

ANÁLISE ESTÁTICA DE TORRES ESTAIADAS

DENISE BERNAUD BUBLITZ

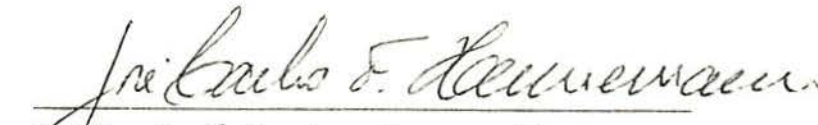
Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Porto Alegre

Dezembro de 1984

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.


Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Orientador


Prof. José Carlos Ferraz Hennemann
Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Aos meus pais.

Ao Cláudio.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor José Carlos Ferraz Hennemann, pela orientação dedicada e inteligente ao longo deste trabalho.

A Coordenação deste Curso pelo apoio dispensado.

Ao Conselho Nacional de Energia Nuclear (CNEN) e a Coordenação do Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.

À Liliani Gaeversen, pela eficiência na elaboração da datilografia.

À Juliana Zart Bonilha, pela elaboração da bibliografia.

Ao Professor Alberto Tamagna, pelas sugestões e colaboração prestada.

Aos professores, colegas e funcionários que ao longo deste trabalho colaboraram de alguma forma.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. MÉTODO PARA ANÁLISE DA TORRE.....	5
2.1 - Introdução.....	5
2.2 - Sistema de Eixos.....	6
2.3 - Equações Diferenciais Não-Lineares da Viga-Coluna.....	14
2.4 - Descrição do Método.....	19
2.4.1 - Introdução.....	19
2.4.2 - Fluxograma.....	20
3. MÉTODO PARA ANÁLISE DOS CABOS.....	23
3.1 - Introdução.....	23
3.2 - Determinação da Força Exercida pelo Cabo.....	24
3.3 - Método das Reações Imaginárias.....	30
3.3.1 - Introdução.....	30
3.3.2 - Descrição do método.....	31
3.4 - Determinação das Constantes de Mola do Cabo.....	33
3.4.1 - Caso no espaço.....	33
3.4.2 - Caso no plano.....	36
3.5 - Programa Computacional.....	37
4. DETERMINAÇÃO DA ORIENTAÇÃO NA BASE DA TORRE.....	40
4.1 - Introdução.....	40
4.2 - Desenvolvimento Teórico do Algoritmo de Cálculo dos Ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3	40
5. EXEMPLOS.....	59
5.1 - Introdução.....	59
5.2 - Exemplos de Cabos.....	60
5.3 - Exemplos de Torres Estaiadas.....	68

6. CONCLUSÕES.....	104
APÊNDICE A.....	106
A.1 - Integração Numérica das Equações Diferenciais da Viga-Coluna e do Cabo.....	106
APÊNDICE B - CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DOS CABOS	115
B.1 - Introdução.....	115
B.2 - Propriedades do Peso dos Cabos de Aço e de Fibras.....	116
B.3 - Resistência Última de Cabos de Aço e de Fibras Típicas.....	118
B.4 - Propriedades Elásticas de Cabos de Aço e de Fibras Típicas.....	119
B.5 - Comportamento dos Cabos quando Submetidos a Carregamento Repetido.....	124
BIBLIOGRAFIA.....	128

LISTA DE SÍMBOLOS

- d - diâmetro do cabo.
- \vec{f} - vetor de carga distribuída da torre, referida aos eixos globais.
- \vec{f}_c - vetor de carga distribuída do cabo, referida aos eixos globais.
- \vec{f}_e - vetor de força equivalente do cabo, referido aos eixos globais.
- $\vec{f}_{(\zeta)}$ - vetor de carga distribuída da torre, referida aos eixos locais.
- f_ζ, f_η, f_t - componentes do vetor $\vec{f}_{(\zeta)}$.
- h - intervalo de integração
- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - vetores unitários referidos aos eixos globais X, Y, Z, respectivamente.
- i - expoente numérico das relações elásticas do cabo.
- ℓ - distância do ponto de aplicação da força \vec{F}_c , com relação a origem da coordenada s.
- s - coordenada segundo um comprimento indeformado.
- \vec{t} - vetor tangente unitário segundo o eixo t da torre.
- $\vec{\bar{t}}$ - vetor \vec{t} numa posição $s+\Delta s$.
- A - área da seção transversal.
- $[B]$ - matriz de mola do cabo.
- C_A, C_a, C_e, C_u, C_w - constantes do cabo.
- E - módulo de elasticidade longitudinal.
- E_0 - erro de convergência final da torre.
- E_r - erro calculado a cada ciclo do Método das Reações Imaginárias.

- Erro - erro correspondente a um ciclo do processo iterativo da torre.
- \vec{F} - vetor força interna da torre, referido aos eixos globais.
- \vec{F}_A - vetor força externa aplicada na torre, referida aos eixos globais.
- \vec{F}_B - vetor força exercida pelo cabo sobre a torre, referida aos eixos globais.
- \vec{F}_C - vetor força externa aplicada no cabo, referida aos eixos globais.
- \vec{F}_{Cn} - n^{ésima} força \vec{F}_C .
- $\vec{F}_{(\zeta)}$ - vetor força interna da torre, referido aos eixos locais.
- F_{ζ}, F_{η}, F_t - componentes do vetor $\vec{F}_{(\zeta)}$.
- G - módulo de elasticidade transversal.
- $[I]$ - matriz identidade.
- I_{ζ} - momento de inércia em relação ao eixo principal central ζ .
- I_{η} - momento de inércia em relação ao eixo principal central η .
- K_e - constante elástica do cabo.
- K_x, K_y, K_z - constantes de mola de rotação, em torno dos eixos \bar{x}, η, z , respectivamente.
- L - comprimento do cabo.
- $[L]$ - matriz de orientação da torre, composta por nove cossenos diretores.
- $[L_0]$ - matriz de orientação na base da torre.
- \vec{M} - vetor momento interno da torre, referido aos eixos globais.
- \vec{M}_E - vetor momento externo aplicado à torre, referido aos eixos globais.
- \vec{M}_O - vetor momento interno na base da torre
- \vec{M}_S - vetor momento restaurador na base da torre, referido aos eixos globais.
- $\vec{M}_{(\zeta)}$ - vetor momento interno, referido aos eixos locais.

- M_ζ, M_η, M_t - componentes do vetor $\vec{M}(\zeta)$.
- \vec{P} - vetor posição de um ponto qualquer do cabo, referido aos eixos globais.
- \vec{P}_A - vetor posição do ponto de ancoragem do cabo, referido aos eixos globais.
- \vec{R} - vetor de força resultante do cabo, referido aos eixos globais.
- \vec{R}_A - vetor reação do cabo na ancoragem, referido aos eixos globais.
- RMS - raiz média quadrática
- S - coordenada segundo um comprimento deformado.
- T - força do cabo cuja direção é dada pelo vetor \vec{t} .
- T_e - força média do cabo.
- T_u - força de ruptura do cabo.
- X, Y, Z - eixos globais.
- $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ - eixos globais X, Y, Z , deslocados no respectivo plano.
- \vec{X} - vetor posição da torre, referido aos eixos globais.
- \vec{X}_A - vetor posição que define a posição do ponto de aplicação da força \vec{F}_A .
- \vec{X}_C - vetor posição que define a posição do ponto de aplicação de um cabo.
- W - peso do cabo n'água.
- W_a - peso do cabo no ar.
- $\alpha_\zeta, \alpha_\eta$ - fator de corte da torre, segundo os eixos ζ e η .
- $\vec{\phi}$ - vetor de rotação infinitesimal.
- ϵ - deformação específica longitudinal.
- λ - parâmetro de convergência do Método das Reações Imaginárias.
- ν - constante que depende do material e forma do cabo.

- $\vec{\tau}$ - vetor tangente unitário, indica a direção de T.
 ξ - coordenada ao longo do comprimento do cabo.
 ζ, η, t - eixos locais principais centrais da seção transversal da torre.
 $\vec{\zeta}, \vec{\eta}$ - vetores unitários referidos aos eixos ζ e η .
 $\vec{\zeta}, \vec{\eta}$ - vetores $\vec{\zeta}$ e $\vec{\eta}$ numa posição $s+\Delta s$.
 $[\Omega_0]$ - matriz de curvaturas.
 $\Omega_\zeta, \Omega_\eta, \Omega_t$ - curvaturas em relação ao sistema de eixos locais.
 θ_1 - ângulo que define a rotação em torno do eixo \bar{X} , no sentido positivo do eixo.
 θ_2 - ângulo que define a rotação em torno do eixo η , no sentido positivo do eixo.
 θ_3 - ângulo que define a rotação em torno do eixo Z, no sentido positivo do eixo.

SINOPSE

Um método para análise estática de torres estaiadas no espaço é desenvolvido, levando em consideração as características de não linearidade física e geométrica do problema.

A torre e os cabos podem estar submetidos a cargas distribuídas e concentradas segundo a direção dos eixos globais X, Y, Z , não sendo necessário definir a forma geométrica dos cabos. A solução dos mesmos é obtida utilizando-se o Método das Reações Imaginárias e o efeito sobre a torre é dado sob a forma de uma força e uma matriz de constantes de mola.

A base da torre pode ser uma rótula, engaste ou apoio sobre molas.

Diversos exemplos de cabos isolados e torres apoiadas sobre cabos são apresentados, com o objetivo de analisarmos o comportamento dos mesmos sob diferentes condições de apoio e carregamento.

SYNOPSIS

A method for static analysis of guyed towers is introduced, considering it as a three dimensional problem and taking into account its physical and geometrical nonlinear characteristics.

The tower and guy cables may be loaded by distributed and concentrated forces, acting in the global directions. It is not necessary to define a priori the cable shape.

The cable solution is obtained from the Method of Imaginary Reactions and its effects on the tower are given as a force and a spring matrix.

The tower basis may be clamped, hinged or spring-supported.

Several examples of cables and guyed towers are presented in order to analyse their behavior under different loading and support conditions.

1. INTRODUÇÃO

Nas indústrias de comunicações existe uma necessidade crescente em transmitir sinais de rádio, televisão e telefone, ao longo de grandes distâncias, requerendo, conseqüentemente, entre outras, a capacidade de suportar uma variedade de sistemas de antenas a grandes alturas.

A forma estrutural que preenche estas necessidades de maneira econômica e eficiente é a torre estaiada, que também tem sido utilizada nas estruturas de plataformas marítimas, da indústria petrolífera.

A análise estrutural da torre estaiada torna-se complexa devido ao seu comportamento não linear, gerado pela importância dos efeitos de segunda ordem produzidos pelas reações normais dos cabos e cargas externas. Os cabos possuem um comportamento não linear, pois suas propriedades de rigidez variam com a deformada e tensões a que estão sujeitos.

Conseqüentemente, o cálculo da torre envolve não apenas o desenvolvimento das relações não lineares entre força e deslocamento, mas também a difícil tarefa de obter uma solução correta para as equações não lineares que descrevem o comportamento da estrutura.

A torre é submetida a cargas externas devidas ao vento, peso próprio, peso de plataforma, equipamentos e forças introduzidas pelos cabos, sendo que estes, ligados à torre, desempenham o papel de molas não lineares.

O problema estrutural de uma torre apoiada sobre estais tem sido resolvido, ao longo dos anos, através de diversos métodos, cujas hipóteses limitavam o problema em um ou mais aspectos.

O método desenvolvido por Odley¹⁰ representa a torre por uma viga-coluna no plano, de inércia constante, submetida a cargas distribuídas e apoiada em cabos cuja forma geométrica é a da parábola. A torre se desloca apenas na direção

do vento e para cada deslocamento é determinada a reação do cabo, através de um esquema iterativo que permite levar em consideração o comportamento não linear do mesmo. O cabo tem relação tensão-deformação linear e sua constante de mola é avaliada assumindo-se que a variação da reação entre dois deslocamentos sucessivos é linear. Estas, juntamente com as constantes de mola desenvolvidas pelos cabos, são introduzidas nas equações diferenciais de equilíbrio da viga-coluna, dadas por Timoshenko¹⁷.

O processo é repetido para diversos valores de deslocamentos até a configuração final de equilíbrio ser atingida.

Kuang-Han Chu² desenvolveu um método para analisar torres estaiadas com o objetivo de introduzir, em um programa que utiliza o método de rigidez, a não linearidade devida aos cabos e cargas axiais.

A torre é dividida em segmentos e suas equações são as da viga.

O método consiste em determinar um deslocamento inicial no topo da torre devido aos cabos e as cargas externas são aplicados para esta configuração deformada. A não linearidade dos cabos é tratada através do cálculo de um módulo de elasticidade modificado E_c .

Desenvolvendo a equação da variação de comprimento do cabo devido a temperatura e prètensão e igualando à equação de variação de comprimento do mesmo, obtemos uma equação de 3º grau que quando resolvida fornece o valor da reação do cabo. A partir deste valor o módulo de elasticidade modificado pode ser estabelecido.

A forma do cabo é a parábola e o mesmo é tratado como um elemento de barra, cujo módulo de elasticidade é E_c .

A cada novo deslocamento da torre, um novo valor para E_c e forças do cabo são obtidas e reaplicados a mesma. O processo finaliza quando o valor da reação do ciclo anterior coincide com o valor recém calculado.

A análise estabelecida por Dean⁴, para o cálculo de cabos, baseia-se na equação da catenária para definir a forma do mesmo, sendo a relação tensão-deformação, linear. Uma

relação entre as variações de comprimento e forças do cabo é determinada a fim de gerar um método iterativo de incrementos de força, que avalia o efeito dos cabos sobre a torre.

O'Brien⁹ desenvolveu um método numérico para a determinação dos esforços e deformada do cabo no plano, cuja forma geométrica é tratada de maneira exata.

O cabo é dividido em segmentos definidos pelas seções imediatamente adjacentes aos pontos de carga, cujas equações de equilíbrio são resolvidas em termos da compatibilidade geométrica.

As condições de equilíbrio, compatibilidade de deslocamentos e deformação de cada segmento geram uma série de equações simples, que podem ser facilmente resolvidas através de um processo iterativo.

Goldberg⁶ analisa a torre estaiada como uma viga-coluna no plano, submetida a carregamento de vento em qualquer direção. Os cabos tem a forma da catenária e a carga de vento, em qualquer direção, é decomposta e adicionada as cargas de peso próprio do mesmo.

As equações de equilíbrio e relações força-deslocamento são estabelecidas para cada segmento da torre e cabos. Uma técnica desenvolvida pelo autor, para a análise de estruturas não lineares [5] é utilizada, transformando as equações não lineares em um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que são integradas de forma direta.

O presente trabalho é uma extensão dos trabalhos citados anteriormente a um enfoque espacial da torre estaiada, onde são levados em consideração os efeitos de 2ª ordem da mesma e a não linearidade física e geométrica dos cabos.

O método desenvolvido segue a formulação sugerida por Richard Skop e Felix Rosenthal¹³.

A torre é representada por uma viga-coluna no espaço, cujas equações diferenciais são integradas numericamente de forma direta. Os cabos, servindo de apoio à torre, são substituídos pelas forças que exercem sobre a mesma e pelas respectivas constantes de mola que desenvolvem. Estas são calculadas sem que haja necessidade de definir uma forma geométrica para o cabo e sua relação tensão-deformação pode ser não linear.

Dado que a análise é tridimensional, tanto a torre como os cabos podem estar submetidos a cargas concentradas e distribuídas segundo a direção dos eixos globais X, Y e Z.

Um processo iterativo que liga a torre aos cabos é gerado, de forma que, a cada ciclo, uma nova posição para torre é determinada e o processo finaliza quando o vetor de deslocamentos da torre converge para a posição de equilíbrio da mesma.

Este cálculo foi implementado no computador Burroughs 6700, sendo que a análise dos cabos foi também implementada no microcomputador Polymax 201.

2. MÉTODO PARA ANÁLISE DA TORRE

2.1 - Introdução

O objetivo do presente capítulo é o desenvolvimento de um modelo matemático que represente a torre estaiada no espaço e a determinação das equações diferenciais que definam os deslocamentos e solicitações na mesma, submetida a carregamento estático.

O elemento estrutural escolhido para representar a torre foi a viga-coluna no espaço, dividida em segmentos ligados rigidamente entre si, cujas equações diferenciais são integradas de forma direta.

O carregamento aplicado sobre a mesma é arbitrário, isto é, cargas concentradas, distribuídas e momentos aplicados segundo a direção dos eixos globais X , Y e Z .

A torre pode estar apoiada na base, em uma rótula, engaste ou em molas segundo os 3 graus de liberdade de rotação e ao longo de sua altura são os cabos que conectados entre os segmentos de viga-coluna, servem de apoio a mesma.

Os cabos também podem estar submetidos a cargas arbitrárias e não é necessário definir sua forma geométrica, pois esta é obtida como resultado do cálculo pelo Método das Reações Imaginárias.

A solução dos cabos é combinada com a integração das equações diferenciais não lineares da viga-coluna, gerando um método iterativo cujo objetivo é resolver o problema da torre apoiada sobre cabos.

O carregamento total é aplicado à torre, não sendo necessário utilizar cargas incrementais, como em alguns métodos não-lineares.

2.2 - Sistemas de Eixos

A viga-coluna, em sua posição inicial indeformada no espaço, é referida a um sistema de eixos ortogonais X , Y , Z , sendo X e Y eixos principais centrais.

Podemos dizer que este sistema de eixos está orientado de acordo com a regra da mão direita, ou seja, é necessário um giro de 90° , no sentido anti-horário, para que o lado positivo do eixo X coincida com o lado positivo do eixo Y .

O sentido dos momentos, atuando em torno de um eixo coordenado, é definido pela regra da mão direita, onde os momentos são positivos quando aplicados no sentido anti-horário. A figura 2.2.1 nos mostra esta convenção.

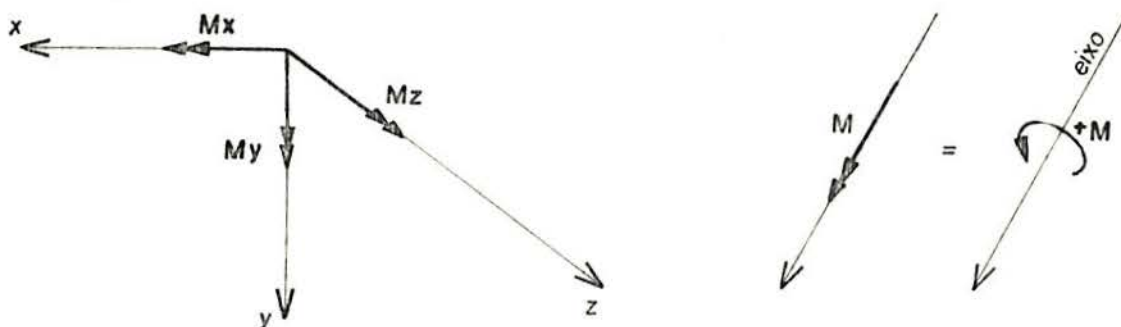


Figura 2.2.1 - Convenção de sinais de momentos.

A viga-coluna, quando submetida a carregamento externo, deforma-se e conseqüentemente as seções transversais mudam de posição.

Desta forma, cada seção transversal possui seus próprios eixos ortogonais, denominados de eixos locais e representados por ζ , η e t , como mostra a figura 2.2.2.

Nesta figura, ζ e η são os eixos locais principais centrais da seção transversal e t representa o eixo perpendicular ao baricentro da seção, na posição deformada.

