

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID  
PROGRAMA DE DOCTORADO EN INGENIERÍA MATEMÁTICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

---

# ALIANZAS EN GRAFOS

Tesis doctoral para la obtención del título de Doctor en Matemáticas

Autor: **José Maria Sigarreta Almira**

Director: **Juan Alberto Rodríguez Velázquez**

---

Madrid - Abril de 2007



A mis hijas Sailí y Sailé



*“La Filosofía está escrita en ese vasto libro que siempre está abierto ante nuestros ojos: me refiero al Universo; pero no puede ser leído hasta que hayamos aprendido el lenguaje y nos hayamos familiarizado con las letras en que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender una sola palabra.”*

GALILEO, II Saggiatore, 1623.



# Prólogo

Este trabajo se enmarca dentro de la teoría de grafos y forma parte de un amplio proyecto que estudia las propiedades matemáticas de las alianzas en grafos. El objetivo principal es el estudio del número de  $k$ -alianza para el caso de alianzas defensivas, ofensivas y duales: en algunos casos obtenemos una fórmula cerrada para dicho parámetro y, en general, obtenemos cotas tensas en función de otros parámetros conocidos del grafo como el orden, la medida, el radio espectral y el número de independencia, entre otros. La mayoría de los resultados presentados son completamente nuevos y algunos de ellos son una generalización de resultados conocidos. En esta memoria, además, se inicia el estudio de las alianzas conexas y de las alianzas independientes. Algunos de los resultados que aquí se presentan han sido publicados en revistas internacionales y otros están en vías de publicación. Además, los principales resultados de esta memoria han sido dados a conocer mediante la presentación de comunicaciones en congresos internacionales.

Quiero agradecer a todos aquellos que han hecho posible el desarrollo exitoso de este trabajo, en especial:

- a mi director de tesis, por su inestimable ayuda, permitiéndome crecer como matemático y como persona;
- a mi esposa, por compartir su vida y conocimientos conmigo;
- a José Manuel, por su amistad y consejos siempre acertados.

José María Sigarreta Almira,

Madrid, abril de 2007.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Alianzas defensivas</b>	<b>5</b>
1.1. Definiciones y propiedades básicas . . . . .	6
1.2. Alianzas defensivas . . . . .	9
1.2.1. Alianzas defensivas y grafo línea . . . . .	15
1.3. Alianzas defensivas globales . . . . .	23
1.3.1. Alianzas defensivas globales en grafos cúbicos . . . . .	29
1.4. Alianzas defensivas en grafos planares . . . . .	30
1.4.1. Alianzas defensivas en árboles . . . . .	33
1.5. Alianzas defensivas globales conexas . . . . .	35
<b>2. Alianzas ofensivas</b>	<b>39</b>
2.1. Definiciones y propiedades básicas . . . . .	40
2.2. Alianzas ofensivas . . . . .	42
2.3. Alianzas ofensivas y conjuntos conexos . . . . .	54
2.3.1. Alianzas ofensivas en grafos cúbicos . . . . .	56
2.4. Alianzas ofensivas independientes . . . . .	59
2.5. Alianzas ofensivas en grafos planares . . . . .	64
2.5.1. Alianzas ofensivas en árboles . . . . .	67

<b>3. Alianzas duales y cubrimientos de alianzas</b>	<b>71</b>
3.1. Alianzas duales. Definición y primeras propiedades . . . . .	72
3.2. Alianzas duales . . . . .	73
3.2.1. Alianzas duales en grafos cúbicos . . . . .	77
3.2.2. Alianzas duales en grafos planares . . . . .	78
3.3. Conjuntos dominantes totales y alianzas . . . . .	80
3.3.1. Conjuntos dominantes totales en grafos planares . . . . .	84
3.4. Cubrimientos y conjuntos libres de alianzas. Definiciones . . . . .	85
3.5. Cubrimientos y conjuntos libres de alianzas . . . . .	86
 <b>Conclusiones</b>	 <b>93</b>
 <b>Bibliografía</b>	 <b>95</b>
 <b>Glosario de símbolos</b>	 <b>101</b>

# Introducción

El estudio de las propiedades matemáticas de las alianzas en grafos fue iniciado por P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi y S. T. Hedetniemi en [26]. En el referido trabajo, se definen varios tipos de alianzas entre las que destacamos las alianzas defensivas, las alianzas ofensivas, y las alianzas duales. Además, se plantea el problema de calcular el mínimo cardinal de los diferentes tipos de alianzas de un grafo; a cada uno de estos parámetros se les denomina *número de alianza* (defensiva, ofensiva o dual, en dependencia del tipo de alianza en cuestión). Por último, en dicho trabajo se calcula el número de alianza defensiva para algunas familias de grafos conocidos y, para grafos arbitrarios, se obtienen varias cotas tensas en función de parámetros conocidos del grafo como, por ejemplo, el orden y el grado máximo. El número de alianza defensiva también ha sido estudiado para el caso de alianzas globales y de alianzas fuertes [19, 26]. El estudio de las alianzas ofensivas, y ofensivas fuertes, se inició por Odile Favaron y otros en [10] donde se obtienen cotas superiores para el número de alianza ofensiva y se calcula el valor exacto de dicho parámetro para algunas familias de grafos conocidos. Respecto al estudio de las propiedades matemáticas de las alianzas duales, sólo se conoce una cota inferior para el número de alianza dual de la familia de grafos  $C_n \times C_m$  [1].

Los conceptos de alianza defensiva y alianza ofensiva fueron generalizados por K. H. Shafique y R. D. Dutton en [38, 41] donde se inicia el estudio de

los conjuntos libres de  $k$ -alianzas y de los cubrimientos de  $k$ -alianzas.

Una de las principales motivaciones de este estudio está dada en la complejidad computacional de los parámetros estudiados; el problema de calcular el número de alianza (defensiva, ofensiva o dual) pertenecen a la clase “ $NP$ -complete”, [2, 10, 12, 14, 40]. Por otro lado, las alianzas (defensivas, ofensivas o duales) sirven de modelo matemático de diversos problemas prácticos y teóricos que han venido apareciendo en la literatura de diversas áreas del conocimiento, como es el caso de estructura de datos [40], comunidades web [16], bioinformática (estudio del proteoma y el genoma) [22], redes sociales y foodwebs [7, 25, 45], así como sistemas de defensa [27].

En este trabajo estudiamos propiedades matemáticas de las  $k$ -alianzas en grafos y prestamos especial interés a la relación que existe entre el número de  $k$ -alianza (defensiva, ofensiva y dual) y otros parámetros conocidos como, por ejemplo, el orden, la medida, el cuello, el diámetro, el número de independencia, el número de dominación, la conectividad algebraica y el radio espectral. En algunos casos obtenemos el valor exacto del número de  $k$ -alianza y, en general, obtenemos cotas tensas no triviales para dicho parámetro. En el caso del grafo línea, se obtienen resultados sobre el número de alianza (defensiva y ofensiva) en función de parámetros conocidos del grafo original. A lo largo de toda la memoria particularizamos al caso de grafos planares y de grafos cúbicos. Estudiamos, además, la relación entre alianzas defensivas y ofensivas, así como las principales propiedades de los conjuntos libres de  $k$ -alianzas y de los cubrimientos de  $k$ -alianzas. Otra de las aportaciones de esta memoria es el inicio del estudio de las  $k$ -alianzas conexas y de las  $k$ -alianzas independientes, así como el estudio de la relación entre los conjuntos  $k$ -dominantes totales y las  $k$ -alianzas (defensivas, ofensivas y duales).

Esta memoria está estructurada en tres capítulos. Los dos primeros, aunque de similar estructura, son independientes y están dedicados al estudio de las  $k$ -alianzas defensivas y de las  $k$ -alianzas ofensivas, respectivamente. En

el Capítulo 3 estudiamos las  $k$ -alianzas duales, los conjuntos  $k$ -dominantes totales, así como los cubrimientos y los conjuntos libres de  $k$ -alianzas. Algunos de los resultados que aquí se presentan han sido publicados en revistas internacionales [29, 30, 31, 34, 42] y otros están en vías de publicación [14, 33, 35, 37, 44]. Además, los principales resultados de esta memoria han sido dados a conocer mediante la presentación de comunicaciones en congresos internacionales [13, 32, 36, 43].

Antes de definir con precisión el concepto de  $k$ -alianza (defensiva, ofensiva y dual), vamos a establecer alguna notación y terminología. A lo largo de la memoria  $\Gamma = (V, E)$  denotará un grafo finito, no dirigido y simple. Denotaremos el orden de  $\Gamma$  por  $|V| = n$  y la medida por  $|E| = m$ . El grado de un vértice  $v_i \in V$  será denotado por  $\delta(v_i)$  (o por  $\delta_i$  por brevedad), el grado mínimo de  $\Gamma$  será denotado por  $\delta$  y el grado máximo por  $\Delta$ . El subgrafo inducido por un conjunto  $S$  será denotado por  $\langle S \rangle$  y el complemento del conjunto  $S \subseteq V$  en  $V$  será denotado por  $\bar{S}$ . Para un subconjunto no vacío  $X \subseteq V$ , y un vértice  $v \in V$ , denotamos por  $N_X(v)$  al conjunto de vecinos que  $v$  tiene en  $X$ :

$$N_X(v) := \{u \in X : u \sim v\}.$$

El grado del vértice  $v$  en  $X$  será denotado por  $\delta_X(v) = |N_X(v)|$ .



# Capítulo 1

## Alianzas defensivas

### Resumen

Estudiamos las principales propiedades de las  $k$ -alianzas defensivas y de las  $k$ -alianzas defensivas globales. Prestamos especial interés en el número de  $k$ -alianza defensiva (global) y su relación con otros parámetros de un grafo. En algunos casos obtenemos el valor exacto de dicho parámetro y, en general, obtenemos cotas tensas, particularizando en el caso de grafos cúbicos, de grafos planares, y del grafo línea de un grafo simple. En este capítulo, además, iniciamos el estudio de las  $k$ -alianzas conexas.

## 1.1. Definiciones y propiedades básicas

Un conjunto no vacío  $S \subseteq V$  es una  $k$ -alianza defensiva en  $\Gamma = (V, E)$ ,  $-\Delta \leq k \leq \Delta$ , si se cumple

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k, \quad \forall v \in S. \quad (1.1)$$

Llamaremos *condición de  $k$ -alianza defensiva* a la relación (1.1). Si para un vértice  $v \in S$  se cumple la relación (1.1), diremos que  $v$  cumple la *condición de  $k$ -alianza defensiva en  $S$* . Alternativamente una  $k$ -alianza defensiva en  $\Gamma$  se define como  $S \subseteq V$  tal que

$$2\delta_S(v) \geq \delta(v) + k, \quad \forall v \in S, \quad (1.2)$$

o bien

$$\delta(v) \geq 2\delta_{\bar{S}}(v) + k, \quad \forall v \in S. \quad (1.3)$$

El concepto de  $k$ -alianza defensiva fue introducido en [38] como una generalización del concepto de alianza defensiva definido en [26]: una *alianza defensiva* es una  $(-1)$ -alianza defensiva, mientras que una *alianza defensiva fuerte* es una  $0$ -alianza defensiva. A lo largo de esta memoria usaremos indistintamente ambas nomenclaturas. Las  $0$ -alianzas defensivas también son conocidas como conjuntos cohesivos [41].

En el caso de una alianza defensiva,  $S$ , se dice que cada vértice de  $S$  está *protegido* de un posible ataque de los vértices de  $\bar{S}$  por no estar en inferioridad numérica respecto a sus vecinos en  $\bar{S}$ . En el caso de una alianza defensiva fuerte se dice que cada vértice de  $S$  está *fuertemente defendido* de un posible ataque de los vértices de  $\bar{S}$  por estar en superioridad numérica respecto a sus vecinos en  $\bar{S}$ .

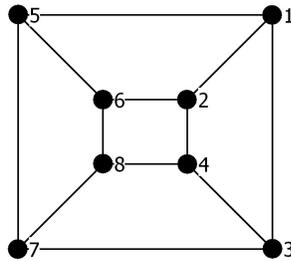
Nótese que las alianzas defensivas son el modelo matemático de las comunidades web tal y como fueron definidas por G. W. Flake, S. Lawrence y C. L. Giles en [16]: una comunidad web es un conjunto de páginas web que

tienen más enlaces (en ambas direcciones) a miembros del conjunto que a páginas de fuera del conjunto.

Para cada uno de los tipos de alianzas estudiados en esta memoria, llamaremos *número de alianza* al mínimo cardinal de una alianza del tipo correspondiente. Por ejemplo, el *número de  $k$ -alianza defensiva* de  $\Gamma$ , denotado por  $a_k(\Gamma)$ , es el mínimo cardinal de una  $k$ -alianza defensiva en  $\Gamma$ . Nótese que para todo grafo se cumple  $a_{k+1}(\Gamma) \geq a_k(\Gamma)$ .

El número de  $(-1)$ -alianza defensiva, es conocido como *número de alianza defensiva*, y es denotado por  $a(\Gamma) = a_{-1}(\Gamma)$ , y el número de 0-alianza defensiva es conocido como *número de alianza defensiva fuerte*, y es denotado por  $\hat{a}(\Gamma) = a_0(\Gamma)$  [17, 19, 26].

Figura 1.1:



En el 3-cubo,  $Q_3$ , mostrado en la Figura 1.1, cualquier par de vértices adyacentes forma una alianza defensiva de cardinal mínimo y cualquier conjunto de vértices que forme un ciclo de orden 4 es una alianza defensiva fuerte de cardinal mínimo. Así,  $a_{-1}(Q_3) = a(Q_3) = 2$  y  $a_0(Q_3) = \hat{a}(Q_3) = 4$ .

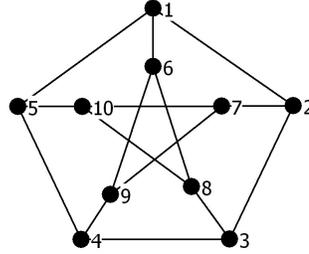
Recordemos que un conjunto  $S$  de vértices de un grafo es *dominante* si todo vértice de  $\bar{S}$  es adyacente a, al menos, un vértice de  $S$ . El mínimo cardinal de un conjunto dominante de  $\Gamma$  recibe el nombre de *número de dominación* de  $\Gamma$  y es denotado por  $\gamma(\Gamma)$ .

Llamamos  *$k$ -alianza defensiva global* a una  $k$ -alianza defensiva que es un

conjunto dominante. El *número de  $k$ -alianza defensiva global* de  $\Gamma$  será denotado por  $\gamma_k^a(\Gamma)$ . Evidentemente, para todo grafo se cumple  $\gamma_k^a(\Gamma) \geq \gamma(\Gamma)$ ,  $\gamma_k^a(\Gamma) \geq a_k(\Gamma)$  y  $\gamma_{k+1}^a(\Gamma) \geq \gamma_k^a(\Gamma)$ .

El número de  $(-1)$ -alianza defensiva global, es conocido como *número de alianza defensiva global*, y es denotado por  $\gamma^a(\Gamma) = \gamma_{-1}^a(\Gamma)$ , y el número de  $0$ -alianza defensiva global es conocido como *número de alianza defensiva global fuerte*, y es denotado por  $\gamma^{\hat{a}}(\Gamma) = \gamma_0^a(\Gamma)$  [19, 26].

Figura 1.2:



En el grafo de Petersen, mostrado en la Figura 1.2, el conjunto  $S = \{3, 6, 8, 10\}$  es una alianza defensiva global de cardinal mínimo y cualquier conjunto de vértices que forme un ciclo de orden 5 es una alianza defensiva global fuerte de cardinal mínimo. En este caso  $\gamma^a(\Gamma) = \gamma_{-1}^a(\Gamma) = 4$  y  $\gamma^{\hat{a}}(\Gamma) = \gamma_0^a(\Gamma) = 5$ .

Si cada vértice de  $\Gamma$  tiene grado par, entonces toda alianza defensiva de  $\Gamma$  es fuerte y, por consiguiente,  $a(\Gamma) = \hat{a}(\Gamma)$  y  $\gamma^a(\Gamma) = \gamma^{\hat{a}}(\Gamma)$ . En general, si todo vértice de  $\Gamma$  tiene grado par y  $k$  es impar,  $k = 2l - 1$ , entonces toda  $(2l - 1)$ -alianza defensiva (global) en  $\Gamma$  es una  $(2l)$ -alianza defensiva (global). Por lo tanto, en este caso,  $a_{2l-1}(\Gamma) = a_{2l}(\Gamma)$  y  $\gamma_{2l-1}^a(\Gamma) = \gamma_{2l}^a(\Gamma)$ . Análogamente, si cada vértice de  $\Gamma$  tiene grado impar y  $k$  es par,  $k = 2l$ , entonces toda  $(2l)$ -alianza defensiva (global) en  $\Gamma$  es una  $(2l + 1)$ -alianza defensiva (global). Por lo tanto, en este caso,  $a_{2l}(\Gamma) = a_{2l+1}(\Gamma)$  y  $\gamma_{2l}^a(\Gamma) = \gamma_{2l+1}^a(\Gamma)$ .

Para algunos grafos, existen valores de  $k \in \{-\Delta, \dots, \Delta\}$ , para los cuales no existen  $k$ -alianzas defensivas. Por ejemplo, para  $k \geq 2$  en el caso del grafo estrella  $S_n$ , no existen  $k$ -alianzas defensivas. Las  $\Delta$ -alianzas defensivas sólo existen en aquellos grafos que tengan una componente conexa isomorfa a un grafo  $\Delta$ -regular. De (1.1) podemos concluir que para todo grafo y para toda  $k \in \{-\Delta, \dots, \delta\}$  existe al menos una  $k$ -alianza defensiva. Por ejemplo, una  $(\delta)$ -alianza defensiva en  $\Gamma = (V, E)$  es  $V$ . Además, si  $v \in V$  es un vértice de grado mínimo,  $\delta(v) = \delta$ , entonces  $S = \{v\}$  es una  $k$ -alianza defensiva para todo  $k \leq -\delta$ . Como  $a_k(\Gamma) = 1$  para  $k \leq -\delta$ , en esta memoria consideraremos los casos  $-\delta \leq k \leq \Delta$ . Igualmente, para algunos grafos, existen valores de  $k \in \{-\Delta, \dots, \Delta\}$ , para los cuales no existen  $k$ -alianzas defensivas globales. Por ejemplo, en el caso de los grafos no regulares, no existen  $\Delta$ -alianzas defensivas globales. Por lo tanto, las cotas mostradas en la memoria para  $\gamma_k^a(\Gamma)$ , con  $k \leq \Delta$ , se obtienen suponiendo que el grafo  $\Gamma$  contiene  $k$ -alianzas defensivas globales.

Nótese que para todo grafo  $\Gamma$ , todo conjunto dominante es una  $(-\Delta)$ -alianza defensiva global. Por tanto,  $\gamma_{-\Delta}^a(\Gamma) = \gamma(\Gamma)$ . Además, para todo grafo  $\Delta$ -regular de orden  $n$ ,  $\gamma_{\Delta-1}^a(\Gamma) = \gamma_{\Delta}^a(\Gamma) = n$ .

## 1.2. Alianzas defensivas

P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi y S. T. Hedetniemi en [26] mostraron que para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$  y grado mínimo  $\delta$ ,

$$a_{-1}(\Gamma) \leq n - \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil \quad \text{y} \quad a_0(\Gamma) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor.$$

A continuación generalizamos el resultado anterior al caso de  $k$ -alianzas defensivas y obtenemos cotas inferiores.

**Teorema 1.** Para todo  $k \in \{-\delta, \dots, \Delta\}$ ,

$$\left\lceil \frac{\delta + k + 2}{2} \right\rceil \leq a_k(\Gamma) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta - k}{2} \right\rfloor.$$

*Demostración.* Si  $X \subseteq V$  es una  $k$ -alianza defensiva en  $\Gamma$  para  $\delta \leq k \leq \Delta$ , entonces  $a_k(\Gamma) \leq |X| \leq n \leq n - \lfloor \frac{\delta - k}{2} \rfloor$ . Supongamos  $-\delta \leq k \leq \delta$ . Sea  $S \subseteq V$  un conjunto de cardinalidad  $n - \lfloor \frac{\delta - k}{2} \rfloor$ . Para todo v\u00e9rtice  $v \in S$  se tiene  $\frac{\delta(v) - k}{2} \geq \lfloor \frac{\delta - k}{2} \rfloor \geq \delta_{\bar{S}}(v)$ . Por lo tanto,  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva y  $a_k(\Gamma) \leq |S| = n - \lfloor \frac{\delta - k}{2} \rfloor$ .

Para deducir la cota inferior supongamos que el conjunto  $X \subseteq V$  es una  $k$ -alianza defensiva. Para todo  $v \in X$  se cumple

$$\begin{aligned} \delta(v) &= \delta_X(v) + \delta_{\bar{X}}(v) \\ \delta(v) &\leq \delta_X(v) + \frac{\delta(v) - k}{2} \\ \frac{\delta(v) + k}{2} &\leq \delta_X(v) \leq |X| - 1 \\ \frac{\delta + k + 2}{2} &\leq |X|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce el resultado.  $\square$

**Corolario 2.** Para todo  $k = \{1 - n, \dots, n - 1\}$ ,  $a_k(K_n) = \left\lceil \frac{n + k + 1}{2} \right\rceil$ .

**Teorema 3.** Para todo  $k, r \in \mathbb{Z}$  tal que  $-\delta \leq k \leq \Delta$  y  $0 \leq r \leq \frac{k + \delta}{2}$ ,

$$a_{k-2r}(\Gamma) + r \leq a_k(\Gamma).$$

*Demostraci\u00f3n.* Sea  $S \subset V$  es una  $k$ -alianza defensiva de cardinal m\u00ednimo en  $\Gamma$ . A partir del Teorema 1 se tiene  $\frac{\delta + k + 2}{2} \leq |S|$ , entonces podemos tomar  $X \subset S$  tal que  $|X| = r \leq \frac{k + \delta}{2}$ . Por lo tanto, para todo  $v \in Y = S - X$ ,

$$\begin{aligned} \delta_Y(v) &= \delta_S(v) - \delta_X(v) \\ &\geq \delta_{\bar{S}}(v) + k - \delta_X(v) \\ &= \delta_{\bar{Y}}(v) + k - 2\delta_X(v) \\ &\geq \delta_{\bar{Y}}(v) + k - 2r. \end{aligned}$$

Así,  $Y$  es una  $(k-2r)$ -alianza defensiva en  $\Gamma$  y, como consecuencia,  $a_{k-2r}(\Gamma) \leq a_k(\Gamma) - r$ .  $\square$

Del resultado anterior se derivan las siguientes consecuencias.

**Corolario 4.** *Sea  $t \in \mathbb{Z}$ .*

- *Si  $\frac{1-\delta}{2} \leq t \leq \frac{\Delta-1}{2}$ , entonces  $a_{2t-1}(\Gamma) + 1 \leq a_{2t+1}(\Gamma)$ .*
- *Si  $\frac{2-\delta}{2} \leq t \leq \frac{\Delta}{2}$ , entonces  $a_{2(t-1)}(\Gamma) + 1 \leq a_{2t}(\Gamma)$ .*

**Corolario 5.** *Para todo  $k \in \{0, \dots, \delta\}$ ,*

- *si  $k$  es par, entonces  $a_{-k}(\Gamma) + \frac{k}{2} \leq a_0(\Gamma) \leq a_k(\Gamma) - \frac{k}{2}$ ,*
- *si  $k$  es impar, entonces  $a_{-k}(\Gamma) + \frac{k-1}{2} \leq a_{-1}(\Gamma) \leq a_k(\Gamma) - \frac{k+1}{2}$ .*

En [17, 26] se mostró que para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$ ,

$$a_{-1}(\Gamma) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \quad \text{y} \quad a_0(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \quad (1.4)$$

A partir del Corolario 5 y (1.4) obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 6.** *Para todo  $k \in \{-\delta, \dots, 0\}$ ,*

$$a_k(\Gamma) \leq \left\lceil \frac{n+k+1}{2} \right\rceil.$$

Un ejemplo donde la cota anterior se alcanza es el grafo completo  $\Gamma = K_n$ .

La *arista conectividad* de un grafo  $\Gamma$  denotada por  $\varepsilon(\Gamma)$ , es el número mínimo de aristas cuya supresión hace que  $\Gamma$  resulte un grafo no conexo.

**Proposición 7.** [26] *Para todo grafo de orden  $n$  con  $\varepsilon(\Gamma) < \delta$ ,*

$$a(\Gamma) \leq \hat{a}(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Si existe una bipartición de los vértices del grafo  $\Pi(\Gamma) = \{V_1, V_2\}$  con  $|V_1| \geq 2$  y  $|V_2| \geq 2$  tal que  $\varepsilon(\Gamma)$  sea igual a la cantidad de aristas entre los vértices de  $V_1$  y los vértices de  $V_2$ , entonces se dice que  $\Pi(\Gamma)$  es una  $\varepsilon(\Gamma)$ -bipartición no singular.

**Corolario 8.** [26] *Sea  $\Gamma$  un grafo de orden  $n$ . Si  $\Gamma$  contiene una  $\varepsilon(\Gamma)$ -bipartición no singular, entonces*

$$a(\Gamma) \leq \hat{a}(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

**Proposición 9.** [26] *Sea  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$  el producto cartesiano de los grafos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ ,*

$$(i) \quad a(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \leq \min\{a(\Gamma_1)\hat{a}(\Gamma_2), a(\Gamma_2)\hat{a}(\Gamma_1)\},$$

$$(ii) \quad \hat{a}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \leq \hat{a}(\Gamma_1)\hat{a}(\Gamma_2).$$

Es conocida la importancia del segundo menor autovalor de la matriz laplaciana de un grafo debido a la gran cantidad de información que contiene en relación con la estructura del grafo. Este autovalor, frecuentemente llamado *conectividad algebraica*, permite obtener cotas tensas para importantes invariantes de un grafo que son muy difíciles de calcular.

La conectividad algebraica de  $\Gamma$ ,  $\mu$ , satisface la siguiente igualdad mostrada por Fiedler en [15].

$$\mu = 2n \min \left\{ \frac{\sum_{v_i \sim v_j} (w_i - w_j)^2}{\sum_{v_i \in V} \sum_{v_j \in V} (w_i - w_j)^2} : w \neq \alpha \mathbf{j} \text{ para } \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad (1.5)$$

donde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $\mathbf{j} = (1, 1, \dots, 1)$  y  $w \in \mathbb{R}^n$ .

Con el siguiente resultado mostramos una relación entre la conectividad algebraica de un grafo y su número de  $k$ -alianza defensiva.

