. Además, dados dos puntos distintos, siempre existe una geodésica que los une, y dada una curva simple cerrada no trivial ni homótopa a una puntura (ver sección 1.2.6), existe una única geodésica simple cerrada en su misma clase de homotopía libre. Con la métrica hiperbólica, las aplicaciones conformes son isometrías. Una aplicación conforme entre dos superficies de Riemann hiperbólicas es una isometría.

En relación a las subsuperficies de una superficie dada (dotadas de sus respectivas métricas hiperbólicas) se tienen resultados como estos:

Si \mathcal{S}_1 es una subsuperficie de la superficie de Riemann hiperbólica \mathcal{S}_2 , entonces $d_{\mathcal{S}_1}(p, q) \geq d_{\mathcal{S}_2}(p, q)$, para todo $p, q \in \mathcal{S}_1$. Si además σ una curva simple cerrada en \mathcal{S}_1 , denotemos por γ_j la geodésica simple cerrada (si existe) libremente homótopa a σ en \mathcal{S}_j ($j = 1, 2$). Entonces $L_{\mathcal{S}_1}(\gamma_1) \geq L_{\mathcal{S}_2}(\gamma_2)$.

1.2.5 Dominios planos

Un caso particular de superficies de Riemann hiperbólica es el de los dominios planos, es decir, los dominios contenidos en $\hat{\mathbb{C}}$ dotados de su métrica hiperbólica. Algunos autores opinan que son las superficies de Riemann hiperbólicas más interesantes.

Si $\Omega = \mathcal{R}$ es un dominio plano, su métrica hiperbólica es *conforme* con la métrica euclídea, esto es,

$$ds = \lambda_{\Omega}(z)|dz|, \quad z \in \Omega.$$

Las métricas $\lambda_{\mathbb{D}}(z)$ y $\lambda_{\Omega}(z)$ verifican la relación

$$\lambda_{\Omega}(\pi(z))|\pi'(z)| = \lambda_{\mathbb{D}}(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

donde $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ es el cubrimiento universal.

Conocer $\lambda_{\Omega}(z)$ es tan difícil como conocer π , pero existen ciertas cotas (ver [Ahl73]) para λ_{Ω} , a saber:

Como consecuencia del Lema de Schwarz se tiene que

$$\lambda_{\Omega}(z) \leq \frac{2}{d(z, \partial\Omega)}, \quad z \in \Omega,$$

donde d denota la distancia euclídea.

Usando el Teorema 1/4 de Koebe, se ve que

$$\lambda_{\Omega}(z) \geq \frac{1}{2d(z, \partial\Omega)}, \quad z \in \Omega,$$

si Ω es simplemente conexo. Esta desigualdad, con otra constante en lugar de $1/2$, también es cierta para una clase más amplia de dominios, los llamados *dominios modulados* (ver su definición en la sección 1.5.2).

Unas buenas estimaciones de la métrica λ_{Ω} para un dominio plano general aparecen en [BP78]:

Teorema. *Para cualquier dominio plano $\Omega \subset \mathbb{C}$ se tiene*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \lambda_{\Omega}(z) d(z, \partial\Omega) (k + \beta_{\Omega}(z)) \leq 2k + \frac{\pi}{2}, \quad \text{para todo } z \in \Omega, \quad (1.1)$$

donde

$$\beta_{\Omega}(z) := \inf \left\{ \left| \log \frac{|z-a|}{|b-a|} \right| : a, b \in \partial\Omega, |z-a| = d(z, \partial\Omega) \right\}, \quad (1.2)$$

y $k := 4 + \log(3 + 2\sqrt{2})$. La cota inferior se puede mejorar hasta conseguir

$$1 \leq \lambda_{\Omega}(z) d(z, \partial\Omega) (4.76 + \beta_{\Omega}(z)).$$

Este Teorema será de gran utilidad en el Capítulo 4

1.2.6 Punturas y foniles

En esta sección vamos a presentar dos conceptos que aparecerán con mucha frecuencia a lo largo de esta tesis. Se trata de estudiar cómo son los “finales” doblemente conexos de una superficie de Riemann.

Una *puntura* es una región de una superficie de Riemann isométrica al subconjunto $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < e^{-2\pi}\}$ de la superficie $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ dotada con la métrica

$$ds = \frac{|dz|}{|z| \log \frac{1}{|z|}}$$

(ver por ejemplo [Ber85]).

Toda puntura en una superficie S se origina por un elemento parabólico en el grupo Fuchsiano que representa a la superficie. Por conjugación siempre se puede suponer que este elemento parabólico

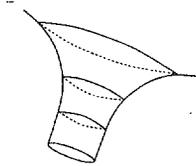
es la transformación $Tz = z + 1$, y por tanto, existirá una región $A = \{0 \leq x < 1, y > \eta\}$ para algún η suficientemente grande, tal que si $\pi : \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{U}/\Gamma$ es el recubrimiento universal asociado a este grupo, π aplica inyectivamente la región A en un entorno de la puntura, y lleva las líneas verticales en \mathbb{U} sobre las geodésicas que “emanan” de la puntura.

Si \mathcal{S} es un dominio plano las punturas de \mathcal{S} son los puntos aislados de $\partial\mathcal{S}$.

Una puntura es isométrica a una pseudoesfera dotada con la restricción de la métrica euclídea de \mathbb{R}^3 , de hecho es la única región de una superficie de Riemann hiperbólica que podemos *ver* en \mathbb{R}^3 , la curvatura -1 hace que ninguna otra región *quepa* en el espacio. Una pseudoesfera es una superficie de revolución obtenida al girar una curva tratriz alrededor del eje y (ver [Nee97]). Históricamente fue uno de los primeros modelos para la geometría hiperbólica.



Un *fonil* es una superficie de Riemann hiperbólica con borde que es topológicamente un cilindro (cerrado sólo por un lado) y cuyo borde es una geodésica simple cerrada. Dado un número positivo a , existe un único fonil (salvo transformación conforme) tal que su curva frontera tiene longitud a . Todo fonil es conformemente equivalente, para algún $\beta > 1$, al subconjunto $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| < \beta\}$ de la superficie de Riemann hiperbólica $\{z \in \mathbb{C} : 1/\beta < |z| < \beta\}$. Un fonil no *cabe* en \mathbb{R}^3 pero a veces se representa así:



Si bien una puntura y un fonil son topológicamente equivalentes (son homeomorfos a un cilindro), sus métricas son muy distintas. En primer lugar, la puntura tiene área finita y el fonil infinita. Además en una puntura existen curvas no triviales de longitud arbitrariamente pequeña, sin embargo en el fonil la curva no trivial más corta es la geodésica que lo limita.

Todo *final* doblemente conexo de una superficie de Riemann hiperbólica es una puntura o un fonil.

Vamos a definir ahora un concepto que guarda relación con las punturas. Un concepto análogo para geodésicas se define en el Capítulo 5.

Definición. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica con una puntura p . Llamamos collar en S alrededor de p a un dominio doblemente conexo en S “limitado” por p y por una curva de Jordan ortogonal al haz de geodésicas que emanan de p . Un collar de área α se denomina α -collar y se denota por $C(p, \alpha)$.

Un hecho bien conocido (Lema del collar [Shi63] y [Kra72, p. 60–61]) sobre los collares es que siempre existen α -collares alrededor de todas las punturas siempre que α sea positivo y menor o igual que 1. Además, la longitud de la curva frontera coincide con el área del collar (ver por ejemplo [Ber85]).

También se tiene el siguiente resultado (ver por ejemplo [Ber85]).

Lema A. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica con una puntura r . Entonces, tenemos

$$C(r, 1) \cap \gamma = \emptyset,$$

para cualquier geodésica simple cerrada γ en \mathcal{S} .

Decimos que una curva es homótopa a una punta r si es libremente homótopa a $\partial C(r, \alpha)$ para algún (y por tanto para todo) $0 < \alpha < 1$.

1.3 El exponente de convergencia

Sea \mathcal{S} una superficie de Riemann hiperbólica. Consideremos una curva cerrada γ con punto base $p \in \mathcal{S}$. Denotaremos por $[\gamma]$ la clase de homotopía de γ en el grupo fundamental de \mathcal{S} , $\Pi_1(p, \mathcal{S})$. Podemos definir entonces

$$L([\gamma]) = \inf\{L_S(\eta) : \eta \in [\gamma]\}, \quad (1.3)$$

donde $L_S(\eta)$ denota la longitud de la curva η en la métrica hiperbólica de la superficie \mathcal{S} . Para $t > 0$ definimos

$$U_t(p) = \sum_{[\gamma] \in \Pi_1(\mathcal{S}, p)} \exp(-tL([\gamma])),$$

que involucra simultáneamente longitudes y clases de curvas, es decir, geometría y topología.

Obsérvese que esta definición es válida para toda variedad Riemanniana n -dimensional.

De la propia definición se deduce que $\log U_t$ es una función Lipschitz en \mathcal{S} ; de hecho se tiene que

$$|\log U_t(p) - \log U_t(q)| \leq 2t d_S(p, q),$$

siempre que U_t sea finita en p o en q . Esto tiene como consecuencia que si U_t es finita en un punto, entonces también lo es en cualquier otro punto de \mathcal{S} .

Veremos a continuación que podemos dar otra expresión de la función U_t en términos de su grupo Γ de transformaciones recubridoras.

Sea $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{S} = \mathbb{D}/\Gamma$ un recubridor universal con $\pi(0) = p$ y sea γ una curva cerrada en \mathcal{S} con punto base p . Denotemos por $\tilde{\gamma}$ la elevación de γ a \mathbb{D} que comienza en 0 y acaba, digamos, en $z \in \mathbb{D}$. Por el Teorema de monodromía, este punto final z es el mismo para la elevación de cualquier curva homótopa a γ que comience en 0. Además $z = T(0)$ para una única $T \in \Gamma$. Si σ es el segmento (arco geodésico en \mathbb{D}) que une 0 con z , se tiene

$$L_S(\pi \circ \sigma) = L_{\mathbb{D}}(\sigma) \leq L_{\mathbb{D}}(\tilde{\gamma}) = L_S(\eta)$$

para toda $\eta \in [\gamma]$, ya que σ es la curva más corta que une 0 y z y como además $\pi \circ \sigma \in [\gamma]$, se tiene que en (1.3), $L([\gamma])$ es de hecho un mínimo y

$$L([\gamma]) = L_S(\pi \circ \sigma) = d_{\mathbb{D}}(0, T(0)) = \log \frac{1 + |T(0)|}{1 - |T(0)|}.$$

Por tanto, la expresión que buscábamos para U_t es

$$U_t(p) = \sum_{T \in \Gamma} \left(\frac{1 - |T(0)|}{1 + |T(0)|} \right)^t,$$

y como $1 \leq (1 + |T(0)|)^t \leq 2^t$, tenemos que

$$U_t < \infty \iff \sum_{T \in \Gamma} (1 - |T(0)|)^t < \infty.$$

Por otro lado es conocido ([Tsu59, p. 516], [Nic89, p.21]) que si $t > 1$, $U_t(p)$ es finito. Por tanto resulta natural definir el exponente de convergencia de \mathcal{S} (o de Γ) como

$$\delta(\mathcal{S}) = \delta(\Gamma) = \inf\{t : U_t(p) < \infty\} = \inf\left\{t : \sum_{T \in \Gamma} (1 - |T(0)|)^t < \infty\right\},$$

esto es, la abscisa de convergencia de $U_t(p)$. Obsérvese que se obtiene el mismo exponente de convergencia si se sustituye 0 por cualquier otro punto de \mathbb{D} , ya que esto sólo supone conjugación en el grupo Γ . Se sigue de todo lo dicho que $\delta(S)$ está en el intervalo $[0, 1]$. Además $\delta(S) = 0$ sólo en el caso de que S sea conformemente equivalente a un disco o a un anillo.

En cierto sentido, δ mide el tamaño de la *frontera* de S . Si consideramos los anillos $S_t = \{z \in \mathbb{C} : t < |z| < 1\}$, para $t \in [0, 1)$, observamos que todos ellos son homeomorfos, por tanto, sus grupos de homotopía son isomorfos (aunque no se puede conseguir que el homeomorfismo que existe entre dos de ellos sea conforme). Sin embargo, la geometría (hiperbólica) de S_0 es radicalmente distinta a la de cualquier otro S_t con $t > 0$ ya que en S_t cualquier curva no trivial tiene longitud al menos $2\pi^2/\log(1/t)$, mientras que en S_0 hay curvas no triviales de longitud arbitrariamente pequeña. La causa es que la frontera de S_0 es “más pequeña” que la de S_t . Esto lo detecta el exponente de convergencia, ya que $\delta(S_0) = 1/2$ y para $t \in (0, 1)$, $\delta(S_t) = 0$.

El exponente de convergencia que acabamos de definir es invariante por transformaciones conformes y está estrechamente ligado a otros invariantes conformes, como veremos a continuación. Aquí la palabra “conforme” se refiere a aplicaciones conformes que además son homeomorfismos.

Consideremos el operador de Laplace-Beltrami de la superficie o más brevemente, su laplaciano (por convenio, se elige como signo del laplaciano el que lo convierte en un operador semidefinido positivo). Se define entonces $\Delta\varphi = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$. El menor autovalor del laplaciano para el problema de Dirichlet con valor 0 en ∞ se puede definir en términos del cociente de Rayleigh como

$$b(S) = \inf_{\varphi \in C_c^\infty(S)} \frac{\iint \|\operatorname{grad}\varphi\|^2 dw}{\iint \varphi^2 dw},$$

donde $\|\cdot\|$, grad y dw se refieren a la métrica de Poincaré de S y ambas integrales están extendidas a S .

Obsérvese que la integral de Dirichlet es un invariante conforme, es decir, si S es un dominio plano, entonces

$$\iint_S \|\operatorname{grad}\varphi\|^2 dw = \iint_S |\nabla\varphi|^2 dx dy,$$

donde ahora $|\cdot|$, ∇ y $dx dy$ se refieren a la métrica euclídea en la segunda integral. Para comprobar esto basta con observar que $\operatorname{grad}\varphi = \lambda^{-2}\nabla\varphi$, $\|\cdot\|^2 = \lambda^2|\cdot|^2$ y $dw = \lambda^2 dx dy$. Estas fórmulas son ciertas para cualquier métrica conforme λ en un abierto de \mathbb{R}^2 y no sólo para la métrica de Poincaré.

Los autovalores del laplaciano son las frecuencias fundamentales que emitiría una membrana elástica que tuviera la forma de la superficie S . Por eso a veces se llaman superficies *bass* a las que cumplen $b(S) = 0$, es decir, las que dan las notas más bajas. Nótese que la traducción del término inglés *bass* es “bajo”, o sea, el cantante que tiene una tesitura más grave.

El número $b(S)$ está en el intervalo $[0, 1/4]$ y un célebre teorema de Elstrodt, Patterson y Sullivan [Sul87, p. 333] lo relaciona con el exponente de convergencia $\delta(S)$. El Teorema de Elstrodt, Patterson y Sullivan asegura que

$$b(S) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si } 0 \leq \delta(S) \leq \frac{1}{2}, \\ \delta(S)(1 - \delta(S)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq \delta(S) \leq 1. \end{cases}$$

Un teorema de Myrberg [Tsu59, p. 522] establece que si $\delta(S) < 1$ entonces S tiene función de Green, o equivalentemente, que posee funciones superarmónicas positivas no constantes (ver [AS60, p. 204] o [Tsu59, p. 434]). Por tanto, si S tiene género finito, S tiene funciones armónicas no constantes con integral de Dirichlet finita [AS60, p. 208], [SN70, p. 332]. En el caso general, la conclusión es también cierta con hipótesis adicionales [Rod94a]. De cualquier manera, existe una superficie de Riemann S_0 que tiene género infinito y $\delta(S_0) < 1$ tal que las constantes son las únicas

funciones armónicas positivas en \mathcal{S}_0 [Rod94b]. Recordemos que si existe una función armónica no constante con integral de Dirichlet finita, entonces existe una función armónica no constante positiva (de hecho, acotada).

Se define el conjunto límite $\Lambda(\Gamma)$ como el mínimo cerrado de $\partial\mathbb{D}$ que es invariante por la acción de Γ , o también como el conjunto de puntos de acumulación de la órbita $\Gamma(0)$ de 0 (en realidad se puede tomar la órbita de cualquier otro punto de \mathbb{D}). El conjunto límite cónico $C(\Gamma)$ es un importante subconjunto de $\Lambda(\Gamma)$ que se define como el conjunto de los $\xi \in \Lambda(\Gamma)$ tales que alguna subsucesión de $\Gamma(0)$ está dentro de algún cono de Stolz con vértice en ξ . Un cono de Stolz con vértice $\xi \in \mathbb{D}$ y apertura $\lambda \in (0, \pi/2)$ es el conjunto de los $z \in \mathbb{D}$ tales que el ángulo entre ξ y $\xi - z$ es a lo sumo λ y además $|z - \xi| < 2 \cos \lambda$. Si Γ es finitamente generado, ambos conjuntos límite coinciden salvo un conjunto numerable (el conjunto de puntos fijos de los elementos parabólicos del grupo).

Un conocido teorema de Patterson y Sullivan dice que $\delta(\mathcal{S})$ coincide con la dimensión de Hausdorff del conjunto límite cónico $C(\Gamma)$ excepto si $\mathcal{S} = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ (ver por ejemplo [Nic89, p. 154]).

1.4 La desigualdad isoperimétrica

En esta sección introduciremos el concepto de desigualdad isoperimétrica, y veremos su relación con el exponente de convergencia.

Decimos que \mathcal{S} satisface la *desigualdad isoperimétrica lineal* (DIL) o simplemente la desigualdad isoperimétrica, si \mathcal{S} es una superficie de Riemann hiperbólica y existe una constante $h > 0$ tal que para todo dominio relativamente compacto G con frontera suave se tiene que

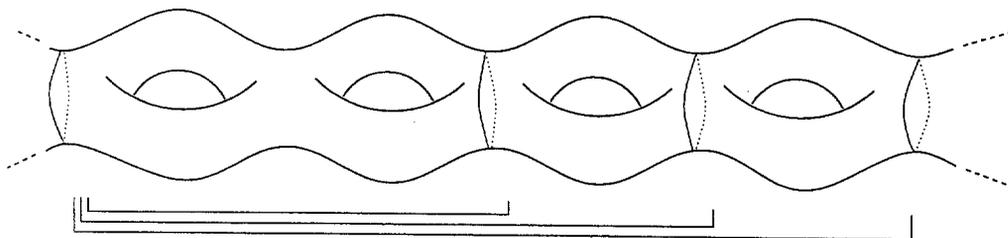
$$A_{\mathcal{S}}(G) \leq hL_{\mathcal{S}}(\partial G), \quad (1.4)$$

donde $A_{\mathcal{S}}(G)$ denota el área (hiperbólica) de G y $L_{\mathcal{S}}(\partial G)$ la longitud (hiperbólica) de su frontera. Un argumento de aproximación da que si \mathcal{S} satisface DIL, entonces (1.4) también es cierto para dominios con área finita. También hay que señalar que si ∂G no fuera una curva rectificable su longitud sería infinita y también se verificaría (1.4) por lo que pedir frontera suave no es una restricción. Denotamos por $h(\mathcal{S})$ la mejor constante que puede aparecer en (1.4).

1.4.1 Ejemplos

Está claro que una superficie con área finita no puede satisfacer DIL: la propia superficie es un subdominio de área finita y su frontera es el vacío, por tanto tiene longitud cero.

Otro ejemplo de superficie que no tiene DIL es el siguiente *toro con infinitos agujeros*. Como puede verse en la figura hay una sucesión de dominios cuya área va creciendo hacia infinito, y sin embargo todos tienen una frontera de la misma longitud.



Por último vamos a demostrar que el disco unidad con la métrica hiperbólica verifica DIL. La curvatura -1 implica que $\lambda_{\mathbb{D}}^2 = \Delta \log \lambda_{\mathbb{D}}$. Por otra parte, con un cálculo directo obtenemos que $\nabla \log \lambda_{\mathbb{D}}(z) = (x\lambda_{\mathbb{D}}(z), y\lambda_{\mathbb{D}}(z))$. Si B es un dominio del disco relativamente compacto y con frontera

suave obtenemos

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{D}}(B) &= \iint_B \lambda_{\mathbb{D}}^2(z) \, dx dy = \iint_B \Delta \log \lambda_{\mathbb{D}}(z) \, dx dy = \int_{\partial B} \langle \nabla \log \lambda_{\mathbb{D}}(z), \vec{n} \rangle |dz| \\ &\leq \int_{\partial B} |\nabla \log \lambda_{\mathbb{D}}(z)| |dz| \leq \int_{\partial B} \lambda_{\mathbb{D}}(z) |dz| = L_{\mathbb{D}}(\partial B), \end{aligned}$$

donde \vec{n} es la normal unitaria exterior a ∂B , y el laplaciano, el gradiente y el producto escalar son todos euclídeos. Por tanto, el disco unidad verifica la desigualdad isoperimétrica con constante $h(\mathbb{D}) \leq 1$, de hecho utilizando círculos centrados en el origen se puede demostrar que $h(\mathbb{D})$ es exactamente igual a 1.

1.4.2 Resultados previos

Es bien conocido (ver por ejemplo [Cha84, p. 95], [Che70], [FR90, Teorema 2]) que

$$\frac{1}{4} \leq b(S) h(S)^2 \quad \text{y} \quad b(S) h(S) \leq C < \frac{3}{2},$$

donde C es una constante absoluta.

Por tanto, S satisface DIL si y sólo si $b(S) > 0$ ó, equivalentemente, $\delta(S) < 1$.

Una superficie de Riemann S se dice que es de *tipo finito* si su grupo fundamental $\Pi_1(p, S)$, $p \in S$, es finitamente generado. En otro caso decimos que S es de *tipo infinito*. Es bien conocido que toda superficie de Riemann de tipo finito se puede obtener de una superficie de Riemann compacta quitando p puntos (las punturas de S) y n discos cerrados (cuyas fronteras representan la frontera ideal de S). También es un hecho conocido que una superficie de Riemann de tipo finito tiene DIL si y sólo si $n > 0$ ó, equivalentemente, si S tiene área infinita. Por tanto, a pesar de que la mayoría de nuestros resultados son ciertos independientemente del tipo de la superficie de Riemann considerada, estaremos interesados especialmente en superficies de Riemann de tipo infinito.

Hay gran cantidad de preguntas que surgen de forma natural en el estudio de la propiedad DIL de las superficies de Riemann. Particularmente interesantes son las cuestiones que conciernen a la estabilidad bajo aplicaciones cuasiconformes, su relación con otros invariantes conformes (de los cuales ya hemos hablado) y su caracterización para dominios planos (ver Capítulo 4).

En relación al estudio de la estabilidad de DIL, en [FR90, Teorema 1] se demuestra que si dos superficies de Riemann son cuasiconformemente equivalentes y una de ellas tiene DIL, entonces la otra también la tiene. Es sorprendente que si bien las aplicaciones cuasiconformes no conservan longitudes ni áreas, sí conservan la propiedad DIL.

1.4.3 Dominios geodésicos

Un *dominio geodésico* en una superficie de Riemann S es un dominio $G \subset S$ (que no es ni simple ni doblemente conexo) de área finita y tal que su frontera ∂G consiste en una cantidad finita de geodésicas simples cerradas. No es necesario que G sea relativamente compacto ya que puede “rodear” un número finito de punturas. Podemos pensar en las punturas como una geodésica de longitud cero. Recordemos que si γ es una curva simple cerrada en S , entonces existe una única geodésica simple cerrada de longitud mínima en su clase de homotopía libre, a no ser que γ sea homótopa a un punto o a una puntura; en estos casos no es posible encontrar tal geodésica porque hay curvas en la clase de homotopía con longitud arbitrariamente pequeña.

Los dominios geodésicos juegan un papel importante en el estudio de la desigualdad isoperimétrica de una superficie de Riemann. En [FR90, Lema 1.2] se prueba que si S verifica (1.4) para dominios geodésicos, entonces satisface la desigualdad isoperimétrica lineal. De hecho, si $h_g(S)$ es el ínfimo de

las constantes h tales que la desigualdad (1.4) es cierta para cualquier dominio geodésico, entonces se tiene que

$$h(S) \leq h_g(S) + 2.$$

1.5 Estructura de la tesis

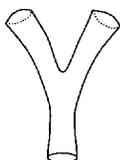
Hemos organizado la tesis en un capítulo introductorio y cinco capítulos temáticos. El primero de éstos recoge los resultados aparecidos en el artículo “Structure Theorems for Riemann and Topological Surfaces” escrito con José Manuel Rodríguez. Los tres siguientes capítulos se basan en el extenso artículo “Isoperimetric Inequalities in Riemann Surfaces of Infinite Type” escrito en colaboración con José Manuel Rodríguez y Domingo Pestana y que está aceptado para su publicación en la Revista Matemática Iberoamericana. Por último, el capítulo restante recoge los resultados obtenidos en el artículo “Estimates for nonlinear Measures on Trees” escrito conjuntamente con José Manuel Rodríguez y Dmitry V. Yakubovich. A continuación esbozaremos el contenido de cada capítulo.

1.5.1 Descomposición de superficies

El Teorema de Clasificación de superficies compactas dice que toda superficie topológica compacta orientable es homeomorfa a un toro de género g con $g = 0, 1, 2, \dots$ (ver [Mas67]). Estamos utilizando el convenio de que una esfera es un toro de 0 agujeros o *asas*.

Este teorema de clasificación también se puede ver como un teorema de descomposición ya que todo toro con g *asas* ($g \geq 2$) se puede descomponer en un número finito ($2g - 2$) de Y -piezas.

Una Y -pieza es un espacio topológico homeomorfo a la clausura de una esfera a la que le hemos quitado tres cerrados simplemente conexos disjuntos, es decir, una superficie con borde cuyo borde es la unión de tres curvas simples cerradas disjuntas. Una Y -pieza se puede visualizar como un tubo con la forma de la letra “Y”. A veces se llaman también piezas *pantalón*.



En este Capítulo vamos a obtener, como corolario del teorema principal, una generalización de este resultado (del Teorema de Clasificación) para superficies orientables no compactas. Para ello necesitamos introducir otro tipo de pieza.

Decimos que un subconjunto cerrado de una superficie topológica es un *cilindro* si es homeomorfo a $S^1 \times [0, \infty)$, donde S^1 denota la esfera 1-dimensional, o sea, la circunferencia.

Teorema 2.1. *Toda superficie topológica orientable excepto la esfera, el plano y el toro es la unión (con interiores disjuntos dos a dos) de Y -piezas y cilindros.*

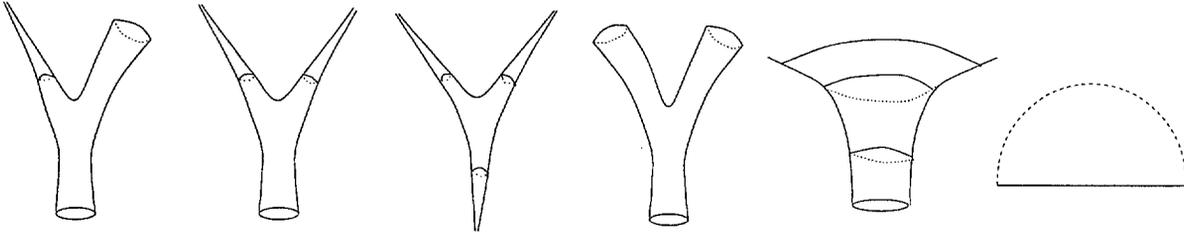
El Teorema principal de este capítulo es análogo al Teorema 2.1 pero en el contexto de superficies de Riemann. Vamos a descomponer una superficie de Riemann hiperbólica en una colección de bloques básicos con la propiedad adicional de que las curvas por donde hacemos la descomposición van a ser geodésicas.

Dado que una superficie de Riemann hiperbólica los *finales* simplemente conexos, o sea, los cilindros, pueden ser conformemente equivalentes a una puntura o a un fonil, vamos fabricar tres tipos de *ladrillos* básicos pegando Y -piezas (que en este contexto se llaman piezas de Löbell) y punturas y dejando los foniles como piezas aparte. Las definiciones precisas se encuentran en la sección 2.2 del Capítulo 2.

Para poder descomponer con éxito una superficie necesitamos añadir un tipo de pieza distinto, se trata del semiplano.

Un *semiplano* es una superficie de Riemann hiperbólica con borde que es topológicamente un semiplano y cuyo borde es una geodésica simple. Todo semiplano es conformemente equivalente al subconjunto $\{z \in \mathbb{D} : \Re z \geq 0\}$ del disco hiperbólico \mathbb{D} . Un semiplano es conformemente equivalente a un semidisco, y a menudo los identificaremos.

Con lo dicho hasta ahora el conjunto de tipos de *ladrillos* básicos para descomponer una superficie de Riemann hiperbólica es el siguiente:



Nótese que la tercera pieza (unión de una Y-pieza y tres punturas, o equivalentemente, la esfera menos tres puntos) es por sí misma una superficie de Riemann completa y no forma parte de la descomposición de ninguna otra superficie.

El teorema principal de este capítulo dice así:

Teorema 2.2. *Toda superficie de Riemann hiperbólica excepto $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ es la unión (con interiores disjuntos dos a dos) de foniles, semidiscos y un conjunto G para el que existe una exhaustión por dominios geodésicos. Además, si la superficie no es \mathbb{D} o un anillo, el conjunto G aparece siempre en la descomposición.*

Veremos más tarde (ver Proposición 2.2) que G es una unión de Y-piezas.

También tenemos una versión de ambos teoremas para superficies con borde. En este capítulo también veremos un ejemplo donde se comprueba que es imprescindible utilizar semidiscos en la descomposición.

1.5.2 Desigualdad isoperimétrica en superficies de Riemann con punturas

En este capítulo demostramos un resultado (Teorema 3.1) que nos va a permitir reducir el estudio de la propiedad DIL de una superficie de Riemann al de una nueva superficie más sencilla porque no va tener punturas. Este resultado es una generalización de un Teorema que aparece en [FR90].

A continuación vamos a introducir el concepto de dominio modulado que es necesario para entender los resultados previos que existen sobre este tema.

Los dominios modulados, en lo que respecta a Teoría de funciones, se van a comportar casi como si fueran simplemente conexos (ver [BP78]).

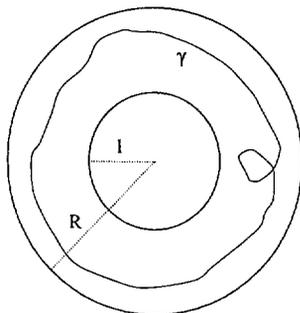
Antes de ver la definición de dominio modulado, definiremos lo que se entiende por módulo de una familia de curvas.

Dado un dominio G y una familia Γ de curvas en G , se define el módulo de Γ como

$$\text{Mod}(\Gamma) = \inf_{\rho} \iint_G \rho^2 dx dy,$$

donde el ínfimo se toma sobre toda las métricas conformes ρ en G tales que $\int_{\gamma} \rho |dz| \geq 1$ para toda $\gamma \in \Gamma$.

Un caso de particular interés es cuando G es un doblemente conexo y Γ es la familia de curvas homótopas a las dos componentes de ∂G , en este caso también se habla de módulo de G . Se puede demostrar que si G es un anillo con radios 1 y R entonces $\text{Mod}(G) = 2\pi \log R$.



El producto del módulo de un anillo por la longitud de su geodésica simple cerrada es constante.

Un dominio G se dice *modulado* si existe una cota superior para el módulo de todo subdominio doblemente conexo que separe la frontera de G . Intuitivamente podemos entender un dominio modulado como aquel que no contiene anillos (que separen frontera) con proporción entre radios arbitrariamente grandes. Un simplemente conexo es modulado (porque no existen tales doblemente conexos) y un dominio cuya frontera contenga un punto aislado no es modulado.

En [FR90, Teorema 3] se demuestra que los dominios modulados siempre cumplen la desigualdad isoperimétrica (DIL).

También existe una caracterización de estos dominios en términos de la métrica hiperbólica: un dominio plano hiperbólico Ω , $\Omega \subset \mathbb{C}$, es modulado si y sólo si $\lambda_\Omega(z) \delta_\Omega(z) \asymp 1$, para $z \in \Omega$ ([BP78, Corolario 1]). La constante en \asymp depende de Ω (ver la definición de $A \asymp B$ en la sección 1.6).

En [FR90, Teorema 3] se demuestra que si un dominio G es modulado y $\{a_n\}$ es una sucesión uniformemente separada en la métrica hiperbólica de G entonces $G \setminus \{a_n\}$ tiene DIL. Una sucesión es *uniformemente separada* si existe una constante c tal que

$$d_G(a_n, a_m) > c, \quad \text{para todo } n \neq m.$$

Recíprocamente, también se demuestra en [FR90, Teorema 4] que si $H \subset \hat{\mathbb{C}}$ tiene DIL, y $G = H \cup I$, donde I es el conjunto de puntos aislados de ∂H , entonces I es uniformemente separada en la métrica hiperbólica de G .

El propósito del Capítulo 3 es generalizar estos resultados a superficies de Riemann hiperbólicas, no necesariamente planas. Para ello necesitamos una definición.

Definición. Un subconjunto I de una superficie de Riemann hiperbólica S es fuertemente uniformemente separado en S , si existe una constante positiva r_0 tal que las bolas hiperbólicas $B_S(p, r_0)$, donde $p \in I$, son simplemente conexas y disjuntas dos a dos.

Obsérvese que en un espacio métrico cualquiera, las bolas no tienen porqué ser simplemente conexas. Basta considerar un cilindro (euclídeo) de radio r y una bola de radio mayor que πr .

El Teorema que hemos obtenido dice entonces:

Teorema 3.1. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica, sea I un subconjunto cerrado y contable de S y $\mathcal{R} = S \setminus I$. Entonces, \mathcal{R} tiene DIL si y sólo si S tiene DIL y además I es fuertemente uniformemente separado en S .

En este mismo capítulo aparecen también unos resultados técnicos relacionados con las punturas, que si bien no son indispensables para probar el Teorema 3.1 sí tienen interés en sí mismos y como herramientas para demostrar otros resultados (ver Capítulo 5).

La Proposición 3.1 que no enunciamos aquí por ser demasiado técnica, relaciona los collares alrededor de una puntura p en una superficie S con las bolas (hiperbólicas) en la superficie $S \cup \{p\}$. Lo interesante del resultado es que las constantes que aparecen son universales.

1.5.3 Desigualdad isoperimétrica en dominios de Denjoy

Uno de los problemas más interesantes relacionados con la desigualdad isoperimétrica es obtener una caracterización de la propiedad DIL para dominios planos en términos euclídeos del tamaño de su frontera. Es decir, nos gustaría, dado un dominio plano, saber si tiene DIL o no sin más que *ver con ojos euclídeos* cómo es su frontera. Nótese que, considerado como superficie de Riemann hiperbólica, un dominio plano no tiene frontera estrictamente hablando.

En [FR90] se obtiene una condición necesaria y otra suficiente para que un dominio plano tenga DIL, pero ninguna de ellas constituye una caracterización para la desigualdad isoperimétrica en este tipo de dominios.

En este capítulo vamos a encontrar una caracterización (Teorema 4.4) que es válida en una clase amplia de dominios planos, los dominios de Denjoy. Un *dominio de Denjoy* es un dominio plano hiperbólico cuya frontera está incluida en $\hat{\mathbb{R}}$.

Además de esta caracterización, obtenemos una condición necesaria y otra suficiente más sencillas que la caracterización general y que pueden ser de utilidad en la práctica (Teorema 4.1).

El primer lema importante que aparece en este capítulo (Lema 4.1) nos permite reducir el estudio de la desigualdad isoperimétrica en un dominio de Denjoy a la comprobación de (3.1) para sólo una clase muy pequeña de dominios, los llamados *dominios geodésicos simétricos* lo cual va a simplificar enormemente la prueba de los teoremas.

A continuación establecemos una biyección entre estos dominios y lo que llamamos *conjuntos borde* que son subconjuntos especiales de la frontera del dominio de Denjoy que estamos considerando y que jugarán un papel fundamental.

Por último relacionamos la longitud de cada curva frontera de estos dominios con la longitud de ciertas curvas que aparecen en otros dominios extremales.

Tanto las definiciones como los resultados que aparecen en este capítulo no se pueden enunciar de manera sencilla. Por esta razón remitimos al lector a la sección 4.1.2 en el Capítulo 4 donde se explica con detalle todos los conceptos involucrados.

1.5.4 Desigualdad isoperimétrica en superficies de Riemann generales

Este capítulo está dedicado a extender nuestros resultados sobre desigualdad isoperimétrica a superficies más generales. En principio sólo tenemos caracterizada la propiedad DIL para dominios de Denjoy (Capítulo 4); sin embargo dado que la desigualdad isoperimétrica es invariante por transformaciones cuasiconformes, podemos extender nuestros resultados a dominios más generales, de hecho, a cualquier superficie que sea imagen cuasiconforme de un dominio de Denjoy.

Además de estos corolarios elementales, en este capítulo se introduce una maquinaria técnica en forma de definiciones y lemas, que junto con los teoremas de los dos anteriores capítulos, nos va a permitir reducir el estudio de la propiedad DIL de una superficie al de la misma propiedad pero en ciertas subsuperficies suyas. De esta forma lo que estamos haciendo es *localizar* la desigualdad isoperimétrica.

En este capítulo, siempre que se hable de subsuperficies tenemos que tener en cuenta el siguiente comentario: si \mathcal{S}_2 es una superficie de Riemann hiperbólica, consideraremos subsuperficies (abiertas y conexas) $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$, dotadas con su propia métrica hiperbólica (recordemos que cualquier subsuperficie de una superficie de Riemann hiperbólica es también hiperbólica). Por supuesto, con esta métrica \mathcal{S}_1 es una variedad Riemanniana completa.

Los resultados más destacados son los dos siguientes teoremas sobre localización que se obtienen como consecuencia directa del Corolario 5.3 (ver Sección 5.3 en el Capítulo 5).

Teorema 5.4. *Dado un subconjunto cerrado E de $\hat{\mathbb{C}}$ de cardinal infinito, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ satisface DIL.
- (2) $\Omega \setminus E$ satisface DIL, para cualquier subdominio Ω de $\hat{\mathbb{C}}$ de tipo finito tal que E está contenido en Ω .
- (3) $\Omega \setminus E$ satisface DIL, para algún subdominio Ω de $\hat{\mathbb{C}}$ de tipo finito tal que E está contenido en Ω .

Teorema 5.5. Sean E_1, \dots, E_n subconjuntos cerrados de $\hat{\mathbb{C}}$, disjuntos dos a dos, con cardinal numerable y tales que $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_k E_k$ es conexo. Entonces, se tiene que Ω satisface DIL si y sólo si $\hat{\mathbb{C}} \setminus E_k$ satisface DIL para $k = 1, \dots, n$.

De hecho, demostraremos una versión general de los teoremas 5.4 y 5.5 sobre superficies de Riemann (ver Teorema 5.2). Deberíamos señalar que también hemos obtenido otros resultados sobre localización (ver por ejemplo los Lemas 3.1 y 5.1 o el Corolario 5.1).

1.5.5 Medida p -armónica

Por último, el capítulo 6 trata un tema diferente a todo lo visto hasta aquí. Se estudia un tópico de interés en Teoría del Potencial no lineal: la medida p -armónica.

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y fijado un punto $p \in \Omega$ se puede definir una medida w en $\partial\Omega$ de la siguiente forma: Si A es un conjunto de Borel incluido en $\partial\Omega$ definimos $w(A)$ como $u(p)$ donde u es la función armónica en Ω que toma el valor 1 en A y el valor 0 en $\partial\Omega \setminus A$. Esta función w así definida se llama *medida armónica* y es efectivamente una medida.

Este concepto se puede generalizar al de medida p -armónica sin más que usar una función p -armónica en lugar de una armónica. Una función u se llama p -armónica si verifica la ecuación diferencial

$$\Delta_p u := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0.$$

Es claro que si $p = 2$ el operador p -laplaciano es el laplaciano usual y por tanto, las funciones 2-armónicas son armónicas y viceversa.

La *medida p -armónica* w no es de hecho una medida si $p \neq 2$; de ahí que enfatizamos la palabra “medida”. No obstante sería interesante saber si tiene la propiedad subaditiva, es decir, si satisface $w(A \cup B) \leq k(w(A) + w(B))$ para todo subconjunto de Borel $A, B \subset \partial\Omega$ y para alguna constante k . Esto es un problema abierto para todo dominio Ω , incluso en casos tan simples como que Ω sea la bola unidad de \mathbb{R}^n para $n \geq 2$ ($n = 1$ es un caso trivial ya que toda función p -armónica es armónica).

Se introducen en este capítulo el concepto de *medida p -armónica* pero esta vez en un caso discreto y se demuestra que la *medida p -armónica* discreta definida en árboles (que son un análogo discreto de una bola en \mathbb{R}^n) no es subaditiva si $p \neq 2$. Este es el resultado central de este capítulo. Se generaliza también el concepto de medida p -armónica discreta estudiando otro tipo de potenciales no lineales en grafos y se dan algunos resultados positivos parciales respecto a la subaditividad de estas *medidas*.

Debido a que enunciar los resultados de este capítulo de manera precisa requeriría definir muchos conceptos previos, preferimos remitir al lector al capítulo en cuestión donde se hace una introducción más extensa a este tema.

1.6 Notaciones

Por último expondremos aquí algunas notaciones que usaremos a lo largo de los siguientes capítulos.

Como es habitual, \mathbb{R} y $\hat{\mathbb{R}}$ denotarán la recta real y la recta real extendida. Similarmente, \mathbb{C} y $\hat{\mathbb{C}}$ denotarán respectivamente, el plano complejo y la esfera de Riemann. El disco unidad abierto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ lo denotaremos por \mathbb{D} . Si z es un número complejo, denotaremos por $\Re z$ y por $\Im z$ a las partes real e imaginarias de z respectivamente.

El conjunto de enteros se denotará por \mathbb{Z} y el de enteros estrictamente positivos, por \mathbb{Z}^+ .

El símbolo $A \setminus B$ denota la diferencia de los conjuntos A y B . Si Ω es un conjunto, denotaremos por $\partial\Omega$ a su frontera. La expresión $A(r) \asymp B(r)$ quiere decir que existe una constante positiva C tal que

$$C^{-1} \leq \frac{A(r)}{B(r)} \leq C,$$

para los valores de r indicados en cada caso. Denotamos por $[x]$ el mayor número natural menor o igual que x .