O sistema de eixos globais X, Y, Z é relacionado com o sistema de eixos locais ζ, η, t através de uma matriz de orientação $[L]$ definida como:

$$\begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\zeta, X) & \cos(\zeta, Y) & \cos(\zeta, Z) \\ \cos(\eta, X) & \cos(\eta, Y) & \cos(\eta, Z) \\ \cos(t, X) & \cos(t, Y) & \cos(t, X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

Onde

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos(\zeta, X) & \cos(\zeta, Y) & \cos(\zeta, Z) \\ \cos(\eta, X) & \cos(\eta, Y) & \cos(\eta, Z) \\ \cos(t, X) & \cos(t, Y) & \cos(t, Z) \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

A matriz $[L]$ consiste de nove cosenos diretores que relacionam o sistema de coordenadas locais com o sistema de coordenadas globais. As três linhas da matriz $[L]$ representam os vetores unitários $\vec{\zeta}$, $\vec{\eta}$ e \vec{t} , definidos em função das coordenadas globais.

A equação diferencial da matriz de orientação $[L]$, tem a seguinte expressão:

$$[L'] = [\Omega_0] \cdot [L] \quad (2.2.3)$$

onde o símbolo ($'$) representa uma derivação em relação a s , isto é, ($'$) = d/ds , sendo s uma variável ao longo do comprimento indeformado da torre.

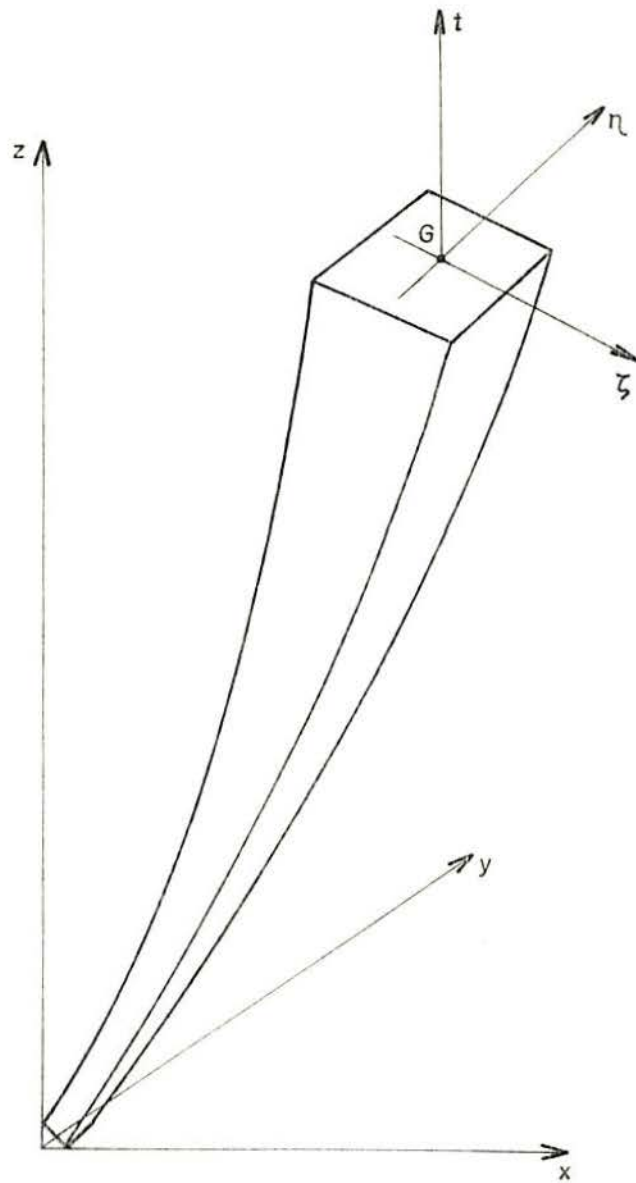


Figura 2.2.2 - Posição da torre no espaço.

As três linhas da matriz $[L']$ representam as derivadas dos vetores unitários $\vec{\zeta}$, $\vec{\eta}$ e \vec{t} .

Estas derivadas são obtidas considerando-se as variações dos vetores em relação à variável s .

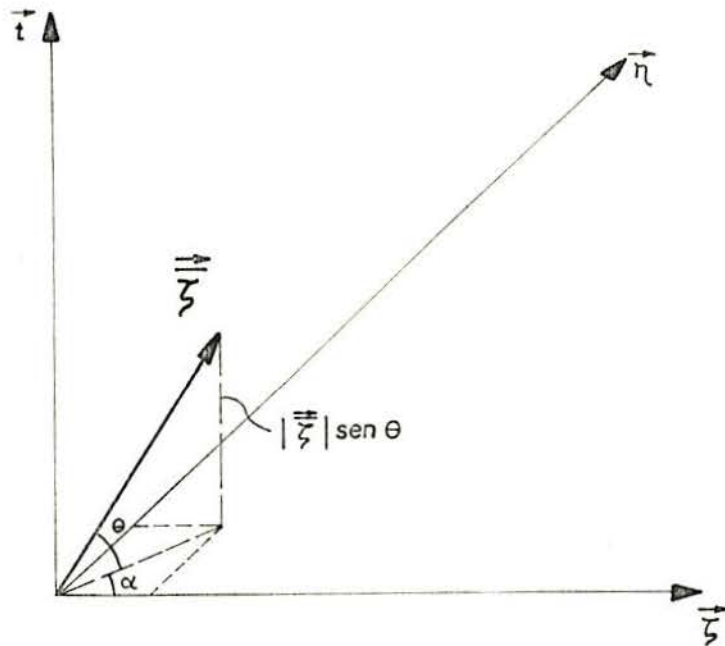


Figura 2.2.3 - Decomposição do vetor $\vec{\zeta}$.

Da figura (2.2.3) obtemos as seguintes relações:

$$\vec{\zeta} = (|\vec{\zeta}| \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha) \vec{\zeta} + (|\vec{\zeta}| \cdot \cos\theta \cdot \sin\alpha) \vec{\eta} + (|\vec{\zeta}| \cdot \sin\theta) \vec{t} \quad (2.2.4a)$$

$$\vec{\zeta} = |\vec{\zeta}| \cdot (\cos\theta \cdot \cos\alpha \vec{\zeta} + \cos\theta \cdot \sin\alpha \vec{\eta} + \sin\theta \vec{t}) \quad (2.2.4b)$$

O vetor $\vec{\zeta}$ representa o vetor $\vec{\zeta}$ numa posição $s+\Delta s$ da vigam-coluna e é decomposto segundo o sistema de coordenadas locais do ponto s .

Desenvolvendo os senos e cosenos em séries,

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \dots$$

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \dots$$

Sabendo que

$$\vec{\zeta}' = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{\zeta} - \vec{\zeta}}{\Delta s} \quad (2.2.5)$$

Como os ângulos θ e α são muito pequenos, podemos substituir seus senos e cossenos pelos respectivos primeiros termos das suas séries e reescrever a equação (2.2.4) como:

$$\vec{\zeta} = |\vec{\zeta}| \cdot (1 \cdot \vec{\zeta} + \alpha \vec{\eta} + \theta \vec{t}) \quad (2.2.6)$$

$$\vec{\zeta} - \vec{\zeta} = (|\vec{\zeta}| - 1) \vec{\zeta} + (\alpha \cdot |\vec{\zeta}|) \vec{\eta} + (\theta \cdot |\vec{\zeta}|) \vec{t} \quad (2.2.7)$$

Dado que

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} |\vec{\zeta}| = 1 \quad (2.2.8)$$

Podemos escrever

$$\vec{\zeta}' = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\alpha \vec{\eta} + \theta \vec{t}}{\Delta s} \quad (2.2.9)$$

Sendo

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = \Omega_t \quad (2.2.10)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta s} = -\Omega_\eta \quad (2.2.11)$$

onde Ω_η e Ω_t representam as curvaturas relativas aos eixos η e t respectivamente.

Desta maneira, obtemos a expressão de $\vec{\zeta}'$ como:

$$\vec{\zeta}' = \Omega_t \vec{\eta} - \Omega_\eta \vec{t} \quad (2.2.12)$$

Desenvolvendo a equação (2.2.12) em suas componentes

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}' = & (\cos(\eta, X) \cdot \Omega_t - \cos(t, X) \cdot \Omega_\eta) \vec{i} + \\ & + (\cos(\eta, Y) \cdot \Omega_t - \cos(t, Y) \cdot \Omega_\eta) \vec{j} + (\cos(\eta, Z) \cdot \Omega_t - \cos(t, Z) \cdot \Omega_\eta) \vec{k} \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Da figura (2.2.4) tiramos

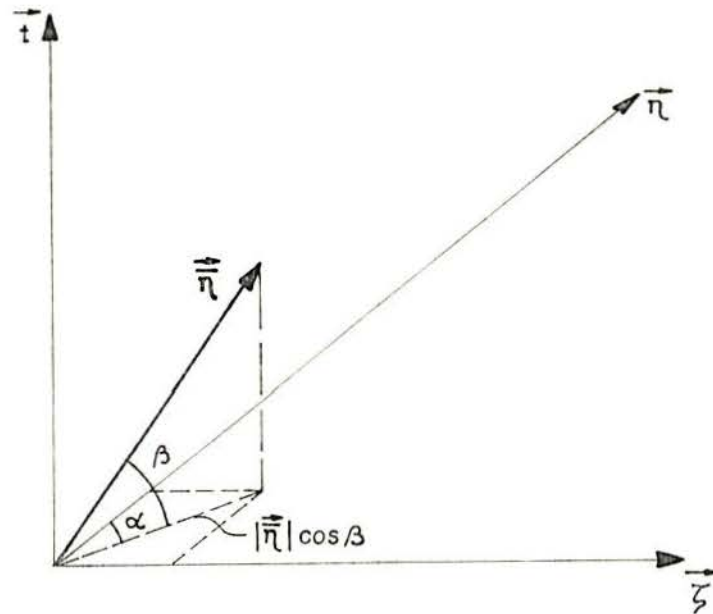


Figura 2.2.4 - Decomposição do vetor \vec{n}

$$\vec{n} = |\vec{n}| (\cos\beta \cdot \text{sen}\alpha \vec{\zeta} + \cos\beta \cdot \text{cos}\alpha \vec{\eta} + \text{sen}\beta \vec{t}) \quad (2.2.14)$$

O vetor $|\vec{n}|$ representa o vetor \vec{n} numa posição $s+\Delta s$ e é decomposto segundo o sistema de coordenadas locais do ponto s .

Como os ângulos α e β são muito pequenos, podemos aproximar a expressão acima por:

$$\vec{n} = |\vec{n}| \cdot (1 \cdot \alpha \vec{\zeta} + 1 \cdot 1 \vec{\eta} + \beta \vec{t}) \quad (2.2.15)$$

Sendo

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} |\vec{n}| = 1 \quad (2.2.16)$$

Estabelecemos portanto

$$\vec{\eta}' = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{\eta} - \vec{\eta}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\Delta s} \vec{\zeta} + \frac{\beta}{\Delta s} \vec{t} \right) \quad (2.2.17)$$

Sendo

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = -\Omega_t \quad (2.2.18)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\beta}{\Delta s} = \Omega_\zeta \quad (2.2.19)$$

onde Ω_ζ representa a curvatura em torno do eixo local ζ .
Obtemos, portanto, a equação que define $\vec{\eta}'$.

$$\vec{\eta}' = -\Omega_t \vec{\zeta} + \Omega_\zeta \vec{t} \quad (2.2.20)$$

Desenvolvendo a equação (2.2.20) e suas componentes

$$\begin{aligned} \vec{\eta}' = & (-\cos(\zeta, X) \cdot \Omega_t + \cos(t, X) \cdot \Omega_\zeta) \vec{i} + (-\cos(\zeta, Y) \cdot \Omega_t + \\ & + \cos(t, Y) \cdot \Omega_\zeta) \vec{j} + (-\cos(\zeta, Z) \cdot \Omega_t + \cos(t, Z) \cdot \Omega_\zeta) \vec{k} \quad (2.2.21) \end{aligned}$$

Da figura (2.2.5) obtemos

$$\vec{\bar{t}} = |\vec{t}| \cdot (\text{sen}\gamma \vec{\zeta} + \text{cos}\gamma \cdot \text{sen}\alpha \vec{\eta} + \text{cos}\gamma \cdot \text{cos}\alpha \vec{t}) \quad (2.2.22)$$

O vetor $\vec{\bar{t}}$ representa o vetor \vec{t} numa posição $s+\Delta s$ e é decomposto segundo o sistema de coordenadas locais do ponto s .

Como os ângulos γ e α são muito pequenos, podemos aproximar a expressão acima por

$$\vec{\bar{t}} = |\vec{t}| (\gamma \vec{\zeta} + 1 \cdot \alpha \vec{\eta} + 1 \cdot 1 \vec{t}) \quad (2.2.23)$$

Sendo

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} |\vec{\bar{t}}| = 1 \quad (2.2.24)$$

Estabelecemos

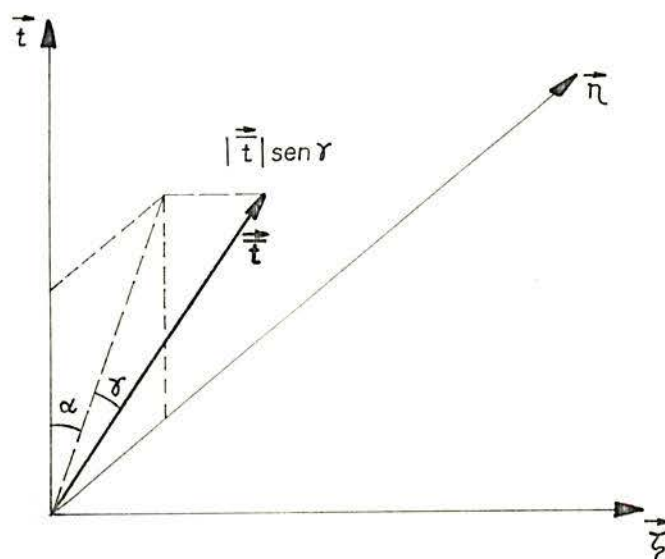


Figura 2.2.5 - Decomposição do vetor \vec{t} .

$$\vec{t}' = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{t} - \vec{t}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\gamma}{\Delta s} \vec{\zeta} + \frac{\alpha}{\Delta s} \vec{\eta} \right| \quad (2.2.25)$$

Sendo

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\Delta s} = \Omega_{\eta} \quad (2.2.26)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta s} = -\Omega_{\zeta} \quad (2.2.27)$$

Escrevemos, então, a equação de \vec{t}' como:

$$\vec{t}' = \Omega_{\eta} \vec{\zeta} - \Omega_{\zeta} \vec{\eta} \quad (2.2.28)$$

Desenvolvendo a equação (2.2.28) em suas componentes

$$\vec{t}' = (\cos(\zeta, X) \cdot \Omega_{\eta} - \cos(\eta, X) \cdot \Omega_{\zeta}) \vec{i} + (\cos(\zeta, Y) \cdot \Omega_{\eta} - \cos(\eta, Y) \cdot \Omega_{\zeta}) \vec{j} + (\cos(\zeta, Z) \cdot \Omega_{\eta} - \cos(\eta, Z) \cdot \Omega_{\zeta}) \vec{k} \quad (2.2.29)$$

Considerando a representação da equação (2.2.3), a matriz de curvaturas $[\Omega_0]$ é, portanto, definida por:

$$[\Omega_0] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_t & -\Omega_\eta \\ -\Omega_t & 0 & \Omega_\zeta \\ \Omega_\eta & -\Omega_\zeta & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.30)$$

onde Ω_ζ , Ω_η , Ω_t são as curvaturas em relação aos eixos locais ζ , η e t .

2.3 - Equações Diferenciais Não-Lineares da Viga-Coluna

A torre é representada como um ou mais segmentos de viga-coluna, ligados rigidamente entre si e conseqüentemente, as equações diferenciais que definem o seu comportamento são as da viga-coluna no espaço.

Estas equações diferenciais de equilíbrio podem ser obtidas equacionando-se o equilíbrio de um elemento de viga-coluna de comprimento infinitesimal ds .

Na figura 2.3.1 definimos:

\vec{f} - Vetor de carga distribuída, referida ao sistema de coordenadas globais, função de s .

\vec{F} - Vetor força interna da viga-coluna, referido ao sistema de coordenadas globais, função de s .

\vec{M} - Vetor momento interno da viga-coluna, referido ao sistema de coordenadas globais, função de s .

\vec{t} - Vetor tangente unitário da viga-coluna, referido ao sistema de coordenadas locais, função de s .

Fazendo o somatório de todas as forças que atuam sobre o elemento ds

$$\vec{f} \cdot ds + (\vec{F} + d\vec{F}) - \vec{F} = 0 \quad (2.3.1)$$

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\vec{f} \quad (2.3.2)$$

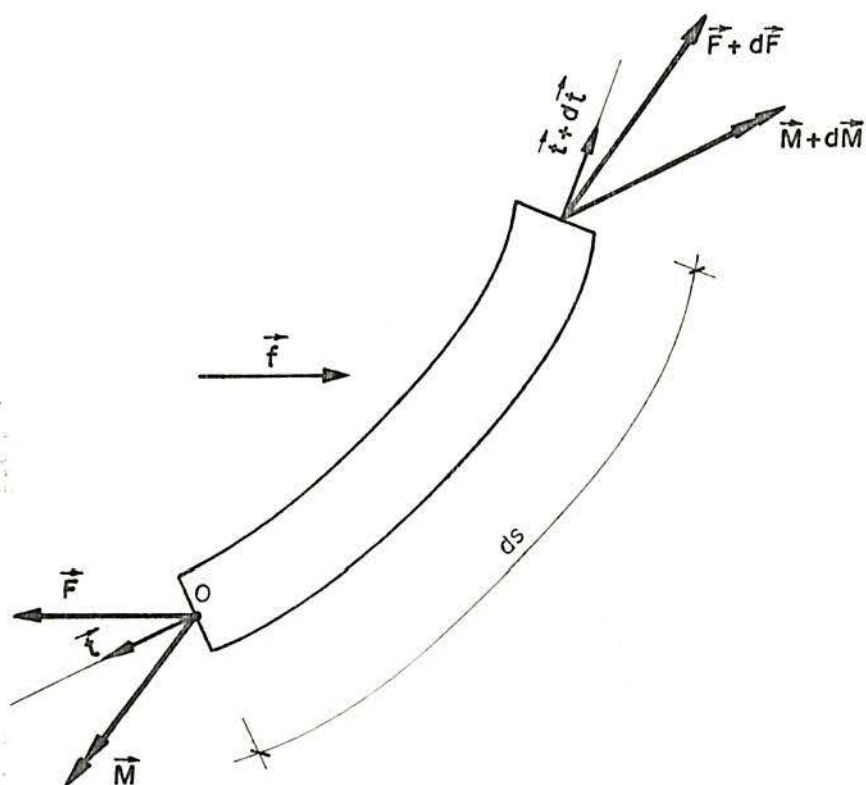


Figura 2.3.1 - Equilíbrio de um segmento da viga-coluna no espaço.

Obtemos, portanto, a equação diferencial do vetor força interna \vec{F} como:

$$\vec{F}' = -\vec{f} \quad (2.3.3)$$

Equacionando a soma de momentos em relação ao ponto 0 e desprezando a parcela de ordem superior devido a \vec{f} temos:

$$\begin{aligned} \Sigma \vec{M}_0 &= 0 \\ \vec{M} - (\vec{M} + d\vec{M}) + [(\vec{F} + d\vec{F}) \times (\vec{t} + d\vec{t}) \cdot ds] &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Desprezando as parcelas de ordem superior, escrevemos a equação diferencial do vetor momento interno.

$$\frac{d\vec{M}}{ds} = \vec{F} \times \vec{t} \quad (2.3.5)$$

O vetor que define a posição de um ponto qualquer ao longo da torre, segundo o sistema de eixos globais, é denominado de \vec{X} e suas três componentes representam a posição do ponto segundo os eixos X, Y e Z, respectivamente.