**Teorema 10.** *Para todo grafo conexo  $\Gamma$  de orden  $n$  y conectividad algebraica  $\mu$ ,*

$$a_k(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n(\mu + k + 1)}{n + \mu} \right\rceil.$$

*Demostración.* Si  $S$  denota una  $k$ -alianza defensiva en  $\Gamma$ , entonces

$$\delta_{\bar{S}}(v) + k \leq |S| - 1, \quad \forall v \in S. \quad (1.6)$$

De (1.5), tomando  $w \in \mathbb{R}^n$  definido como

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in S; \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

se obtiene

$$\mu \leq \frac{n \sum_{v \in S} \delta_{\bar{S}}(v)}{|S|(n - |S|)}. \quad (1.7)$$

Así, de (1.6) y (1.7) se obtiene

$$\mu \leq \frac{n(|S| - k - 1)}{n - |S|}. \quad (1.8)$$

Por lo tanto, resolviendo (1.8) para  $|S|$ , y considerando que es un entero se obtiene la cota para  $a_k(\Gamma)$ .  $\square$

La cota anterior es tensa. Nótese que si  $\Gamma = K_n$ , entonces la conectividad algebraica  $\mu = n$  y por lo tanto,  $a_k(K_n) = \lceil \frac{n+k+1}{2} \rceil$ . Además, si  $\Gamma$  es el icosaedro,  $a_{-1}(\Gamma) = 3$ ; en este caso  $n = 12$  y  $\mu = 5 - \sqrt{5}$  por lo que el teorema anterior conduce a  $a_{-1}(\Gamma) \geq 3$ .

**Teorema 11.** *Para todo grafo conexo  $\Gamma$  de orden  $n$ , grado máximo  $\Delta$  y conectividad algebraica  $\mu$ ,*

$$a_k(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n(\mu - \lfloor \frac{\Delta-k}{2} \rfloor)}{\mu} \right\rceil.$$

*Demostración.* Si  $S$  denota una  $k$ -alianza defensiva en  $\Gamma$ , entonces

$$\Delta \geq \delta(v) \geq 2\delta_{\bar{S}}(v) + k, \quad \forall v \in S. \quad (1.9)$$

De ahí que

$$\left\lfloor \frac{\Delta - k}{2} \right\rfloor \geq \delta_{\bar{S}}(v), \quad \forall v \in S. \quad (1.10)$$

Así, de (1.7) y (1.10) se obtiene el resultado.  $\square$

La cota anterior es tensa. Se alcanza, por ejemplo, en el grafo completo  $\Gamma = K_n$  y para  $k = 0$  en el grafo de Petersen y en el 3-cubo.

La longitud del menor ciclo de un grafo  $\Gamma$  recibe el nombre de *cuello* de  $\Gamma$ , y se denota  $girth(\Gamma)$ . En [26] se obtuvo el siguiente resultado que relaciona el cuello de un grafo regular de grado pequeño con su número de alianza defensiva y su número de alianza defensiva fuerte.

**Lema 12.** [26] *Para todo grafo  $\Gamma$ ,*

- (i) *si  $\Gamma$  es 3-regular, entonces  $a(\Gamma) = 2$  y  $\hat{a}(\Gamma) = girth(\Gamma)$ ,*
- (ii) *si  $\Gamma$  es 4-regular, entonces  $a(\Gamma) = \hat{a}(\Gamma) = girth(\Gamma)$ ,*
- (iii) *si  $\Gamma$  es 5-regular, entonces  $a(\Gamma) = girth(\Gamma)$ .*

Como consecuencia de los resultados anteriores se obtiene una interesante relación entre el cuello y la conectividad algebraica de un grafo regular de grado pequeño.

**Teorema 13.** *Para todo grafo conexo  $\Gamma$  de orden  $n$  y conectividad algebraica  $\mu$ ,*

- (i) *si  $\Gamma$  es 3-regular, entonces  $girth(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n(\mu-1)}{\mu} \right\rceil$ ,*
- (ii) *si  $\Gamma$  es 4-regular, entonces  $girth(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n(\mu-2)}{\mu} \right\rceil$ ,*

(iii) si  $\Gamma$  es 5-regular, entonces  $\text{girth}(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n\mu}{n+\mu} \right\rceil$ .

*Demostración.* El resultado es consecuencia directa del Teorema 10, Teorema 11 y Lema 12.  $\square$

Para comprobar la efectividad de las cotas anteriores vamos a considerar los siguientes ejemplos en los cuales las cotas anteriores coinciden con los valores exactos del cuello. Si  $\Gamma$  es el grafo de Petersen,  $\delta = 3$ ,  $n = 10$  y  $\mu = 2$ , entonces se obtiene que  $\text{girth}(\Gamma) \geq 5$ . Si  $\Gamma = K_{2,2,2}$ ,  $\delta = 4$ ,  $n = 6$  y  $\mu = 4$ , entonces se obtiene  $\text{girth}(\Gamma) \geq 3$ . Si  $\Gamma$  es el icosaedro,  $\delta = 5$ ,  $n = 12$  y  $\mu = 5 - \sqrt{5}$ , entonces se obtiene que  $\text{girth}(\Gamma) \geq 3$ .

### 1.2.1. Alianzas defensivas y grafo línea

En esta sección iniciamos el estudio de las propiedades matemáticas de las alianzas del grafo línea  $\mathcal{L}(\Gamma) = (V_l, E_l)$  de un grafo simple  $\Gamma$ . Para el caso regular, o bipartito semirregular, damos el valor exacto del número de  $k$ -alianza defensiva de  $\mathcal{L}(\Gamma)$  y, para el caso general, obtenemos cotas tensas.

El grado de un vértice  $e = \{u, v\} \in V_l$  es  $\delta(e) = \delta(u) + \delta(v) - 2$ . Si la secuencia de grados de  $\Gamma$  es  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$ , entonces el grado máximo de  $\mathcal{L}(\Gamma)$ ,  $\Delta_l$ , está acotado por

$$\Delta_l \leq \delta_1 + \delta_2 - 2 \quad (1.11)$$

y el grado mínimo de  $\mathcal{L}(\Gamma)$ ,  $\delta_l$ , está acotado por

$$\delta_l \geq \delta_n + \delta_{n-1} - 2. \quad (1.12)$$

**Teorema 14.** Para todo grafo  $\Gamma$  de grado máximo  $\delta_1$ , y para todo  $k \in \{2(1 - \delta_1), \dots, 0\}$ ,

$$a_k(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq \delta_1 + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil.$$

*Demostración.* Supongamos que  $k$  es par. Sea  $v \in V(\Gamma)$  un vértice de grado máximo en  $\Gamma$  y  $S_v = \{e \in E : v \in e\}$ . Sea  $Y_k \subset S_v$  tal que  $|Y_k| = \frac{k}{2}$  y sea  $X_k = S_v - Y_k$ . Así,  $\langle S_v \rangle \cong K_{\delta_1}$  y, como consecuencia,

$$\delta_{X_k}(e) = \delta_1 - 1 + \frac{k}{2} \geq \delta_2 - 1 + \frac{k}{2} \geq \delta_{\bar{X}_k}(e) + k, \quad \forall e \in X_k.$$

Por tanto,  $X_k \subset V_l$  es una  $k$ -alianza defensiva global en  $\mathcal{L}(\Gamma)$ . Para  $k$  par tenemos que  $a_k(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq \delta_1 + \lceil \frac{k}{2} \rceil$ . Además, si  $k$  es impar, entonces  $a_k(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq a_{k+1}(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq \delta_1 + \lceil \frac{k+1}{2} \rceil = \delta_1 + \lceil \frac{k}{2} \rceil$ .  $\square$

Una ventaja de aplicar la cota anterior es que se requiere del conocimiento de poca información acerca del grafo  $\Gamma$ ; solamente el grado máximo. La cota anterior es tensa, como veremos mas adelante, para todo grafo  $\delta$ -regular, y  $k \in \{2(1 - \delta_1), \dots, 0\}$ ,  $a_k(\mathcal{L}(\Gamma)) = \delta + \lceil \frac{k}{2} \rceil$ . No obstante, la cota anterior puede ser mejorada para el caso de un grafo no regular. La desventaja de tal mejora consiste en que necesitamos tener más información sobre el grafo.

**Teorema 15.** *Sea  $\Gamma$  un grafo simple cuya secuencia de grado es  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$ . Sea  $v \in V$  tal que  $\delta(v) = \delta_1$ , sea  $\delta_v = \max_{u:u \sim v} \{\delta(u)\}$  y sea  $\delta_* = \min_{v:\delta(v)=\delta_1} \{\delta_v\}$ . Para cada  $k \in \{2 - \delta_* - \delta_1, \dots, \delta_1 - \delta_*\}$ ,*

$$a_k(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq \left\lceil \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} \right\rceil.$$

*Además, para cada  $k \in \{2 - \delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_1 + \delta_2 - 2\}$ ,*

$$\left\lceil \frac{\delta_n + \delta_{n-1} + k}{2} \right\rceil \leq a_k(\mathcal{L}(\Gamma)).$$

*Demostración.* Sea  $v \in V$  un vértice de grado máximo  $\delta(v) = \delta_1$  tal que  $v$  sea adyacente a un vértice de grado  $\delta_*$ . Sea  $S_v = \{e \in E : v \in e\}$ . Supongamos que  $\delta_1 + \delta_* + k$  es par. Tomando  $S \subset S_v$  tal que  $|S| = \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2}$ , se obtiene  $\langle S \rangle \cong K_{\frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2}}$ . Así,  $\forall e \in S$ ,

$$\delta_S(e) - k = \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} - 1 - k \geq \delta_1 + \delta_* - 1 - \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} \geq \delta_{\bar{S}}(e).$$

Luego,  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva en  $\mathcal{L}(\Gamma)$  y, como consecuencia,  $a_k(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq \lceil \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} \rceil$ . Si  $\delta_1 + \delta_* + k$  es impar, entonces  $\delta_1 - \delta_* > k$ . Por lo tanto,  $a_k(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq a_{k+1}(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq \lceil \frac{\delta_1 + \delta_* + k + 1}{2} \rceil = \lceil \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} \rceil$ .

La cota inferior se obtiene del Teorema 1 y (1.12).  $\square$

**Corolario 16.** *Para todo grafo  $\delta$ -regular,  $\delta > 0$ , y para cada  $k \in \{2(1 - \delta), \dots, 0\}$ ,*

$$a_k(\mathcal{L}(\Gamma)) = \delta + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

**Corolario 17.** *Para todo grafo  $\Gamma$  bipartito semirregular de grados  $\delta_1 > \delta_2$ , y para cada  $k \in \{2 - \delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_1 - \delta_2\}$ ,*

$$a_k(\mathcal{L}(\Gamma)) = \left\lfloor \frac{\delta_1 + \delta_2 + k}{2} \right\rfloor.$$

En algunos casos se pueden obtener cotas para  $a_k(\mathcal{L}(\Gamma))$  a partir de los resultados obtenidos para  $a_k(\Gamma)$ . Por ejemplo, como consecuencia del Teorema 11 se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 18.** *Sea  $\Gamma$  un grafo conexo de medida  $m$  y secuencia de grados  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$ . Sea  $\mu_l$  la conectividad algebraica de  $\mathcal{L}(\Gamma)$ . Entonces,*

$$a_k(\mathcal{L}(\Gamma)) \geq \left\lfloor \frac{m (\mu_l - \lfloor \frac{\delta_1 + \delta_2 - 2 - k}{2} \rfloor)}{\mu_l} \right\rfloor.$$

P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi y S. T. Hedetniemi obtuvieron una caracterización de los grafos con número de alianza defensiva (fuerte) menor o igual que 3.

**Lema 19.** [26] *Para todo grafo  $\Gamma$ ,*

- (i)  $a(\Gamma) = 1$  si, y sólo si,  $\delta \leq 1$ .
- (ii)  $a(\Gamma) = 2$  si, y sólo si,  $\delta \geq 2$  y  $\Gamma$  tiene dos vértices adyacentes de grado a lo sumo 3.

(iii)  $a(\Gamma) = 3$  si, y sólo si,  $a(\Gamma) \neq 1$ ,  $a(\Gamma) \neq 2$  y  $\Gamma$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a uno de los siguientes grafos:

1.  $P_3$ , con vértices, en orden,  $u, v$  y  $w$ , donde  $\delta(u)$  y  $\delta(w)$  son a lo sumo 3, y  $\delta(v)$  es a lo sumo 5.
2.  $K_3$ , donde cada vértice tiene grado a lo sumo 5.

(iv)  $\hat{a}(\Gamma) = 1$  si, y sólo si,  $\Gamma$  tiene un vértice aislado.

(v)  $\hat{a}(\Gamma) = 2$  si, y sólo si,  $\delta \geq 1$  y  $\Gamma$  tiene dos vértices adyacentes de grado a lo sumo 2.

(vi)  $\hat{a}(\Gamma) = 3$  si, y sólo si,  $\hat{a}(\Gamma) \neq 1$ ,  $\hat{a}(\Gamma) \neq 2$  y  $\Gamma$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a uno de los siguientes grafos:

1.  $P_3$ , con vértices, en orden,  $u, v$  y  $w$ , donde  $\delta(u)$  y  $\delta(w)$  son a lo sumo 2, y  $\delta(v)$  es a lo sumo 4.
2.  $K_3$ , donde cada vértice tiene grado a lo sumo 4.

A continuación caracterizamos los grafos cuyos grafos línea tienen número de alianza defensiva menor que 4.

**Teorema 20.** Para todo grafo  $\Gamma$ ,

(i)  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) = 1$  si, y sólo si,  $\Gamma$  tiene una componente conexa isomorfa a  $K_2$  o  $\Gamma$  tiene un vértice de grado 1 adyacente a un vértice de grado 2.

(ii) Si  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) \neq 1$ , entonces  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) = 2$  si, y sólo si,  $\Gamma$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a  $P_3$  de vértices  $u, v, w$ , en este orden, tales que  $\delta(u) + \delta(v) \leq 5$  y  $\delta(v) + \delta(w) \leq 5$ .

(iii) Si  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) \neq 1$  y  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) \neq 2$ , entonces son equivalentes:

1.  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) = 3$ .

2. Se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (a)  $\Gamma$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a  $P_4$ , de vértices  $u, v, w, x$ , en este orden, tales que  $\delta(u) + \delta(v) \leq 5$ ,  $\delta(x) + \delta(w) \leq 5$  y  $\delta(v) + \delta(w) \leq 7$ .
- (b)  $\Gamma$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a  $K_3$ , de vértices  $\{u, v, w\}$  tales que  $\delta(u) + \delta(v) \leq 7$ ,  $\delta(u) + \delta(w) \leq 7$  y  $\delta(v) + \delta(w) \leq 7$ .
- (c)  $\Gamma$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a la estrella  $K_{1,3}$ , de vértices  $\{u, v, w, x\}$  y centro  $v$ , tales que  $\delta(v) + \delta(u) \leq 7$ ,  $\delta(v) + \delta(w) \leq 7$  y  $\delta(v) + \delta(x) \leq 7$ .

*Demostración.*

- (i) En  $\mathcal{L}(\Gamma)$  existen vértices de grado 0 si, y sólo si,  $\Gamma$  tiene alguna componente conexa isomorfa a  $K_2$ . Por otro lado, en  $\mathcal{L}(\Gamma)$  hay vértices de grado 1 si, y sólo si,  $\Gamma$  tiene algún vértice de grado 1 adyacente a un vértice de grado 2. Aplicando el Lema 19 se deduce el resultado.
- (ii) Supongamos que  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) \neq 1$ . Por el Lema 19,  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) = 2$  si y sólo si, existen dos vértices adyacentes  $a, b \in V_l$  tales que  $\delta(a) \leq 3$  y  $\delta(b) \leq 3$ . Además,  $a \sim b$  con  $\delta(a) \leq 3$  y  $\delta(b) \leq 3$  si, y sólo si, existen  $u, v, w \in V$  tales que  $a = \{u, v\}$  y  $b = \{v, w\}$ , con  $\delta(u) + \delta(v) - 2 = \delta(a) \leq 3$  y  $\delta(v) + \delta(w) - 2 = \delta(b) \leq 3$ .
- (iii) Supongamos que  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) \neq 1$  y  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) \neq 2$ .

El resultado se obtiene al aplicar el Lema 19 teniendo en cuenta los siguientes casos.

1.  $\mathcal{L}(\Gamma)$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a  $P_3$ , con vértices, en orden,  $a, b$  y  $c$ , donde  $\delta(a) \leq 3$ ,  $\delta(c) \leq 3$  y  $\delta(b) \leq 5$  si, y sólo si,  $\Gamma$  tiene un subgrafo isomorfo a  $P_4$ , de vértices  $u, v, w, x$ , en este orden, tales que las aristas de dicho subgrafo son  $a = \{u, v\}$ ,

$b = \{v, w\}$  y  $c = \{w, x\}$  con  $\delta(u) + \delta(v) \leq 5$ ,  $\delta(x) + \delta(w) \leq 5$  y  $\delta(v) + \delta(w) \leq 7$ .

2.  $\mathcal{L}(\Gamma)$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a  $K_3$  si, y sólo si,  $\Gamma$  tiene un subgrafo isomorfo a  $K_3$  o un subgrafo isomorfo a  $K_{1,3}$ . Además,  $a = \{u, v\}$  es una arista de  $G$  tal que  $\delta(a) \leq 5$  si, y sólo si,  $\delta(u) + \delta(v) \leq 7$ .

□

La prueba de la caracterización para las alianzas defensivas fuertes es completamente análoga a la anterior.

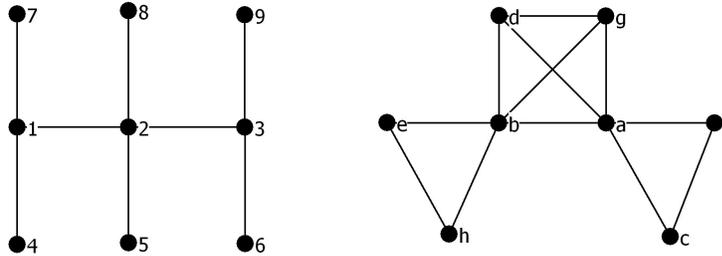
**Teorema 21.** *Para todo grafo  $\Gamma$ ,*

- (i)  $\hat{a}(\mathcal{L}(\Gamma)) = 1$  si, y sólo si,  $\Gamma$  tiene una componente conexa isomorfa a  $K_2$ .
- (ii) Si  $\hat{a}(\mathcal{L}(\Gamma)) \neq 1$ , entonces  $\hat{a}(\mathcal{L}(\Gamma)) = 2$  si, y sólo si,  $\Gamma$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a  $P_3$  de vértices  $u, v, w$ , en este orden, tales que  $\delta(u) + \delta(v) \leq 4$  y  $\delta(v) + \delta(w) \leq 4$ .
- (iii) Si  $\hat{a}(\mathcal{L}(\Gamma)) \neq 1$  y  $\hat{a}(\mathcal{L}(\Gamma)) \neq 2$ , entonces son equivalentes:
1.  $\hat{a}(\mathcal{L}(\Gamma)) = 3$ .
  2. Se cumple alguna de las siguientes condiciones:
    - (a)  $\Gamma$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a  $P_4$ , de vértices  $u, v, w, x$ , en este orden, tales que  $\delta(u) + \delta(v) \leq 4$ ,  $\delta(x) + \delta(w) \leq 4$  y  $\delta(v) + \delta(w) \leq 6$ .
    - (b)  $\Gamma$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a  $K_3$ , de vértices  $\{u, v, w\}$  tales que  $\delta(u) + \delta(v) \leq 6$ ,  $\delta(u) + \delta(w) \leq 6$  y  $\delta(v) + \delta(w) \leq 6$ .

- (c)  $\Gamma$  tiene un subgrafo inducido isomorfo a la estrella  $K_{1,3}$ , de vértices  $\{u, v, w, x\}$  y centro  $v$ , tales que  $\delta(v) + \delta(u) \leq 6$ ,  $\delta(v) + \delta(w) \leq 6$  y  $\delta(v) + \delta(x) \leq 6$ .

A continuación compararemos  $a(\Gamma)$  y  $a(\mathcal{L}(\Gamma))$ . Hay casos en los que  $a(\Gamma) = a(\mathcal{L}(\Gamma))$ . Un ejemplo trivial es  $\Gamma \cong C_k$  ( $\Gamma$  isomorfo a un ciclo de orden  $k$ ). Veamos algunos casos donde la igualdad no se cumple. Por ejemplo, en el caso del grafo impar  $\Gamma = O_5^1$ , tenemos  $a(\mathcal{L}(O_5)) = 5 \leq 6 = \text{girth}(O_5) = a(O_5)$ . En otros casos  $a(\Gamma) < a(\mathcal{L}(\Gamma))$ . Por ejemplo, si  $\Gamma$  es un árbol o  $\Gamma$  es un grafo que contiene exactamente un ciclo, con  $\Gamma \not\cong C_k$ , entonces  $1 = a(\Gamma) \leq a(\mathcal{L}(\Gamma))$ . En particular, si  $\Gamma \cong K_{1,n}$ ,  $n > 2$ , entonces  $a(\Gamma) = 1 < n - 1 = a(\mathcal{L}(\Gamma))$ .

Figura 1.3:  $\Gamma$  y su grafo línea  $\mathcal{L}(\Gamma)$



Definimos *conjunto característico* de  $S_l \subset V_l$  como

$$C_{S_l} := \{v \in V : v \in e, \text{ para algún } e \in S_l\}.$$

Por ejemplo, en el caso del grafo mostrado en la Figura 1.3,  $S_l = \{f, c\}$  es una alianza defensiva mínima en  $\mathcal{L}(\Gamma)$  y su conjunto característico,  $C_{S_l} =$

<sup>1</sup>Sea  $k$  un número natural mayor que 1. Sea  $X$  un conjunto de cardinalidad  $2k - 1$ . Los grafos impares  $O_k$  se definen como sigue: los vértices corresponden a los subconjuntos de  $X$  de cardinalidad  $k - 1$  y dos vértices son adyacentes si los correspondientes subconjuntos son disjuntos.

$\{1, 4, 7\}$ , es una alianza defensiva en  $\Gamma$ . Nótese que  $C_{S_l}$  contiene las alianzas defensivas  $S_1 = \{1, 4\}$ ,  $S_2 = \{1, 7\}$ ,  $S_3 = \{4\}$  y  $S_4 = \{7\}$ . Destacamos que hay casos en los que  $\mathcal{L}(\Gamma)$  no tiene alianzas defensivas mínimas tales que su conjunto característico sea una alianza defensiva en  $\Gamma$ .

**Teorema 22.** *Si existe una alianza defensiva de cardinal mínimo en  $\mathcal{L}(\Gamma)$ , tal que su conjunto característico es una alianza defensiva en  $\Gamma$ , entonces*

$$a(\Gamma) \leq a(\mathcal{L}(\Gamma)).$$

*Demostración.* Sea  $S_l \subset V_l$  una alianza defensiva de cardinal mínimo en  $\mathcal{L}(\Gamma)$ . Probaremos que el conjunto característico de  $S_l$ , denotado por  $C_{S_l}$ , contiene una alianza defensiva de cardinal menor o igual que  $|S_l|$ .

Si  $S_l$  es una alianza defensiva mínima en  $\mathcal{L}(\Gamma)$ , entonces el subgrafo  $\langle S_l \rangle$  es conexo y, por consiguiente, el subgrafo  $\langle C_{S_l} \rangle$  también es conexo. Por tanto,  $|C_{S_l}| \leq |S_l| + 1$ .

Sea  $v \in C_{S_l}$ . Si  $S' = C_{S_l} \setminus \{v\}$  es una alianza defensiva en  $\Gamma$ , entonces  $a(\Gamma) \leq a(\mathcal{L}(\Gamma))$ . Supongamos que  $S' = C_{S_l} \setminus \{v\}$  no es una alianza defensiva en  $\Gamma$ . En tal caso, existe  $u \in S'$  tal que

$$2\delta_{S'}(u) + 2 \leq \delta(u). \quad (1.13)$$

De  $\delta_{C_{S_l}}(u) = \delta_{S'}(u) + 1$  y (1.13) obtenemos

$$\delta(u) \geq 2\delta_{C_{S_l}}(u). \quad (1.14)$$

Usaremos (1.14) para demostrar que  $S'' = C_{S_l} \setminus \{u\}$  es una alianza defensiva.

Supongamos que  $w \in S''$  es un vértice adyacente a  $u$  y sea  $e = \{u, w\}$ . Como  $S_l$  es una alianza defensiva en  $\mathcal{L}(\Gamma)$ , se cumple  $2\delta_{S_l}(e) + 1 \geq \delta(e)$ . En consecuencia, usando  $\delta_{S_l}(e) = \delta_{C_{S_l}}(u) + \delta_{C_{S_l}}(w) - 2$  y  $\delta(e) = \delta(u) + \delta(w) - 2$ , obtenemos

$$2\delta_{C_{S_l}}(u) + 2\delta_{C_{S_l}}(w) - 1 \geq \delta(u) + \delta(w). \quad (1.15)$$

Combinando (1.14) y (1.15) obtenemos  $2\delta_{C_{S_l}}(w) - 1 \geq \delta(w)$ . Teniendo en cuenta  $\delta_{C_{S_l}}(w) = \delta_{S''}(w) + 1$  obtenemos  $2\delta_{S''}(w) + 1 \geq \delta(w)$ . Por otro lado, si  $w$  no es adyacente a  $u$ , entonces  $\delta_{S''}(w) = \delta_{C_{S_l}}(w)$ . Por lo tanto,  $\delta_{S''}(w) + 1 \geq \delta(w)$ . Así,  $S''$  es una alianza defensiva.  $\square$

Es cómodo deducir condiciones suficientes para que  $a(\Gamma) \leq a(\mathcal{L}(\Gamma))$  o  $a(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq a(\Gamma)$  a partir de los resultados obtenidos anteriormente. Por ejemplo, en [26] se muestra que  $a(\Gamma) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Por lo tanto, del Teorema 15, se deduce

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\delta_n + \delta_{n-1} - 1}{2} \right\rceil \Rightarrow a(\Gamma) \leq a(\mathcal{L}(\Gamma)).$$

En particular,

$$\frac{n}{2} < \delta_n \Rightarrow a(\Gamma) \leq a(\mathcal{L}(\Gamma)).$$

### 1.3. Alianzas defensivas globales

Para algunas familias de grafos se puede calcular el número de alianza defensiva global (fuerte) [19]:

- $\gamma_{-1}^a(K_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ ,
- $\gamma_0^a(K_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ ,
- $\gamma_{-1}^a(K_{1,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$ ,
- $\gamma_{-1}^a(K_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ ,  $r, s \geq 2$ ,
- $\gamma_0^a(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$ ,
- $\gamma_{-1}^a(C_n) = \gamma_0^a(C_n) = \gamma_0^a(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ ,  $n \geq 3$ ,
- $\gamma_{-1}^a(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + 2$ ,  $r, s \geq 1$ ,
- $\gamma_0^a(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 2$ ,  $r, s \geq 1$ .

Como veremos a continuación, el problema de determinar alianzas defensivas globales de cardinal mínimo es difícil de resolver.

**Problema de  $k$ -alianza defensiva global ( $k$ -AG):**

Dado: un grafo  $G = (V, E)$  y un entero positivo  $r \leq |V|$ .

Pregunta: ¿existe una  $k$ -alianza defensiva global en  $\Gamma$  de cardinalidad menor o igual que  $r$ ?