Denotaremos por d_S y B_S , respectivamente, la distancia y las bolas en la métrica de Poincaré de \mathcal{S} . Por d y B denotaremos, respectivamente, la distancia y las bolas en la métrica euclídea de \mathbb{C} . B_S^* y B^* denotarán las correspondientes bolas sin sus centros. Si Ω es un dominio plano hiperbólico, $\delta_\Omega(z)$ será la distancia euclídea de z a la frontera de Ω . Por λ_Ω denotaremos la densidad conforme de la métrica de Poincaré en Ω .

Finalmente, denotamos por c constantes positivas que pueden tomar diferentes valores de línea a línea e incluso en la misma línea.

Capítulo 2

Un Teorema de descomposición de superficies

2.1 Introducción

El Teorema de Clasificación de superficies compactas dice que toda superficie topológica orientable y compacta es homeomorfa a una esfera o a un “toro” de género g , con $g = 1, 2, \dots$ (ver por ejemplo [Mas67]).

Decimos que la clausura de una esfera con tres agujeros (que es una superficie topológica con borde cuyo borde es unión de tres curvas simples cerradas disjuntas dos a dos) es una *Y-pieza* o un *pantalón*. Una Y-pieza se puede visualizar como un tubo con la forma de la letra “Y”.

Con esta definición, el Teorema de Clasificación de superficies compactas dice que todas las superficies topológicas orientables compactas excepto la esfera y el toro (de género 1) se pueden obtener pegando Y-piezas con interiores disjuntos dos a dos.

En este capítulo obtenemos la generalización de este resultado a superficies no compactas como corolario de un teorema sobre superficies de Riemann. Sólo necesitamos una sencilla definición.

Decimos que un subconjunto cerrado de una superficie topológica es un *cilindro* si es homeomorfo a $S^1 \times [0, \infty)$, donde S^1 denota la esfera uno-dimensional.

Teorema 2.1. *Toda superficie topológica orientable excepto la esfera, el plano y el toro es la unión (con interiores disjuntos dos a dos) de Y-piezas y cilindros.*

También tenemos un resultado similar para superficies con borde.

El resultado principal de este capítulo es una versión geométrica de este Teorema para superficies completas con curvatura negativa constante. En este caso tenemos más información sobre los bloques básicos de la superficie: podemos hacer la descomposición de tal manera que la frontera de cada pieza sea la unión de a lo sumo tres geodésicas simples cerradas. Como la estructura Riemanniana es más restrictiva que la topológica, necesitamos un tipo de pieza adicional para realizar la descomposición, el semidisco.

Enunciamos ahora el resultado principal. Las definiciones necesarias aparecen en la siguiente sección.

Teorema 2.2. *Toda superficie de Riemann hiperbólica excepto $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ es la unión (con interiores disjuntos dos a dos) de foniles, semidiscos y un conjunto G para el que existe una exhaustión por dominios geodésicos. Además, si la superficie no es \mathbb{D} o un anillo, el conjunto G aparece siempre en la descomposición.*

Veremos más tarde (ver Proposición 2.2) que G es una unión de Y-piezas.

Si excluimos el caso del disco, no está claro porqué necesitamos semidiscos para descomponer una superficie. La necesidad de semidiscos es de hecho la parte más sorprendente y difícil en la demostración de este teorema.

El Teorema 2.2 (y en particular su Corolario (ver Sección 2.4) es un resultado útil en el estudio de las superficies de Riemann. De hecho juega un papel importante en la demostración del siguiente Teorema de José Luis Fernández y María Victoria Melián (ver [FM99]).

Teorema A. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica. Hay tres posibilidades:*

(i) *S tiene área finita. Entonces para cada $p \in S$ existe exactamente una colección contable de direcciones en $\mathcal{E}(p)$.*

(ii) *S es transitoria. Entonces para cada $p \in S$, $\mathcal{E}(p)$ tiene medida completa.*

(iii) *S es recurrente y de área infinita. Entonces $\mathcal{E}(p)$ tiene longitud cero pero su dimensión de Hausdorff es 1.*

Llamamos a una superficie *transitoria* (respectivamente *recurrente*) si el movimiento Browniano de S es transitorio (respectivamente recurrente). También definimos $\mathcal{E}(p)$ como el conjunto de direcciones unitarias v en el plano tangente de S en el punto p tales que, la geodésica de velocidad uno que emana de p en la dirección de v , *escapa* a infinito.

En las aplicaciones del Teorema 2.2 es crucial que las fronteras de los bloques sean geodésicas simples cerradas (excepto en el caso del semidisco). Hay una clara razón para esto: es muy fácil cortar y pegar superficies a lo largo de geodésicas simples cerradas.

Se podría pensar que tal vez en la descomposición del Teorema 2.2 no se necesitan semidiscos. El ejemplo que damos después de la demostración del Teorema 2.2 muestra que son imprescindibles.

La estructura del capítulo es como sigue. En la Sección 2.2 presentamos las definiciones que se precisan en el Teorema 2.2. En la Sección 2.3 demostramos algunos resultados técnicos. Por último la Sección 2.4 está dedicada a la demostración de los teoremas.

2.1.1 Notaciones

A lo largo de este capítulo vamos a indicar por $A \subset B$ que el conjunto A está estrictamente contenido en B , sin embargo en el resto de los capítulos, el símbolo “ \subset ” tendrá su significado más habitual, es decir, “contenido no necesariamente estricto”.

Cuando digamos “curva simple” nos referiremos siempre a curvas no cerradas.

2.2 Definiciones y resultados

Las definiciones relacionadas con las superficies de Riemann y necesarias en el enunciado de los Teoremas 2.2 y 2.4 se presentan en el Capítulo 1, no obstante, en esta sección recordaremos algunos conceptos e introduciremos otros nuevos.

Una *Y-pieza de Löbell* es una superficie de Riemann hiperbólica con borde que es topológicamente una *Y-pieza* y cuya frontera son geodésicas simples cerradas. Dados tres números positivos a, b, c , hay una única (salvo transformaciones conformes) *Y-pieza de Löbell* tal que sus curvas frontera tienen longitudes a, b, c (ver por ejemplo [Rat94, p. 410]). Son una herramienta estándar para construir superficies de Riemann. Una descripción clara de estas *Y-piezas* y su uso se puede encontrar en [Cha84, Capítulo X.3] y [Bus92, Capítulo 1],

Una *Y-pieza de Löbell generalizada* es una superficie de Riemann hiperbólica con borde o sin borde que es topológicamente una esfera a la que le hemos quitado n discos abiertos y m puntos, con

enteros $n, m \geq 0$ y $n + m = 3$, de este modo las n curvas frontera son geodésicas simples cerradas y los m puntos son las punturas. Obsérvese que una Y-pieza de Löbell generalizada es topológicamente la unión de una Y-pieza y m cilindros, con $0 \leq m \leq 3$.

Es claro que el interior de toda Y-pieza de Löbell generalizada es un dominio geodésico. Más aún, se sabe que la clausura de todo dominio geodésico es una unión finita (con interiores disjuntos dos a dos) de Y-piezas de Löbell generalizadas (ver Proposición 2.2).

Decimos que $\{A_n\}$ es una *exhaución* del conjunto A si $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo n y $A = \cup_n A_n$.

Decimos que una superficie topológica con borde S es *simple* si el borde de S es una unión (finita o infinita) de curvas simples cerradas disjuntas dos a dos. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.3. *Toda superficie con borde orientable y simple excepto el disco con borde y el cilindro con dos curvas frontera es la unión (con interiores disjuntos) de Y-piezas y cilindros.*

Tenemos un resultado similar para superficies de Riemann hiperbólicas con borde. Decimos que S es una *superficie de Riemann hiperbólica con borde* si es una variedad Riemanniana orientable con borde de dimensión 2 y su métrica Riemanniana tiene curvatura negativa constante -1 . Una superficie de Riemann hiperbólica con borde S es *simple* si el borde de S es una unión (finita o infinita) de geodésicas simples cerradas disjuntas dos a dos. La clausura de cualquier dominio geodésico es una superficie de Riemann hiperbólica con borde simple.

Teorema 2.4. *Toda superficie de Riemann hiperbólica con borde es la unión (con interiores disjuntos dos a dos) de anillos, semidiscos y un conjunto V para el que existe una exhaución por clausuras de dominios geodésicos.*

Observación. La demostración del Teorema 2.2 da la siguiente *receta* para construir superficies de Riemann hiperbólicas: unir foniles y/o Y-piezas de Löbell generalizadas identificando geodésicas simples cerradas de igual longitud obteniendo una superficie sin borde S_0 . Si S_0 es completa, entonces es una superficie de Riemann hiperbólica. Si S_0 no es completa, podemos obtener una superficie de Riemann hiperbólica S pegándole a S_0 semidiscos (los semidiscos son los únicos bloques que podemos añadir a S_0 para obtener una superficie de Riemann hiperbólica). El Teorema 2.2 dice que este método nos permite construir cualquier superficie de Riemann hiperbólica excepto $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

2.3 Geodésicas y dominios geodésicos

En esta sección incluimos algunos resultados técnicos sobre geodésicas y dominios geodésicos que necesitaremos en la demostración de los teoremas.

Lema B. ([R, p. 405]) *Sean α y β dos curvas simples cerradas disjuntas no libremente homótopas entre sí en la superficie de Riemann hiperbólica S . Si α_0 y β_0 son respectivamente geodésicas simples cerradas en las clases de homotopía de α y β , entonces α_0 y β_0 también son disjuntas.*

Un resultado similar también es cierto si α es una geodésica simple.

Lema 2.1. *Sean S una superficie de Riemann hiperbólica, γ_1 una geodésica simple en S , σ una curva simple cerrada en S y γ_2 una geodésica simple cerrada libremente homótopa a σ en S . Si γ_1 y σ son disjuntas, entonces γ_1 y γ_2 son también disjuntas.*

Demostración. La prueba sigue el argumento de la demostración del Lema B. Incluimos los detalles por completitud.

Consideremos una aplicación cubrimiento universal $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que π lleva el intervalo $(-1, 1)$ en γ_1 , es decir, que $\tilde{\gamma}_1 = (-1, 1)$ es una elevación de γ_1 . Consideremos elevaciones $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\gamma}_2$ de σ , γ_2 respectivamente, con los mismos extremos $A, B \in \partial\mathbb{D}$.

Sólo necesitamos comprobar que $\tilde{\gamma}_1 \cap \tilde{\gamma}_2 = \emptyset$. Supongamos que no fuera el caso. Entonces $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ se cortarían en un único punto en \mathbb{D} , porque de otro modo serían iguales, lo cual es una contradicción. En consecuencia $\Im A \cdot \Im B < 0$. Esto implica que $\tilde{\gamma}_1 \cap \tilde{\sigma} \neq \emptyset$, ya que $\tilde{\sigma}$ también tiene los mismos extremos $A, B \in \partial\mathbb{D}$, pero esto contradice $\pi(\tilde{\gamma}_1) \cap \pi(\tilde{\sigma}) = \gamma_1 \cap \sigma = \emptyset$. Esto finaliza la prueba del Lema 2.1. \square

Es bien conocido que si una curva simple cerrada σ no es homótopa a un punto o a una puntura en una superficie de Riemann hiperbólica \mathcal{S} , entonces existe una única geodésica simple cerrada libremente homótopa a σ en \mathcal{S} . El siguiente resultado no es sorprendente y probablemente ya sea conocido. Sin embargo no conocemos ninguna referencia.

Proposición 2.1. *Sea \mathcal{S} una superficie de Riemann hiperbólica con borde tal que el borde de \mathcal{S} es una unión disjunta de geodésicas simples y/o geodésicas simples cerradas. Si una curva simple cerrada σ no es homótopa a un punto o a una puntura en \mathcal{S} , entonces existe una única geodésica simple cerrada γ libremente homótopa a σ en \mathcal{S} . Además γ está contenida en el interior de \mathcal{S} si σ no es libremente homótopa a una geodésica frontera de $\partial\mathcal{S}$.*

Demostración. Si σ es libremente homótopa a una geodésica frontera de $\partial\mathcal{S}$ el resultado es trivial. En otro caso, sin pérdida de generalidad podemos suponer que σ está contenida en el interior de \mathcal{S} , ya que si no fuera así podríamos tomar una curva simple cerrada σ_0 contenida en el interior de \mathcal{S} y libremente homótopa a σ en \mathcal{S} . Consideremos el doble de Schottky \mathcal{S}_0 de \mathcal{S} . A grandes rasgos \mathcal{S}_0 es la unión de \mathcal{S} y \mathcal{S}^* , la superficie simétrica de \mathcal{S} , identificando los puntos simétricos de $\partial\mathcal{S}$ y $\partial\mathcal{S}^*$ (ver los detalles en [AS60, p. 119]). Tenemos que σ no es homótopa a un punto ni a una puntura en \mathcal{S}_0 ; entonces existe una única geodésica simple cerrada γ libremente homótopa a σ en \mathcal{S}_0 . Los lemas B y 2.1 dan que γ no interseca el borde de \mathcal{S} , ya que estamos suponiendo que σ no es libremente homótopa a una geodésica frontera de $\partial\mathcal{S}$. En consecuencia γ está contenida en el interior de \mathcal{S} . \square

El siguiente resultado es bien conocido aunque no conocemos ninguna referencia. Incluimos una prueba por completitud.

Proposición 2.2. *La superficie de Riemann obtenida al tomar la clausura de un dominio geodésico es una unión finita (con interiores disjuntos) de Y-piezas de Löbell generalizadas.*

Observación. Esta superficie de Riemann puede tener borde o no. El hecho de que una superficie de Riemann compacta sea una unión finita (con interiores disjuntos) de Y-piezas de Löbell se puede encontrar en muchos libros (ver por ejemplo [Bus92, p. 94]). La idea de la prueba de la Proposición 2.2 es asociar, de un modo adecuado, una superficie de Riemann compacta a cada dominio geodésico.

Demostración. Sea G un dominio geodésico y denotemos por \mathcal{S} la clausura de G . Tenemos que $\partial\mathcal{S} = \partial G$ es la unión de las geodésicas simples cerradas disjuntas $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ (tomamos $k = 0$ si $\partial G = \emptyset$). Para cada $j = 1, \dots, k$, consideremos una Y-pieza Y_j con $\partial Y_j = \sigma_j^1 \cup \sigma_j^2 \cup \sigma_j^3$, $L(\sigma_j^1) = L(\gamma_j)$ y $L(\sigma_j^2) = L(\sigma_j^3)$. Denotemos por Z_j la superficie con borde Y_j con σ_j^2 y σ_j^3 identificados; entonces $\partial Z_j = \sigma_j^1$. Consideremos la superficie de Riemann sin borde $\mathcal{S}_1 := \cup_j Z_j \cup \mathcal{S}$ obtenida pegando para cada $j = 1, \dots, k$ las curvas γ_j y σ_j^1 . Si r_1, \dots, r_m son las punturas en \mathcal{S}_1 , consideremos

$$\mathcal{S}_2 := \mathcal{S}_1 \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{C(r_i, 1/3)}.$$

Recordemos que el Lema A del Capítulo 1 (sección 1.2.6) da que todas las geodésicas simples cerradas de \mathcal{S} están contenidas en \mathcal{S}_2 . Existe un homeomorfismo $f : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$. Podemos tomar como f la identidad en $\mathcal{S}_1 \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{C(r_i, 1/2)}$ y para cada $i = 1, \dots, m$ cualquier homeomorfismo entre $C(r_i, 1/2)$ y $C(r_i, 1/2) \setminus \overline{C(r_i, 1/3)}$ que fije $\partial C(r_i, 1/2)$.

Si consideramos ahora la superficie de Riemann \mathcal{S}_2 con su métrica hiperbólica (para la que es un espacio métrico completo), tomemos las geodésicas simples cerradas η_1, \dots, η_m en \mathcal{S}_2 tales que cada

η_i es homótopa a r_i en S_1 para $i = 1, \dots, m$, y los foniles F_i limitados por η_i . Para cada $i = 1, \dots, m$, consideremos una Y-pieza Y^i con $\partial Y^i = \tau_1^i \cup \tau_2^i \cup \tau_3^i$, $L(\tau_1^i) = L(\eta_i)$ y $L(\tau_2^i) = L(\tau_3^i)$. Denotemos por Z^i la superficie con borde Y^i con τ_2^i y τ_3^i identificados; tenemos $\partial Z^i = \tau_1^i$. Consideremos la superficie de Riemann hiperbólica compacta $S_3 := (S_2 \setminus \cup_i F_i) \cup (\cup_i Z^i)$ obtenida pegando para cada $i = 1, \dots, m$ las curvas η_i y τ_1^i . Si η_{m+j} es la geodésica simple cerrada en S_2 (o en S_3) libremente homótopa a γ_j para cada $j = 1, \dots, k$, es bien conocido (ver por ejemplo [Bus92, p. 94]) que $m + k \leq 3g - 3$, donde g es el género de S_3 , y que existen geodésicas simples cerradas $\eta_{m+k+1}, \dots, \eta_{3g-3}$ tales que $\eta_1, \dots, \eta_m, \eta_{m+1}, \dots, \eta_{m+k}, \eta_{m+k+1}, \dots, \eta_{3g-3}$ descomponen S_3 en Y-piezas de Löbell.

No es difícil ver que podemos llevar esta descomposición a S mediante un “pullback”. Las punturas r_1, \dots, r_m corresponden a las geodésicas η_1, \dots, η_m , y esto muestra la necesidad de considerar Y-piezas de Löbell generalizadas en lugar de Y-piezas de Löbell. \square

2.4 Demostración de los resultados

Empezaremos con la demostración del Teorema 2.2.

Teorema 2.2. *Toda superficie de Riemann hiperbólica excepto $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ es la unión (con interiores disjuntos dos a dos) de foniles, semidiscos y un conjunto G para el que existe una exhaustión por dominios geodésicos. Además, si la superficie no es \mathbb{D} o un anillo, el conjunto G aparece siempre en la descomposición.*

Demostración. Consideremos una tal superficie S . Si S es simplemente conexa entonces $S = \mathbb{D}$, que es unión de dos semidiscos. Si S es doblemente conexa entonces es un anillo (ya que $S \neq \mathbb{D} \setminus \{0\}$), que es unión de dos foniles.

Si S tiene orden de conexión mayor que dos, entonces existe al menos un dominio geodésico. En este caso fijemos un punto $p \in S$ y un número positivo t , y denotemos por $B(t)$ la bola abierta en S con centro p y radio t . La frontera de $B(t)$ es una unión finita de curvas simples cerradas disjuntas η_1, \dots, η_k excepto para $t \in A$ siendo A un conjunto numerable. En lo sucesivo sólo consideraremos valores de $t \notin A$. Para $i = 1, \dots, k$, denotamos por γ_i el conjunto vacío si η_i es homótopa a un punto o a una puntura, y la geodésica simple cerrada libremente homótopa a η_i en otro caso. Obsérvese que $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ son disjuntas dos a dos por el Lema B, ya que η_1, \dots, η_k son disjuntas dos a dos. Denotamos por $G(t)$ el dominio geodésico limitado por $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Existe un t_0 positivo tal que $G(t) = \emptyset$ si $t < t_0$ y $G(t) \neq \emptyset$ si $t > t_0$. También tenemos $G(t) \subseteq G(t')$ si $t \leq t'$.

Necesitamos ahora unos resultados que aparecen en los siguientes lemas.

Lema 2.2. *Si γ es una geodésica simple cerrada contenida en $\partial G(t)$ para todo $t \geq t_1$ entonces γ es la frontera de un fonil en S .*

Demostración. Para $t \geq t_1$, consideremos la curva simple cerrada $\eta_t \subseteq \partial B(t)$ libremente homótopa a γ . Si $t_2 := \max\{\text{dist}(p, z) : z \in \gamma\}$ y $t > t_3 := \max\{t_1, t_2\}$ tenemos $\gamma \cap \eta_t = \emptyset$. Denotemos por F_t el conjunto cerrado doblemente conexo limitado por γ y η_t para $t > t_3$ y $F := \cup_{t > t_3} F_t$. Tenemos que F es un *final* doblemente conexo en S acotado por la geodésica simple cerrada γ ; por tanto F es un fonil en S . \square

Lema 2.3. *Si γ es una geodésica simple cerrada contenida en $B(t)$ entonces γ está contenida en la clausura de $G(t)$. Si r es una puntura y $\partial C(r, \alpha)$ está contenida en $B(t)$ para algún $0 < \alpha < 1$, entonces $C(r, 1)$ está contenida en $G(t)$.*

Demostración. Supongamos que γ no está contenida en la clausura de $G(t)$.

Si $\gamma \cap \overline{G(t)} = \emptyset$, consideremos U_i el subconjunto abierto de $B(t) \setminus \overline{G(t)}$ limitado por η_i y γ_i si $\gamma_i \neq \emptyset$. Tenemos $\gamma \subset U_j$ para algún j ya que $\{U_i\}$ son disjuntos dos a dos. Como γ no es homotópicamente

trivial tenemos que U_j es doblemente conexo y $\gamma = \gamma_j \subset \overline{G(t)}$. Esto es una contradicción con $\gamma \cap \overline{G(t)} = \emptyset$.

Por tanto $\gamma \cap \overline{G(t)} \neq \emptyset$. En consecuencia, $\gamma \cap \partial G(t) \neq \emptyset$ ya que estamos suponiendo que γ no está contenida en la clausura de $G(t)$. Entonces tenemos $\gamma \cap \partial B(t) \neq \emptyset$ por el Lema B. Esto es una contradicción con $\gamma \subset B(t)$.

Demostraremos ahora el segundo enunciado del lema. Existe una curva simple cerrada $\eta_i \subseteq \partial B(t)$ contenida en $C(r, \alpha)$, ya que $\partial C(r, \alpha) \subset B(t)$. También tenemos que η_i es homótopa a r . Entonces el Lema A del Capítulo 1 (sección 1.2.6) da que $C(r, 1)$ está contenido en $G(t)$ ya que ninguna geodésica simple cerrada puede intersectar $C(r, 1)$. \square

Continuamos ahora la demostración del Teorema 2.2.

Supongamos que existe t_1 tal que $G(t) = G(t_1)$ para todo $t \geq t_1$. Si $\partial G(t_1) = \emptyset$ entonces $G(t_1) = S$ y la demostración está acabada con $G = G(t_1)$. En otro caso la frontera de $G(t_1)$ es una unión finita de geodésicas simples cerradas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Por el Lema 2.2 tenemos que γ_i es la frontera de un fonil en S y esto finaliza la prueba en este caso tomando también $G = G(t_1)$.

Supongamos ahora que existe una sucesión creciente $\{t_n\}$ con límite ∞ tal que $G_n := G(t_n)$ verifica $G_n \subset G_{n+1}$. Por los lemas 2.2 y 2.3 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\partial G_n \cap \partial G_{n+1}$ es el conjunto vacío o una unión de geodésicas simples cerradas cada una de las cuales es la frontera de un fonil en S .

Si γ_n, γ_{n+m} ($m, n \in \mathbb{Z}^+$) son geodésicas simples cerradas contenidas respectivamente en $\partial G_n, \partial G_{n+m}$, y η es una curva que conecta γ_n con γ_{n+m} entonces la curva cerrada $\beta := \eta + \gamma_{n+m} - \eta + \gamma_n$ no puede ser homotópicamente trivial, ya que en este caso γ_{n+m} sería libremente homótopa a γ_n y esto implicaría $\gamma_{n+m} = \gamma_n$ y consecuentemente $m = 0$. Podría ser homótopa a una puntura si $m = 1$. Sin embargo β no puede ser homótopa a una puntura si $m \geq 2$, ya que existe al menos un "obstáculo topológico" entre γ_n y γ_{n+1} .

Consideremos ahora el conjunto abierto H_n obtenido como la unión de G_n y los foniles limitados por una curva en ∂G_n . Obsérvese que siempre tenemos $\overline{H_n} \subset H_{n+1}$. Definamos $H := \cup_n H_n$ y $d_n := \text{dist}(p, \partial H_n)$. Obsérvese que H es un conjunto abierto. Si $d_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $S = H$ y hemos acabado la prueba en este caso con $G = \cup_n G_n$. Si d_n es acotado, entonces $S \setminus H$ es un conjunto cerrado no vacío.

Terminaremos la demostración mostrando que cada componente conexa de $S \setminus H$ es un semidisco. En primer lugar mostraremos que si $q \in \partial H$ y U es cualquier entorno simplemente conexo de q , entonces $q \in \sigma \subseteq \partial H$ donde $\sigma \cap U$ es un arco geodésico. Si $q \in \partial H$ entonces existen $q_n \in \gamma_n$ convergiendo a q siendo γ_n una geodésica simple cerrada contenida en ∂H_n . Queremos ver que la sucesión de geodésicas $\{\gamma_n\}$ converge a un arco geodésico σ en U . Para ver esto basta considerar la elevación de U al espacio recubridor universal \mathbb{D} ; el enunciado en \mathbb{D} es ahora trivial, ya que $\{\gamma_n\}$ son disjuntas dos a dos.

Veremos ahora que $\sigma \cap U$ está contenida en ∂H . Consideremos cualquier punto $q' \in \sigma \cap U$. Tenemos que $q' \notin \text{ext } H$, ya que es el límite de puntos de $\{H_n\}$. Entonces, para ver que $\sigma \cap U$ está contenida en ∂H es suficiente ver que $q' \notin H$. Supongamos que $q' \in H$; entonces q' pertenece a un entorno $V \subset H_{n_0}$ para algún n_0 . En consecuencia $V \subset H_n$ para todo $n \geq n_0$, pero $V \cap \partial H_n \neq \emptyset$ para $n \geq n_1$, ya que q' es el límite de puntos de $\cup_n \partial H_n$, lo cual es una contradicción.

También tenemos que si σ es una geodésica tal que $\sigma \cap W \subseteq \partial H$ para algún conjunto abierto no vacío W entonces $\sigma \subseteq \partial H$ (recordemos que $\sigma \cap U \subseteq \partial H$ para todo conjunto abierto simplemente conexo U con $U \cap W \neq \emptyset$). Probaremos ahora que tal geodésica σ es una curva simple. Si no fuera así tendríamos que σ es una geodésica simple cerrada o se autointersecta de forma no tangencial. Si σ es una geodésica simple cerrada por compacidad es el límite de geodésicas simples cerradas $\gamma_n \subset \partial H_n$; entonces γ_n es libremente homótopa a σ para $n \geq n_2$ que es una contradicción ya que en cada clase de homotopía libre hay a lo sumo una geodésica simple cerrada. Si σ se autointersecta de forma no

tangencial entonces ∂H_n se autointerseca para $n \geq n_3$ lo cual es otra contradicción. Este último argumento también prueba que si $\sigma_1, \sigma_2 \subset \partial H$ son geodésicas con $\sigma_1 \neq \sigma_2$, entonces son simples y disjuntas.

Lema 2.4. *Si σ es una geodésica simple contenida en ∂H , $q \in \sigma$ y U es un entorno simplemente conexo de q tal que $U \setminus \sigma$ tiene exactamente dos componentes conexas U_1 y U_2 , entonces existe $i \in \{1, 2\}$ con $U_i \cap \overline{H} = \emptyset$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\partial H_n \cap U_1 \neq \emptyset$ si $n \geq n_1$. Probaremos ahora que $U_2 \cap \overline{H} = \emptyset$. Supongamos que esto no es cierto; entonces existe un punto $h \in H \cap U_2$. De hecho, existe $n_2 \geq n_1$ tal que $h \in H_{n_2} \cap U_2$. Este hecho implica que $\partial H_{n_2} \cap U_2 \neq \emptyset$, porque en otro caso $\sigma \cap U$ estaría contenido en ∂H_{n_2} ; esto no es posible ya que la frontera de H_{n_2} sólo puede contener geodésicas simples cerradas y σ no es cerrada.

Consideremos $n_3 \geq n_2 + 2$ y una curva compacta $\eta \subset U$, comenzando en U_2 y terminando en U_1 , que conecte una geodésica simple cerrada $\gamma_{n_2} \subset \partial H_{n_2}$ con una geodésica simple cerrada $\gamma_{n_3} \subset \partial H_{n_3}$. La curva cerrada $\beta := \eta + \gamma_{n_3} - \eta + \gamma_{n_2}$ no es homótopa a un punto ni a una puntura en S , ya que $n_3 \geq n_2 + 2$. Entonces, existe una geodésica simple cerrada α libremente homótopa a β . Además $\alpha \cap \sigma \neq \emptyset$ ya que $\beta \cap \sigma \neq \emptyset$, $\gamma_{n_2}, \gamma_{n_3}$ no son homótopas a un punto y σ es una geodésica (infinita) simple. El Lema 2.3 da que $\alpha \subset H$ que es una contradicción con $\alpha \cap \partial H \neq \emptyset$. Esto termina la demostración del Lema 2.4. \square

En particular, tenemos que $S \setminus H$ es la clausura de su interior y entonces cada componente conexa de $S \setminus H$ es conexa por caminos.

Hemos visto también que ∂H es una unión de geodésicas simples disjuntas dos a dos. Veremos ahora que cada componente conexa J de $S \setminus H$ es un semidisco. En primer lugar probaremos que J es simplemente conexa.

Sabemos que cada componente conexa J de $S \setminus H$ es la clausura de su interior y su frontera es la unión de geodésicas simples disjuntas. Supongamos que existe una curva simple cerrada $\delta \subset J$ que no es homótopa a un punto en J . Si δ es homótopa a una puntura r , entonces $C(r, \alpha_1)$ está contenido en J para algún $0 < \alpha_1 < 1$. El Lema 2.3 da que $C(r, 1) \subset H$ y entonces $C(r, \alpha_1) \subseteq J \cap H$, que es una contradicción. Si δ no es homótopa a una puntura, entonces la Proposición 2.1 da que existe una geodésica simple cerrada γ libremente homótopa a δ en J , ya que J es una superficie de Riemann hiperbólica con borde tal que su borde es unión disjunta de geodésicas simples. El Lema 2.3 da que $\gamma \subset H$ y entonces $\gamma \subseteq J \cap H$, que es una contradicción.

Por tanto, de cara a probar que J es un semidisco basta ver que su frontera es una única geodésica simple. Supongamos que ∂J contiene dos geodésicas simples σ_1, σ_2 . Consideremos $q_1 \in \sigma_1$, $q_2 \in \sigma_2$, entornos simplemente conexos $q_1 \in V_1$, $q_2 \in V_2$, geodésicas simples $\gamma_{n_1} \subset \partial H_{n_1}$, $\gamma_{n_2} \subset \partial H_{n_2}$ con $\gamma_{n_1} \cap V_1 \neq \emptyset$, $\gamma_{n_2} \cap V_2 \neq \emptyset$ y $n_1 \geq n_2 + 2$, y curvas $\eta_1 \subset V_1$, $\eta_2 \subset V_2$ uniendo respectivamente γ_{n_1} con q_1 y q_2 con γ_{n_2} . Como J es conexa por caminos, podemos tomar una curva $\eta_3 \subset J$ que una q_1 con q_2 y considerar $\eta := \eta_1 + \eta_3 + \eta_2$ y $\beta := \eta + \gamma_{n_2} - \eta + \gamma_{n_1}$.

Como en la prueba del Lema 2.4 podemos ver que hay una geodésica simple cerrada α libremente homótopa a β en S con $\alpha \cap \sigma_1 \neq \emptyset$ y $\alpha \cap \sigma_2 \neq \emptyset$. Entonces el Lema 2.3 da que $\alpha \subset H$ que es una contradicción.

Elegimos el conjunto G definido como H menos los foniles de S , es decir $G = \cup_n G_n$. Además hemos obtenido que si S no es \mathbb{D} ni un anillo, entonces tenemos $G = \cup_{t>0} G(t) \neq \emptyset$. \square

El siguiente caso particular del Teorema 2.2 se usa en [FM99].

Corolario 2.1. *Si una superficie de Riemann hiperbólica no contiene ningún semidisco, entonces existe una exhaustión de la superficie por dominios geodésicos.*

Demostración. Basta señalar que $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ y cualquier fonil contienen un semidisco. \square

Se podría pensar que tal vez en la descomposición del Teorema 2.2 no se necesitan semidiscos. El siguiente ejemplo muestra que son necesarios.

Ejemplo. Sea $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión creciente convergiendo a 1, contenida en el intervalo $(0, 1)$. Consideremos $\mathcal{S} := \mathbb{D} \setminus X$ con $X := \cup_{n \geq 1} \{x_n\}$ y γ_n la geodésica simple cerrada en \mathcal{S} que rodea los puntos x_1, \dots, x_n , para $n > 1$. La curva γ_n es la frontera de un dominio geodésico G_n . No es difícil ver que $\{\gamma_n\}$ converge a una geodésica simple γ en \mathcal{S} y que γ es la curva frontera de un semidisco. Si consideramos otros dominios geodésicos también necesitamos un semidisco, ya que una geodésica simple cerrada no puede intersectar un semidisco.

Teorema 2.4. *Toda superficie de Riemann hiperbólica con borde se puede construir como la unión (con interiores disjuntos) de foniles, semidiscos y un conjunto V para el que existe una exhaustión por dominios geodésicos.*

Demostración. Consideremos $\{\gamma_j\}$ las geodésicas simples cerradas en el borde de la superficie de Riemann hiperbólica con borde \mathcal{S} . Obsérvese que podemos construir una superficie de Riemann hiperbólica \mathcal{S}_0 (sin borde) pegándole a \mathcal{S} un fonil F_j en cada γ_j , con $L(\partial F_j) = L(\gamma_j)$.

Como \mathcal{S}_0 no puede ser $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ (no hay geodésicas simples cerradas en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$) por el Teorema 2.2 es la unión (con interiores disjuntos) de foniles, semidiscos y un conjunto G para el que existe una exhaustión por dominios geodésicos. Obtenemos el resultado deseado eliminando los foniles $\{F_j\}$ en esta unión. Cuando quitamos los foniles, estamos eliminando también las curvas $\{\gamma_j\}$, el borde de \mathcal{S} ; ésta es la razón por la que en esta situación consideramos el conjunto $V = \overline{G}$, para el que existe una exhaustión por clausuras de dominios geodésicos. \square

Teorema 2.1. *Toda superficie topológica orientable excepto la esfera, el plano y el toro es la unión (con interiores disjuntos dos a dos) de Y -piezas y cilindros.*

Demostración. Es un hecho bien conocido que toda superficie topológica \mathcal{S} tiene una estructura C^∞ compatible con su estructura topológica. Las coordenadas isotermas dotan a \mathcal{S} de una estructura conforme compatible con su estructura C^∞ ; si además \mathcal{S} es orientable, esta estructura conforme es también una estructura de superficie de Riemann.

Entonces \mathcal{S} es conformemente equivalente a la esfera, el plano complejo \mathbb{C} , $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, un toro o una superficie de Riemann hiperbólica. No consideraremos los casos primero, segundo y cuarto ya que están excluidos en el enunciado de Teorema.

Si \mathcal{S} es conformemente equivalente a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, es la unión de los dos cilindros $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$. Si \mathcal{S} es conformemente equivalente a $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, es la unión de los dos cilindros $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1/2\}$ y $\{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| < 1\}$. Si \mathcal{S} es conformemente equivalente a otra superficie de Riemann hiperbólica podemos aplicar el Teorema 2.2.

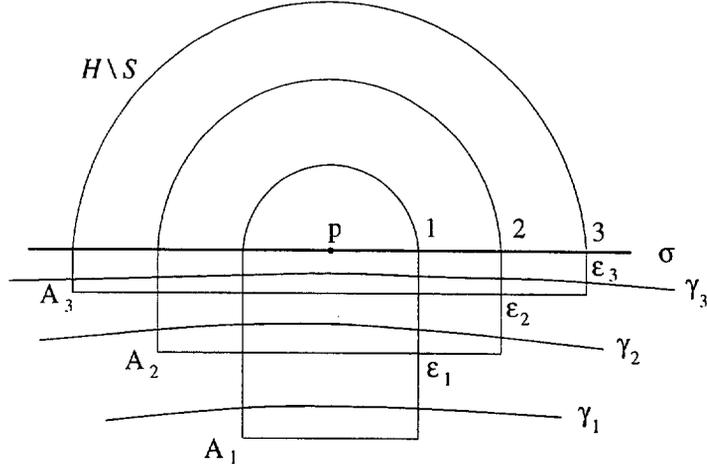
Recordemos que un fonil es un cilindro, una Y -pieza de Löbell es una Y -pieza y una pieza de Löbell generalizada es la unión de una Y -pieza y a lo sumo tres cilindros. La Proposición 2.2 da ahora el resultado si permitiéramos semidiscos en la descomposición. Para eliminar los semidiscos vamos a modificar algunas Y -piezas como sigue.

Usaremos la construcción y las mismas notaciones que en el Teorema 2.2. Consideremos una geodésica simple $\sigma \subseteq \partial H$. Recordemos que $H = \cup_n H_n$ y existe una sucesión de geodésicas simples cerradas $\gamma_n \subseteq \partial H_n$ que convergen a σ . Supongamos en primer lugar que $\mathcal{S} \setminus H$ es conexo.

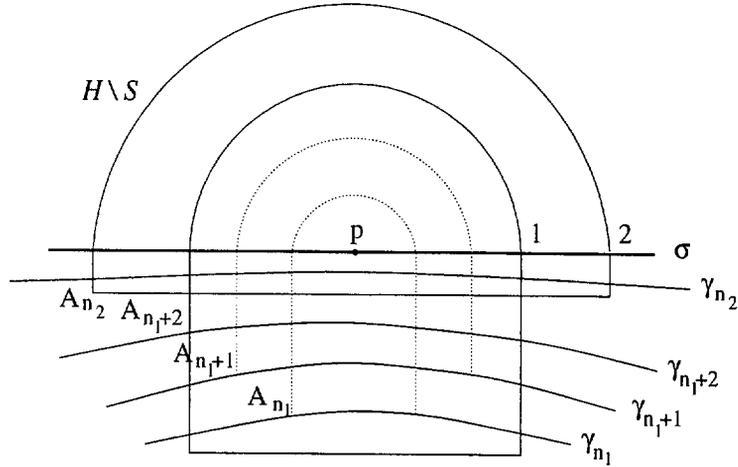
Si $q \in \sigma$, definamos η_q como la geodésica perpendicular a σ en q , con $\eta_q(0) = q$ y $\|\eta'_q(t)\| = 1$. Para un $p \in \sigma$ fijado y cualquier $m \in \mathbb{N}$, consideremos $\sigma^m = \sigma \cap B_{\mathcal{S}}(p, m)$. Nuestros argumentos en la demostración del Teorema 2.2 dan que si $\sigma_\varepsilon^m := \{z \in H : z \in \eta_q(t) \text{ con } |t| < \varepsilon \text{ y } q \in \sigma^m\}$, entonces $\gamma_n \cap \sigma_\varepsilon^m$ converge uniformemente a σ^m para cualquier $\varepsilon > 0$. Como σ^m es relativamente compacto, podemos elegir un $\varepsilon_m > 0$ tal que $\sigma_{\varepsilon_m}^m$ sea simplemente conexo. Si $b_m = \{z \in \partial \sigma_{\varepsilon_m}^m : d_{\mathcal{S}}(z, \sigma) = \varepsilon_m\}$,

elijamos de forma recursiva n_m como un número natural mayor que n_{m-1} y tal que $\gamma_{n_m} \cap \sigma_{\varepsilon_m}^m \neq \emptyset$, $\gamma_{n_m} \cap b_m = \emptyset$, y $n_0 = 0$.

Definamos $r_m := n_{m+1} - n_m - 1$. Supongamos que $r_m = 0$ para todo m , es decir, $n_m = m$. Sea $A_m := \sigma_{\varepsilon_m}^m \cup (B_S(p, m) \cap (S \setminus H))$ y \tilde{H}_m el dominio relativamente compacto $\tilde{H}_m := H_m \cup A_m$. Obsérvese que \tilde{H}_m es homeomorfo a H_m , y por tanto $\tilde{H}_{m+1} \setminus \tilde{H}_m$ tiene una descomposición en Y -piezas y cilindros similar a la de $H_{m+1} \setminus H_m$. Está claro que $S = \cup_m \tilde{H}_m$, ya que $S \setminus H$ es conexo. Esto termina la prueba en este caso.



Si tuviéramos $r_m > 0$ para algún m , sólo tendríamos que elegir $A_{n_m}, A_{n_m+1}, \dots, A_{n_m+r_m}, A_{n_m+1}$ de forma similar con la condición $\bar{A}_j \subset A_{j+1}$.



Para terminar, si $S \setminus H$ no es conexo, repetimos esta construcción en cada componente conexa de $S \setminus H$.

□

Teorema 2.3. *Toda superficie topológica con borde simple orientable excepto el disco con borde y el cilindro con dos curvas frontera es la unión (con interiores disjuntos) de Y -piezas y cilindros.*

Demostración. Consideremos una superficie S en las hipótesis del enunciado y el doble topológico S_1 de S . A grandes rasgos S_1 es la unión de S y S^* , la superficie simétrica de S , identificando los puntos simétricos de ∂S y ∂S^* . Como en la demostración del Teorema 2.1 existe una estructura de superficie de Riemann para S_1 compatible con su estructura topológica. Además el atlas holomorfo de S_1 se puede tomar simétrico con respecto a ∂S .

Supongamos que \mathcal{S}_1 no es una superficie hiperbólica, es decir, \mathcal{S}_1 es la esfera, el plano, el plano menos un punto o un toro. \mathcal{S}_1 no puede ser la esfera ni un toro ya que \mathcal{S} no es ni un disco con borde ni el cilindro con dos curvas frontera. \mathcal{S}_1 tampoco es el plano ya que el plano no es el doble de ninguna superficie topológica orientable con borde simple. Entonces \mathcal{S}_1 es el plano menos un punto, que es la unión de dos cilindros \mathcal{S} y \mathcal{S}^* . Consecuentemente \mathcal{S} es un cilindro y el Teorema 2.3 se cumple en este caso.

Supongamos ahora que \mathcal{S}_1 es una superficie hiperbólica. Las curvas simples cerradas $\{\gamma_j\}$ en $\partial\mathcal{S}$ son geodésicas en la métrica hiperbólica de \mathcal{S}_1 , ya que el atlas holomorfo es simétrico con respecto a $\partial\mathcal{S}$. Tenemos que \mathcal{S} es una superficie de Riemann hiperbólica simple con borde con la restricción de la métrica hiperbólica de \mathcal{S}_1 .

Si recordamos que un fonil es un cilindro, una Y-pieza de Löbell es una Y-pieza y una Y-pieza de Löbell generalizada es la unión de una Y-pieza y a lo sumo tres cilindros, entonces el Teorema 2.4 y la Proposición 2.2 dan el resultado si permitimos semidiscos en la descomposición. Podemos eliminar los semidiscos como en la demostración del Teorema 2.1. \square

Capítulo 3

Desigualdad isoperimétrica en superficies de Riemann con punturas

3.1 Introducción

Empezaremos recordando algunos conceptos que ya fueron introducidos en el Capítulo 1 y que serán necesarias para enunciar nuestros resultados.