O vetor tangente unitário \vec{t} , relaciona-se com o vetor posição \vec{X} através da equação

$$\vec{t} = \frac{d\vec{X}}{dS} \quad (2.3.6)$$

Sendo dS um comprimento infinitesimal da viga-coluna no estado deformado da mesma.

A deformação específica longitudinal ϵ , segundo a coordenada indeformada s, é definida como:

$$\epsilon = \frac{dS - ds}{ds} \quad (2.3.7)$$

Onde ds representa um comprimento infinitesimal da viga-coluna, em seu estado inicial indeformado.

Substituindo a equação (2.3.7) na equação (2.3.6), obtemos a equação diferencial do vetor posição \vec{X} .

$$\vec{X}' = (1 + \epsilon) \cdot \vec{t} \quad (2.3.8)$$

Na seção 2.2. deduzimos a equação diferencial da matriz de orientação como:

$$[L'] = [\Omega_0] \cdot [L]$$

As curvaturas em relação aos eixos locais ζ , η e t que compõe a matriz de curvaturas $[\Omega_0]$ são definidas através das seguintes relações constitutivas:

$$\Omega_{\zeta} = \frac{M_{\zeta}}{EI_{\zeta}} + \frac{\alpha_{\zeta}}{GA} f_{\eta} \quad (2.3.9a)$$

$$\Omega_{\eta} = \frac{M_{\eta}}{EI_{\eta}} - \frac{\alpha_{\eta}}{GA} f_{\zeta} \quad (2.3.9b)$$

$$\Omega_t = \frac{M_t}{GJ} \quad (2.3.9c)$$

Onde definimos:

M_{ζ} - Componente do vetor $\vec{M}_{(\zeta)}$ que representa o momento em torno do eixo local ζ .

M_{η} - Componente do vetor $\vec{M}_{(\zeta)}$ que representa o momento em torno do eixo local η .

M_t - Componente do vetor $\vec{M}_{(\zeta)}$ que representa o momento em torno do eixo local t .

f_{ζ} - Componente do vetor $\vec{f}_{(\zeta)}$ representando a força distribuída segundo a direção do eixo local ζ .

f_{η} - Componente do vetor $\vec{f}_{(\zeta)}$ representando a força distribuída segundo a direção do eixo local η .

I_{ζ} - Momento de inércia em relação ao eixo principal central local ζ .

I_{η} - Momento de inércia em relação ao eixo principal central local η .

J - Momento de inércia a torção.

E - Módulo de elasticidade longitudinal

G - Módulo de elasticidade transversal

A - Área da seção transversal da torre.

$\alpha_{\zeta}, \alpha_{\eta}$ - Fator de corte em relação aos eixos ζ e η , respectivamente.

As matrizes derivadas de $[\Omega_0]$ são obtidas pela derivação de suas componentes.

$$[\Omega'_0] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega'_t & -\Omega'_{\eta} \\ -\Omega'_t & 0 & \Omega'_{\zeta} \\ \Omega'_{\eta} & -\Omega'_{\zeta} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.10)$$

$$[\Omega''_0] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega''_t & -\Omega''_\eta \\ -\Omega''_t & 0 & \Omega''_\zeta \\ \Omega''_\eta & -\Omega''_\zeta & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.11)$$

Onde

$$\Omega'_\zeta = \frac{M'_\zeta}{EI_\zeta} + \frac{\alpha_\zeta}{GA} f'_\eta \quad (2.3.12a)$$

$$\Omega'_\eta = \frac{M'_\eta}{EI_\eta} - \frac{\alpha_\eta}{GA} f'_\zeta \quad (2.3.12b)$$

$$\Omega'_t = \frac{M'_t}{GJ} \quad (2.3.12c)$$

$$\Omega''_\zeta = \frac{M''_\zeta}{EI_\zeta} + \frac{\alpha_\zeta}{GA} f''_\eta \quad (2.3.13a)$$

$$\Omega''_\eta = \frac{M''_\eta}{EI_\eta} - \frac{\alpha_\eta}{GA} f''_\zeta \quad (2.3.13b)$$

$$\Omega''_t = \frac{M''_t}{GJ} \quad (2.3.13c)$$

Os métodos de integração adotados para integrar as equações diferenciais da viga-coluna foram escolhidos de maneira a fornecerem resultados exatos e estão descritos no Apêndice A. Utilizando a expansão da Série de Taylor, foi necessário adotar derivadas de 1^a ordem para integrar a equação diferencial da força distribuída \vec{f} , de 2^a ordem para integrar \vec{F} , de 3^a ordem para \vec{M} , de 4^a ordem para a matriz $[L]$ e de 5^a ordem para integrar o vetor posição \vec{X} .

Tal escolha fornece uma alta precisão na integração das equações, mesmo quando a torre é dividida em poucos intervalos de integração.

2.4 - Descrição do Método

2.4.1 - Introdução

O método desenvolvido, para determinar as solicitações e deslocamentos de uma torre apoiada em estais, consiste de um processo iterativo que compatibiliza o comportamento da torre com os cabos. As equações diferenciais da viga-coluna na espaço são integradas de forma direta e o equilíbrio é verificado a cada ciclo do processo.

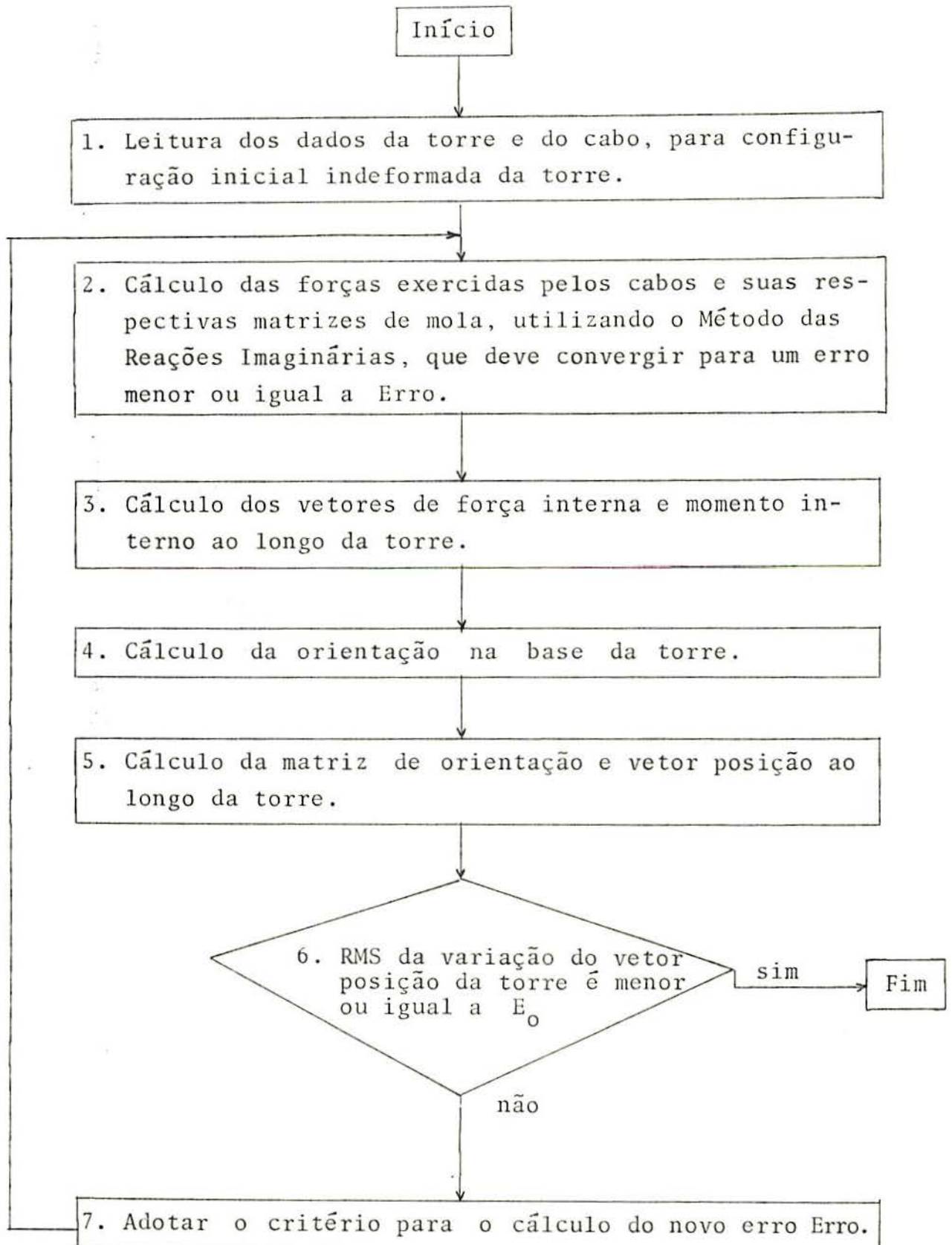
Os cabos ligados à torre servem de apoio a mesma e são substituídos pelo efeito que provocam, ou seja, por uma força e uma matriz de mola, aplicadas no respectivo ponto de fixação.

Aplicando o carregamento total, o processo iterativo inicia com a integração numérica das equações diferenciais de forças e momentos, ao longo da viga-coluna, para configuração indeformada da mesma. As forças que os cabos exercem sobre a torre são somadas ao vetor força interna, nos respectivos pontos de aplicação.

Com as forças e momentos assim determinados, calculamos a nova orientação e posição da torre, através de uma integração, que inicia pela base da mesma, das equações diferenciais da matriz de orientação e vetor posição. Para cada novo valor do vetor posição \vec{X} , calculamos os correspondentes valores das forças e matrizes de mola dos cabos.

A cada ciclo iterativo comparamos o vetor posição recém calculado com o calculado no ciclo anterior e verificamos a convergência do processo, que deve continuar até atingir a precisão desejada. Quando o processo termina a torre terá atingido a sua configuração final de equilíbrio e conseqüentemente ficam determinados os valores corretos dos vetores de força, momento e deslocamento, em todos os pontos de integração da torre.

2.4.2 - Fluxograma



O fluxograma anterior pode ser descrito como segue.

1 - Os dados lidos para a torre são: forças e momentos externos aplicados, forças distribuídas, número de pontos de integração, características geométricas, módulo de elasticidade, constantes de corte e erro de convergência final E_o .

Os dados lidos para os cabos são: forças externas distribuídas e concentradas, número de pontos de integração, características geométricas, módulo de elasticidade, erro de convergência inicial Erro e constante de integração \vec{R}_A .

2 - Para cada cabo calculamos, através do Método das Reações Imaginárias, a força que o mesmo exerce sobre a torre, fazendo o método iterativo convergir para um erro menor ou igual a Erro.

O erro Erro, inicialmente escolhido, é maior que o erro E_o , que representa o erro de convergência final da torre.

Determinada a força que cada cabo exerce sobre a torre, calculamos então a respectiva matriz de mola, que representa a rigidez imposta à torre pelo cabo. Desta maneira, cada cabo é substituído por uma força e uma matriz de mola, aplicados no respectivo ponto de ligação com a torre.

3 - Cálculo do vetor força interna e o vetor momento interno, através de uma integração de cima para baixo, ao longo da torre, onde além das forças e momentos externos aplicados incluímos as forças e momentos provocados pelos cabos.

4 - Utilizando o algoritmo desenvolvido no capítulo 4, calculamos os ângulos que definem a orientação na base da torre e conseqüentemente a matriz de orientação na base.

5 - Conhecida a matriz de orientação na base, calculamos a matriz de orientação em todos os pontos de integração, através de uma integração que inicia na base da mesma e posteriormente determinamos o vetor posição nestes pontos.

6 - Se o RMS da variação do vetor posição for menor ou igual ao erro especificado E_o , então o processo convergiu para a precisão desejada, significando que a torre convergiu

para sua posição final de equilíbrio. Conseqüentemente obtemos os valores corretos do vetor força interna, vetor momento interno e vetor posição, finalizando o processo.

7 - Caso o RMS for maior que E_0 , então a torre ainda não atingiu sua configuração final de equilíbrio e o processo iterativo deve ser repetido, utilizando-se um erro Erro menor que o anterior.

3. MÉTODO PARA ANÁLISE DOS CABOS

3.1 - Introdução

No projeto de muitas estruturas, tais como torres que suportam antenas de telecomunicações, os apoios laterais são compostos por cabos estruturais. Estes desempenham o papel de molas não lineares e podem ser substituídos pelo efeito que provocam sobre estas estruturas, ou seja, por uma força e por suas constantes de mola.

O objetivo do presente capítulo é a determinação da força que o cabo exerce sobre a torre, bem como das correspondentes constantes de mola.

Muitos métodos desenvolvidos para a análise de cabos, baseiam-se nos trabalhos de Dean⁴, Odley¹⁰ e outros e fornecem soluções particulares para cabos submetidos a cargas distribuídas, com relação tensão-deformação linear, utilizando-se da equação da parábola ou da catenária para representar a forma do mesmo.

Entretanto, com o advento de torres altas, torres offshore e cabos sintéticos, a análise dos cabos, sob a hipótese de estarem apenas submetidos a cargas distribuídas e terem propriedades constitutivas elásticas lineares, tornou-se inadequada para descrever o comportamento real dos mesmos. Também as forças de vento, de ondas e massas discretas aplicadas ao longo dos cabos, contribuem para que haja necessidade de uma formulação que leve em conta estes fatores.

Neste capítulo desenvolveremos a formulação sugerida por Richard A. Skop¹⁴, para a avaliação da força exercida pelo cabo sobre a torre e suas constantes de mola, levando em consideração a não linearidade física e geométrica dos mesmos. Os cabos podem estar submetidos a cargas distribuídas e concentradas, atuando segundo a direção dos eixos globais, X, Y e Z, terem relação tensão-deformação não linear e não há necessidade

de definir sua forma geométrica.

A força que o cabo exerce sobre a torre bem como suas constantes de mola, são funções não lineares dos deslocamentos da mesma, no seu ponto de fixação com o cabo. Conseqüentemente, para cada nova posição da torre, novos valores de força do cabo e correspondentes constantes de mola devem ser calculados, através de um esquema iterativo, onde os cabos e a torre estão interligados.

Os ciclos iterativos são repetidos até o cabo atingir sua configuração final de equilíbrio, compatível com a posição no espaço exigida para o mesmo e neste momento ficam então determinados a força que exerce sobre a torre e a matriz de mola correspondente.

3.2. - Determinação da Força Exercida pelo Cabo

Consideremos um cabo no espaço, de comprimento L , cuja posição está referida ao sistema de eixos cartesianos globais X , Y e Z , como mostra a figura 3.2.1.

A este sistema de eixos correspondem os vetores unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} e podemos definir:

\vec{X}_C - vetor que define a posição do ponto de fixação entre o cabo e a torre, segundo o sistema de eixos globais.

\vec{P}_A - vetor que define a posição do ponto de ancoragem do cabo, segundo o sistema de eixos globais.

\vec{P} - vetor que define a posição de um ponto qualquer do cabo, segundo o sistema de eixos globais.

A fim de estabelecermos a equação diferencial do vetor de força interna do cabo, analisemos o equilíbrio de um segmento do mesmo, de comprimento infinitesimal ds , como mostra a figura 3.2.2. A coordenada ao longo do comprimento indeformado do cabo é representada pela variável s , que vale zero no ponto de fixação com a torre e L no ponto de ancoragem.

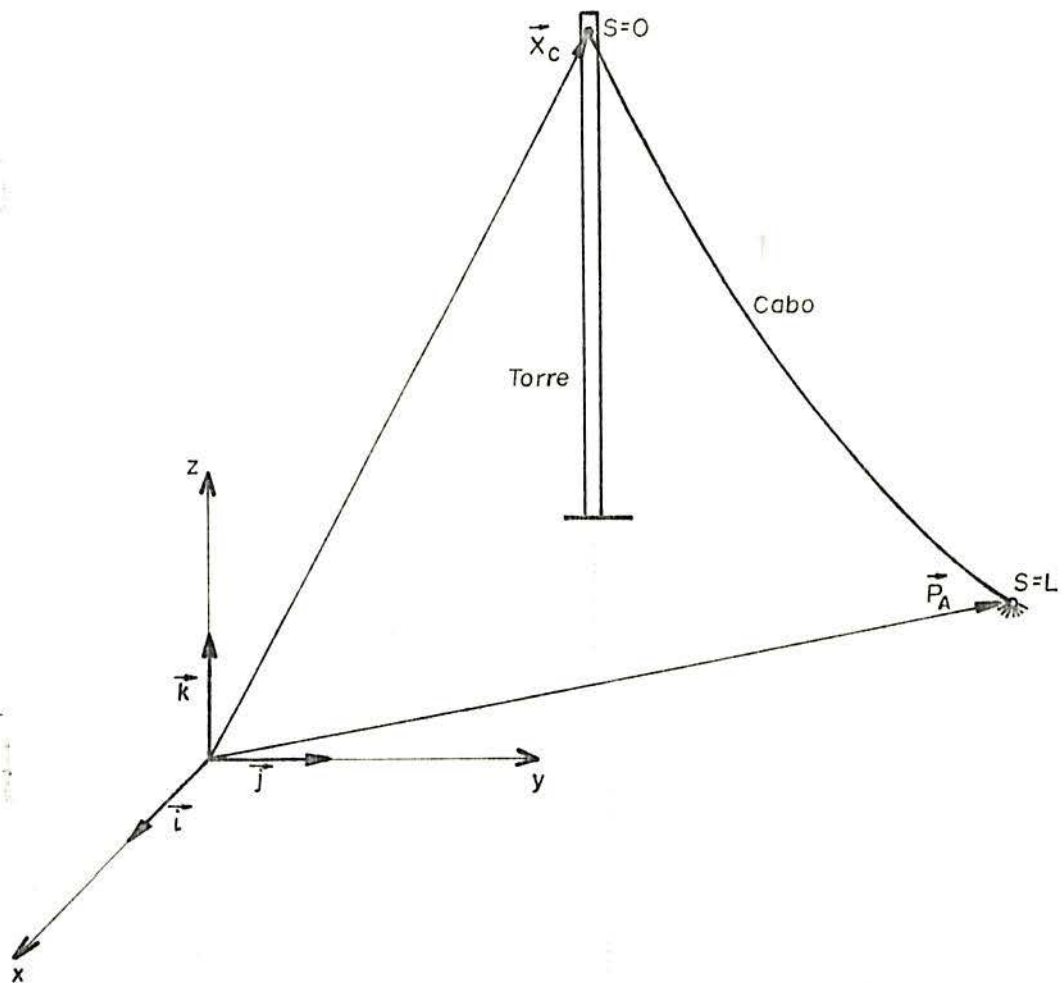


Figura 3.2.1 - Posição do cabo no espaço.

O equilíbrio de um segmento ds é mostrado na figura 3.2.2, onde definimos:

\vec{f}_c - vetor de carga externa aplicada, por unidade de comprimento do cabo, segundo o sistema de eixos globais.

T - força que representa a reação do cabo à carga \vec{f}_c e tem a direção do vetor tangente unitário \vec{t} .

\vec{t} - vetor tangente unitário.

A força T tem a direção do vetor tangente unitário devido ao fato do cabo não possuir rigidez à flexão nem ao corte.

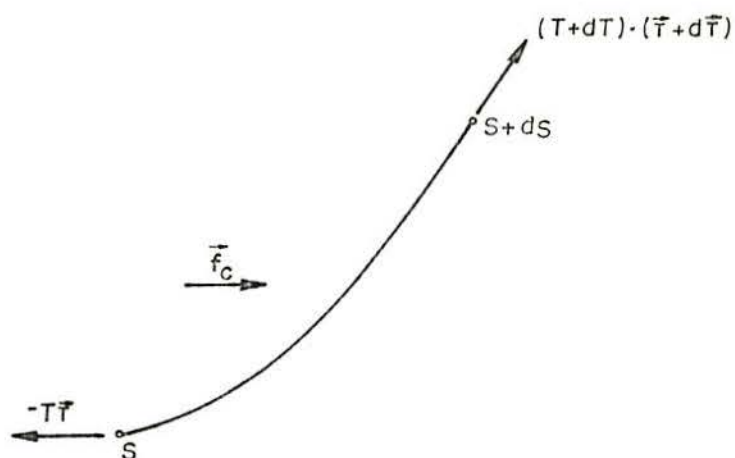


Figura 3.2.2 - Equilíbrio de um segmento de cabo.