**Teorema 23.** [13]  $\forall k$ :  $k$ -AG es NP-completo.

**Teorema 24.** Sea  $S$  una  $k$ -alianza defensiva global de cardinal mínimo en  $\Gamma$ . Si  $W \subset S$  es un conjunto dominante en  $\Gamma$ , entonces para todo  $r \in \mathbb{Z}$  tal que  $0 \leq r \leq \gamma_k^a(\Gamma) - |W|$ ,

$$\gamma_{k-2r}^a(\Gamma) + r \leq \gamma_k^a(\Gamma).$$

*Demostración.* Tomemos  $X \subset S$  tal que  $|X| = r$ . Así, para todo  $v \in Y = S - X$ ,

$$\begin{aligned} \delta_Y(v) &= \delta_S(v) - \delta_X(v) \\ &\geq \delta_{\bar{S}}(v) + k - \delta_X(v) \\ &= \delta_{\bar{Y}}(v) + k - 2\delta_X(v) \\ &\geq \delta_{\bar{Y}}(v) + k - 2r. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $Y$  es una  $(k-2r)$ -alianza defensiva en  $\Gamma$ . Además, como  $W \subset Y$ ,  $Y$  es un conjunto dominante, como consecuencia,  $\gamma_{k-2r}^a(\Gamma) \leq \gamma_k^a(\Gamma) - r$ .  $\square$

Para el grafo completo de orden  $n$  se tiene

$$\begin{aligned} n &= \gamma_{n-1}^a(K_n) = \gamma_{n-2}^a(K_n) \\ &\geq \gamma_{n-3}^a(K_n) = \gamma_{n-4}^a(K_n) = n - 1 \\ &\dots \\ &\geq \gamma_{3-n}^a(K_n) = \gamma_{2-n}^a(K_n) = 2 \\ &\geq \gamma_{1-n}^a(K_n) = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo  $k \in \{1 - n, \dots, n - 1\}$ , y para cada  $r \in \{0, \dots, \frac{k+n-1}{2}\}$ ,

$$\gamma_{k-2r}^a(K_n) + r = \gamma_k^a(K_n). \quad (1.16)$$

Además, nótese que para todo  $k \in \{1 - n, \dots, n - 1\}$ ,  $\gamma_k^a(K_n) = \left\lceil \frac{n+k+1}{2} \right\rceil$ .

T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi y M. A. Henning obtuvieron en [19] que para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$ ,

$$\frac{\sqrt{4n+1}-1}{2} \leq \gamma_{-1}^a(\Gamma) \leq n - \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil$$

y

$$\sqrt{n} \leq \gamma_0^a(\Gamma) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor.$$

A continuación generalizamos los resultados anteriores a  $k$ -alianzas defensivas globales.

**Teorema 25.** *Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$ ,*

$$\frac{\sqrt{4n+k^2+k}}{2} \leq \gamma_k^a(\Gamma) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta-k}{2} \right\rfloor.$$

*Demostración.* Si  $\delta \leq k$ , entonces  $\gamma_k^a(\Gamma) \leq n \leq n - \left\lfloor \frac{\delta-k}{2} \right\rfloor$ . En caso contrario, consideremos un vértice  $u \in V$  tal que  $\delta(u) \geq \left\lfloor \frac{\delta+k}{2} \right\rfloor$ . Sea  $X \subset V$  el conjunto de vecinos de  $u$ , es decir,  $X = \{w \in V : w \sim u\}$ . Sea  $Y \subset X$  tal que  $|Y| = \left\lfloor \frac{\delta-k}{2} \right\rfloor$ . Bajo este supuesto el conjunto  $V - Y$  es una  $k$ -alianza defensiva global en  $\Gamma$ . Esto es,  $V - Y$  es un conjunto dominante y para cada vértice  $v \in V - Y$  se cumple  $\frac{\delta(v)-k}{2} \geq \left\lfloor \frac{\delta-k}{2} \right\rfloor \geq \delta_Y(v)$ . Por lo tanto,  $\gamma_k^a(\Gamma) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta-k}{2} \right\rfloor$ .

Por otro lado, sea  $S \subseteq V$  un conjunto dominante en  $\Gamma$ . Entonces,

$$n - |S| \leq \sum_{v \in S} \delta_{\bar{S}}(v). \quad (1.17)$$

Además, si  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva,

$$k|S| + \sum_{v \in S} \delta_{\bar{S}}(v) \leq \sum_{v \in S} \delta_S(v) \leq |S|(|S| - 1). \quad (1.18)$$

Así, resolviendo la inecuación

$$0 \leq |S|^2 - k|S| - n \quad (1.19)$$

se deduce la cota inferior.  $\square$

La cota superior es tensa, por ejemplo, se alcanza en el grafo completo  $\Gamma = K_n$  para todo  $k \in \{1 - n, \dots, n - 1\}$ . La cota inferior es tensa, por ejemplo, se alcanza en el 3-cubo  $\Gamma = Q_3$ , en los siguientes casos:  $2 \leq \gamma_{-3}^a(Q_3)$  y  $4 \leq \gamma_1(Q_3) = \gamma_0(Q_3)$ .

T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi y M. A. Henning en [19] obtuvieron que para todo grafo bipartito  $\Gamma$  de orden  $n$  y grado máximo  $\Delta$ ,

$$\gamma_{-1}^a(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{2n}{\Delta + 3} \right\rceil$$

y

$$\gamma_0^a(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{2n}{\Delta + 2} \right\rceil.$$

Con el siguiente resultado probamos que las cotas anteriores no son restrictivas al caso bipartito y además se generalizan para todo  $k$ .

**Teorema 26.** *Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$  y grado máximo  $\Delta$ ,*

$$\gamma_k^a(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{\Delta - k}{2} \right\rfloor + 1} \right\rceil.$$

*Demostración.* El resultado se obtiene de (1.10) y (1.17).  $\square$

La cota anterior es tensa. Por ejemplo, en el caso del grafo de Petersen la cota anterior conduce a valores exactos para todo  $k$ :  $3 \leq \gamma_{-3}^a(\Gamma)$ ,  $4 \leq \gamma_{-2}^a(\Gamma) = \gamma_{-1}^a(\Gamma)$ ,  $5 \leq \gamma_0^a(\Gamma) = \gamma_1^a(\Gamma)$  y  $10 \leq \gamma_2^a(\Gamma) = \gamma_3^a(\Gamma)$ . Para el grafo 3-cubo  $\Gamma = Q_3$ , el teorema anterior conduce a valores exactos de  $\gamma_k^a(Q_3)$ :  $2 \leq \gamma_{-3}^a(Q_3)$ ,  $4 \leq \gamma_0^a(Q_3) = \gamma_1^a(Q_3)$  y  $8 \leq \gamma_2^a(Q_3) = \gamma_3^a(Q_3)$ .

Como consecuencia del Teorema 26 se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 27.** Para todo grafo  $\Gamma$  de medida  $m$  y grados máximos  $\delta_1, \delta_2$ ,

$$\gamma_k^a(\mathcal{L}(\Gamma)) \geq \left\lceil \frac{m}{\left\lfloor \frac{\delta_1 + \delta_2 - 2 - k}{2} \right\rfloor + 1} \right\rceil.$$

La cota anterior se alcanza para  $k \in \{-3, -2, -1, 2, 3\}$  en el caso de el grafo bipartito completo  $\Gamma = K_{1,4}$ . Nótese que  $\mathcal{L}(K_{1,4}) = K_4$  y  $\gamma_3^a(K_4) = 1$ ,  $\gamma_{-2}^a(K_4) = \gamma_{-1}^a(K_4) = 2$ ,  $\gamma_2^a(K_4) = \gamma_3^a(K_4) = 4$ .

El *radio espectral* de un grafo es el mayor autovalor de su matriz de adyacencia. El siguiente resultado relaciona el radio espectral de un grafo con el número de  $k$ -alianza defensiva global.

**Teorema 28.** Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$  y radio espectral  $\lambda$ ,

$$\gamma_k^a(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n}{\lambda - k + 1} \right\rceil.$$

*Demostración.* Si  $\mathbf{A}$  denota la matriz de adyacencia de  $\Gamma$ , entonces

$$\frac{\langle \mathbf{A}w, w \rangle}{\langle w, w \rangle} \leq \lambda, \quad \forall w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (1.20)$$

Así, para  $S \subseteq V$ , tomando  $w$  como en la demostración del Teorema 10, se obtiene

$$\sum_{v \in S} \delta_S(v) \leq \lambda |S|. \quad (1.21)$$

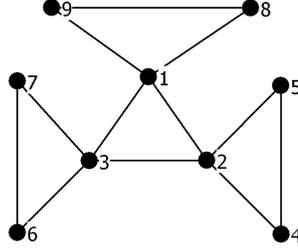
Si  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva global en  $\Gamma$ ,

$$k|S| + (n - |S|) \leq k|S| + \sum_{v \in S} \delta_{\bar{S}}(v) \leq \sum_{v \in S} \delta_S(v) \quad (1.22)$$

De (1.21) y (1.22), considerando que  $|S|$  es un entero, se obtiene el resultado.  $\square$

La cota anterior es tensa. Si  $\Gamma = P_2 \times P_3$ ,  $\gamma_{-2}^a(\Gamma) = \gamma_{-1}^a(\Gamma) = 2$ ; en este caso  $n = 6$  y  $\lambda = 1 + \sqrt{2}$  por lo que el teorema anterior conduce a

Figura 1.4:



$\gamma_{-2}^a(\Gamma) = \gamma_{-1}^a(\Gamma) \geq 2$ . Además, se alcanza en el grafo mostrado en la Figura 1.4; en este caso  $\lambda = 3$  y el teorema anterior conduce a  $\gamma_0^a(\Gamma) \geq 3$ . Nótese que el conjunto  $S = \{1, 2, 3\}$  es una 0-alianza defensiva global de cardinal mínimo.

Es conocido que el radio espectral,  $\lambda_l$ , del grafo línea de  $\Gamma$  está acotado por la secuencia de grados de  $\Gamma$ ,  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$  [24]:

$$\lambda_l \leq \sqrt{(\delta_1 + \delta_2 - 2)(\delta_1 + \delta_3 - 2)}. \quad (1.23)$$

En particular, si en  $\Gamma$  existen dos vértices no adyacentes cuyos grados son  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , entonces

$$\lambda_l \leq \delta_1 + \delta_2 - 2. \quad (1.24)$$

Como consecuencia del Teorema 28 y las relaciones anteriores se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 29.** *Para todo grafo  $\Gamma$  de medida  $m$  y secuencia de grados  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$ ,*

$$\gamma_k^a(\mathcal{L}(\Gamma)) \geq \left\lceil \frac{m}{\sqrt{(\delta_1 + \delta_2 - 2)(\delta_1 + \delta_3 - 2)} - k + 1} \right\rceil.$$

*Además, si en  $\Gamma$  existen dos vértices no adyacentes cuyos grados son  $\delta_1$  y  $\delta_2$ , entonces*

$$\gamma_k^a(\mathcal{L}(\Gamma)) \geq \left\lceil \frac{m}{\delta_1 + \delta_2 - k - 1} \right\rceil.$$

### 1.3.1. Alianzas defensivas globales en grafos cúbicos

En el caso de los grafos cúbicos<sup>2</sup>  $\gamma(\Gamma) = \gamma_{-3}^a(\Gamma) \leq \gamma_{-2}^a(\Gamma) = \gamma_{-1}^a(\Gamma) \leq \gamma_0^a(\Gamma) = \gamma_1^a(\Gamma) \leq \gamma_2^a(\Gamma) = \gamma_3^a(\Gamma) = n$ . Así, en este caso sólo es necesario estudiar,  $\gamma_{-1}^a(\Gamma)$  y  $\gamma_0^a(\Gamma)$ .

**Teorema 30.** *Para todo grafo cúbico  $\Gamma$  de orden  $n$  y número de dominación  $\gamma(\Gamma)$ ,*

$$\gamma_{-1}^a(\Gamma) \leq 2\gamma(\Gamma).$$

*Demostración.* Sea  $S$  un conjunto dominante de cardinal mínimo en  $\Gamma$ . Sea  $X \subseteq S$  el conjunto compuesto por todo  $v_i \in S$  tal que  $\delta_S(v_i) = 0$ . Para cada  $v_i \in X$  tomemos un vértice  $u_i \in \bar{S}$  tal que  $u_i \sim v_i$ . Sea  $Y \in \bar{S}$  definido como  $Y = \cup_{v_i \in X} \{u_i\}$ . Entonces tenemos que  $|Y| \leq \gamma(\Gamma)$  y el conjunto  $S \cup Y$  es una (-1)-alianza defensiva global en  $\Gamma$ .  $\square$

La cota es tensa, por ejemplo, en el caso de el grafo 3-cubo se tiene que  $\gamma_{-1}^a(Q_3) = 2\gamma(Q_3) = 4$ .

Un conjunto  $S \subset V$  es *dominante total* si  $\delta_S(v) \geq 1, \forall v \in V$ . El *número de dominación total*,  $\gamma_t(\Gamma)$ , es el mínimo cardinal de un conjunto dominante total [6]. Nótese que si  $\Gamma$  es un grafo cúbico, entonces

$$\gamma_{-1}^a(\Gamma) = \gamma_t(\Gamma). \quad (1.25)$$

E. J. Cockayne, R. Dawes y S. T. Hedetniemi obtuvieron en [6] que si  $\Gamma$  es un grafo conexo de orden  $n \geq 3$ , entonces

$$\gamma_t(\Gamma) \leq \frac{2n}{3}. \quad (1.26)$$

Además, por Teorema 26 se tiene

$$\frac{n}{3} \leq \gamma_{-1}^a(\Gamma) \quad \text{y} \quad \frac{n}{2} \leq \gamma_0^a(\Gamma). \quad (1.27)$$

<sup>2</sup>Un grafo cúbico es a un grafo 3-regular.

## 1.4. Alianzas defensivas en grafos planares

En algunas aplicaciones prácticas de las alianzas, los grafos que intervienen son planares [27]. Motivados por dicha razón, y por no existir resultados previos nos propusimos iniciar el estudio de las alianzas en grafos planares.

Es conocido que la medida de un grafo planar  $\Gamma$  de cuello al menos  $g$ , con  $3 \leq g < \infty$ , y orden  $n$  está acotada por

$$m \leq \frac{g}{g-2}(n-2). \quad (1.28)$$

En particular para todo grafo planar, incluidos los árboles de orden mayor o igual que 3, se cumple  $m \leq 3(n-2)$  y si el grafo planar es libre de triángulos se cumple  $m \leq 2(n-2)$ . Estas desigualdades nos permitirán obtener algunos resultados en este apartado.

**Teorema 31.** *Sea  $\Gamma$  un grafo de orden  $n$ . Sea  $S$  una  $k$ -alianza defensiva global en  $\Gamma$  tal que el subgrafo  $\langle S \rangle$  es planar.*

- (i) *Si  $n > 2(2-k)$ , entonces  $|S| \geq \lceil \frac{n+12}{7-k} \rceil$ .*
- (ii) *Si  $n > 2(2-k)$  y  $\langle S \rangle$  es un grafo libre de triángulos, entonces  $|S| \geq \lceil \frac{n+8}{5-k} \rceil$ .*

*Demostración.*

- (i) Si  $|S| \leq 2$ , para cada  $v \in S$  se tiene que  $\delta_{\bar{S}}(v) \leq 1-k$ . Así,  $n \leq 2(2-k)$ . Por lo tanto,  $n > 2(2-k) \Rightarrow |S| > 2$ .

Como  $\langle S \rangle$  es planar y  $|S| > 2$ , la medida de  $\langle S \rangle$  está acotada por

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in S} \delta_S(v) \leq 3(|S| - 2). \quad (1.29)$$

El resultado se obtiene de (1.22) y (1.29), considerando que  $|S|$  es un entero.

(ii) Si  $\langle S \rangle$  es libre de triángulos, entonces

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in S} \delta_S(v) \leq 2(|S| - 2). \quad (1.30)$$

El resultado se obtiene a partir de (1.22) y (1.30), considerando que  $|S|$  es un entero.

□

**Corolario 32.** *Sea  $\Gamma$  un grafo planar de orden  $n$ .*

- *Si  $n > 2(2 - k)$ , entonces  $\gamma_k^a(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n+12}{7-k} \right\rceil$ .*
- *Si  $n > 2(2 - k)$  y  $\Gamma$  es un grafo libre de triángulos, entonces  $\gamma_k^a(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n+8}{5-k} \right\rceil$ .*

Las cotas anteriores son tensas. En el caso del grafo mostrado en la Figura 1.4, el conjunto  $S = \{1, 2, 3\}$  es una  $k$ -alianza defensiva global de cardinal mínimo para  $k = -2$ ,  $k = -1$  y  $k = 0$ , y el primer resultado del Corolario 32 conduce a  $\gamma_k^a(\Gamma) \geq 3$ . Además, si  $\Gamma = Q_3$ , el grafo 3-cubo, el segundo resultado del Corolario 32 conduce a valores exactos de  $\gamma_k^a(Q_3)$  en los siguientes caso:  $2 \leq \gamma_{-3}^a(Q_3)$ ,  $4 \leq \gamma_0^a(Q_3) = \gamma_1^a(Q_3)$  y  $8 \leq \gamma_3^a(Q_3)$ .

**Teorema 33.** *Sea  $\Gamma$  un grafo de orden  $n$ . Sea  $S$  una  $k$ -alianza defensiva global en  $\Gamma$  tal que el subgrafo  $\langle S \rangle$  sea conexo y planar con  $f$  caras. Entonces,*

$$|S| \geq \left\lceil \frac{n - 2f + 4}{3 - k} \right\rceil.$$

*Demostración.* De la fórmula de Euler,  $\sum_{v \in S} \delta_S(v) = 2(|S| + f - 2)$ , y (1.22) se obtiene el resultado. □

Como vimos antes, en el caso del grafo mostrado en la Figura 1.4, el conjunto  $S = \{1, 2, 3\}$  es una  $k$ -alianza defensiva global minimal para  $k = -1$ ,  $k = 0$  y  $k = 2$ . Además,  $\langle S \rangle$  tiene dos caras. En esta caso, el Teorema 33 conduce a  $|S| \geq 3$ .

**Teorema 34.** *Sea  $\Gamma$  un grafo de orden  $n$ . Sea  $S$  una  $k$ -alianza defensiva global en  $\Gamma$  tal que  $|S| > 2$ . Si  $\langle S \rangle$  es planar y su grado mínimo es al menos  $p$ , entonces*

$$|S| \geq \left\lceil \frac{(k+p-6) + \sqrt{(k+p-6)^2 + 4(12+n)}}{2} \right\rceil,$$

además, si  $\langle S \rangle$  es un grafo libre de triángulos, entonces

$$|S| \geq \left\lceil \frac{(k+p-4) + \sqrt{(k+p-4)^2 + 4(8+n)}}{2} \right\rceil.$$

*Demostración.* Como  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva en  $\Gamma$ , entonces

$$\sum_{v \in S} \delta_S(v) \leq |S|^2 - (k+1)|S|. \quad (1.31)$$

Además, como la  $k$ -alianza  $S$  es global, por (1.17) y (1.31) se tiene

$$n - |S| \leq |S|^2 - (k+1)|S|. \quad (1.32)$$

Como  $\langle S \rangle$  es planar y su grado mínimo es al menos  $p$ , su medida está acotada por

$$\frac{|S|p}{2} \leq \frac{1}{2} \sum_{v \in S} \delta_S(v) \leq 3(|S| - 2). \quad (1.33)$$

Así, por (1.32) y (1.33) se deduce el primer resultado. El segundo resultado se deduce análogamente al anterior, en este caso se debe tener presente que si  $\langle S \rangle$  es libre de triángulos y su grado mínimo es al menos  $p$ , entonces su medida está acotada por  $\frac{|S|p}{2} \leq \frac{1}{2} \sum_{v \in S} \delta_S(v) \leq 2(|S| - 2)$ .  $\square$

Las cotas anteriores son tensas. Por ejemplo, en el caso del octaedro tomemos el conjunto  $S$  formado por tres vértices cuyo subgrafo inducido  $\langle S \rangle$  es isomorfo a un ciclo. En este caso,  $\langle S \rangle$  es 2-conexo,  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva global para  $k \in \{-2, -1, 0\}$ , y el Teorema 99 conduce a  $|S| \geq 3$ . La

segunda cota es tensa, por ejemplo, se alcanza para el grafo mostrado en la Figura 1.8. En este caso, el subgrafo inducido por el conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  es planar, 2-conexo y  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva global para  $k = -1$  y  $k = 0$ .

### 1.4.1. Alianzas defensivas en árboles

En [19] se obtuvieron los resultados siguientes para el número de alianza defensiva global y para el número de alianza defensiva global fuerte en árboles.

**Teorema 35.** [19]

- (i) Si  $T$  es un árbol de orden  $n \geq 4$ , entonces  $\gamma_{-1}^a(T) \leq \frac{3n}{5}$ .
- (ii) Si  $T$  es un árbol de orden  $n \geq 3$ , entonces  $\gamma_0^a(T) \leq \frac{3n}{4}$ .

Además, en [21] se caracterizan los árboles donde el número de dominación  $\gamma(T)$  es igual al número de alianza defensiva fuerte  $\gamma_0^a(T)$ . En algunos casos es cómodo calcular  $\gamma_k^a(\Gamma)$ . Por ejemplo, para la doble estrella,  $S_{r,s}$ , se tiene que:  $\gamma_k^a(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r+k}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s+k}{2} \rfloor + 2$ ,  $r, s \geq 1$ , y para el camino de orden  $n$ ,  $P_n$ , se tiene que:  $\gamma_1^a(P_n) = n$ .

Mustapha Chellali y Teresa W. Haynes en [4] obtuvieron el siguiente resultado.

**Teorema 36.** [4] Sea  $T$  un árbol y  $\alpha_0(\Gamma)$  el máximo cardinal de un conjunto independiente de  $\Gamma$ . Entonces,

- (i)  $\gamma_{-1}^a(T) \leq \alpha_0(\Gamma)$ .
- (ii)  $\gamma_0^a(T) \leq \frac{3\alpha_0(\Gamma)-1}{2}$ .

A continuación estudiaremos las  $k$ -alianzas defensivas globales en árboles teniendo en cuenta el número de componentes conexas del subgrafo inducido por este tipo de alianzas.

**Teorema 37.** *Sea  $T$  un árbol de orden  $n$ . Sea  $S$  una  $k$ -alianza defensiva global en  $T$  tal que el subgrafo  $\langle S \rangle$  tenga  $c$  componentes conexas. Entonces*

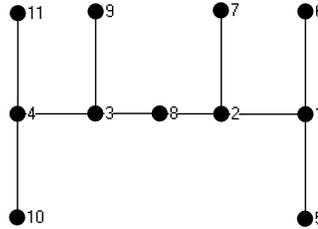
$$|S| \geq \left\lceil \frac{n + 2c}{3 - k} \right\rceil.$$

*Demostración.* Como el subgrafo  $\langle S \rangle$  es un bosque con  $c$  componentes conexas, entonces

$$\sum_{v \in S} \delta_S(v) = 2(|S| - c). \quad (1.34)$$

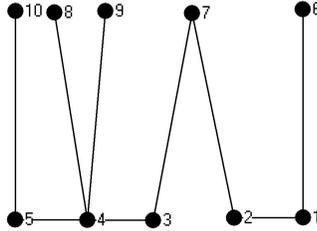
La cota para  $|S|$  se obtiene de (1.22) y (1.34), considerando que  $|S|$  es un entero.  $\square$

Figura 1.5:



La cota anterior se alcanza, por ejemplo, para el grafo mostrado en la Figura 1.5, donde  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  es una  $(-1)$ -alianza defensiva global y  $\langle S \rangle$  tiene dos componentes conexas. Además, la cota se alcanza en el caso del grafo mostrado en la Figura 1.6, donde  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  es una  $0$ -alianza defensiva global y  $\langle S \rangle$  tiene dos componentes conexas.

Figura 1.6:



**Corolario 38.** Para todo árbol  $T$  de orden  $n$ ,

$$\gamma_k^a(T) \geq \left\lceil \frac{n+2}{3-k} \right\rceil.$$

La cota anterior se alcanza para  $k \in \{-4, -3, -2, 0, 1\}$  en el caso de  $\Gamma = K_{1,4}$ . Como caso particular del corolario anterior se deducen los siguientes resultados obtenidos en [19]:

$$\gamma_{-1}^a(T) \geq \left\lceil \frac{n+2}{4} \right\rceil \quad \text{and} \quad \gamma_0^a(T) \geq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil.$$

## 1.5. Alianzas defensivas globales conexas

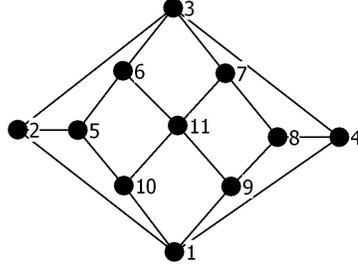
Es de suponer que el “poder” de una determinada alianza es mayor cuando el subgrafo inducido por la alianza es conexo que cuando no lo es. Motivados por esta idea, en esta memoria iniciamos el estudio de las alianzas conexas. Diremos que una  $k$ -alianza (defensiva, ofensiva o dual)  $S$  es *conexa* si el subgrafo inducido por  $S$ ,  $\langle S \rangle$ , es conexo.

Es evidente que el subgrafo inducido por una  $k$ -alianza defensiva de cardinal mínimo es siempre conexo. Pero existen  $k$ -alianzas defensivas globales de cardinal mínimo cuyo subgrafo inducido no lo es. El *número de  $k$ -alianza defensiva global conexa* será denotado por  $\gamma_k^{ca}(\Gamma)$ . Claramente, se cumple la

siguiente relación entre  $\gamma_k^{ca}(\Gamma)$  y  $\gamma_k^a(\Gamma)$ ,

$$\gamma_k^{ca}(\Gamma) \geq \gamma_k^a(\Gamma). \quad (1.35)$$

Figura 1.7:



En el caso de  $\Gamma = Q_3$ , Figura 1.1, se cumple que  $\gamma_k^{ca}(\Gamma) = \gamma_k^a(\Gamma)$ :  $\gamma_{-1}^a(Q_3) = \gamma_0^a(Q_3) = \gamma_{-1}^{ca}(Q_3) = \gamma_0^{ca}(Q_3) = 4$ . Existen grafos donde la desigualdad (1.35) es estricta. Por ejemplo, en el grafo de la Figura 1.5 se tiene que  $\gamma_{-1}^{ca}(\Gamma) = 5 > 4 = \gamma_{-1}^a(\Gamma)$ , y en el grafo mostrado en la Figura 1.6 se tiene que  $\gamma_0^{ca}(\Gamma) = 6 > 5 = \gamma_0^a(\Gamma)$ . En el grafo de Herschel, mostrado en la Figura 1.7, el conjunto de vértices  $S = \{2, 5, 8, 9\}$  es una  $(-1)$ -alianza defensiva global no conexa de cardinal mínimo:  $\gamma_{-1}^a(\Gamma) = 4$ . Además, el conjunto de vértices  $S = \{2, 3, 6, 9, 11\}$  es una  $(-1)$ -alianza defensiva global conexa de cardinal mínimo:  $\gamma_{-1}^{ca}(\Gamma) = 5$ .