Por S denotaremos una superficie de Riemann hiperbólica, es decir, una superficie de Riemann (abierta y conexa) cuyo recubridor universal es el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, dotada con su métrica de Poincaré (también llamada métrica hiperbólica), es decir, la métrica que se obtiene proyectando la métrica de Poincaré del disco unidad (ver Capítulo 1, Sección 1.2.4)

$$ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}.$$

Decimos que S satisface la *desigualdad isoperimétrica lineal* (DIL) si S es una superficie de Riemann hiperbólica y existe una constante $h > 0$ tal que para todo dominio (conjunto abierto y conexo) relativamente compacto G con frontera suave se tiene que

$$A_S(G) \leq h L_S(\partial G), \quad (3.1)$$

donde $A_S(G)$ denota el área (hiperbólica) de G y $L_S(\partial G)$ la longitud (hiperbólica) de su frontera. Denotaremos por $h(S)$ la mejor constante en (3.1) (ver Capítulo 1, Sección 1.4).

Decimos que un dominio $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ es *modulado* si existe una cota superior para el módulo de todo dominio doblemente conexo contenido en G que separa la frontera de G . En particular, todo dominio simplemente conexo es modulado (ya que no contiene ninguno de estos dominios doblemente conexos). También, si la frontera de G consiste en un número finito de continuos, G es modulado. Por otra parte, si la frontera de G tiene un punto aislado, G no es modulado.

Estos son los dominios en el plano que en lo que respecta a la Teoría de Funciones se comportan casi como dominios simplemente conexos (ver por ejemplo [BP78] y las referencias que se dan allí).

En [FR90, Teorema 3] se demuestra que si $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ es modulado (y por tanto G tiene DIL) entonces $H = G \setminus \{a_n\}$ tiene también DIL si la sucesión $\{a_n\}$ es *uniformemente separada* en la métrica hiperbólica de G , es decir, si existe una constante positiva c tal que

$$d_G(a_n, a_m) > c, \quad \text{para todo } n \neq m,$$

donde d_G denota la distancia en G . Este resultado no es cierto si G no es modulado (ver Teorema 3.1 más adelante). Obviamente, toda sucesión finita es uniformemente separada, y una sucesión que converja a un punto de G no es uniformemente separada.

Recíprocamente, también en [FR90, Teorema 4], se demuestra que si $H \subset \hat{\mathbb{C}}$ tiene DIL, y $G = H \cup I$, donde I es el conjunto de puntos aislados de ∂H , entonces I es uniformemente separado en la métrica hiperbólica de G .

En este capítulo reducimos el estudio de la propiedad DIL de H a la de G , no sólo para dominio hiperbólicos planos, sino para superficies de Riemann generales.

Recordemos la siguiente definición.

Definición. Un subconjunto I de una superficie de Riemann hiperbólica S es fuertemente uniformemente separado en S , si existe una constante positiva r_0 tal que las bolas hiperbólicas $B_S(p, r_0)$, donde $p \in I$, son simplemente conexas y disjuntas dos a dos.

Teorema 3.1. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica, sea I un subconjunto cerrado y contable de S y $\mathcal{R} = S \setminus I$. Entonces, \mathcal{R} tiene DIL si y sólo si S tiene DIL y I es fuertemente uniformemente separado en S .

También hemos obtenido una relación entre las constantes isoperimétricas de \mathcal{R} y S (ver Sección 3.2 más adelante).

Queremos señalar que el Teorema 3.1 es un resultado nuevo incluso en el caso de dominios planos.

Corolario 3.1. Sea S una superficie de Riemann, sea I un subconjunto cerrado y contable de S y sea $\mathcal{R} = S \setminus I$. Si I tiene un punto de acumulación en S , entonces \mathcal{R} no tiene DIL.

Obsérvese que los Teoremas 3.1 y [FR90, Teorema 3] dan que todo conjunto discreto que sea uniformemente separado en un dominio modulado G también es fuertemente uniformemente separado en G .

3.2 Demostración del Teorema 3.1

Enunciaremos de forma más precisa este Teorema.

Teorema 3.1. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica, sea I un subconjunto cerrado y contable de S y $\mathcal{R} = S \setminus I$. Entonces, \mathcal{R} tiene DIL si y sólo si S tiene DIL e I es fuertemente uniformemente separado en S . Además, si r_0 es un número positivo tal que $\{B_S(p, r_0)\}_{p \in I}$ es una familia de bolas en S simplemente conexas y disjuntas dos a dos, entonces tenemos que

$$h(\mathcal{R}) \leq \frac{h(S)}{\tanh^2(r_0/4)} + \frac{2\pi}{r_0 \log \frac{\tanh r_0}{\tanh(r_0/4)}}.$$

En este teorema, la implicación difícil es demostrar que \mathcal{R} tiene DIL. Nuestra prueba de este hecho consiste en encontrar una relación entre las métricas de Poincaré de \mathcal{R} y S . Lejos de los puntos de I ambas métricas son comparables (ver Lema 3.1 más abajo). Cerca de estos puntos aislados, las métricas no son comparables pero, de hecho, existe una relación muy precisa entre las S -bolas centradas en puntos de I y sus correspondientes collares en \mathcal{R} (ver Proposición 3.1 en la Sección 3.3).

Comenzamos estudiando la relación entre las métricas de Poincaré de \mathcal{R} y S .

Lema 3.1. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica, sea C un conjunto cerrado no vacío de S y sea $S^* = S \setminus C$. Consideramos un número positivo ε . Entonces tenemos que*

$$\tanh \frac{\varepsilon}{2} < \frac{L_S(\gamma)}{L_{S^*}(\gamma)} < 1, \quad (3.2)$$

para toda curva $\gamma \subset S$ de S con longitud finita tal que $d_S(\gamma, C) \geq \varepsilon$, y

$$\left(\tanh \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 < \frac{A_S(D)}{A_{S^*}(D)} < 1, \quad (3.3)$$

para todo dominio $D \subset S$ de S con área finita tal que $d_S(D, C) \geq \varepsilon$.

Demostración. Demostraremos el Lema 3.1 en coordenadas locales.

Fijemos $p \in S$ con $d_S(p, C) \geq \varepsilon$ y consideremos una carta local $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ con $\phi(p) = 0$.

Sea $F : \mathbb{D} \rightarrow S$ un recubrimiento universal con $F(0) = p$. El conjunto $C' = F^{-1}(C)$ es un subconjunto cerrado del disco unidad. Obviamente la bola euclídea $B(0, \tanh(\varepsilon/2)) = B_{\mathbb{D}}(0, \varepsilon)$ es una componente conexa de $F^{-1}(B_S(p, \varepsilon))$; está contenida en $\mathbb{D} \setminus C'$ y la aplicación $F : \mathbb{D} \setminus C' \rightarrow S^*$ es una aplicación recubridora con $F(0) = p$. Sea $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \setminus C'$ un recubrimiento universal con $G(0) = 0$. Tenemos que $F \circ G : \mathbb{D} \rightarrow S^*$ es un recubrimiento universal con $(F \circ G)(0) = p$.

Consideremos las métricas de Poincaré $\lambda_S(z)|dz|$ y $\lambda_{S^*}(z)|dz|$ en coordenadas locales ($z \in \phi(V)$). Entonces

$$\lambda_S((\phi \circ F)(0))|(\phi \circ F)'(0)| = \lambda_{\mathbb{D}}(0), \quad \lambda_{S^*}((\phi \circ F \circ G)(0))|(\phi \circ F \circ G)'(0)| = \lambda_{\mathbb{D}}(0),$$

y esto da

$$\lambda_S(0)|(\phi \circ F)'(0)| = 2, \quad \lambda_{S^*}(0)|(\phi \circ F)'(0)||G'(0)| = 2.$$

De estas últimas igualdades se deduce el Lema 3.1 si demostramos que $\tanh(\varepsilon/2) < |G'(0)| < 1$ ya que esta es la versión infinitesimal de (3.2) y (3.3).

Observemos que $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ satisface $G(0) = 0$. El Lema de Schwarz da la desigualdad $|G'(0)| < 1$.

Recordemos que el conjunto simplemente conexo $B(0, \tanh(\varepsilon/2))$ está contenido en $\mathbb{D} \setminus C'$. Por consiguiente, existe una inversa local bien definida $G^{-1} : B(0, \tanh(\varepsilon/2)) \rightarrow \mathbb{D}$ verificando $G^{-1}(0) = 0$. Usando de nuevo el Lema de Schwarz obtenemos que

$$|(G^{-1})'(0)| = \frac{1}{|G'(0)|} < \operatorname{cotanh}(\varepsilon/2).$$

Esto termina la prueba del Lema 3.1. □

Demostración del Teorema 3.1. Comenzamos con la demostración de que si \mathcal{R} tiene DIL entonces S también la tiene y además I es fuertemente uniformemente separado en S .

Probaremos primero que I es un conjunto discreto. De hecho, si éste no fuera el caso, entonces I no sería fuertemente uniformemente separado y, como veremos, esto implicaría que \mathcal{R} no tiene DIL, una contradicción.

Supongamos que I no es un conjunto discreto. Sea $F : \mathbb{D} \rightarrow S$ un recubrimiento universal y sea J la anti-imagen de I mediante F . Entonces $F : \mathbb{D} \setminus J \rightarrow \mathcal{R}$ es una aplicación recubridora. Por tanto, $\delta(\mathbb{D} \setminus J) \leq \delta(\mathcal{R})$ (ver, por ejemplo [FR90, p. 181]). Obviamente, J es un subconjunto de \mathbb{D} contable, cerrado y no discreto. Sea z_0 un punto de acumulación de J en \mathbb{D} . Entonces, tenemos que $B(z_0, r) \cap \partial(\mathbb{D} \setminus J) = B(z_0, r) \cap J$ es contable, para $0 < r < 1 - |z_0|$, y por consiguiente tiene capacidad logarítmica cero. [FR90, Teorema 4] implica que $1 = \delta(\mathbb{D} \setminus J) \leq \delta(\mathcal{R}) \leq 1$. Pero, si $\delta(\mathcal{R}) = 1$, a fortiori, \mathcal{R} no tiene DIL.

Un teorema de Patterson [P2, Teorema 4.1] da que $\delta(\mathcal{S}) \leq \delta(\mathcal{R})$, ya que I es discreto. Entonces $\delta(\mathcal{S}) < 1$ y \mathcal{S} tiene DIL.

Supongamos que el conjunto discreto I no es fuertemente uniformemente separado. Veamos que en ese caso \mathcal{R} no tiene DIL, una contradicción. Denotemos de nuevo por $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{S}$ un recubrimiento universal y por J la anti-imagen de I por F . Como antes $F : \mathbb{D} \setminus J \rightarrow \mathcal{R}$ es una aplicación recubridora y por tanto, $\delta(\mathbb{D} \setminus J) \leq \delta(\mathcal{R})$ (ver, por ejemplo [FR90, p. 181] de nuevo). Tenemos que para cada $\varepsilon > 0$, existen puntos $p, q \in I$ tales que o bien $d_{\mathcal{S}}(p, q) < \varepsilon$ o bien $B_{\mathcal{S}}(p, \varepsilon)$ no es simplemente conexo. Esto implica que existen $z, w \in J$ tales que $d_{\mathbb{D}}(z, w) < \varepsilon$, es decir, que J no es uniformemente separado en \mathbb{D} . [FR90, Teorema 4] implica de nuevo que $\delta(\mathcal{R}) \geq \delta(\mathbb{D} \setminus J) = 1$.

Supongamos ahora que \mathcal{S} tiene DIL y que I es fuertemente uniformemente separado en \mathcal{S} . Queremos demostrar que entonces \mathcal{R} también tiene DIL.

Sea \mathcal{D} un subconjunto abierto de \mathcal{R} con área finita. Para comprobar que se cumple (3.1) para \mathcal{D} , podemos suponer sin pérdida de generalidad que \mathcal{D} no es ni simple ni doblemente conexo, ya que este tipo particular de subconjuntos siempre verifican DIL con constante 1 [FR90, Lemma 1.1]. Podemos suponer también que $\partial\mathcal{D} = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_k$ donde las curvas simples cerradas γ_j no son homótopas al bucle trivial y tampoco rodean sólo a una puntura. De hecho, si este fuera el caso, digamos para γ_j , podríamos añadir a \mathcal{D} el conjunto simple o doblemente conexo cuya frontera es γ_j , obteniendo de esta forma un nuevo dominio con más área y frontera de menor longitud.

Consideremos un número positivo r_0 tal que las bolas $B_{\mathcal{S}}(p, r_0)$ con $p \in I$ son simplemente conexas y disjuntas dos a dos. Sea $\tilde{\mathcal{S}}$ el subconjunto de \mathcal{R} dado por $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus \cup_{p \in I} B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)$. Sean J, J_1, J_2 , los subconjuntos de I definidos como

$$\begin{aligned} J &= \{p \in I : \mathcal{D} \cap B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)^* \neq \emptyset\}, \\ J_1 &= \{p \in J : B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)^* \subset \mathcal{D}\}, \\ J_2 &= \{p \in J : \partial\mathcal{D} \cap B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)^* \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Es obvio que $\{J_1, J_2\}$ es una partición de J .

Antes de nada señalemos que

$$L_{\mathcal{S}}(\partial\mathcal{D} \cap B_{\mathcal{S}}(p, r_0)) \geq r_0, \quad \text{para todo } p \in J_2. \quad (3.4)$$

Para ver esto, supongamos que $L_{\mathcal{S}}(\partial\mathcal{D} \cap B_{\mathcal{S}}(p, r_0)) < r_0$ para algún $p \in J_2$. Entonces, tenemos que existe una curva frontera γ_j con $L_{\mathcal{S}}(\gamma_j) < r_0$; dicha curva debe verificar $\gamma_j \subset B_{\mathcal{S}}(p, r_0)$ ya que $d_{\mathcal{S}}(\partial B_{\mathcal{S}}(p, r_0), \partial B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)) = r_0/2$. Pero, si $\gamma_j \subset B_{\mathcal{S}}(p, r_0)$, entonces γ_j es homótopa en \mathcal{R} a cero o a p , y esto no es posible.

Para continuar esta demostración necesitamos un resultado que probaremos más tarde:

Afirmación: Existe una constante c , que sólo depende de r_0 y no de \mathcal{S} ni I , tal que

$$A_{\mathcal{R}}(B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)^*) \leq c, \quad \text{para todo } p \in I. \quad (3.5)$$

Entonces tendríamos que

$$A_{\mathcal{R}}(B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)^*) \leq \frac{c}{4\pi \sinh^2(r_0/4)} A_{\mathcal{S}}(B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)), \quad \text{para cada } p \in J_1, \quad (3.6)$$

ya que $B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)$ es simplemente conexo y entonces

$$A_{\mathcal{S}}(B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)) = A_{\mathbb{D}}(B_{\mathbb{D}}(0, r_0/2)) = 4\pi \sinh^2(r_0/4)$$

y por (3.4)

$$A_{\mathcal{R}}(B_{\mathcal{S}}(p, r_0/2)^*) \leq \frac{c}{r_0} L_{\mathcal{S}}(\partial\mathcal{D} \cap B_{\mathcal{S}}(p, r_0)), \quad \text{para todo } p \in J_2, \quad (3.7)$$

Usando (3.3), (3.6) y (3.7), tenemos que

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{R}}(\mathcal{D}) &\leq A_{\mathcal{R}}(\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{S}}) + \sum_{p \in J_1} A_{\mathcal{R}}(B_S(p, r_0/2)^*) + \sum_{p \in J_2} A_{\mathcal{R}}(B_S(p, r_0/2)^*) \leq \\ &\leq \frac{1}{\tanh^2(r_0/4)} A_S(\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{S}}) + \frac{c}{4\pi \sinh^2(r_0/4)} \sum_{p \in J_1} A_S(B_S(p, r_0/2)) + \frac{c}{r_0} L_S(\partial \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Sea H definido como

$$H = \max \left\{ \frac{1}{\tanh^2(r_0/4)}, \frac{c}{4\pi \sinh^2(r_0/4)} \right\}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{R}}(\mathcal{D}) &\leq H(A_S(\mathcal{D} \cap \tilde{\mathcal{S}}) + \sum_{p \in J_1} A_S(B_S(p, r_0/2))) + \frac{c}{r_0} L_S(\partial \mathcal{D}) \\ &\leq H A_S(\mathcal{D}) + \frac{c}{r_0} L_S(\partial \mathcal{D}) \\ &\leq H h(S) L_S(\partial \mathcal{D}) + \frac{c}{r_0} L_S(\partial \mathcal{D}) \\ &\leq \left(H h(S) + \frac{c}{r_0} \right) L_{\mathcal{R}}(\partial \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Entonces tenemos que \mathcal{R} tiene DIL con constante

$$h(\mathcal{R}) \leq H h(S) + \frac{c}{r_0}. \quad (3.8)$$

Para finalizar la demostración del Teorema 3.1 sólo necesitamos probar (3.5) con

$$c = \frac{2\pi}{\log \frac{\tanh r_0}{\tanh(r_0/4)}},$$

ya que, como veremos después, con este valor de c , se tiene que

$$H = \frac{1}{\tanh^2(r_0/4)}.$$

Lema 3.2. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica y $\{B_S(p, r_0)\}_{p \in I}$ una familia disjunta de bolas simplemente conexas en S . Si $\mathcal{R} = S \setminus I$, entonces se tiene que*

$$A_{\mathcal{R}}(B_S(p, r)^*) \leq \frac{2\pi}{\log \frac{\tanh r_0}{\tanh(r/2)}}, \quad \text{para } 0 < r \leq r_0.$$

Demostración. Fijemos un punto $p \in I$. Consideremos un recubrimiento universal $F: \mathbb{D} \rightarrow S$ tal que $F(0) = p$. Sea J la anti-imagen de I por F . La intersección de la bola $F^{-1}(B_S(p, 2r_0)) = B_{\mathbb{D}}(0, 2r_0) = B(0, \tanh r_0)$ con el conjunto J es exactamente $\{0\}$. Como $F: \mathbb{D} \setminus J \rightarrow \mathcal{R}$ es una

aplicación recubridora, se sigue que para $0 < r \leq r_0$

$$\begin{aligned}
 A_{\mathcal{R}}(B_S(p, r)^*) &= A_{\mathbb{D} \setminus J}(B_{\mathbb{D}}(0, r)^*) \\
 &\leq A_{B(0, \tanh r_0)^*}(B_{\mathbb{D}}(0, r)^*) \\
 &= A_{B(0, \tanh r_0)^*}(B(0, \tanh(r/2))^*) \\
 &= A_{\mathbb{D}^*}\left(B\left(0, \frac{\tanh(r/2)}{\tanh r_0}\right)^*\right) \\
 &= \int_{B(0, \tanh(r/2)/\tanh r_0)^*} \frac{dx dy}{(|z| \log |z|)^2} \\
 &= \frac{2\pi}{\log \frac{\tanh r_0}{\tanh(r/2)}}.
 \end{aligned}$$

Esto finaliza la prueba del Lema 3.2. □

La estimación (3.5) sigue ahora del Lema 3.2 con

$$c = \frac{2\pi}{\log \frac{\tanh r_0}{\tanh(r_0/4)}}, \quad (3.9)$$

y por tanto (3.8) y (3.9) dan la desigualdad en el Teorema 3.1, si

$$H = \frac{1}{\tanh^2(r_0/4)}.$$

Para probar esto, sólo necesitamos comprobar que

$$\frac{1}{\tanh^2(r_0/4)} \geq \frac{1}{2 \sinh^2(r_0/4) \log \frac{\tanh r_0}{\tanh(r_0/4)}},$$

y esto se sigue del hecho de que

$$G(x) = 2 \log \frac{\tanh x}{\tanh(x/4)} - \frac{1}{\cosh^2(x/4)} \geq 0, \quad \text{para } x > 0.$$

Esta desigualdad es una consecuencia del hecho de que

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= \frac{4}{2 \sinh x \cosh x} - \frac{1}{2 \sinh(x/4) \cosh^3(x/4)} \\
 &= \frac{4}{\sinh(2x)} - \frac{4}{2 \sinh(x/2) + \sinh x} \leq 0,
 \end{aligned}$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = 0.$$

Observación. La desigualdad (3.5) se puede obtener de una forma alternativa usando la Proposición 3.1. Esta Proposición será establecida y demostrada a continuación en la sección 3.3. Hemos usado aquí el Lema 3.2 ya que en este contexto nos da unas mejores estimaciones.

3.3 Collares y bolas

Sea \mathcal{R} una superficie de Riemann hiperbólica con una puntura p . Un *collar* en \mathcal{R} alrededor de p es un dominio doblemente conexo en \mathcal{R} limitado por p y una curva de Jordan (llamada la frontera del collar) ortogonal al haz de geodésicas que emanan de p . Es bien conocido que la longitud de la curva frontera es igual al área del collar.

Un collar en \mathcal{R} alrededor de p de área α será llamado α -collar y se denotará por $C_{\mathcal{R}}(p, \alpha)$. Un teorema de Shimizu [Shi63] dice que para cada puntura en cualquier superficie de Riemann, existe un α -collar para cada $0 < \alpha \leq 1$ (ver también [Kra72, p. 60–61]).

A continuación, probaremos una relación (con constantes universales) entre collares en \mathcal{R} y bolas en $\mathcal{R} \cup \{p\}$.

Proposición 3.1. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica y sea $\{B_S(p, r_0)\}_{p \in I}$ una familia de bolas disjuntas dos a dos y simplemente conexas. Denotemos por \mathcal{R} a la superficie de Riemann $\mathcal{R} = S \setminus I$. Sea $k = 4.76$ y $K = e^k$.*

a) *Se tiene que*

$$C_{\mathcal{R}}\left(p, \frac{2\pi}{k - \log(1 - e^{-r})}\right) \subset B_S(p, r)^*,$$

para $p \in I$ y

$$0 < r < \min\left\{\log \frac{1}{1 - Ke^{-2\pi}}, \log \frac{2}{1 + e^{-2r_0}}\right\}.$$

b) *Se tiene que*

$$B_S(p, r)^* \subset C_{\mathcal{R}}\left(p, \frac{2\pi}{\log(1 - e^{-2r_0}) - \log(e^r - 1)}\right),$$

para $p \in I$ y

$$0 < r < \log(1 + (1 - e^{-2r_0})e^{-2\pi}).$$

Obsérvese que, en ambos casos, las condiciones sobre r implican que $0 < r < r_0$.

Demostración. Sea $F : \mathbb{U} \rightarrow S$ un recubrimiento universal y $J = F^{-1}(I)$.

Las bolas en $\{B_{\mathbb{U}}(z, r_0)\}_{z \in J} = \{F^{-1}(B_S(p, r_0))\}_{p \in I}$ son obviamente simplemente conexas (toda bola en \mathbb{U} es simplemente conexa). También señalamos que estas bolas son disjuntas dos a dos. Si tuviéramos que para algún $z, w \in J$

$$B_{\mathbb{U}}(z, r_0) \cap B_{\mathbb{U}}(w, r_0) \neq \emptyset,$$

esto implicaría que $B_S(F(z), r_0)$ no es simplemente conexo (si $F(z) = F(w)$) o $B_S(F(z), r_0) \cap B_S(F(w), r_0) \neq \emptyset$ (si $F(z) \neq F(w)$), y ambas conclusiones contradicen las hipótesis que hemos hecho sobre $\{B_S(p, r_0)\}_{p \in I}$.

Como

$$F(B_{\mathbb{U}}(z, r)) = B_S(F(z), r), \quad \text{para } z \in J, 0 < r \leq r_0,$$

y

$$F(C_{\mathbb{U} \setminus J}(z, \alpha)) = C_{S \setminus I}(F(z), \alpha), \quad \text{para } z \in J, 0 < \alpha < 1,$$

tenemos que la Proposición 3.1 es cierto para toda superficie de Riemann hiperbólica S si y sólo si es cierto para el caso $S = \mathbb{U}$ (con las mismas constantes). Por consiguiente, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $S = \mathbb{U}$. Sea \mathbb{V} la superficie de Riemann $\mathbb{V} = \mathbb{U} \setminus I$.

En lo siguiente necesitaremos una versión precisa de (1.1) (ver Capítulo 1). Es bien conocido que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio plano hiperbólico entonces

$$\lambda_{\Omega}(z) \geq \frac{1}{\delta_{\Omega}(z)(4.76 + \beta_{\Omega}(z))}, \quad \text{para } z \in \Omega. \quad (3.10)$$

Lema 3.3. Sea $r > 0$, $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$. Si $d_{\mathbb{U}}(z_1, z_2) \geq 2r$ y $z \in B_{\mathbb{U}}(z_1, a(r))$, se tiene que

$$|z - z_1| < |z - z_2|, \quad (3.11)$$

donde

$$a(r) = \log \frac{2}{1 + e^{-2r}}.$$

Demostración. Como este enunciado es invariante bajo automorfismos conformes de \mathbb{U} , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z_1 = i$ y $d_{\mathbb{U}}(i, z_2) = 2r$.

Un cálculo da que el Lema 3.3 es cierto si (3.11) se cumple para $z_2 = ie^{-2r}$ y z pertenece al segmento que une $ie^{-a(r)}$ con i (este es el peor caso) y esto se sigue de nuestra elección de $a(r)$. \square

Usando (3.10) y el Lema 3.3 podemos demostrar el siguiente resultado.

Lema 3.4. Sea $\{B_{\mathbb{U}}(p, r_0)\}_{p \in I}$ una familia de bolas disjuntas dos a dos. Entonces se tiene, para $p \in I$, que

$$\lambda_{\mathbb{V}}(z) \leq \lambda_{B(p, (1 - e^{-2r_0}) \mathfrak{S}p)^*}(z), \quad \text{para } z \in B(p, (1 - e^{-2r_0}) \mathfrak{S}p)^*, \quad (3.12)$$

y

$$\lambda_{B(p, K \mathfrak{S}p)^*}(z) \leq \lambda_{\mathbb{V}}(z), \quad \text{para } z \in B_{\mathbb{U}}(p, a(r_0)), \quad (3.13)$$

donde $a(r)$ es la función definida en el Lema 3.3.

Demostración. La siguiente relación entre bolas hiperbólicas y euclídeas es bien conocida.

$$B_{\mathbb{U}}(x + iy, r) = B(x + iy \cosh r, y \sinh r), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}, y, r > 0.$$

Esto implica que

$$B(z, (1 - e^{-r}) \mathfrak{S}z) \subset B_{\mathbb{U}}(z, r) \subset B(z, (e^r - 1) \mathfrak{S}z), \quad \text{para } z \in \mathbb{U}, r > 0. \quad (3.14)$$

Se deduce que

$$B(p, (1 - e^{-2r_0}) \mathfrak{S}p) \subset B_{\mathbb{U}}(p, 2r_0), \quad \text{para } p \in I.$$

Como $d_{\mathbb{U}}(p, q) \geq 2r_0$ para todo $p, q \in I$, $p \neq q$, tenemos que $B(p, (1 - e^{-2r_0}) \mathfrak{S}p)^* \subset \mathbb{V}$. Esto implica (3.12).

Usando de nuevo que $d_{\mathbb{U}}(p, q) \geq 2r_0$ para todo $p, q \in I$, $p \neq q$, y el Lema 3.3 deducimos que

$$|z - p| < |z - q|, \quad \text{para } z \in B_{\mathbb{U}}(p, a(r_0)). \quad (3.15)$$

Un cálculo da que

$$|z - p| \leq \mathfrak{S}z, \quad \text{para } z \in B_{\mathbb{U}}(p, a(r_0)), \quad (3.16)$$

ya que $e^{a(r_0)} < 2$. Por tanto, (3.15) y (3.16) implican que

$$\delta_{\mathbb{V}}(z) = |z - p|, \quad \text{para } z \in B_{\mathbb{U}}(p, a(r_0)).$$

En consecuencia,

$$\beta_{\mathbb{V}}(z) \leq \min \left\{ \left| \log \left| \frac{z - p}{w - p} \right| \right| : w \in \partial \mathbb{V} \right\} \leq \log \frac{\Im p}{|z - p|}, \quad (3.17)$$

porque $|z - p| \leq \Im p$, para $z \in B_{\mathbb{U}}(p, a(r_0))$ (para ver esto es suficiente cambiar los papeles de z y p en (3.16)).

Ahora, (3.10) y (3.17) implican que

$$\lambda_{\mathbb{V}}(z) \geq \frac{1}{|z - p| \log \frac{K \Im p}{|z - p|}}, \quad \text{para } z \in B_{\mathbb{U}}(p, a(r_0)).$$

Esta desigualdad y el hecho conocido

$$\lambda_{B(w,c)^*}(z) = \frac{1}{|z - w| \log \frac{c}{|z - w|}}, \quad \text{para } z \in B(w, c)^*,$$

dan (3.13). Esto finaliza la demostración del Lema 3.4. \square

A continuación vamos a demostrar la Proposición 3.1, parte a). Antes de nada observemos que $Ke^{-2\pi} < 1$, ya que $k < 2\pi$. En segundo lugar, la condición $r < -\log(1 - Ke^{-2\pi})$ implica que

$$0 < \frac{2\pi}{k - \log(1 - e^{-r})} < 1$$

y entonces podemos asegurar que existe el collar en \mathcal{R} [Kra72, p. 60–61].

Por otro lado, (3.13) y (3.14) dan, para $p \in I$, que

$$\lambda_{B(p, Ke^{-2\pi/\alpha})^*}(z) \leq \lambda_{\mathbb{V}}(z), \quad \text{para } z \in B(p, (1 - e^{-a(r_0)})\Im p)^* \subset B_{\mathbb{U}}(p, a(r_0))^*. \quad (3.18)$$

Un cálculo directo muestra que, para $w \in \mathbb{C}$ y $\rho > 0$,

$$C_{B(w,\rho)^*}(w, \alpha) = B(w, \rho e^{-2\pi/\alpha})^*, \quad \text{para } \alpha > 0, \quad (3.19)$$

$$B(w, r)^* = C_{B(w,\rho)^*}\left(w, \frac{2\pi}{\log \rho - \log r}\right), \quad \text{para } 0 < r < \rho. \quad (3.20)$$

Entonces (3.18) y (3.20) implican que

$$C_{\mathbb{V}}(p, \alpha) \subset C_{B(p, Ke^{-2\pi/\alpha})^*}(p, \alpha) = B(p, Ke^{-2\pi/\alpha}\Im p)^*,$$

si

$$B(p, Ke^{-2\pi/\alpha}\Im p)^* \subset B(p, (1 - e^{-a(r_0)})\Im p)^* \subset B_{\mathbb{U}}(p, a(r_0))^*.$$

Si escogemos

$$\alpha = \frac{2\pi}{k - \log(1 - e^{-r})},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} C_V\left(p, \frac{2\pi}{k - \log(1 - e^{-r})}\right) &\subset B(p, Ke^{-2\pi/\alpha}\mathfrak{S}p)^* \\ &= B(p, (1 - e^{-r})\mathfrak{S}p)^* \\ &\subset B_U(p, r)^* \\ &\subset B_U(p, a(r_0))^*, \end{aligned}$$

si

$$r \leq a(r_0) = \log \frac{2}{1 + e^{-2r_0}}.$$

Esto finaliza la demostración de la Proposición 3.1, parte a).

Finalmente, para probar la parte b), obsérvese que la condición $r < \log(1 + (1 - e^{-2r_0})e^{-2\pi})$ implica que

$$0 < \frac{2\pi}{\log(1 - e^{-2r_0}) - \log(e^r - 1)} < 1,$$

y entonces, como antes, podemos asegurar que existe el collar en \mathcal{R} .

Ahora, para cada $p \in I$, (3.20) y (3.12) dan que

$$B(p, (1 - e^{-2r_0})e^{-2\pi/\alpha}\mathfrak{S}p)^* = C_{B(p, (1 - e^{-2r_0})\mathfrak{S}p)^*}(p, \alpha) \subset C_V(p, \alpha),$$

para $0 < \alpha < 1$. En particular, si escogemos

$$\alpha = \frac{2\pi}{\log(1 - e^{-2r_0}) - \log(e^r - 1)}$$

obtenemos que

$$B(p, (e^r - 1)\mathfrak{S}p)^* \subset C_V\left(p, \frac{2\pi}{\log(1 - e^{-2r_0}) - \log(e^r - 1)}\right).$$

Por tanto (3.14) da que

$$B_U(p, r)^* \subset C_V\left(p, \frac{2\pi}{\log(1 - e^{-2r_0}) - \log(e^r - 1)}\right).$$

Esto concluye la demostración de la Proposición 3.1.

Definimos un *collar generalizado* en una superficie de Riemann hiperbólica \mathcal{R} alrededor de una puntura p como un dominio (no necesariamente doblemente conexo) en \mathcal{R} limitado por p y por un número finito de curvas (si el collar no es igual a \mathcal{R}) ortogonal al haz de geodésicas que emanan de p . Obsérvese que si \mathcal{R} es una superficie compacta a la que se le ha añadido una única puntura p , cuando el collar *crece* a la larga se hace igual a \mathcal{R} y en ese caso no existen tales curvas frontera.

En el disco con una puntura, $\mathcal{R} = B(z, r)^*$ tenemos que

$$d_{\mathcal{R}}(\partial C_{\mathcal{R}}(z, \alpha_1), \partial C_{\mathcal{R}}(z, \alpha_2)) = \left| \log \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right|.$$

Entonces, podemos definir para $\alpha \geq 1$ el α -*collar generalizado* en \mathcal{R} alrededor de p como el conjunto

$$C_{\mathcal{R}}(p, \alpha) = C_{\mathcal{R}}(p, 1/2) \cup \{q \in \mathcal{R} : d_{\mathcal{R}}(q, \partial C_{\mathcal{R}}(p, 1/2)) < \log(2\alpha)\}.$$

Obviamente esta definición coincide con la original si existe el α -collar. El número $1/2$ se puede cambiar por cualquier número $0 < \eta < 1$, si $\log(2\alpha)$ se sustituye por $\log(\alpha/\eta)$.

Si \mathcal{R} no es el disco menos un punto, es obvio que existe un α_0 tal que hay un α -collar sólo para $0 < \alpha \leq \alpha_0$. No obstante hay siempre α -collares generalizados.

Con esta definición podemos extender la parte b) de la Proposición 3.1.

Corolario 3.2. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica y sea $\{B_S(p, r_0)\}_{p \in I}$ una familia de bolas simplemente conexas y disjuntas dos a dos. Denotemos por \mathcal{R} a la superficie de Riemann $\mathcal{R} = S \setminus I$. Si denotamos el α -collar generalizado por $C_{\mathcal{R}}(p, \alpha)$, entonces se tiene que

$$B_S(p, r)^* \subset C_{\mathcal{R}}\left(p, \frac{2\pi}{\log(1 - e^{-2r_0}) - \log(e^r - 1)}\right),$$

para $p \in I$ y

$$0 < r < \min\{\log(2 - e^{-2r_0}), r_0\}.$$

La demostración del Corolario 3.2 es la misma que la de la parte b) de la Proposición 3.1. No necesitamos ahora la condición $\alpha < 1$ pero seguimos necesitando $\alpha > 0$; la condición sobre r garantiza este hecho.

Un cálculo y (3.20) dan que

$$B_{B(w, \rho)}(w, r)^* = B(w, \rho \tanh(r/2))^* = C_{B(w, \rho)^*}\left(w, \frac{2\pi}{\log \cotanh(r/2)}\right),$$

para $w \in \mathbb{C}$ y $\rho, r > 0$.

Queremos señalar que la Proposición 3.1 es "sharp" para $r \rightarrow 0$ en el siguiente sentido:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2\pi}{k - \log(1 - e^{-r})}}{-\log \tanh(r/2)} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2\pi}{\log(1 - e^{-2r_0}) - \log(e^r - 1)}}{-\log \tanh(r/2)} = 1.$$

La Proposición 3.1 también da el siguiente resultado.

Corolario 3.3. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica y sea $\{B_S(p, r_0)\}_{p \in I}$ una familia de bolas simplemente conexas y disjuntas dos a dos. Denotemos por \mathcal{R} a la superficie de Riemann $\mathcal{R} = S \setminus I$. Sean $k = 4.76$ y $K = e^k$.

a) Se tiene que

$$C_{\mathcal{R}}(p, \alpha) \subset B_S\left(p, \log \frac{1}{1 - Ke^{-2\pi/\alpha}}\right)^*,$$

para $p \in I$, $0 < \alpha < 1$ y

$$\alpha \leq \frac{2\pi}{k + \log \frac{2}{1 - e^{-2r_0}}}.$$

b) Si denotamos el α -collar generalizado por $C_{\mathcal{R}}(p, \alpha)$, entonces se tiene que

$$B_S(p, \log(1 + (1 - e^{-2r_0})e^{-2\pi/\alpha}))^* \subset C_{\mathcal{R}}(p, \alpha),$$

para $p \in I$ y

$$0 < \alpha \leq \frac{2\pi}{\log(1 + e^{-r_0}) - r_0}.$$



Capítulo 4

Desigualdad isoperimétrica en dominios de Denjoy

4.1 Introducción

Hasta el momento no se conoce ninguna caracterización de la propiedad DIL para dominios planos hiperbólicos, es decir, subconjuntos de la esfera de Riemann cuya frontera tiene al menos tres puntos) en términos del tamaño *euclídeo* de su frontera. En [FR90, Teoremas 3 and 4] se obtiene una condición suficiente y otra necesaria para que un dominio plano satisfaga DIL, pero ninguna de ellas constituye una caracterización de la propiedad DIL, aunque estas condiciones son muy cercanas.

En este capítulo obtenemos una caracterización de la propiedad DIL para el caso de *dominios de Denjoy*, es decir, dominios planos hiperbólicos cuya frontera está contenida en $\hat{\mathbb{R}}$, en términos del tamaño euclídeo de sus fronteras.

Como un ejemplo de las dificultades que envuelven el problema, recordemos que un dominio plano Ω tiene función de Green si y sólo si su frontera tiene capacidad logarítmica positiva (ver [AS60, p. 249], [Tsu59, p.440] o [SN70, p. 332–333]). Pero, por ejemplo, $\mathbb{D} \setminus \{0\} \setminus \{1/2^n\}_{n=1}^\infty$ no tiene DIL, mientras que $\mathbb{D} \setminus \{1 - 1/2^n\}_{n=0}^\infty$ sí tiene (estos hechos son consecuencia de [FR90, Teoremas 3 and 4] o del Teorema 3.1). Esto muestra que el problema de decidir cuándo un dominio plano hiperbólico tiene la propiedad DIL o no, es delicado. Obsérvese que si Ω es un dominio plano hiperbólico y $\partial\Omega$ tiene capacidad logarítmica cero, entonces Ω no tiene DIL.

Como la propiedad DIL es cuasiconformemente invariante entre superficies de Riemann generales ([FR90, Teorema 1]) nuestros resultados caracterizan la propiedad DIL para subconjuntos de $\hat{\mathbb{C}}$ cuya frontera esté contenida en un cuasicírculo. De hecho podemos demostrar un resultado más general (ver Capítulo 5).

Antes de continuar, vamos a explicar algunas notaciones que usaremos en la exposición de los resultados de este capítulo.

4.1.1 Notaciones

Para $\alpha < \beta$, (β, α) denota el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x < \alpha \text{ ó } x > \beta\} \cup \{\infty\}$. También diremos que $(\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$ y como es habitual $(\alpha, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \alpha\}$. Definimos los intervalos cerrados de forma similar. A lo largo de este capítulo usaremos la siguiente convención: el punto del infinito es el mayor número en $\hat{\mathbb{R}}$.

Finalmente, como en el resto de esta tesis, denotamos por c constantes positivas que pueden tomar diferentes valores de línea a línea e incluso en la misma línea. Por otro lado, las constantes t_0 y r_0 siempre tendrán el mismo valor.

4.1.2 Definiciones y resultados

Definición. Sea Ω un dominio plano, sea I el conjunto de puntos aislados de $\partial\Omega$ y $\Omega_0 = \Omega \cup I$. Decimos que Ω es admisible si Ω_0 es un dominio plano hiperbólico e I es fuertemente uniformemente separado en Ω_0 .

Obsérvese que si Ω es admisible, entonces no hay puntos aislados en $\partial\Omega_0$; por tanto $\partial\Omega_0$ tiene infinitos puntos y Ω tiene área (hiperbólica) infinita.

Ahora podemos reformular el Corolario 3.1 del Capítulo 3 para dominios planos hiperbólicos.

Corolario 4.1. Si un dominio plano hiperbólico no es admisible, entonces no tiene DIL.

En lo que sigue $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ será generalmente un dominio de Denjoy. Recordemos que un dominio de Denjoy es un dominio plano hiperbólico cuya frontera está contenida en $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. De cara a enunciar nuestra caracterización de la propiedad DIL para dominios de Denjoy (Teorema 4.4) necesitamos unos resultados preliminares.

Definición. Decimos que un subconjunto finito $A = \{a_1, \dots, a_{2n}\}$ ($n \geq 2$) de puntos de $\partial\Omega \subset \hat{\mathbb{R}}$ es un conjunto borde de $\partial\Omega$ si A verifica las siguientes dos condiciones:

- i) A está “ordenado” en $\hat{\mathbb{R}}$, es decir, existe $j \in \mathbb{Z}_{2n} = \mathbb{Z}/(2n\mathbb{Z})$ tal que $a_{j+1} < \dots < a_{j+2n}$, donde los subíndices pertenecen a \mathbb{Z}_{2n} .
- ii) El conjunto abierto $\cup_{k=1}^n (a_{2k-1}, a_{2k})$ está contenido en Ω .

Obviamente todo subconjunto finito $A = \{a_1, \dots, a_{2n}\}$ de $\hat{\mathbb{R}}$ se puede “ordenar” de tal manera que la condición i) se satisfaga. De este modo la condición significativa en la definición es la ii).

Ejemplo. Consideremos el dominio de Denjoy Ω cuya frontera es $\partial\Omega = \{\infty\} \cup (\cup_{n=1}^{\infty} [2n-1, 2n])$. Está claro que los conjuntos ordenados $\{2, 3, 6, 7, 10, 11\}$ y $\{4, 5, \infty, 1\}$ son conjuntos borde de $\partial\Omega$, pero $\{1, 4, 5, \infty\}$ no lo es. De hecho, el conjunto ordenado de números reales $\{a_1, \dots, a_{2n}\}$ es un conjunto borde si y sólo si $a_{2k} = 1 + a_{2k-1}$ y $a_{2k-1} \in 2\mathbb{Z}$ para $k = 1, \dots, n$. Por otro lado, el conjunto $\{a_1, \dots, a_{2n-1}, \infty\}$ nunca es un conjunto borde. El conjunto ordenado $\{a_1, \dots, a_{2n-2}, \infty, a_{2n}\}$, con $n \geq 3$ y $a_1 < \dots < a_{2n-2}$ es un conjunto borde si y sólo si $\{a_1, \dots, a_{2n-2}\}$ es un conjunto borde y $a_{2n} = 1$.