Equacionando o equilíbrio das forças que atuam em um segmento ds , obtemos

$$-T\vec{\tau} + (T+dT) \cdot (\vec{\tau}+d\vec{\tau}) + \vec{f}_c \cdot ds = 0 \quad (3.2.1)$$

Desprezando a parcela de ordem superior $dT \cdot d\vec{\tau}$, obtemos

$$\frac{d(T\vec{\tau})}{ds} + \vec{f}_c = 0 \quad (3.2.2)$$

As cargas concentradas, aplicadas no cabo, são incluídas através da consideração de uma força equivalente, definida como:

$$\vec{f}_e = \vec{F}_c \cdot \delta(s-l) \quad (3.2.3)$$

onde

\vec{F}_C - força aplicada no cabo, segundo o sistema de eixos globais.

ℓ - distância do ponto de aplicação da força \vec{F}_C em relação a origem da coordenada s .

$\delta(s-\ell)$ - Função Delta de Dirac que define um impulso de área unitária, aplicada a uma distância ℓ da origem.

Portanto, a equação diferencial do vetor de força do cabo, incluindo as cargas concentradas é dada por

$$\frac{d(T \vec{\tau})}{ds} + \vec{f}_C + \sum_{n=1}^N \vec{F}_{Cn} \cdot \delta(s-\ell_n) = 0 \quad (3.2.4)$$

Onde N representa o número de cargas concentradas aplicadas no cabo e \vec{F}_{Cn} a $n^{\text{ésima}}$ força aplicada a uma distância ℓ_n .

A fim de obtermos a solução da equação diferencial não linear acima, um vetor de força resultante \vec{R} é introduzido e definido como:

$$\vec{R} = T \vec{\tau} \quad (3.2.5)$$

Sendo \vec{R} o vetor força resultante segundo o sistema de eixos globais.

Substituindo a equação (3.2.5) na equação (3.2.4) obtemos

$$\frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{f}_C + \sum_{n=1}^N F_{Cn} \cdot \delta(s-\ell_n) = 0 \quad (3.2.6)$$

Integrando a equação acima, o valor de \vec{R} é obtido ao longo do cabo, para qualquer ponto de coordenada s .

$$\int_s^L \left(\frac{d\vec{R}}{ds} + \vec{f}_C + \sum_{n=1}^N \vec{F}_{Cn} \cdot \delta(s-\ell_n) \right) d\xi = 0 \quad (3.2.7a)$$

$$\vec{R}(s) = \vec{R}_A - \int_L^s \vec{f}_C(\xi) \cdot d\xi + \sum_{n=1}^N \vec{F}_{Cn} \cdot H(\ell_n - s) \quad (3.2.7b)$$

Sendo ξ uma variável ao longo do comprimento do cabo.

O vetor \vec{R}_A define o valor de \vec{R} no ponto de ancoragem do cabo, isto é, $\vec{R}_{(L)} = \vec{R}_A$. Este valor é determinado através do método das Reações Imaginárias, abaixo descrito.

$H(a)$ representa a função salto unitário, definida como:

$$H(a) = 1 \quad \text{para} \quad a \geq 0 \quad (3.2.8.a)$$

$$H(a) = 0 \quad \text{para} \quad a < 0 \quad (3.2.8.b)$$

Uma vez determinado o vetor de força resultante \vec{R} , as outras variáveis que descrevem o equilíbrio do cabo podem ser calculados.

A força T é obtida pelo produto interno do vetor \vec{R} por ele mesmo.

$$T = (\vec{R} \cdot \vec{R})^{1/2} \quad (3.2.9)$$

A deformação específica longitudinal ϵ é determinada através da equação constitutiva do cabo.

$$\epsilon = \left(\frac{T}{E \cdot A} \right)^{\nu} \quad (3.2.10)$$

Onde ν representa uma constante que depende do material e forma do cabo, E é o módulo de elasticidade e A a área da seção transversal do mesmo, cujos valores são dados no Apêndice B.

A equação diferencial do vetor posição \vec{P} é deduzida a partir das seguintes equações

$$\vec{t} = \frac{d\vec{P}}{ds} \quad (3.2.11)$$

$$\epsilon = \frac{dS - ds}{ds} \quad (3.2.12.a)$$

$$dS = ds \cdot (1 + \epsilon) \quad (3.2.12.b)$$

Onde dS representa um comprimento de cabo quando submetido a cargas externas e ds um comprimento do mesmo no

seu estado inicial indeformado.

Substituindo a equação (3.2.12.b) na equação (3.2.11) resulta

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{P}}{(1+\epsilon) \cdot ds} \quad (3.2.13)$$

Utilizando a equação (3.2.5) e igualando a equação (3.2.13) obtemos

$$\frac{\vec{R}}{T} = \frac{d\vec{P}}{(1+\epsilon) \cdot ds} \quad (3.2.14)$$

Desta forma podemos escrever a equação diferencial do vetor posição \vec{P} , como

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = (1+\epsilon) \cdot \frac{\vec{R}}{T} \quad (3.2.15)$$

Integrando-a ao longo do cabo, obtemos

$$\vec{P}_{(s)} = \vec{X}_C + \int_0^s (1 + \epsilon_{(\xi)}) \cdot (\vec{R}_{(\xi)} / T_{(\xi)}) \cdot d\xi \quad (3.2.16)$$

O vetor \vec{X}_C representa o vetor posição no ponto de fixação entre o cabo e a torre, isto é, $\vec{P}_{(0)} = \vec{X}_C$.

A constante de integração \vec{R}_A , necessária para a determinação de $\vec{R}_{(s)}$, é avaliada através do Método das Reações Imaginárias, de modo que o vetor $\vec{P}_{(L)}$, obtido pela equação (3.2.16), iguale ao vetor posição conhecido \vec{P}_A , que fornece a posição do cabo no ponto de ancoragem.

Calculando a equação (3.2.7) para $s=0$, obtemos a força exercida pelo cabo sobre a torre, definida como $\vec{F}_B = \vec{R}_{(0)}$, pois a coordenada s cresce a partir do ponto definido pelo vetor \vec{X}_C .

Portanto, a força que o cabo exerce sobre a torre, para o caso geral de carregamento é dada por

$$\vec{F}_B = \vec{R}_A + \int_0^L \vec{f}_{c(s)} \cdot ds + \sum_{n=1}^N \vec{F}_{cn} \quad (3.2.17)$$

3.3 - Método das Reações Imaginárias

3.3.1 - Introdução

O Método das Reações Imaginárias foi desenvolvido por Richard A. Skop e O'Hara¹⁶, com o objetivo de determinar a configuração de equilíbrio e as reações de sistemas de cabos e cabos isolados, submetidos a cargas distribuídas e concentradas, com relação tensão-deformação qualquer.

A necessidade de tal solução foi gerada pela falta de técnicas adequadas para a análise dos cabos, especialmente para sistemas com mais de um cabo. A primeira razão para justificar a falta de técnicas adequadas é a inerente não linearidade das equações diferenciais de equilíbrio de um cabo.

Esta situação levou, então, ao desenvolvimento de um método utilizando diretamente a solução da equação de equilíbrio do cabo, bem como das condições geométricas através de um processo iterativo.

O Método das Reações Imaginárias é em essência uma extensão natural do método dos deslocamentos a um problema altamente não linear. A solução consiste em retirar a incógnita hiperestática e substituir o seu efeito por uma reação arbitrada, tornando o problema estaticamente determinado. As reações arbitradas, ou também chamadas de imaginárias, são incrementadas até que a configuração calculada para o cabo satisfaça as suas condições geométricas iniciais.

O método segue uma técnica iterativa que converge rapidamente para a configuração de equilíbrio correta e correspondentes reações, para qualquer reação imaginária inicialmente adotada.

A constante de integração \vec{R}_A , que representa a reação do cabo na ancoragem, será portanto determinada através do Método das Reações Imaginárias.

3.3.2 - Descrição do método

A figura 3.3.1 mostra um cabo no espaço, referido ao sistema de eixos XYZ e submetido a cargas externas quaisquer. Aplicando-se o Método das Reações Imaginárias obtemos, a cada iteração, uma posição 2 para a ancoragem, correspondente a um determinado valor da reação imaginária \vec{R}_A , conforme mostra a figura 3.3.1. O objetivo do método consiste em obter uma configuração de equilíbrio para o cabo que seja compatível cinematicamente, o que é alcançado quando o ponto 2 coincidir com o ponto real de ancoragem ANC. As iterações do método consistem em modificar a configuração do cabo a partir de incrementos na reação \vec{R}_A .

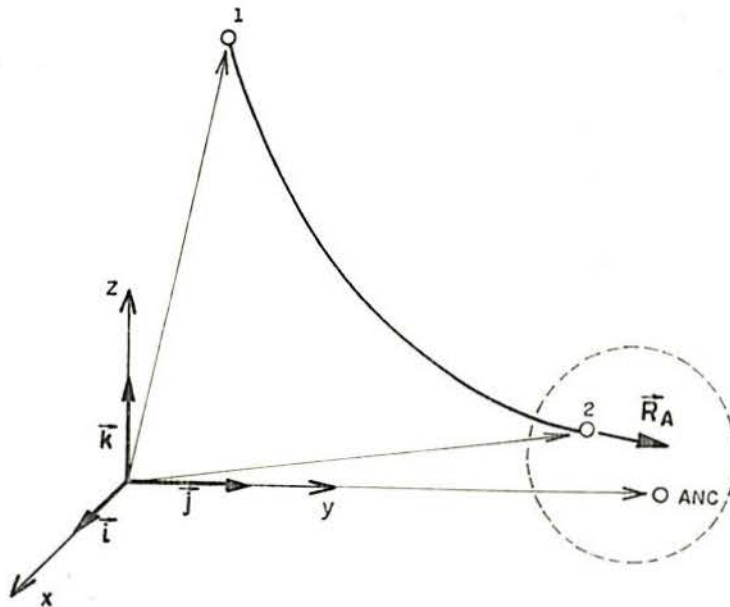


Figura 3.3.1 - Configuração genérica do cabo no Método das Reações Imaginárias.

O Método das Reações Imaginárias consiste do seguinte esquema de cálculo:

- 1- Arbitrar um valor para o vetor \vec{R}_A .
- 2- Utilizando o valor arbitrado de \vec{R}_A , integrar a equação (3.2.7) a fim de determinar o vetor força $\vec{R}_{(s)}$.

Através das equações (3.2.9) e (3.2.10) obter a força de tração $T_{(s)}$ e a deformação específica longitudinal $\varepsilon_{(s)}$, respectivamente.

Integrar a equação (3.2.16) a fim de obter o vetor posição $\vec{P}_{(s)}$.

- 3- Em geral, encontramos um valor de $\vec{P}_{(L)}$ diferente do valor do vetor posição na ancoragem \vec{P}_A , para o valor arbitrado de \vec{R}_A . Definimos portanto, como medida de erro

$$E_r = [(\vec{P}_A - \vec{P}_{(L)}) \cdot (\vec{P}_A - \vec{P}_{(L)})]^{1/2} \quad (3.3.1)$$

- 4- Escolher um valor inicial positivo qualquer, para definir o parâmetro de convergência λ . Um valor da seguinte ordem de grandeza é sugerido

$$\lambda = E_r \cdot (T_{(0)} + T_{(L)}) / (2 \cdot L) \quad (3.3.2)$$

- 5- Calcular, então, o novo vetor \vec{R}'_A , definido por

$$\vec{R}'_A = \vec{R}_A + \frac{\lambda}{E_r} (\vec{P}_A - \vec{P}_{(L)}) \quad (3.3.3)$$

- 6- Com esta nova reação \vec{R}'_A recalcular as grandezas $\vec{R}_{(s)}$, $T_{(s)}$, $\varepsilon_{(s)}$ e conseqüentemente $\vec{P}_{(s)}$. Determinar, então, o novo erro E'_r , através da equação (3.3.1).

7- Se $E'_r < E_r$, então um passo bem sucedido foi realizado. Neste caso, mudar os valores antigos de \vec{R}_A , $\vec{P}_A - \vec{P}_{(L)}$ e E_r , para os valores recém calculados. Manter o antigo valor λ e retornar ao passo 5.

8- Se $E'_r \geq E_r$, então um passo sem sucesso foi realizado. Neste caso, manter os valores antigos de \vec{R}_A , $\vec{P}_A - \vec{P}_{(L)}$ e E_r . Reduzir λ e retornar ao passo 5.

9- Continuar este processo iterativo até que o erro final seja tão pequeno quanto desejado.

3.4 - Determinação das Constantes de Mola do Cabo

3.4.1 - Caso no espaço

A análise do cabo no espaço dá origem a 6 constantes de mola, formando uma matriz de mola de dimensão (3x3).

Sendo δ o operador variacional, supomos que o ponto de fixação do cabo na torre sofra um deslocamento virtual definido pelo vetor $\delta\vec{X}_C$. Este deslocamento causa uma variação virtual na força exercida pelo cabo, denominada $\delta\vec{F}_B$.

A matriz que transforma $\delta\vec{X}_C$ em $\delta\vec{F}_B$, chamada [B] é, por definição a matriz das constantes de mola do cabo e é dada pela seguinte equação:

$$\delta\vec{F}_B = [B] \cdot \delta\vec{X}_C \quad (3.4.1)$$

A matriz [B] é obtida, para condições arbitrárias de carregamento e relações constitutivas, através da inversão da matriz [C] que relaciona $\delta\vec{X}_C$ com $\delta\vec{F}_B$.

$$\delta\vec{X}_C = [C] \cdot \delta\vec{F}_B \quad (3.4.2)$$

Para determinarmos a matriz [C], o operador variacional é aplicado à equação (3.2.16) como segue

$$\delta\vec{X}_C = -\int_0^L \delta \left[(1 + \epsilon(s)) \cdot (\vec{R}(s)/T(s)) \right] ds \quad (3.4.3)$$

Conseqüentemente necessitamos conhecer $\delta\epsilon(s)$, $\delta\vec{R}(s)$ e $\delta T(s)$.

Aplicando o operador δ à equação (3.2.7) temos

$$\delta\vec{R}(s) = \delta \left[\vec{R}_A - \int_L^s \vec{f}_C(\xi) \cdot d\xi + \sum_{n=1}^N \vec{F}_{Cn} \cdot H(\ell_n - s) \right] \quad (3.4.4)$$

Sendo a variação das forças externas nula, obtemos

$$\delta \vec{R}_{(s)} = \delta \vec{R}_A \quad (3.4.5)$$

A equação acima mostra que $\delta \vec{R}_{(s)}$ é uma constante independente da coordenada s .

Utilizando a equação (3.2.17) determinamos $\delta \vec{F}_B$

$$\delta \vec{F}_B = \delta \vec{R}_A \quad (3.4.6)$$

Conseqüentemente

$$\delta \vec{R}_{(s)} = \delta \vec{F}_B \quad (3.4.7)$$

Aplicando o operador δ à equação (3.2.9) e utilizando o resultado da equação (3.4.7) temos

$$\delta T_{(s)} = (\vec{R}_{(s)} \cdot \vec{R}_{(s)})^{-1/2} \cdot \vec{R}_{(s)} \cdot \delta \vec{R}_{(s)} \quad (3.4.8a)$$

$$\delta T_{(s)} = T_{(s)}^{-1} \cdot \vec{R}_{(s)} \cdot \delta \vec{F}_B \quad (3.4.8b)$$

$$\delta T_{(s)} = \vec{R}_{(s)} \cdot \delta \vec{F}_B / T_{(s)} \quad (3.4.8c)$$

Da mesma forma, aplicando o operador δ à equação (3.2.10) e utilizando o resultado da equação (3.4.8) calculamos

$$\delta \epsilon_{(s)} = \frac{v T_{(s)}^{(v-1)}}{(E.A)^v} \cdot \delta T_{(s)} \quad (3.4.9a)$$

$$\delta \epsilon_{(s)} = \frac{v \epsilon_{(s)}}{T_{(s)}} \cdot \delta T_{(s)} \quad (3.4.9b)$$

$$\delta \epsilon_{(s)} = \frac{v \epsilon_{(s)}}{T_{(s)}^2} \cdot (\vec{R}_{(s)} \cdot \delta \vec{F}_B) \quad (3.4.9c)$$

Aplicando o operador δ na equação (3.4.3) resulta

$$\delta \vec{X}_C = - \int_0^L \left\{ \frac{[\delta \epsilon(s) \cdot \vec{R}(s) + (1+\epsilon(s)) \cdot \delta \vec{R}(s)] \cdot T(s) - (1+\epsilon(s)) \cdot \vec{R}(s) \cdot \delta \vec{T}(s)}{T(s)^2} \right\} ds \quad (3.4.10.a)$$

$$\delta \vec{X}_C = - \int_0^L \left\{ \frac{\delta \epsilon(s) \cdot \vec{R}(s)}{T(s)} + \frac{(1+\epsilon(s)) \cdot \delta \vec{R}(s)}{T(s)} - \frac{(1+\epsilon(s)) \cdot \vec{R}(s) \cdot \delta \vec{T}(s)}{T(s)^2} \right\} ds \quad (3.4.10.b)$$

Substituindo os valores de $\delta \epsilon(s)$, $\delta \vec{R}(s)$ e $\delta \vec{T}(s)$ na equação acima, podemos reescrevê-la como:

$$\delta \vec{X}_C = \int_0^L \left\{ - \left[\frac{(1+\epsilon(s))}{T(s)} \right] \cdot \delta \vec{F}_B + \left[\frac{1+(1-\nu) \cdot \epsilon(s)}{T(s)^3} \right] \cdot \vec{R}(s) \cdot \vec{R}(s) \cdot \delta \vec{F}_B \right\} ds \quad (3.4.11)$$

A expansão da equação (3.4.11) em suas componentes \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , resulta finalmente na relação matricial da equação (3.4.2).

As componentes da matriz $[C]$, são, portanto, dadas por

$$C_{\alpha\beta} = \int_0^L \left\{ - \left[\frac{(1+\epsilon(s))}{T(s)} \right] \delta_{\alpha\beta} + \left[\frac{1+(1-\nu) \cdot \epsilon(s)}{T(s)^3} \right] \cdot R_{\alpha}(s) \cdot R_{\beta}(s) \right\} ds \quad (3.4.12)$$

Onde α e β assumem os valores X, Y, Z e $\delta_{\alpha\beta}$ é operador delta de Kronecker, definido por

$$\delta_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{para} \quad \alpha = \beta \quad (3.4.13.a)$$

$$\delta_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{para} \quad \alpha \neq \beta \quad (3.4.13.b)$$

A matriz $[B]$ é então determinada pela inversão da matriz $[C]$

$$[B] = [C]^{-1} \quad (3.4.14)$$

Pela análise da equação (3.4.12) podemos observar que a matriz $[B]$ depende dos valores de $\vec{R}(s)$, que por sua vez

variam a medida que o ponto de ligação entre o cabo e a torre se desloca. Conseqüentemente, o comportamento do cabo, com relação as variações do vetor \vec{X}_C é não linear.

Devido a este comportamento não linear, a cada novo valor do vetor \vec{X}_C uma nova matriz de mola $[B]$ deve ser calculada, até que a estrutura atinja sua configuração de equilíbrio.