**Teorema 39.** Para todo grafo conexo  $\Gamma$  de diámetro  $D(\Gamma)$ ,

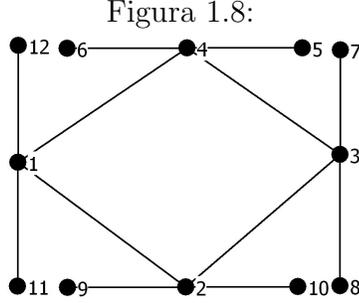
$$(i) \quad \gamma_k^{ca}(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{\sqrt{4(D(\Gamma)+n-1)+(1-k)^2+(k-1)}}{2} \right\rceil.$$

$$(ii) \quad \gamma_k^{ca}(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n+D(\Gamma)-1}{\left\lfloor \frac{\Delta-k}{2} \right\rfloor + 2} \right\rceil.$$

*Demostración.* Si  $S$  es un conjunto dominante y  $\langle S \rangle$  es conexo, entonces  $D(\Gamma) \leq D(\langle S \rangle) + 2$ . Así,

$$D(\Gamma) \leq |S| + 1. \quad (1.36)$$

Además, si  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva global en  $\Gamma$ , entonces  $|S|$  satisface (1.19). El primer resultado se deduce de (1.19) y (1.36). Como consecuencia directa de (1.10), (1.17) y (1.36) se obtiene el segundo resultado.  $\square$



Las cotas del Teorema 39 son tensas. Por ejemplo, ambas se alcanzan para  $k \in \{-2, -1, 0\}$  en el grafo de la Figure 1.8. En tal caso, ambas cotas conducen a  $\gamma_k^{ca}(\Gamma) \geq 3$ . Además, ambas cotas conducen a valores exactos de  $\gamma_k^{ca}(K_{3,3})$  en los siguientes casos:  $2 \leq \gamma_{-3}^{ca}(K_{3,3}) = \gamma_{-2}^{ca}(K_{3,3}) = \gamma_{-1}^{ca}(K_{3,3})$ . Además, nótese que la cota (ii) conduce a valores exactos de  $\gamma_k^{ca}(Q_3)$  en los casos  $4 \leq \gamma_0^{ca}(Q_3) = \gamma_1^{ca}(Q_3)$ , mientras que la cota (i) sólo conduce a  $3 \leq \gamma_0^a(Q_3)$  y  $3 \leq \gamma_1^a(Q_3)$ .

A partir del Teorema 39, y teniendo en cuenta que  $D(\Gamma) - 1 \leq D(\mathcal{L}(\Gamma))$ , se obtienen los siguientes resultados para el número de  $k$ -alianza defensiva global del grafo línea de  $\Gamma$  en termino de algunos parámetros de  $\Gamma$ .

**Corolario 40.** *Para todo grafo conexo  $\Gamma$  de medida  $m$ , diámetro  $D(\Gamma)$ , y grados máximos  $\delta_1 \geq \delta_2$ ,*

- $\gamma_k^{ca}(\mathcal{L}(\Gamma)) \geq \left\lceil \frac{\sqrt{4(D(\Gamma)+m-2)+(1-k)^2}-(1-k)}{2} \right\rceil$ .
- $\gamma_k^{ca}(\mathcal{L}(\Gamma)) \geq \left\lceil \frac{2(m+D(\Gamma)-2)}{\delta_1+\delta_2-k+1} \right\rceil$ .



# Capítulo 2

## Alianzas ofensivas

### Resumen

Estudiamos las principales propiedades de las  $k$ -alianzas ofensivas y de las  $k$ -alianzas ofensivas globales. Prestamos especial interés en el número de  $k$ -alianza ofensiva (global) y su relación con otros parámetros de un grafo. En general, obtenemos cotas tensas para dicho parámetro, particularizando en el caso de grafos cúbicos y de grafos planares. En este capítulo, además, iniciamos el estudio de las  $k$ -alianzas independientes.

## 2.1. Definiciones y propiedades básicas

La *frontera* de un conjunto  $S \subset V(\Gamma)$ , denotada por  $\partial(S)$ , se define como

$$\partial(S) := \bigcup_{v \in S} N_{\bar{S}}(v).$$

Un conjunto no vacío  $S \subset V$  es una  $k$ -alianza ofensiva en  $\Gamma = (V, E)$ ,  $-\Delta + 2 < k \leq \Delta$ , si se cumple

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k, \forall v \in \partial(S). \quad (2.1)$$

Llamaremos *condición de  $k$ -alianza ofensiva* a la relación (2.1). Si para un vértice  $v \in S$  se cumple la relación (2.1), diremos que  $v$  cumple la *condición de  $k$ -alianza ofensiva en  $S$* . Alternativamente, una  $k$ -alianza ofensiva en  $\Gamma$  se define como un conjunto  $S \subset V$  tal que

$$2\delta_S(v) \geq \delta(v) + k, \forall v \in \partial(S), \quad (2.2)$$

o bien

$$\delta(v) \geq 2\delta_{\bar{S}}(v) + k, \forall v \in \partial(S). \quad (2.3)$$

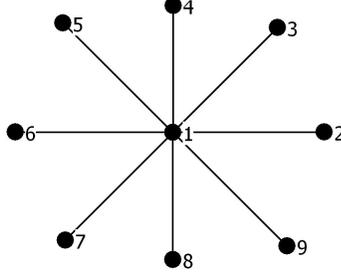
Una 1-alianza ofensiva es conocida como *alianza ofensiva*, y una 2-alianza ofensiva es conocida como *alianza ofensiva fuerte* [10, 26].

El *número de  $k$ -alianza ofensiva* de  $\Gamma$  será denotado por  $a_k^o(\Gamma)$ . Como en el caso de las  $k$ -alianzas defensivas, para las  $k$ -alianzas ofensivas se cumple  $a_{k+1}^o(\Gamma) \geq a_k^o(\Gamma)$ .

El número de 1-alianza ofensiva es conocido como *número de alianza ofensiva*, y es denotado por  $a^o(\Gamma) = a_1^o(\Gamma)$ , y el número de 2-alianza ofensiva es conocido como *número de alianza ofensiva fuerte*, y es denotado por  $a^{\hat{o}}(\Gamma) = a_2^o(\Gamma)$  [10].

En la estrella,  $S_9$ , mostrada en la Figura 2.1,  $a^o(S_9) = a_1^o(S_9) = 1$  y la única alianza ofensiva de cardinal mínimo es el conjunto unitario  $S =$

Figura 2.1:



$\{1\}$ . Además, el conjunto  $S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  es una alianza ofensiva fuerte de cardinal mínimo. Por lo tanto,  $a^\circ(S_9) = a_2^\circ(S_9) = 5$ .

Un conjunto no vacío  $S \subset V$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma = (V, E)$ ,  $-\Delta + 2 < k \leq \Delta$ , si se cumple

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k, \forall v \in \bar{S}. \quad (2.4)$$

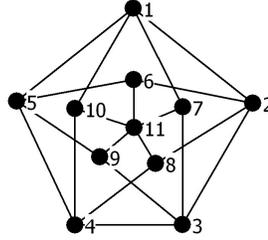
Llamaremos *condición de  $k$ -alianza ofensiva global* a la relación (2.4). Si para un vértice  $v \in \bar{S}$  se cumple la relación (2.4), diremos que  $v$  cumple la *condición de  $k$ -alianza ofensiva global en  $S$* .

El número de  $k$ -alianza ofensiva global de  $\Gamma$  será denotado por  $\gamma_k^\circ(\Gamma)$ . Evidentemente,  $\gamma_k^\circ(\Gamma) \geq a_k^\circ(\Gamma)$ ,  $\gamma_k^\circ(\Gamma) \geq \gamma(\Gamma)$  y  $\gamma_{k+1}^\circ(\Gamma) \geq \gamma_k^\circ(\Gamma)$ .

El número de 1-alianza ofensiva global es conocido como *número de alianza ofensiva global*, y es denotado por  $\gamma^\circ(\Gamma) = \gamma_1^\circ(\Gamma)$ , y el número de 2-alianza ofensiva global es conocido como *número de alianza ofensiva global fuerte* y es denotado por  $\gamma^\hat{\circ}(\Gamma) = \gamma_2^\circ(\Gamma)$  [10, 29, 30, 31, 34, 43, 44].

En el grafo de Groezech (o grafo de Mycielski), mostrado en la Figura 2.2, el conjunto de vértices  $S = \{1, 3, 4, 6, 11\}$  forma una alianza ofensiva global de cardinal mínimo y, en consecuencia,  $\gamma^\circ(\Gamma) = \gamma_1^\circ(\Gamma) = 5$ . Además, el conjunto  $S$  formado por los vértices  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 11\}$  es una alianza ofensiva global fuerte de cardinal mínimo. Así,  $\gamma^\hat{\circ}(\Gamma) = \gamma_2^\circ(\Gamma) = 6$ .

Figura 2.2:



## 2.2. Alianzas ofensivas

Comenzaremos este capítulo citando algunos de los principales resultados conocidos sobre  $a_1^o$  y  $a_2^o$ . Para algunas familias de grafos se conoce el número de alianza ofensiva (fuerte) [10]:

- $a_1^o(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ,
- $a_2^o(K_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ ,
- $a_1^o(K_{r,s}) = \lceil \frac{r+1}{2} \rceil$ ,  $1 \leq r \leq s$ ,
- $a_2^o(S_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ ,
- $a_1^o(S_n) = 1$ ,
- $a_2^o(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} + 1 \rceil$ ,  $2 \leq r \leq s$ ,
- $a_1^o(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,
- $a_2^o(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ ,

- $a_1^o(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil, n \geq 3,$
- $a_2^o(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil, n \geq 3.$

Además, es cómodo verificar que si  $\Gamma \in \{K_n, C_n, K_{1,s}, P_n\}$ , entonces  $a_1^o(\Gamma) = \gamma_1^o(\Gamma)$  y  $a_2^o(\Gamma) = \gamma_2^o(\Gamma)$ .

Como veremos a continuación, el problema de determinar alianzas ofensivas de cardinal mínimo es difícil de resolver.

**Problema de  $k$ -alianza ofensiva ( $k$ -AO):**

Dado: un grafo  $G = (V, E)$  y un entero positivo  $r \leq |V|$ .

Pregunta: ¿existe una  $k$ -alianza ofensiva en  $\Gamma$  de cardinalidad menor o igual que  $r$ ?

**Teorema 41.** [14]  $\forall k$ :  $k$ -AO es NP-completo.

Odile Favaron y otros en [10] obtuvieron los siguientes resultados.

**Teorema 42.** [10] Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$  y grado mínimo  $\delta$ ,

$$a_1^o(\Gamma) \leq a_2^o(\Gamma) \leq \frac{n(2c_\delta + 1)}{2},$$

donde  $c_\delta \rightarrow 0$  cuando  $\delta \rightarrow \infty$ .

**Teorema 43.** [10] Si  $m$  y  $n$  son ambos múltiplos de 4, entonces  $a_1^o(C_n \times C_m) = \lfloor \frac{3nm}{8} \rfloor$ .

Además, los autores caracterizan los grafos donde el número de alianza ofensiva y el número de alianza ofensiva fuerte es igual a uno.

**Corolario 44.** [10] Sea  $\Gamma$  un grafo conexo. Entonces,  $a_1^o(\Gamma) = 1$  si, y sólo si,  $\Gamma$  es una estrella, y  $a_2^o(\Gamma) = 1$  si, y sólo si,  $\Gamma = K_1$ .

Nótese que en el grafo completo,  $K_n$ , toda alianza es global; por lo tanto,  $a_k^o(\Gamma) = \gamma_k^o(\Gamma)$ . En este caso,

$$\begin{aligned} n-1 &= \gamma_{n-1}^o(K_n) = \gamma_{n-2}^o(K_n) \\ &\geq \gamma_{n-3}^o(K_n) = \gamma_{n-4}^o(K_n) = n-2 \\ &\dots \\ &\geq \gamma_{3-n}^o(K_n) = \gamma_{2-n}^o(K_n) = 1. \end{aligned}$$

Luego, para todo  $k \in \{2-n, \dots, n-1\}$ ,  $a_k^o(K_n) = \gamma_k^o(K_n) = \lfloor \frac{n+k-1}{2} \rfloor$ .

Además, en [10] se obtuvo el siguiente resultado.

**Teorema 45.** [10] *Si cada vértice de un grafo  $\Gamma$  tiene grado impar, entonces  $a_1^o(\Gamma) \leq \frac{n}{2}$ .*

La cota anterior, que sólo se limita a los grafos cuyos vértices tienen grado impar, también se cumple para  $a_0^o(\Gamma)$ , pues  $a_0^o(\Gamma) \leq a_1^o(\Gamma)$ . A continuación obtenemos la cota anterior para  $a_0^o(\Gamma)$ , válida en todo grafo de orden  $n$ .

**Teorema 46.** *Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$ ,  $a_0^o(\Gamma) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .*

*Demostración.* Sea  $\{X, Y\}$  una partición del conjunto de vértices  $V$  del grafo  $\Gamma$  tal que  $|X| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ,  $|Y| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  y la cantidad de aristas entre  $X$  e  $Y$  sea máxima. Supongamos que ni  $X$  ni  $Y$  son 0-alianzas ofensivas en el grafo  $\Gamma$ , entonces existe  $x \in X$  e  $y \in Y$  tal que  $\delta_Y(x) < \delta_X(x)$  y  $\delta_X(y) < \delta_Y(y)$ . Luego intercambiando los vértices  $x$  e  $y$  de conjunto se tiene que  $|X \setminus \{x\} \cup \{y\}| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $|Y \setminus \{y\} \cup \{x\}| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  y la cantidad de arista entre ellos es mayor. Por lo tanto, lo supuesto es falso y se deduce el resultado.  $\square$

Si cada vértice de  $\Gamma$  tiene grado par, entonces toda alianza ofensiva (global) de  $\Gamma$  es fuerte y, por consiguiente,  $a_1^o(\Gamma) = a_2^o(\Gamma)$  y  $\gamma_1^o(\Gamma) = \gamma_2^o(\Gamma)$ . En general, si todo vértice de  $\Gamma$  tiene grado par y  $k$  es impar,  $k = 2l - 1$ , entonces toda  $(2l - 1)$ -alianza ofensiva (global) en  $\Gamma$  es una  $(2l)$ -alianza ofensiva (global). Por lo tanto, en este caso,  $a_{2l-1}^o(\Gamma) = a_{2l}^o(\Gamma)$  y  $\gamma_{2l-1}^o(\Gamma) = \gamma_{2l}^o(\Gamma)$ . Análogamente, si cada vértice de  $\Gamma$  tiene grado impar y  $k$  es par,  $k = 2l$ , entonces toda  $(2l)$ -alianza ofensiva (global) en  $\Gamma$  es una  $(2l + 1)$ -alianza ofensiva (global). Por lo tanto, en este caso,  $a_{2l}^o(\Gamma) = a_{2l+1}^o(\Gamma)$  y  $\gamma_{2l}^o(\Gamma) = \gamma_{2l+1}^o(\Gamma)$ .

Como veremos a continuación, el problema de determinar alianzas ofensivas globales de cardinal mínimo es difícil de resolver.

**Problema de  $k$ -alianza ofensiva global ( $k$ -AOG):**

Dado: un grafo  $G = (V, E)$  y un entero positivo  $r \leq |V|$ .

Pregunta: ¿existe una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$  de cardinalidad menor o igual que  $r$ ?

**Teorema 47.** [13, 14]  $\forall k: k\text{-AOG es NP-completo.}$

Un conjunto  $S$  es  $r$ -dependiente si el grado máximo de  $\langle S \rangle$  es menor o igual que  $r$ . El número de  $r$ -dependencia de un grafo  $\Gamma$ ,  $\alpha_r(\Gamma)$ , es el máximo cardinal de todos los conjuntos  $r$ -dependientes de  $\Gamma$  [9, 11].

**Teorema 48.** *Sea  $\Gamma$  un grafo conexo de grado mínimo  $\delta$ . Si  $S$  es un conjunto  $r$ -dependiente con  $r \leq \frac{\delta}{2}$  en  $\Gamma$ , entonces  $\bar{S}$  es una  $(\delta - 2r)$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ .*

*Demostración.* Como  $S$  es un conjunto  $r$ -dependiente, para todo  $v \in S$  se cumple que  $\delta_S(v) \leq r$ . Por lo tanto, para todo  $v \in S$  se cumple que

$$\delta_{\bar{S}}(v) \geq \delta_S(v) + \delta - 2r.$$

Así,  $\bar{S}$  es una  $(\delta - 2r)$ -alianza ofensiva global.  $\square$

**Corolario 49.** *Para todo  $r \in \{0, 1, \dots, \frac{\delta}{2}\}$ ,  $\alpha_r(\Gamma) + \gamma_{\delta-2r}^o(\Gamma) \leq n$ .*

Si  $S \subset V$  es un conjunto independiente, entonces  $\bar{S}$  es una  $k$ -alianza ofensiva para todo  $k \in \{0, \dots, \delta\}$ . Por lo tanto,

$$\gamma_k^o(\Gamma) + \alpha_0(\Gamma) \leq n. \quad (2.5)$$

Evidentemente (2.5) también se deduce del Corolario 49. Un ejemplo donde la cota (2.5) se alcanza es  $\Gamma = Q_3$  para  $k \in \{0, 1, \dots, \delta\}$ :  $4 = \alpha_0(\Gamma) = \gamma_k^o(\Gamma) \leq n - \alpha_0(\Gamma) = 4$  y  $\gamma_{-1}^o(\Gamma) = \gamma(\Gamma)$ .

Sea  $\alpha^1(\Gamma)$  es el máximo cardinal de todos los conjuntos de aristas independientes en  $\Gamma$ . Así, de (2.5) se deduce que para todo grafo  $\Gamma$  de medida  $m$  y grado mínimo  $\delta$  y para todo  $k \in \{0, \dots, 2(\delta - 1)\}$ ,

$$\gamma_k^o(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq m - \alpha^1(\Gamma). \quad (2.6)$$

La cota anterior se alcanza en el grafo 3-cubo,  $Q_3$ , en este caso (2.6) conduce a  $8 = \gamma_1^o(\mathcal{L}(\Gamma)) = \gamma_2^o(\mathcal{L}(\Gamma)) = \gamma_3^o(\mathcal{L}(\Gamma)) = \gamma_4^o(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq 8$ .

**Teorema 50.** *Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$ , grado mínimo  $\delta$  y para todo  $k \in \{2 - \delta, \dots, \delta\}$ ,*

$$\left\lceil \frac{\delta + k}{2} \right\rceil \leq a_k^o(\Gamma) \leq \gamma_k^o(\Gamma) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta + 2 - k}{2} \right\rfloor.$$

*Demostración.* Supongamos que el conjunto  $X \subset V$  es una  $k$ -alianza ofensiva. Para todo  $v \in \partial X$  se cumple

$$\begin{aligned} \delta(v) &= \delta_X(v) + \delta_{\bar{X}}(v) \\ \delta(v) &\leq \delta_X(v) + \frac{\delta(v) - k}{2} \\ \frac{\delta(v) + k}{2} &\leq \delta_X(v) \leq |X| \\ \frac{\delta + k}{2} &\leq |X|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce la cota inferior.

Sea  $v$  un vértice de grado mínimo en  $\Gamma$  y sea  $Y \subset N_V(v)$  tal que  $|Y| = \left\lceil \frac{\delta+k}{2} \right\rceil$ . Sea  $S = \{v\} \cup N_V(v) - Y$ . Entonces  $\bar{S}$  es un conjunto dominante. Además,

$$\delta_{\bar{S}}(v) = \left\lceil \frac{\delta + k}{2} \right\rceil \geq \left\lfloor \frac{\delta + k}{2} \right\rfloor = \delta - \left\lfloor \frac{\delta + k}{2} \right\rfloor + k = \delta_S(v) + k.$$

Así,

$$\delta_{\bar{S}}(u) \geq \delta_{\bar{S}}(v) \geq \delta_S(v) + k \geq \delta_S(u) + k, \quad \forall u \in S.$$

Por lo tanto,  $\bar{S}$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ .

□

La cota anterior se alcanza en el grafo completo  $K_n$ .

En el citado trabajo de Odile Favaron y otros se obtuvo que para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n \geq 2$ ,

$$a_1^o(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$

Con el siguiente teorema probamos que el resultado anterior también se cumple para el número de alianza ofensiva global.

**Teorema 51.** Para todo grafo conexo  $\Gamma$  de orden  $n \geq 2$ ,

$$(i) \quad \gamma_1^o(\Gamma) \leq \min \left\{ n - \alpha_0(\Gamma), \left\lfloor \frac{n + \alpha_0(\Gamma)}{2} \right\rfloor \right\}.$$

$$(ii) \quad \gamma_1^o(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$

*Demostración.* Sea  $S \subset V$  un conjunto independiente de cardinal máximo  $\alpha_0(\Gamma)$ . Entonces el conjunto  $\bar{S}$  es una alianza ofensiva global en  $\Gamma$ . Si  $|\bar{S}| = 1$ , entonces  $\Gamma = K_{1,n-1}$  y  $\gamma_o(\Gamma) = 1$ . Si  $|\bar{S}| \neq 1$ , sea  $\bar{S} = X \cup Y$  una partición de  $\bar{S}$  tal que la cantidad de aristas entre los conjuntos  $X$  e  $Y$  sea máxima. Supongamos que  $|X| \leq |Y|$ . Para cada  $v \in Y$ ,  $\delta_S(v) \geq 1$  y  $\delta_X(v) \geq \delta_Y(v)$ . Además, el conjunto  $W = S \cup X$  es una alianza ofensiva global en  $\Gamma$ , es decir, para cada  $v \in Y$ ,  $\delta_W(v) \geq \delta_Y(v) + 1$ . Entonces se tiene,  $2|X| + \alpha_0(\Gamma) \leq n$  y  $\gamma^o(\Gamma) \leq |X| + \alpha_0(\Gamma)$ . Luego

$$2\gamma_1^o(\Gamma) - \alpha_0(\Gamma) \leq n. \quad (2.7)$$

Así de (2.5) y (2.7) se obtienen ambos resultados.  $\square$

Las cotas anteriores son tensas, por ejemplo, se alcanzan para el grafo  $\Gamma = K_{2,2,2}$ ; donde  $\alpha_0(\Gamma) = 2$ . En este caso el teorema anterior conduce a  $\gamma_1^o(\Gamma) \leq 4$ .

J. A. Rodríguez en [28] obtuvo la siguiente cota superior para el número de independencia de un grafo  $\Gamma$ , donde  $\mu_*$  denota el radio espectral de la matriz laplaciana de  $\Gamma$ ,

$$\alpha_0(\Gamma) \leq \frac{n(\mu_* - \delta)}{\mu_*}. \quad (2.8)$$

Así, de (2.7) y (2.8) se obtiene la siguiente cota espectral para el número de alianza ofensiva global,

$$\gamma_1^o(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{n(2\mu_* - \delta)}{2\mu_*} \right\rfloor. \quad (2.9)$$

Un conjunto  $S$  es  $k$ -dominante si para todo  $v \in \bar{S}$  se cumple que  $\delta_S(v) \geq k$ . El número de  $k$ -dominación de un grafo  $\Gamma$ ,  $\gamma_k(\Gamma)$ , es el mínimo cardinal de todos los conjuntos  $k$ -dominantes de  $\Gamma$ .

En [10] se obtuvo que para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$ ,

$$a_1^o(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{\gamma(\Gamma) + n}{2} \right\rfloor.$$

Con el siguiente teorema mostramos que el resultado anterior también se cumple para  $k$ -alianzas ofensivas globales.

**Teorema 52.** Para todo grafo conexo  $\Gamma$  de orden  $n$ ,  $\gamma_k^o(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{n + \gamma_k(\Gamma)}{2} \right\rfloor$ .

*Demostración.* Sea  $H \subset V$  un conjunto  $k$ -dominante de cardinal mínimo. Si  $|\bar{H}| = 1$ , entonces  $\gamma_k(\Gamma) = n - 1$  y  $\gamma_k^o(\Gamma) \leq n - 1$ . Si  $|\bar{H}| \neq 1$ , sea  $\bar{H} = X \cup Y$  una partición de  $\bar{H}$  tal que la cantidad de aristas entre los conjuntos  $X$  e  $Y$  sea máxima. Supongamos que  $|X| \leq |Y|$ . Para todo  $v \in Y$ ,  $\delta_H(v) \geq k$  y  $\delta_X(v) \geq \delta_Y(v)$ . Además, el conjunto  $W = H \cup X$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ , es decir, para todo  $v \in Y$ ,  $\delta_W(v) \geq \delta_Y(v) + k$ . Entonces se tiene,

$$2|X| + \gamma_k(\Gamma) \leq n \quad (2.10)$$

y

$$\gamma_k^o(\Gamma) \leq |X| + \gamma_k(\Gamma). \quad (2.11)$$

Así, de (2.10) y (2.11), se obtiene el resultado.  $\square$

Nótese que  $\gamma_k(K_n) = k$ . Así, el teorema anterior conduce a  $\gamma_k^o(K_n) \leq \left\lfloor \frac{n+k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+k-1}{2} \right\rfloor$ . Por lo tanto, la cota anterior es tensa.

Otro resultado obtenido en [10] es el siguiente. Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n \geq 3$ ,

$$a_2^o(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{5n}{6} \right\rfloor. \quad (2.12)$$

E. J. Cockayne, R. Dawes y S. T. Hedetniemi en [5] obtuvieron el siguiente resultado

$$\delta \geq k \Rightarrow \gamma_k(\Gamma) \leq \frac{kn}{k+1}. \quad (2.13)$$

Así, de (2.10) y (2.13) obtenemos una generalización de (2.12) para el caso de  $k$ -alianzas ofensivas globales. Esto es, para  $k \leq \delta$ ,

$$\gamma_k^o(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{n(2k+1)}{2k+2} \right\rfloor. \quad (2.14)$$

A continuación obtenemos cotas para el número de  $k$ -alianza ofensiva global en función del orden, la medida y el grado máximo del grafo.