Obsérvese que el conjunto de cuatro puntos “consecutivos”, $\{a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}\}$ con $k \in \mathbb{Z}_{2n}$, de un conjunto borde de Ω también es un conjunto borde de Ω . Además, si $\partial\Omega$ no tiene ningún conjunto borde, entonces Ω es alguno de los tres siguientes dominios triviales (salvo equivalencia conforme): $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ (que no tiene DIL), $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ (que sí tiene DIL), $\hat{\mathbb{C}} \setminus [0, 1]$ (que sí tiene DIL).

Si $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, denotamos por $r(B)$ la razón cruzada

$$r(B) = \frac{(b_2 - b_1)(b_4 - b_3)}{(b_3 - b_2)(b_4 - b_1)}. \quad (4.1)$$

En lo que sigue denotaremos por $\Phi_1, \Phi_2 : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ funciones cualesquiera que cumplan las siguientes propiedades:

- a) $\Phi_1(r) \asymp \Phi_2(r) \asymp \frac{1}{\log r}$ cuando $r \rightarrow \infty$,
- b) $\Phi_1(r) \asymp \log \frac{1}{r}$ y $\Phi_2(r) \asymp \log \log \frac{1}{r}$ cuando $r \rightarrow 0$.

Después de estos preliminares podemos enunciar el siguiente resultado parcial que nos da una condición necesaria y otra suficiente para la propiedad DIL de un dominio de Denjoy Ω . En muchos

casos, estas condiciones dan una respuesta a la cuestión de si Ω tiene DIL o no, ya que son muy cercanas.

Teorema 4.1. *Sea Ω un dominio de Denjoy admisible, sea I el conjunto de puntos aislados de $\partial\Omega$ y definamos $\Omega_0 = \Omega \cup I$. a) Si Ω tiene DIL, entonces existe una constante positiva c tal que para cualquier conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, se tiene que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_1(r(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c.$$

b) Si existe una constante positiva c tal que para todo conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, se tiene que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_2(r(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c,$$

entonces Ω tiene DIL.

Además, tenemos una caracterización de los dominios de Denjoy con DIL en términos del tamaño euclídeo de sus fronteras. Esta caracterización tiene la desventaja de que la función que aparece en lugar de Φ_1 y Φ_2 (en Teorema 4.1) es más complicada y depende del dominio.

Teorema 4.4. *Sea Ω un dominio de Denjoy, sea I el conjunto de puntos aislados de $\partial\Omega$ y sea $\Omega_0 = \Omega \cup I$. Entonces, Ω tiene DIL si y sólo si Ω es admisible y existe una constante positiva c tal que para todo conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, se tiene que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Psi_{\Omega_0}(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\}) > c,$$

donde Ψ_{Ω_0} es la función que aparece en el Teorema 4.3 (véase la sección 4.3).

A grandes rasgos, esta función Ψ_{Ω_0} “cuenta” en cierto sentido el número de anillos que intersecan $\partial\Omega_0$.

Completaremos este capítulo con tres pequeñas secciones. La sección 4.4 está dedicada a estudiar la relación entre la desigualdad isoperimétrica de un dominio dado y la desigualdad isoperimétrica de su simetrizado y polarizado. La sección 4.5 demuestra que es necesario considerar todos los conjuntos borde de un dominio de cara a aplicar el Teorema 4.4. Por último, en la sección 4.6 expondremos un problema abierto relacionada con la caracterización de la propiedad DIL en dominios de Denjoy.

4.2 Prueba del Teorema 4.1.

Teorema 4.1. *Sea Ω un dominio de Denjoy admisible, sea I el conjunto de puntos aislados de $\partial\Omega$ y definamos $\Omega_0 = \Omega \cup I$.*

a) Si Ω tiene DIL, entonces existe una constante positiva c tal que para cualquier conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, se tiene que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_1(r(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c.$$

b) Si existe una constante positiva c tal que para todo conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, se tiene que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_2(r(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c,$$

entonces Ω tiene DIL.

El Teorema 4.1 es una consecuencia directa del Teorema 3.1 y el siguiente resultado.

Teorema 4.2. *Sea Ω un dominio de Denjoy tal que $\partial\Omega$ no tiene puntos aislados. Entonces*

(1) *Si Ω tiene DIL, entonces existe una constante positiva c tal que para todo conjunto borde de $\partial\Omega$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ ($n \geq 3$), se tiene que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_1(\tau(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c.$$

(2) *Si existe una constante positiva c tal que para todo conjunto borde de $\partial\Omega$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ ($n \geq 3$), se tiene que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_2(\tau(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c,$$

entonces Ω tiene DIL.

La demostración del Teorema 4.2 contiene tres ideas principales. La primera (ver Lema 4.1) es reducir dramáticamente el conjunto de dominios en los que debemos comprobar (3.1). En segundo lugar, estableceremos una correspondencia biyectiva entre estos dominios y los conjuntos borde (ver Lema 4.2). Finalmente, relacionaremos la longitud de cada curva frontera de estos dominios con la longitud de algunas curvas en ciertos dominios extremales que vendrá dada por las funciones Φ_1 y Φ_2 (ver Lemas 4.3 y 4.5).

En [FR90, Lemma 1.2] se demuestra que si S verifica (3.1) para dominios geodésicos, entonces verifica DIL (ver sección 1.4.3 para más detalles).

Demostraremos ahora que si un dominio de Denjoy Ω verifica (3.1) para todo dominio geodésico que sea simétrico respecto al eje real (*dominios-GS*), entonces Ω verifica (3.1) para cualquier dominio geodésico y por consiguiente tiene DIL.

De hecho, se tiene el siguiente resultado, que es cierto incluso si $\partial\Omega$ tiene puntos aislados.

Lema 4.1. *Sea Ω un dominio de Denjoy que satisface la desigualdad*

$$A_\Omega(G) \leq h L_\Omega(\partial G),$$

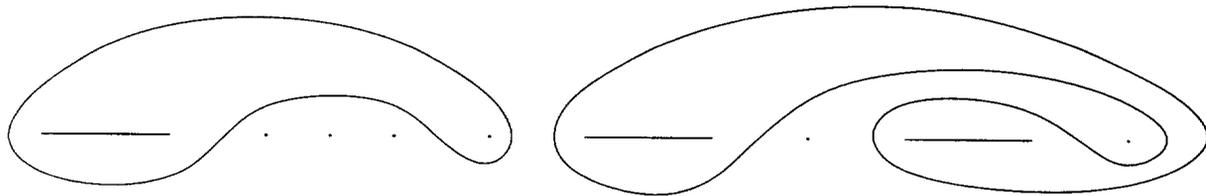
para todo dominio-GS G en Ω y para una constante positiva h . Entonces Ω satisface DIL con

$$h_g(\Omega) \leq 2h \quad \text{y} \quad h(\Omega) \leq 2h + 2.$$

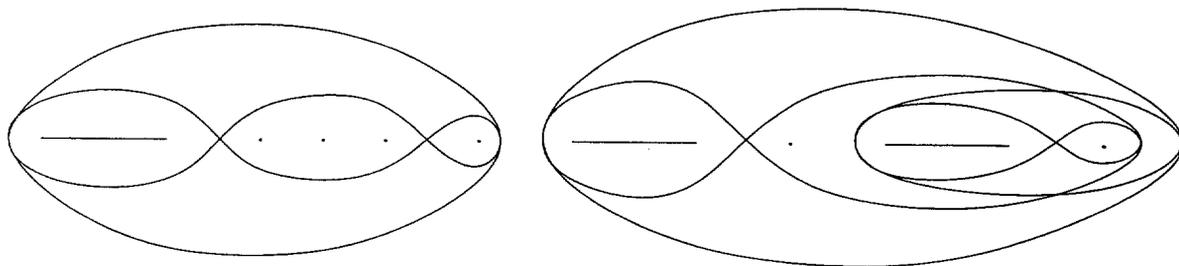
Demostración. Sea G un dominio geodésico en Ω . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que G contiene el punto en el infinito. Consideremos la familia \mathcal{F}_1 de subarcos ∂G que unen dos puntos del eje real y están contenidos en $\{z : \Im z \geq 0\}$ o en $\{z : \Im z \leq 0\}$ y reflejemos cada uno de ellos con respecto al eje real. Obtenemos de este modo una familia de curvas cerradas \mathcal{F}_2 . Sea \mathcal{F}_3 la familia constituida por todas las geodésicas simples cerradas en Ω que son libremente homótopas a alguna curva de \mathcal{F}_2 . Construimos ahora una nueva familia \mathcal{F}_4 a partir de \mathcal{F}_3 del siguiente modo: una curva γ de \mathcal{F}_3 pertenece a \mathcal{F}_4 si y sólo si el dominio de Jordan acotado (en sentido euclídeo) \mathcal{J} tal que $\partial\mathcal{J} = \gamma$ no contiene ninguna otra curva de \mathcal{F}_3 y $\mathcal{J} \cap \partial\Omega$ no es un conjunto finito. Obsérvese que la curvatura negativa implica que dos geodésicas cualesquiera γ_1, γ_2 en \mathcal{F}_3 son disjuntas; y por tanto,

o bien \mathcal{J}_1 y \mathcal{J}_2 son disjuntas, o bien $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2$ o $\mathcal{J}_2 \subset \mathcal{J}_1$. Sea G_0 el dominio-GS cuya frontera está constituida por las curvas en \mathcal{F}_4 .

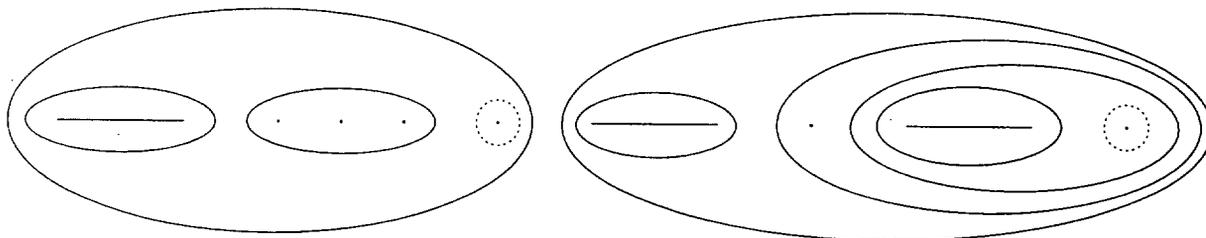
Para ilustrar esta construcción, consideremos por ejemplo el dominio geodésico G como el exterior de las curvas en el dibujo.



Entonces, la familia de curvas \mathcal{F}_2 tendría el siguiente aspecto



La familia de geodésicas simples cerradas \mathcal{F}_3 se muestra como



Nótese que las curvas punteadas en la última figura representa las clases de homotopía que no tienen geodésica; no están en \mathcal{F}_3 . Finalmente, el dominio geodésico G_0 es el exterior de las geodésicas en



Está claro que

$$L_\Omega(\partial G_0) \leq 2L_\Omega(\partial G).$$

Sean ahora n y p , respectivamente, el número de geodésicas simples cerradas que limitan G y el número de punturas en G . Sean también n_0 y p_0 los números correspondientes para G_0 . Obsérvese que $n_0 + p_0 \geq n + p$. Para ver esto, consideremos el conjunto $\Gamma(G)$ de geodésicas generalizadas que limitan G , es decir, la unión del conjunto de n geodésicas en ∂G y el conjunto de p punturas "rodeadas" por G . Queremos ver que

$$\text{card} \Gamma(G) \leq \text{card} \Gamma(G_0).$$

Si una puntura está rodeada por G también está rodeada por G_0 . Por otro lado, dada una geodésica γ de ∂G consideremos el dominio de Jordan acotado (en sentido euclídeo) \mathcal{J} con $\partial \mathcal{J} = \gamma$; si la intersección de \mathcal{J} con el eje real tiene m componentes conexas, la geodésica γ "genera" al menos m geodésicas generalizadas de ∂G_0 . Esto da que $n_0 + p_0 \geq n + p$.

Usando el Teorema de Gauss-Bonnet obtenemos que

$$A_{\Omega}(G_0) = 2\pi(n_0 + p_0 - 2) \geq 2\pi(n + p - 2) = A_{\Omega}(G),$$

ya que la métrica hiperbólica de Ω tiene curvatura -1 .

Por tanto

$$A_{\Omega}(G) \leq A_{\Omega}(G_0) \leq h L_{\Omega}(\partial G_0) \leq 2h L_{\Omega}(\partial G),$$

y queda demostrada la primera desigualdad en el Lema 4.1. La segunda desigualdad es una consecuencia de la primera y [FR90, Lemma 1.2]. \square

Dado un conjunto borde de $\partial\Omega$ con cuatro puntos, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, denotamos por $\gamma(B)$ la única geodésica simple cerrada en Ω que separa $[b_2, b_3]$ de $[b_4, b_1]$.

Lema 4.2. *Un dominio de Denjoy Ω tal que $\partial\Omega$ no tiene puntos aislados tiene DIL si y sólo si existe una constante positiva c tal que para cualquier conjunto borde de $\partial\Omega$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, se tiene que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n L_{\Omega}(\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c.$$

Demostración. Obsérvese que podemos establecer una correspondencia uno a uno entre conjuntos borde de $\partial\Omega$ con $n \geq 3$ y dominios-GS en Ω . Dado un conjunto borde B de $\partial\Omega$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$, consideremos el conjunto de n geodésicas ($n \geq 3$)

$$\mathcal{G} = \{\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\}) : j = 1, \dots, n\}.$$

Las curvas en \mathcal{G} limitan un dominio geodésico G asociado a B . Obsérvese que si $n = 2$, ambas geodésicas son la misma y entonces obviamente no limitan un dominio geodésico.

Está claro que este proceso tiene un inverso bien definido. El Teorema de Gauss-Bonnet da que

$$A(G) = 2\pi(n - 2).$$

Por consiguiente, tenemos que $A(G) \asymp n$. Este hecho y el Lema 4.1 concluyen la prueba del Lema 4.2. \square

Está claro que si definimos

$$\Omega_1 = \hat{\mathbb{C}} \setminus ([b_{2j}, b_{2j+1}] \cup [b_{2j+2}, b_{2j-1}]),$$

$$\Omega_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\},$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} L_{\Omega_2}(\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) &\leq L_{\Omega}(\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) \\ &\leq L_{\Omega_1}(\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})), \end{aligned}$$

ya que $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$.

De cara a probar el Teorema 4.2 solo necesitamos relacionar la longitud en Ω_1 y Ω_2 de la geodésica

$$\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})$$

con las funciones Φ_1 y Φ_2 (ver la definición de estas funciones después de (4.1)).

El siguiente resultado da una estimación de la longitud hiperbólica del eje imaginario en ciertos dominios de Denjoy normalizados. Esta curva es importante porque es la geodésica en muchos casos simétricos (ver por ejemplo Lema 4.5) cuya longitud queremos estimar.

Recordemos que $[x]$ denota el número natural más grande que es menor o igual que x .

Lema 4.3. *Fijemos un número $0 < a < 1$ y sea $0 < t < 1$. Para cada número natural m tal que*

$$m \leq N = \left[\frac{\log \frac{a}{t}}{\log \frac{1}{a}} \right], \quad (4.2)$$

consideremos el conjunto cerrado

$$D_m = D_m(t) = \{z \in \mathbb{C} : a^{m+1} \leq |z+t| \leq a^m \text{ o } a^{m+1} \leq |z-t| \leq a^m\}.$$

Sea Ω un dominio de Denjoy tal que $\{-1, -t, t, 1\} \subset \partial\Omega \subset [-1, -t] \cup [t, 1]$.

Sean $n_1 < n_2 < \dots < n_{\ell-1}$ todos los números naturales en $(0, N)$ que satisfacen $D_{n_j} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, $n_0 = 0$ y $n_{\ell} = N$.

Entonces tenemos que existe una constante universal $0 < t_0 < 1$ tal que si denotamos por σ el eje imaginario con el punto del infinito incluido, entonces

$$L_{\Omega}(\sigma) \asymp \sum_{j=1}^{\ell} (1 + \log(n_j - n_{j-1})), \quad \text{para } 0 < t \leq t_0.$$

Aquí la constante en \asymp depende sólo de a pero no de Ω ni de t .

Demostración. La idea de la demostración es estimar la longitud de segmentos de curva “diádicos”. Sobre cada uno de estos segmentos tendremos una estimación precisa de la distancia a la frontera del dominio y de la función β_{Ω} (ver (1.2)). Estos hechos y [BP78, Teorema 1] nos darán el lema salvo por un detalle técnico que tiene que ver con el punto del infinito y que resolveremos en el Lema 4.4.

Sea $I_m = \sigma \cap D_m$, $0 \leq m \leq N$. Vamos a estimar $L_{\Omega}(I_m)$, la longitud en Ω de I_m , bajo los supuestos que

$$(D_{m-k} \cup D_{m+k}) \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \\ (D_{m-k+1} \cup D_{m-k+2} \cup \dots \cup D_{m-1} \cup D_m \cup D_{m+1} \cup \dots \cup D_{m+k-1}) \cap \partial\Omega = \emptyset,$$

para $0 \leq k \leq \min\{m, N - m\}$ (obviamente la segunda condición no aparece si $k = 0$).

Sea $\Omega^* := \Omega \setminus \{\infty\}$; los cálculos en Ω^* son más fáciles que en Ω porque podemos aplicar [BP78, Teorema 1] ya que $\Omega^* \subset \mathbb{C}$.

Consideremos un punto $b \in (D_{m-k} \cup D_{m+k}) \cap \partial\Omega$. Tenemos cuatro posibilidades:

- i) $b \in D_{m+k}$ y $a^{m+k+1} \leq |b+t| \leq a^{m+k}$,
- ii) $b \in D_{m+k}$ y $a^{m+k+1} \leq |b-t| \leq a^{m+k}$,
- iii) $b \in D_{m-k}$ y $a^{m-k+1} \leq |b+t| \leq a^{m-k}$,
- iv) $b \in D_{m-k}$ y $a^{m-k+1} \leq |b-t| \leq a^{m-k}$,

Consideremos ahora el caso i). Si $z \in I_m$, satisface las desigualdades $a^{m+1} \leq |z+t| \leq a^m$ (de hecho, z satisface las dos desigualdades en la definición de D_m), y entonces

$$\frac{1}{a^{k-1}} = \frac{a^{m+1}}{a^{m+k}} \leq \frac{|z+t|}{|b+t|} \leq \frac{a^m}{a^{m+k+1}} = \frac{1}{a^{k+1}}.$$

Esto implica que

$$1 + \beta_{\Omega^*}(z) \asymp (k+1) \log \frac{1}{a}. \quad (4.3)$$

El mismo resultado se puede deducir, con argumentos similares, en los casos ii), iii) y iv).

Usando (4.3) y [BP78, Teorema 1] obtenemos que

$$\lambda_{\Omega^*}(z) \asymp \frac{1}{a^m(k+1)}, \quad \text{para } k \geq 0. \quad (4.4)$$

A continuación vamos a estimar la longitud euclídea de I_m :

$$|I_m| = \sqrt{a^{2m} - t^2} - \sqrt{a^{2m+2} - t^2} = \frac{a^{2m}(1 - a^2)}{\sqrt{a^{2m} - t^2} + \sqrt{a^{2m+2} - t^2}}. \quad (4.5)$$

Obsérvese que (4.2) da que $t^2 \leq a^{2m+2}$. Este hecho y (4.5) implican que $|I_m| \asymp a^m$, y por tanto

$$L_{\Omega^*}(I_m) = \int_{I_m} \lambda_{\Omega^*}(z) |dz| \asymp \int_{I_m} \frac{|dz|}{a^m(k+1)} \asymp \frac{1}{k+1}. \quad (4.6)$$

De cara a estimar $L_{\Omega}(I_m)$ sólo necesitamos demostrar que $\lambda_{\Omega^*}(z) \asymp \lambda_{\Omega}(z)$ para $|z| \leq 1$.

Esta última relación sería más fácil de probar (ver Lema 3.1 con $C = \{\infty\}$) si no estuviéramos interesados en obtener constantes independientes de Ω y t . Pero, para obtener constantes universales, necesitamos un argumento más sofisticado.

Lema 4.4. *Sea E un subconjunto cerrado del disco unidad cerrado tal que $\{-1, -t, t, 1\} \subset E$. Entonces, para cada $\rho > 1$ existen constantes $t_0 \in (0, 1)$ y $c > 0$ que sólo dependen de ρ tales que*

$$\lambda_{\hat{C} \setminus E}(z) \geq c \lambda_{C \setminus E}(z),$$

para cada $0 < t \leq t_0$ y $|z| \leq \rho$.

Demostración. Por [Hej74, Teorema 1], tenemos que

$$\lambda_{\hat{C} \setminus \{-1, -t, t, 1\}}(z) \longrightarrow \lambda_{\hat{C} \setminus \{-1, 0, 1\}}(z), \quad \text{cuando } t \rightarrow 0,$$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\hat{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Por tanto, para cada $\rho > 1$, existen constantes t_0, c_1 que sólo dependen de ρ , tales que si $0 < t \leq t_0$ y γ es una curva contenida en $\{w \in \hat{C} : |w| \geq \rho\}$, entonces

$$L_{\hat{C} \setminus \{-1, -t, t, 1\}}(\gamma) \geq c_1 L_{\hat{C} \setminus \{-1, 0, 1\}}(\gamma).$$

Por otro lado, por [BF83, Teorema 1], el conjunto $\{w \in \hat{C} : |w| \geq \rho\}$ es hiperbólicamente convexo en todo dominio plano hiperbólico que lo contenga. Por tanto,

$$d_{\hat{C} \setminus E}(w, \infty) \geq d_{\hat{C} \setminus \{-1, -t, t, 1\}}(w, \infty) \geq c_1 d_{\hat{C} \setminus \{-1, 0, 1\}}(w, \infty), \quad \text{si } |w| \geq \rho. \quad (4.7)$$

Ahora, está claro que existe una constante positiva r que sólo depende de ρ tal que

$$B_{\hat{C} \setminus \{-1, 0, 1\}}(\infty, r/c_1) \subset \{w \in \hat{C} : |w| > \rho\}.$$

Este hecho y (4.7) nos dicen que

$$B_{\hat{\mathbb{C}} \setminus E}(\infty, r) \subset \{w \in \hat{\mathbb{C}} : |w| > \rho\},$$

y así, si $|z| \leq \rho$, tenemos que $d_{\hat{\mathbb{C}} \setminus E}(\infty, z) \geq r$. Por consiguiente, el Lema 3.1 (con $C = \{\infty\}$) da que

$$c = \tanh(r/2) < \frac{\lambda_{\hat{\mathbb{C}} \setminus E}(z)}{\lambda_{C \setminus E}(z)} < 1.$$

Esto finaliza la demostración del Lema 4.5. □

En lo que sigue tomaremos el valor fijo $\rho = 2$ y consideraremos los correspondientes c y t_0 . Este t_0 es la constante que funciona en el Lema 4.3.

Ahora el Lema 4.4 y (4.6) dan

$$L_{\Omega}(I_m) \asymp \frac{1}{k+1} \quad \text{si } 0 < t \leq t_0.$$

Por tanto

$$L_{\Omega}(I_{n_{j-1}} \cup \dots \cup I_{n_j}) \asymp 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{2}{n_j - n_{j-1}}\right) \asymp 1 + \log(n_j - n_{j-1})$$

y

$$L_{\Omega}(I_0 \cup \dots \cup I_N) \asymp \sum_{j=1}^{\ell} (1 + \log(n_j - n_{j-1})).$$

Para terminar la demostración del Lema 4.3 es suficiente comprobar que

$$L_{\Omega}(\sigma) \asymp L_{\Omega}(I_0 \cup \dots \cup I_N),$$

donde la constante en \asymp depende sólo de a .

Esto es una consecuencia de los siguientes hechos.

$$\begin{aligned} L_{\Omega}(\sigma \cap \{w \in \hat{\mathbb{C}} : |w| \leq \sqrt{a^{2N+2} - t^2}\}) &\leq L_{\hat{\mathbb{C}} \setminus [t, -t]}(\sigma \cap \{w \in \hat{\mathbb{C}} : |w| \leq a^{N+1}\}) \\ &\leq L_{\hat{\mathbb{C}} \setminus [t, -t]}(\sigma \cap \{w \in \hat{\mathbb{C}} : |w| \leq t/a\}) \\ &= L_{\hat{\mathbb{C}} \setminus [1, -1]}(\sigma \cap \{w \in \hat{\mathbb{C}} : |w| \leq 1/a\}), \\ L_{\Omega}(\sigma \cap \{w \in \hat{\mathbb{C}} : |w| \geq \sqrt{1 - t^2}\}) &\leq L_{\hat{\mathbb{C}} \setminus [1, 1]}(\sigma \cap \{w \in \hat{\mathbb{C}} : |w| \geq \sqrt{1 - t_0^2}\}), \\ \sum_{j=1}^{\ell} (1 + \log(n_j - n_{j-1})) &\geq 1 + \log N \asymp \log \log(1/t), \\ \sigma &\subset I_0 \cup \dots \cup I_N \cup \{w \in \hat{\mathbb{C}} : |w| \leq \sqrt{a^{2N+2} - t^2}\} \cup \{w \in \hat{\mathbb{C}} : |w| \geq \sqrt{1 - t^2}\}. \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del Lema 4.3.

Dado un conjunto borde $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, vamos a considerar las siguientes transformaciones de Möbius, para trasladarnos a una situación más simétrica, como en el Lema 4.3,

$$\begin{aligned}
T(z) &= T_B(z) = \frac{(b_2 - b_1)(z - b_3)}{(b_3 - b_2)(z - b_1)}, \\
T_B^{-1}(z) &= \frac{b_1(b_3 - b_2)z - b_3(b_2 - b_1)}{(b_3 - b_2)z - (b_2 - b_1)}, \\
S(z) &= S_B(z) = \frac{z + 1 - \sqrt{1 + r(B)}}{z + 1 + \sqrt{1 + r(B)}}, \\
S_B^{-1}(z) &= \frac{-2}{1 - t(B)} \frac{z + t(B)}{z - 1} = \frac{(-1 - \sqrt{1 + r(B)})z + 1 - \sqrt{1 + r(B)}}{z - 1}, \\
U(z) &= U_B(z) = (T^{-1} \circ S^{-1})(z).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde $r(B)$ viene definido por (4.1) (obsérvese que $r(B) = T_B(b_4)$) y $t(B)$ está definido por

$$t(B) = \frac{\sqrt{1 + r(B)} - 1}{\sqrt{1 + r(B)} + 1}, \quad r(B) = \frac{4t(B)}{(1 - t(B))^2}. \tag{4.9}$$

Estas transformaciones tienen la propiedad de que las imágenes mediante T de b_1, b_2, b_3, b_4 son $\infty, -1, 0, r$ en este orden, las imágenes mediante S de $\infty, -1, 0, r$ son $1, -1, -t, t$ también en este orden y por consiguiente las imágenes mediante U de $1, -1, -t, t$ son b_1, b_2, b_3, b_4 .

Lema 4.5. Dado $r > 0$ sea T_r el anillo de Teichmüller, es decir $T_r = \mathbb{C} \setminus ([-1, 0] \cup [r, \infty))$ y $S_r = \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, r\}$. Entonces se tiene que la geodésica simple cerrada σ_r que rodea $\{-1, 0\}$ y no rodea $\{r\}$ es igual a $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = \sqrt{1 + r}\}$ en ambos dominios. Además,

$$L_{T_r}(\sigma_r) \asymp \Phi_1(r), \quad L_{S_r}(\sigma_r) \asymp \Phi_2(r), \quad r > 0.$$

Demostración. Consideremos las imágenes de los dominios T_r y S_r bajo la transformación de Möbius $S(z)$ (ver (4.8)) que lleva los puntos $-1, 0, r, \infty$ a $-1, -t, t, 1$ en este orden (si r y t están relacionados por (4.9)). Está claro, por simetría, que la geodésica simple cerrada en $S(T_r)$ y $S(S_r)$ correspondiente a σ_r es en ambos casos el eje imaginario (con el punto del infinito incluido). Por tanto, $\sigma_r = S^{-1}(\{w \in \mathbb{C} : \Re w = 0\} \cup \{\infty\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = \sqrt{1 + r}\}$.

Para finalizar la demostración tenemos que probar los siguientes cuatro hechos:

- 1) $L_{T_r}(\sigma_r) \asymp \log(1/r)$ cuando $r \rightarrow 0$,
- 2) $L_{S_r}(\sigma_r) \asymp \log \log(1/r)$ cuando $r \rightarrow 0$,
- 3) $L_{T_r}(\sigma_r) \asymp 1/\log r$ cuando $r \rightarrow \infty$,
- 4) $L_{S_r}(\sigma_r) \asymp 1/\log r$ cuando $r \rightarrow \infty$.

1) se sigue como una consecuencia directa del Lema 4.3 observando que $\{n_0, n_1, \dots, n_\ell\} = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ y $\ell = N \asymp \log(1/t) \asymp \log(1/r)$. De forma similar, 2) se sigue también como una consecuencia del Lema 4.3 ya que en este caso $\ell \leq 3$.

3) es un resultado bien conocido (ver Secciones 1 y 2 de [LV73, Chapter II], donde también se demuestra x1); recuérdese que el producto del módulo de un anillo por la longitud de su geodésica simple cerrada es constante). 4) se sigue de 3), [BP78, Teorema 1] y del hecho de que, como $r \geq 3$, las β -funciones definidas por (1.2) verifican

$$\beta_{T_r}(z) = \beta_{S_r}(z), \quad \text{para todo } z \in \sigma_r.$$

Esto demuestra el Lema 4.5. □

Demostración del Teorema 2. Consideremos un conjunto borde de $\partial\Omega$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ ($n \geq 3$). Se tiene que $\hat{\mathbb{C}} \setminus ([b_{2j}, b_{2j+1}] \cup [b_{2j+2}, b_{2j-1}]) \subset \Omega \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\}$. Por tanto, si denotamos por r el número positivo

$$r = r(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\}),$$

el Lema 4.5 da que

$$\begin{aligned} c_2 \Phi_2(r) &\leq L_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, r, \infty, -1\}}(\gamma(\{0, r, \infty, -1\})) \\ &= L_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\}}(\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) \\ &\leq L_{\Omega}(\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})), \end{aligned}$$

donde hay que comentar que en la segunda línea de la última fórmula, $\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})$ se refiere a la geodésica en el dominio $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\}$, pero el mismo símbolo en la tercera línea se refiere a la geodésica en el dominio Ω .

El Lema 4.5 también da que

$$\begin{aligned} L_{\Omega}(\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) &\leq L_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \{[b_{2j}, b_{2j+1}] \cup [b_{2j+2}, b_{2j-1}]\}}(\gamma(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) \\ &= L_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \{[-1, 0] \cup [r, \infty)\}}(\gamma(\{0, r, \infty, -1\})) \\ &\leq c_1 \Phi_1(r), \end{aligned}$$

donde habría que hacer un comentario similar al del párrafo anterior.

Estas desigualdades y el Lema 4.2 demuestran el Teorema 4.2.

4.3 Longitud de geodésicas y caracterización de la propiedad DIL en dominios de Denjoy

Antes de poder establecer la caracterización de la propiedad DIL para dominios de Denjoy necesitamos una buena estimación de la longitud de la geodésica simple cerrada $\gamma(B)$ asociada a un conjunto borde B de $\partial\Omega$ con cuatro puntos. Esta estimación, que es interesante por sí misma, es el enunciado del Teorema 4.3.

Fijemos un número $0 < a < 1$ y denotemos por D_m el siguiente conjunto cerrado

$$D_m = D_m(B) = U(\{z \in \mathbb{C} : a^{m+1} \leq |z + t(B)| \leq a^m \text{ o } a^{m+1} \leq |z - t(B)| \leq a^m\}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

La intersección de D_m con el eje real es, de hecho, una unión de a lo sumo cuatro intervalos cerrados. Obsérvese que la definición de D_m más arriba es consistente con la que se da en el Lema 4.3.

Necesitamos también definir el siguiente número natural

$$N = N_B := \left[\frac{\log \frac{a}{t(B)}}{\log \frac{1}{a}} \right],$$

donde recordemos que $[x]$ es el número natural más grande que es menor o igual que x .

Teorema 4.3. *Sea Ω un dominio de Denjoy, $0 < a < 1$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ un conjunto borde de $\partial\Omega$.*

Sea $n_1 < n_2 < \dots < n_{\ell-1}$ la lista de los números naturales en $(0, N)$ que satisfacen $D_{n_j} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, $n_0 = 0$ y $n_{\ell} = N$.

Entonces existe una constante universal $0 < r_0 < 1$ tal que

$$L_{\Omega}(\gamma(B)) \asymp \Psi_{\Omega}(B) := \begin{cases} \frac{1}{\log r(B)}, & \text{si } r(B) > e, \\ 1, & \text{si } r_0 < r(B) \leq e, \\ \sum_{j=1}^{\ell} (1 + \log(n_j - n_{j-1})), & \text{si } r(B) \leq r_0. \end{cases}$$

Aquí la constante en \asymp sólo depende de a y no de Ω ni de B .

Hay que observar que el Teorema 4.3 da un procedimiento general para obtener la longitud de una geodésica simple cerrada simétrica en un dominio de Denjoy. Este teorema es una herramienta útil de cara a estudiar el comportamiento asintótico de la longitud de geodésicas en dominios que dependen de un parámetro. También, hay que destacar que la condición de admisibilidad de Ω no aparece en la hipótesis.

En la prueba del Teorema 4.4 usamos el Teorema 4.3 y alguno de los ingredientes empleados en la demostración del Teorema 4.2. El Teorema 4.3 permite relacionar las ideas anteriores con condiciones euclídeas sobre el tamaño de $\partial\Omega$; ésta es la parte más delicada de nuestro argumento.

Comenzamos demostrando un resultado análogo al Lema 4.3 pero esta vez para las geodésicas “auténticas”. Este resultado será la herramienta básica en la demostración del Teorema 4.3.

Lema 4.6. *Fijemos un número $0 < a < 1$ y sea $0 < t < 1$. Para cada número natural m tal que*

$$m \leq N = \left[\frac{\log \frac{a}{t}}{\log \frac{1}{a}} \right],$$

consideremos el conjunto cerrado

$$D_m = D_m(t) = \{z \in \mathbb{C} : a^{m+1} \leq |z+t| \leq a^m \text{ o } a^{m+1} \leq |z-t| \leq a^m\}.$$

Sea Ω un dominio de Denjoy tal que $B = \{-t, t, 1, -1\} \subset \partial\Omega \subset [-1, -t] \cup [t, 1]$.

Sean $n_1 < n_2 < \dots < n_{\ell-1}$ todos los números naturales en $(0, N)$ que satisfacen $D_{n_j} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, $n_0 = 0$ y $n_{\ell} = N$.

Entonces se tiene que existe una constante universal $0 < t_0 < 1$ (la misma constante que aparece en el Lema 4.3) tal que

$$L_{\Omega}(\gamma(B)) \asymp \sum_{j=1}^{\ell} (1 + \log(n_j - n_{j-1})), \quad \text{para } 0 < t \leq t_0.$$

Aquí la constante en \asymp depende sólo de a , no de Ω ni de t .

Las ideas principales de la prueba de este lema son las siguientes. Primero, usaremos un argumento de polarización (ver más abajo) para reducir nuestro problema a ciertos casos extremales (Lema 4.7). En segundo lugar, hay que observar que no conocemos dónde está la geodésica $\gamma(B)$, de modo, que para obtener cotas inferiores para su longitud, estudiaremos la longitud de cualquier curva en la misma clase de homotopía usando de nuevo un argumento “diádico” (Lema 4.8). Deberíamos destacar que tenemos ya cotas superiores de la longitud de $\gamma(B)$ (Lema 4.3).

Es necesario introducir algunos conceptos para poder demostrar el Lema 4.6.

Si z es un número complejo, consideramos su punto simétrico con respecto al eje imaginario $z^\# = -\bar{z}$, con $\infty^\# = \infty$. El simétrico $A^\#$ de un conjunto $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ se define como $A^\# = \{z^\# : z \in A\}$. Las partes positiva y negativa de A son

$$A^+ = A \cap \{z : \Re z \geq 0\}, \quad A^- = A \cap \{z : \Re z \leq 0\}.$$

Consideremos un dominio Ω como en el Lema 4.6. La polarización Ω_p del dominio de Denjoy Ω se define como

$$\Omega_p = (\Omega \cup \Omega^\#)^+ \cup (\Omega \cap \Omega^\#)^-$$

y el antisimétrico Ω_{as} del dominio Ω como

$$\Omega_{as} = (\{z : \Re z \geq 0\} \setminus \{t, 1\}) \cup (\Omega \cap \Omega^\#)^-.$$

Obsérvese que $(\Omega_p)_p = \Omega_p$, $(\Omega_{as})_{as} = \Omega_{as}$, $(\Omega_p)_{as} = (\Omega_{as})_p = \Omega_{as}$ y $\Omega_p \subset \Omega_{as}$.

El concepto de polarización apareció en un artículo de Wolontis [Wol52], quien demostró resultados sobre el comportamiento de ciertas longitudes extremales bajo polarización y también resultados sobre simetrización mediante aplicación repetida de polarización.

También necesitaremos el siguiente resultado sobre polarización [Sol96, Teorema 9]:

$$\lambda_{\Omega_p}(z) \leq \min\{\lambda_\Omega(z), \lambda_\Omega(z^\#)\} \quad \text{si } \Re z \geq 0. \quad (4.10)$$

En particular, se tiene que

$$\lambda_{\Omega_p}(z) \leq \lambda_{\Omega_p}(z^\#), \quad \lambda_{\Omega_{as}}(z) \leq \lambda_{\Omega_{as}}(z^\#), \quad \text{si } \Re z \geq 0. \quad (4.11)$$

Este último resultado es bien conocido [Min87, Teorema 3].

Los resultados concernientes a la métrica de Poincaré que aparecen en [Min87] y [Sol96] usan como eje de simetría el eje real en lugar del imaginario, pero es obvio (como Solynin comenta en [Sol96]) que el resultado es cierto para polarización con respecto a cualquier línea recta fijada.

Podemos probar ahora el siguiente lema:

Lema 4.7. *Para probar el Lema 4.6 es suficiente considerar los conjuntos Ω_{as} en lugar de Ω .*

Demostración. Si σ denota el eje imaginario con el punto del infinito, se tiene que

$$L_{\Omega_{as}}(\sigma) \asymp L_{\Omega_p}(\sigma) \asymp L_\Omega(\sigma), \quad \text{para } 0 < t \leq t_0,$$

donde t_0 es la constante que aparece en el Lema 4.3. Este hecho es una consecuencia directa del Lema 4.3, ya que la expresión $\sum_{j=1}^{\ell} (1 + \log(n_j - n_{j-1}))$ es exactamente la misma para Ω_{as} , Ω_p y Ω .

Consideremos ahora la geodésica simple cerrada γ , (respectivamente γ_p, γ_{as}) en Ω (respectivamente Ω_p, Ω_{as}) que es libremente homótopa a σ . De la definición de geodésica se sigue que

$$L_\Omega(\gamma) \leq L_\Omega(\sigma), \quad L_{\Omega_p}(\gamma_p) \leq L_{\Omega_p}(\sigma), \quad L_{\Omega_{as}}(\gamma_{as}) \leq L_{\Omega_{as}}(\sigma).$$

También se tiene que $\lambda_{\Omega_{as}}(z) \leq \lambda_{\Omega_p}(z)$ para todo $z \in \Omega_p$, ya que $\Omega_p \subset \Omega_{as}$. Por tanto $L_{\Omega_{as}}(\gamma_{as}) \leq L_{\Omega_p}(\gamma_p)$.

Para terminar la prueba del Lema 4.7, es suficiente ver que $L_{\Omega_p}(\gamma_p) \leq L_\Omega(\gamma)$. Consideremos la curva $\tilde{\gamma} = \gamma^+ \cup (\gamma^-)^\#$. Obviamente, $\tilde{\gamma}$ es libremente homótopa a γ en Ω . Por tanto

$$L_{\Omega_p}(\gamma_p) \leq L_{\Omega_p}(\tilde{\gamma}) \leq L_\Omega(\gamma),$$

donde la primera desigualdad se sigue del hecho de que $\tilde{\gamma}$ es también libremente homótopa a γ_p en Ω_p , y tenemos la segunda por (4.10).

Esto termina la prueba del Lema 4.7. □

Lema 4.8. *Fijemos un número $0 < a < 1$. Sea Ω un dominio de Denjoy tal que $\{-1, -t, t, 1\} \subset \partial\Omega \subset [-1, -t] \cup [t, 1]$, con $0 < t \leq t_0$, donde t_0 es la constante que aparece en el Lema 4.3. Consideremos el conjunto antisimétrico Ω_{as} de Ω . Sea μ_m una curva contenida en*

$$B_m = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re z \leq (1+t)/2, a^{m+1} \leq |z-t| \leq a^m\}$$

que une $S_m = \{z \in \mathbb{C} : |z-t| = a^m\}$ con S_{m+1} . Entonces, existe una constante positiva c , que sólo depende de a , tal que si

$$(D_{m-k} \cup D_{m+k}) \cap \partial\Omega_{as} \neq \emptyset, \\ (D_{m-k+1} \cup D_{m-k+2} \cup \dots \cup D_{m-1} \cup D_m \cup D_{m+1} \cup \dots \cup D_{m+k-1}) \cap \partial\Omega_{as} = \emptyset,$$

entonces se tiene

$$L_{\Omega_{as}}(\mu_m) \geq \frac{c}{k+1},$$

para $0 \leq k \leq \min\{m, N-m\}$ (obviamente la segunda condición sobre $\partial\Omega_{as}$ no aparece si $k=0$).

Demostración. Sea $\Omega_{as}^* := \Omega_{as} \setminus \{\infty\}$; los cálculos en Ω_{as}^* son más fáciles que en Ω_{as} porque podemos aplicar [BP78, Teorema 1] ya que $\Omega_{as}^* \subset \mathbb{C}$. Vamos a encontrar cotas de $\beta_{\Omega_{as}^*}(z)$, para poder estimar $\lambda_{\Omega_{as}^*}(z)$ para $z \in B_m$.