3.4.2 - Caso no plano

A análise do cabo no plano dá origem a 4 constantes de mola que formam uma matriz simétrica de dimensão (2x2).

Caso o cabo tenha relação tensão-deformação linear e uma flecha pequena, então podemos estabelecer uma equação para definir cada constante de mola, a partir da equação (3.4.12), onde fazemos $v=1$ e o integrando é considerado uma constante.

Desta forma obtemos a seguinte matriz $[C]$, de dimensão (2x2).

$$[C] = \begin{bmatrix} [-(1+\epsilon)/T + F_B^2(1)/T^3] \cdot L & F_B(1) \cdot F_B(3) \cdot L/T^3 \\ F_B(1) \cdot F_B(3) \cdot L/T^3 & [-(1+\epsilon)/T + F_B^2(3)/T^3] \cdot L \end{bmatrix} \quad (3.4.15)$$

A componente $F_B(1)$ do vetor de força \vec{F}_B representa a componente horizontal da força que o cabo exerce sobre a torre, $F_B(3)$ representa a componente vertical e a componente $F_B(2)$ é nula, pois a análise é bidimensional.

Invertendo a matriz $[C]$ obtemos as seguintes expressões que definem as constantes de mola, formando a matriz $[B]$.

$$B_{(1,1)} = \frac{-F_B^2(1)}{T^3} - \frac{1}{E \cdot A} \cdot \frac{L}{\left(\frac{1+\epsilon}{T}\right) \cdot \frac{L}{E \cdot A}} \quad (3.4.16)$$

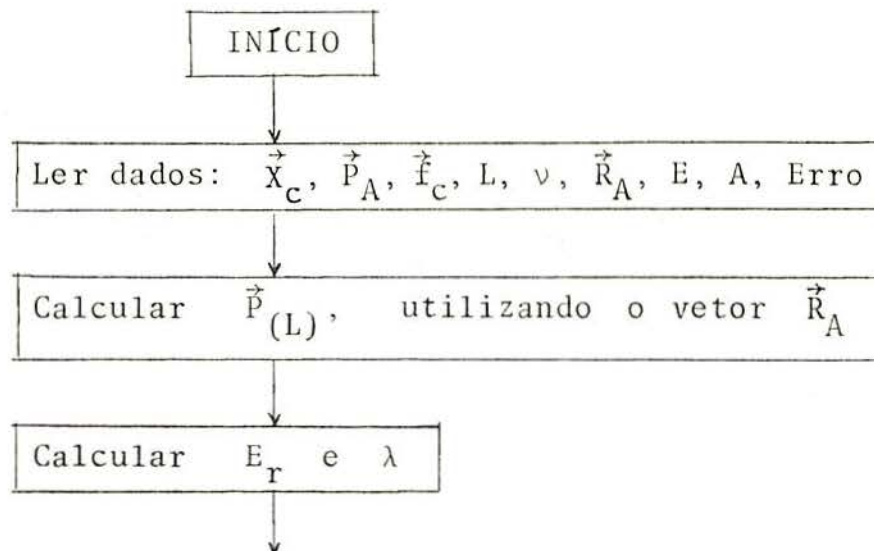
$$B_{(1,2)} = B_{(2,1)} = \frac{-F_B(1) \cdot F_B(3)}{T^3 \cdot \left(\frac{1+\epsilon}{T}\right) \cdot \frac{L}{E \cdot A}} \quad (3.4.17)$$

$$B_{(2,2)} = \frac{\frac{-F_B^2(3)}{T^3} - \frac{1}{E \cdot A}}{\left(\frac{1+\epsilon}{T}\right) \cdot \frac{L}{E \cdot A}} \quad (3.4.18)$$

3.5 - Programa Computacional

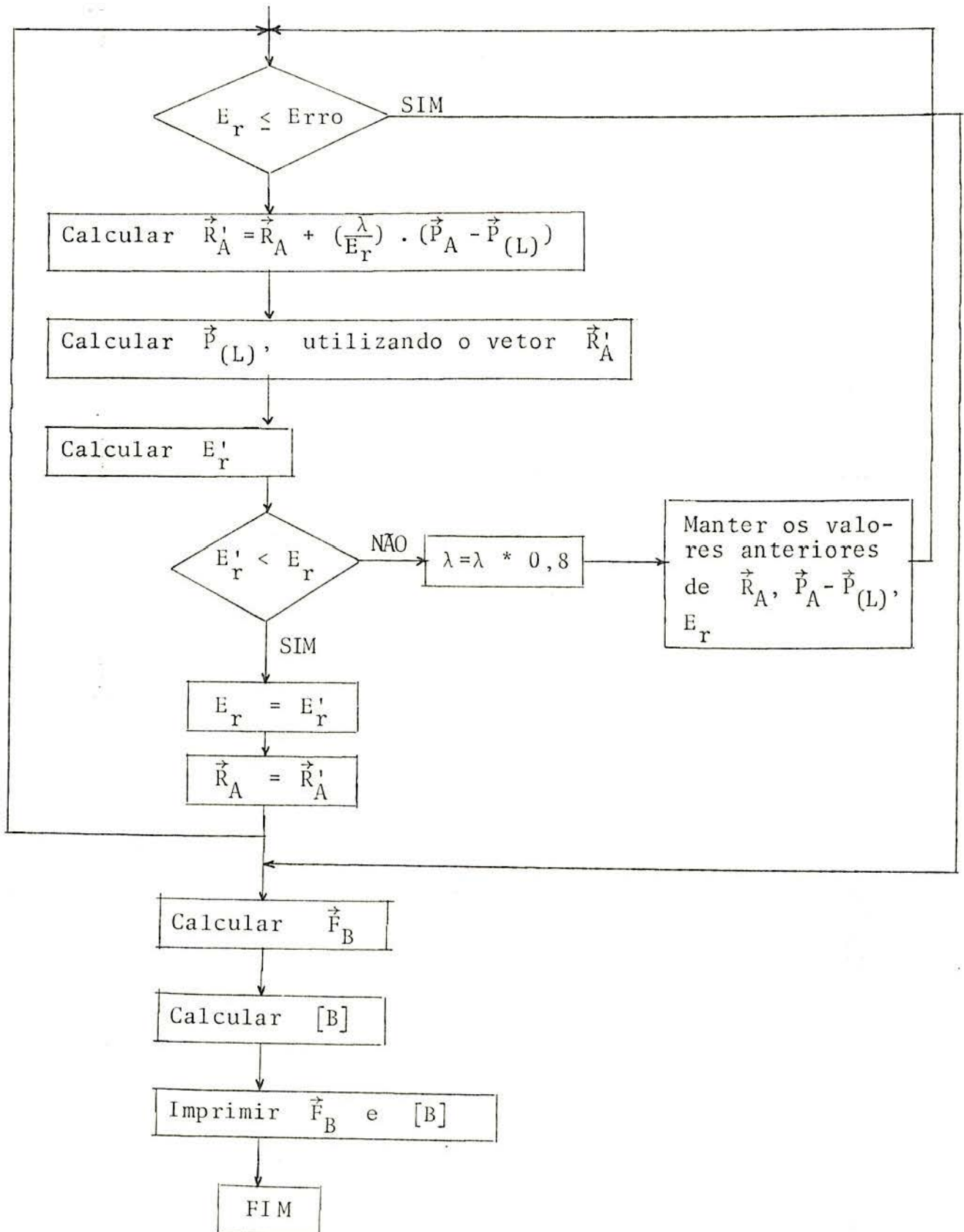
O programa que calcula as forças e constantes de mola do cabo foi implementado em linguagem Fortran, no Burroughs B-6700 e no micro computador Polymax-201.

- Fluxograma



(continua)

(continuação do fluxograma)



Até o bloco diagrama "Calcular \vec{F}_B " corresponde a aplicação do Método das Reações Imaginárias. A partir deste ponto é determinada a matriz dos coeficientes de mola.

4. DETERMINAÇÃO DA ORIENTAÇÃO NA BASE DA TORRE

4.1 - Introdução

A torre sendo representada por uma viga-coluna no espaço tem sua orientação na base estabelecida por meio de 3 ângulos, denominados θ_1 , θ_2 e θ_3 , abaixo definidos. Se a mesma for considerada como um elemento estrutural atuando no plano, então é necessário apenas um ângulo para definir sua orientação.

No procedimento iterativo descrito no capítulo 2, a integração numérica da equação diferencial da matriz de orientação inicia na base da torre e conseqüentemente necessitamos conhecer o valor desta matriz no ponto de integração inicial.

Quando a base da torre for constituída por uma rótula ou molas, segundo os três graus de giro de liberdade, devemos estabelecer um algoritmo que calcule os ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 , cujos senos e cossenos formarão a matriz dos cossenos diretores na base. Caso a base seja um engaste, então os ângulos são conhecidos e a matriz identidade define a orientação da mesma.

O cálculo da orientação na base é inserido imediatamente após a integração das equações diferenciais de força e momento, permitindo a inicialização da integração das equações da matriz de orientação e do vetor posição, ao longo da torre.

4.2 - Desenvolvimento Teórico do Algoritmo de Cálculo dos Ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3

De modo a evitar singularidade, quando a torre está em sua posição inicial indeformada, os ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 são definidos da seguinte maneira:

θ_1 - Ângulo que define a rotação em torno do eixo global X deslocado, no sentido positivo do eixo.

θ_2 - Ângulo que define uma rotação em torno do eixo local η , no sentido positivo do eixo.

θ_3 - Ângulo que define uma rotação em torno do eixo global Z , no sentido positivo do eixo.

Os giros são dados na ordem em que aparecem nas figuras abaixo.

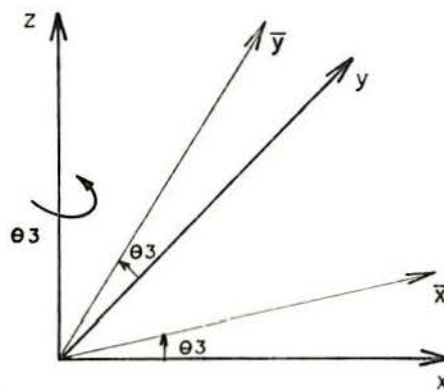


Figura 4.2.1 - Definição do ângulo θ_3 .

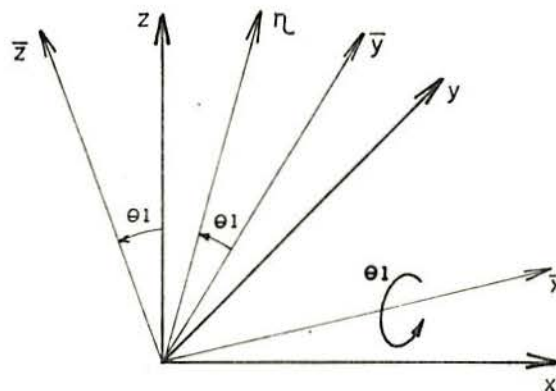


Figura 4.2.2 - Definição do ângulo θ_1 .

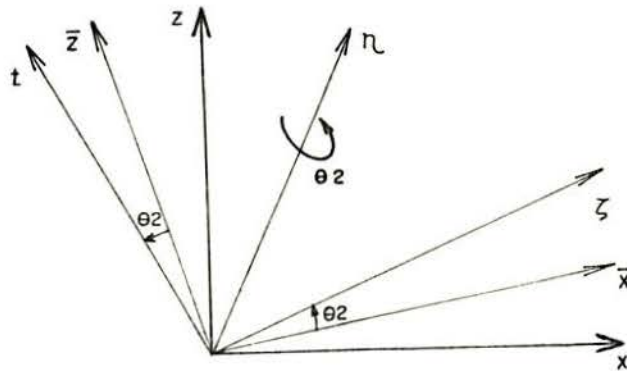


Figura 4.2.3 - Definição do ângulo θ_2 .

Na figura acima definimos:

\bar{X} - Eixo X deslocado no plano XY.

\bar{Y} - Eixo Y deslocado no plano XY, formando 90° com \bar{X} .

\bar{Z} - Eixo Z deslocado no plano ZY.

No final de um ciclo de integração do vetor momento, obtemos o momento na base, denominado \vec{M}_O , enquanto que a última orientação da torre forneceu o momento restaurador \vec{M}_S . Ambos os vetores \vec{M}_O e \vec{M}_S são referidos ao sistema de eixos globais.

O momento restaurador \vec{M}_S existe quando a torre possuir molas de rotação e é expresso em função das constantes K_x , K_y , K_z , que restringem os giros em torno dos eixos \bar{X} , η e Z respectivamente.

$$M_S (1) = K_x \cdot \theta_1 \cdot \cos \theta_3 + K_y \cdot \theta_2 \cdot L_O (2,1) \quad (4.2.1)$$

$$M_S (2) = K_x \cdot \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 + K_y \cdot \theta_2 \cdot L_O (2,2) \quad (4.2.2)$$

$$M_S (3) = K_y \cdot \theta_2 \cdot L_O (2,3) + K_z \cdot \theta_3 \quad (4.2.3)$$

Onde $M_S (i)$ é a componente segundo o eixo i do vetor momento \vec{M}_S .

As equações anteriores, dadas em coordenadas globais, podem ser visualizadas nas seguintes figuras.

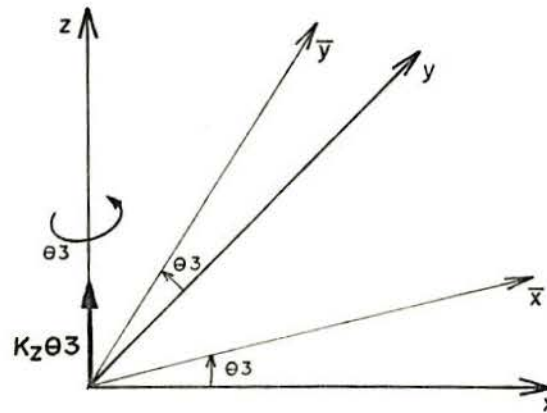


Figura 4.2.4 - Decomposição da componente da mola K_z .

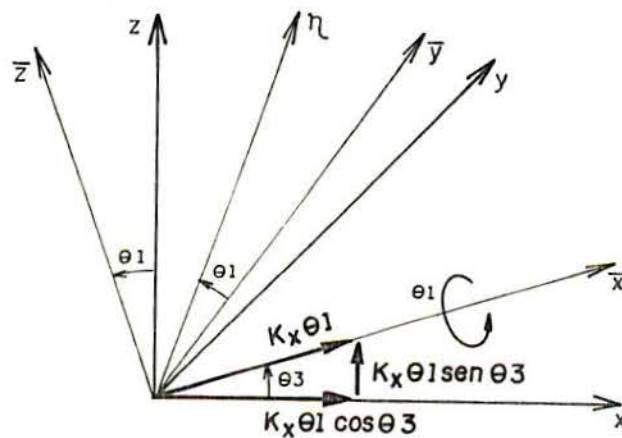


Figura 4.2.5 - Decomposição da componente da mola K_x .

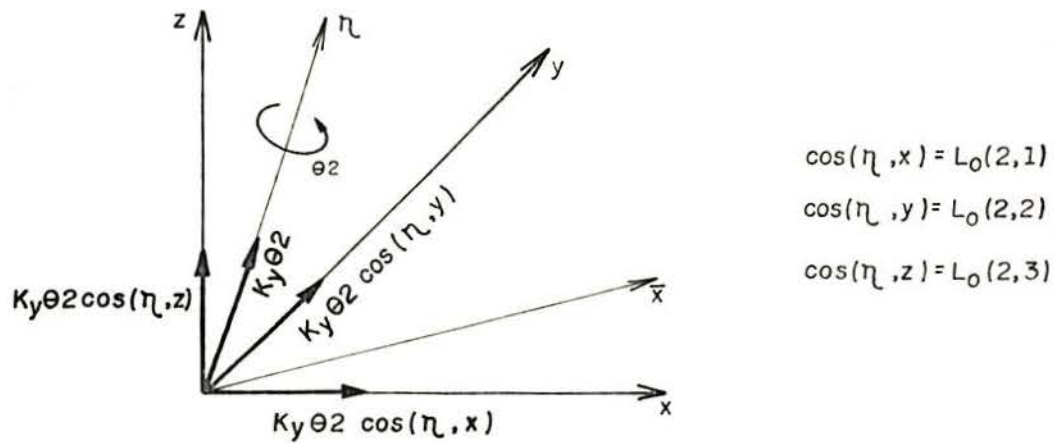


Figura 4.2.6 - Decomposição da componente da mola K_y .

Os ângulos θ_1 , θ_2 , θ_3 , bem como as componentes da matriz dos cossenos diretores na base $L_o(i, j)$, que aparecem nas equações (4.2.1-3), referem-se a valores obtidos no ciclo anterior do processo iterativo.

A cada novo ciclo, obtemos portanto, um momento residual na base, dado pela diferença entre \vec{M}_O e \vec{M}_S , que deve se aproximar de zero quando a torre tiver atingido sua posição final de equilíbrio.

A cada ciclo é, então, necessário a seguinte correção:

$$\Delta \vec{M}_O = - \vec{M}_O + \vec{M}_S + \Delta \vec{M}_S \quad (4.2.4)$$

Desprezando as variações dos momentos, provocadas pelas cargas distribuídas, a equação que define o momento na base é aproximada por

$$\vec{M}_O = \sum_T (\vec{M}_E + \vec{X}_A \times \vec{F}_A) + \sum_C (\vec{X}_C \times \vec{F}_B) \quad (4.2.5)$$

Onde definimos:

\vec{M}_E - Vetor momento externo aplicado segundo o sistema de eixos globais.

\vec{F}_A - Vetor força externa aplicada segundo o sistema de eixos globais.

\vec{F}_B - Vetor força exercida pelo cabo sobre a torre, segundo o sistema de eixos globais.

\vec{X}_A - Vetor posição que define a posição de aplicação da força \vec{F}_A , referido ao sistema de eixos globais.

\vec{X}_C - Vetor posição que define a posição de aplicação da força \vec{F}_B , referido ao sistema de eixos globais.

Σ_T - Representa um somatório sobre todos os segmentos da torre, onde existam forças e momentos externos aplicados \vec{F}_A e \vec{M}_E , respectivamente.

Σ_C - Representa um somatório sobre todos os cabos ligados à torre nos pontos definidos pelos vetores \vec{X}_C e exercendo as forças \vec{F}_B .

Cada vetor posição \vec{X}_C é dado pela soma do vetor posição da torre, que define a posição da mesma no segmento onde o cabo está fixado, com a excentricidade entre o cabo e o eixo baricêntrico da torre.

Diferenciando a equação (4.2.5) e assumindo que as forças externas e momentos externos sejam independentes do vetor posição, obtemos

$$\Delta \vec{M}_O = \Sigma_T (\Delta \vec{X}_A \times \vec{F}_A) + \Sigma_C (\Delta \vec{X}_C \times \vec{F}_B + \vec{X}_C \times \Delta \vec{F}_B) \quad (4.2.6)$$

A fim de estabelecermos as variações dos vetores posição \vec{X}_A e \vec{X}_C , vamos utilizar um vetor auxiliar de rotação infinitesimal, denominado $\Delta \vec{\phi}$ e referido ao sistema de eixos globais.