**Teorema 53.** *Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$ , medida  $m$  y grado máximo  $\Delta$ ,*

$$(i) \quad \gamma_k^o(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{2m+kn}{3\Delta+k} \right\rceil.$$

$$(ii) \quad \gamma_k^o(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{(2n+\Delta+k) - \sqrt{(2n+\Delta+k)^2 - 8(2m+kn)}}{4} \right\rceil.$$

*Demostración.* Si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ , entonces

$$\sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) \geq \sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v) + k(n - |S|). \quad (2.15)$$

Así,

$$\begin{aligned} 2m &= \sum_{v \in \bar{S}} \delta(v) + \sum_{v \in S} \delta(v) \\ &= \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) + \sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v) + \sum_{v \in S} \delta(v) \\ &\leq 2 \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) + k(|S| - n) + \sum_{v \in S} \delta(v) \\ &\leq (3\Delta + 1)|S| - n. \end{aligned}$$

Resolviendo la inecuación  $2m \leq (3\Delta + k)|S| - kn$  para  $|S|$  se obtiene el primer resultado. Para todo grafo  $\Gamma$ ,

$$2m = \sum_{v \in S} \delta_S(v) + 2 \sum_{v \in S} \delta_{\bar{S}}(v) + \sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v). \quad (2.16)$$

Además,

$$|S|\Delta \geq \sum_{v \in S} \delta_S(v). \quad (2.17)$$

y

$$|S|(n - |S|) \geq \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v). \quad (2.18)$$

De (2.15) y (2.18) se obtiene

$$(|S| - k)(n - |S|) \geq \sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v). \quad (2.19)$$

Así de (2.16), (2.17), (2.18) y (2.19) se obtiene

$$(2|S| - k)(n - |S|) + \Delta|S| \geq 2m. \quad (2.20)$$

Resolviendo la inecuación anterior se obtiene el segundo resultado.  $\square$

La primera cota es tensa. Por ejemplo, se alcanza para el 3-cubo,  $Q_3$ , para todo  $k$ . En este caso el teorema anterior conduce a  $2 \leq \gamma_{-1}^o(Q_3)$  y  $4 \leq \gamma_0^o(Q_3) = \gamma_1^o(Q_3) = \gamma_2^o(Q_3) = \gamma_3^o(Q_3)$ . La segunda cota también es tensa. Por ejemplo, se alcanza para el grafo completo,  $K_n$ , para todo  $k$ . En este caso el Teorema 53-(ii) conduce a  $\gamma_k^o(K_n) \geq \lceil \frac{n+k-1}{2} \rceil$ .

Existen grafos donde la cota (i) es mejor que la cota (ii) y viceversa. Por ejemplo, en el 3-cubo,  $Q_3$ , para  $k = 2$  la cota (i) es mejor que la cota (ii), en este caso el Teorema 53-(i) conduce a  $\gamma_2^o(Q_3) = \gamma^{\hat{o}}(Q_3) \geq 4$  y el Teorema 53-(ii) conduce a  $\gamma_2^o(Q_3) = \gamma^{\hat{o}}(Q_3) \geq 3$ . Si  $\Gamma$  es el grafo completo de orden 5,  $K_5$ , para  $k = 1$  la cota (ii) es mejor que la cota (i), en este caso el Teorema 53-(ii) conduce a  $\gamma_1^o(K_5) = \gamma^o(K_5) \geq 3$  y el Teorema 53-(i) conduce a  $\gamma_1^o(K_5) = \gamma^o(K_5) \geq 2$ .

De cada apartado del teorema anterior se pueden obtener resultados para el grafo línea. Por ejemplo, como consecuencia del Teorema 53-(i) se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 54.** Sea  $\Gamma$  un grafo de medida  $m$ . Si la secuencia de grados de  $\Gamma$  es  $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$ , entonces

$$\gamma_k^o(\mathcal{L}(\Gamma)) \geq \left\lceil \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2 + m(k-2)}{3(\delta_1 + \delta_2 - 2) + k} \right\rceil.$$

El siguiente resultado muestra una relación entre el radio espectral de la matriz laplaciana de un grafo  $\Gamma$  y el número de  $k$ -alianza ofensiva global  $\Gamma$ .

**Teorema 55.** Sea  $\Gamma$  un grafo simple de orden  $n$  y grado mínimo  $\delta$ . Sea  $\mu_*$  el radio espectral de la matriz laplaciana de  $\Gamma$ . Entonces,  $\gamma_k^o(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n}{\mu_*} \left\lceil \frac{\delta+k}{2} \right\rceil \right\rceil$ .

*Demostración.* En [15] se obtuvo que el radio espectral de la matriz laplaciana de  $\Gamma$ ,  $\mu_*$ , satisface

$$\mu_* = 2n \max \left\{ \frac{\sum_{v_i \sim v_j} (w_i - w_j)^2}{\sum_{v_i \in V} \sum_{v_j \in V} (w_i - w_j)^2} : w \neq \alpha \mathbf{j} \text{ para } \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad (2.21)$$

donde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $\mathbf{j} = (1, 1, \dots, 1)$  y  $w \in \mathbb{R}^n$ .

Sea  $S \subset V$ . De (2.21), tomando  $w \in \mathbb{R}^n$  definido como

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in S; \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

se obtiene

$$\mu_* \geq \frac{n \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v)}{|S|(n - |S|)}. \quad (2.22)$$

Además, si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ , entonces

$$\delta_S(v) \geq \left\lceil \frac{\delta(v) + k}{2} \right\rceil \quad \forall v \in \bar{S}. \quad (2.23)$$

De (2.22) y (2.23) se obtiene

$$\mu_* \geq \frac{n}{|s|} \left\lceil \frac{\delta + k}{2} \right\rceil. \quad (2.24)$$

Por lo tanto, se obtiene el resultado.  $\square$

Si  $\Gamma$  es el grafo de Petersen, entonces  $\mu_* = 5$ . Así, el Teorema 55 conduce a valores exactos en los siguientes casos:  $\gamma_0^o(\Gamma) = \gamma_1^o(\Gamma) \geq 4$  y  $\gamma_2^o(\Gamma) = \gamma_3^o(\Gamma) \geq 6$ . Además, la cota anterior se alcanza para todo  $k$  en el grafo completo  $K_n$ .

**Corolario 56.** *Para todo grafo  $\delta$ -regular de orden  $n$ ,  $\gamma_k^o(\mathcal{L}(\Gamma)) \geq \frac{n}{4} \left\lceil \frac{2(\delta-1)+k}{2} \right\rceil$ .*

*Demostración.* Sea  $A$  la matriz de adyacencia del grafo  $\mathcal{L}(\Gamma)$  y  $2(\delta - 1) = \lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_b = -2$  sus distintos autovalores. Además, sea  $L$  la matriz laplaciana de  $\mathcal{L}(\Gamma)$  y  $\mu_0 = 0 < \mu < \dots < \mu_*$  sus distintos autovalores. Entonces, de  $L = 2(\delta - 1)I_n - A$ , se tiene que los autovalores de ambas matrices  $A$  y  $L$  están relacionados por,

$$\mu_l = 2(\delta - 1) - \lambda_l, \quad l = 0, \dots, b. \quad (2.25)$$

Así, el radio espectral de la matriz laplaciana  $\mathcal{L}(\Gamma)$  es  $\mu_* = 2\delta$ . Por lo tanto, se obtiene el resultado.  $\square$

**Teorema 57.** *Para todo grafo conexo  $\Gamma$  de orden  $n$ , grado mínimo  $\delta$  y grado máximo  $\Delta$ ,*

$$\gamma_k^o(\Gamma) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+k)}{2\Delta+\delta+k} \right\rceil & \text{si } (\delta + k) \text{ es par;} \\ \left\lceil \frac{n(\delta+k+1)}{2\Delta+\delta+k+1} \right\rceil & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $\gamma_q(\Gamma)$  el número  $q$ -dominación de  $\Gamma$ . Toda  $k$ -alianza ofensiva global es un conjunto  $\left\lceil \frac{\delta+k}{2} \right\rceil$ -dominante. Por lo tanto,

$$\gamma_{\left\lceil \frac{\delta+k}{2} \right\rceil}(\Gamma) \leq \gamma_k^o(\Gamma). \quad (2.26)$$

Por otra parte, para todo conjunto  $q$ -dominante  $S \subset V$ ,  $q(n - |S|) \leq \Delta|S|$ . Por lo tanto,

$$\gamma_q(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{qn}{\Delta + q} \right\rceil. \quad (2.27)$$

Luego, se obtiene el resultado.  $\square$

La cota anterior es tensa. Por ejemplo, se alcanza en el grafo bipartito completo  $K_{3,3}$ ; para todos los valores de  $k$ . En este caso el Teorema 57 conduce a  $2 \leq \gamma_{-1}^o(K_{3,3})$  y  $3 \leq \gamma_0^o(K_{3,3}) = \gamma_1^o(K_{3,3}) = \gamma_2^o(K_{3,3}) = \gamma_3^o(K_{3,3})$ .

### 2.3. Alianzas ofensivas y conjuntos conexos

En esta sección estudiamos el caso de alianzas ofensivas cuyo subgrafo inducido es conexo (las alianzas conexas) y aquellas en las que el subgrafo inducido por su complemento es conexo. Denotaremos por  $\gamma_k^{co}(\Gamma)$  al mínimo cardinal de una  $k$ -alianza ofensiva global conexas.

**Proposición 58.** *Sea  $\Gamma$  un grafo de orden  $n$  y grado máximo  $\Delta$ . Para toda  $k$ -alianza ofensiva global  $S$  de cardinal mínimo tal que  $\langle \bar{S} \rangle$  es conexo,*

$$|S| \geq \left\lceil \frac{2(n-1) + kn}{\Delta + k + 2} \right\rceil.$$

*Demostración.* Para todo  $S \subset V$ , se cumple

$$|S|\Delta \geq \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v). \quad (2.28)$$

Además, como  $\langle \bar{S} \rangle$  es conexo, entonces

$$\sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v) \geq 2(n - |S| - 1). \quad (2.29)$$

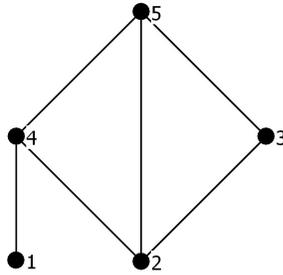
De (2.15), (2.28) y (2.29) se obtiene el resultado.  $\square$

La cota anterior es tensa. Por ejemplo, se alcanza en el grafo completo de orden 4 para  $k \in \{-1, 0, 1, 3\}$ . Además, la cota se alcanza en el grafo de la Figura 2.3, en este caso  $S = \{1, 3, 5\}$  es una 1-alianza ofensiva global de cardinal mínimo en  $\Gamma$  y  $\bar{S} = \{2, 4\}$  es conexo.

Nótese que si  $S \subset V$  es una alianza ofensiva global en  $\Gamma$ , entonces  $\bar{S}$  es un conjunto dominante en  $\Gamma$ . Así, si  $\Gamma$  contiene una alianza ofensiva global de cardinal mínimo  $S$  tal que  $\langle \bar{S} \rangle$  es conexo, entonces el diámetro de  $\Gamma$  está acotado por

$$D(\Gamma) \leq n - |S| + 1. \tag{2.30}$$

Figura 2.3:



La cota (2.30) es tensa. Por ejemplo, se alcanza para el grafo de la Figura 2.3. En este caso el conjunto  $S = \{1, 3, 5\}$  es una alianza ofensiva global de cardinal mínimo y  $\bar{S} = \{2, 4\}$  es conexo. Así,  $3 = D(\Gamma) \leq n - |S| + 1 = 3$ .

**Teorema 59.** *Para todo grafo simple  $\Gamma$  de orden  $n$ , medida  $m$ , diámetro  $D(\Gamma)$  y grado máximo  $\Delta$ ,  $\gamma_k^{co}(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{2m+nk+2(D(\Gamma)-1)^2}{2n+\Delta+k} \right\rceil$ .*

*Demostración.* Si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global y  $\langle S \rangle$  es conexo, entonces de (1.36) y (2.20) se tiene que

$$2n|S| - n + |S| + \Delta|S| \geq 2m + 2(D(\Gamma) - 1)^2. \tag{2.31}$$

Así, resolviendo (2.31) considerando  $|S|$  como un entero se obtiene el resultado. □

La cota anterior es tensa como se muestra a continuación. Sea  $\Gamma_{3,t}$  el grafo obtenido por la unión de cada vértice del grafo completo  $K_3$  con los vértices de un grafo trivial de orden  $t \geq 8$ . En este caso, el Teorema 59 conduce a valores exactos en los siguientes casos:  $\gamma_1^{co}(\Gamma_{3,t}) = \gamma_2^{co}(\Gamma_{3,t}) = \gamma_3^{co}(\Gamma_{3,t}) = 3$ . Nótese que para  $k > 3$  no existe en  $\Gamma_{3,t}$   $k$ -alianza ofensiva global conexas.

### 2.3.1. Alianzas ofensivas en grafos cúbicos

En el caso de los grafos cúbicos se cumple

$$\frac{n}{4} \leq \gamma(\Gamma) = \gamma_{-1}^o(\Gamma) \leq \gamma_0^o(\Gamma) = \gamma_1^o(\Gamma) \leq \gamma_2^o(\Gamma) = \gamma_3^o(\Gamma). \quad (2.32)$$

Por lo tanto, en esta sección sólo estudiaremos  $\gamma_1^o(\Gamma)$  y  $\gamma_2^o(\Gamma)$ .

**Teorema 60.** *Si  $\Gamma$  un grafo cúbico conexo de orden  $n$ , entonces*

- (i)  $\frac{n}{2} \leq \gamma_2^o(\Gamma) \leq \frac{3n}{4}$ .
- (ii)  $\gamma_2^o(\Gamma) = \frac{n}{2}$  si y sólo si  $\Gamma$  es un grafo bipartito.
- (iii)  $\gamma_2^o(\Gamma) = \frac{3n}{4}$  si y sólo si  $\Gamma$  es isomorfo al grafo completo  $K_4$ .

*Demostración.*

- (i) Si  $\Gamma$  es un grafo  $\delta$ -regular, entonces  $S \subset V$  es un conjunto  $\delta$ -dominante si y sólo si  $\bar{S}$  es un conjunto independiente. Por lo tanto,

$$\gamma_\delta(\Gamma) + \alpha_0(\Gamma) = n. \quad (2.33)$$

Además, si  $\Gamma$  es un grafo cúbico, un conjunto  $S \subset V$  es una alianza ofensiva fuerte si y sólo si  $S$  es un conjunto 3-dominante. Por lo tanto,

$$\gamma_3(\Gamma) = \gamma_2^o(\Gamma) = n - \alpha_0(\Gamma). \quad (2.34)$$

Finalmente, como en todo grafo  $\delta$ -regular  $\Gamma$ ,  $\alpha_0(\Gamma) \leq \frac{n}{2}$ , se obtiene la cota inferior.

Por otro lado, para toda alianza ofensiva global fuerte  $S$  tal que  $|S| = \gamma_2^o(\Gamma)$ ,  $\bar{S}$  es un conjunto independiente. Así,  $\frac{3n}{2} \leq 3(n - \gamma_2^o(\Gamma)) + \gamma_2^o(\Gamma)$ . De ahí se obtiene la cota superior.

- (ii) Si  $\Gamma$  es un grafo cúbico bipartito, entonces cada conjunto de bipartición de  $V$  es una alianza ofensiva global fuerte en  $\Gamma$  de cardinal  $\frac{n}{2}$ , así  $\gamma_2^o(\Gamma) = \frac{n}{2}$ . A la inversa, si  $S$  es un conjunto 3-dominante de cardinal  $\frac{n}{2}$  en un grafo cúbico, entonces el conjunto de aristas entre  $S$  y  $\bar{S}$  tiene medida  $3\frac{n}{2}$ . De ahí, ambos,  $S$  y  $\bar{S}$ , son conjuntos independientes y  $\Gamma$  es un grafo bipartito.
- (iii) Sólo necesitamos demostrar que  $\alpha_0(\Gamma) = \frac{n}{4} \Rightarrow \Gamma \cong K_4$ . Supongamos que  $\Gamma \not\cong K_4$ . Si  $X$  es un conjunto independiente tal que  $|X| = \alpha_0(\Gamma) = \frac{n}{4}$ , entonces  $\langle \bar{X} \rangle$  es la unión disjunta de ciclos. Sea  $x_i$  el número de ciclos de longitud  $i$  en  $\bar{X}$ ,  $i = 3, \dots, \frac{3n}{4}$ . Se tiene

$$\sum ix_i = \frac{3n}{4}$$

Si  $x_i > 0$ , para algún  $i > 3$ , entonces

$$\sum 3 \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor x_i > \sum ix_i = \frac{3n}{4}.$$

Así,

$$\alpha_0(\langle \bar{X} \rangle) = \sum \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor x_i > \frac{n}{4}.$$

Por lo tanto,  $x_i = 0$ , para todo  $i > 3$ . Sea  $Y_i \subset V \setminus X$  tal que  $\langle Y_i \rangle \cong K_3$ ,  $i = 3, \dots, \frac{n}{4}$ . Sea  $x \in X$ . Como  $\Gamma$  es conexo y  $\Gamma \not\cong K_4$ ,  $\langle Y_i \cup \{x\} \rangle \cong K_4$  y, en consecuencia,  $\alpha(\langle Y_i \cup \{x\} \rangle) = 2$ ,  $\forall i$ . Sea  $W = \{x, y_1, y_2, \dots, y_{\frac{n}{4}}\}$ , donde  $y_i \in Y_i$  e  $y_i \approx x$ . Como  $W$  es un conjunto independiente, el resultado se obtiene por contradicción.

□

Un conjunto  $S \subseteq V$  es un cubrimiento de vértices de un grafo  $\Gamma = (V, E)$  si para toda arista  $\{a, b\} \in E$  se cumple que  $a \in S$  ó  $b \in S$ . El *número de vértices-cubrimiento* de un grafo  $\Gamma$ ,  $\rho(\Gamma)$ , es el mínimo cardinal de todos los cubrimientos de vértices de  $\Gamma$  [20].

Odile Favaron y otros en [10] obtuvieron que para todo grafo cúbico conexo  $\Gamma$ ,  $a_2^o(\Gamma) = \rho(\Gamma)$ . De (2.34) y del Teorema de Gallai [20], en el que se plantea que para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$ ,  $\alpha_0(\Gamma) + \rho(\Gamma) = n$ , se deduce que para todo grafo cúbico conexo  $\Gamma$ ,

$$\gamma_2^o(\Gamma) = \rho(\Gamma). \quad (2.35)$$

Así, podemos plantear que si  $\Gamma$  es un grafo cúbico conexo, entonces  $a_2^o(\Gamma) = \gamma_2^o(\Gamma)$ .

Existen algunas clases de grafos cúbicos para los cuales se puede calcular el número de alianza ofensiva global fuerte en función del orden. Por ejemplo, si  $\Gamma = \mathcal{L}(\Gamma_1)$  es un grafo cúbico de orden  $n \geq 6$ , entonces se tiene  $\gamma_2^o(\Gamma) = 2\gamma_2^o(\Gamma_1) = \frac{2n}{3}$ . Esto es,  $\Gamma_1 = (V, E)$  es un grafo bipartito semiregular de grados 2 y 3. Si  $V_3 \subset V$  denota el conjunto de vértices de grado 3 en  $\Gamma$ , entonces  $\gamma_2^o(\Gamma_1) = |V_3| = \alpha_0(\Gamma)$ . Por otro lado,  $|V_3| = \frac{n}{3}$ . Además,  $\gamma_2^o(\Gamma) = n - \alpha_0(\Gamma) = 3\gamma_2^o(\Gamma) - \gamma_2^o(\Gamma) = \frac{2n}{3}$ .

Nótese que en esta clase de grafos están incluidos los grafos cúbicos de orden  $n \geq 6$  que tienen  $\frac{n}{3}$  triángulos independientes<sup>1</sup>.

En el caso de un grafo regular de grado par, se tiene que  $\gamma_1^o(\Gamma) = \gamma_2^o(\Gamma)$ . Luego por el Corolario 56 y (2.9) se tiene que para todo grafo cúbico  $\Gamma$  de orden  $n$ ,

$$\frac{3n}{4} \leq \gamma_2^o(\mathcal{L}(\Gamma)) = \gamma_1^o(\mathcal{L}(\Gamma)) \leq n. \quad (2.36)$$

<sup>1</sup>Un conjunto de triángulos es independiente si no tiene vértices comunes.

Las cotas anteriores son tensas. Por ejemplo, la superior se alcanza en el grafo completo  $K_4$ :  $\gamma_1^o(\mathcal{L}(K_4)) = 4 = n$ . En el caso del grafo bipartito completo  $\Gamma = K_{3,3}$  se tiene  $\gamma_1^o(\mathcal{L}(K_{3,3})) = 5$  y para la cota inferior se tiene  $\frac{9}{2} \leq \gamma_1^o(\mathcal{L}(K_{3,3}))$ .

Como vimos antes, si todos los vértices de un grafo  $\Gamma$  tienen grado impar,  $\alpha_1^o(\Gamma) \leq \frac{n}{2}$ . A continuación mostramos que el resultado también es válido para el número de alianza ofensiva global.

**Teorema 61.** *Para todo grafo regular  $\Gamma$  de orden  $n$  y grado impar,*

$$\gamma_1^o(\Gamma) \leq \frac{n}{2}.$$

*Demostración.* Sea  $\{X, Y\}$  una partición de los vértices  $V$  del grafo  $\Gamma$  tal que  $|X| = |Y| = \frac{n}{2}$  y la cantidad de aristas entre  $X$  e  $Y$  sea máxima. Supongamos que ni  $X$  ni  $Y$  son alianzas ofensivas globales en el grafo  $\Gamma$ , entonces existe  $x \in X$  e  $y \in Y$  tal que  $\delta_Y(x) \leq \delta_X(x)$  y  $\delta_X(y) \leq \delta_Y(y)$ . Como  $\Gamma$  es un grafo regular de grado impar,  $\delta_Y(x) < \delta_X(x)$  y  $\delta_X(y) < \delta_Y(y)$ . Así, lo supuesto es falso y se deduce el resultado.  $\square$

De los teoremas 57 y 61, se deduce que para todo grafo cúbico  $\Gamma$  de orden  $n$ ,

$$\frac{2n}{5} \leq \gamma_1^o(\Gamma) \leq \frac{n}{2}. \quad (2.37)$$

Ejemplos de grafos para los cuales la cota superior anterior es tensa son la familia de grafos cúbicos  $\Gamma = C_r \times K_2$ , donde  $C_r$  denota el ciclo de orden  $r$ . En este caso  $\gamma_1^o(\Gamma) = r$ .

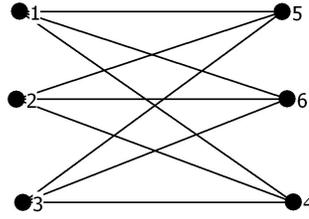
## 2.4. Alianzas ofensivas independientes

Según la naturaleza del problema que motive el uso de alianzas ofensivas como modelo matemático, pudiera ser interesante considerar el hecho de que

las alianzas ofensivas fueran (o no) conjuntos independientes de cara a estudiar el verdadero “poder” de dichas alianzas. En determinados contextos, una alianza ofensiva que sea un conjunto independiente será más “débil” que una alianza ofensiva que tenga adyacencias entre sus miembros. Motivados por esta idea, en esta memoria iniciamos el estudio de las alianzas ofensivas independientes. Diremos que una  $k$ -alianza ofensiva (global)  $S$  es *independiente* si el conjunto  $S$  es independiente<sup>2</sup> en  $\Gamma$ .

El número de  $k$ -alianza ofensiva independiente será denotado por  $a_k^i(\Gamma)$ , mientras que el número de  $k$ -alianza ofensiva global independiente será denotado por  $\gamma_k^i(\Gamma)$ .

Figura 2.4:

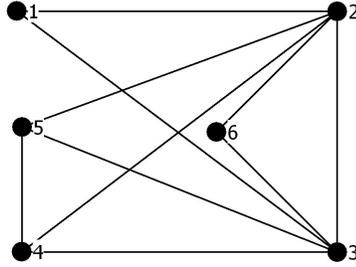


En el grafo bipartito completo,  $K_{3,3}$ , mostrado en la Figura 2.4, el conjunto  $S = \{1, 2\}$  es una 1-alianza ofensiva global independiente de cardinal mínimo y el conjunto  $S = \{1, 2, 3\}$  es una 2-alianza ofensiva global independiente de cardinal mínimo. Por lo tanto,  $a_1^i(K_{3,3}) = 2$  y  $\gamma_2^i(K_{3,3}) = 3$ . Nótese, que  $a_1^i(K_{3,3}) = a_1^o(K_{3,3})$  y  $\gamma_2^i(K_{3,3}) = \gamma_2^o(K_{3,3})$ .

En el grafo de Nill, mostrado en la Figura 2.5, el conjunto  $S = \{1, 4, 6\}$  es una alianza ofensiva global independiente de cardinal mínimo y el conjunto  $S = \{2, 3\}$  es una alianza ofensiva global de cardinal mínimo. En este caso  $2 = \gamma^o(\Gamma) = \gamma_1^o(\Gamma) < \gamma_1^i(\Gamma) = 3$ .

<sup>2</sup>Un conjunto de vértices  $S$  es independiente si el subgrafo inducido por  $S$  es trivial.

Figura 2.5:



Si  $\Gamma$  contiene una  $k$ -alianza ofensiva global independiente, entonces  $\bar{S}$  es una  $\delta$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ . Así,

$$\gamma_k^i(\Gamma) + \gamma_\delta^o(\Gamma) \leq n. \tag{2.38}$$

Como consecuencia del Teorema 60-(i), se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 62.** *Sea  $\Gamma$  un grafo cúbico.  $\Gamma$  contiene una 2-alianza ofensiva global independiente si, y sólo si,  $\Gamma$  es un grafo bipartito.*

*Demostración.* En el caso de los grafos cúbicos se tiene  $\frac{n}{2} \leq \gamma_2^o(\Gamma)$  y  $\alpha_0(\Gamma) \leq \frac{n}{2}$ . Ambas igualdades se cumplen si, y sólo si,  $\Gamma$  es un grafo bipartito.  $\square$

En el caso de un grafo bipartito cúbico obtenemos,

$$\gamma_1^i(\Gamma) = \gamma_1^o(\Gamma) = \gamma_2^o(\Gamma) = \alpha_0(\Gamma) = \frac{n}{2}.$$

Para todo grafo que contenga 1-alianzas ofensivas independientes se cumple  $\gamma_1^o(\Gamma) \leq \gamma_1^i(\Gamma)$ . Ejemplos donde se alcanza la igualdad son el grafo de Petersen y la clase de los grafos cúbicos bipartitos. Claramente, si  $\alpha_0(\Gamma) < \gamma_1^o(\Gamma)$ , entonces  $\Gamma$  no contiene alianzas ofensivas globales independientes. Ejemplos para los cuales  $\alpha_0(\Gamma) < \gamma_1^o(\Gamma)$  son los grafos isomorfos a  $C_{2k+1} \times K_2$ . En este caso  $2k = \alpha_0(\Gamma) < \gamma_1^o(\Gamma) = 2k + 1$ .