Tenemos que $\delta_{\Omega_{as}^*}(z) = |z-t|$ y (4.2) da que

$$t \leq a^{m+1} \leq |z-t|, \quad \text{para todo } z \in B_m \text{ y } m \leq N. \quad (4.12)$$

Consideremos un punto $b \in (D_{m-k} \cup D_{m+k}) \cap \partial\Omega_{as}^*$. Caben cuatro posibilidades:

- i) $b \in D_{m+k}$ y $a^{m+k+1} \leq |b+t| \leq a^{m+k}$,
- ii) $b \in D_{m+k}$ y $a^{m+k+1} \leq |b-t| \leq a^{m+k}$,
- iii) $b \in D_{m-k}$ y $a^{m-k+1} \leq |b+t| \leq a^{m-k}$,
- iv) $b \in D_{m-k}$ y $a^{m-k+1} \leq |b-t| \leq a^{m-k}$,

Estudiaremos en primer lugar los casos ii) y iv). Las condiciones que definen estos casos y (4.12) dan que

$$\frac{1}{a^{k-1}} = \frac{a^{m+1}}{a^{m+k}} \leq \frac{|z-t|}{|b-t|} \leq \frac{a^m}{a^{m+k+1}} = \frac{1}{a^{k+1}},$$

en el caso ii), y

$$a^{k+1} = \frac{a^{m+1}}{a^{m-k}} \leq \frac{|z-t|}{|b-t|} \leq \frac{a^m}{a^{m-k+1}} = a^{k-1},$$

en el caso iv). En ambos casos, esto implica que

$$\beta_{\Omega_{as}^*}(z) \leq (k+1) \log \frac{1}{a}.$$

Estudiaremos ahora los casos i) y iii). Si $b=1$ ó $b=t$ podemos tomar $-b$ en lugar de b (ya que $-b$ también pertenece a $(D_{m-k} \cup D_{m+k}) \cap \partial\Omega_{as}^*$) y estamos en los casos ii) o iv); obviamente, $b \neq -t$. Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b < -t$. Tanto en el caso i) como en el iii) tenemos que

$$|b-t| \geq |b+t|. \quad (4.13)$$

Con objeto de obtener cotas superiores para $|b-t|$, estudiaremos por separado ambos casos.

En el caso iii) se tiene que

$$|b - t| = 2t + |b + t| \leq 2a^{m+1} + a^{m-k} \leq 3a^{m-k},$$

y

$$\frac{a^{k+1}}{3} = \frac{a^{m+1}}{3a^{m-k}} \leq \frac{|z - t|}{|b - t|} \leq \frac{a^m}{a^{m-k+1}} = a^{k-1}.$$

Este hecho implica que

$$\beta_{\Omega_{as}^*}(z) \leq \log 3 + (k+1) \log \frac{1}{a}.$$

En el caso i) la condición $m + k \leq N$ da que

$$|b - t| = 2t + |b + t| \leq 2a^{m+k+1} + a^{m+k} \leq 3a^{m+k},$$

y

$$\frac{1}{3a^{k-1}} = \frac{a^{m+1}}{3a^{m+k}} \leq \frac{|z - t|}{|b - t|} \leq \frac{a^m}{a^{m+k+1}} = \frac{1}{a^{k+1}}.$$

Esto implica que

$$\beta_{\Omega_{as}^*}(z) \leq \max \left\{ \left| \log \frac{1}{3a^{k-1}} \right|, \log \frac{1}{a^{k+1}} \right\}.$$

Por consiguiente, hay una constante c_1 , que sólo depende de a , tal que

$$\beta_{\Omega_{as}^*}(z) \leq c_1 (k + 1).$$

En consecuencia, tenemos que en cualquier caso

$$\beta_{\Omega_{as}^*}(z) \leq c_2 (k + 1).$$

Por tanto [BP78, Teorema 1] da que

$$\lambda_{\Omega_{as}^*}(z) \geq \frac{c_3}{|z - t|(k + 1) \log(1/a)},$$

y se deduce que

$$\begin{aligned} L_{\Omega_{as}^*}(\mu_m) &= \int_{\mu_m} \lambda_{\Omega_{as}^*}(z) |dz| \\ &\geq \int_{\mu_m} \frac{c_3 |dz|}{|z - t|(k + 1) \log(1/a)} \\ &\geq \int_{a^{m+1}}^{a^m} \frac{c_3 dr}{r(k + 1) \log(1/a)} \\ &= \frac{c_3}{k + 1}. \end{aligned}$$

Obsérvese que $|z - t| \leq a^m \leq 1$ y $t < 1$. Estos hechos implican que $|z| < 2$. El Lema 4.4 (recuérdese que hemos elegido $\rho = 2$) da que

$$L_{\Omega_{as}^*}(\mu_m) \geq \frac{c}{k + 1}, \quad \text{si } 0 < t \leq t_0.$$

Esto finaliza la demostración del Lema 4.8. □

Estamos ya en disposición de demostrar el Lema 4.6.

Demostración del Lema 4.6. Como asegura el Lema 4.7, sólo necesitamos demostrar el Lema 4.6 para dominios Ω_{as} .

Consideremos una curva cualquiera μ libremente homótopa a $\gamma(B)$ en Ω_{as} .

Queremos demostrar que existe una constante positiva c_1 , que sólo depende de a , tal que

$$L_{\Omega_{as}}(\mu) \geq c_1 \sum_{j=1}^{\ell} (1 + \log(n_j - n_{j-1})).$$

Si demostramos esta desigualdad, entonces el Lema 4.6 es cierto ya que $\gamma(B)$ es una de las curvas μ anteriores. La acotación superior de $L_{\Omega_{as}}(\mu)$ es una consecuencia del Lema 4.3, ya que

$$L_{\Omega_{as}}(\gamma(B)) \leq L_{\Omega_{as}}(\sigma) \leq c_2 \sum_{j=1}^{\ell} (1 + \log(n_j - n_{j-1})),$$

y los n_j -s son los mismos para Ω_{as} y Ω .

Consideremos ahora la curva $\tilde{\mu} = \mu^+ \cup (\mu^-)^{\#}$. Obviamente $\tilde{\mu}$ es libremente homótopa a μ en Ω_{as} , y (4.11) da que $L_{\Omega_{as}}(\tilde{\mu}) \leq L_{\Omega_{as}}(\mu)$.

Sea μ^0 una componente conexa de $\tilde{\mu}$ contenida en $\{z : 0 \leq \Re z \leq (1+t)/2\}$ que une el intervalo $[0, t)$ con $\{z : \Re z = (1+t)/2, \Im z \geq 0\}$. La curva μ^0 interseca la línea vertical $\{z : \Re z = (1+t)/2\}$ en un punto de la forma $ib_2 + (1+t)/2$. Tenemos que

$$\left| \frac{1+t}{2} + ib_2 - t \right| \geq \frac{1-t}{2} \geq \frac{1-t_0}{2}.$$

Si m satisface

$$\frac{\log \frac{2}{1-t_0}}{\log \frac{1}{a}} \leq m \leq \frac{\log \frac{a}{t}}{\log \frac{1}{a}}$$

entonces tenemos que $a^m \leq (1-t_0)/2$ y $a^{m+1} \geq t$ y así $\mu_m = \mu^0 \cap \{z : a^{m+1} \leq |z-t| \leq a^m\}$ une $S_m = \{z : |z-t| = a^m\}$ con S_{m+1} . Por tanto el Lema 4.8 y el mismo argumento usado al final de la demostración del Lema 4.3 dan que

$$L_{\Omega_{as}}(\mu) \geq L_{\Omega_{as}}(\mu^0) \geq c_1 \sum_{j=1}^{\ell} (1 + \log(n_j - n_{j-1})),$$

ya que los términos en la última suma correspondientes a

$$0 \leq m \leq \frac{\log \frac{2}{1-t_0}}{\log \frac{1}{a}}$$

tienen longitud acotada.

Demostración del Teorema 4.3. Si aplicamos la transformación de Möbius U^{-1} (que preserva la métrica hiperbólica) a Ω obtenemos un nuevo dominio Ω' con

$$\{-1, -t, t, 1\} \subset \partial\Omega' \subset [-1, -t] \cup [t, 1]. \quad (4.14)$$

Entonces, sin pérdida de generalidad podemos suponer que Ω satisface (4.14) y así

$$D_m = \{z \in \mathbb{C} : a^{m+1} \leq |z+t| \leq a^m \text{ o } a^{m+1} \leq |z-t| \leq a^m\}.$$

Sea γ la geodésica simple cerrada en Ω dada por $\gamma = \gamma(\{-t, t, 1, -1\})$.

Consideremos primero el caso $0 < t \leq t_0$. El Lema 4.6 da que

$$L_\Omega(\gamma) \asymp \sum_{j=1}^{\ell} (1 + \log(n_j - n_{j-1})).$$

Para $t_0 \leq t < 1$, obsérvese que $\Omega_1 = \hat{\mathbb{C}} \setminus ([-1, -t] \cup [t, 1]) \subset \Omega \subset \Omega_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{-1, -t, t, 1\}$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_{\Omega_1}(z) &\geq \lambda_\Omega(z), & \text{para todo } z \in \Omega_1, \\ \lambda_\Omega(z) &\geq \lambda_{\Omega_2}(z), & \text{para todo } z \in \Omega, \end{aligned}$$

y consecuentemente el Lema 4.5 da que

$$\Phi_1(r) \asymp L_{\Omega_1}(\sigma) \geq L_\Omega(\gamma) \geq L_{\Omega_2}(\sigma) \asymp \Phi_2(r), \quad \text{con } r = \frac{4t}{(1-t)^2},$$

y se tiene que

$$\Phi_1(r) \asymp \Phi_2(r) \asymp \begin{cases} \frac{1}{\log r}, & \text{si } r > e, \\ 1, & \text{si } r_0 \leq r \leq e, \end{cases}$$

con $r_0 = 4t_0/(1-t_0)^2$. Aquí la constante en \asymp depende sólo de a pero no de Ω ni de r . Esto finaliza la demostración del Teorema 4.3.

Teorema 4.4. *Sea Ω un dominio de Denjoy, sea I el conjunto de puntos aislados de $\partial\Omega$ y sea $\Omega_0 = \Omega \cup I$. Entonces, Ω tiene DIL si y sólo si Ω es admisible y existe una constante positiva c tal que para todo conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, se tiene que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Psi_{\Omega_0}(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\}) > c.$$

Demostración. Si $\partial\Omega_0$ tiene puntos aislados, entonces Ω no es admisible y el Teorema 3.1 da que Ω no tiene DIL. Supongamos ahora que $\partial\Omega_0$ no tiene puntos aislados. El Teorema 3.1 reduce la demostración del Teorema 4.4 a lo siguiente:

Ω_0 tiene DIL si y sólo si existe una constante positiva c tal que para cualquier conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, se tiene que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Psi_{\Omega_0}(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\}) > c.$$

Este hecho es una consecuencia del Lema 4.2 y del Teorema 4.3. □

4.4 Desigualdad isoperimétrica, polarización y simetrización

En general, los argumentos de simetrización están en la base de las desigualdades isoperimétricas en variedades Riemannianas de curvatura seccional constante, que es el caso de las superficies de Riemann hiperbólicas (ver por ejemplo [Cha84, Capítulo 6] y las referencias que se dan allí).

Por otra parte, las ideas que se usan en la demostración del Teorema 4.3 (ver sección 4.3) pueden sugerir que haya una relación entre la propiedad DIL de un dominio plano hiperbólico Ω y esta propiedad para su polarización Ω_p . Una cuestión similar se puede proponer para su simetrización circular Ω_{cs} (ver [BI74] o [Hay89] para la definición y propiedades básicas), ya que la polarización y la simetrización circular son procesos muy regulares. Se podría pensar que algunas de las siguientes relaciones podrían ser ciertas:

- a) Si Ω satisface DIL, entonces Ω_p también satisface DIL.
- b) Si Ω_p satisface DIL, entonces Ω también satisface DIL.
- c) Si Ω satisface DIL, entonces Ω_{cs} también satisface DIL.
- d) Si Ω_{cs} satisface DIL, entonces Ω también satisface DIL.

En esta sección mostraremos que estas conjeturas son falsas incluso para dominios de Denjoy.

(1) Consideremos $E = \{a_n\}$ y $F = \{b_n\}$ dos sucesiones crecientes de números positivos que convergen a 1 tales que $E \cap F = \emptyset$. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty) \cup E \cup (-F))$, donde $-F = \{-b_n\}$. Se tiene que $\Omega_p = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty) \cup (-E) \cup (-F))$ y $\Omega_{cs} = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup (-E) \cup (-F))$. Supongamos también que E y F son fuertemente uniformemente separados en $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$ y que $E \cup F$ no lo es. El Teorema 3.1 da que Ω satisface DIL pero Ω_p y Ω_{cs} no satisfacen DIL. Este ejemplo muestra que a) y c) no son ciertas.

(2) Consideremos $E = \bigcup_{k=0}^{\infty} [1 - 2^{-2k}, 1 - 2^{-2k-1}] \cup \{1\}$ y $F = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \cup \{-1\}$, donde cada I_k es un intervalo cerrado centrado en $-1 + 3 \cdot 2^{-2k-3}$ y contenido en $(-1 + 2^{-2k-2}, -1 + 2^{-2k-1})$. Sea $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$. Si $\lim_{k \rightarrow \infty} 2^{2k} |I_k| = 0$, se puede comprobar que Ω no satisface DIL: basta con aplicar el Teorema 4.2 a los dominios geodésicos que “rodean” a I_n y a I_{n+1} .

Si $-E = \bigcup_{k=0}^{\infty} [-1 + 2^{-2k-1}, -1 + 2^{-2k}] \cup \{-1\}$, tenemos que $\Omega_{cs} = \hat{\mathbb{C}} \setminus ((-E) \cup F)$ y $\Omega_p = \Omega_{cs} \setminus \{1\}$. El siguiente argumento, al igual que en la demostración de la Proposición 4.1 (ver sección 4.5), da que Ω_{cs} satisface DIL: $\hat{\mathbb{C}} \setminus (-E)$ satisface DIL ya que es un dominio modulado. Sea a_k un punto de I_k para $k \geq 0$. El Teorema 3.1 da que $\hat{\mathbb{C}} \setminus ((-E) \cup (\bigcup_{k=0}^{\infty} \{a_k\}))$ satisface DIL. Entonces la Proposición A (Capítulo 5) implica que $\Omega_{cs} = \hat{\mathbb{C}} \setminus ((-E) \cup F)$ satisface DIL. El Teorema 3.1 da que $\Omega_p = \Omega_{cs} \setminus \{1\}$ también satisface DIL. Este ejemplo muestra que b) y d) no son ciertas.

4.5 Dominios geodésicos con tres curvas frontera

Se podría pensar que el Teorema 4.4 se podría mejorar estudiando sólo conjuntos borde con seis puntos, de la siguiente manera.

Sea Ω un dominio de Denjoy, sea I el conjunto de puntos aislados de $\partial\Omega$ y sea $\Omega_0 = \Omega \cup I$. Entonces, Ω tiene DIL si y sólo si Ω es admisible y existe una constante positiva c tal que para cualquier conjunto borde de $\partial\Omega_0$ con seis puntos, $B = \{b_1, \dots, b_6\}$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^3 \Psi_{\Omega_0}(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\}) > c. \quad (4.15)$$

Este enunciado parece razonable ya que si queremos estudiar un conjunto borde $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$, podemos “dividirlo” en conjuntos borde con seis puntos.

Mostraremos con un ejemplo que este enunciado no es cierto.

Ejemplo. Sea Ω el dominio de Denjoy definido como el complemento de un conjunto de Cantor diádico, $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus K$, donde K se construye como sigue.

Sea $E_0 := [0, 1]$ y supongamos que E_n ha sido definido y consiste en 2^n subintervalos cerrados y disjuntos de E_0 , es decir J_j , cada uno de los cuales tiene longitud $d_n = r_1 \cdots r_n$, con

$$r_n := \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{para } n \text{ impar} \\ \frac{1}{n+1} & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Dividimos cada subintervalo J_j en tres intervalos, obteniendo dos subintervalos cerrados J_j^1 y J_j^2 (los hijos de J_j), cada uno con longitud $d_{n+1} = d_n r_{n+1}$ y eliminando el intervalo central con longitud $d_n - 2d_{n+1}$. Si denotamos por E_{n+1} la unión de los intervalos con longitud d_{n+1} , el conjunto de Cantor K se define como $K := \bigcap_n E_n$.

Consideremos un intervalo J de E_n y la única geodésica simple cerrada γ_n que “rodea” J en Ω . Para n impar tenemos

$$L_\Omega(\gamma_n) \geq L_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1/3, 2/3, 1\}}(\gamma), \quad (4.16)$$

donde γ es la geodésica en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1/3, 2/3, 1\}$ dada por $\gamma := \{\Re z = 1/2\}$.

También tenemos

$$L_\Omega(\gamma_n) \leq L_{\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1/3] \cup [0, 1/3] \cup [2/3, \infty)\}}(\eta),$$

donde η es la geodésica simple cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1/3] \cup [0, 1/3] \cup [2/3, \infty)\}$.

Si $B := \{-1/3, 0, 1/3, 2/3\}$, tenemos que $r(B) = 1/3$. Por tanto, el Lema 4.5 da

$$L_\Omega(\gamma_n) \leq L_{\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1/3] \cup [0, 1/3] \cup [2/3, \infty)\}}(\eta) = L_{\mathbb{C} \setminus \{[-1, 0] \cup [1/3, \infty)\}}(\sigma), \quad (4.17)$$

donde σ es la geodésica simple cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{[-1, 0] \cup [1/3, \infty)\}$.

Para n par tenemos

$$L_\Omega(\gamma_n) \leq L_{\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 2-r_n^{-1}] \cup [0, 1] \cup [r_n^{-1}-1, \infty)\}}(\eta_n) = L_{\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 1-n] \cup [0, 1] \cup [n, \infty)\}}(\eta_n),$$

donde η_n es la geodésica simple cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 1-n] \cup [0, 1] \cup [n, \infty)\}$.

Si $B_n := \{1-n, 0, 1, n\}$, tenemos que

$$r(B_n) = \frac{(n-1)^2}{2n-1} \asymp n.$$

Por tanto, el Lema 4.5 da

$$L_\Omega(\gamma_n) \leq L_{\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, 1-n] \cup [0, 1] \cup [n, \infty)\}}(\eta_n) = L_{\mathbb{C} \setminus \{[-1, 0] \cup [r(B_n), \infty)\}}(\sigma_n) \asymp \Phi_1(r(B_n)) \asymp \frac{1}{\log n}, \quad (4.18)$$

donde σ_n es la geodésica simple cerrada en $\mathbb{C} \setminus \{[-1, 0] \cup [r(B_n), \infty)\}$.

Decimos que un conjunto borde B de $\partial\Omega$ es n -básico si tiene seis puntos y las tres geodésicas simples cerradas asociadas con él rodean un intervalo $J \subset E_n$ y a sus dos hijos $J^1, J^2 \subset E_{n+1}$. Decimos que un conjunto borde B de $\partial\Omega$ es básico si es n -básico para algún n .

Para un conjunto n -básico B , siempre se tiene (4.15) ya que una (respectivamente dos) de las tres geodésicas asociadas con B verifica (4.16) si n es impar (respectivamente par).

Las desigualdades (4.17) y (4.18) dan que hay una cota superior finita l para la longitud de las geodésicas asociadas con cualquier conjunto borde básico. Entonces, el Lema del Collar [Ran79] nos dice que toda geodésica que interseca una geodésica γ asociada con cualquier conjunto borde básico tiene longitud al menos el doble de la anchura w del collar C_γ y

$$w \geq \text{Arg cosh}(\text{cotanh}(l/2)).$$

Por tanto, (4.15) la satisfacen todos los conjuntos borde B de $\partial\Omega$ con seis puntos, ya que al menos una de las tres geodésicas asociadas con B interseca una geodésica asociada con un conjunto borde básico.

Sin embargo, Ω no satisface DIL. Para ver esto, consideremos el dominio geodésico G_k en Ω acotado por las 2^{2k} geodésicas que rodean cada intervalo de E_{2k} .

El Teorema de Gauss-Bonnet da $A_\Omega(G_k) = 2\pi(2^{2k} - 2)$. La desigualdad (4.18) da, para alguna constante positiva c_0 ,

$$L_\Omega(\partial G_k) \leq c_0 \frac{2^{2k}}{\log(2k)}.$$

Luego

$$\frac{L_\Omega(\partial G_k)}{A_\Omega(G_k)} \leq \frac{c_1}{\log(2k)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty,$$

y este hecho da que Ω no satisface DIL.

4.6 Un problema abierto

En esta sección queremos discutir sobre la posibilidad de encontrar una caracterización más simple de la propiedad DIL. De hecho, nos gustaría tener un resultado del siguiente tipo:

Conjetura. *Sea Ω un dominio de Denjoy, sea I el conjunto de puntos aislados de $\partial\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ y sea $\Omega_0 = \Omega \cup I$. Existe una función Φ , independiente de Ω , tal que Ω tiene DIL si y sólo si Ω es admisible y existe una constante positiva c tal que para cualquier conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, tenemos que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi(r(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c.$$

Podemos decir algo sobre la función Φ , si existiera.

Proposición 4.1. *Sea Φ una función verificando la siguiente condición:*

Si un dominio de Denjoy Ω tiene DIL entonces existe una constante positiva c tal que para cualquier conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, se tiene que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi(r(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c.$$

Entonces Φ debe verificar

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi(r)}{\log(1/r)} > 0.$$

Demostración. Consideremos el siguiente subconjunto cerrado E de $[0, 1]$:

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{[2^{-2n-1}, 2^{-2n}] \cup I_n\} \cup \{0\},$$

donde I_n es el conjunto de $2n + 1$ puntos $\{x_{n,k}\}_{k=-n}^n$ en $(2^{-2n-2}, 2^{-2n-1})$, con $x_{n,\pm k} = (3 \pm (1 - 2^{-k}))2^{-2n-3}$, para $k = 0, 1, \dots, n$.

Sea I el conjunto discreto $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$. Sean Ω_1, Ω_2 los dominios de Denjoy $\Omega_1 = \hat{\mathbb{C}} \setminus E$ y $\Omega_2 = \Omega_1 \cup I$.

Primero veremos que Ω_1 y Ω_2 tienen DIL:

El conjunto Ω_2 es modulado y eso implica que Ω_2 tiene DIL ([FR90, Teorema 3]).

Por consiguiente, [FR90, Teorema 3] también da que para demostrar que Ω_1 tiene DIL, sólo necesitamos comprobar que I es uniformemente separado en Ω_2 :

Las métricas hiperbólicas en Ω_2 y $\Omega_2^* = \Omega_2 \cup \{\infty\}$ son comparables en cada bola euclídea del plano complejo. También tenemos [BP78, Corollary 1] que existe una constante positiva c tal que

$$\frac{2}{d(x, E \setminus I)} \geq \lambda_{\Omega_2^*}(x) \geq \frac{c}{d(x, E \setminus I)}, \quad \text{para } x \in [0, 1] \cap \Omega_2.$$

Estos dos hechos dan que

$$\lambda_{\Omega_2}(x) \asymp \frac{1}{d(x, E \setminus I)}, \quad \text{para } x \in [0, 1] \cap \Omega_2.$$

Entonces tenemos que

$$d_{\Omega_2}(x_{n,k}, x_{n,k+1}) \asymp \int_{x_{n,k}}^{x_{n,k+1}} \frac{dx}{2^{-2n-1} - x} = \log \frac{2^{-2n-1} - x_{n,k}}{2^{-2n-1} - x_{n,k+1}} = \log 2.$$

Un argumento similar da la misma estimación para $d_{\Omega_2}(x_{n,-k}, x_{n,-k-1})$. Esto implica que I es uniformemente separado en Ω_2 , y en consecuencia, que Ω_1 tiene DIL.

Para cada punto $x_{n,k} \in I$, consideremos el intervalo $J_{n,k} = [a_{n,k}, b_{n,k}]$ tal que $x_{n,k} \in J_{n,k}$ y $J_{n,k}$ no corta ningún intervalo de la forma $[2^{-2m-1}, 2^{-2m}]$ ni otro $J_{m,l}$. También elegimos $a_{n,-n} = x_{n,-n}$ y $b_{n,n} = x_{n,n}$. Sean $J = \bigcup_{n,k} J_{n,k}$ y $\Omega = \Omega_1 \setminus J$. La longitud de estos intervalos $J_{n,k}$ se ha elegido tan pequeña de tal manera que la longitud de las geodésicas $\gamma_{n,k}$ en Ω que rodean sólo $J_{n,k}$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ (uniformemente en k). El dominio Ω tiene DIL (de hecho $\delta(\Omega) \leq \delta(\Omega_1) < 1$) como consecuencia de la Proposición A (ver Capítulo 5).

Consideremos ahora el conjunto borde B_n en Ω dado por $B_n = \{2^{-2n-2}, a_{n,-n}, b_{n,n}, 2^{-2n-1}\}$. Tenemos que

$$r(B_n) = r(\{2^{-2n-2}, x_{n,-n}, x_{n,n}, 2^{-2n-1}\}) = \frac{2^{-2n}}{1 - 2^{-n}}.$$

Como Ω tiene DIL, la propiedad de Φ , con el conjunto borde

$$\{2^{-2n-2}, a_{n,-n}, b_{n,-n}, \dots, a_{n,0}, b_{n,0}, \dots, a_{n,n}, b_{n,n}, \dots, 2^{-2n-1}\},$$

implica

$$\frac{1}{2n+2} \Phi\left(\frac{2^{-2n}}{1-2^{-n}}\right) + o(1) > c, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi\left(\frac{2^{-2n}}{1-2^{-n}}\right)}{\log \frac{1-2^{-n}}{2^{-2n}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi\left(\frac{2^{-2n}}{1-2^{-n}}\right)}{2n \log 2} \geq \frac{c}{\log 2}.$$

Esto finaliza la demostración de la Proposición 4.1 □

La Proposición 4.1 implica que nuestra conjetura no es cierta para ninguna función Φ que satisfaga

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\Phi(r)}{\log(1/r)} = 0.$$

En particular no es cierta para la función Φ_2 del Teorema 4.2, pero podría ser cierta para Φ_1 .

En cualquier caso, si la conjetura fuera cierta para $\Phi = \Phi_1$, la demostración debería ser más sofisticada que nuestros argumentos, porque no es cierto que $\Phi_1(r(B)) \asymp L_\Omega(\gamma(B))$ para ningún conjunto borde B de ningún dominio de Denjoy Ω cuando $r \rightarrow 0$ (si $\Omega = \mathbb{C} \setminus ([-1, -1+r] \cup [-r, 0] \cup [r, 2r] \cup [2, \infty))$ y $B = \{0, r, \infty, -1\}$, entonces $r = r(B)$, $\Phi_1(r) \asymp \log(1/r)$ y el Teorema 4.3 da que $L_\Omega(\gamma(B)) \asymp \log \log(1/r)$).

Capítulo 5

Desigualdad isoperimétrica en superficies de Riemann generales

5.1 Introducción

Con este capítulo vamos a completar nuestros resultados sobre la desigualdad isoperimétrica. En primer lugar extenderemos nuestros teoremas a una clase más amplia de dominios. Por último vamos a introducir una serie de definiciones y lemas técnicos que nos van a permitir en la última sección dar unos teoremas de localización para la propiedad DIL, es decir, teoremas que nos permitirán estudiar la desigualdad isoperimétrica de una superficie, observando lo que sucede localmente.

5.2 Generalización de los resultados

En esta sección generalizaremos los teoremas 4.1 y 4.4. Para ello, haremos algunos comentarios preliminares:

1) Si el conjunto I que aparece en los teoremas 4.1 y 4.4 no está contenido en $\hat{\mathbb{R}}$, estos teoremas serían también ciertos ya que el Teorema 3.1 es un resultado general sobre superficies de Riemann hiperbólicas.

2) Si $\partial\Omega_0$ está contenido en un cuasicírculo Q (la imagen de una línea recta por una aplicación cuasiconforme de la esfera de Riemann en sí misma) nuestra caracterización de la propiedad DIL para dominios de Denjoy aún se puede aplicar (si conociéramos la aplicación cuasiconforme que lleva $\hat{\mathbb{R}}$ en Q) ya que la propiedad DIL se preserva por aplicaciones cuasiconformes [FR90, Teorema 1].

Podemos definir de forma obvia un conjunto borde de un cuasicírculo. En este contexto podemos generalizar el Teorema 4.1.

Teorema 5.1. *Sea Ω_0 un dominio plano hiperbólico cuya frontera está contenida en un cuasicírculo y no tiene puntos aislados, sea I un conjunto fuertemente uniformemente separado en Ω_0 , y sea $\Omega = \Omega_0 \setminus I$. Entonces*

a) *Si Ω tiene DIL, entonces existe una constante positiva c tal que para todo conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$ con $n \geq 3$, se tiene que*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_1(r(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c.$$

b) *Si existe una constante positiva c tal que para todo conjunto borde de $\partial\Omega_0$, $B = \{b_1, \dots, b_{2n}\}$*

con $n \geq 3$, se tiene que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Phi_2(r(\{b_{2j-1}, b_{2j}, b_{2j+1}, b_{2j+2}\})) > c,$$

entonces Ω tiene DIL.

Obsérvese que el Teorema 5.1 se sigue directamente del Teorema 4.1, [FR90, Teorema 1] y de los siguientes hechos: a) una aplicación cuasiconforme cuasi-preserva razones cruzadas; b) $\Phi_i(s) \asymp \Phi_i(r)$ para $s \asymp r$, con $0 < r < \infty$ y para $i = 1, 2$.

El Teorema 5.1 da una condición necesaria y suficiente para que Ω tenga DIL. Mejoraremos este resultado en el resto de la sección.

Si $\partial\Omega_0$ está contenido en una unión finita de cuasicírculos, podemos caracterizar también la propiedad DIL de Ω en muchos casos. Daremos ahora los detalles:

Sea $\{E_j\}_{j=1}^n$ una colección de subconjuntos cerrados de $\hat{\mathbb{C}}$ disjuntos dos a dos tales que cada E_j está contenido en un cuasicírculo y $\Omega_0 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \cup_j E_j$ es conexo. Sea I un conjunto fuertemente uniformemente separado en Ω_0 y sea $\Omega = \Omega_0 \setminus I$. Una condición necesaria y suficiente para que Ω tenga DIL es que cada $\hat{\mathbb{C}} \setminus E_j$ tenga DIL (ver Teorema 5.3 más abajo). Usando la Observación 2) o el el Teorema 5.1 como un test, podemos verificar si cada uno de estos últimos dominios tiene DIL o no.

Aunque estamos interesados en dominios planos y subconjuntos cerrados de cuasicírculos, muchos resultados de esta sección son ciertos para superficies de Riemann generales en lugar de $\hat{\mathbb{C}}$ y para conjuntos cerrados generales E_j . Comenzamos con algunas definiciones.

Definición. Sea S una superficie de Riemann y $\varepsilon > 0$. Sean E_1, E_2 dos subconjuntos cerrados y disjuntos de S . Decimos que E_1 y E_2 son débilmente ε -separados en S si $S_1 = S \setminus E_1$, $S_2 = S \setminus E_2$ son superficies de Riemann hiperbólicas (conexas) y los dos conjuntos siguientes son disjuntos:

$$E_{1,\varepsilon} = \{q \in S_2 : d_{S_2}(q, E_1) < 2\varepsilon\}, \quad E_{2,\varepsilon} = \{q \in S_1 : d_{S_1}(q, E_2) < 2\varepsilon\}.$$

Decimos que E_1 y E_2 son débilmente separados en S si son débilmente ε -separados en S para algún $\varepsilon > 0$.

Decimos que los conjuntos cerrados E_1, E_2, \dots, E_n son débilmente separados en S si los $n-1$ pares de conjuntos (E_1, E_2) , $(E_1 \cup E_2, E_3)$, \dots , $(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n-1}, E_n)$ son débilmente separados en S .

Observación 1. Está claro que si E_1, E_2 son subconjuntos cerrados disjuntos de S , E_2 es compacto y $S \setminus (E_1 \cup E_2)$ es conexo, entonces E_1 y E_2 son débilmente separados en S . También es claro que si E_1, E_2, \dots, E_n son subconjuntos compactos de S disjuntos dos a dos y $S \setminus \cup_{j=1}^n E_j$ es conexo, entonces E_1, E_2, \dots, E_n son débilmente separados en S .

Observación 2. Si E_1, E_2 son subconjuntos cerrados disjuntos de un dominio plano Ω , es posible que no sean débilmente separados en Ω . Sea Ω el dominio plano $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideremos como E_1 una sucesión $\{x_n\}$ de números reales decrecientes a 0. Sea E_2 una sucesión $\{y_n\}$ tal que:

a) $0 < x_{n+1} < y_n < x_n$,

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)/(y_n - x_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)/(y_{n-1} - x_n) = 0$.

Entonces ni E_1 ni E_2 son débilmente separados en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Observación 3. Sean E_1, E_2 subconjuntos cerrados en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Supongamos que existe una constante positiva δ_0 tal que

$$|z_1 - z_2| \geq \delta_0 |z_1 - z_0|, \quad \text{para todo } z_1 \in E_1, z_2 \in E_2.$$

Entonces E_1, E_2 son débilmente separados en Ω .

Demostración de la Observación 3. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z_0 = 0$. Para $w \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, definimos la función

$$e(w) := \max \{ \varepsilon > 0 : B_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}(w, \varepsilon) \cap B_{\mathbb{C} \setminus \{0,w\}}(1, \varepsilon) = \emptyset \}.$$

Obsérvese que $\partial B_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}(w, \varepsilon)$ y $\partial B_{\mathbb{C} \setminus \{0,w\}}(1, \varepsilon)$ varían con continuidad en w , ya que

$$\lambda_{\mathbb{C} \setminus \{0,w\}}(z) = \lambda_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}\left(\frac{z}{w}\right) \frac{1}{|w|}$$

es una función analítica real en w .

Por tanto, e es una función continua $e : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow (0, \infty)$. Por otro lado, se deduce de (3.10) que

$$\lambda_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}(z) \geq \frac{1}{|z|(k + |\log |z||)}, \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

donde $k = 4.76$ es la constante que aparece en la Sección 3.3 del Capítulo 3. Esta es una mala estimación si z está próximo a 1, pero es válida para z en un entorno de 0 o ∞ . Esta desigualdad da

$$B_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}(w, \varepsilon) \subset \left\{ |z| > \exp((k + \log |w|)e^{-\varepsilon} - k) \right\},$$

y en consecuencia,

$$B_{\mathbb{C} \setminus \{0,w\}}(1, \varepsilon) \subset \left\{ |z| < |w| \exp(k - (k + \log |w|)e^{-\varepsilon}) \right\},$$

para

$$|w| > 1 \quad \text{y} \quad 0 < \varepsilon \leq \log \frac{k + \log |w|}{k}.$$

Por tanto, $B_{\mathbb{C} \setminus \{0,1\}}(w, \varepsilon) \cap B_{\mathbb{C} \setminus \{0,w\}}(1, \varepsilon) = \emptyset$ para

$$|w| > 1 \quad \text{y} \quad 0 < \varepsilon \leq \log \frac{k + \log |w|}{k + \frac{1}{2} \log |w|}.$$

Entonces, para cualquier $M > 1$, existe una constante positiva c_0 tal que $e(w) \geq c_0$ si $|w| \geq M$.

Obsérvese que $e(1/w) = e(w)$ ya que la aplicación conforme $T(z) = 1/z$ es una isometría de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ en sí mismo. En consecuencia, $e(w) \geq c_0$ si $|w| \leq 1/M$. Estos hechos implican que, para cualquier $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $e(w) \geq \varepsilon$ si $|w - 1| \geq \delta$.

Para $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $z_1 \neq z_2$, definimos ahora la función

$$E(z_1, z_2) := \max \{ \varepsilon > 0 : B_{\mathbb{C} \setminus \{0,z_1\}}(z_2, \varepsilon) \cap B_{\mathbb{C} \setminus \{0,z_2\}}(z_1, \varepsilon) = \emptyset \}.$$

Está claro que

$$E(z_1, z_2) = E\left(1, \frac{z_2}{z_1}\right) = e\left(\frac{z_2}{z_1}\right).$$

La hipótesis sobre E_1 y E_2 dan que existe $\delta_0 > 0$ tal que $|z_2 - z_1| \geq \delta_0|z_1|$ para todo $z_1 \in E_1$ y $z_2 \in E_2$, es decir, $|\frac{z_2}{z_1} - 1| \geq \delta_0$ para todo $z_1 \in E_1$ y $z_2 \in E_2$. En consecuencia, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$E(z_1, z_2) \geq \varepsilon_0 \quad \text{para todo } z_1 \in E_1 \text{ y } z_2 \in E_2.$$

Entonces tenemos que

$$B_{\mathbb{C} \setminus \{0, z_1\}}(z_2, \varepsilon_0) \cap B_{\mathbb{C} \setminus \{0, z_2\}}(z_1, \varepsilon_0) = \emptyset \quad \text{para todo } z_1 \in E_1 \text{ y } z_2 \in E_2.$$

En lo que sigue usaremos la notación $B_\Omega(A, r) := \cup_{p \in A} B_\Omega(p, r)$ para un conjunto A y un número positivo r .

Fijemos $z_1 \in E_1$. Tenemos que

$$B_{\mathbb{C} \setminus \{0, z_1\}}(E_2, \varepsilon_0) := \cup_{z_2 \in E_2} B_{\mathbb{C} \setminus \{0, z_1\}}(z_2, \varepsilon_0)$$

y

$$B_{\mathbb{C} \setminus \{0, E_2\}}(z_1, \varepsilon_0) \subset \cap_{z_2 \in E_2} B_{\mathbb{C} \setminus \{0, z_2\}}(z_1, \varepsilon_0).$$

Por tanto

$$B_{\mathbb{C} \setminus \{0, z_1\}}(E_2, \varepsilon_0) \cap B_{\mathbb{C} \setminus \{0, E_2\}}(z_1, \varepsilon_0) = \emptyset, \quad \text{para todo } z_1 \in E_1.$$

Ahora tenemos que

$$B_{\mathbb{C} \setminus \{0, E_1\}}(E_2, \varepsilon_0) \subset \cap_{z_1 \in E_1} B_{\mathbb{C} \setminus \{0, z_1\}}(E_2, \varepsilon_0)$$

y

$$B_{\mathbb{C} \setminus \{0, E_2\}}(E_1, \varepsilon_0) = \cup_{z_1 \in E_1} B_{\mathbb{C} \setminus \{0, E_2\}}(z_1, \varepsilon_0).$$

Entonces

$$B_{\mathbb{C} \setminus \{0, E_1\}}(E_2, \varepsilon_0) \cap B_{\mathbb{C} \setminus \{0, E_2\}}(E_1, \varepsilon_0) = \emptyset.$$

□

Observación 4. Sean E_1, E_2 conjuntos cerrados en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ con $z_0 \in \partial\Omega$. Sean C_1, C_2 conjuntos cerrados en \mathbb{C} , tales que cada C_j es una unión finita de conos con vértice en z_0 , $E_j \subset C_j$ y $C_1 \cap C_2 = \{z_0\}$. Entonces

$$|z_1 - z_2| \geq \delta_0|z_1 - z_0|, \quad \text{para todo } z_1 \in E_1, z_2 \in E_2,$$

y por tanto, E_1 y E_2 son débilmente separados en Ω .

De cara a demostrar el Teorema 5.3 enunciaremos algunos resultados previos.

Lema 5.1. Sea S una superficie de Riemann y $\varepsilon > 0$. Sean E_1, E_2 dos conjuntos cerrados débilmente ε -separados en S . Sean $S_k = S \setminus E_k$ superficies de Riemann hiperbólicas (conexas) para $k = 1, 2$ y sea \mathcal{R} una componente conexa de $S_1 \cap S_2 = S \setminus (E_1 \cup E_2)$. Entonces,

$$b(\mathcal{R}) \geq \frac{1}{2} \tanh^2 \varepsilon \min\{b(S_1), b(S_2)\}.$$

Recordemos que $b(\mathcal{R})$ es el ínfimo de los autovalores del Laplaciano.

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{R})$. Obviamente $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{S}_1) \cap C_c^\infty(\mathcal{S}_2)$ y

$$\frac{\iint_{\mathcal{S}_k} \|\nabla\varphi\|^2 dw_k}{\iint_{\mathcal{S}_k} \varphi^2 dw_k} \geq b(\mathcal{S}_k), \quad k = 1, 2,$$

donde dw_1 y dw_2 denotan, respectivamente, el elemento de área en \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 . Recuérdese que $\|\cdot\|$ y ∇ se refieren también a las correspondientes métricas de Poincaré.

Consideremos ahora los conjuntos abiertos

$$E_{1,\varepsilon} = \{q \in \mathcal{S}_2 : d_{\mathcal{S}_2}(q, E_1) < 2\varepsilon\}, \quad E_{2,\varepsilon} = \{q \in \mathcal{S}_1 : d_{\mathcal{S}_1}(q, E_2) < 2\varepsilon\}.$$

Por hipótesis tenemos que $E_{1,\varepsilon} \cap E_{2,\varepsilon} = \emptyset$ y por tanto $(\mathcal{S} \setminus E_{1,\varepsilon}) \cup (\mathcal{S} \setminus E_{2,\varepsilon}) = \mathcal{S}$. Por otro lado, también tenemos como consecuencia de (3.3) que

$$\iint_{\mathcal{S} \setminus E_{1,\varepsilon}} \varphi^2 dw \leq \cotanh^2 \varepsilon \iint_{\mathcal{S} \setminus E_{1,\varepsilon}} \varphi^2 dw_2$$

y

$$\iint_{\mathcal{S} \setminus E_{2,\varepsilon}} \varphi^2 dw \leq \cotanh^2 \varepsilon \iint_{\mathcal{S} \setminus E_{2,\varepsilon}} \varphi^2 dw_1,$$

donde dw es el elemento de área en \mathcal{R} .

Por tanto se deduce que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \varphi^2 dw &\leq \iint_{\mathcal{S} \setminus E_{1,\varepsilon}} \varphi^2 dw + \iint_{\mathcal{S} \setminus E_{2,\varepsilon}} \varphi^2 dw \\ &\leq \cotanh^2 \varepsilon \left(\iint_{\mathcal{S} \setminus E_{1,\varepsilon}} \varphi^2 dw_2 + \iint_{\mathcal{S} \setminus E_{2,\varepsilon}} \varphi^2 dw_1 \right) \\ &\leq \cotanh^2 \varepsilon \left(\iint_{\mathcal{S}_2} \varphi^2 dw_2 + \iint_{\mathcal{S}_1} \varphi^2 dw_1 \right). \end{aligned}$$

Recuérdese que $\iint \|\nabla\varphi\|^2 dw$ es un invariante conforme, es decir,

$$\iint_{\mathcal{R}} \|\nabla\varphi\|^2 dw = \iint_{\mathcal{S}_1} \|\nabla\varphi\|^2 dw_1 = \iint_{\mathcal{S}_2} \|\nabla\varphi\|^2 dw_2. \quad (5.1)$$

Obtenemos de (5.2) y (5.1) que

$$\begin{aligned} \frac{\iint_{\mathcal{R}} \|\nabla\varphi\|^2 dw}{\iint_{\mathcal{R}} \varphi^2 dw} &\geq \frac{1}{2} \tanh^2 \varepsilon \frac{\iint_{\mathcal{S}_1} \|\nabla\varphi\|^2 dw_1 + \iint_{\mathcal{S}_2} \|\nabla\varphi\|^2 dw_2}{\iint_{\mathcal{S}_1} \varphi^2 dw_1 + \iint_{\mathcal{S}_2} \varphi^2 dw_2} \\ &\geq \frac{1}{2} \tanh^2 \varepsilon \min\{b(\mathcal{S}_1), b(\mathcal{S}_2)\}, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{R})$. Esto finaliza la demostración de Lema 5.1. \square

Como consecuencia de este lema se obtienen los siguientes resultados.