Definimos, portanto,

$$\Delta \vec{X}_A = \Delta \vec{\phi} \times \vec{X}_A \quad (4.2.7)$$

$$\Delta \vec{X}_C = \Delta \vec{\phi} \times \vec{X}_C \quad (4.2.8)$$

Como já foi estabelecido no capítulo 3, a matriz das constantes de mola do cabo $[B]$ tem a seguinte expressão:

$$\Delta \vec{F}_B = [B] \cdot \Delta \vec{X}_C$$

Substituindo as equações (4.2.7), (4.2.8) e na equação (4.2.6) obtemos

$$\Delta \vec{M}_O = \sum_T (\Delta \vec{\phi} \times \vec{X}_A \times \vec{F}_A) + \sum_C \{ \Delta \vec{\phi} \times \vec{X}_C \times \vec{F}_B + \vec{X}_C \times [[B] \cdot (\Delta \vec{\phi} \times \vec{X}_C)] \} \quad (4.2.9)$$

Sabemos que

$$\Delta \vec{M}_O = \left[\frac{\partial \vec{M}_O}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right] \cdot \Delta \vec{\phi} \quad (4.2.10)$$

$$\Delta \vec{M}_S = \left[\frac{\partial \vec{M}_S}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right] \cdot \Delta \vec{\phi} \quad (4.2.11)$$

Conseqüentemente a equação (4.2.4) pode ser novamente escrita como:

$$\left[\frac{\partial \vec{M}_O}{\partial \Delta \vec{\phi}} - \frac{\partial \vec{M}_S}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right] \cdot \Delta \vec{\phi} = - \vec{M}_O + \vec{M}_S \quad (4.2.12)$$

A fim de determinarmos os elementos da matriz (3x3) $\left[\frac{\partial \vec{M}_O}{\partial \Delta \vec{\phi}} - \frac{\partial \vec{M}_S}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right]$, vamos inicialmente calcular os produtos vetoriais que aparecem na equação (4.2.5).

Desenvolvendo a equação (4.2.7) obtemos

$$\begin{bmatrix} \Delta X_A(1) \\ \Delta X_A(2) \\ \Delta X_A(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \phi(2) \cdot X_A(3) - \Delta \phi(3) \cdot X_A(2) \\ \Delta \phi(3) \cdot X_A(1) - \Delta \phi(1) \cdot X_A(3) \\ \Delta \phi(1) \cdot X_A(2) - \Delta \phi(2) \cdot X_A(1) \end{bmatrix}$$

Estabelecendo

$$\Delta \vec{M}_A = \Delta \vec{X}_A \times \vec{F}_A \quad (4.2.13)$$

O vetor $\Delta \vec{M}_A$ tem as seguintes componentes:

$$\begin{bmatrix} \Delta M_A(1) \\ \Delta M_A(2) \\ \Delta M_A(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta \phi(3) \cdot X_A(1) - \Delta \phi(1) \cdot X_A(3)) \cdot F_A(3) - (\Delta \phi(1) \cdot X_A(2) - \Delta \phi(2) \cdot X_A(1)) \cdot F_A(2) \\ (\Delta \phi(1) \cdot X_A(2) - \Delta \phi(2) \cdot X_A(1)) \cdot F_A(1) - (\Delta \phi(2) \cdot X_A(3) - \Delta \phi(3) \cdot X_A(2)) \cdot F_A(3) \\ (\Delta \phi(2) \cdot X_A(3) - \Delta \phi(3) \cdot X_A(2)) \cdot F_A(2) - (\Delta \phi(3) \cdot X_A(1) - \Delta \phi(1) \cdot X_A(3)) \cdot F_A(1) \end{bmatrix}$$

A equação (4.2.8) é desenvolvida como

$$\begin{bmatrix} \Delta X_C(1) \\ \Delta X_C(2) \\ \Delta X_C(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\phi(2) \cdot X_C(3) - \Delta\phi(3) \cdot X_C(2) \\ \Delta\phi(3) \cdot X_C(1) - \Delta\phi(1) \cdot X_C(3) \\ \Delta\phi(1) \cdot X_C(2) - \Delta\phi(2) \cdot X_C(1) \end{bmatrix}$$

Sendo

$$\Delta\vec{M}_B = \Delta\vec{X}_C \times \vec{F}_B \quad (4.2.14)$$

As componentes de $\Delta\vec{M}_B$ são

$$\begin{bmatrix} \Delta M_B(1) \\ \Delta M_B(2) \\ \Delta M_B(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta\phi(3) \cdot X_C(1) - \Delta\phi(1) \cdot X_C(3)) \cdot F_B(3) - (\Delta\phi(1) \cdot X_C(2) - \Delta\phi(2) \cdot X_C(1)) \cdot F_B(2) \\ (\Delta\phi(1) \cdot X_C(2) - \Delta\phi(2) \cdot X_C(1)) \cdot F_B(1) - (\Delta\phi(2) \cdot X_C(3) - \Delta\phi(3) \cdot X_C(2)) \cdot F_B(3) \\ (\Delta\phi(2) \cdot X_C(3) - \Delta\phi(3) \cdot X_C(2)) \cdot F_B(2) - (\Delta\phi(3) \cdot X_C(1) - \Delta\phi(1) \cdot X_C(3)) \cdot F_B(1) \end{bmatrix}$$

A equação (3.4.1) é desenvolvida como:

$$\begin{bmatrix} \Delta F_B(1) \\ \Delta F_B(2) \\ \Delta F_B(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(1,1) \cdot \Delta X_C(1) + B(1,2) \cdot \Delta X_C(2) + B(1,3) \cdot \Delta X_C(3) \\ B(2,1) \cdot \Delta X_C(1) + B(2,2) \cdot \Delta X_C(2) + B(2,3) \cdot \Delta X_C(3) \\ B(3,1) \cdot \Delta X_C(1) + B(3,2) \cdot \Delta X_C(2) + B(3,3) \cdot \Delta X_C(3) \end{bmatrix}$$

Definindo

$$\Delta\vec{M}_C = \vec{X}_C \times \Delta\vec{F}_B \quad (4.2.15)$$

O vetor $\Delta\vec{M}_C$ tem os seguintes componentes:

$$\begin{aligned} \Delta M_C(1) = & [B(3,1) \cdot (\Delta\phi(2) \cdot X_C(3) - \Delta\phi(3) \cdot X_C(2)) + B(3,2) \cdot (\Delta\phi(3) \cdot X_C(1) \\ & - \Delta\phi(1) \cdot X_C(3)) + B(3,3) \cdot (\Delta\phi(1) \cdot X_C(2) - \Delta\phi(2) \cdot X_C(1))] \cdot X_C(2) - \\ & - [B(2,1) \cdot (\Delta\phi(2) \cdot X_C(3) - \Delta\phi(3) \cdot X_C(2)) + B(2,2) \cdot (\Delta\phi(3) \cdot X_C(1) - \\ & - \Delta\phi(1) \cdot X_C(3)) + B(2,3) \cdot (\Delta\phi(1) \cdot X_C(2) - \Delta\phi(2) \cdot X_C(1))] \cdot X_C(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_C(2) = & \left[B(1,1) \cdot (\Delta\phi(2) \cdot X_C(3) - \Delta\phi(3) \cdot X_C(2)) + B(1,2) \cdot (\Delta\phi(3) \cdot X_C(1) \right. \\ & \left. - \Delta\phi(1) \cdot X_C(3)) + B(1,3) \cdot (\Delta\phi(1) \cdot X_C(2) - \Delta\phi(2) \cdot X_C(1)) \right] \cdot X_C(3) - \\ & - \left[B(3,1) \cdot (\Delta\phi(2) \cdot X_C(3) - \Delta\phi(3) \cdot X_C(2)) + B(3,2) \cdot (\Delta\phi(3) \cdot X_C(1) \right. \\ & \left. - \Delta\phi(1) \cdot X_C(3)) + B(3,3) \cdot (\Delta\phi(1) \cdot X_C(2) - \Delta\phi(2) \cdot X_C(1)) \right] \cdot X_C(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_C(3) = & \left[B(2,1) \cdot (\Delta\phi(2) \cdot X_C(3) - \Delta\phi(3) \cdot X_C(2)) + B(2,2) \cdot (\Delta\phi(3) \cdot X_C(1) \right. \\ & \left. - \Delta\phi(1) \cdot X_C(3)) + B(2,3) \cdot (\Delta\phi(1) \cdot X_C(2) - \Delta\phi(2) \cdot X_C(1)) \right] \cdot X_C(1) - \\ & - \left[B(1,1) \cdot (\Delta\phi(2) \cdot X_C(3) - \Delta\phi(3) \cdot X_C(2)) + B(1,2) \cdot (\Delta\phi(3) \cdot X_C(1) \right. \\ & \left. - \Delta\phi(1) \cdot X_C(3)) + B(1,3) \cdot (\Delta\phi(1) \cdot X_C(2) - \Delta\phi(2) \cdot X_C(1)) \right] \cdot X_C(2) \end{aligned}$$

O vetor $\vec{\Delta M}_O$ pode, portanto, ser expresso como:

$$\vec{\Delta M}_O = \sum_T \vec{\Delta M}_A + \sum_C (\vec{\Delta M}_B + \vec{\Delta M}_C) \quad (4.2.16a)$$

Conseqüentemente

$$\left[\frac{\partial \vec{M}_O}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right] = \sum_T \left[\frac{\partial \vec{M}_A}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right] + \sum_C \left(\left[\frac{\partial \vec{M}_B}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right] + \left[\frac{\partial \vec{M}_C}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right] \right) \quad (4.2.16b)$$

A matriz $\left[\frac{\partial \vec{M}_A}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right]$ tem dimensão (3x3) e suas componentes são

$$\frac{\partial M_A(1)}{\partial \Delta \phi(1)} = -X_A(3) \cdot F_A(3) - X_A(2) \cdot F_A(2) \quad (4.2.17a)$$

$$\frac{\partial M_A(1)}{\partial \Delta \phi(2)} = X_A(1) \cdot F_A(2) \quad (4.2.17b)$$

$$\frac{\partial M_A(1)}{\partial \Delta \phi(3)} = X_A(1) \cdot F_A(3) \quad (4.2.17c)$$

$$\frac{\partial M_A(2)}{\partial \Delta \phi(1)} = X_A(2) \cdot F_A(1) \quad (4.2.17d)$$

$$\frac{\partial M_A(2)}{\partial \Delta \phi(2)} = -X_A(1) \cdot F_A(1) - X_A(3) \cdot F_A(3) \quad (4.2.17e)$$

$$\frac{\partial M_A(2)}{\partial \Delta \phi(3)} = X_A(2) \cdot F_A(3) \quad (4.2.17f)$$

$$\frac{\partial M_A(3)}{\partial \Delta \phi(1)} = X_A(3) \cdot F_A(1) \quad (4.2.17g)$$

$$\frac{\partial M_A(3)}{\partial \Delta \phi(2)} = X_A(3) \cdot F_A(2) \quad (4.2.17h)$$

$$\frac{\partial M_A(3)}{\partial \Delta \phi(3)} = -X_A(2) \cdot F_A(2) - X_A(1) \cdot F_A(1) \quad (4.2.17i)$$

Da mesma forma $\left[\frac{\partial \vec{M}_B}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right]$ tem as seguintes componentes:

$$\frac{\partial M_B(1)}{\partial \Delta \phi(1)} = -X_C(3) \cdot F_B(3) - X_C(2) \cdot F_B(2) \quad (4.2.18a)$$

$$\frac{\partial M_B(1)}{\partial \Delta \phi(2)} = X_C(1) \cdot F_B(2) \quad (4.2.18b)$$

$$\frac{\partial M_B(1)}{\partial \Delta \phi(3)} = X_C(1) \cdot F_B(3) \quad (4.2.18c)$$

$$\frac{\partial M_B(2)}{\partial \Delta \phi(1)} = X_C(2) \cdot F_B(1) \quad (4.2.18d)$$

$$\frac{\partial M_B(2)}{\partial \Delta \phi(2)} = -X_C(1) \cdot F_B(1) - X_C(3) \cdot F_B(3) \quad (4.2.18e)$$

$$\frac{\partial M_B(2)}{\partial \Delta \phi(3)} = X_C(2) \cdot F_B(3) \quad (4.2.18f)$$

$$\frac{\partial M_B(3)}{\partial \Delta \phi(1)} = X_C(3) \cdot F_B(1) \quad (4.2.18g)$$

$$\frac{\partial M_B(3)}{\partial \Delta \phi(2)} = X_C(3) \cdot F_B(2) \quad (4.2.18h)$$

$$\frac{\partial M_B(3)}{\partial \Delta \phi(3)} = -X_C(2) \cdot F_B(2) - X_C(1) \cdot F_B(1) \quad (4.2.18i)$$

As componentes da matriz $\begin{bmatrix} \partial \vec{M}_C \\ \partial \Delta \vec{\phi} \end{bmatrix}$ são

$$\frac{\partial M_C(1)}{\partial \Delta \phi(1)} = -B(3,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(2) + B(2,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(3) + B(3,3) \cdot X_C(2) \cdot X_C(2) - B(2,3) \cdot X_C(2) \cdot X_C(3) \quad (4.2.19a)$$

$$\frac{\partial M_C(1)}{\partial \Delta \phi(2)} = B(3,1) \cdot X_C(3) \cdot X_C(2) - B(3,3) \cdot X_C(1) \cdot X_C(2) - B(2,1) \cdot X_C(3) \cdot X_C(3) + B(2,3) \cdot X_C(1) \cdot X_C(3) \quad (4.2.19b)$$

$$\frac{\partial M_C(1)}{\partial \Delta \phi(3)} = -B(3,1) \cdot X_C(2) \cdot X_C(2) + B(3,2) \cdot X_C(1) \cdot X_C(2) + B(2,1) \cdot X_C(2) \cdot X_C(3) - B(2,2) \cdot X_C(1) \cdot X_C(3) \quad (4.2.19c)$$

$$\frac{\partial M_C(2)}{\partial \Delta \phi(1)} = -B(1,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(3) + B(1,3) \cdot X_C(2) \cdot X_C(3) + B(3,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(1) - B(3,3) \cdot X_C(2) \cdot X_C(1) \quad (4.2.19d)$$

$$\frac{\partial M_C(2)}{\partial \Delta \phi(2)} = B(1,1) \cdot X_C(3) \cdot X_C(3) - B(1,3) \cdot X_C(1) \cdot X_C(3) - B(3,1) \cdot X_C(3) \cdot X_C(1) + B(3,3) \cdot X_C(1) \cdot X_C(1) \quad (4.2.19e)$$

$$\frac{\partial M_C(2)}{\partial \Delta \phi(3)} = -B(1,1) \cdot X_C(2) \cdot X_C(3) + B(1,2) \cdot X_C(1) \cdot X_C(3) + B(3,1) \cdot X_C(2) \cdot X_C(1) - B(3,2) \cdot X_C(1) \cdot X_C(1) \quad (4.2.19f)$$

$$\frac{\partial M_C(3)}{\partial \Delta \phi(1)} = -B(2,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(1) + B(2,3) \cdot X_C(2) \cdot X_C(1) + B(1,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(2) - B(1,3) \cdot X_C(2) \cdot X_C(2) \quad (4.2.19g)$$

$$\frac{\partial M_C(3)}{\partial \Delta \phi(2)} = B(1,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(1) - B(2,3) \cdot X_C(1) \cdot X_C(1) - B(1,1) \cdot X_C(3) \cdot X_C(2) + B(1,3) \cdot X_C(1) \cdot X_C(2) \quad (4.2.19h)$$

$$\frac{\partial M_C(3)}{\partial \Delta \phi(3)} = -B(2,1) \cdot X_C(2) \cdot X_C(1) + B(2,2) \cdot X_C(1) \cdot X_C(1) + B(1,1) \cdot X_C(2) \cdot$$

$$\cdot X_C(2) - B(1,2) \cdot X_C(1) \cdot X_C(2) \quad (4.2.19i)$$

A matriz $\left[\frac{\partial \vec{M}_O}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right]$ é então estabelecida pela soma das matrizes $\left[\frac{\partial \vec{M}_A}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right]$, $\left[\frac{\partial \vec{M}_B}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right]$ e $\left[\frac{\partial \vec{M}_C}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right]$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_O(1,1)}{\partial \Delta \phi} &= -X_A(3) \cdot F_A(3) - X_A(2) \cdot F_A(2) - X_C(3) \cdot F_B(3) - X_C(2) \cdot F_B(2) - \\ &- B(3,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(2) + B(2,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(3) + B(3,3) \cdot X_C(2) \cdot X_C(2) - \\ &- B(2,3) \cdot X_C(2) \cdot X_C(3) \end{aligned} \quad (4.2.20a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_O(1,2)}{\partial \Delta \phi} &= X_A(1) \cdot F_A(2) + X_C(1) \cdot F_B(2) + B(3,1) \cdot X_C(3) \cdot X_C(2) - B(3,3) \cdot \\ &\cdot X_C(1) \cdot X_C(2) - B(2,1) \cdot X_C(3) \cdot X_C(3) + B(2,3) \cdot X_C(1) \cdot X_C(3) \end{aligned} \quad (4.2.20b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_O(1,3)}{\partial \Delta \phi} &= X_A(1) \cdot F_A(3) + X_C(1) \cdot F_B(3) - B(3,1) \cdot X_C(2) \cdot X_C(2) + B(3,2) \cdot \\ &\cdot X_C(1) \cdot X_C(2) + B(2,1) \cdot X_C(2) \cdot X_C(3) - B(2,2) \cdot X_C(1) \cdot X_C(3) \end{aligned} \quad (4.2.20c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_O(2,1)}{\partial \Delta \phi} &= X_A(2) \cdot F_A(1) + X_C(2) \cdot F_B(1) - B(1,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(3) + B(1,3) \cdot \\ &\cdot X_C(2) \cdot X_C(3) + B(3,2) \cdot X_C(3) \cdot X_C(1) - B(3,3) \cdot X_C(2) \cdot X_C(1) \end{aligned} \quad (4.2.20d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_O(2,2)}{\partial \Delta \phi} &= -X_A(1) \cdot F_A(1) - X_A(3) \cdot F_A(3) - X_C(1) \cdot F_B(1) - X_C(3) \cdot F_B(3) + \\ &+ B(1,1) \cdot X_C(3) \cdot X_C(3) - B(1,3) \cdot X_C(1) \cdot X_C(3) - B(3,1) \cdot X_C(3) \cdot X_C(1) \end{aligned} \quad (4.2.20e)$$

A relação entre os acréscimos diferenciais $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$ e $\Delta\theta_3$ e o vetor de rotação infinitesimal $\vec{\Delta\phi}$ pode ser visualizada através das figuras abaixo.

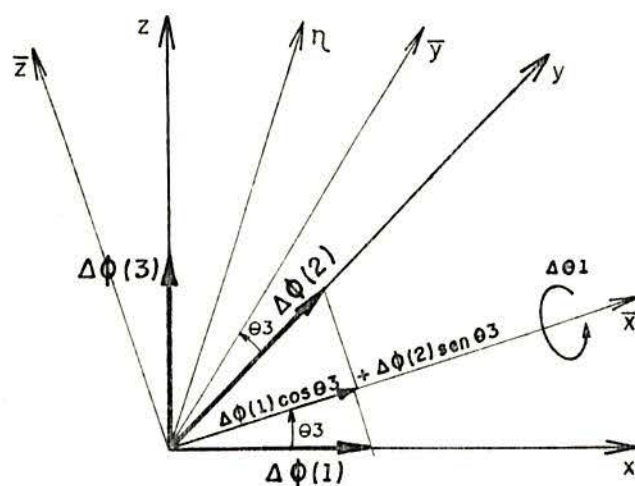


Figura 4.2.7 - Decomposição do vetor $\vec{\Delta\phi}$ na direção de $\Delta\theta_1$.

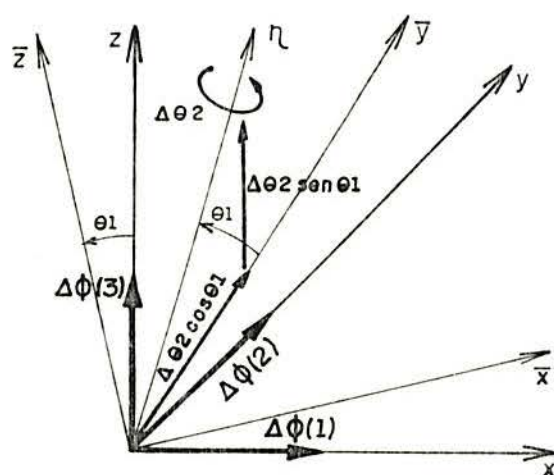


Figura 4.2.8 - Decomposição do vetor $\vec{\Delta\phi}$ na direção de $\Delta\theta_2$.