**Teorema 63.** *Sea  $\Gamma$  un grafo cúbico de orden  $n$ . Toda alianza ofensiva global en  $\Gamma$  de cardinal  $\frac{2n}{5}$  es un conjunto independiente.*

*Demostración.* Sea  $X \subset V$  una alianza ofensiva en  $\Gamma$  de cardinal  $\frac{2n}{5}$ . Sea  $c$  el cardinal del conjunto de aristas que unen vértices de el conjunto  $X$  con vértices del conjunto  $\bar{X}$ . Como  $X$  es un conjunto 2-dominante,  $2\frac{3n}{5} \leq c$ . Además,  $c \leq 3\frac{2n}{5}$ , así la medida de  $\langle X \rangle$  es nula.  $\square$

**Teorema 64.** *Sea  $\Gamma$  un grafo cúbico de orden  $n$ . Si  $\Gamma$  contiene 1-alianzas ofensivas globales independientes, entonces*

$$(i) \quad \frac{2n}{5} \leq \gamma_1^i(\Gamma) \leq \frac{n}{2}.$$

$$(ii) \quad \gamma_1^i(\Gamma) = \frac{n}{2} \text{ si y sólo si } \Gamma \text{ es un grafo bipartito.}$$

$$(iii) \quad \gamma_1^i(\Gamma) = \frac{2n}{5} \text{ si y sólo si existe un conjunto independiente } X \subset V \text{ tal que } \langle \bar{X} \rangle \text{ es un 1-factor de medida } \frac{3n}{10}.$$

*Demostración.* Sea  $\Gamma$  un grafo cúbico de orden  $n$ .

$$(i) \text{ Si } \Gamma \text{ contiene 1-alianzas ofensivas globales independientes, entonces } \frac{2n}{5} \leq \gamma_1^o(\Gamma) \leq \gamma_1^i(\Gamma) \leq \alpha_0(\Gamma) \leq \frac{n}{2}.$$

$$(ii) \text{ Si } X \subset V \text{ es un conjunto independiente, entonces } \bar{X} \text{ es un conjunto 3-dominante de } \Gamma. \text{ De ahí, si } |X| = \frac{n}{2}, \text{ el conjunto de aristas entre los conjuntos } X \text{ y } \bar{X} \text{ tiene medida } 3\frac{n}{2}, \text{ así } \Gamma \text{ es un grafo bipartito. Inversamente, si } \Gamma \text{ es un grafo cúbico bipartito, entonces } \gamma_1^i(\Gamma) = \frac{n}{2}.$$

$$(iii) \text{ Sea } X \text{ una 1-alianza ofensiva global independiente en } \Gamma \text{ tal que } |X| = \frac{2n}{5}. \text{ El conjunto de aristas entre los conjuntos } X \text{ y } \bar{X} \text{ tiene medida } 3\frac{2n}{5}. \text{ Luego } |\bar{X}| = \frac{3n}{5} \text{ y } X \text{ es un conjunto 2-dominante. Así cada vértice de } \bar{X} \text{ tiene un vecino en } X \text{ y } \langle \bar{X} \rangle \text{ es un 1-factor de medida } \frac{3n}{10}. \text{ La prueba en el otro sentido es inmediata.}$$

□

**Corolario 65.** Sea  $\Gamma$  un grafo cúbico de orden  $n$ . Si  $\alpha_0(\Gamma) < \frac{2n}{5}$ , entonces  $\Gamma$  no contiene 1-alianzas ofensivas globales independientes.

Ejemplos de grafos donde  $\alpha_0(\Gamma) < \frac{2n}{5}$  son el grafo completo  $K_4$  y el grafo  $\Gamma = C_3 \times K_2$ .

**Teorema 66.** Sea  $\Gamma$  un grafo cúbico de orden  $n$ . Si  $a_1^i(\Gamma) < \gamma_1^i(\Gamma)$ , entonces

$$\frac{n+2}{4} \leq a_1^i(\Gamma) \leq \frac{n-2}{2}.$$

*Demostración.* Si  $S \subset V$  es un conjunto independiente en  $\Gamma$ , entonces

$$\frac{3n}{2} = 3|S| + \frac{\sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v)}{2}. \quad (2.39)$$

Además, si  $S \subset V$  es una 1-alianza ofensiva independiente en  $\Gamma$  tal que  $|S| = a_1^i(\Gamma) < \gamma_1^i(\Gamma)$ , entonces existe al menos un vértice  $v \in V$  tal que  $v \notin (S \cup \partial S)$ . Por lo tanto,

$$\frac{\sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v)}{2} \geq 3. \quad (2.40)$$

Por (2.39) y (2.40) se obtiene la cota superior. Por otro lado, si  $S$  es una alianza ofensiva en  $\Gamma$ , entonces

$$3|S| \geq \sum_{v \in \partial S} \delta_S(v) \geq \sum_{v \in \partial S} \delta_{\bar{S}}(v) + |\partial S|. \quad (2.41)$$

Además, como  $S$  es un conjunto independiente  $|\partial S| \geq 3$ . Así,

$$3|S| + \sum_{v \in \partial S} \delta_{\bar{S}}(v) \geq \frac{3n}{2}. \quad (2.42)$$

De (2.41) y (2.42) se obtiene el resultado. □

Las cotas anteriores son tensas, se alcanzan, por ejemplo, en el grafo bipartito completo  $\Gamma = K_{3,3}$ . En este caso  $a_1^i(\Gamma) = 2$ .

## 2.5. Alianzas ofensivas en grafos planares

**Teorema 67.** Sea  $\Gamma$  un grafo planar de orden  $n$ . Si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$  para  $k \in \{1, 2, \dots, \Delta\}$  tal que el subgrafo  $\langle \bar{S} \rangle$  tiene  $c$  componentes conexas, entonces  $|S| \geq \left\lceil \frac{nk+2(2-c)}{k+2} \right\rceil$ .

*Demostración.* El subgrafo  $\Gamma_s = (V, E')$ , donde  $E' = \{\{x, y\} \in E : x \in S, y \notin S\}$ , es planar y bipartito, por lo tanto, es libre de triángulos. Así de (1.28) se deduce

$$2(n-2) \geq \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v). \quad (2.43)$$

Si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ , entonces por (2.43) y (2.15) se tiene

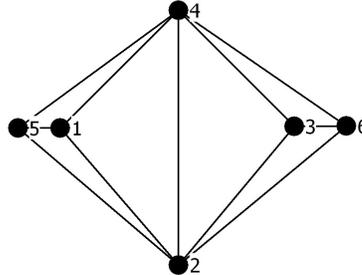
$$k|S| - nk + 2n - 4 \geq \sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v). \quad (2.44)$$

Como el subgrafo  $\langle \bar{S} \rangle$  tiene  $c$  componentes conexas, se tiene

$$k|S| - nk + 2(n-2) \geq \sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v) \geq 2(n - |S| - c).$$

Así, se obtiene el resultado. □

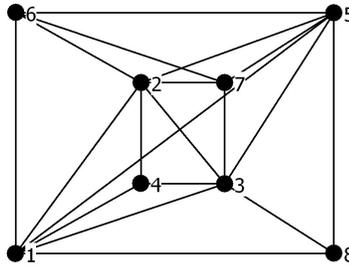
Figura 2.6:



La cota anterior es tensa. Por ejemplo, se alcanza en el grafo completo  $K_4$  y en el grafo de la Figura 2.6 para los siguientes casos:

- $k = 1$  y  $c = 2$ :  $S = \{2, 4\}$  es una 1-alianza ofensiva global y  $\langle \bar{S} \rangle$  tiene dos componentes conexas.
- $k = 3$  y  $c = 2$ :  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  es una 3-alianza ofensiva global y  $\langle \bar{S} \rangle$  tiene dos componentes conexas.
- $k \in \{2, 3\}$  y  $c = 1$ :  $S = \{1, 3, 5, 6\}$  es una  $k$ -alianza ofensiva global y  $\langle \bar{S} \rangle$  tiene una componente conexa.
- $k \in \{4, 5\}$  y  $c = 1$ :  $S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  es una  $k$ -alianza ofensiva global y  $\langle \bar{S} \rangle$  tiene una componente conexa.

Figura 2.7:



Utilizando los mismos razonamientos de la demostración anterior, y teniendo en cuenta si el grado mínimo de  $\langle \bar{S} \rangle$  es al menos  $p$ , entonces la medida de  $\langle \bar{S} \rangle$  está acotada inferiormente por  $\frac{(n-|S|)p}{2}$ , se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 68.** *Sea  $\Gamma$  un grafo planar de orden  $n$ . Si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$  y el grado mínimo de  $\langle \bar{S} \rangle$  es al menos  $p$  tal que  $p + k \notin \{0, 1\}$ , entonces  $|S| \geq \left\lceil \frac{n(p+k-2)+4}{p+k} \right\rceil$ .*

**Teorema 69.** *Sea  $\Gamma$  un grafo planar de orden  $n$ . Si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$  para  $k \in \{0, 1, \dots, \Delta\}$  tal que el subgrafo  $\langle \bar{S} \rangle$  es conexo y tiene  $f$  caras, entonces  $|S| \geq \left\lceil \frac{nk+2f}{k+2} \right\rceil$ .*

*Demostración.* Por la fórmula de Euler se tiene,  $\sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v) = 2(n - |S| + f - 2)$ , y la prueba concluye por (2.44).  $\square$

Nótese que en el grafo de la Figura 2.7 el conjunto  $S = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  es una  $k$ -alianza defensiva global para  $k \in \{1, 2\}$ ,  $\bar{S} = \{1, 2, 3\}$  y  $\langle \bar{S} \rangle$  tiene 2 caras. En este caso, el Teorema 69 para  $k = 2$  conduce a  $|S| \geq 5$  y para  $k = 1$  conduce a  $|S| \geq 4$ .

Decimos que un grafo  $\Gamma = (V, E)$  es un *4-libro* si  $V$  es la unión de subconjuntos  $X_1, X_2, \dots, X_r$  tales que  $3 \leq |X_i| \leq 4$  y

- $\exists \{v_1, v_2\} \in E$  tal que  $\forall i \neq j \ X_i \cap X_j = \{v_1, v_2\}$ .
- Para  $i \neq j$ , no existen aristas que conecten vértices de  $X_i \setminus \{v_1, v_2\}$  con vértices en  $X_j \setminus \{v_1, v_2\}$ .
- Si  $y \in V \setminus \{v_1, v_2\}$ , entonces  $y$  es adyacente a  $v_1$  o es adyacente a  $v_2$  y, si  $\delta(y) \geq 2$ , entonces  $y$  es adyacente a ambos,  $v_1$  y  $v_2$ .

Cada uno de estos  $r$  subgrafos inducidos,  $\langle X_i \rangle$ , es llamado *página* del 4-libro  $\Gamma$ .

Es cómodo verificar las siguientes afirmaciones.

- $\gamma_1^o(\Gamma) = 1$  si y sólo si  $\Gamma = S_n$ .
- $\gamma_1^o(\Gamma) = 2$  si y sólo si  $\Gamma$  es un 4-libro.

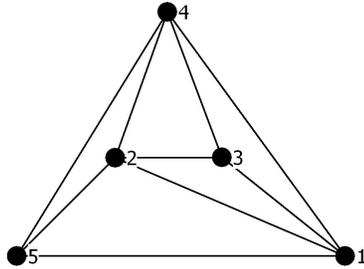
**Teorema 70.** *Sea  $\Gamma$  un grafo planar de orden  $n$  y medida  $m$ . Si  $\Gamma$  contiene alguna  $k$ -alianza ofensiva global de cardinal mínimo mayor que dos, entonces  $\gamma_k^o(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{2m - n(6-k) + 24}{6+k} \right\rceil$ .*

*Demostración.* Sea  $S$  una  $k$ -alianza ofensiva global, de (2.15) y (2.16) se deduce

$$\sum_{v \in S} \delta_S(v) + 3 \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) \geq 2m + n - |S|. \quad (2.45)$$

Como  $|S| > 2$ , de (1.29), (2.43) y (2.45) se obtiene el resultado.  $\square$

Figura 2.8:



La cota anterior es tensa. Por ejemplo, si  $\Gamma$  es el grafo de la Figura 2.8 el teorema anterior conduce a valores exactos para  $k = \{1, 2, 3\}$  en estos casos  $S = \{1, 2, 4\}$  es una  $k$ -alianza ofensiva global de cardinal mínimo en  $\Gamma$ .

F. M. Dong, K. M. Koh y K. L. Teo en [8] obtuvieron que para todo grafo planar  $\Gamma$  de orden  $n$ ,

$$\alpha_0(\Gamma) \geq \frac{n}{4}. \tag{2.46}$$

Así, de (2.46) y (2.5) se obtiene que para todo grafo planar  $\Gamma$  de orden  $n$ ,

$$k \leq \delta \implies \gamma_k^o(\Gamma) \leq \frac{3n}{4}.$$

### 2.5.1. Alianzas ofensivas en árboles

En [10] se obtuvo el siguiente resultado para el número de alianza ofensiva fuerte en árboles.

**Teorema 71.** [10] *Para todo árbol  $T$  de  $n$  vértices,  $a_2^o(T) \leq \lceil \frac{3n}{4} \rceil$ .*

M. Chellali en [3] estudia las alianzas ofensivas globales en árboles, a partir del análisis de los grafos bipartitos. En particular obtuvo el siguiente resultado.

**Teorema 72.** [3] *Para todo grafo bipartito  $\Gamma$  de  $n$  vértices y número de hojas  $l(\Gamma)$ ,  $\gamma_1^o(\Gamma) \leq \lceil \frac{n+l(\Gamma)}{2} \rceil$ .*

Además, en el citado trabajo, el autor caracteriza los árboles  $T$  para los cuales,

$$\gamma_2^o(T) = \left\lceil \frac{n + l(T)}{2} \right\rceil.$$

En esta misma dirección es cómodo verificar la siguiente observación.

**Observación 73.** *Para todo árbol  $T$ , el subgrafo inducido por una alianza ofensiva global fuerte diferente de  $T$  es no conexo.*

**Teorema 74.** *Si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en un árbol de orden  $n$  tal que el subgrafo  $\langle S \rangle$  tiene  $c$  componentes conexas, entonces la medida de  $\langle \bar{S} \rangle$  está acotada superiormente por  $\frac{n(1-k) + |S|(k-1) + c - 1}{3}$ .*

*Demostración.* Si  $\langle S \rangle$  tiene  $c$  componentes conexas, entonces

$$n - 1 = (|S| - c) + \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) + \frac{1}{2} \sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v). \quad (2.47)$$

Además, si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $T$ , entonces de (2.15) y (2.47) se obtiene

$$n(1 - k) + |S|(k - 1) + c - 1 \geq \frac{3}{2} \sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v). \quad (2.48)$$

Así, se obtiene el resultado.  $\square$

**Corolario 75.** *Sea  $S$  una 1-alianza ofensiva en un árbol de orden  $n$ . Si  $\langle S \rangle$  tiene una, dos o tres componentes conexas, entonces  $\bar{S}$  es un conjunto independiente.*

Nótese que si  $S$  es una 1-alianza ofensiva global en un árbol y el subgrafo  $\langle S \rangle$  es un árbol, entonces cada vértice de  $\bar{S}$  es una hoja.

**Corolario 76.** *Si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global con  $k > 1$  en un árbol de orden  $n$  tal que  $\langle S \rangle$  tiene  $c$  componentes conexas, entonces  $|S| \geq \frac{n(k-1) - c + 1}{k-1}$ .*

**Teorema 77.** *Sea  $T$  un árbol de orden  $n$ . Si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $T$  tal que  $\langle \bar{S} \rangle$  es un bosque con  $c$  componentes conexas, entonces  $|S| \geq \left\lceil \frac{n(k+2)-3c+1}{k+3} \right\rceil$ .*

*Demostración.* Si  $\langle \bar{S} \rangle$  es un bosque con  $c$  componentes conexas, entonces se tiene

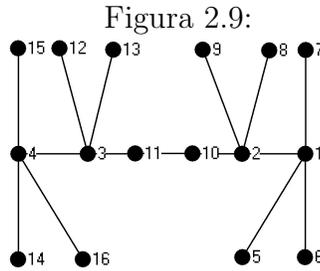
$$\sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) \leq |S| + c - 1. \tag{2.49}$$

De (2.15) y (2.49) se tiene

$$2(n - |S| - c) = \sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v) \leq |S|(k + 1) - nk + c - 1. \tag{2.50}$$

Resolviendo la inecuación anterior, se obtiene el resultado. □

En el grafo mostrado en la Figura 2.9. Si  $\bar{S} = \{1, 2, 3, 4\}$  el conjunto  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global para  $k = 1$  y  $k = 2$ . Nótese que  $\langle \bar{S} \rangle$  tiene dos componentes conexas. En esta caso, el Teorema 77 conduce a  $|S| \geq 12$ .



Mustapha Chellali y Teresa W. Haynes en [4] obtuvieron el siguiente resultado.

**Teorema 78.** [4] *Para todo árbol  $T$ ,  $\gamma_1^o(T) \leq \alpha_0(T) \leq \gamma_2^o(T)$ .*

Así del Teorema 78 y (2.5) se deduce que para todo árbol  $T$  de orden  $n$  y  $k \leq 1$ ,

$$\gamma_1^o(T) + \gamma_k^o(T) \leq n.$$



# Capítulo 3

## Alianzas duales y cubrimientos de alianzas

### Resumen

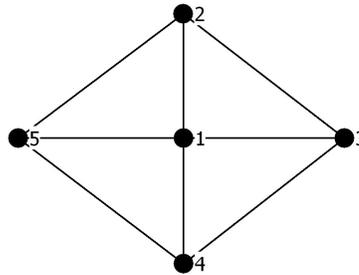
Estudiamos las principales relaciones entre las alianzas defensivas y ofensivas. En particular, estudiamos las alianzas duales (defensivas y ofensivas a la vez) y sus principales propiedades. Prestamos especial interés en el número de  $k$ -alianza dual y obtenemos cotas tensas para este parámetro. Investigamos, además, la relación entre los conjuntos  $k$ -dominantes totales y las  $k$ -alianzas defensivas, ofensivas y duales. Por último, estudiamos los cubrimientos de  $k$ -alianzas defensivas (ofensivas), los conjuntos libres de  $k$ -alianzas defensivas (ofensivas) y la relación entre ellos.

### 3.1. Alianzas duales. Definición y primeras propiedades

En [26] se define *alianza dual* como un conjunto de vértices de un grafo que es *alianza defensiva* y *ofensiva* a la vez. En esta memoria iniciamos el estudio de las  $k$ -alianzas duales a partir de la siguiente definición. Un conjunto de vértices de  $\Gamma$  es una  $k$ -alianza dual (global) en  $\Gamma$ , para  $-\Delta \leq k \leq \Delta - 2$ , si es una  $k$ -alianza defensiva (global) y una  $(k + 2)$ -alianza ofensiva (global) a la vez.

El número de  $k$ -alianza dual de  $\Gamma$  será denotado por  $a_k^d(\Gamma)$  y el número de  $k$ -alianza dual global de  $\Gamma$  será denotado por  $\gamma_k^d(\Gamma)$ . El número de  $(-1)$ -alianza dual, es conocido como *número de alianza dual*, y es denotado por  $a_{-1}^d(\Gamma) = a_d(\Gamma)$ , y el número de  $0$ -alianza dual es conocido como el *número de alianza dual fuerte*, y es denotado por  $a_0^d = a_d(\Gamma)$  [26]. Análogamente, el número de  $(-1)$ -alianza dual global, es conocido como *número de alianza dual*, y es denotado por  $\gamma_{-1}^d(\Gamma) = \gamma^d(\Gamma)$ , y el número de  $0$ -alianza dual global es conocido como *número de alianza dual global fuerte*, y es denotado por  $\gamma_0^d(\Gamma) = \gamma^d(\Gamma)$  [1, 26].

Figura 3.1:



En la rueda,  $W_5$ , de la Figura 3.1, el conjunto  $S = \{1, 2, 3\}$  es una  $(-1)$ -alianza dual global de cardinal mínimo y el conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4\}$

es una 0-alianza dual global de cardinal mínimo. En este caso  $\gamma_{-1}^d(\Gamma) = 3$  y  $\gamma_0^d(\Gamma) = 4$ .

Evidentemente, para todo grafo se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \gamma_k^d(\Gamma) &\geq \gamma(\Gamma), \gamma_k^d(\Gamma) \geq a_k^d(\Gamma), \gamma_{k+1}^d(\Gamma) \geq \gamma_k^d(\Gamma), a_k^d(\Gamma) \geq a_k(\Gamma), \\ a_k^d(\Gamma) &\geq a_{k+2}^o(\Gamma), \gamma_k^d(\Gamma) \geq \gamma_k^a(\Gamma) \text{ y } \gamma_k^d(\Gamma) \geq \gamma_{k+2}^o(\Gamma). \end{aligned}$$

En particular, si todo vértice de  $\Gamma$  tiene grado par y  $k$  es impar,  $k = 2l - 1$ , entonces toda  $(2l - 1)$ -alianza dual (global) en  $\Gamma$  es una  $(2l)$ -alianza dual (global). Por lo tanto, en este caso,  $a_{2l-1}^d(\Gamma) = a_{2l}^d(\Gamma)$  y  $\gamma_{2l-1}^d(\Gamma) = \gamma_{2l}^d(\Gamma)$ . Análogamente, si cada vértice de  $\Gamma$  tiene grado impar y  $k$  es par,  $k = 2l$ , entonces toda  $(2l)$ -alianza dual (global) en  $\Gamma$  es una  $(2l + 1)$ -alianza dual (global). Por lo tanto, en este caso,  $a_{2l}^d(\Gamma) = a_{2l+1}^d(\Gamma)$  y  $\gamma_{2l}^d(\Gamma) = \gamma_{2l+1}^d(\Gamma)$ .

## 3.2. Alianzas duales

Para algunas familias de grafos se puede calcular con facilidad el número de alianza dual global,  $\gamma_{-1}^d(\Gamma)$ :

- $\gamma_{-1}^d(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ,
- $\gamma_{-1}^d(P_n) = n - \lceil \frac{n}{3} \rceil$ ,
- $\gamma_{-1}^d(C_n) = n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ ,
- $p \leq s$ ,  $\gamma_{-1}^d(K_{p,s}) = \min \{ \lceil \frac{p+1}{2} \rceil + \lceil \frac{s+1}{2} \rceil, p + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor \}$ ,
- $\gamma_{-1}^d(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

En el caso del grafo completo, toda  $k$ -alianza defensiva es una  $(k + 2)$ -alianza ofensiva para todo  $k \in \{1 - n, \dots, n - 3\}$ . Por lo tanto,

$$a_k(K_n) = \gamma_k^a(K_n) = \gamma_{k+2}^o(K_n) = a_{k+2}^o(K_n) = a_k^d(K_n) = \gamma_k^d(K_n) = \left\lceil \frac{n + k + 1}{2} \right\rceil.$$

R. Brighan, R. Dutton y S. Hedetniemi en [1] obtuvieron el siguiente resultado.

**Teorema 79.** [1] *Si  $\Gamma = C_n \times C_m$ , entonces  $a_{-1}^d(\Gamma) \geq \frac{7mn}{12}$ .*

Aunque conocemos el valor de  $\gamma_k^d(\Gamma)$  para algunos grafos concretos, como veremos a continuación, el cálculo del cardinal de alianzas globales duales óptimas es bastante complicado.

**Problema de  $k$ -alianza dual global ( $k$ -ADG):**

Dado: un grafo  $G = (V, E)$  y un entero positivo  $r \leq |V|$ .

Pregunta: ¿existe una  $k$ -alianza dual global en  $\Gamma$  de cardinalidad menor o igual que  $r$ ?

**Teorema 80.** [13]  $\forall k$ :  $k$ -ADG es NP-completo.

A continuación obtenemos cotas tensas para  $\gamma_k^d(\Gamma)$  en función de parámetros conocidos de  $\Gamma$ .

**Teorema 81.** *Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$  y medida  $m$ ,*

$$\gamma_k^d(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{\sqrt{8m + 4n(k+2) + (k+1)^2} + k + 1}{4} \right\rceil.$$

*Demostración.* Si  $S$  es una  $(k+2)$ -alianza ofensiva global, entonces

$$\sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) \geq \sum_{v \in \bar{S}} \delta_{\bar{S}}(v) + (n - |S|)(k+2). \quad (3.1)$$

Como  $\sum_{v \in S} \delta_{\bar{S}}(v) = \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v)$ ,

$$\sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) \geq \left( 2m - \sum_{v \in S} \delta_S(v) - 2 \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) \right) + (n - |S|)(k+2). \quad (3.2)$$

Así,

$$3 \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) + \sum_{v \in S} \delta_S(v) \geq 2m + (n - |S|)(k + 2). \quad (3.3)$$

Por otro lado, si  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva global en  $\Gamma$ ,

$$\sum_{v \in S} \delta_S(v) \geq \sum_{v \in S} \delta_{\bar{S}}(v) + k|S|. \quad (3.4)$$

Por lo tanto, de (3.3) y (3.4) se tiene

$$4 \sum_{v \in S} \delta_S(v) \geq 2m + n(k + 2) + 2|S|(k - 1). \quad (3.5)$$

De  $|S|(|S| - 1) \geq \sum_{v \in S} \delta_S(v)$  y (3.5), se obtiene el resultado.  $\square$

La cota anterior se alcanza, por ejemplo, para el grafo completo  $\Gamma = K_n$ , para todo  $k \in \{1 - n, \dots, n - 3\}$ . Además, se alcanza para el grafo rueda de orden 5,  $\Gamma = W_5$ , en los siguientes casos:  $1 \leq \gamma_{-4}^d(W_5)$ ,  $2 \leq \gamma_{-3}^d(W_5)$ ,  $3 \leq \gamma_{-2}^d(W_5) = \gamma_{-1}^d(W_5)$  y  $4 \leq \gamma_1^d(W_5)$ .

El siguiente resultado se obtiene de (1.21) y (3.5).

**Teorema 82.** *Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$ , medida  $m$  y radio espectral  $\lambda$ ,*

$$\gamma_k^d(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{2m + (k + 2)n}{4\lambda - 2k + 2} \right\rceil.$$

La cota anterior es tensa, por ejemplo, se alcanza en el grafo de la Figura 3.2; en este caso se tiene que  $\lambda = \sqrt{6}$  y  $S = \{2, 7, 10\}$  es una  $(-1)$ -alianza dual global de cardinal mínimo. Además, se alcanza en el grafo de la Figura 3.3; en este caso  $\lambda = 1 + \sqrt{5}$  y  $S = \{2, 4, 6\}$  es una  $0$ -alianza dual global de cardinal mínimo.

**Teorema 83.** *Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$ , grado mínimo  $\delta$  y para todo  $k \in \{1 - \delta, \dots, \delta - 2\}$ ,  $\gamma_k^d(\Gamma) \leq n - \lfloor \frac{\delta - k}{2} \rfloor$ .*

Figura 3.2:

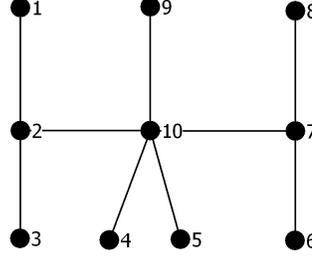
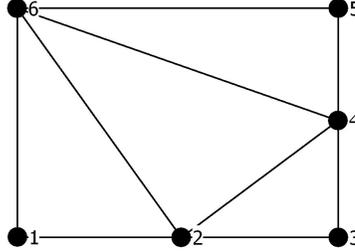


Figura 3.3:



*Demostración.* Sea  $v$  un vértice de grado mínimo en  $\Gamma$  y sea  $Y \subset N_V(v)$  tal que  $|Y| = \lceil \frac{\delta+k}{2} \rceil$ . Sea  $S = \{v\} \cup N_V(v) - Y$ . Entonces  $\bar{S}$  es un conjunto dominante. Además,

$$\delta_{\bar{S}}(v) = \left\lceil \frac{\delta+k}{2} \right\rceil \geq \left\lfloor \frac{\delta+k}{2} \right\rfloor = \delta - \left\lfloor \frac{\delta+k}{2} \right\rfloor + k = \delta_S(v) + k.$$

Así,

$$\delta_{\bar{S}}(u) \geq \delta_{\bar{S}}(v) \geq \delta_S(v) + k \geq \delta_S(u) + k, \quad \forall u \in S.$$

Por lo tanto,  $\bar{S}$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ .

Por otra parte, para todo  $v \in \bar{S}$  se cumple

$$\delta_{\bar{S}}(v) \geq \left\lceil \frac{\delta+k}{2} \right\rceil - 1 \geq \delta + k - \left\lfloor \frac{\delta+k}{2} \right\rfloor - 1 \geq \delta_S(v) + k - 2.$$

Así,  $\bar{S}$  es una  $(k-2)$ -alianza defensiva global en  $\Gamma$ . Por lo tanto,  $\bar{S}$  es una  $(k-2)$ -alianza dual global en  $\Gamma$ .  $\square$

Un ejemplo donde la cota anterior se alcanza es el grafo completo  $K_n$ . Además, si  $\Gamma$  es el octaedro, el Teorema 83 conduce a valores exactos en los siguientes casos:

$$5 \leq \gamma_2^d(\Gamma) = \gamma_1^d(\Gamma), 4 \leq \gamma_0^d(\Gamma) = \gamma_{-1}^d(\Gamma), 3 \leq \gamma_{-2}^d(\Gamma) = \gamma_{-3}^d(\Gamma) \text{ y } 2 \leq \gamma_{-4}^d(\Gamma).$$

### 3.2.1. Alianzas duales en grafos cúbicos

En el caso de los grafos cúbicos se cumple

$$\frac{n}{4} \leq \gamma(\Gamma) = \gamma_{-3}^d(\Gamma) \leq \gamma_{-2}^d(\Gamma) = \gamma_{-1}^d(\Gamma) \leq \gamma_0^d(\Gamma) = \gamma_1^d(\Gamma). \quad (3.6)$$

Así, en este caso sólo es necesario estudiar,  $\gamma_{-1}^d(\Gamma)$  y  $\gamma_0^d(\Gamma)$ .

Como consecuencia del Teorema 81 se obtiene que para todo grafo cúbico de orden  $n$ ,

$$\gamma_{-1}^d(\Gamma) \geq \sqrt{n}. \quad (3.7)$$

La cota anterior alcanza la igualdad para el grafo completo  $\Gamma = K_4$ .

**Teorema 84.** *Para todo grafo cúbico  $\Gamma$  de orden  $n$ ,  $\gamma_0^d(\Gamma) \geq \frac{3n}{4}$ .*

*Demostración.* Como  $\Gamma$  es un grafo cúbico se cumple que si  $S$  es una alianza dual global fuerte en  $\Gamma$ , entonces  $\bar{S}$  es un conjunto independiente. Por consiguiente,

$$3(n - |S|) \leq |S|. \quad (3.8)$$

Resolviendo (3.8) para  $|S|$ , se obtiene el resultado.  $\square$

Para  $\Gamma = C_3 \times K_2$  el Teorema 84 conduce a  $\gamma_0^d(\Gamma) \geq 5$ . Así, la cota se alcanza.

### 3.2.2. Alianzas duales en grafos planares

De manera análoga a como se hizo en los capítulos anteriores, en esta sección estudiamos las alianzas duales en grafos planares.

**Teorema 85.** *Sea  $\Gamma$  un grafo de orden  $n$  y medida  $m$ . Sea  $S$  una  $k$ -alianza dual global en  $\Gamma$  tal que el subgrafo  $\langle S \rangle$  es planar.*

$$(i) \text{ Si } n > 2(2 - k), \text{ entonces } |S| \geq \left\lceil \frac{2(m+24)+(k+2)n}{2(13-k)} \right\rceil.$$

$$(ii) \text{ Si } n > 2(2-k) \text{ y } \langle S \rangle \text{ es libre de triángulos, entonces } |S| \geq \left\lceil \frac{2(m+16)+(k+2)n}{2(9-k)} \right\rceil.$$

*Demostración.*

(i) De (3.5) y (1.29) se obtiene el resultado.

(ii) Como  $S$  satisface (1.30) y (3.5) se obtiene el resultado.

□

Como consecuencia del teorema anterior se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 86.** *Sea  $\Gamma$  un grafo planar de orden  $n$  y medida  $m$ .*

$$\blacksquare \text{ Si } n > 2(2 - k), \text{ entonces } \gamma_k^d(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{2(m+24)+(k+2)n}{2(13-k)} \right\rceil.$$

$\blacksquare$  *Si  $n > 2(2 - k)$  y  $\Gamma$  es un grafo libre de triángulos, entonces*

$$\gamma_k^d(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{2(m+16)+(k+2)n}{2(9-k)} \right\rceil.$$

En el caso del grafo de la Figura 2.8, el conjunto  $S = \{1, 2, 4\}$  es una  $k$ -alianza dual global de cardinal mínimo para  $k = -1$  y  $k = 0$ , y el primer resultado del Corolario 86 conduce a  $\gamma_k^d(\Gamma) \geq 3$ . El conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  es una  $k$ -alianza dual global de cardinal mínimo para  $k = 1$ , y el primer resultado del Corolario 86 conduce a  $\gamma_k^d(\Gamma) \geq 4$ . Además, si  $\Gamma = Q_3$  el segundo resultado del Corolario 86 conduce a valores exactos de  $\gamma_k^d$  en los siguientes caso:  $2 \leq \gamma_{-3}^d(Q_3)$  y  $4 \leq \gamma_{-2}^d(Q_3) = \gamma_{-1}^d(Q_3)$ .

**Teorema 87.** *Sea  $\Gamma$  un grafo de orden  $n$ . Si  $S$  es una  $k$ -alianza dual global tal que el subgrafo  $\langle S \rangle$  es conexo y planar con  $f$  caras, entonces*

$$|S| \geq \left\lceil \frac{2(m - 4f + 8) + n(k + 2)}{2(5 - k)} \right\rceil.$$

*Demostración.* De la fórmula de Euler y (3.5) se obtiene el resultado.  $\square$

En el grafo de la Figura 3.3 el conjunto  $S = \{2, 4, 6\}$  es una  $k$ -alianza dual global de cardinal mínimo para  $k \in \{-1, 0\}$ ,  $\langle S \rangle$  es planar y tiene 2 caras. En estos casos el Teorema 87 conduce a  $\gamma_k^d(\Gamma) \geq 3$ .

**Teorema 88.** *Sea  $T$  un árbol de orden  $n$ . Si  $S$  es una  $k$ -alianza dual global en  $T$  y el subgrafo  $\langle S \rangle$  tiene  $c$  componentes conexas, entonces*

$$|S| \geq \left\lceil \frac{n(k + 4) + 8c - 2}{2(5 - k)} \right\rceil.$$

*Demostración.* El resultado se deduce directamente de (3.5) y (1.34).  $\square$

Un ejemplo donde la cota anterior se alcanza es el grafo de la Figura 1.5, donde  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  es una  $(-1)$ -alianza dual global de cardinal mínimo y  $\langle S \rangle$  tiene dos componentes conexas. Además, la cota se alcanza para  $k = 0$  en el camino de orden  $n$ ,  $P_n$ , donde  $n = 2 + 3t$  ( $t \in \mathbb{N}$ ). En este caso  $|S| = n - t$  y  $c = t - 1$ .

Por el Corolario 76 se tiene que si  $S$  es una alianza dual global fuerte en  $T$  y el subgrafo inducido por  $S$  tiene  $c$  componentes conexas, entonces  $c \geq 2$ . Como consecuencia del Teorema 88 se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 89.** *Para todo árbol  $T$  de orden  $n$ ,*

$$\gamma_{-1}^d(T) \geq \left\lceil \frac{n + 2}{4} \right\rceil \quad y \quad \gamma_0^d(T) \geq \left\lceil \frac{2n + 7}{5} \right\rceil$$

Las cotas anteriores son tensas como se puede ver en los siguientes ejemplos. Para el árbol de la Figura 3.2 el Corolario 89 conduce a  $3 \leq \gamma_{-1}^d(T)$  y para el camino de orden 5 conduce a  $4 \leq \gamma_0^d(T)$ .

### 3.3. Conjuntos dominantes totales y alianzas

En este epígrafe estudiamos la generalización del concepto *dominación total* al caso de múltiple dominación. Un conjunto  $S \subset V$  es *r-dominante total* si  $\delta_S(v) \geq r, \forall v \in V$ . El *número de r-dominación total*,  $\gamma_{rt}(\Gamma)$ , es el mínimo cardinal de todos los conjuntos *r-dominantes totales* de  $\Gamma$ . Para  $r = 1$  obtenemos el concepto de dominación total introducido por Cockayne, Dawes and Hedetniemi en [6]. El *número de dominación total*, será denotado por  $\gamma_t(\Gamma)$ .

El concepto de 2-dominación total se diferencia del concepto de *doble dominación* introducido por Harary y Haynes en [18]. Un conjunto  $S \subset V$  es un conjunto *doble dominante* si  $\delta_S(v) \geq 2, \forall v \in \bar{S}$  y  $\delta_S(v) \geq 1, \forall v \in S$ . Evidentemente, todo conjunto doble dominante es un conjunto dominante total.

El número de 2-dominación total,  $\gamma_{2t}(\Gamma)$ , puede ser calculado con facilidad en algunas familias de grafos, por ejemplo, en los grafos completos,  $K_n$ , los grafos bipartitos completos,  $K_{p,s}$ , y los ciclos de orden  $n$ ,  $C_n$ .

- $\gamma_{2t}(K_n) = 3$ .
- $\gamma_{2t}(C_n) = n$ .
- $2 \leq p \leq s, \gamma_{2t}(K_{p,s}) = 4$ .

Es de esperar que el cálculo de  $\gamma_{rt}(\Gamma)$  sea difícil pues es conocido que el problema de encontrar  $\gamma_t(\Gamma)$  es NP-completo [6].

**Problema de r-dominación total (r-DT):**

Dado: un grafo  $G = (V, E)$  y un entero positivo  $k \leq |V|$ .

Pregunta: ¿para  $r \geq 1$ , existe un conjunto *r-dominante total* en  $\Gamma$  de cardinalidad menor o igual que  $k$ ?

**Teorema 90.** [13]  $\forall r: r\text{-DT}$  es NP-completo.

Si  $S \subset V$  es un conjunto  $r$ -dominante total de cardinal mínimo,  $\gamma_{rt}(\Gamma)$ , entonces, para todo  $v \in S$ ,  $S - \{v\}$  es un conjunto  $(r - 1)$ -dominante total. Así, si  $\Gamma$  contiene un conjunto  $r$ -dominante total con  $r \geq 2$ , entonces

$$\gamma_{rt}(\Gamma) \geq \gamma_{(r-1)t}(\Gamma) + 1. \quad (3.9)$$

**Teorema 91.** Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$  y grado máximo  $\Delta$ ,

$$\gamma_{rt}(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{rn}{\Delta} \right\rceil.$$

*Demostración.* Para todo  $S \subset V$  se cumple

$$\sum_{v \in S} \delta_{\bar{S}}(v) = \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v). \quad (3.10)$$

Por otro lado, si  $S$  es un conjunto  $r$ -dominante total en  $\Gamma$ , entonces

$$(n - |S|)r \leq \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v). \quad (3.11)$$

Además,

$$\sum_{v \in S} \delta_{\bar{S}}(v) \leq \sum_{v \in S} (\delta(v) - r) \leq (\Delta - r)|S|. \quad (3.12)$$

Así, combinando (3.10), (3.11) y (3.12) se obtiene el resultado.  $\square$

La cota anterior se alcanza, por ejemplo, para  $r = 1$  y  $r = 2$  en el grafo completo de orden 4; en este caso el Teorema 91 conduce a  $\gamma_t(\Gamma) \geq 2$  y  $\gamma_{2t}(\Gamma) \geq 3$ , respectivamente. Además, la cota se alcanza para  $r = 2$  en el 3-cubo; en este caso el Teorema 91 conduce a  $\gamma_{2t}(Q_3) \geq 6$ .

**Teorema 92.** Para todo grafo  $\Gamma$  de orden  $n$  y medida  $m$ ,  $\gamma_{rt}(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{2(rn-m)}{r} \right\rceil$ .

*Demostración.* Si  $S \subset V$ , entonces

$$2m \geq 2 \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) + \sum_{v \in S} \delta_S(v). \quad (3.13)$$

Además, si  $S$  es un conjunto  $r$ -dominante total, entonces

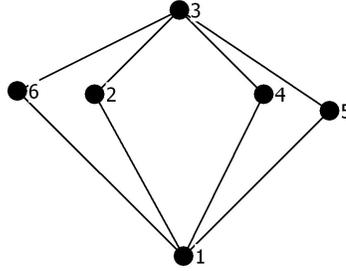
$$\sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v) \geq r(n - |S|) \quad (3.14)$$

y

$$\sum_{v \in S} \delta_S(v) \geq r|S|. \quad (3.15)$$

De (3.13), (3.14) y (3.15) se deduce el resultado.  $\square$

Figura 3.4:



La cota anterior se alcanza para el grafo de la Figura 3.4. En este caso para  $k = 2$  el Teorema 92 conduce a  $\gamma_{2t}(\Gamma) \geq 4$ . Nótese que cada conjunto de 4 vértices que forma un ciclo es un conjunto 2-dominante total de cardinal mínimo.

Si  $\Gamma$  es un grafo  $\delta$ -regular de orden  $n$ , entonces existe un conjunto  $(\delta - 1)$ -dominante total y  $\gamma_{(\delta-1)t}(\Gamma) \leq n - 1$ . Esto es, como  $\Gamma$  es  $\delta$ -regular, el conjunto  $S = V \setminus \{v\}$  con  $v \in V$  es un conjunto  $(\delta - 1)$ -dominante total.

Además, si  $\Gamma$  es libre de triángulos, entonces  $\gamma_{(\delta-1)t}(\Gamma) \leq n - 2$ . Para deducir esta cota consideremos el conjunto  $S = V \setminus \{u, v\}$  con  $u, v \in V$  tal

que  $u$  es adyacente a  $v$ . Si  $\Gamma$  es un grafo libre de triángulos, entonces todos los vértices de  $S$  tienen a lo sumo un vecino en  $\bar{S}$ . Por lo tanto,  $S$  es un conjunto  $(\delta - 1)$ -dominante total. Las cotas anteriores son tensas. La primera se alcanza para el grafo completo y la segunda se alcanza para el grafo bipartito completo  $K_{3,3}$  y para el grafo de Petersen.

**Teorema 93.**

- (i) *Todo conjunto  $r$ -dominante total es una  $k$ -alianza defensiva (ofensiva) global, para  $-\Delta < k \leq 2r - \Delta$ .*
- (ii) *Toda  $k$ -alianza dual global,  $k \geq 1$ , es un conjunto  $k$ -dominante total.*

*Demostración.*

- (i) Si  $S \subset V$  es un conjunto  $r$ -dominante total en  $\Gamma$  y  $k \leq 2r - \Delta$ , entonces

$$\delta_S(v) \geq r \geq k + \Delta - r \geq k + \delta(v) - r \geq k + \delta_{\bar{S}}(v), \quad \forall v \in V.$$

Por consiguiente,  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva y una  $k$ -alianza ofensiva en  $\Gamma$ .

- (ii) Si  $S \subset V$  es una  $k$ -alianza defensiva global, entonces  $\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k \geq k$ ,  $\forall v \in S$ . Además, si  $S \subset V$  es una  $(k + 2)$ -alianza ofensiva global, entonces  $\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k + 2 \geq k$ ,  $\forall v \in \bar{S}$ . Por lo tanto,  $\delta_S(v) \geq k$ ,  $\forall v \in V$ .

□

**Corolario 94.** *Todo conjunto  $r$ -dominante total es una  $k$ -alianza dual global, para  $-\Delta < k \leq 2(r - 1) - \Delta$ .*

**Corolario 95.**

- Para  $-\Delta < k \leq 2r - \Delta$ ,  $\gamma_{rt}(\Gamma) \geq \gamma_k^a(\Gamma)$  y  $\gamma_{rt}(\Gamma) \geq \gamma_k^o(\Gamma)$ .
- Para  $-\Delta < k \leq 2(r - 1) - \Delta$ ,  $\gamma_{rt}(\Gamma) \geq \gamma_k^d(\Gamma)$ .
- Para  $r \geq 1$ ,  $\gamma_r^d(\Gamma) \geq \gamma_{rt}(\Gamma)$ .

### 3.3.1. Conjuntos dominantes totales en grafos planares

**Teorema 96.** Para todo grafo planar  $\Gamma$  de orden  $n$ ,  $\gamma_{rt}(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n(r-2)+16}{6} \right\rceil$ .

*Demostración.* Sea  $\Gamma = (V, E)$  un grafo planar de orden  $n$  y sea  $S \subset V$ . Sea  $\Gamma' = (V, E')$  un subgrafo de  $\Gamma$  cuyo conjunto de aristas  $E'$  es el conjunto de todas las aristas en  $\Gamma$  con un vértice en  $S$  y el otro en  $\bar{S}$ . Como  $\Gamma'$  es un grafo planar libre de triángulos, entonces

$$2(|n| - 2) \geq |E'| = \sum_{v \in \bar{S}} \delta_S(v). \quad (3.16)$$

Si  $S \subset V$  es un conjunto  $r$ -dominante total, de (3.14) se tiene

$$2(|n| - 2) \geq r(n - |S|). \quad (3.17)$$

Además,  $\langle S \rangle = (S, E'')$  es planar. Por lo tanto,

$$6(|S| - 2) \geq 2|E''| = \sum_{v \in S} \delta_S(v) \geq r|S|. \quad (3.18)$$

De (3.17) y (3.18) se deduce el resultado. □

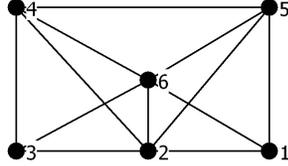
Las cotas anteriores son tensas. Por ejemplo, la primera se alcanza para el grafo de la Figura 3.3, donde  $S = \{2, 4, 6\}$  es un conjunto 2-dominante total de cardinal mínimo.

Como consecuencia del Teorema 92 se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 97.** Para todo grafo planar  $\Gamma$  de orden  $n$ ,  $\gamma_{rt}(\Gamma) \geq \frac{2[n(r-3)+6]}{r}$ . Además, si  $\Gamma$  es libre de triángulos, entonces  $\gamma_{rt}(\Gamma) \geq \frac{2[n(r-2)+4]}{r}$ .

Las cotas anteriores son tensas. Por ejemplo, la primera se alcanza para el grafo de la Figura 3.5, donde  $S = \{2, 4, 5, 6\}$  es un conjunto 3-dominante total de cardinal mínimo. La segunda cota se alcanza para el grafo de la Figura 3.4, en este caso se obtiene que  $\gamma_{2t}(\Gamma) \geq 4$ .

Figura 3.5:



### 3.4. Cubrimientos y conjuntos libres de alianzas. Definiciones

Un conjunto  $X \subseteq V$  es *libre de  $k$ -alianzas* (defensivas, ofensivas o duales) en  $\Gamma = (V, E)$  si para toda  $k$ -alianza  $S$  (defensiva, ofensiva o dual) se cumple que  $S \setminus X \neq \emptyset$ , es decir,  $X$  no contiene ninguna  $k$ -alianza como subconjunto [38]. Un conjunto libre de  $k$ -alianzas  $X$  es *maximal* si para todo  $v \notin X$ , existe  $S \subseteq X$  tal que  $S \cup \{v\}$  es una  $k$ -alianza. En esta sección usaremos la siguiente notación.

- $\phi_k(\Gamma)$ : mayor cardinal entre todos los conjuntos libres de  $k$ -alianzas defensivas maximales en  $\Gamma$ .
- $\phi_k^o(\Gamma)$ : mayor cardinal entre todos los conjuntos libres de  $k$ -alianzas ofensivas maximales en  $\Gamma$ .

Si un grafo  $\Gamma = (V, E)$  no contiene  $k$ -alianzas defensivas (para algún  $k$ ), se dice que  $\phi_k(\Gamma) = |V| = n$ . Por ejemplo, en el caso de los caminos,  $\phi_k(P_n) = n$ ,  $k > 1$ .

Un conjunto no vacío  $Y \subset V$  es un *cubrimiento de  $k$ -alianzas* (defensivas, ofensivas o duales), si para toda  $k$ -alianza  $S$  (defensiva, ofensiva o dual),  $S \cap Y \neq \emptyset$ , es decir,  $Y$  contiene al menos un vértice de cada  $k$ -alianza de  $\Gamma$ .

Un cubrimiento de  $k$ -alianzas es *minimal* si no contiene ningún subconjunto que sea un cubrimiento de  $k$ -alianzas. En esta sección usaremos la siguiente notación.

- $\zeta_k(\Gamma)$ : menor cardinal entre todos los cubrimientos minimales de  $k$ -alianzas defensivas en  $\Gamma$ .
- $\zeta_k^o(\Gamma)$ : menor cardinal entre todos los cubrimientos minimales de  $k$ -alianzas ofensivas en  $\Gamma$ .

Si un grafo  $\Gamma = (V, E)$  no contiene  $k$ -alianzas defensivas (para algún  $k$ ), se dice que  $\zeta_k(\Gamma) = 0$ .

Para el caso de alianzas ofensivas se definen los conceptos anteriores en sentido débil. Esto es, un conjunto no vacío  $X \subseteq V$  es *libre de  $k$ -alianzas ofensivas (globales) en sentido débil*, si para toda  $k$ -alianza ofensiva (global)  $S$ ,  $(S \cup \partial S) \setminus X \neq \emptyset$ .  $\phi_k^w(\Gamma)$  denotará el mayor cardinal entre todos los conjuntos libres de  $k$ -alianzas ofensivas, en sentido débil, maximales en  $\Gamma$ . De forma similar, un conjunto no vacío  $Y \subseteq V$  es un *cubrimiento de  $k$ -alianzas ofensivas (globales) en sentido débil*, si para toda  $k$ -alianza ofensiva (global)  $S$ ,  $(S \cup \partial S) \cap Y \neq \emptyset$ .  $\zeta_k^w(\Gamma)$  denotará el menor cardinal entre todos los cubrimientos minimales de  $k$ -alianzas ofensivas, en sentido débil, en  $\Gamma$ .

### 3.5. Cubrimientos y conjuntos libres de alianzas

Para algunas familias de grafos se pueden calcular los parámetros  $\phi_k(\Gamma)$  y  $\phi_k^o(\Gamma)$  [38]:

- Para  $-n < k < n$ ,

$$\phi_k(K_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{k}{2} \rceil & \text{para } n \text{ impar;} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

- Para  $-p < k < p$  y  $p \leq q$ ,

$$\phi_k(K_{p,q}) = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + \lceil \frac{p}{2} \rceil + q - 1 & \text{para } p \text{ impar;} \\ \lceil \frac{p}{2} \rceil + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + q - 1 & \text{para } p \text{ par.} \end{cases}$$

- Para  $-p + 2 < k < q$  y  $p \leq q$ ,

$$\phi_k^o(K_{p,q}) = \begin{cases} \lceil \frac{p}{2} \rceil + \lceil \frac{q}{2} \rceil + 2 \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2 & \text{para } p \text{ y } q \text{ pares;} \\ \lceil \frac{p}{2} \rceil + \lceil \frac{q}{2} \rceil + 2 \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2 & \text{para } p \text{ y } q \text{ impares;} \\ \lceil \frac{p}{2} \rceil + \lceil \frac{q}{2} \rceil + k - 2 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- Para  $-p + 2 < k < q$ ,  $p, q \neq 1$  y  $p \leq q$ ,  $\phi_k^w(K_{p,q}) = n - 2$ .
- Para  $-n + 3 < k < n$ ,  $\phi_k^o(K_n) = \lceil \frac{n+k}{2} \rceil - 1$ .
- Para  $-n + 3 < k < n$ ,  $\phi_k^w(K_n) = n - 1$ .

Además, en [38] se muestran los siguientes resultados.

**Teorema 98.** [38]  $X \subseteq V$  es un cubrimiento de  $k$ -alianzas si y sólo si  $\bar{X}$  es libre de  $k$ -alianzas.

**Corolario 99.** [38] Si  $\Gamma$  es un grafo de orden  $n$ , entonces

$$\phi_k(\Gamma) + \zeta_k(\Gamma) = \phi_k^o(\Gamma) + \zeta_k^o(\Gamma) = \phi_k^w(\Gamma) + \zeta_k^w(\Gamma) = n.$$

**Corolario 100.** [38] Si  $\Gamma$  es un grafo de orden  $n$ , entonces

- Si  $X$  es un cubrimiento de  $k$ -alianzas defensivas (ofensivas) minimal, entonces para todo  $v \in X$ , existe una  $k$ -alianza defensiva (ofensiva)  $S_v$  para la cual  $S_v \cap X = \{v\}$ .
- Si  $X$  es un cubrimiento de  $k$ -alianzas ofensivas en el sentido débil, entonces para todo  $v \in X$ , existe una  $k$ -alianza ofensiva  $S_v$  para la cual  $[S_v \cup \partial S_v] \cap X = \{v\}$ .

**Teorema 101.** [38] Sea  $\Gamma$  un grafo conexo de orden  $n$  y número de independencia  $\alpha_0(\Gamma)$ . Para  $-\delta < k \leq \Delta$ ,

$$\alpha_0(\Gamma) + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil - 1 \leq \phi_k(\Gamma) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil.$$

**Teorema 102.** [38] Sea  $\Gamma$  un grafo conexo de orden  $n$ . Para  $0 \leq k \leq \Delta$ ,

$$\phi_k(\Gamma) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor.$$

**Teorema 103.** [38] Sea  $\Gamma$  un grafo y  $r$  un entero tal que  $r \geq 2$ . Entonces para todo  $k \geq 2 - r$ , existe un grafo  $\Gamma'$  que contiene a  $\Gamma$  como subgrafo inducido y  $\zeta_k(\Gamma') = r$ .

**Teorema 104.** [38] Sea  $\Gamma$  un grafo y  $r$  un entero tal que  $r \geq 1$ . Entonces existe un grafo  $\Gamma'$  con  $\zeta_k^w(\Gamma') = r$  que contiene a  $\Gamma$  como subgrafo inducido.

**Teorema 105.** [38] Para todo grafo conexo  $\Gamma$ , si  $X$  es un conjunto libre de alianzas ofensivas maximal en sentido débil, entonces

- (i)  $\forall k_2 > -k_1$ ,  $\bar{X}$  es un conjunto libre de  $k_2$ -alianzas ofensivas globales en el sentido débil, y
- (ii)  $\forall k_2 > \max(-k_1, -\delta)$ ,  $\bar{X}$  es un conjunto libre  $k_2$ -alianzas defensivas.

A continuación mostramos los resultados obtenidos.

**Teorema 106.** Todo conjunto libre  $k$ -alianzas defensivas maximal en  $\Gamma$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ .

*Demostración.* Si  $X \subset V$  es conjunto libre de  $k$ -alianzas defensivas maximal en  $\Gamma$ , entonces  $\bar{X}$ , es un cubrimiento de  $k$ -alianzas defensivas minimal. Así, para todo  $v \in \bar{X}$  existe una  $k$ -alianza defensiva  $S_v$  tal que  $S_v \cap \bar{X} = \{v\}$ . Luego,  $\delta_{S_v}(v) \geq \delta_{\bar{S}_v}(v) + k$ . Por lo tanto,

$$\delta_X(v) \geq \delta_{S_v}(v) \geq \delta_{\bar{S}_v}(v) + k \geq \delta_{\bar{X}}(v) + k.$$

Así, para todo  $v \in \bar{X}$ , se tiene  $\delta_X(v) \geq \delta_{\bar{X}}(v) + k$ . En consecuencia,  $X$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ .  $\square$

Teniendo en cuenta la definición de  $k$ -alianza ofensiva, en el Teorema 106 sólo consideramos los casos donde  $-\Delta + 2 < k \leq \Delta$ . En consecuencia, a lo largo de esta sección se asume que  $k$  sólo toma los valores que dan sentido al resultado.

**Corolario 107.**  $\phi_k(\Gamma) \geq \gamma_k^o(\Gamma)$  y  $\zeta_k(\Gamma) \leq n - \gamma_k^o(\Gamma)$ .

**Teorema 108.** Si  $X \subset V$  es una  $k$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma = (V, E)$ , entonces  $\bar{X}$  es un conjunto libre de  $(1 - k)$ -alianzas defensivas en  $\Gamma$ .

*Demostración.* Si  $X \subset V$  es una  $k$ -alianza ofensiva global, entonces para todo  $v \in \bar{X}$  se tiene  $\delta_X(v) + 1 - k > \delta_{\bar{X}}(v)$ . Por tanto, el conjunto  $\bar{X}$  no es una  $(1 - k)$ -alianza defensiva. Además, si  $Y \subset \bar{X}$ , entonces para todo  $y \in Y$  se tiene  $\delta_Y(y) + 1 - k \geq \delta_X(y) + 1 - k > \delta_{\bar{X}}(y) \geq \delta_Y(y)$ . Así, el conjunto  $Y$  no es una  $(1 - k)$ -alianza defensiva. Por lo tanto,  $\bar{X}$  es un conjunto libre de  $(1 - k)$ -alianzas defensivas en  $\Gamma$ .  $\square$

Del Teorema 106 y el Teorema 108 se deduce el siguiente resultado: si  $X \subset V$  es un conjunto libre de  $k$ -alianzas defensivas maximal en  $\Gamma$ , entonces  $\bar{X}$  es un conjunto libre de  $(1 - k)$ -alianzas defensivas. Un resultado equivalente es: si  $Y \subset V$  es un cubrimiento minimal de  $k$ -alianzas defensivas en  $\Gamma$ , entonces  $Y$  es un conjunto libre de  $(1 - k)$ -alianzas defensivas en  $\Gamma$ .

**Teorema 109.** Todo cubrimiento minimal de  $k$ -alianzas ofensivas en el sentido débil en  $\Gamma$ , con  $2 - \Delta < k \leq \delta$ , es un conjunto libre de  $(1 - k)$ -alianzas defensivas en  $\Gamma$ .

*Demostración.* Si  $X \subset V$  es un cubrimiento minimal de  $k$ -alianzas ofensivas en el sentido débil, entonces para todo  $v \in X$  existe una  $k$ -alianza ofensiva,  $S_v$ , tal que  $(S_v \cup \partial S_v) \cap X = \{v\}$ .

Supongamos que para cada  $v \in X$ ,  $v \in S_v$ . En este caso  $X$  es un conjunto independiente. En consecuencia,  $0 = \delta_X(v) < \delta_{\bar{X}}(v) + (1 - k)$ . Por lo tanto,  $X$  no es una  $(1 - k)$ -alianza defensiva.

Si  $v \in \partial S_v$ , para algún  $v \in X$ , entonces  $\delta_{\bar{X}}(v) \geq \delta_{S_v}(v) \geq \delta_{\bar{S}_v}(v) + k \geq \delta_X(v) + k$ . Luego,

$$\delta_X(v) < \delta_{\bar{X}}(v) + (1 - k).$$

Por lo tanto,  $X$  no es una  $(1 - k)$ -alianza defensiva.

Si  $Y \subset X$ , entonces razonando como antes se concluye que  $Y$  no es una  $(1 - k)$ -alianza defensiva. Luego, se obtiene el resultado.  $\square$

**Teorema 110.** *Si  $X \subset V$  es un cubrimiento minimal de  $k$ -alianzas ofensivas globales en  $\Gamma = (V, E)$ , entonces  $\bar{X}$  es una  $(k - 2)$ -alianza ofensiva global en  $\Gamma$ .*

*Demostración.* Si  $X \subset V$  es un cubrimiento minimal de  $k$ -alianzas ofensivas globales, entonces para todo  $v \in X$  existe una  $k$ -alianza ofensiva global,  $S_v$ , tal que  $S_v \cap X = \{v\}$ . Luego,

$$1 + \delta_{\bar{X}}(u) \geq \delta_{S_v}(u) \geq \delta_{\bar{S}_v}(u) + k \geq \delta_X(u) + k - 1$$

para cada  $u \in \bar{S}_v$ . Como  $X \setminus \{v\} \subset \bar{S}_v$ , se obtiene  $\delta_{\bar{X}}(u) \geq \delta_X(u) + k - 2$  para cada  $u \in X \setminus \{v\}$ . Por lo tanto,  $\bar{X}$  es una  $(k - 2)$ -alianza ofensiva global.  $\square$

Nótese que si  $X$  es un conjunto independiente, entonces para todo  $v \in X$ ,  $S_v = \bar{X} \cup \{v\}$  es una  $k$ -alianza ofensiva global ( $k \leq \delta$ ) tal que  $S_v \cap X = \{v\}$ .

**Teorema 111.** *Si  $X \subset V$  es una  $k$ -alianza defensiva en  $\Gamma$ ,  $1 - \Delta < k \leq \delta$ , entonces  $\bar{X}$  es un conjunto libre de  $(1 - k)$ -alianzas ofensivas globales en  $\Gamma$ .*

*Demostración.* Si  $X \subset V$  es una  $k$ -alianza defensiva, entonces para cada  $v \in X$  se tiene  $\delta_{\bar{X}}(v) < \delta_X(v) + (1 - k)$ . Así,  $\bar{X}$  no es una  $(1 - k)$ -alianza ofensiva global. Supongamos que  $S \subset \bar{X}$  es una  $(1 - k)$ -alianza ofensiva

global. En este caso se tiene  $\delta_{\bar{X}}(v) \geq \delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + 1 - k \geq \delta_X(v) + 1 - k$  para cada  $v \in \bar{S}$ . Como  $X \subset \bar{S}$ , se tiene  $\delta_{\bar{X}}(v) + k > \delta_X(v)$  para cada  $v \in X$ , lo que es una contradicción. Luego, se obtiene el resultado.  $\square$

K. H. Shafique y R. D. Dutton en [39] obtuvieron el siguiente resultado.

**Lema 112.** [39] *Si cada bloque<sup>1</sup> de  $\Gamma$  es un clique impar, entonces*

$$\phi_0(\Gamma) \leq \zeta_0(\Gamma).$$

**Teorema 113.** *Sea  $\Gamma$  un grafo cúbico de orden  $n$ . Si cada bloque de  $\Gamma$  es un ciclo impar, entonces  $\gamma_1^o(\Gamma) = \frac{n}{2}$ .*

*Demostración.* Del Lema 112 y  $\phi_0(\Gamma) + \zeta_0(\Gamma) = n$ , se obtiene  $\phi_0(\Gamma) \leq \frac{n}{2}$ . Además, del Teorema 108 se deduce que,  $n - \gamma_1^o(\Gamma) \leq \phi_0(\Gamma)$ . Por tanto,  $\gamma_1^o(\Gamma) \geq \frac{n}{2}$ . Por el Teorema 61 se obtiene el resultado.  $\square$

Nótese que si  $S$  es una  $k$ -alianza ofensiva global independiente en  $\Gamma$  con  $k > 0$ , entonces  $S$  y  $\bar{S}$  son conjuntos libres de alianzas defensivas fuertes.

Si  $S$  es una  $k$ -alianza defensiva de cardinal mínimo,  $a_k(\Gamma)$ , entonces para todo  $v \in S$  se tiene que  $S \setminus \{v\}$  es un conjunto libre de  $k$ -alianzas defensivas. En consecuencia,

$$\phi_k(\Gamma) \geq a_k(\Gamma) - 1. \quad (3.19)$$

De manera similar al razonamiento anterior se tiene,

$$\phi_k^o(\Gamma) \geq a_k^o(\Gamma) - 1, \quad (3.20)$$

Así, las cotas inferiores de  $a_k(\Gamma)$  (respectivamente  $a_k^o(\Gamma)$ ) nos dan cotas inferiores para  $\phi_k(\Gamma)$  (respectivamente  $\phi_k^o(\Gamma)$ ). Por ejemplo, como consecuencia del Teorema 10 se obtiene el siguiente resultado.

<sup>1</sup>Un bloque es subgrafo 2-conexo maximal.

**Corolario 114.** Si  $\Gamma$  es un grafo simple de orden  $n$  y conectividad algebraica  $\mu$ , entonces

$$\phi_k(\Gamma) \geq \left\lceil \frac{n(k + \mu) - \mu}{n + \mu} \right\rceil.$$

**Teorema 115.** Sea  $\Gamma$  un grafo simple de orden  $n$  y grado mínimo  $\delta$ . Entonces

$$\left\lceil \frac{\delta + k - 2}{2} \right\rceil \leq \phi_k^o(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{2n - \delta + k - 3}{2} \right\rfloor.$$

*Demostración.* Si  $X$  es un conjunto libre de  $k$ -alianzas ofensivas en  $\Gamma$ , entonces  $\delta_X(v) + 1 \leq \delta_{\bar{X}}(v) + k$ , para algún  $v \in \partial X$ . Por tanto,

$$\delta(v) + 1 - k \leq 2\delta_{\bar{X}}(v) \leq 2(n - |X| - 1).$$

Así, se deduce la cota superior para  $\phi_k^o(\Gamma)$ . La cota inferior es consecuencia directa del Teorema 50.  $\square$

A partir de los resultados anteriores se pueden obtener cotas superiores e inferiores para  $\zeta_k(\Gamma)$  y  $\zeta_k^o(\Gamma)$ . Por ejemplo, del Corolario 99 y del Teorema 115 se deduce el siguiente resultado.

$$\left\lceil \frac{\delta + 3 - k}{2} \right\rceil \leq \zeta_k^o(\Gamma). \quad (3.21)$$

# Conclusiones

En este trabajo se estudian algunas propiedades matemáticas de las  $k$ -alianzas en grafos prestando especial interés a la relación que existe entre el número de  $k$ -alianza (defensiva, ofensiva y dual) y otros parámetros conocidos como, por ejemplo, el orden, la medida, el cuello, el diámetro, el número de independencia, el número de dominación, la conectividad algebraica y el radio espectral. En algunos casos, se dan fórmulas cerradas para el número de  $k$ -alianza y, en general, se obtienen cotas tensas no triviales para dicho parámetro. En el caso del grafo línea, se obtienen resultados sobre el número de alianza (defensiva y ofensiva) en función de parámetros conocidos del grafo original. A lo largo de toda la memoria, se estudian los casos particulares de grafos planares y de grafos cúbicos. Hemos estudiado, además, la relación entre alianzas defensivas y ofensivas, así como las principales propiedades de los conjuntos libres de  $k$ -alianzas y de los cubrimientos de  $k$ -alianzas. Otra de las aportaciones de esta memoria es el inicio del estudio de las  $k$ -alianzas conexas y de las  $k$ -alianzas independientes, así como el estudio de la relación entre los conjuntos  $k$ -dominantes totales y las  $k$ -alianzas (defensivas, ofensivas y duales).

El volumen y la calidad de los resultados presentados en esta memoria nos ha permitido elaborar varios artículos. Algunos de ellos han sido publicados en revistas internacionales [29, 30, 31, 34, 42] y otros están en vías de

publicación [14, 33, 35, 37, 44]. Además, los principales resultados han sido dados a conocer mediante la presentación de comunicaciones en congresos internacionales [13, 32, 36, 43].

## Proponemos los siguientes problemas abiertos y futuros trabajos

- Encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para la existencia de  $k$ -alianzas.
- Encontrar otras condiciones necesarias y/o suficientes para la existencia de  $k$ -alianzas ofensivas independientes.
- Estudiar la complejidad computacional del cálculo de  $a_k$ ,  $a_k^d$ ,  $\phi_k$ ,  $\phi_k^o$  y  $\phi_k^w$ .
- Estudiar los cubrimientos y los conjuntos libres de  $k$ -alianzas duales.
- Estudiar las particiones del conjunto de vértices de un grafo en  $k$ -alianzas (defensivas, ofensivas y duales).
- Caracterizar los grafos para los que se alcanzan las cotas obtenidas.
- Encontrar nuevas relaciones entre las  $k$ -alianzas y otros parámetros en grafos.
- Explorar las posibles relaciones entre las  $k$ -alianzas de un grafo y las de su complemento.
- Extender el estudio realizado a grafos con pesos.

# Bibliografía

- [1] R. Brigham, R. Dutton and S.Hedetniemi, A sharp lower bound on the powerful alliance number of  $C_m \times C_n$ , *Congr. Numer.* **167** (2004) 57-63.
- [2] A. Cami, H. Balakrishnam, N. Deo and R. D. Dutton, On the complexity of some global alliance problems, *Proceedings of the 18th Midwest Conference on Combinatorics, Cryptography and Computing, Rochester, NY* (2004) 9 pages.
- [3] M. Chellali, Offensive alliance in Trees, *AKCE-International Journal of graphs and combinatorics*. Submitted 2006.
- [4] Mustapha Chellali and Teresa W. Haynes, Global aliances and independence in tree, *Discussiones Mathematicae Graphs Theory* **27** (1) (2007) 19-27.
- [5] E. J. Cockayne, B. Gamble, B. Shepherd, An upper bound for the  $k$ -domination number of a graph, *J. Graph Theory* **9** (4) (1985) 533-534.
- [6] E. J. Cockayne, R. Dawes and S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs, *Networks* **10** (1980) 211-215.
- [7] P. Dickson and K. Weaver, Alliance formation: the ralitionsip between national RD intensity and SME size, *Proceedings of ICSB 50<sup>th</sup> world conferense D.C.* (2005) 123-154.

- 
- [8] F. M. Dong, K. M. Koh and K. L. Teo, Bounded degree independent sets in planar graphs, *Theory Comput. Syst.* **38** (3) (2002) 253-278.
- [9] O. Favaron, On a conjecture of Fink and Jacobson concerning  $k$ -domination and  $k$ -dependence, *J. Comb. Theory Ser. B* **39** (1985) 101-102.
- [10] O. Favaron, G. Fricke, W. Goddard, S. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, P. Kristiansen, R. C. Laskar and R. D. Skaggs, Offensive alliances in graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* **24** (2) (2004) 263-275.
- [11] O. Favaron, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi and D. F. Rall, On  $k$ -dependent domination, *Discrete Mathematics* **249** (2002) 83-94.
- [12] H. Fernau and D. Raible, Alliances in Graphs: a complexity-theoretic study, *Proceedings of SOFSEM07 (2007)* 10 pages.
- [13] H. Fernau, J. A. Rodríguez-Velázquez and J. M. Sigarreta, Global r-alliances and total domination, *EUROCOM'07*. Submitted.
- [14] H. Fernau, J. A. Rodríguez-Velázquez and J. M. Sigarreta, Offensiva  $k$ -alliances in graphs, *Discrete Applied Mathematics*. Submitted.
- [15] M. Fiedler, A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory, *Czechoslovak Math. J.* **25** (100) (1975) 619-633.
- [16] G. W. Flake, S. Lawrence, and C. L. Giles, Efficient Identification of Web Communities, *Proceedings of the 6th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD-2000)*, (2000) 150-160.

- 
- [17] G. H. Fricke, L. M. Lawson, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi and S. T. Hedetniemi, A Note on Defensive Alliances in Graphs, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **38** (2003) 37-41.
- [18] F. Harary and T. W. Haynes, Double domination in graphs, *Ars Combinatoria* **55** (2000) 201-213.
- [19] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning, Global defensive alliances in graphs, *Electron. J. Combin.* **10** (2003) 139-146.
- [20] T. W. Haynes, T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, New York (1998).
- [21] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and M. A. Henning, A characterization of trees with equal domination and global strong alliance number, *Util. Math.* **66** (2004) 105-119.
- [22] T. Haynes, D. Knisley, E. Seier, and Y. Zou, A quantitative analysis of secondary RNA structure using domination based parameters on trees, *BMC Bioinformatics* **7** (108) (2006) 11 pages.
- [23] S.T. Hedetniemi, R. Laskar, Connected domination in graphs, *Proceedings of the Cambridge Combinatorial Conference*, Academic Press, London (1984) 161-169.
- [24] L. Jiong-Sheng and Z. Xiao-Dong, A New Upper bound for eigenvalues of the Laplacian Matrix of a Graph, *Linear Algebra and Applications* **265** (1997) 93-100.
- [25] B. J. Kim and J. Liu, Instability of defensive alliances in the predator-prey model on complex networks, *Phys. Rev. E* **72**, 041906 (2005) 5 pages.

- 
- [26] P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi and S. T. Hedetniemi, Alliances in graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **48** (2004) 157-177.
- [27] M. Powel, Alliance in graph, *Proceeding presented in th 255 of the United state Military Academy* (2004) 1350-1415.
- [28] J. A. Rodríguez, Laplacian eigenvalues and partition problems in hypergraphs, *Mathematics Preprint Archive*, Volume **2004**, Issue 3, March 2004, Pages 183-196. *Applied Mathematics Letters*. Submitted 2006.
- [29] J. A. Rodríguez and J. M. Sigarreta, Offensive alliances in cubic graphs, *International mathematical forum* **1** (36) (2006) 1773-1782.
- [30] J. A. Rodríguez and J. M. Sigarreta, Spectral study of alliances in graphs, *Discussiones Mathematicae Graphs Theory* **27** (1) (2007) 143-157.
- [31] J. A. Rodríguez and J. M. Sigarreta, Global alliances in planar graphs, *AKCEI-nternational Journal of graphs and combinatorics.* **4** (1) (2007). In press.
- [32] J. A. Rodríguez and J. M. Sigarreta, Defensive alliances in graphs, *International Congress of Mathematicians*. ICM-2006, Abstracts 489-490.
- [33] J. A. Rodríguez-Velázquez and J. M. Sigarreta, Alliances versus cover and alliances free sets, *Discrete math. Theor. Cumput. Sci.* Submitted.
- [34] J. A. Rodríguez-Velázquez and J. M. Sigarreta, Global offensive alliances in graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **25** (2006) 157-164.
- [35] J. A. Rodríguez-Velázquez and J. M. Sigarreta, Global defensive  $k$ -alliances in graphs, *Discrete Applied Mathematics*. Submitted.

- 
- [36] J. A. Rodríguez-Velázquez, I. González-yero and J. M. Sigarreta, Mathematical properties of k-web communities, *INFORMÁTICA-2007. III Taller Internacional de Calidad en las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones*. Proceedings ISBN: 978-959-286-002-5. CAL-019, 9 pages.
- [37] J. A. Rodríguez-Velázquez, I. González-yero and J. M. Sigarreta, Defensive k-alliances in graphs, *Applied Mathematics Letters*. Submitted.
- [38] K. H. Shafique and R. D. Dutton, Maximum alliance-free and minimum alliance-cover sets, *Congr. Numer.* **162** (2003) 139-146.
- [39] K. H. Shafique and R. Dutton, A tight bound on the cardinalities of maximum alliance-free and minimum alliance-cover sets, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **56** (2006) 139-145.
- [40] K. H. Shafique, *Partitioning a Graph in Alliances and its Application to Data Clustering*, Ph. D. Thesis 2004.
- [41] K. H. Shafique and R. D. Dutton, On satisfactory partitioning of graphs, *Congress Numeratum* **154** (2002) 183-194.
- [42] J. M. Sigarreta and J. A. Rodríguez, On defensive alliance and line graphs, *Applied Mathematics Letters* **19** (12) (2006) 1345-1350.
- [43] J. M. Sigarreta and J. A. Rodríguez, Global offensive alliances in graphs, *Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization. CTW-2006*. Abstracts 122-130.
- [44] J. M. Sigarreta and J. A. Rodríguez, On the global offensive alliance number of a graphs, *Discrete Applied Mathematics*. Submitted.
- [45] G. Szabö and T. Czárán, Defensive alliances in spatial models of cyclical population interactions, *Phys. Rev. E* **64**, 042902 (2001) 11 pages.



# Glosario de símbolos

$\Gamma = (V, E)$ , grafo finito no dirigido y simple.

$\Gamma_1 \times \Gamma_2$ , producto cartesiano de  $\Gamma_1$  por  $\Gamma_2$ .

$|V| = n$ , orden de  $\Gamma$ .

$|E| = m$ , medida de  $\Gamma$ .

$\delta(v_i) = \delta_i$ , grado de un vértice  $v_i \in V$ .

$\delta$ , grado mínimo de  $\Gamma$ .

$\Delta$ , grado máximo de  $\Gamma$ .

$\lambda$ , radio espectral de  $\Gamma$ .

$\mu$ , conectividad algebraica de  $\Gamma$ .

$\mu_*$ , radio espectral de la matriz laplaciana de  $\Gamma$ .

$\mathcal{L}(\Gamma) = (V_l, E_l)$ , grafo línea de  $\Gamma$ .

$\delta_l$ , grado mínimo de  $\mathcal{L}(\Gamma)$ .

$\Delta_l$ , grado máximo de  $\mathcal{L}(\Gamma)$ .

$\mu_l$ , conectividad algebraica de  $\mathcal{L}(\Gamma)$ .

$\Pi(\Gamma) = \{V_1, V_2\}$ , bipartición de los vértices de  $\Gamma$ .

$|X|$ , cardinal del conjunto  $X$ .

$\langle X \rangle$ , subgrafo inducido por el conjunto  $X$ .

$\bar{X}$ , complemento del conjunto  $X \subseteq V$  en  $V$ .

$N_X(v)$ , conjunto de vecinos de  $v \in V$  en  $X \subset V$ .

$\delta_X(v) = |N_X(v)|$ , grado del vértice  $v$  en  $X$ .

$\partial(X)$ , frontera del conjunto  $X$ .

$\lceil X \rceil$ , parte entera superior de  $X$ .

$\lfloor X \rfloor$ , parte entera inferior de  $X$ .

$a_{-1}(\Gamma) = a(\Gamma)$ , número de alianza defensiva de  $\Gamma$ .

$a_0(\Gamma) = \hat{a}(\Gamma)$ , número de alianza defensiva fuerte de  $\Gamma$ .

$a_k(\Gamma)$ , número de  $k$ -alianza defensiva de  $\Gamma$ .

$a_{-1}^d(\Gamma)$ , número de alianza dual de  $\Gamma$ .

$a_0^d(\Gamma)$ , número de alianza dual fuerte de  $\Gamma$ .

$a_k^d(\Gamma)$ , número de  $k$ -alianza dual de  $\Gamma$ .

$a_1^i(\Gamma)$ , número de alianza ofensiva independiente de  $\Gamma$ .

$a_2^i(\Gamma)$ , número de alianza ofensiva independiente fuerte de  $\Gamma$ .

$a_k^i(\Gamma)$ , número de  $k$ -alianza ofensiva independiente de  $\Gamma$ .

$a_1^o(\Gamma)$ , número de alianza ofensiva de  $\Gamma$ .

$a_2^o(\Gamma)$ , número de alianza ofensiva fuerte de  $\Gamma$ .

$a_k^o(\Gamma)$ , número de  $k$ -alianza ofensiva de  $\Gamma$ .

$\alpha_0(\Gamma)$ , número de independencia de  $\Gamma$ .

$\alpha_k(\Gamma)$ , número de  $k$ -dependencia de  $\Gamma$ .

$\epsilon(\Gamma)$ , medida del mínimo conjunto de aristas dominantes de  $\Gamma$ .

$\varepsilon(\Gamma)$ , arista conectividad de  $\Gamma$ .

$\phi_k(\Gamma)$ , mayor cardinal entre todos los conjuntos libres de  $k$ -alianzas defensivas maximales en  $\Gamma$ .

$\phi_k^o(\Gamma)$ , mayor cardinal entre todos los conjuntos libres de  $k$ -alianzas ofensivas maximales en  $\Gamma$ .

$\phi_k^w(\Gamma)$ , mayor cardinal entre todos los conjuntos libres de  $k$ -alianzas ofensivas, en sentido débil, maximales en  $\Gamma$ .

$girth(\Gamma)$ , cuello de  $\Gamma$ .

$\gamma_{-1}^a(\Gamma)$ , número de alianza defensiva global de  $\Gamma$ .

$\gamma_0^a(\Gamma)$ , número de alianza defensiva global fuerte de  $\Gamma$ .

$\gamma_k^a(\Gamma)$ , número de  $k$ -alianza defensiva global de  $\Gamma$ .

$\gamma(\Gamma)$ , número de dominación de  $\Gamma$ .

$\gamma_t(\Gamma)$ , número de dominación total de  $\Gamma$ .

$\gamma_{rt}(\Gamma)$ , número de  $r$ -dominación total de  $\Gamma$ .

$\gamma_k^{ca}(\Gamma)$ , número de  $k$ -alianza defensiva global conexa de  $\Gamma$ .

$\gamma_1^o(\Gamma)$ , número de alianza ofensiva global de  $\Gamma$ .

$\gamma_2^o(\Gamma)$ , número de alianza ofensiva global fuerte de  $\Gamma$ .

$\gamma_k^o(\Gamma)$ , número de  $k$ -alianza ofensiva global de  $\Gamma$ .

$\gamma_k(\Gamma)$ , número de  $k$ -dominación de  $\Gamma$ .

$\gamma_1^i(\Gamma)$ , número de alianza ofensiva global independiente de  $\Gamma$ .

$\gamma_2^i(\Gamma)$ , número de alianza ofensiva global independiente fuerte de  $\Gamma$ .

$\gamma_k^i(\Gamma)$ , número de  $k$ -alianza ofensiva global independiente de  $\Gamma$ .

$\gamma_k^{co}(\Gamma)$ , número de  $k$ -alianza ofensiva global conexa de  $\Gamma$ .

$\gamma_{-1}^d(\Gamma)$ , número de alianza dual global de  $\Gamma$ .

$\gamma_0^d(\Gamma)$ , número de alianza dual global fuerte de  $\Gamma$ .

$\gamma_k^d(\Gamma)$ , número de  $k$ -alianza dual global de  $\Gamma$ .

$\rho(\Gamma)$ , número de vértices-cubrimiento de  $\Gamma$ .

$\zeta_k(\Gamma)$ , menor cardinal entre todos los cubrimientos minimales de  $k$ -alianzas defensivas en  $\Gamma$ .

$\zeta_k^w(\Gamma)$ , menor cardinal entre todos los cubrimientos minimales de  $k$ -alianzas ofensivas, en sentido débil, en  $\Gamma$ .

$\zeta_k^o(\Gamma)$ , menor cardinal entre todos los cubrimientos minimales de  $k$ -alianzas ofensivas en  $\Gamma$ .