Proposición 5.1. *Sea S una superficie de Riemann. Sean E_1, E_2, \dots, E_n conjuntos débilmente separados en S tales que $S_k = S \setminus E_k$ ($k = 1, \dots, n$) son superficies de Riemann hiperbólicas (conexas) y sea \mathcal{R} una componente conexa de $\cap_k S_k = S \setminus \cup_k E_k$. Entonces existe una constante positiva c tal que*

$$b(\mathcal{R}) \geq c \min_k b(S_k).$$

Lema 5.2. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica. Sean E_1, E_2 dos subconjuntos cerrados disjuntos de S tales que $S_k = S \setminus E_k$ son superficies conexas para $k = 1, 2$, sea \mathcal{R} una componente conexa de $S_1 \cap S_2 = S \setminus (E_1 \cup E_2)$ y sea $4\varepsilon = d_S(E_1, E_2)$. Entonces,*

$$b(\mathcal{R}) \geq \frac{1}{2} \tanh^2 \varepsilon \min\{b(S_1), b(S_2)\}.$$

El Lema 5.2 es una consecuencia directa del Lema 5.1, ya que $d_S(E_1, E_2) = 4\varepsilon$ implica que E_1, E_2 son débilmente ε -separados en S .

Proposición 5.2. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica. Sea $\{E_k\}_{k=1}^n$ una colección de subconjuntos cerrados disjuntos dos a dos de S tales que $S_k = S \setminus E_k$ ($k = 1, \dots, n$) son superficies conexas, sea \mathcal{R} una componente conexa de $\cap_k S_k = S \setminus \cup_k E_k$ y sea $\varepsilon = \min_{j \neq k} d_S(E_j, E_k)$. Supongamos que $\varepsilon > 0$. Entonces, existe una constante positiva c , que sólo depende de ε y n (pero no de S), tal que*

$$b(\mathcal{R}) \geq c \min_k b(S_k).$$

Observación. Sea $\{E_k\}_{k=1}^n$ una colección de subconjuntos cerrados de $\hat{\mathbb{C}}$ disjuntos dos a dos tales que $\hat{\mathbb{C}} \setminus E_k$ es un dominio hiperbólico plano (conexo) para $k = 1, \dots, n$. Sea $\Omega_0 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \cup_k E_k$. Sea también I un conjunto fuertemente uniformemente separado en Ω_0 y sea $\Omega = \Omega_0 \setminus I$. Una condición suficiente para que Ω tenga DIL es que cada $\hat{\mathbb{C}} \setminus E_k$ tenga DIL.

Definición. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica y sean $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ geodésicas cerradas simples en S . Decimos que G es un dominio cuasigeodésico en S , relativo a $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, si G es un dominio de área finita en S y ∂G consiste en una cantidad finita de curvas simples cerradas $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, donde cada α_i es una geodésica simple cerrada o una unión finita de sub-arcos de geodésicas simples cerradas tales que si dos arcos se tocan en un punto, uno de estos arcos es un sub-arco de algún γ_j . Definimos $\partial_0 G$ como $\partial_0 G = \partial G \setminus \{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k\}$.*

Obviamente, se puede tener $\partial_0 G = \emptyset$.

Los dominios cuasigeodésicos aparecen de modo natural como intersección de dominios geodésicos: Si G_1, G_2 son dominios geodésicos en S , entonces $G_1 \cap G_2$ es un dominio cuasigeodésico relativo a ∂G_1 .

Necesitamos ahora, hablar de collares de geodésicas en una superficie de Riemann hiperbólica cualquiera S . La definición análoga de *collar de una puntura* aparece en el Capítulo 1 sección 1.2.6.

Dada una geodésica simple cerrada γ en S , un *collar* alrededor de γ es un dominio doblemente conexo en S limitado por dos curvas simples cerradas (las curvas frontera del collar) cuyos puntos están a la misma distancia d de γ . La distancia d se llama *anchura* del collar. Un collar alrededor de γ de área 2β se llama β -collar.

Randol [Ran79] demostró que existe un collar C_γ de γ con anchura d_0 , tal que

$$\cosh d_0 \geq \coth \frac{L_S(\gamma)}{2}, \quad A_S(C_\gamma) \geq 2 L_S(\gamma) \operatorname{cosech} \frac{L_S(\gamma)}{2}.$$

Además, si γ' es una geodésica tal que $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$, se tiene que $C_\gamma \cap \gamma' = \emptyset$.

Randol [Ran79] enuncia el Lema del Collar bajo las hipótesis de que la superficie es compacta, pero la misma demostración, sin ningún cambio, funciona para cualquier superficie de Riemann.

Lema 5.3. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica satisfaciendo DIL y sea $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ una colección de geodésicas simples cerradas disjuntas dos a dos en S . Entonces, existe una constante positiva c tal que*

$$A_S(G) \leq c L_S(\partial_0 G), \quad (5.2)$$

para cualquier dominio cuasigeodésico G en S , relativo a $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, con $L_S(\partial_0 G) > 0$.

Demostración. Por la desigualdad isoperimétrica de S , sólo necesitamos comprobar (5.2) para dominios cuasigeodésicos G en S , tales que $0 < L_S(\partial_0 G) < L_S(\partial G)$.

Antes de nada, consideremos los conjuntos compactos $C_{t,i} = \{p \in S : d_S(p, \gamma_i) \leq t\}$ para t positivo y $i \in \{1, \dots, k\}$. Dado un dominio geodésico γ_i elegimos un lado positivo y otro negativo de γ_i , denotados por γ_i^+ y γ_i^- respectivamente. Denotamos por $C_{t,i}^+$ (respectivamente $C_{t,i}^-$) el conjunto de puntos en S que están en alguna geodésica de longitud t que arranca ortogonalmente a γ_i^+ (respectivamente γ_i^-). Obviamente, tenemos que $C_{t,i} = C_{t,i}^+ \cup C_{t,i}^-$. Puede suceder que $C_{t,i}^+ \cap C_{t,i}^- \neq \emptyset$ si la superficie de Riemann S tiene género positivo (por supuesto, si $S \setminus \gamma$ es conexo).

Sea $G_{t,i}^+$ (respectivamente $G_{t,i}^-$) el dominio geodésico "correspondiente" a $C_{t,i}^+$ (respectivamente $C_{t,i}^-$): cada puntura o curva frontera de $G_{t,i}^+$ es libremente homótopa a una curva frontera de $C_{t,i}^+$. Denotemos por $G_{t,i}$ a la unión $G_{t,i} = \gamma_i \cup G_{t,i}^+ \cup G_{t,i}^-$. Si para algún $i \in \{1, \dots, k\}$ tenemos que $G_{t,i} = \gamma_i$ para todo t positivo (las dos curvas frontera de $C_{t,i}$ son libremente homótopas a γ_i), entonces $k = 1$ y S es un dominio doblemente conexo (un anillo), y (5.2) es cierto ya que no hay dominios cuasigeodésicos en S . Por tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que $G_{t,i}$ no es vacío para $t \geq t_0$ con $i \in \{1, \dots, k\}$. Obsérvese que $G_{t,i}^+$ es no decreciente en t . De hecho, si $t_1 < t_2$ son tales que $A_S(G_{t_1,i}^+) < A_S(G_{t_2,i}^+)$, la curvatura constante -1 y el Teorema de Gauss-Bonnet dan $A_S(G_{t_1,i}^+) + 2\pi \leq A_S(G_{t_2,i}^+)$. Lo mismo es cierto para $G_{t,i}^-$.

Esto implica que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ o bien existe un número positivo T_i^+ tal que $G_{t,i}^+ = G_{T_i^+,i}^+$ para todo $t \geq T_i^+$, o bien $A_S(G_{t,i}^+) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$. Lo mismo es cierto para $G_{t,i}^-$ con T_i^- .

Ahora, sea G un dominio cuasigeodésico en S , tal que $0 < L_S(\partial_0 G) < L_S(\partial G)$. Existe $j \in \{1, \dots, k\}$ con $\partial G \cap \gamma_j \neq \emptyset$. Consideramos tres posibilidades:

Caso 1. $A_S(G) \geq 2h(S)\ell$, con $\ell := \sum_{i=1}^k L_S(\gamma_i)$. En este caso,

$$2h(S)\ell \leq A_S(G) \leq h(S)L_S(\partial G) \leq h(S)(L_S(\partial_0 G) + \ell)$$

y obtenemos que

$$\ell \leq L_S(\partial_0 G).$$

Por tanto,

$$A_S(G) \leq 2h(S)L_S(\partial_0 G).$$

Caso 2. $A_S(G) < 2h(S)\ell$.

Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, sea t_i un número positivo verificando las dos condiciones siguientes:

- $t_i \geq T_i^+$ (si existe T_i^+) o $A_S(G_{t_i,i}^+) \geq 2h(S)\ell$,
- $t_i \geq T_i^-$ (si existe T_i^-) o $A_S(G_{t_i,i}^-) \geq 2h(S)\ell$.



Sea Ω_i el dominio geodésico $\Omega_i := G_{t_i, i}$. Definimos los siguientes números positivos

$$a := \min \{L_S(\gamma) : \gamma \text{ geodésica simple cerrada, } \gamma \subset \cup_i \overline{\Omega_i}\},$$

$$b := \max \{L_S(\gamma) : \gamma \text{ geodésica simple cerrada, } \gamma \subset \cup_{i=1}^k \{\gamma_i \cup \partial\Omega_i\}\}.$$

Recordemos que $\partial G \cap \gamma_j \neq \emptyset$. Este hecho, las desigualdades, $A_S(G) < 2h(S)\ell$, $L_S(\partial_0 G) > 0$, y la definición de t_j dan que se cumple una de las dos siguientes posibilidades:

Caso 2.1. Existe una geodésica simple cerrada $\gamma \subset \overline{\Omega_j} \cap \partial_0 G$. Entonces

$$L_S(\partial_0 G) \geq L_S(\gamma) \geq a.$$

Caso 2.2. Existe un arco geodésico η en $\partial_0 G$ que toca alguna geodésica simple cerrada $\gamma \subset \partial\Omega_j \cup (\cup_{i=1}^k \gamma_i)$.

Obsérvese que si G no es un dominio geodésico estamos en esta situación; de hecho, hay un arco geodésico η en ∂G_0 que toca algún γ_i .

El Lema del Collar [Ran79] dice que $L_S(\eta) \geq d_0$, donde d_0 (la anchura del collar C_γ) satisface

$$\cosh d_0 \geq \coth \frac{L_S(\gamma)}{2} \geq \coth \frac{b}{2},$$

y

$$d_0 \geq D := \text{Arg cosh} \left(\coth \frac{b}{2} \right)$$

(recordemos que si una geodésica γ' no interseca γ entonces γ' no interseca C_γ).

Por tanto,

$$L_S(\partial_0 G) \geq L_S(\eta) \geq D.$$

En ambos casos (2.1 y 2.2) $L_S(\partial_0 G) \geq \min\{a, D\} =: c_0$. Entonces

$$A_S(G) \leq h(S)(L_S(\partial_0 G) + \ell) \leq h(S) \left(L_S(\partial_0 G) + \ell \frac{L_S(\partial_0 G)}{c_0} \right)$$

y

$$A_S(G) \leq h(S) \left(1 + \frac{\ell}{c_0} \right) L_S(\partial_0 G).$$

Obviamente, $\ell \geq a \geq c_0$ y $1 + \ell/c_0 \geq 2$. Por tanto, en cualquier caso,

$$A_S(G) \leq h(S) \left(1 + \frac{\ell}{c_0} \right) L_S(\partial_0 G).$$

Consecuentemente, el Lema 5.3 es cierto con

$$c = h(S) \left(1 + \frac{\ell}{c_0} \right).$$

□

Si \mathcal{S} es una superficie de Riemann hiperbólica, hemos considerado subsuperficies (abiertas y conexas) $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$, dotadas de su propia métrica hiperbólica. Por supuesto, \mathcal{S}_1 con esta métrica es una variedad Riemanniana geodésicamente completa. En lo siguiente consideraremos también subsuperficies de Riemann (conexas) con borde $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}$, dotadas con la restricción a \mathcal{S}_2 de la métrica hiperbólica de \mathcal{S} . \mathcal{S}_2 con esta métrica no es una variedad Riemanniana geodésicamente completa.

El Lema 5.3 y [FR90, Lemma 1.2] tienen las siguientes consecuencias.

Corolario 5.1. Sean S_1, \dots, S_m superficies de Riemann hiperbólicas satisfaciendo DIL. Para $j = 1, \dots, m$, sea S_j^0 una subsuperficie con borde de S_j cuyo borde es un conjunto de n_j ($1 \leq n_j < \infty$) geodésicas simples cerradas disjuntas dos a dos. Supongamos que podemos pegar S_1^0, \dots, S_m^0 a lo largo de sus fronteras, obteniendo una superficie de Riemann hiperbólica completa (sin frontera) \mathcal{R} (recordemos que podemos unir dos superficies identificando dos geodésicas frontera si y sólo si tienen la misma longitud). Entonces, \mathcal{R} satisface DIL si y sólo si existe $1 \leq j \leq m$ tal que $A_{S_j}(S_j^0) = \infty$.

Demostración. Si $A_{S_j}(S_j^0)$ es finita para $j = 1, \dots, m$, entonces \mathcal{R} también tiene área finita (ya que $A_{\mathcal{R}}(S_j^0) = A_{S_j}(S_j^0)$) y por tanto, no satisface DIL.

Supongamos ahora que $A_{S_1}(S_1^0) = \infty$. Sea Λ la unión (para $j = 1, \dots, m$) de las n_j geodésicas en la frontera de S_j^0 .

Sea G un dominio geodésico en \mathcal{R} . Si G fuera ya un dominio geodésico en algún S_j^0 , verificaría (3.1) con constante $h_1 = \max\{h_g(S_1), \dots, h_g(S_m)\}$. En otro caso, consideramos los conjuntos $G_j = G \cap S_j^0$, para $j = 1, \dots, m$. Sean $\partial_0 G = \partial G \setminus \Lambda$ y $\partial_j G = \partial_0 G \cap S_j^0$, para $j = 1, \dots, m$. Consideremos ahora el conjunto J de los índices $j \in \{1, \dots, m\}$ tales que $L_{\mathcal{R}}(\partial_j G) > 0$.

Si $J = \emptyset$ entonces ∂G está contenido en Λ , y hay sólo un número finito de tales G . Estos dominios satisfacen (3.1) con una constante fija h_2 , que sólo depende de \mathcal{R} .

Si $j \in J$, entonces Lema 5.3 da que

$$A_{\mathcal{R}}(G_j) \leq c_j L_{\mathcal{R}}(\partial_j G) \leq h_3 L_{\mathcal{R}}(\partial_j G), \quad (5.3)$$

donde

$$h_3 := \max\{c_1, \dots, c_m\},$$

ya que $A_{\mathcal{R}}(G_j) = A_{S_j}(G_j)$ y $L_{\mathcal{R}}(\partial_j G) = L_{S_j}(\partial_j G)$.

En caso contrario, el teorema de Gauss-Bonnet da que

$$\sum_{j \in J} A_{\mathcal{R}}(G_j) \geq 2\pi. \quad (5.4)$$

Consecuentemente, (5.3) y (5.4) dan que

$$L_{\mathcal{R}}(\partial G) \geq \sum_{j \in J} L_{\mathcal{R}}(\partial_j G) \geq \frac{1}{h_3} \sum_{j \in J} A_{\mathcal{R}}(G_j) \geq \frac{2\pi}{h_3}. \quad (5.5)$$

Sea

$$A := \sum_{A_{\mathcal{R}}(S_j^0) < \infty} A_{\mathcal{R}}(S_j^0).$$

Como consecuencia de (5.3) y (5.5), se deduce que

$$A_{\mathcal{R}}(G) \leq A + \sum_{j \in J} A_{\mathcal{R}}(G_j) \leq \frac{Ah_3}{2\pi} L_{\mathcal{R}}(\partial G) + h_3 L_{\mathcal{R}}(\partial_0 G).$$

Por tanto,

$$h_g(\mathcal{R}) \leq \min \left\{ h_1, h_2, h_3 \left(1 + \frac{A}{2\pi} \right) \right\}.$$

Ahora [FR90, Lemma 1.2] finaliza la demostración del Corolario 5.1. □

Corolario 5.2. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica satisfaciendo DIL. Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ geodésicas simples cerradas en S disjuntas dos a dos. Sea S_1 una componente conexa de $S \setminus \{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k\}$ con $A_S(S_1) = \infty$, y sea S_0 el doble de Schottky de S_1 . Entonces, S_0 satisface DIL.

El doble de Schottky de \mathcal{S}_1 es la unión de $\overline{\mathcal{S}_1}$ y su “reflejo” con respecto a $\partial\mathcal{S}_1$. Ver [AS60, p. 26] para una definición precisa.

Este corolario fue demostrado en [Rod94a, p. 245–248] con argumentos similares a los del Lema 5.3. De cualquier manera, necesitamos los enunciados precisos del Lema 5.3 y del Corolario 5.1, que con más generales que el Corolario 5.2.

Necesitamos algunos resultados adicionales.

Decimos que una función f está en la clase $C^k(F)$, donde $1 \leq k \leq \infty$ y F es un conjunto cerrado, si las derivadas de f hasta el orden k son continuas en F donde se define la derivada de f en un punto $z \in F$ como el límite usual cuando nos aproximamos a z tomando puntos en F . Con este propósito consideramos conjuntos cerrados F que son clausuras de conjuntos abiertos con frontera suave.

Lema 5.4. *Sea S una superficie de Riemann y sea \mathcal{J} un dominio simplemente conexo en S cuya frontera es una curva simple cerrada y analítica η . Dado un subconjunto compacto K de \mathcal{J} , un subconjunto abierto V de \mathcal{J} y un punto $q \in V$, existe un automorfismo f de S tal que $f|_{S \setminus \mathcal{J}}$ es la identidad, $f(K) \subset V$ y $f(q) = q$.*

Demostración. Consideremos un recubrimiento universal $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S$. Sea \mathcal{J}_0 una componente conexa de $\pi^{-1}(\mathcal{J})$. En lo que sigue, denotamos por π^{-1} la función inversa de $\pi|_{\mathcal{J}_0}$. Sea F_1 (respectivamente F_2) una aplicación conforme de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathcal{J}_0}$ (respectivamente \mathcal{J}_0) en $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$ (respectivamente \mathbb{D}). Obsérvese que F_1 y F_2 tienen una extensión analítica en un entorno de $\eta_0 = \partial\mathcal{J}_0$ ya que η_0 y $\partial\mathbb{D}$ son curvas analíticas. Por tanto $h = F_2 \circ F_1^{-1}$ es un homeomorfismo de $\partial\mathbb{D}$ en sí mismo que tiene una extensión analítica.

Es bien conocido que en este caso hay un automorfismo cuasiconforme H de $\hat{\mathbb{C}}$ tal que $H(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{\mathbb{D}}$, $H|_{\partial\mathbb{D}} = h$ y $H \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}})$. Este hecho es una consecuencia del teorema de Beurling–Ahlfors (ver [BA56] o [AS60, p. 69]) donde se construye una extensión cuasiconforme $H_0 : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de una aplicación cuasisimétrica $h_0 : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$, que preserva las propiedades de diferenciabilidad de h_0 .

Definimos una biyección u de $\hat{\mathbb{C}}$ en sí mismo por

$$u(z) := \begin{cases} F_2(z), & z \in \mathcal{J}_0, \\ (H \circ F_1)(z), & z \notin \mathcal{J}_0. \end{cases}$$

Esta función es continua en $\hat{\mathbb{C}}$ ya que

$$H \circ F_1|_{\eta_0} = H|_{\partial\mathbb{D}} \circ F_1|_{\eta_0} = h \circ F_1|_{\eta_0} = F_2 \circ F_1^{-1} \circ F_1|_{\eta_0} = F_2|_{\eta_0},$$

y tenemos que $u \in C^\infty(\hat{\mathbb{C}} \setminus \eta_0) \cap C(\hat{\mathbb{C}})$. Las propiedades de regularidad de F_2 y $H \circ F_1$ en η_0 dan que las derivadas distribucionales de u en un entorno de η_0 son iguales a las derivadas clásicas (usamos las propiedades de diferenciabilidad sólo en este argumento). Por tanto u es una aplicación cuasiconforme en $\hat{\mathbb{C}}$ con la misma constante de cuasiconformidad que H .

Sea M una aplicación de Möbius que fija \mathbb{D} , y tal que $M(0) = u(\pi^{-1}(q)) \in \mathbb{D}$. Para cualquier $\alpha > 0$, consideremos el siguiente automorfismo cuasiconforme de $\hat{\mathbb{C}}$

$$v_\alpha(z) = \begin{cases} z, & z \notin \mathbb{D}, \\ z|z|^{\alpha-1}, & z \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Sea f_α el siguiente homeomorfismo de \mathcal{S} es sí mismo.

$$f_\alpha(p) = \begin{cases} p, & p \notin \mathcal{J}, \\ (\pi \circ u^{-1} \circ M \circ v_\alpha \circ M^{-1} \circ u \circ \pi^{-1})(p), & p \in \mathcal{J}. \end{cases}$$

Obviamente, $f_\alpha|_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{J}} = \text{id}|_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{J}}$. Obsérvese que f_α es continua en \mathcal{S} , ya que $v_\alpha|_{\partial\mathbb{D}} = \text{id}|_{\partial\mathbb{D}}$ implica que

$$(\pi \circ u^{-1} \circ M)|_{\partial\mathbb{D}} \circ v_\alpha|_{\partial\mathbb{D}} \circ (M^{-1} \circ u \circ \pi^{-1})|_\eta = \text{id}|_\eta.$$

El mismo argumento usado para ver que u en una aplicación cuasiconforme da que f_α es un automorfismo conforme de \mathcal{S} para cualquier $\alpha > 0$. Obsérvese que $f_\alpha(q) = q$ ya que $(M^{-1} \circ u \circ \pi^{-1})(q) = 0$.

para un $\varepsilon > 0$ pequeño tenemos que $(\pi \circ u^{-1} \circ M)(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varepsilon\}) \subset V$ ya que $(\pi \circ u^{-1} \circ M)(0) = q \in V$. Dado el conjunto compacto $K \subset \mathcal{J}$ podemos elegir α tal que $(v_\alpha \circ M^{-1} \circ u \circ \pi^{-1})(K) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varepsilon\}$, ya que $(M^{-1} \circ u \circ \pi^{-1})(K)$ es un subconjunto compacto de \mathbb{D} .

Por tanto obtenemos que $f_\alpha(K) \subset V$ para este α . \square

Lema 5.5. *Sea w un homeomorfismo C^1 de $\partial\mathbb{D}$ en sí mismo. Para cada $0 < r < 1$ existe un automorfismo cuasiconforme f de $A = \{r \leq |z| \leq 1\}$ tal que $f|_{\{|z|=r\}}$ es la aplicación identidad, $f|_{\partial\mathbb{D}} = w$ y $f \in C^1(A)$.*

Demostración. Para cada $0 < r < 1$, consideremos el número positivo

$$a = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r}$$

y el recubrimiento universal

$$\pi : B = \{0 \leq \Im z \leq a\} \longrightarrow A, \quad \pi(z) = re^{-2\pi iz}.$$

La aplicación π es una función periódica con período 1 y satisface

$$\pi(\{z : \Im z = 0\}) = \{z : |z| = r\}, \quad \pi(\{z : \Im z = a\}) = \{z : |z| = 1\}.$$

Por tanto, sólo necesitamos demostrar que si v es un homeomorfismo de clase C^1 de $\{z : \Im z = a\}$ en sí mismo con

$$v(x + 1 + ia) = v(x + ia) + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

entonces existe un automorfismo cuasiconforme g de clase C^1 de B en sí mismo tal que

$$g|_{\{\Im z = 0\}} = \text{id}|_{\{\Im z = 0\}}, \quad g|_{\{\Im z = a\}} = v,$$

y

$$g(z + 1) = g(z) + 1, \quad z \in B.$$

La función g se puede construir explícitamente. Por ejemplo, consideremos

$$g(x + iy) = x \left(1 - \frac{y}{a}\right) + \frac{y}{a} v(x + ia).$$

Está claro que $g(z + 1) = g(z) + 1$ para $z \in B$, que g satisface las condiciones de frontera, y que g es un homeomorfismo de clase C^1 de B en sí mismo. Es fácil comprobar que g es una aplicación cuasiconforme ya que es una aplicación C^1 que preserva la orientación y $g(z + 1) = g(z) + 1$ para $z \in B$. \square

Para enunciar el siguiente lema necesitamos una definición. Recuerdese que cualquier superficie de Riemann con borde S con un grupo fundamental finitamente generado se puede obtener de una superficie de Riemann compacta de género g eliminando p puntos distintos (las punturas de S), n discos cerrados (cuyas fronteras representan la frontera ideal de S) y m discos abiertos (cuyas fronteras son el borde de S). El vector (g, p, n, m) se denomina *tipo cuasiconforme* de S . Es bien conocido que siempre existe una aplicación cuasiconforme entre dos superficies de Riemann con el mismo tipo cuasiconforme.

Lema 5.6. *Sea S una superficie de Riemann hiperbólica. Sea $\{g_1, \dots, g_N\}$ una familia de curvas simples cerradas disjuntas dos a dos tales que cada g_i no es homótopa a cero ni a una puntura en S y no son homótopas entre sí.*

Sean $S_1, \dots, S_r, S_{r+1}, \dots, S_k (1 \leq r \leq k-1)$ las componentes conexas de $S \setminus (g_1 \cup \dots \cup g_N)$, donde S_{r+1}, \dots, S_k son superficies (abiertas) de tipo finito. También pedimos que cada g_j esté contenida en la frontera de $\overline{S_n}$ y $\overline{S_\ell}$ con $n \leq r$ y $\ell > r$.

Si $g_j \subset \overline{S_m}$, sea γ_j la única geodésica simple cerrada en S_m libremente homótopa a la frontera ideal de g_j .

Sea $R_m (m = 1, \dots, r)$ la superficie con borde obtenida al eliminar de S_m el fonil abierto F_j acotado por γ_j y la curva ideal g_j , para cada $\gamma_j \subset S_m$.

Sea $R_m (m = r+1, \dots, k)$ una superficie con borde con el mismo tipo cuasiconforme que $\overline{S_m}$ tal que el borde de R_m está constituido por geodésicas simple cerradas con la siguiente condición: si g_j es una curva frontera ideal de S_n y $S_m (n \leq r)$ y η_i es una curva frontera de R_m correspondiente a g_j , tenemos que

$$L_{R_m}(\eta_i) = L_{S_n}(\gamma_j).$$

Sea \mathcal{R} una superficie obtenida pegando R_1, \dots, R_k siguiendo el diseño de S_1, \dots, S_k (identificando geodésicas de igual longitud).

Entonces S y \mathcal{R} son cuasiconformemente equivalentes.

Demostración. Fijemos $m > r$ y sean g_{j_1}, \dots, g_{j_i} las curvas frontera de $\overline{S_m}$. Consideremos $M_m = \overline{S_m} \cup \overline{F_{j_1}} \cup \dots \cup \overline{F_{j_i}} \subset S$.

Es bien conocido que existe una aplicación cuasiconforme f de clase C^1 de R_m en M_m , ya que R_m y M_m tienen el mismo tipo cuasiconforme.

Si γ_j está contenida en $S_n (n \leq r)$, consideremos un collar cerrado fijo C_j alrededor de γ_j en S_n y sea K_j el conjunto $K_j = C_j \cap R_n$. La curva γ_j está contenida en el borde de R_n y M_m para algún $m > r$.

El Lema 5.5 da que existe un automorfismo cuasiconforme h_j de clase C^1 de K_j tal que $h_j|_{\gamma_j} = f_m|_{\gamma_j}$ y $h_j|_{\partial K_j \setminus \gamma_j} = id|_{\partial K_j \setminus \gamma_j}$.

Consideremos el homeomorfismo f de \mathcal{R} en S dado por $f|_{R_m} = f_m$ para $m > r$, $f|_{K_j} = h_j$ para $1 \leq j \leq N$, y $f = id$ en otro caso.

Es fácil comprobar que f es una aplicación cuasiconforme. □

Necesitaremos ahora los dos siguientes hechos bien conocidos (ver por ejemplo [Car50, Teorema 5.1] o [FR90, Lemma 4.2]).

Proposición A. *Sea S una superficie de Riemann y sean I y J subconjuntos cerrados de S tales que $S \setminus I$ es una superficie de Riemann hiperbólica y toda componente conexa de J tiene intersección no vacía con I . Si \mathcal{R} es una componente conexa de $S \setminus (I \cup J)$ entonces se tiene que $\delta(\mathcal{R}) \leq \delta(S \setminus I)$.*

Proposición B. Sean S_1, S_2 dos superficies de Riemann hiperbólicas tales que $S_1 \subset S_2$ y $\Pi_1(q, S_1) \leq \Pi_1(q, S_2)$ para algún $q \in S_1$. Entonces se tiene que $\delta(S_1) \leq \delta(S_2)$.

Obsérvese que la Proposición A es un caso particular de la Proposición B. La demostración de esta última es elemental; basta señalar que en S_1 hay menos curvas y son más largas.

Proposición 5.3. Sea S una superficie de Riemann hiperbólica de área infinita. Sean C_1, \dots, C_n subconjuntos de S simplemente conexos, compactos y disjuntos dos a dos. Entonces S satisface DIL si y sólo si $S \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_n)$ satisface DIL.

Observación. Es fácil encontrar ejemplos que muestran que la conclusión de la Proposición 5.3 no es cierta si algún C_j no es compacto.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n = 1$. Sea p un punto de C_1 . El Teorema 3.1 da que el enunciado de la Proposición 5.3 es equivalente al siguiente: $S \setminus \{p\}$ satisface DIL si y sólo si $S \setminus C_1$ satisface DIL.

Esto es trivialmente cierto si $C_1 = p$. Por tanto, podemos suponer que C_1 tiene infinitos puntos.

Supongamos que $S \setminus \{p\}$ satisface DIL. Observemos que $S \setminus C_1 \subset S \setminus \{p\}$ y que los grupos fundamentales de las dos superficies son isomorfos. Por tanto, la Proposición B implica que $S \setminus C_1$ satisface DIL.

Supongamos ahora que $S \setminus C_1$ satisface DIL. Sea η_1 la geodésica simple cerrada libremente homótopa a la frontera ideal ∂C_1 en $S \setminus C_1$.

Sea F_1 el fonil abierto en $S \setminus C_1$ limitado por η_1 y la frontera ideal ∂C_1 , y sea J_1 el conjunto abierto $J_1 = C_1 \cup F_1 \subset S$. Obsérvese que $\partial J_1 = \eta_1$ es una curva analítica.

Consideremos (en S) el conjunto abierto $V = (\{p\} \cup C_{S \setminus \{p\}}(p, 1/4)) \cap J_1$ y el conjunto compacto C_1 . El Lema 5.4 da que existe un automorfismo cuasiconforme f de S tal que $C = f(C_1) \subset V$, $f|_{S \setminus J_1} = \text{id}|_{S \setminus J_1}$ y $f(p) = p$. Entonces, f es una aplicación cuasiconforme de $S \setminus C_1$ en $S \setminus C$. [FR90, Teorema 1] implica que $S \setminus C$ satisface DIL. Demostraremos que $S \setminus \{p\}$ también satisface DIL.

Sea η la geodésica simple cerrada libremente homótopa en $S \setminus C$ a la frontera ideal de ∂C . Sea F el fonil abierto en $S \setminus C$ limitado por η y por la frontera ideal ∂C , y sea J el conjunto abierto $J = C \cup F \subset S$.

Consideremos un dominio geodésico G en $S \setminus \{p\}$ y sea G' el dominio geodésico correspondiente en $S \setminus C$: cada curva frontera de G es libremente homótopa en $S \setminus \{p\}$ a una curva frontera de G' ; si G contiene un collar alrededor de la puntura p , la curva η es una curva frontera de G' (obsérvese que η es libremente homótopa a p en $S \setminus \{p\}$).

El Teorema de Gauss-Bonnet da que

$$A_{S \setminus \{p\}}(G) = A_{S \setminus C}(G'). \quad (5.6)$$

El Lema 5.3 da que existe una constante positiva c , independiente de G , tal que

$$A_{S \setminus C}(G') \leq c L_{S \setminus C}(\partial G' \setminus \eta), \quad (5.7)$$

ya que $S \setminus C$ satisface DIL y $\partial G' \neq \eta$. Tenemos que $\partial G' \neq \eta$ ya que sólo hay dos dominios en $S \setminus C$ cuya frontera sea exactamente η : F y $S \setminus \overline{F}$, y ambos tienen área infinita en $S \setminus C$. Este último hecho es una consecuencia de la hipótesis $A_S(S) = \infty$.

Tenemos que $\partial G' \subset S \setminus J \subset S \setminus C$. El Lema A del Capítulo 1 (sección 1.2.6) implica que $\partial G \subset S \setminus C_{S \setminus \{p\}}(p, 1/2) \subset S \setminus C$. Estos hechos dan que $\partial G'$ y ∂G están lejos de C .

Entonces, (3.2) implica que las métricas hiperbólicas de $S \setminus \{p\}$ y $S \setminus C$ son comparables en $(S \setminus J) \cup (S \setminus C_{S \setminus \{p\}}(p, 1/2))$, ya que $p \in C$.

Por tanto, $L_{S \setminus C}(\partial G' \setminus \eta)$ y $L_{S \setminus \{p\}}(\partial G)$ son comparables. Este hecho, (5.6) y (5.7) dan que existe una constante $c_0 > 0$, independiente de G , tal que

$$A_{S \setminus \{p\}}(G) \leq c_0 L_{S \setminus \{p\}}(\partial G),$$

y entonces, [FR90, Lemma 1.2] da que $S \setminus \{p\}$ satisface DIL. \square

Definición. Diremos que un subconjunto cerrado y conexo C de una superficie de Riemann S es de tipo finito si C es un conjunto compacto simplemente conexo o, si tiene un grupo fundamental finitamente generado y ∂C es una unión de curvas simples cerradas.

Proposición 5.4. Sea S una superficie de Riemann con área infinita. Sean C_1, \dots, C_n subconjuntos de S cerrados, conexos, disjuntos dos a dos y de tipo finito. Entonces, se tienen los siguientes hechos:

a) Si S_0 es una componente conexa de $S \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_n)$ y S satisface DIL, entonces S_0 satisface DIL.

b) Si $S \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_n)$ es conexo y satisface DIL, entonces S satisface DIL.

Observación. Es fácil construir ejemplos que muestren que b) no es cierto si algún C_j no es de tipo finito.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n = 1$ y C_1 no es un conjunto simplemente conexo (por la Proposición 5.3).

Obsérvese que la Proposición 5.4 es trivial si S es una superficie simple o doblemente conexa. Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que S no es una superficie ni simple ni doblemente conexa.

Supongamos que S satisface DIL. Sea p un punto en C_1 . El Teorema 3.1 (Capítulo 3) da que $S \setminus \{p\}$ también satisface DIL.

Tenemos que $S_0 \subset S \setminus \{p\}$ y el grupo fundamental de S_0 es un subgrupo del grupo fundamental de $S \setminus \{p\}$. Por tanto, la Proposición B implica que S_0 satisface DIL ya que $S \setminus \{p\}$ satisface DIL.

Supongamos ahora que $S \setminus C_1$ satisface DIL. Sean g_1, \dots, g_N las curvas simples cerradas en ∂C_1 .

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ninguna curva g_j es homótopa a cero. En otro caso, tenemos que $S \setminus C_1$ es simplemente conexa, ya que $S \setminus C_1$ es conexa y C_1 no es simplemente conexa. Por tanto, S es de tipo finito, ya que C_1 es de tipo finito; entonces S satisface DIL, ya que tiene área infinita.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ninguna g_j es homótopa a una puntura p_j en S . En otro caso, el Teorema 3.1 nos permitiría considerar la superficie $S_1 = S \cup \{p_j\}$ en lugar de S . Entonces, tendríamos que g_j es homótopa a cero en S_1 . Usando de nuevo el último argumento obtenemos que S_1 , y en consecuencia S , satisface DIL.

Supongamos ahora que existen dos curvas diferentes g_i, g_j , libremente homótopas en S . En este caso, hay un dominio doblemente conexo D en S tal que $\partial D = g_i \cup g_j$. Entonces tenemos que $N = 2$, ya que $S \setminus C_1$ y C_1 son conexos. Por tanto, tenemos que, o bien el conjunto C_1 es igual a \bar{D} , o $S \setminus C_1$ es igual a D .

La segunda posibilidad implica que $S \setminus C_1$ es un dominio simplemente conexo y por tanto, S es de tipo finito, ya que C_1 es de tipo finito; entonces S satisface DIL, ya que tiene área infinita.

Si $C_1 = \bar{D}$, podemos tomar un subconjunto cerrado $C \subset S$ de tipo finito tal que $C_1 \subset C$ y C no es un conjunto doblemente conexo (recordemos que S es una superficie ni simple ni doblemente conexa). La Proposición B da que $S \setminus C$ satisface DIL, ya que $S \setminus C_1$ satisface DIL.

Entonces, podemos suponer sin pérdida de generalidad que no hay dos curvas diferentes en ∂C_1 libremente homótopas.

Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ las geodésicas simples cerradas en $S \setminus C_1$ tales que γ_j es libremente homótopa a la frontera ideal g_j .

Entonces, podemos aplicar a S la construcción de la superficie \mathcal{R} del Lema 5.6, relativa a $\{g_1, \dots, g_N\}$ (con $r = 1$ y $k = 2$).

El Corolario 5.1 implica que \mathcal{R} satisface DIL ya que S tiene área infinita y $S \setminus C_1$ satisface DIL. Finalmente, \mathcal{R} y S son cuasiconformemente equivalentes. \square

5.3 Localización

Después de toda la maquinaria que hemos introducido hasta aquí podemos enunciar y demostrar de forma sencilla nuestros teoremas sobre localización de la desigualdad isoperimétrica.

Teorema 5.2. *Sea S una superficie de Riemann y sea E un subconjunto cerrado de S tal que $S \setminus E$ es una superficie de Riemann hiperbólica con $A_{S \setminus E}(S \setminus E) = \infty$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) $S \setminus E$ satisface DIL.
- (2) $S_0 \setminus E$ satisface DIL, para toda subsuperficie S_0 de S tal que E está contenida en S_0 , $S_0 \setminus E$ es conexa, y $S \setminus S_0$ es una unión finita de conjuntos cerrados de tipo finito.
- (3) $S_0 \setminus E$ satisface DIL, para alguna subsuperficie S_0 de S tal que E está contenida en S_0 , $S_0 \setminus E$ es conexa, y $S \setminus S_0$ es una unión finita de conjuntos cerrados de tipo finito.
- (4) $S \setminus (E \cup F)$ satisface DIL para todo subconjunto cerrado F de S que verifique: a) $S \setminus F$ satisface DIL; b) existe un conjunto M , que es una unión finita de conjuntos cerrados de tipo finito disjuntos dos a dos, tal que $F \subset M$ y $E \cap M = \emptyset$.
- (5) $S \setminus (E \cup F)$ satisface DIL para algún subconjunto cerrado F de S que verifique: a) $S \setminus F$ satisface DIL; b) existe un conjunto M , que es una unión finita de conjuntos cerrados de tipo finito disjuntos dos a dos, tal que $F \subset M$ y $E \cap M = \emptyset$.

Observación. Si E y F son subconjuntos cerrados de una superficie de Riemann S y existe un conjunto M que es una unión finita de conjuntos cerrados de tipo finito disjuntos dos a dos tales que $F \subset M$ y $E \cap M = \emptyset$, entonces E y F son débilmente separados en S .

Demostración. La Proposición 5.4 da que (1), (2) y (3) son equivalentes. El Lema 5.1 y la última observación dan que (1) implica (4). Por tanto, ya que (5) se sigue directamente de (4), sólo necesitamos demostrar que (5) implica (3). Pero esto es una consecuencia de las proposiciones B y 5.4: La Proposición B da que $(S \setminus E) \setminus M$ satisface DIL y entonces la Proposición 5.4 da que $S \setminus E$ satisface DIL. \square

Patterson demostró en [Pat76, Teorema 4] un resultado parecido para superficies de Riemann S de área finita y subconjuntos cerrados discretos E .

Como consecuencia del Teorema 5.2 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.3. *Dado E un subconjunto cerrado de \hat{C} con infinitos puntos, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) $\hat{C} \setminus E$ satisface DIL.
- (2) $\Omega \setminus E$ satisface DIL, para cualquier subdominio Ω de \hat{C} de tipo finito tal que E esté contenido en Ω .
- (3) $\Omega \setminus E$ satisface DIL, para algún subdominio Ω de \hat{C} de tipo finito tal que E esté contenido en Ω .

(4) $\hat{C} \setminus (E \cup F)$ satisface DIL para cualquier subconjunto cerrado F de \hat{C} tal que $\hat{C} \setminus F$ satisfaga DIL y $E \cap F = \emptyset$.

(5) $\hat{C} \setminus (E \cup F)$ satisface DIL para algún subconjunto cerrado F de \hat{C} tal que $\hat{C} \setminus F$ satisfaga DIL y $E \cap F = \emptyset$.

Finalmente, si aplicamos $n - 1$ veces el Corolario 5.3 (y el Teorema 3.1), obtenemos el siguiente resultado que fue anunciado al comienzo de esta sección.

Teorema 5.3. Sean E_1, \dots, E_n subconjuntos cerrados de \hat{C} , disjuntos dos a dos, con cardinal infinito y tales que $\Omega_0 = \hat{C} \setminus \cup_k E_k$ es conexo. Sea I un conjunto fuertemente uniformemente separado en Ω_0 y sea $\Omega = \Omega_0 \setminus I$. Entonces, se tiene que Ω satisface DIL si y sólo si $\hat{C} \setminus E_k$ satisface DIL para $k = 1, \dots, n$.

Por último, como consecuencia directa del Corolario 5.3 obtenemos dos teoremas de localización que ya fueron anunciados en el Capítulo 1.