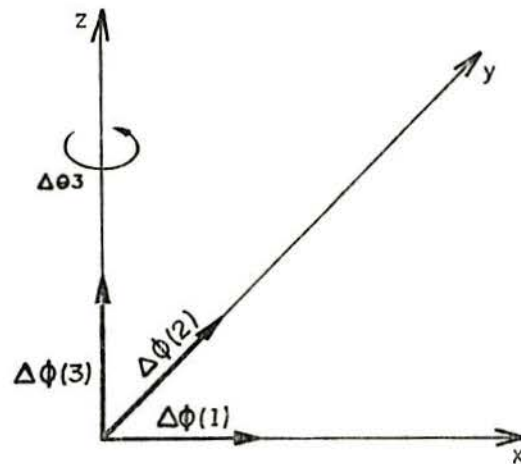


Figura 4.2.9 - Decomposição do vetor $\Delta\vec{\phi}$ na direção de $\Delta\theta_3$.

Das figuras (4.2.7-9) tiramos as seguintes relações cinemáticas

$$\Delta\theta_1 = \Delta\phi(1) \cdot \cos \theta_3 + \Delta\phi(2) \cdot \text{sen } \theta_3 \quad (4.2.24)$$

$$\Delta\theta_2 = -\Delta\phi(1) \cdot \text{sen } \theta_3 / \cos \theta_1 + \Delta\phi(2) \cdot \cos \theta_3 / \cos \theta_1 \quad (4.2.25)$$

$$\Delta\theta_3 = \Delta\phi(1) \cdot \tan \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 - \Delta\phi(2) \cdot \tan \theta_1 \cdot \cos \theta_3 + \Delta\phi(3) \quad (4.2.26)$$

Substituindo as equações (4.2.24-26) nas (4.2.21-23) obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta M_S(1) = & (K_x \cdot \cos \theta_3) \cdot (\Delta\phi(1) \cdot \cos \theta_3 + \Delta\phi(2) \cdot \text{sen } \theta_3) - (K_x \cdot \theta_1 \cdot \\ & \cdot \text{sen } \theta_3) \cdot (\Delta\phi(1) \cdot \tan \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 - \Delta\phi(2) \cdot \tan \theta_1 \cdot \cos \theta_3 + \Delta\phi(3)) + \\ & + (K_y \cdot L_o(2,1)) \cdot (-\Delta\phi(1) \cdot \text{sen } \theta_3 / \cos \theta_1 + \Delta\phi(2) \cdot \cos \theta_3 / \cos \theta_1) + \\ & + K_y \cdot \theta_2 \cdot \Delta L_o(2,1) \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

$$\begin{aligned}
\Delta M_S(2) &= (K_X \cdot \text{sen } \theta_3) \cdot (\Delta\phi(1) \cdot \cos \theta_3 + \Delta\phi(2) \cdot \text{sen } \theta_3) + (K_X \cdot \theta_1 \cdot \\
&\cdot \cos \theta_3) \cdot (\Delta\phi(1) \cdot \tan \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 - \Delta\phi(2) \cdot \tan \theta_1 \cdot \cos \theta_3 + \Delta\phi(3)) + \\
&+ K_Y \cdot L_O(2,2) \cdot (-\Delta\phi(1) \cdot \text{sen } \theta_3 / \cos \theta_1 + \Delta\phi(2) \cdot \cos \theta_3 / \cos \theta_1) + \\
&+ K_Y \cdot \theta_2 \cdot \Delta L_O(2,2)
\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

$$\begin{aligned}
\Delta M_S(3) &= K_Y \cdot L_O(2,3) \cdot (-\Delta\phi(1) \cdot \text{sen } \theta_3 / \cos \theta_1 + \Delta\phi(2) \cdot \cos \theta_3 / \cos \theta_1) + \\
&+ K_Y \cdot \theta_2 \cdot \Delta L_O(2,3) + K_Z \cdot (\Delta\phi(1) \cdot \tan \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 - \Delta\phi(2) \cdot \tan \theta_1 \cdot \cos \theta_3 + \\
&+ \Delta\phi(3))
\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

As componentes da matriz $\begin{bmatrix} \partial \vec{M}_S \\ \partial \Delta \vec{\phi} \end{bmatrix}$ são, então, obtidas.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_S(1,1)}{\partial \Delta \phi} &= K_X \cdot \cos^2 \theta_3 - K_X \cdot \theta_1 \cdot \text{sen}^2 \theta_3 \cdot \tan \theta_1 - K_Y (\text{sen } \theta_3 / \cos \theta_1) \cdot \\
&\cdot L_O(2,1) + K_Y \cdot \theta_2 \cdot \frac{\partial L_O(2,1)}{\partial \Delta \phi(1)}
\end{aligned} \tag{4.2.30a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_S(1,2)}{\partial \Delta \phi} &= K_X \cdot \cos \theta_3 \cdot \text{sen } \theta_3 + K_X \cdot \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 \cdot \tan \theta_1 \cdot \cos \theta_3 + \\
&+ K_Y \cdot (\cos \theta_3 / \cos \theta_1) \cdot L_O(2,1) + K_Y \cdot \theta_2 \cdot \frac{\partial L_O(2,1)}{\partial \Delta \phi(2)}
\end{aligned} \tag{4.2.30b}$$

$$\frac{\partial M_S(1,3)}{\partial \Delta \phi} = -K_X \cdot \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 + K_Y \cdot \theta_2 \cdot \frac{\partial L_O(2,1)}{\partial \Delta \phi(3)} \tag{4.2.30c}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_S(2,1)}{\partial \Delta \phi} &= K_X \cdot \text{sen } \theta_3 \cdot \cos \theta_3 + K_X \cdot \theta_1 \cdot \cos \theta_3 \cdot \tan \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 - \\
&- K_Y \cdot L_O(2,2) \cdot \text{sen } \theta_3 / \cos \theta_1 + K_Y \cdot \theta_2 \cdot \frac{\partial L_O(2,2)}{\partial \Delta \phi(1)}
\end{aligned} \tag{4.2.30d}$$

$$\frac{\partial M_S(2,2)}{\partial \Delta \phi} = K_X \cdot \text{sen}^2 \theta_3 - K_X \cdot \theta_1 \cdot \tan \theta_1 \cdot \cos^2 \theta_3 + K_Y \cdot L_O(2,2) \cdot \frac{\partial L_O(2,2)}{\partial \Delta \phi(2)} \cdot \cos \theta_3 / \cos \theta_1 + K_Y \cdot \theta_2 \cdot \frac{\partial L_O(2,2)}{\partial \Delta \phi(2)} \quad (4.2.30e)$$

$$\frac{\partial M_S(2,3)}{\partial \Delta \phi} = K_X \cdot \theta_1 \cdot \cos \theta_3 + K_Y \cdot \theta_2 \cdot \frac{\partial L_O(2,2)}{\partial \Delta \phi(3)} \quad (4.2.30f)$$

$$\frac{\partial M_S(3,1)}{\partial \Delta \phi} = -K_Y \cdot (\text{sen} \theta_3 / \cos \theta_1) \cdot L_O(2,3) + K_Y \cdot \theta_2 \cdot \frac{\partial L_O(2,3)}{\partial \Delta \phi(1)} + K_Z \cdot \tan \theta_1 \cdot \text{sen} \theta_3 \quad (4.2.30g)$$

$$\frac{\partial M_S(3,2)}{\partial \Delta \phi} = K_Y \cdot (\cos \theta_3 / \cos \theta_1) \cdot L_O(2,3) + K_Y \cdot \theta_2 \cdot \frac{\partial L_O(2,3)}{\partial \Delta \phi(2)} - K_Z \cdot \tan \theta_1 \cdot \cos \theta_3 \quad (4.2.30h)$$

$$\frac{\partial M_S(3,3)}{\partial \Delta \phi} = K_Y \cdot \theta_2 \cdot \frac{\partial L_O(2,3)}{\partial \Delta \phi(3)} + K_Z \quad (4.2.30i)$$

As componentes do vetor de rotação infinitesimal $\vec{\Delta \phi}$ são determinadas, através da equação (4.2.12) como

$$\vec{\Delta \phi} = \left[\frac{\partial \vec{M}_O}{\partial \Delta \vec{\phi}} - \frac{\partial \vec{M}_S}{\partial \Delta \vec{\phi}} \right]^{-1} \cdot (-\vec{M}_O + \vec{M}_S)$$

Os valores dos ângulos θ e das componentes da matriz de orientação na base que aparecem na matriz $[\partial \vec{M}_S / \partial \Delta \vec{\phi}]$ pertencem ao ciclo anterior. Substituindo as componentes do vetor $\vec{\Delta \phi}$ nas equações (4.2.24-26) determinamos os acréscimos diferenciais $\Delta \theta_1$, $\Delta \theta_2$ e $\Delta \theta_3$. Conseqüentemente os ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 do ciclo atual, podem ser calculados pela soma dos ângulos pertencentes ao ciclo anterior com os acréscimos diferenciais recém calculados.

Denominando de $\bar{\theta}$ os ângulos do ciclo anterior, definimos, então, os ângulos do ciclo atual como:

$$\theta_1 = \bar{\theta}_1 + \Delta\theta_1 \quad (4.2.31)$$

$$\theta_2 = \bar{\theta}_2 + \Delta\theta_2 \quad (4.2.32)$$

$$\theta_3 = \bar{\theta}_3 + \Delta\theta_3 \quad (4.2.33)$$

Com os novos ângulos θ assim calculados, determinamos a nova matriz de orientação na base através do seguinte produto de matrizes

$$[L_0] = [A_2] \cdot [A_1] \cdot [A_3] \quad (4.2.34)$$

onde definimos

$$[A_2] = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \theta & -\text{sen } \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.35)$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \text{sen } \theta_1 \\ 0 & -\text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.2.36)$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & \text{sen } \theta_3 & 0 \\ -\text{sen } \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.37)$$

Realizando os produtos matriciais indicados na equação (4.2.34), estabelecemos a matriz de orientação na base $[L_0]$, necessária para a inicializar a integração da matriz de orientação em todos os pontos da torre.

$$L_O(1,1) = \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_3 - \text{sen } \theta_2 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 \quad (4.2.38a)$$

$$L_O(1,2) = \cos \theta_2 \cdot \text{sen } \theta_3 + \text{sen } \theta_2 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_3 \quad (4.2.38b)$$

$$L_O(1,3) = -\text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \quad (4.2.38c)$$

$$L_O(2,1) = -\cos \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 \quad (4.2.38d)$$

$$L_O(2,2) = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_3 \quad (4.2.38e)$$

$$L_O(2,3) = \text{sen } \theta_1 \quad (4.2.38f)$$

$$L_O(3,1) = \text{sen } \theta_2 \cdot \cos \theta_3 + \cos \theta_2 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \text{sen } \theta_3 \quad (4.2.38g)$$

$$L_O(3,2) = \text{sen } \theta_2 \cdot \text{sen } \theta_3 - \cos \theta_2 \cdot \text{sen } \theta_1 \cdot \cos \theta_3 \quad (4.2.38h)$$

$$L_O(3,3) = \cos \theta_2 \cdot \cos \theta_1 \quad (4.2.38i)$$

5. EXEMPLOS

5.1 - Introdução

A fim de resolver o problema da torre estaiada no espaço segundo a formulação dada nos capítulos anteriores, um programa computacional, denominado Torre, foi desenvolvido em linguagem Fortran. Este segue o encaminhamento do fluxograma do item 2.4.2.

O programa Torre contém a subrotina Cabo que determina apenas as variáveis dos cabos e foi implementada no microcomputador Polymax 201, em linguagem Fortran.

Para todos os exemplos do item 5.3 foram utilizados 6 intervalos de integração para a torre e 5 para os cabos, não sendo necessário aumentar estes números, pois os resultados não teriam uma modificação importante.

Com o objetivo de evitar a singularidade da matriz que relaciona os momentos e giros na base, que pode ocorrer caso os cabos estejam fixados no centro da gravidade da torre, então posicionamos os mesmos com uma excentricidade em relação ao eixo baricêntrico da torre ou consideramos a base um apoio sobre molas.

As características de inércia da torre dos exemplos apresentados são tais que tornam-a bastante rígida e portanto os gráficos de deslocamentos da torre contém um gráfico adicional, à direita, onde traçamos a parcela de deslocamento elástico da mesma. Este é obtido pela diferença entre o deslocamento total e o de corpo rígido. Também foi feita uma verificação do valor dos deslocamentos apresentados pelo programa com o valor calculado de maneira exata, sendo os resultados praticamente iguais.

Para a maioria dos exemplos o tempo de computação é da ordem de 3000 s.

5.2 - Exemplos de Cabos

5.2.1 - Para o cabo cujas características indicamos abaixo, foram determinadas as reações nas extremidades e as constantes de mola, através do programa CABO implementado no Microcomputador Polymax-201.

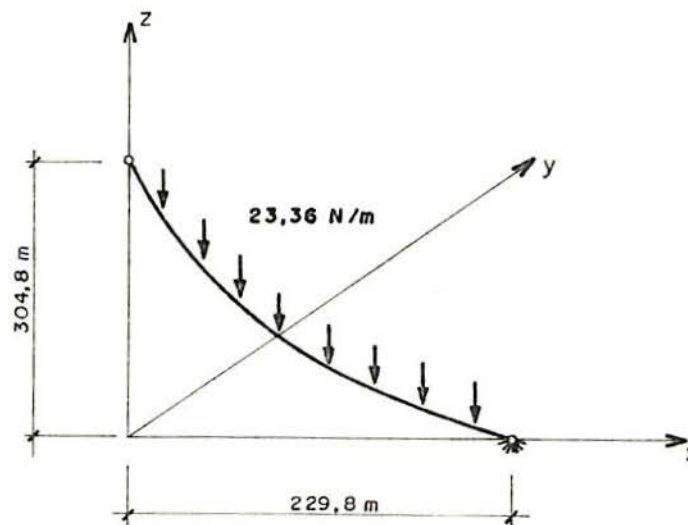


Figura 5.2.1.1

Posição do Ponto de União do Cabo com a Torre: $\vec{X}_C = (0; 0; 304,8) \text{ m}$

Posição do Ponto de Ancoragem: $\vec{P}_A = (229,8; 0; 0) \text{ m}$

Carga Distribuída: $\vec{F}_C = (0; 0; -23,36) \text{ N/m}$

Comprimento: $L = 381 \text{ m}$

Constante do Cabo (eq. 3.2.10) $\nu = 1$

$EA = 3,56 \times 10^7 \text{ N}$

Para este problema adotamos 50 intervalos de integração. Os resultados obtidos foram:

Reação do Cabo na Ancoragem: $\vec{R}_A = (44853; 0; -55113) \text{ N}$

Reação do Cabo no Ponto de Fixação com a Torre (força que o cabo exerce sobre a torre): $\vec{F}_B = (44853; 0; -64013) \text{ N}$

Matriz das Constantes de Mola: $[B] = \begin{bmatrix} -28242 & 0 & 37157 \\ 0 & -195 & 0 \\ 37157 & 0 & -49422 \end{bmatrix} \text{ N/m}$

Diminuindo o número de pontos de integração os resultados não diferem significativamente, como mostram os valores abaixo.

Utilizando 5 intervalos de integração obtemos:

$$\vec{R}_A = (42327; 0; -51770) \text{ N}$$

$$\vec{F}_B = (42327; 0; -60670) \text{ N}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -26939 & 0 & 35434 \\ 0 & -184 & 0 \\ 35434 & 0 & -47114 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

O tempo de processamento depende da proximidade do valor da Reação Imaginária inicialmente arbitrada com o valor real da reação na ancoragem do cabo, variando de poucos segundos a minutos.

Este exemplo foi apresentado por Richard A. Skop¹⁴ e seus resultados são os seguintes:

Reação do Cabo no Ponto de Fixação com a Torre:

$$\vec{F}_B = (45506; 0; -64872) \text{ N}$$

Matriz das Constantes de Mola: $[B] = \begin{bmatrix} -28452 & 0 & 37429 \\ 0 & -199 & 0 \\ 37429 & 0 & -49780 \end{bmatrix} \text{ N/m}$

Comparando os resultados observamos uma diferença da ordem de 1,4% para a reação do cabo e de 0,74% para a matriz de mola.

5.2.2 - Para o cabo da figura 5.2.1.1 foi estudado o efeito da aplicação de uma carga concentrada de 4450 N, em diversos pontos do cabo, sendo $\vec{F}_C = (0; 0; -4450)$ N.

O cabo é dividido em 5 intervalos de integração e o ponto de aplicação da carga está a uma distância l do ponto de fixação com a torre.

Os resultados das reações do cabo são dados em forma de gráficos, onde as abscissas representam a relação entre o ponto de aplicação da carga e o comprimento do cabo e nas ordenadas estão os valores das componentes das reações do cabo, no ponto de fixação com a torre.