Teorema 5.4. Dado un subconjunto cerrado E de \hat{C} de cardinal infinito, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) $\hat{C} \setminus E$ satisface DIL.

(2) $\Omega \setminus E$ satisface DIL, para cualquier subdominio Ω de \hat{C} de tipo finito tal que E está contenido en Ω .

(3) $\Omega \setminus E$ satisface DIL, para algún subdominio Ω de \hat{C} de tipo finito tal que E está contenido en Ω .

Teorema 5.5. Sean E_1, \dots, E_n subconjuntos cerrados de \hat{C} , disjuntos dos a dos, con cardinal numerable y tales que $\Omega = \hat{C} \setminus \cup_k E_k$ es conexo. Entonces, se tiene que Ω satisface DIL si y sólo si $\hat{C} \setminus E_k$ satisface DIL para $k = 1, \dots, n$.

Capítulo 6

Medida p -Armónica en Árboles

6.1 Introducción

Una función u en un dominio Ω de \mathbb{R}^n se dice p -armónica ($1 < p < \infty$) si la ecuación en derivadas parciales

$$\Delta_p u = -\operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) = 0. \quad (6.1)$$

se verifica en Ω ; esta ecuación debe ser entendida en sentido débil (ver [HKM93, p. 57]). Obviamente, las funciones 2-armónicas son armónicas. El conjunto de las funciones p -armónicas no es un espacio vectorial si $p \neq 2$, pero tienen muchas propiedades similares a las funciones armónicas. Por ejemplo, tienen un principio de comparación: si u, v son funciones p -armónicas en Ω y $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces $u \leq v$ en Ω [HKM93, p. 133]. Es posible construir una Teoría del Potencial para la ecuación (6.1), porque la herramienta principal para construir tal teoría es precisamente el principio de comparación [HKM93].

Hay muchas razones para estudiar las funciones p -armónicas:

Si $p \neq 2$, (6.1) es un ejemplo natural de ecuación elíptica degenerada no lineal.

La ecuación (6.1) es la ecuación de Euler del funcional

$$J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx,$$

que es un funcional elemental con crecimiento no cuadrático si $p \neq 2$. Como consecuencia de esto, las funciones p -armónicas son funciones con propiedades extremales en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Si $p = n$, las funciones p -armónicas juegan un papel importante en la teoría de las aplicaciones cuasiconformes y cuasirregulares.

A grandes rasgos, podemos definir la “medida” p -armónica del conjunto de Borel $E \subset \partial\Omega$ en un punto $x \in \Omega$ como la función p -armónica en Ω que toma el valor 1 en E y el valor 0 en $\partial\Omega \setminus E$, evaluada en x . Ver [HKM93, Capítulo 11] para una definición rigurosa. La medida armónica es una herramienta potente en la Teoría del Potencial lineal. Una propiedad importante de la medida armónica es su aditividad. Si $p \neq 2$, la medida p -armónica no tiene esta propiedad, es decir, no es una medida. A pesar de esto, la medida p -armónica es una herramienta importante en la Teoría del Potencial no lineal.

Problema abierto. Sería muy útil saber si la medida p -armónica es subaditiva, es decir, si satisface $\omega(A \cup B) \leq k(\omega(A) + \omega(B))$ para todos los subconjuntos de Borel $A, B \subset \partial\Omega$, para alguna constante k . Este es un problema abierto para todo dominio Ω , incluso si Ω es la bola unidad de \mathbb{R}^n , para cada $n \geq 2$.

O. Martio planteó el problema de saber si esta propiedad se satisface para la medida p -armónica en grafos.

En el presente capítulo de esta memoria damos una respuesta negativa a esta cuestión: la medida p -armónica no es subaditiva en grafos para ningún $p \neq 2$. También se obtienen resultados parciales positivos. Además se estudian potenciales no lineales más generales en grafos. Antes de nada daremos las correspondientes definiciones.

El árbol T_ν es un grafo regular dirigido (las aristas tienen orientación) con vértices V_ν y aristas E_ν .

En V_ν distinguimos un vértice v_0 como origen. Sea \mathbb{Z}_+ el conjunto de enteros positivos y \mathcal{M} el conjunto $\{1, 2, \dots, \nu\}$. Si definimos $\mathcal{M}^0 = \{0\}$, para cada $I \in \mathcal{M}^k$ y $k \in \mathbb{Z}_+$, tenemos un vértice $v_I \in V_\nu$. La generación k del árbol es

$$G_k = \bigcup_{I \in \mathcal{M}^k} v_I,$$

y

$$V_\nu = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} G_k.$$

El conjunto de *hijos* de un vértice $v_I \in V_\nu$ se define como $H_{v_I} = \{v_{I1}, \dots, v_{Im}\}$. Denotaremos por $[v, w]$ la arista que une los vértices v y w . Definimos el conjunto de aristas E_ν del árbol T_ν del siguiente modo: la arista $[v, w] \in E_\nu$ si y sólo si $w \in H_v$. Obsérvese que si $[v, w] \in E_\nu$ entonces $[w, v] \notin E_\nu$ (T_ν es un grafo dirigido).

Los árboles regulares son modelos adecuados para bolas en espacios euclídeos.

Por una *función en T_ν* nos referiremos a una función con valores reales definida en el conjunto V_ν de vértices de T_ν y por un *campo de vectores* a una función con valores reales definida en el conjunto E_ν de aristas de T_ν .

Si u es una función en T_ν , su *gradiente* ∇u es el campo de vectores definido por la fórmula

$$\nabla u(v, w) = \nabla u([v, w]) = u(w) - u(v).$$

Si U es un campo de vectores en T_ν , su *divergencia*, denotada por $\operatorname{div} U$, es la función en T_ν , definida como

$$\operatorname{div} U(v) = \sum_{w \in H_v} U([v, w])$$

(el valor de U en la arista que acaba en v no se tiene en cuenta).

El p -Laplaciano de una función u en T_ν ($1 < p < \infty$) es la función en T_ν definida como

$$\Delta_p u = -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

Destaquemos que Δ_2 es el Laplaciano discreto usual. De hecho,

$$\Delta_2 u(v) = \sum_{w \in H_v} (u(v) - u(w)).$$

Decimos que una función u en T_ν es *p -armónica* en $v \in V_\nu$ si $\Delta_p u(v) = 0$. Como es usual, cuando $p = 2$, estas funciones se llamarán funciones armónicas. La función u es armónica en v si y sólo si

$$u(v) = \frac{1}{\nu} \sum_{w \in H_v} u(w).$$

Si $\nu = 1$ o $\nu = 2$, la situación degenera y toda función p -armónica es armónica. Obsérvese que esto es similar en el caso continuo: toda función p -armónica en un subconjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es armónica en D . Por consiguiente en lo sucesivo consideraremos sólo el caso $\nu > 2$.

Notación. Fijemos una constante real $\alpha > 0$. En lo que sigue, por simplificar, usaremos la expresión t^α para denotar la extensión impar de la función t^α definida para $t > 0$:

$$t^\alpha = t|t|^{\alpha-1}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

En particular $t^2 = t|t|$ es negativo si t es negativo, de modo que es diferente a la notación usual. A lo largo de este capítulo usaremos t^α sólo con el significado (6.2) y no otro. Esperamos que no haya confusión.

Con esta notación el p -Laplaciano en un vértice v es

$$\Delta_p u(v) = - \sum_{w \in H_v} (u(w) - u(v))^{p-1}.$$

Estos conceptos sobre grafos tienen conexiones importantes con la Teoría del Potencial en variedades Riemannianas (ver por ejemplo [Kan85], [Kan86a], [Kan86b], [FR92], [CFPR99], [HS], [Rod94a], [Rod94b], [Soa93]).

Si A es un subconjunto de vértices contenidos en G_n definimos la “medida” p -armónica de A , denotada por $\omega_p(v, A)$, como la función definida en $G_0 \cup \dots \cup G_n$ que toma el valor 1 en A , el valor 0 en $G_n \setminus A$, y es p -armónica en $G_0 \cup \dots \cup G_{n-1}$. Denotamos $\omega_p(A) = \omega_p(v_0, A)$.

Las siguientes son algunas propiedades elementales de la medida p -armónica:

- (a) $\omega_p(\emptyset) = 0$,
- (b) $\omega_p(G_n) = 1$,
- (c) $\omega_p(G_n \setminus A) = 1 - \omega_p(A)$, para todo $A \subset G_n$.

La “medida” p -armónica es de hecho una medida si y sólo si $p = 2$. Cuando $p \neq 2$, nos gustaría estudiar cuándo ω es subaditiva, es decir, si existe una constante positiva k , que sólo puede depender de ν y p , tal que

$$\omega_p(A \cup B) \leq k(\omega_p(A) + \omega_p(B)) \quad \text{para todo } A, B \subset G_n,$$

y para todo número natural n .

Consideremos la siguiente generalización de la medida p -armónica. Sea $\overline{\mathbb{R}}_+$ el semieje positivo cerrado. Sea $F : \overline{\mathbb{R}}_+^\nu \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ una función continua tal que $F(0, 0, \dots, 0) = 0$ y $F(1, 1, \dots, 1) = 1$. Diremos que una tal función F es *admisibile*. En lo que sigue, toda función denotada por F será admisible. A lo largo de este capítulo consideraremos funciones admisibles que satisfacen alguna de las siguientes condiciones adicionales:

- (i) $F(x, x, \dots, x) = x, x \geq 0$;
- (ii) F es no decreciente con respecto a cada argumento y además $F(x_1, x_2, \dots, x_\nu) > 0$ si se tiene que $(x_1, x_2, \dots, x_\nu) \neq \mathbf{0}$;
- (iii) $F(x_1, x_2, \dots, x_\nu) = F(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(\nu)})$ para cualquier reordenación τ de $\{1, 2, \dots, \nu\}$;
- (iv) $F(tx_1, tx_2, \dots, tx_\nu) = tF(x_1, x_2, \dots, x_\nu), \quad x_1, x_2, \dots, x_\nu, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;
- (v) $F(x_1, x_2, \dots, x_\nu) < \max(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ si no se tiene $x_1 = x_2 = \dots = x_\nu$.

Es obvio que cualquier función admisible que satisfaga (iv) también satisface (i).

Obsérvese que si F es estrictamente creciente con respecto a cada argumento, (v) se sigue de (i).

Sea $n \geq 0$, y sea u una función no negativa sobre $G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$. Decimos que u es F -armónica en $G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{n-1}$ si

$$u(v) = F(u(v_1), u(v_2), \dots, u(v_\nu)) \quad (6.3)$$

para todo $v, v_1, v_2, \dots, v_\nu \in G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ cuando $H(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$. Es directo que (6.3) define una continuación única de cualquier función no negativa en G_n sobre $G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_n$. Llamaremos al valor $u(v_0)$ en el origen del árbol la *medida F -armónica de $u|G_n$* . Si $u|G_n$ es la función indicadora de un subconjunto A de G_n , entonces escribimos

$$\omega_F(A) = u(v_0).$$

Para cada $p \in (1, \infty)$, podemos definir una función $F_p : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la regla implícita

$$F_p(a_1, a_2, \dots, a_\nu) = x \quad \text{si} \quad (x - a_1)^{p-1} + (x - a_2)^{p-1} + \dots + (x - a_\nu)^{p-1} = 0. \quad (6.4)$$

Entonces las funciones F_p -armónicas son las mismas que las funciones p -armónicas. Esta función F_p tiene todas las propiedades (i)-(v) (de hecho, es estrictamente creciente con respecto a cada argumento), además de las siguientes:

(vi) F está definida en todo \mathbb{R}^ν , y además $F(t + x_1, t + x_2, \dots, t + x_\nu) = t + F(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ para todo $x_1, x_2, \dots, x_\nu, t \in \mathbb{R}$;

(vii) $F(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_\nu) = 1 - F(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$, $x_1, x_2, \dots, x_\nu \in [0, 1]$.

Mediante diferenciación implícita en la ecuación (6.4) obtenemos que $F_p \in C^1(\mathbb{R}^\nu)$.

Obsérvese que si una función admisible F satisface (iv) y (vi) para todo $x_1, x_2, \dots, x_\nu, t \in \mathbb{R}$, entonces satisface la condición (vii).

En general, no supondremos que se cumplen todas las condiciones (i)-(vii).

Para cada F admisible, ω_F satisface las propiedades (a) y (b) de ω_p . Si F satisface (ii) y (vii), entonces ω_F también satisface (c).

Hay funciones F interesantes que satisfacen sólo una parte de las propiedades (i)-(vii). Consideremos las funciones $F_{p, A_1, A_2, \dots, A_\nu}$ ($A_1, A_2, \dots, A_\nu > 0$) que generan las funciones p -armónicas con pesos, definidas por la regla implícita

$$F_{p, A_1, A_2, \dots, A_\nu}(a_1, a_2, \dots, a_\nu) = x \quad \text{si} \quad A_1(x - a_1)^{p-1} + A_2(x - a_2)^{p-1} + \dots + A_\nu(x - a_\nu)^{p-1} = 0.$$

Entonces $F_{p, A_1, A_2, \dots, A_\nu}$ satisface (i), (ii) y (iv)-(vii) (de hecho, es estrictamente creciente con respecto a cada argumento), pero no satisface (iii) (a no ser que $A_1 = A_2 = \dots = A_\nu$). Obsérvese que $F_{p, A, A, \dots, A} = F_p$.

El problema de Martio para ω_F plantea si la desigualdad

$$\omega_F(A \cup B) \leq k(\omega_F(A) + \omega_F(B)), \quad (6.5)$$

es cierta, donde $A, B \subset G_n$ y k no depende de A, B, n . Se puede plantear también el problema de Martio débil:

¿Existe una función continua $\psi : \overline{\mathbb{R}}_+^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ no decreciente en cada argumento tal que $\psi(0, 0) = 0$ y

$$\omega_F(A \cup B) \leq \psi(\omega_F(A), \omega_F(B)) \quad (6.6)$$

para todo n y todo $A, B \subset G_n$?

En otras palabras, sabiendo que $\omega_F(A)$, $\omega_F(B)$ son (muy) pequeños, ¿podemos concluir que $\omega_F(A \cup B)$ es también pequeño?

Obviamente, (6.6) es mucho más débil que (6.5).

Dos subconjuntos A , B de G_n se llamarán *congruentes* si hay un isomorfismo del grafo $G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_n$ en sí mismo que deja cada G_k invariante y lleva A en B . Para estos conjuntos, obviamente, $\omega_F(A) = \omega_F(B)$ para todas las funciones admisibles F que satisfagan (iii).

De ahora en adelante, consideraremos el caso $\nu = 3$ de cara a simplificar la notación y las demostraciones de los Teoremas 6.1 y 6.2; de cualquier manera, señalemos que estos resultados son ciertos para cualquier $\nu > 2$. Más tarde haremos algún comentario sobre grafos ν -regulares (ver la Observación 3 más abajo).

Teorema 6.1. *Supongamos que F satisface (ii)–(iv), y $F(a_0, b_0, c_0) < \sqrt[3]{a_0 b_0 c_0}$ para algunos a_0, b_0, c_0 positivos. Entonces para cada $n > 0$, existen conjuntos congruentes $B_n^{(0)}, B_n^{(1)}, B_n^{(2)}$ de G_{3n} tales que $G_{3n} = B_n^{(0)} \cup B_n^{(1)} \cup B_n^{(2)}$ y $\omega_F(B_n^{(0)}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Se sigue que si F satisface las hipótesis del Teorema 6.1 entonces las respuestas al problema de Martio y al problema débil de Martio son negativas. De hecho, (6.6) y el Teorema 6.1 implicarían

$$1 = \omega_F(B_n^{(0)} \cup B_n^{(1)} \cup B_n^{(2)}) \leq \psi(\omega_F(B_n^{(0)}), \psi(\omega_F(B_n^{(1)}), \omega_F(B_n^{(2)}))) \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Corolario 6.1. *La respuesta al problema de Martio débil para la medida p -armónica es negativa para todo $p \neq 2$.*

Demostración. Pongamos $a_0 = b_0 = 1$ y $c_0 = u^3$. Entonces

$$(u - a_0)^{p-1} + (u - b_0)^{p-1} + (u - c_0)^{p-1} = (u - 1)^{p-1}(2 - (u + u^2)^{p-1}).$$

Para cada $p \neq 2$, existe u (cercano a 1) tal que $(u - a_0)^{p-1} + (u - b_0)^{p-1} + (u - c_0)^{p-1} > 0$, lo que da $F(a_0, b_0, c_0) < u = \sqrt[3]{a_0 b_0 c_0}$. \square

Denotemos por R_3 el triángulo $R_3 = \{(x, y, z) \in \overline{\mathbb{R}}_+^3 : x + y + z = 1\}$ y por $q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ su centro. Denotemos por “dist” la distancia euclídea usual.

Teorema 6.2. *Supongamos que F satisface (iv) y (v).*

(a) *Si para algún $\varepsilon > 0$, $F(x, y, z) \geq \sqrt[3]{xyz} + \varepsilon \text{dist}((x, y, z), q)^2$ para todo $(x, y, z) \in R_3$, entonces existe $N > 0$ tal que $\omega_F \geq \omega_2^N$.*

(b) *Si para algún $C > 0$, $F(x, y, z) \leq \sqrt[3]{xyz} + C \text{dist}((x, y, z), q)^2$ para todo $(x, y, z) \in R_3$, entonces existe $M > 0$ tal que $\omega_F \leq \omega_2^M$.*

En consecuencia, si tenemos que

$$\sqrt[3]{xyz} + \varepsilon \text{dist}((x, y, z), q)^2 \leq F(x, y, z) \leq \sqrt[3]{xyz} + C \text{dist}((x, y, z), q)^2 \quad (6.7)$$

en R_3 para algún $\varepsilon, C > 0$, entonces existen constantes positivas M, N tales que $\omega_2^N \leq \omega_F \leq \omega_2^M$. En particular, la respuesta al problema de Martio débil es positiva, porque

$$\omega_F(A \cup B) \leq (\omega_F(A)^{1/N} + \omega_F(B)^{1/N})^M$$

para todo conjunto de vértices A y B .

Obsérvese que las estimaciones de arriba para F y su homogeneidad (iv) implican de hecho ciertas estimaciones para F en todo $\overline{\mathbb{R}}_+^3$.

Observaciones

1. Supongamos que F es dos veces diferenciable en q , $F(q) \leq 1/3$ y se verifica (iii). Entonces (iii) implica que los valores de $\frac{\partial F}{\partial x_i}(q)$ son los mismos para $i = 1, 2, 3$. La fórmula de Taylor da que la desigualdad de la derecha en (6.7) se satisface en R_3 en un entorno de q , y por tanto en todo R_3 (para un C suficientemente grande).

2. Si se cumple (vi) y $F(x, y, z) \geq \sqrt[3]{xyz}$ en $\overline{\mathbb{R}}_+^3$, entonces $F(x, y, z) = \frac{x+y+z}{3}$ en $\overline{\mathbb{R}}_+^3$. De hecho, pongamos $s = \frac{x+y+z}{3}$, $x = s + \tilde{x}$, $y = s + \tilde{y}$, $z = s + \tilde{z}$. Entonces para x, y, z fijos, existe algún $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z) > 0$ y $\delta = \delta(x, y, z) > 0$ tales que

$$\begin{aligned} s + tF(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= F(s + t\tilde{x}, s + t\tilde{y}, s + t\tilde{z}) \\ &\geq \sqrt[3]{(s + t\tilde{x})(s + t\tilde{y})(s + t\tilde{z})} \\ &\geq s - \varepsilon t^2 \end{aligned}$$

para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Haciendo tender $t \rightarrow 0$, obtenemos $F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0$, y obtenemos que $F(x, y, z) = s$. De este modo (vi) y $F(x, y, z) \geq \sqrt[3]{xyz}$ implican trivialmente que $\omega_F = \omega_2$.

Esto da una demostración alternativa al Corolario 6.1

En lo que sigue aplicaremos los teoremas 6.1 y 6.2 a subconjuntos de Cantor de G_n . Esto nos llevará al uso de funciones F que no satisfacen (vi).

3. Resultados análogos a los teoremas 6.1 y 6.2 se cumplen para grafos ν -regulares para cualquier $\nu > 2$. Sólo tenemos que reemplazar R_3 con $R_\nu = \{x \in \overline{\mathbb{R}}_+^\nu : x_1 + \dots + x_\nu = 1\}$, $\sqrt[3]{xyz}$ con $\sqrt[\nu]{x_1 x_2 \dots x_\nu}$ y poner $q = (\nu^{-1}, \nu^{-1}, \dots, \nu^{-1}) \in \mathbb{R}^\nu$. Explicaremos en la sección 6.2 cómo cambiar las demostraciones para que cubran el caso general.

Como consecuencia del Teorema 6.2 y de la observación 1 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.2. *Supongamos que F es dos veces diferenciable en q y (iii)-(v) se cumplen. Entonces existe $M > 0$ tal que $\omega_F \leq \omega_2^M$.*

De cara a establecer los siguientes resultados necesitamos algunas definiciones adicionales.

Definimos el conjunto de *descendientes* de un vértice v , denotado por D_v , del siguiente modo:

- (a) v es un descendiente de v ,
- (b) si $w \neq v$, w es un descendiente de v si y sólo si $w \in H_q$ y q es un descendiente de v .

Si $A \subset G_n$ y $A' \subset G_{n'}$, con $n < n'$, decimos que A y A' son *conjuntos equivalentes* si A' es el conjunto de todos los descendientes de vértices en A que están en $G_{n'}$, es decir,

$$A' = \left(\bigcup_{v \in A} D_v \right) \cap G_{n'}.$$

Si A y A' son equivalentes tenemos que $\omega_F(A) = \omega_F(A')$ para toda función admisible F . En lo sucesivo identificaremos conjuntos equivalentes, y entonces podremos escribir $A' \subset G_n$ y $A \subset G_{n'}$.

Tenemos los siguientes resultados:

Teorema 6.3. *Consideremos un conjunto fijo $E \in G_n$. Para cada $\nu > 2$ y cada función admisible F que satisfaga (ii) y (vii) existe una constante positiva k que depende sólo de ν , F y E tal que*

$$\omega_F(A \cup B) \leq k(\omega_F(A) + \omega_F(B)) \quad \text{para todo } A, B \subset G_r \text{ con } A \cup B = E,$$

para todo número natural $r \geq n$.

Denotaremos por $k(E)$ la mejor constante en el Teorema 6.3.

El siguiente Corolario da un resultado parcial positivo sobre subaditividad.

Corolario 6.3. *Consideremos un número natural n fijado. Para cada $\nu > 2$ y para cada función admisible F que satisfaga (ii) y (vii) existe una constante positiva k_n que depende sólo de ν , F y n tal que*

$$\omega_F(A \cup B) \leq k_n (\omega_F(A) + \omega_F(B)) \quad \text{para todo } A, B \subset G_r \text{ con } A \cup B \subset G_n,$$

para cualquier número natural $r \geq n$.

Este Corolario da un resultado parcial positivo al problema de Martio. Para deducirlo del Teorema 6.3, es suficiente poner como k_n el máximo de $k(E)$ para $E \subset G_n$.

Los siguientes resultados conciernen a la siguiente cuestión: ¿se cumple la desigualdad de Martio (6.5) o su análogo más débil si suponemos adicionalmente que A, B son subconjuntos de H_n , donde $H_n \subset G_n$ son conjuntos fijados tales que $\omega_F(H_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$?

Primero señalemos que, como queda dicho, la desigualdad de Martio débil (6.6) siempre es cierta en esta situación. De hecho, sea I_n un conjunto de un sólo punto en G_n . Tomemos cualquier función continua $\psi(x, y)$, que sea creciente con respecto a x e y y que satisfaga $\psi(0, 0) = 0$, $\psi(0, \omega_F(I_n)) = \psi(\omega_F(I_n), 0) \geq \omega_F(H_n)$ para todo número natural n ; entonces (6.6) se cumple trivialmente para este ψ si $A, B \subset H_n$.

En lugar de (6.6), estudiaremos la siguiente desigualdad de Martio "intermedia":

$$\frac{\omega_F(A \cup B)}{\omega_F(H_n)} \leq \psi \left(\frac{\omega_F(A)}{\omega_F(H_n)}, \frac{\omega_F(B)}{\omega_F(H_n)} \right). \quad (6.8)$$

En primer lugar necesitamos la definición de producto de dos conjuntos de vértices. Dado $D \subset G_r$ y $E \subset G_s$, escribimos

$$D \times E = \{v_{IJ} : v_I \in D, v_J \in E\} \subset G_{r+s}.$$

Este producto satisface las leyes distributivas con respecto a la unión y a la intersección de conjuntos:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

Tenemos que $\omega_F(D \times E) = \omega_F(D) \omega_F(E)$, para toda función admisible F y todo conjunto D y E .

Teorema 6.4. *Si $\nu > 2$ y F es una función admisible que satisface (ii), (iv) y (vii), entonces*

$$k(D \times E) \leq k(D) k(E) \quad \text{para todo } D, E.$$

Sea $2 \leq \mu < \nu$, y sea $C_{\mu,1}$ cualquier conjunto fijado de G_1 con μ puntos. Definimos el subconjunto de Cantor $C_{\mu,n}$ de G_n por

$$C_{\mu,n} = \underbrace{C_{\mu,1} \times \cdots \times C_{\mu,1}}_n.$$

Obviamente, $\omega_F(C_{\mu,n}) = \omega_F(C_{\mu,1})^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Estudiaremos (6.8) para $H_n = C_{\mu,n}$.

Teorema 6.5. *Para cada función F_p , con $p > 2$, y cada $\nu > 2$*

$$k(C_{2,n}) = 1 \quad \text{para todo } n,$$

así la desigualdad de Martio (6.5) se cumple si $A \cup B = C_{2,n}$.

Corolario 6.4. Para todo $\nu > 2$, $n \geq 1$ y todo E tenemos que

- (i) $k(G_n \times E) = k(E)$, si $p > 1$.
- (ii) $k(C_{2,n} \times E) \leq k(E)$, si $p > 2$.

Corolario 6.5. Consideremos un número natural fijo n . Para cada $\nu > 2$ y $p > 1$ hay una constante positiva k_n (la misma constante que aparece en el Corolario 6.3) que depende sólo de ν , p y n tal que

$$\omega_p(A \cup B) \leq k_n (\omega_p(A) + \omega_p(B))$$

para todos los conjuntos A, B que satisfagan cualquiera de las condiciones:

- (i) $A \cup B \subset G_n$,
- (ii) $A \cup B = G_r \times D$, con r un número natural y $D \subset G_n$,
- (iii) $A \cup B = G_{r_1} \times C_{2,s_1} \times \dots \times G_{r_q} \times C_{2,s_q} \times D$, con $r_1, \dots, r_q, s_1, \dots, s_q$ números naturales y $D \subset G_n$, si $p > 2$.

El Teorema 6.5 no es cierto para $\nu > 2$ y $1 < p < 2$. De hecho, tenemos que

$$k(C_{2,1}) = 2^{\frac{2-p}{p-1}} \frac{1 + (\nu - 1)^{\frac{1}{p-1}}}{2^{\frac{1}{p-1}} + (\nu - 2)^{\frac{1}{p-1}}} > 1$$

(ver Lema 6.8 más abajo).

Pongamos $\sigma = F(\underbrace{1, \dots, 1}_\mu, 0, \dots, 0)$ y $\tilde{F}(x_1, \dots, x_\mu) = \sigma^{-1}F(x_1, \dots, x_\mu, 0, \dots, 0)$. Es inmediato que para $A \subset C_{\mu,n}$, $\omega_F(A)/\omega_F(C_{\mu,n}) = \omega_{\tilde{F}}(A)$. Si F satisface (i)-(iv), entonces \tilde{F} también satisface estas propiedades. Si F es estrictamente creciente en cada variable y satisface (iv), entonces \tilde{F} satisface (v).

Teorema 6.6. Sea $2 \leq \mu < \nu$ y $H_n = C_{\mu,n}$.

(a) Si F satisface (ii)-(iv) y

$$F(x_1, \dots, x_\mu, 0, \dots, 0) < \sigma \sqrt[\mu]{x_1 x_2 \dots x_\mu}$$

para algún $x_1, \dots, x_\mu \in \bar{\mathbb{R}}_+$, entonces la desigualdad de Martio intermedia (6.8) no se cumple.

(b) Supongamos que F es estrictamente creciente en cada variable y es dos veces continuamente diferenciable en $(\underbrace{1, \dots, 1}_\mu, 0, \dots, 0)$. Si F satisface (iii) y (iv) y existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$F(x_1, \dots, x_\mu, 0, \dots, 0) \geq \sigma \sqrt[\mu]{x_1 x_2 \dots x_\mu} + \varepsilon \sum_{j=1}^{\mu} (x_j - 1/\mu)^2 \quad (6.9)$$

para todo $(x_1, \dots, x_\mu) \in R_\mu$, entonces existen $C, \rho > 0$ tales que

$$\frac{\omega_F(A \cup B)}{\omega_F(C_{\mu,n})} \leq C \left(\frac{\omega_F(A) + \omega_F(B)}{\omega_F(C_{\mu,n})} \right)^\rho \quad (6.10)$$

para todo n y todo $A, B \subset C_{\mu,n}$.

Teorema 6.7. (a) Sea $2 \leq \mu < \nu$. Entonces existen δ, C, ρ positivos tales que (6.10) se cumple para $F = F_p$ para todo $p \in (2 - \delta, 2 + \delta)$.

(b) Si $\mu = 2$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $p \in (2 - \delta, \infty)$ existen $C > 0$ y $\rho > 0$ tales que (6.10) se cumple para $F = F_p$.

6.2 Pruebas de los Teoremas 6.1 y 6.2

Denotaremos por ∂R_ν la frontera relativa de R_ν como subconjunto del plano afín $P = \{x \in \mathbb{R}^\nu : x_1 + \dots + x_\nu = 1\}$. Pongamos $S(x_1, x_2, \dots, x_{\nu-1}, x_\nu) = (x_2, x_3, \dots, x_\nu, x_1)$. Entonces S es una transformación lineal ortogonal de \mathbb{R}^ν tal que $S^\nu = I$. Consideremos en primer lugar el caso $\nu = 3$.

Hagamos la siguiente observación. Sea $k \in \mathbb{N}$. Cada conjunto $E \subset G_k$ se puede representar de forma única como

$$E = \{v_{1I} : v_I \in A\} \cup \{v_{2I} : v_I \in B\} \cup \{v_{3I} : v_I \in C\}$$

para algunos subconjuntos A, B, C de G_{k-1} . Escribiremos $E = (A, B, C)$, y entonces $\omega_F(E) = F(\omega_F(A), \omega_F(B), \omega_F(C))$.

Tenemos la fórmula

$$(A_1, B_1, C_1) \cup (A_2, B_2, C_2) = (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2, C_1 \cup C_2). \quad (6.11)$$

Recordemos el Teorema 6.1.

Teorema 6.1. *Supongamos que F satisface (ii)-(iv), y $F(a_0, b_0, c_0) < \sqrt[3]{a_0 b_0 c_0}$ para algunos a_0, b_0, c_0 positivos. Entonces para cada $n > 0$, existen conjuntos congruentes $B_n^{(0)}, B_n^{(1)}, B_n^{(2)}$ de G_{3n} tales que $G_{3n} = B_n^{(0)} \cup B_n^{(1)} \cup B_n^{(2)}$ y $\omega_F(B_n^{(0)}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Demostración. Sean $a_0, b_0, c_0 \in (0, +\infty)$ y $F(a_0, b_0, c_0) < \sqrt[3]{a_0 b_0 c_0}$. Por la propiedad (iv) de F , podemos suponer que $a_0 b_0 c_0 = 1$. Existen subconjuntos cerrados $A_0, A_1 = SA_0, A_2 = S^2 A_0$ de ∂R_3 tales que $A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \partial R_3$ y

$$A_0 \subset \{(x, y, z) \in P : x \log a_0 + y \log b_0 + z \log c_0 < 0\}. \quad (6.12)$$

Para ver esto, dividamos P en tres ángulos iguales $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ de tamaño $\frac{2\pi}{3}$ con vértice común en q y pongamos $A_j = \mathcal{A}_j \cap \partial R_3$. La frontera del semiplano en P que aparece en (6.12) contiene a q . De esto se infiere que hay una posición de \mathcal{A}_j adecuada.

Escojamos a, b, c ligeramente más grande que a_0, b_0, c_0 , respectivamente, de modo que $abc > 1$, pero $F(a, b, c) < 1$. Podemos suponer también que aún se tiene

$$x \log a + y \log b + z \log c < 0 \quad \text{para } (x, y, z) \in A_0. \quad (6.13)$$

Definimos subconjuntos $B_{k,l,m}^{(j)}$ de G_{k+l+m} para $j = 0, 1, 2$ y $k, l, m \in \mathbb{Z}_+, k+l+m > 0$ por inducción en $n = k+l+m$.

La regla de inducción es

$$B_{k,l,m}^{(j)} = (B_{k-1,l,m}^{(j)}, B_{k,l-1,m}^{(j)}, B_{k,l,m-1}^{(j)}) \quad \text{para } k, l, m \geq 1, \quad (6.14)$$

y no depende de j . Las "condiciones de frontera" son

$$B_{k,l,m}^{(j)} = \begin{cases} G_n, & \text{si } (\frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \frac{m}{n}) \in A_j \\ \emptyset, & \text{si } (\frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \frac{m}{n}) \in \partial R_3 \setminus A_j \end{cases} \quad (6.15)$$

(aquí $n = k+l+m \geq 1$ y $k, l, m \in \mathbb{Z}_+, klm = 0$). Esta definición es correcta, y se prueba por inducción en $n = k+l+m$, usando 6.15 (para $n = 1$), (6.11) y (6.14), que

$$B_{k,l,m}^{(0)} \cup B_{k,l,m}^{(1)} \cup B_{k,l,m}^{(2)} = G_{k+l+m} \quad (6.16)$$

para todo $k, l, m \geq 0$ con $k+l+m \geq 1$.

A continuación aplicamos inducción de nuevo en $n = k + l + m$ para demostrar que

$$\omega_F(B_{k,l,m}^{(0)}) < a^{-k}b^{-l}c^{-m}. \quad (6.17)$$

Si $klm = 0$, entonces $B_{k,l,m}^{(0)}$ se ha formado por la regla (6.15), y podemos suponer que $(\frac{k}{n}, \frac{l}{n}, \frac{m}{n}) \in A_0$ (en otro caso $B_{k,l,m}^{(0)} = \emptyset$, y (6.17) es cierta). Entonces $\omega_F(B_{k,l,m}^{(0)}) = \omega_F(G_n) = 1$, y (6.17) se sigue de (6.13). Si $klm > 0$, entonces la hipótesis de inducción da

$$\begin{aligned} \omega_F(B_{k,l,m}^{(0)}) &= F(\omega_F(B_{k-1,l,m}^{(0)}), \omega_F(B_{k,l-1,m}^{(0)}), \omega_F(B_{k,l,m-1}^{(0)})) \\ &\leq F(a^{-k+1}b^{-l}c^{-m}, a^{-k}b^{-l+1}c^{-m}, a^{-k}b^{-l}c^{-m+1}) \\ &= a^{-k}b^{-l}c^{-m}F(a, b, c) < a^{-k}b^{-l}c^{-m}. \end{aligned}$$

Ahora pongamos $B_n^{(j)} = B_{n,n,n}^{(j)}$. Como $SA_0 = A_1$ y $S^2A_0 = A_2$, los conjuntos $B_n^{(0)}$, $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$ son congruentes. A continuación (6.16) da $B_n^{(0)} \cup B_n^{(1)} \cup B_n^{(2)} = G_{3n}$. Ya que $abc > 1$, (6.17) implica que $\omega_F(B_n^{(0)}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Lema 6.1. *La hipótesis (a) del Teorema 6.2 implica que para algún $\alpha > 0$,*

$$\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha}{3}\right)^{1/\alpha} \leq F(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \overline{\mathbb{R}}_+^3.$$

La hipótesis (b) del Teorema 6.2 implica que para algún $\beta > 0$,

$$F(x, y, z) \leq \left(\frac{x^\beta + y^\beta + z^\beta}{3}\right)^{1/\beta}, \quad (x, y, z) \in \overline{\mathbb{R}}_+^3.$$

Demostración. La expresión $\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha}{3}\right)^{1/\alpha}$ es una función creciente de α , $0 < \alpha < \infty$ [HLP34, Capítulo 2].

Supongamos que se tiene la hipótesis (a) del Teorema 6.2. La fórmula de Taylor da

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha}{3}\right)^{1/\alpha} &= \frac{1}{3} + \left(\frac{\alpha - 1}{2} + o(1)\right) \text{dist}((x, y, z), q)^2 \\ \sqrt[3]{xyz} &= \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} + o(1)\right) \text{dist}((x, y, z), q)^2 \end{aligned} \quad (6.18)$$

si $x+y+z = 1$, $(x, y, z) \rightarrow q$. De este modo existen $\alpha_0 > 0$ y un disco abierto \mathcal{U} en el plano P , centrado en q , tales que $\left(\frac{x^{\alpha_0} + y^{\alpha_0} + z^{\alpha_0}}{3}\right)^{1/\alpha_0} \leq F(x, y, z)$ si $(x, y, z) \in \mathcal{U}$. Por tanto $\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha}{3}\right)^{1/\alpha} \leq F(x, y, z)$ en \mathcal{U} para todo $\alpha \in (0, \alpha_0]$.

Sea r el radio de \mathcal{U} . Para unos puntos fijados x, y, z , $\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha}{3}\right)^{1/\alpha} \rightarrow \sqrt[3]{xyz}$ cuando $\alpha \rightarrow 0$ [HLP34, Capítulo 2]. Por el Teorema de Dini [Rud64, Teorema 7.13], esta convergencia es uniforme para $(x, y, z) \in R_3$. Por tanto hay un $\alpha \in (0, \alpha_0]$ tal que

$$\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha}{3}\right)^{1/\alpha} < \sqrt[3]{xyz} + \varepsilon r^2 \leq F(x, y, z)$$

para $(x, y, z) \in R_3 \setminus \mathcal{U}$. Concluimos por (iv) que $F(x, y, z) \geq \left(\frac{x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha}{3}\right)^{1/\alpha}$ para todo $(x, y, z) \in \overline{\mathbb{R}}_+^3$.

Si la hipótesis (b) se cumple, entonces (6.18) da que existe un disco \mathcal{U} como antes y algún β_0 más grande tales que $F(x, y, z) \leq \left(\frac{x^{\beta_0} + y^{\beta_0} + z^{\beta_0}}{3}\right)^{1/\beta_0}$ en \mathcal{U} . Se sigue de la propiedad (v) de F que

$F(x, y, z) \leq \max(x, y, z) - \delta$ en $R_3 \setminus \mathcal{U}$ para algún $\delta > 0$. Ya que $\left(\frac{x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha}{3}\right)^{1/\alpha} \rightarrow \max(x, y, z)$ uniformemente en R_3 cuando $\alpha \rightarrow \infty$, se sigue que para algún $\beta \geq \beta_0$,

$$F(x, y, z) \leq \left(\frac{x^\beta + y^\beta + z^\beta}{3}\right)^{1/\beta}$$

en R_3 , y hemos concluido. □

Recordamos ahora el Teorema 6.2.

Teorema 6.2. *Supongamos que F satisface (iv) y (v).*

(a) *Si para algún $\varepsilon > 0$, $F(x, y, z) \geq \sqrt[3]{xyz} + \varepsilon \operatorname{dist}((x, y, z), q)^2$ para todo $(x, y, z) \in R_3$, entonces existe $N > 0$ tal que $\omega_F \geq \omega_2^N$.*

(b) *Si para algún $C > 0$, $F(x, y, z) \leq \sqrt[3]{xyz} + C \operatorname{dist}((x, y, z), q)^2$ para todo $(x, y, z) \in R_3$, entonces existe $M > 0$ tal que $\omega_F \leq \omega_2^M$.*

En consecuencia, si tenemos que

$$\sqrt[3]{xyz} + \varepsilon \operatorname{dist}((x, y, z), q)^2 \leq F(x, y, z) \leq \sqrt[3]{xyz} + C \operatorname{dist}((x, y, z), q)^2$$

en R_3 para algún $\varepsilon, C > 0$, entonces existen constantes positivas M, N tales que $\omega_2^N \leq \omega_F \leq \omega_2^M$. En particular, la respuesta al problema de Martio débil es positiva, porque

$$\omega_F(A \cup B) \leq (\omega_F(A)^{1/N} + \omega_F(B)^{1/N})^M$$

para todo conjunto de vértices A y B .

Demostración. Supongamos que se tiene (a), y sea α como en el Lema 6.1. Probaremos por inducción en n que para $X \subset G_n$, $\omega_F(X) \geq \omega_2(X)^{1/\alpha}$. El Lema 6.1 da esto para $n = 1$. Si la desigualdad es cierta para $n - 1$ y $X \subset G_n$, entonces $X = (A, B, C)$ para algún $A, B, C \subset G_{n-1}$, y obtendríamos

$$\begin{aligned} \omega_F((A, B, C)) &= F(\omega_F(A), \omega_F(B), \omega_F(C)) \\ &\geq \left(\frac{\omega_F(A)^\alpha + \omega_F(B)^\alpha + \omega_F(C)^\alpha}{3}\right)^{1/\alpha} \\ &\geq \left(\frac{\omega_2(A) + \omega_2(B) + \omega_2(C)}{3}\right)^{1/\alpha} = \omega_2(X)^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Si se cumple (b), entonces de forma similar obtenemos $\omega_F \leq \omega_2^{1/\beta}$. Estas desigualdades implican que

$$\begin{aligned} \omega_F(A \cup B) &\leq \omega_2(A \cup B)^{1/\beta} \\ &\leq (\omega_2(A) + \omega_2(B))^{1/\beta} \\ &\leq (\omega_F(A)^\alpha + \omega_F(B)^\alpha)^{1/\beta}, \end{aligned}$$

de modo que la desigualdad de Martio débil (6.6) se cumple. □

6.2.1 El caso de ν arbitraria

Lema 6.2. Hay un conjunto denso \mathcal{D} del plano $P_0 = \{x \in \mathbb{R}^\nu : x_1 + \dots + x_\nu = 0\}$ tal que para todo $r \in \mathcal{D}$, los vectores $r, Sr, \dots, S^{\nu-1}r$ generan P_0 .

Demostración. Existe al menos un tal vector, $r = (1, -1, 0, 0, \dots, 0)$. El criterio del determinante para la dependencia lineal muestra que la propiedad en cuestión puede fallar sólo en una subvariedad algebraica de P_0 de codimensión uno. \square

Lema 6.3. Sea $r \in \mathcal{D}$. Entonces los conjuntos

$$A_j = \{x \in \partial R_\nu : \langle x - q, S^j r \rangle = \min_{0 \leq k \leq \nu-1} \langle x - q, S^k r \rangle\}$$

son cerrados, satisfacen $S^j A_0 = A_j$ para $j = 1, 2, \dots, \nu - 1$, $A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{\nu-1} = \partial R_\nu$, y

$$\min_{x \in A_0} \langle x - q, r \rangle < 0. \quad (6.19)$$

Señalamos que de hecho, $\langle q, S^j r \rangle = 0$ para todo j y todo $r \in P_0$.

Demostración. Demostraremos (6.19) (las demás propiedades son claras). Como los vectores $S^j r$ generan P_0 , tenemos que $\sum_{j=0}^{\nu-1} |\langle x - q, S^j r \rangle| \neq 0$ para $x \in \partial R_\nu$. Supongamos $x \in A_0$, y pongamos $t_j = \langle x - q, S^j r \rangle$. Entonces $\sum_{j=0}^{\nu-1} |t_j| \neq 0$, $\sum_{j=0}^{\nu-1} t_j = \langle x - q, 0 \rangle = 0$ y $t_0 \leq t_j$ para $1 \leq j \leq \nu - 1$. Estos tres hechos implican $t_0 < 0$. \square

Sea $F(x_1, \dots, x_\nu)$ una función admisible que satisface las propiedades (ii)-(v), y consideremos la correspondiente medida ω_F sobre T_ν . Los Lemas 6.2 y 6.3 nos permiten repetir la construcción del Teorema 6.1 y obtener conjuntos congruentes $B_n^{(0)}, B_n^{(1)}, \dots, B_n^{(\nu-1)}$ de $G_{\nu n}$ cuya unión es $G_{\nu n}$ y tales que $\omega_F(B_n^{(0)}) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sólo tenemos que elegir $(a_1^0, a_2^0, \dots, a_\nu^0)$, que ahora juega el papel de (a_0, b_0, c_0) , de modo que $(\log a_1^0, \log a_2^0, \dots, \log a_\nu^0) \in \mathcal{D}$. El resto de la demostración es similar. La demostración del Teorema análogo al Teorema 6.2 para grafos ν -regulares no necesita modificación.

Señalemos que la respuesta al problema de Martio débil para la medida p -armónica en grafos ν -regulares aún es negativa para $p \neq 2$. De hecho, si $p \neq 2$, entonces existe u cercano a 1 tal que $F(1, 1, \dots, 1, u^\nu) < u = \sqrt[p]{u^\nu}$.

6.3 Pruebas de los Teoremas 6.3 y 6.4

Definamos una sucesión de funciones $\{F^n\}$ del siguiente modo:

F^n es una función de ν^n variables reales con

$$F^1(x_1, \dots, x_\nu) = F(x_1, \dots, x_\nu)$$

$$F^2(x_1, \dots, x_{\nu^2}) = F(F^1(x_1, \dots, x_\nu), \dots, F^1(x_{\nu^2-\nu+1}, \dots, x_{\nu^2}))$$

\vdots

$$F^n(x_1, \dots, x_{\nu^n}) = F(F^{n-1}(x_1, \dots, x_{\nu^{n-1}}), \dots, F^{n-1}(x_{\nu^n-\nu^{n-1}+1}, \dots, x_{\nu^n}))$$

En G_n hay ν^n vértices. Los podemos ordenar alfabéticamente:

$$v_{1, \dots, 1, 1} < v_{1, \dots, 1, 2} < \dots < v_{\nu, \dots, \nu, \nu-1} < v_{\nu, \dots, \nu, \nu}.$$

Para cada subconjunto E de G_n , definimos $\delta^E \in \{0, 1\}^{\nu^n}$ como sigue. La coordenada i de δ^E denotada por δ_i^E es 1 si el i -ésimo vértice de G_n está en E , y 0 si no está en E . Entonces tenemos que $\omega_F(E) = F^n(\delta^E)$.

Notación. Si $a = (a_1, \dots, a_N)$, $b = (b_1, \dots, b_N)$, escribimos

$$a \cdot b = (a_1 b_1, \dots, a_N b_N), \quad \mathbf{1} = (1, \dots, 1), \quad \mathbf{0} = (0, \dots, 0).$$

Repetimos aquí el enunciado del Teorema 6.3.

Teorema 6.3. Consideremos un conjunto fijo $E \in G_n$. Para cada $\nu > 2$ y cada función admisible F que satisfaga (ii) y (vii) existe una constante positiva k que depende sólo de ν , F y E tal que

$$\omega_F(A \cup B) \leq k (\omega_F(A) + \omega_F(B)) \quad \text{para todo } A, B \subset G_r \text{ con } A \cup B = E,$$

para todo número natural $r \geq n$.

Demostración. El enunciado es trivial si $E = \emptyset$. Consideremos $E \in G_n$ con $E \neq \emptyset$ y fijemos A y B con $E = A \cup B$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \cap B = \emptyset$, ya que F satisface (ii).

Sean $w_1 < w_2 < \dots < w_{\nu^n}$ los ν^n vértices en G_n . Escribamos $x_i = \omega_F(w_i, A)$, $y_i = \omega_F(w_i, B)$ para $1 \leq i \leq \nu^n$, $x = (x_1, \dots, x_{\nu^n})$, $y = (y_1, \dots, y_{\nu^n})$. Tenemos $\omega_F(A) = F^n(x)$ y $\omega_F(B) = F^n(y)$.

Obsérvese que $x_i + y_i = \delta_i^E$ para $1 \leq i \leq \nu^n$. Esto es obvio si $\delta_i^E = 0$. Si $\delta_i^E = 1$, el hecho es una consecuencia de la propiedad (c) de ω_F (esta propiedad es cierta porque F satisface (ii) y (vii)). Entonces $x + y = \delta^E$.

Por consiguiente $\omega_F(A) = F^n(\delta^E \cdot x)$ y $\omega_F(B) = F^n(\delta^E \cdot (1 - x))$.

Consideremos la función $g(z) = F^n(\delta^E \cdot z) + F^n(\delta^E \cdot (1 - z))$ con $z \in [0, 1]^{\nu^n}$.

Como $E \neq \emptyset$, tenemos que $\delta^E \neq \mathbf{0}$; esto y (ii) implican que $g(z) > 0$ para todo $z \in [0, 1]^{\nu^n}$. La continuidad de g da que $M = \min\{g(z) : z \in [0, 1]^{\nu^n}\} > 0$.

Se tiene

$$\omega_F(E) \leq \frac{\omega_F(E)}{M} [F^n(\delta^E \cdot x) + F^n(\delta^E \cdot (1 - x))] = \frac{\omega_F(E)}{M} [\omega_F(A) + \omega_F(B)].$$

Por tanto, el Teorema 6.3 queda probado con $k = \omega_F(E)/M$.

Si $z^0 \in [0, 1]^{\nu^n}$ es tal que $g(z^0) = M$, para todo $\varepsilon > 0$ podemos elegir $A_\varepsilon, B_\varepsilon \subset G_N$ con N grande tal que $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon = E$ y $|\delta^E \cdot z^0 - x^\varepsilon| < \varepsilon$ si $x_i^\varepsilon = \omega_F(w_i, A_\varepsilon)$.

Esto implica que $k(E) = \omega_F(E)/M$. □

Enunciamos de nuevo el Teorema 6.4.

Teorema 6.4. Si $\nu > 2$ y F es una función admisible que satisface (ii), (iv) y (vii), entonces

$$k(D \times E) \leq k(D) k(E) \quad \text{para todo } D, E.$$

Demostración. Consideremos $D \subset G_r$ y $E \subset G_s$. Sean $w_1 < \dots < w_{\nu^r}$ los ν^r vértices de G_r y $u_1 < \dots < u_{\nu^s}$ los ν^s vértices de G_s . Si $w_i = w_I$, $u_j = u_J$, entonces escribimos $w_i \times u_j = v_{IJ} \in G_{r+s}$. Recuérdese que $D \times E = \{w_i \times u_j : w_i \in D, u_j \in E\}$.

Sean $A, B \subset G_n$, $n \geq r + s$, $A \cup B = D \times E$. Pongamos $x_j^i = \omega_F(w_i \times u_j, A)$, $x^i = (x_1^i, \dots, x_{\nu^s}^i)$ (aquí $i = 1, 2, \dots, \nu^r$).

La demostración del Teorema 6.3 da que

$$F^r(\delta^D \cdot y) + F^r(\delta^D \cdot (1 - y)) \geq \frac{\omega_F(D)}{k(D)} \quad \text{para todo } y \in [0, 1]^{\nu^r} \quad (6.20)$$

y

$$F^s(\delta^E \cdot x) + F^s(\delta^E \cdot (\mathbf{1} - x)) \geq \frac{\omega_F(E)}{k(E)} \quad \text{para todo } x \in [0, 1]^{\nu^s}.$$

Podemos usar estos hechos ya que F satisface (ii) y (vii).

Consideremos $x^1, \dots, x^{\nu^r} \in [0, 1]^{\nu^s}$ definidos más arriba. Entonces tenemos

$$F^s(\delta^E \cdot x^i) + F^s(\delta^E \cdot (\mathbf{1} - x^i)) \geq \frac{\omega_F(E)}{k(E)} \quad \text{para } 1 \leq i \leq \nu^r.$$

Pongamos

$$y_i = \frac{k(E)}{\omega_F(E)} F^s(\delta^E \cdot x^i), \quad z_i = \frac{k(E)}{\omega_F(E)} F^s(\delta^E \cdot (\mathbf{1} - x^i)), \quad \text{para } 1 \leq i \leq \nu^r.$$

Entonces $y_i, z_i \geq 0$ y $y_i + z_i \geq 1$.

Definimos $y_i^* = \min\{y_i, 1\}$, $z_i^* = 1 - y_i^*$. Tenemos

$$0 \leq y_i^* \leq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq z_i^* \leq 1, \quad (6.21)$$

$$y_i^* \leq y_i, \quad (6.22)$$

$$z_i^* = 1 - y_i^* = 1 - \min\{y_i, 1\} = \max\{1 - y_i, 0\} \leq \max\{z_i, 0\} = z_i. \quad (6.23)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \omega_F(A) + \omega_F(B) &= F^r(\delta_1^D F^s(\delta^E \cdot x^1), \dots, \delta_{\nu^r}^D F^s(\delta^E \cdot x^{\nu^r})) + \\ &\quad + F^r(\delta_1^D F^s(\delta^E \cdot (\mathbf{1} - x^1)), \dots, \delta_{\nu^r}^D F^s(\delta^E \cdot (\mathbf{1} - x^{\nu^r}))) = \\ &= \frac{\omega_F(E)}{k(E)} [F^r(\delta_1^D y_1, \dots, \delta_{\nu^r}^D y_{\nu^r}) + F^r(\delta_1^D z_1, \dots, \delta_{\nu^r}^D z_{\nu^r})] \geq \\ &\geq \frac{\omega_F(E)}{k(E)} [F^r(\delta_1^D y_1^*, \dots, \delta_{\nu^r}^D y_{\nu^r}^*) + F^r(\delta_1^D z_1^*, \dots, \delta_{\nu^r}^D z_{\nu^r}^*)] = \\ &= \frac{\omega_F(E)}{k(E)} [F^r(\delta^D \cdot y^*) + F^r(\delta^D \cdot (\mathbf{1} - y^*))] \geq \\ &\geq \frac{\omega_F(E)}{k(E)} \frac{\omega_F(D)}{k(D)} = \frac{\omega_F(D \times E)}{k(D)k(E)}. \end{aligned}$$

La definición de x^i implica la primera desigualdad; (iv) da la segunda; (ii), (6.22) y (6.23) implican la primera desigualdad; (6.20) y (6.21) dan la última. Entonces

$$\omega_F(D \times E) \leq k(D)k(E)[\omega_F(A) + \omega_F(B)]$$

y por tanto $k(D \times E) \leq k(D)k(E)$. □

6.4 Demostración del Teorema 6.5

Obsérvese que el Teorema 6.4 da el enunciado si demostramos antes que $k(C_{2,1}) = 1$. Definamos la función

$$g(x, y) = F_p(x, y, 0, \dots, 0) + F_p(1 - x, 1 - y, 0, \dots, 0).$$

Sean $A, B \subset G_m$ conjuntos disjuntos tales que $A \cup B = C_{2,1}$. Sean w_1, w_2 los dos puntos de $C_{2,1}$, y $x = \omega_p(w_1, A)$, $y = \omega_p(w_2, A)$. Entonces $\omega_p(A) + \omega_p(B) = g(x, y)$. La demostración del Teorema 6.3 implica que

$$k(C_{2,1}) = \frac{\omega_p(C_{2,1})}{\min_{x,y \in [0,1]} g(x, y)} \quad (6.24)$$

(g es continua en $[0, 1] \times [0, 1]$). De cara a calcular el mínimo de g , necesitamos un poco de análisis elemental.

En lo que sigue usaremos la notación $\alpha := p - 1$.

Sea $R_{abc}(t)$ la solución de la ecuación

$$a(t - R)^\alpha + b(1 - R)^\alpha + c(-R)^\alpha = 0$$

Existe solución única de esta ecuación para cualesquiera números reales positivos a, b, c . Sólo estaremos interesados en enteros positivos a, b, c ; en este caso tenemos

$$R_{abc}(t) = F_p(t, \dots, t, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

donde t aparece a veces, 1 aparece b veces, 0 aparece c veces, y $a + b + c = \nu$. Esta función tiene muchas propiedades, que podemos resumir en los siguientes lemas. Escribamos

$$l = b^{1/\alpha} / [b^{1/\alpha} + c^{1/\alpha}], \quad L = 1 + (c/a)^{1/\alpha}.$$

Nótese que $l < 1 < L$.

Lema 6.4. Consideremos enteros positivos a, b, c con $a + b + c = \nu$ y $p > 1$ ($\alpha > 0$). Para cada real t tenemos:

$$6.4.1. \quad tR_{bac}(1/t) = R_{abc}(t), \quad \text{si } t \neq 0.$$

$$6.4.2. \quad R_{acb}(1 - t) = 1 - R_{abc}(t).$$

$$6.4.3. \quad R_{abc}(0) = b^{1/\alpha} / [(a + c)^{1/\alpha} + b^{1/\alpha}] \quad \text{y} \quad R_{abc}(1) = (a + b)^{1/\alpha} / [(a + b)^{1/\alpha} + c^{1/\alpha}].$$

$$6.4.4. \quad R_{abc}(t) = t \quad \text{si y sólo si } t = l.$$

$$6.4.5. \quad R_{abc}(L) = 1.$$

Demostración. El enunciado se sigue de la definición de R_{abc} . □

Lema 6.5. Consideremos enteros positivos a, b, c , con $a + b + c = \nu$ y $p > 1$ ($\alpha > 0$). Para cada real t tenemos:

6.5.1. R_{abc} es una función estrictamente decreciente, y

$$R'_{abc}(t) = \frac{a|t - R_{abc}(t)|^{\alpha-1}}{a|t - R_{abc}(t)|^{\alpha-1} + b|1 - R_{abc}(t)|^{\alpha-1} + c|R_{abc}(t)|^{\alpha-1}}.$$

$$6.5.2. \quad R_{bac}(1/t) - (1/t)R'_{bac}(1/t) = R'_{abc}(t), \quad \text{si } t \neq 0.$$

$$6.5.3. \quad R''_{bac}(1/t) = t^3 R''_{abc}(t), \quad \text{si } t \neq 0.$$

$$6.5.4. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R_{abc}(t)/t = R_{bac}(0) = a^{1/\alpha} / [(b + c)^{1/\alpha} + a^{1/\alpha}].$$

$$6.5.5. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (R_{abc}(t) - tR_{bac}(0)) = R'_{bac}(0).$$

$$6.5.6. \quad R'_{abc}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} R'_{abc}(t) = R_{bac}(0).$$

$$6.5.7. \quad R'_{abc}(0) = a(a+c)^{1/\alpha} / [(a+c)((a+c)^{1/\alpha} + b^{1/\alpha})] = a(1 - R_{abc}(0)) / (a+c).$$

$$6.5.8.1. \quad \text{Si } p > 2 \ (\alpha > 1) \quad R'_{abc}(L) = a^{1/\alpha} / [a^{1/\alpha} + c^{1/\alpha}].$$

$$6.5.8.2. \quad \text{Si } 1 < p < 2 \ (0 < \alpha < 1) \quad R'_{abc}(L) = 0.$$

$$6.5.9.1. \quad \text{Si } p > 2 \ (\alpha > 1) \quad R'_{abc}(l) = 0.$$

$$6.5.9.2. \quad \text{Si } 1 < p < 2 \ (0 < \alpha < 1) \quad R'_{abc}(l) = 1.$$

Demostración. 6.5.1 se obtiene derivando implícitamente

6.5.2, 6.5.4 y 6.5.5 son consecuencias de 6.4.1.

6.5.3 se sigue de 6.5.2.

6.5.6 se sigue de 6.5.1 y 6.5.4 (para evitar cálculos, podemos aplicar la regla de l'Hôpital).

6.5.7 se sigue de 6.5.1, 6.4.3 y 6.4.2.

6.5.8.1 y 6.5.8.2 se siguen de 6.5.1 y 6.4.5.

6.5.9.1 y 6.5.9.2 se siguen de 6.5.1 y 6.4.4. □

Nótese que por 6.5.1, R_{abc} es una función de clase C^1 en \mathbb{R} .

Lema 6.6. Consideremos enteros positivos a, b, c , con $a + b + c = \nu$.

Si $p > 2$ ($\alpha > 1$) la función $R'_{abc}(t)$ es estrictamente decreciente en $[0, l]$ y $[L, \infty)$ y es estrictamente creciente en $[l, L]$.

Si $1 < p < 2$ ($0 < \alpha < 1$) la función $R'_{abc}(t)$ es estrictamente creciente en $[0, l]$ y $[L, \infty)$ y es estrictamente decreciente en $[l, L]$.

Demostración. Definimos la función auxiliar

$$S(t) = \frac{b|1 - R_{abc}(t)|^{\alpha-1} + c|R_{abc}(t)|^{\alpha-1}}{|t - R_{abc}(t)|^{\alpha-1}}.$$

Por 6.5.1, $R'_{abc}(t) = a/(a + S(t))$. Por tanto R'_{abc} es creciente (decreciente) si y sólo si $S(t)$ es decreciente (creciente).

Como $R'_{abc}(t) \leq 1$ para todo t , 6.4.4 da que $R_{abc}(t) > t$ para $t < l$ y $R_{abc}(t) < t$ para $t > l$.

Por 6.5.1, 6.4.4 y 6.4.5, R_{abc} es una biyección creciente de $[l, L]$ en $[l, 1]$.

Sea $t \in [l, L]$. Entonces la función $|1 - R_{abc}(t)| = 1 - R_{abc}(t)$ es decreciente y $|t - R_{abc}(t)| = t - R_{abc}(t)$ es creciente (obsérvese que $1 - R'_{abc} > 0$ en el intervalo abierto). Por tanto el cociente $|1 - R_{abc}(t)|/|t - R_{abc}(t)|$ es una función decreciente.

La función $t/R_{abc}(t)$ es creciente, debido a 6.5.2:

$$\left(\frac{t}{R_{abc}(t)}\right)' = \frac{R_{abc}(t) - tR'_{abc}(t)}{R_{abc}(t)^2} = \frac{R'_{bac}(1/t)}{R_{abc}(t)^2}.$$

Esto implica que

$$\frac{|R_{abc}(t)|}{|t - R_{abc}(t)|} = \frac{1}{\frac{t}{R_{abc}(t)} - 1}$$

es una función decreciente.

Concluimos que $R'_{abc}(t)$ es creciente en $[l, L]$ si $\alpha > 1$ y decreciente si $0 < \alpha < 1$.

Consideremos ahora $t \in [0, l]$.

6.4.2 da que $R'_{abc}(t) = R'_{acb}(1-t)$. Hemos probado antes que $R'_{acb}(t)$ es una función creciente (decreciente) en $[c^{1/\alpha}/(b^{1/\alpha} + c^{1/\alpha}), 1 + (b/a)^{1/\alpha}]$ si $\alpha > 1$ ($0 < \alpha < 1$).

Si $t \in [0, l] = [0, b^{1/\alpha}/(b^{1/\alpha} + c^{1/\alpha})]$ entonces

$$1-t \in \left[\frac{c^{1/\alpha}}{b^{1/\alpha} + c^{1/\alpha}}, 1\right] \subset \left[\frac{c^{1/\alpha}}{b^{1/\alpha} + c^{1/\alpha}}, 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{1/\alpha}\right].$$

Esto implica que $R'_{abc}(t) = R'_{acb}(1-t)$ es una función decreciente (creciente) en $[0, b^{1/\alpha}/(b^{1/\alpha} + c^{1/\alpha})]$ si $\alpha > 1$ ($0 < \alpha < 1$).

Ahora sea $t \in [L, \infty)$.

6.5.3 da que $R''_{bac}(1/t) = t^3 R''_{abc}(t)$, si $t \neq 0$. Hemos demostrado antes que $R''_{bac}(s)$ es negativa (positiva) para $s \in (0, a^{1/\alpha}/(a^{1/\alpha} + c^{1/\alpha}))$ si $\alpha > 1$ ($0 < \alpha < 1$). En consecuencia, $R''_{abc}(t)$ es negativa (positiva) dentro del intervalo $(L, \infty) = (1 + (c/a)^{1/\alpha}, \infty)$ si $\alpha > 1$ ($0 < \alpha < 1$). \square

Estamos interesados sólo en valores particulares de a, b, c , pero fue necesario considerar valores generales para probar el Lema 6.6. En lo que sigue consideremos $a = b = 1$ y $c = \nu - 2$. Denotaremos por β la constante $\beta = 1/\alpha = 1/(p-1)$. Denotaremos por $R_\nu(t)$ la función $R_\nu(t) = R_{1,1,\nu-2}(t)$.

Por la homogeneidad (iv) de la función F_p , tenemos

$$g(x, y) = y R_\nu\left(\frac{x}{y}\right) + (1-y) R_\nu\left(\frac{1-x}{1-y}\right).$$

Ahora podemos reescribir el Lema 6.6 como sigue:

Lema 6.6b. Sea $\nu > 2$.

Si $p > 2$ ($\alpha > 1$, $0 < \beta < 1$) entonces $R'_\nu(t)$ es estrictamente decreciente en $[0, 1/(1+c^\beta)]$ y $[1+c^\beta, \infty)$ y es estrictamente creciente en $[1/(1+c^\beta), 1+c^\beta]$.

Si $1 < p < 2$ ($0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$) entonces $R'_\nu(t)$ es estrictamente creciente en $[0, 1/(1+c^\beta)]$ y $[1+c^\beta, \infty)$ y es estrictamente decreciente en $[1/(1+c^\beta), 1+c^\beta]$.

Lema 6.7. Sean $\nu > 2$ y $0 < s < 1 < t$.

Si $p > 2$ ($\alpha > 1$, $0 < \beta < 1$) entonces $R'_\nu(s) < R'_\nu(1) < R'_\nu(t)$.

Si $1 < p < 2$ ($0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$) entonces $R'_\nu(s) > R'_\nu(1) > R'_\nu(t)$.

Demostración. Las propiedades 6.4.2 y 6.5.7 dan

$$R'_\nu(1) = R'_{1,\nu-2,1}(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+(c/2)^\beta} = \frac{1}{2} (1 - R_{1,\nu-2,1}(0)) = \frac{1}{2} R_\nu(1). \quad (6.25)$$

6.5.7 y 6.5.6 dan respectivamente

$$R'_\nu(0) = \frac{(1+c)^{\beta-1}}{(1+c)^\beta + 1}, \quad R'_\nu(\infty) = \frac{1}{(1+c)^\beta + 1}.$$

Consideremos primero el caso $p > 2$ ($\alpha > 1$, $0 < \beta < 1$). Las propiedades de la función R'_ν que aparece en el Lema 6.6b implican que el enunciado es cierto si tenemos que $R'_\nu(0) \leq R'_\nu(1) < R'_\nu(\infty)$.

La desigualdad $R'_\nu(1) < R'_\nu(\infty)$ es equivalente a

$$A(c) = 1 + 2^{1-\beta} c^\beta - (1+c)^\beta > 0$$

para todo entero positivo c . Es fácil comprobar que $A'(c) > 0$ para todo c positivo. Esto implica la desigualdad $A(c) > A(0) = 0$.

La desigualdad $R'_\nu(0) \leq R'_\nu(1)$ es una igualdad si $c = 1$. Si $c \geq 2$ tenemos que

$$2R'_\nu(0) = \frac{2}{1+c+(1+c)^{1-\beta}} < \frac{2}{1+c+1} = \frac{1}{1+c/2} \leq \frac{1}{1+(c/2)^\beta} = 2R'_\nu(1).$$

En el caso $1 < p < 2$ se obtiene el resultado con el mismo argumento. \square

Nótese que $\omega_p(C_{2,1}) = R_\nu(1)$. Por (6.24), la prueba del Teorema 6.5 finaliza con el siguiente resultado:

Lema 6.8. Sea $\nu > 2$. La función $g(x, y)$ satisface, para cada $0 \leq x, y \leq 1$,

$$R_\nu(1) = \frac{1}{1 + ((\nu - 2)/2)^{1/(p-1)}} \leq g(x, y) \leq \frac{2}{1 + (\nu - 1)^{1/(p-1)}} = 2R_\nu(0) \quad \text{si } p > 2,$$

$$R_\nu(1) = \frac{1}{1 + ((\nu - 2)/2)^{1/(p-1)}} \geq g(x, y) \geq \frac{2}{1 + (\nu - 1)^{1/(p-1)}} = 2R_\nu(0) \quad \text{si } 1 < p < 2.$$

En particular, $k(C_{2,1}) = 1$ si $p > 2$ y $k(C_{2,1}) = R_\nu(1)/(2R_\nu(0)) > 1$ si $1 < p < 2$.

Demostración. Por la simetría de la función g , podemos suponer que $x \geq y$. Así que estudiaremos los valores de g en el conjunto

$$D = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \geq y\}.$$

Primero veremos que g debe alcanzar sus valores máximo y mínimo en D en la frontera de D , porque $\nabla g \neq 0$ en el interior de D ; de hecho, $\partial g/\partial x \neq 0$ en el interior de D .

De hecho, si $\partial g/\partial x(x, y) = 0$, entonces

$$R'_\nu\left(\frac{x}{y}\right) = R'_\nu\left(\frac{1-x}{1-y}\right). \quad (6.26)$$

Si (x, y) es un punto del interior de D , satisface $x > y$ y así

$$\frac{x}{y} > 1 \quad \text{y} \quad 0 < \frac{1-x}{1-y} < 1.$$

Estas desigualdades y el Lema 6.7 dan que (6.26) no tiene soluciones en el interior de D .

Estudiaremos ahora los tres segmentos de la frontera de D .

(i) $D \cap \{x = y\}$.

Por la homogeneidad de F_p , tenemos

$$g(x, x) = x F_p(1, 1, 0, \dots, 0) + (1-x) F_p(1, 1, 0, \dots, 0) = F_p(1, 1, 0, \dots, 0) = R_\nu(1) = \frac{1}{1 + (c/2)^\beta}.$$

(ii) $D \cap \{x = 1\}$.

Estudiaremos el crecimiento de la función $B(y) = g(1, y)$, $y \in [0, 1]$:

$$g(1, y) = F_p(1, y, 0, \dots, 0) + F_p(0, 1-y, 0, \dots, 0) = R_\nu(y) + (1-y)R_\nu(0) \quad \text{con } y \in [0, 1].$$

Entonces $B'(y) = R'_\nu(y) - R_\nu(0)$.

Sea $p > 2$. El Lema 6.7 da que $R'_\nu(y) < R'_\nu(1) \leq R'_\nu(\infty)$ para $0 < y < 1$, y 6.5.6 da $R'_\nu(\infty) = R_\nu(0)$. Así $B'(y) < 0$ para $0 < y < 1$ y

$$R_\nu(1) = g(1, 1) \leq g(1, y) \leq g(1, 0) = 2R_\nu(0).$$

Ahora sea $1 < p < 2$. El Lema 6.7 da que entonces $R'_\nu(y) > R'_\nu(1) \geq R'_\nu(\infty) = R_\nu(0)$ para $0 < y < 1$. Por consiguiente $B'(y) > 0$ para $0 < y < 1$ y

$$R_\nu(1) = g(1, 1) \geq g(1, y) \geq g(1, 0) = 2R_\nu(0).$$

(iii) $D \cap \{y = 0\}$.

Este caso es equivalente a (ii), ya que $g(x, 0) = g(1, 1-x)$. Esto finaliza las pruebas del Lema 6.8 y del Teorema 6.5. \square

6.5 Demostración de los Teoremas 6.6 y 6.7

Teorema 6.6. Sea $2 \leq \mu < \nu$ y $H_n = C_{\mu,n}$.

(a) Si F satisface (ii)-(iv) y

$$F(x_1, \dots, x_\mu, 0, \dots, 0) < \sigma \sqrt[\mu]{x_1 x_2 \dots x_\mu}$$

para algún $x_1, \dots, x_\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$, entonces la desigualdad de Martio intermedia (6.8) no se cumple.

(b) Supongamos que F es estrictamente creciente en cada variable y es dos veces continuamente diferenciable en $(\underbrace{1, \dots, 1}_\mu, 0, \dots, 0)$. Si F satisface (iii) y (iv) y existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$F(x_1, \dots, x_\mu, 0, \dots, 0) \geq \sigma \sqrt[\mu]{x_1 x_2 \dots x_\mu} + \varepsilon \sum_{j=1}^{\mu} (x_j - 1/\mu)^2$$

para todo $(x_1, \dots, x_\mu) \in R_\mu$, entonces existen $C, \rho > 0$ tales que

$$\frac{\omega_F(A \cup B)}{\omega_F(C_{\mu,n})} \leq C \left(\frac{\omega_F(A) + \omega_F(B)}{\omega_F(C_{\mu,n})} \right)^\rho$$

para todo n y todo $A, B \subset C_{\mu,n}$.

Demostración. Definamos $\sigma, \tilde{F}(x_1, \dots, x_\mu)$ como en la sección 6.1 y apliquemos los Teoremas 6.1 y 6.2 y el Corolario 6.2 (en el caso general $\nu > 2$) a \tilde{F} . Obsérvese que $\omega_F(C_{\mu,n}) = \sigma^n$. (a) es inmediato. Si (6.9) se cumple, entonces la condición sobre la diferenciabilidad de F implica que \tilde{F} también satisface (el análogo de) el miembro derecho de (6.7). Esto y el Teorema 6.2 dan (b). \square

Teorema 6.7.

(a) Sea $2 \leq \mu < \nu$. Entonces existen δ, C, ρ positivos tales que (6.10) se cumple para $F = F_p$ para todo $p \in (2 - \delta, 2 + \delta)$.

(b) Si $\mu = 2$, entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $p \in (2 - \delta, \infty)$ existen $C > 0$ y $\rho > 0$ tales que (6.10) se cumple para $F = F_p$.

Demostración. (a). Escribamos $P_a = \{x_1 + \dots + x_\mu = a\} \subset \mathbb{R}^\mu$, $a \in \mathbb{R}$. La simetría en los argumentos de \tilde{F}_p implica que $\frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{F}_p(q)$ no depende de j (q es el centro de R_μ). Por tanto $d\tilde{F}_p(q)|_{P_0} = 0$. Nótese que existen $\delta_1 > 0$ y un entorno V_1 de q en P_1 tal que para cada i, j , $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{F}_p(q')$ es uniformemente continua como función de $(p, q') \in (2 - \delta_1, 2 + \delta_1) \times V_1$. Es fácil comprobar este hecho como sigue: diferenciación implícita de la ecuación (6.4) y $F_p \in C^1(\mathbb{R}^\nu)$ dan que $\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{F}_p$ es una función de clase C^1 en un entorno del punto $(2, q)$ si $\mu < \nu$. Ya que $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tilde{F}_2 \equiv 0$, la fórmula de Taylor con el resto de Lagrange da que para cualquier $\varepsilon > 0$, existen $\delta_0 > 0$ y un subconjunto abierto V , $q \in V \subset P_1$, tales que

$$\left| \tilde{F}_p(q') - \frac{1}{\mu} \right| \leq \varepsilon |q' - q|^2$$

para todo $q' \in V$ y todo $p \in (2 - \delta_0, 2 + \delta_0)$. Como $\tilde{F}_p \rightarrow \tilde{F}_2$ uniformemente en R_μ cuando $p \rightarrow 2$, concluimos que existen números positivos ε, δ tales que (6.9) se cumple para $F = \tilde{F}_p$ si $p \in (2 - \delta, 2 + \delta)$. Así el Teorema 6.6 da la primera afirmación.

(b). Sean $\mu = 2$ y $p > 2$. Tenemos $\sigma = R_\nu(1)$. Por el Lema 6.7 y (6.25),

$$R_\nu(t) \geq R_\nu(1) + R'_\nu(1)(t - 1) = R_\nu(1) \frac{1+t}{2}$$

para $0 \leq t \leq 1$, lo que implica que

$$F_p(x_1, x_2, \underbrace{0, \dots, 0}_{\nu-2}) \geq \sigma \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{para } x_1, x_2 \geq 0.$$

Por tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que (6.9) se cumple para $F = F_p$ para todo $p \in (2, \infty)$. Para cada $p_0 > 2$ finito, existe una constante C tal que el análogo a la desigualdad de la derecha en (6.7) se cumple para todo $F = \tilde{F}_p(x, y)$ con $p \in [2, p_0]$. Podemos concluir que la afirmación (b) se cumple. \square

6.6 El caso $p = \infty$

En la Teoría del Potencial es posible definir funciones “ ∞ -armónicas”. En esta Sección, consideramos la “medida ∞ -armónica”

La “medida ∞ -armónica” se define como ω_{F_∞} , donde F_∞ es el límite

$$F_\infty(x_1, \dots, x_\nu) = \lim_{p \rightarrow \infty} F_p(x_1, \dots, x_\nu).$$

Obsérvese que 6.4.3 da que

$$F_\infty(1, 0, \dots, 0) = F_\infty(1, \dots, 1, 0) = \frac{1}{2}.$$

Estas dos igualdades y (ii) para F_p dan que

$$F_\infty(1, x_2, \dots, x_{\nu-1}, 0) = \frac{1}{2} \quad \text{para todo } 0 \leq x_2, \dots, x_{\nu-1} \leq 1.$$

Deducimos (usando (iv) y (vi)) que

$$F_\infty(x_1, \dots, x_\nu) = \frac{\min(x_1, \dots, x_\nu) + \max(x_1, \dots, x_\nu)}{2}.$$

F_∞ satisface (i)–(vii). Entonces el Teorema 6.1 da que la respuesta al problema de Martio débil es negativa para la medida ∞ -armónica.

Es más, podemos construir ahora conjuntos $A_n, B_n \subset G_n$ con $D_n = A_n \cup B_n$ y

$$\frac{\omega_\infty(D_n)}{\omega_\infty(A_n) + \omega_\infty(B_n)} = \frac{n+1}{2}. \quad (6.27)$$

Consideremos $D_1 = G_1$. Dado D_n construimos D_{n+1} del siguiente modo: $D_{n+1} = (D_n, I_n, \dots, I_n)$, donde I_n es cualquier subconjunto de G_n con sólo un vértice. Entonces tenemos $\omega_\infty(D_1) = 1$ y $\omega_\infty(D_{n+1}) = \omega_\infty(D_n)/2 + 2^{-n-1}$, y esto implica que $\omega_\infty(D_n) = (n+1)2^{-n}$.

Consideremos $A_1 = C_{2,1}$. Dado A_n construimos A_{n+1} del siguiente modo:

$$A_{n+1} = (A_n, I_n, \emptyset, \dots, \emptyset).$$

Entonces tenemos que $\omega_\infty(A_1) = 1/2$ y $\omega_\infty(A_{n+1}) = \omega_\infty(A_n)/2$; estos hechos implican que $\omega_\infty(A_n) = 2^{-n}$. En consecuencia, si $B_n = D_n \setminus A_n$ se sigue que $B_{n+1} = (B_n, \emptyset, I_n, \dots, I_n)$. Entonces tenemos que $\omega_\infty(B_1) = 1/2$ y $\omega_\infty(B_{n+1}) = \omega_\infty(B_n)/2$; estos hechos implican que $\omega_\infty(B_n) = 2^{-n}$. Estas igualdades dan (6.27).

Bibliografía

- [Ahl73] L. V. Ahlfors, *Conformal invariants*, McGraw-Hill, 1973.
- [APR99] V. Alvarez, D. Pestana, and J. M. Rodríguez, *Isoperimetric inequalities in Riemann surfaces of infinite type*, *Revista Matemática Iberoamericana* (1999).
- [AS60] L. V. Ahlfors and L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton Univ. Press, 1960.
- [BA56] A. Beurling and L. V. Ahlfors, *The boundary correspondence under quasiconformal mappings*, *Acta Math.* (1956), no. 96, 125–142.
- [Ber85] L. Bers, *An inequality for Riemann surfaces*, *Differential Geometry and Complex Analysis* (I. Chavel and H. M. Farkas, eds.), vol. H. E. Rauch Memorial, Springer Verlag, 1985.
- [BF83] B. Brown Flinn, *Hyperbolic convexity and level sets of analytic functions*, *Indiana Univ. J.* (1983), no. 32, 831–841.
- [BI74] A. Baernstein II, *Integral means, univalent functions and circular symmetrization*, *Acta Math.* (1974), no. 133, 139–169.
- [BI97] A. Baernstein II, *Comparison of p -harmonic measure of subsets of the unit circle*, *St. Petersburg Math. J.* (1997).
- [BP78] A. F. Beardon and Ch. Pommerenke, *The poincaré metric of a plane domain*, *J. London Math. Soc.* (1978), no. 18, 475–483.
- [Bus92] P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [Car50] L. Carleson, *On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets*, Ph.D. thesis, Uppsala, 1950.
- [CFPR99] A. Cantón, J. L. Fernández, D. Pestana, and J. M. Rodríguez, *On harmonic functions on trees*, *Potential Analysis* (1999).
- [Cha84] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1984.
- [Cha93] I. Chavel, *Riemannian geometry: A modern introduction*, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [Che70] J. Cheeger, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the laplacian*, *Problems in Analysis*, Princeton Univ. Press, 1970, pp. 195–199.
- [FM99] J. L. Fernández and M. V. Melián, *Escaping geodesics of Riemannian surfaces*, *Acta Math* (1999).
- [FR90] J. L. Fernández and J. M. Rodríguez, *The exponent of convergence of Riemann surfaces. bass Riemann surfaces*, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Series AI* (1990), no. 15, 165–183.

- [FR92] J. L. Fernández and J. M. Rodríguez, *Area growth and green's function of Riemann surfaces*, Arkiv för matematik (1992), no. 30, 83–92.
- [Hay89] W. K. Hayman, *Subharmonic functions*, vol. 2, Academic Press, 1989.
- [Hej74] D. A. Hejhal, *Universal covering maps for variable regions*, Math. Z. (1974), no. 137, 7–20.
- [HKM93] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, *Non-linear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford Science Publications, 1993.
- [HLP34] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, 1934.
- [HS] I. Holopainen and P. M. Soardi, *p-harmonic functions on graphs and manifolds*.
- [Kan85] M. Kanai, *Rough isometries and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan (1985), no. 37, 391–413.
- [Kan86a] M. Kanai, *Curvature and topology of Riemannian manifolds*, Lecture Notes in Math, no. 1201, ch. Analytic inequalities and rough isometries between non-compact Riemannian manifolds, pp. 122–137, Springer, 1986.
- [Kan86b] M. Kanai, *Rough isometries and the parabolicity of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan (1986), no. 38, 227–238.
- [Kra72] I. Kra, *Automorphic forms and kleinian groups*, W. A. Benjamin, 1972.
- [Kra90] S. G. Krantz, *Complex analysis: the geometric viewpoint*, The Mathematical Association of America, 1990.
- [LV73] O. Lehto and K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer, 1973.
- [Mas67] W. M. Massey, *Algebraic topology: An introduction*, Brace and World, Inc., New York, 1967.
- [Min87] Minda, *A reflection principle for the poincaré metric and applications to geometric function theory*, Complex Variables, vol. 8, 1987, pp. 129–144.
- [Nee97] T. Needham, *Visual complex analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [Nic89] P. J. Nicholls, *The ergodic theory of discrete groups*, Lecture Notes Series, no. 143, Cambridge Univ. Press, 1989.
- [Pat76] S. J. Patterson, *The exponent of convergence of poincaré series*, Monatsh. Math. (1976), no. 82, 297–315.
- [Pat79] S. J. Patterson, *Some examples of fuchsian groups*, Proc. London Math. Soc. (1979), no. 39, 276–298.
- [Pes94] D. Pestana, *Distorsión por funciones internas y comportamiento radial de funciones holomorfas*, Ph.D. thesis, Universidad Autónoma de Madrid, 1994.
- [Poi95] H. Poicaré, *Investigación y ciencia*, Temas, no. 1, pp. 2–4, Prensa Científica, S.A., 1995.
- [Ran79] B. Randol, *Cylinders in Riemann surfaces*, Comment. Math. Helv. (1979), no. 54, 1–5.
- [Rat94] J. G. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1994.

- [Rod91] J. M. Rodríguez, *Superficies de Riemann bass, función de Green y extensión holomorfa*, Ph.D. thesis, Universidad Autónoma de Madrid, 1991.
- [Rod94a] J. M. Rodríguez, *Isoperimetric inequalities and Dirichlet functions of Riemann surfaces*, *Publicacions Matemàtiques* (1994), no. 38, 243–253.
- [Rod94b] J. M. Rodríguez, *Two remarks on Riemann surfaces*, *Publicacions Matemàtiques* (1994), no. 38, 463–477.
- [Rud64] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1964.
- [Shi63] H. Shimizu, *On discontinuous groups operating on the product of upper half-planes*, *Ann. of Math.* (1963), no. 77, 33–71.
- [SN70] L. Sario and M. Nakai, *Classification theory of Riemann surfaces*, Springer, 1970.
- [Soa93] P. M. Soardi, *Rough isometries and Dirichlet finite harmonic functions on graphs*, *Proc. Amer. Math. Soc.* (1993), no. 119, 1239–1248.
- [Sol96] A. Y. Solynin, *Functional inequalities via polarization*, *Algebra i Analiz* (1996), no. 8, 148–185, English translation in *St. Petersburg Math. J.*
- [Sul87] D. Sullivan, *Related aspects of positivity in Riemannian geometry*, *J. Diff. Geom.* (1987), no. 25, 327–351.
- [Tsu59] M. Tsuji, *Potential theory in modern function theory*, Chelsea, 1959.
- [Wol52] V. Wolontis, *Properties of conformal invariants*, *Amer. J. Math.* (1952), no. 74, 587–606.