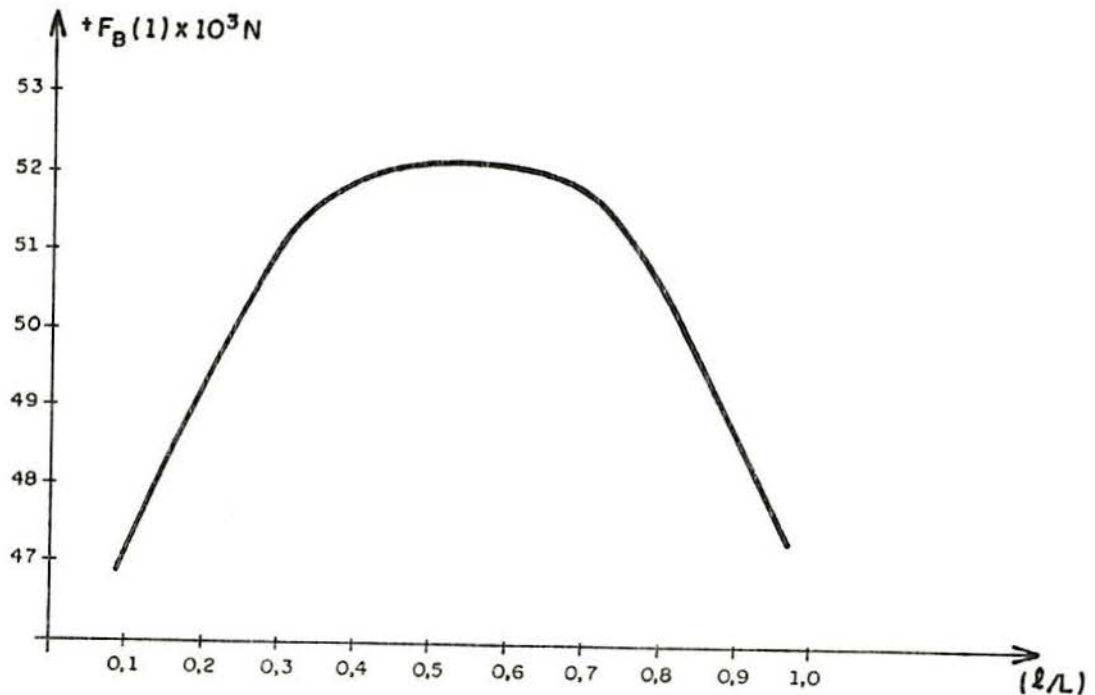


Figura 5.2.2.1

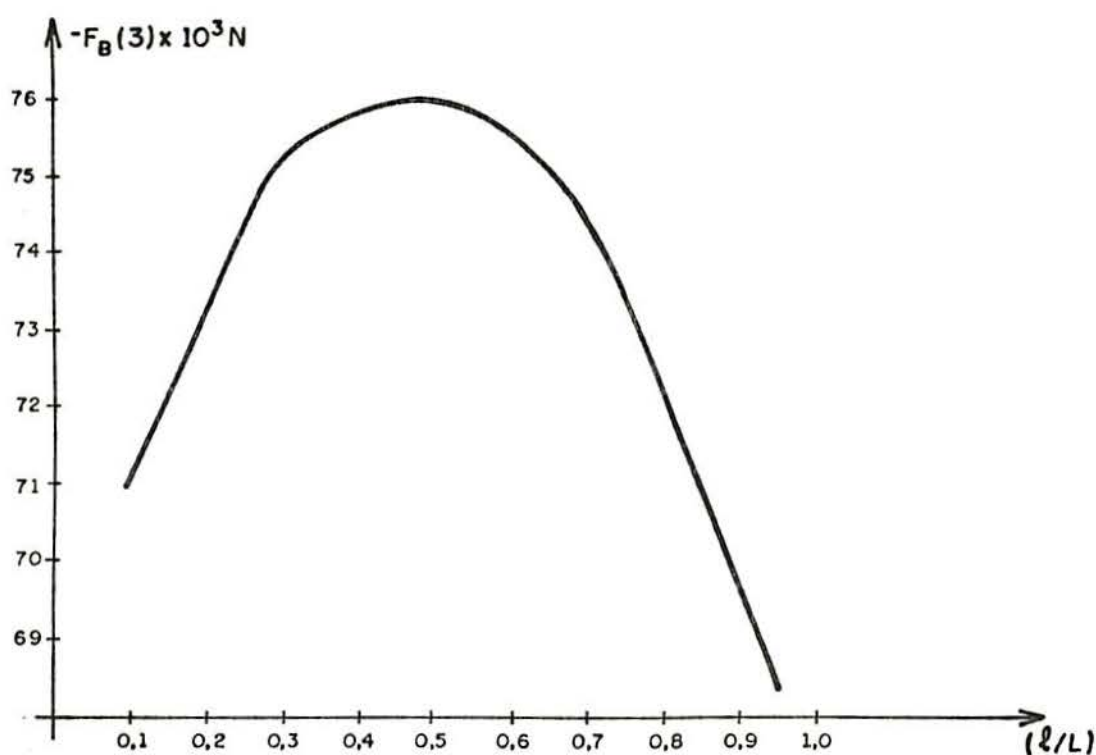


Figura 5.2.2.2

Este problema foi proposto por Richard A. Skop¹⁴ e os gráficos traçados por ele coincidem com o fornecido pelo programa CABO.

5.2.3 - A figura 5.2.3.1 nos mostra um cabo numa posição inicial, dada por $\vec{X}_c = (0; 0; 457)$, submetido a cargas de vento e peso próprio.

Com o objetivo de estudar o comportamento das relações entre força e deslocamento do mesmo, foram dados uma série de deslocamentos na direção x no ponto de fixação do cabo com a torre.

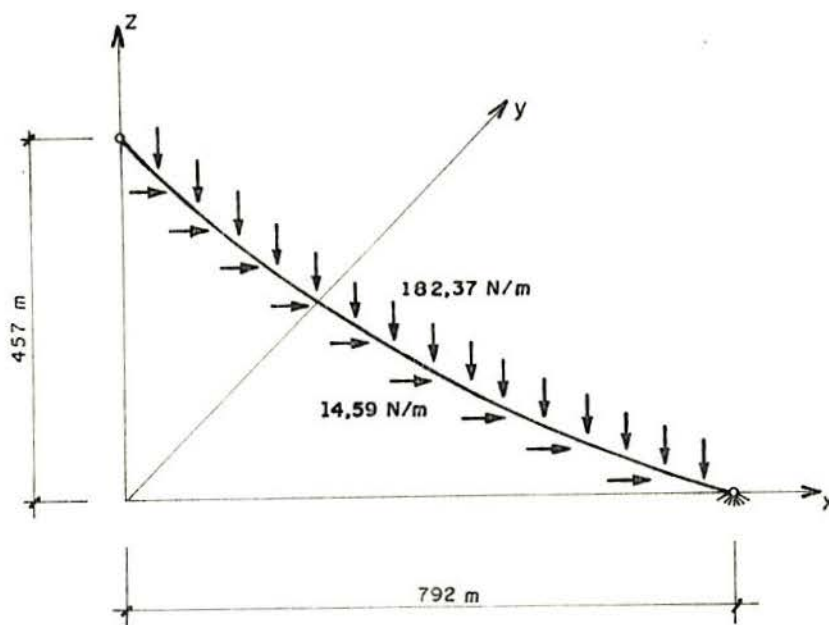


Figura 5.2.3.1

Posição do Ponto de União do Cabo com a Torre: $\vec{X}_C = (X; 0; 457) \text{ m}$

Posição do Ponto de Ancoragem: $\vec{P}_A = (792; 0; 0) \text{ m}$

Carga Distribuída: $\vec{F}_C = (14,59; 0; -182,37) \text{ N/m}$

Comprimento: $L = 914 \text{ m}$

Constante $\nu = 1$

$EA = 4,45 \times 10^8 \text{ N}$

Número de Intervalos de Integração = 5

Mantendo fixas as componentes do vetor \vec{X}_C segundo os eixos Y e Z e variando a componente segundo o eixo X, no intervalo entre -5 e 5 m, calculamos o vetor força \vec{F}_B do cabo e as constantes de mola correspondentes a cada valor de \vec{X}_C .

Desta forma traçamos gráficos que relacionam força-deslocamento e constante de mola-deslocamento.

A figura 5.2.3.2 apresenta a curva força-deslocamento do cabo, onde observamos o comportamento não linear do mesmo, que é acentuado a medida que o cabo é mais tensionado.

As figuras 5.2.3.3-6 apresentam as curvas que relacionam as componentes $B(i,j)$ da matriz $[B]$ com os deslocamentos. A componente $B(i,j)$ representa a força que surge na direção i devida a um deslocamento unitário na direção j . Observamos também a não-linearidade destas relações e nas figuras 5.2.3.4 e 6 a mudança na forma de crescimento da curva, quando a componente $X_C(1)$ muda de sinal.

Para todos os casos, as componentes $B(1,2) = B(2,1) = B(2,3) = B(3,2)$ são nulas, uma vez que o cabo e as cargas atuantes sobre este estão no plano.

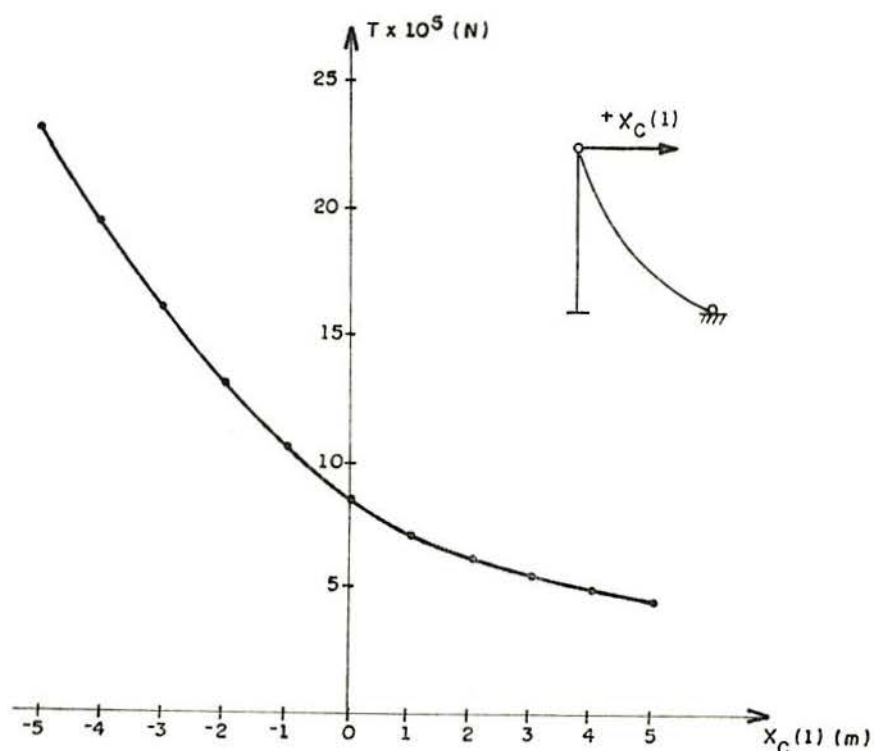


Figura 5.2.3.2

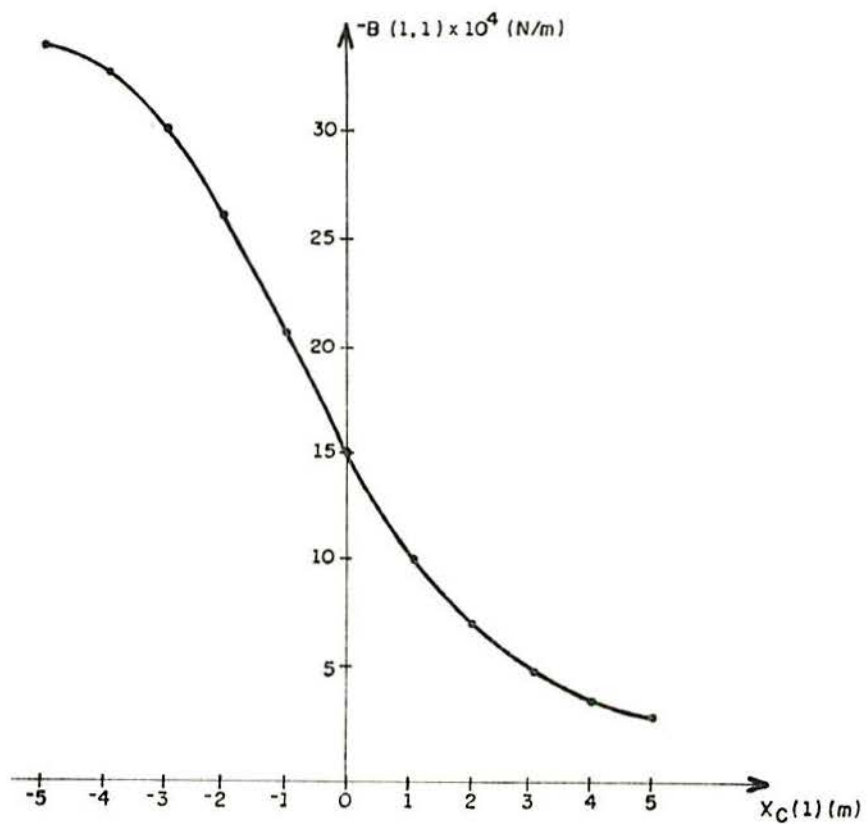


Figura 5.2.3.3

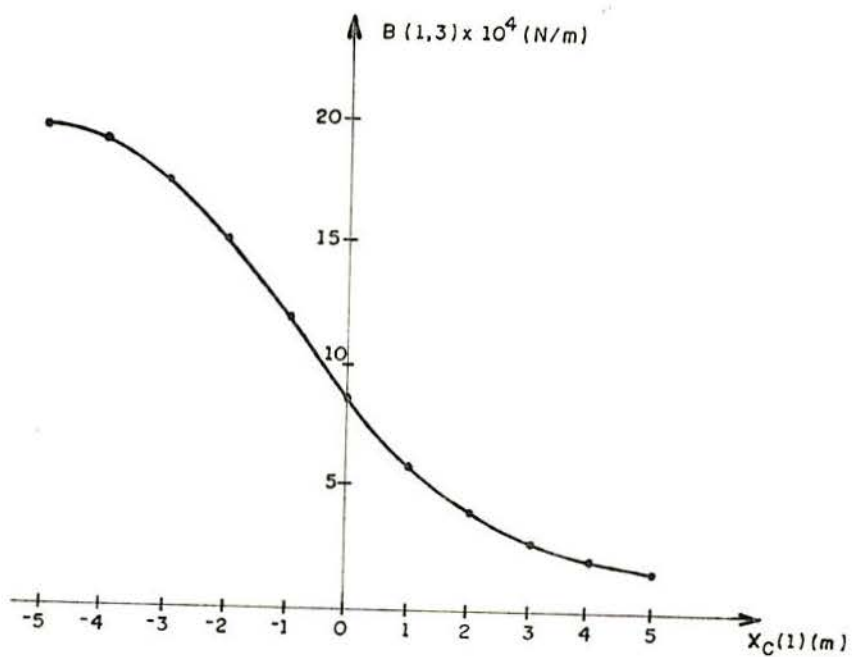


Figura 5.2.3.4

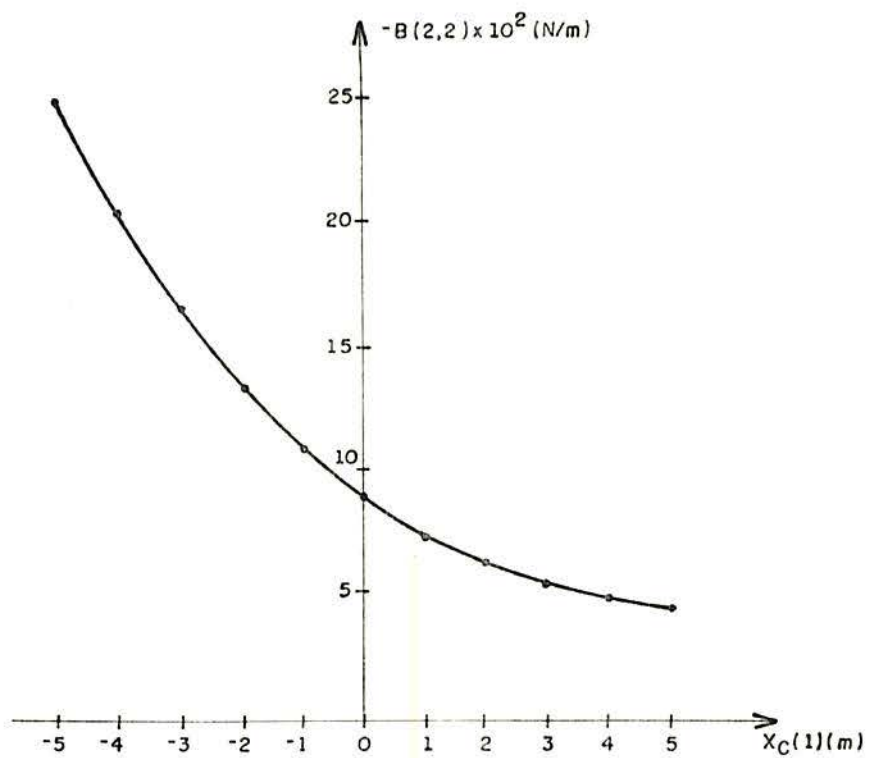


Figura 5.2.3.5

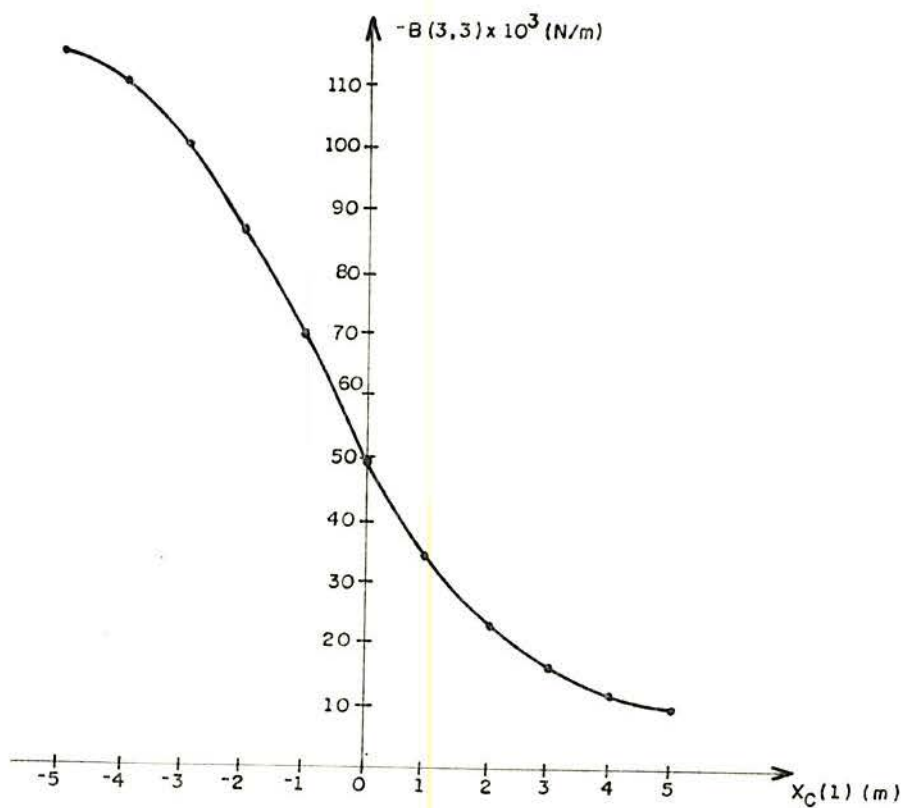


Figura 5.2.3.6

5.3 - Exemplos de Torres Estaiadas

5.3.1 - A figura 5.3.1.1 nos mostra uma torre fixa no topo por 20 cabos e rotulada na base, submetida a carga de vento e peso próprio, que são representadas pela primeira e terceira componente do vetor de cargas distribuídas \vec{f} , respectivamente. Uma carga de plataforma é aplicada no topo da torre, sendo representada pelo vetor \vec{F}_A . Para esta torre foram determinadas, através do programa TORRE, implementado no Burroughs, as solicitações e deslocamentos na mesma.

As características da torre bem como as dos cabos são dadas a seguir.

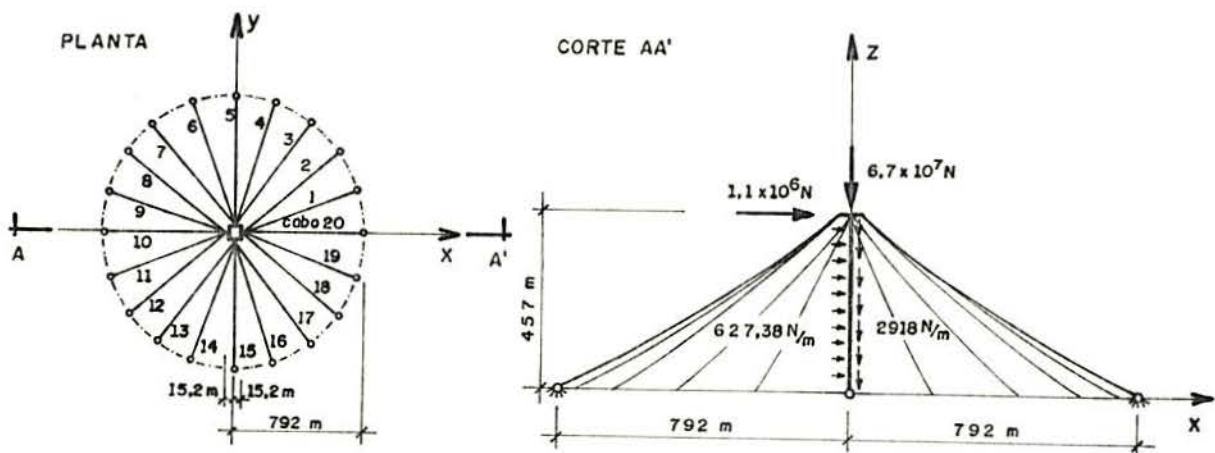


Figura 5.3.1.1

Dados da Torre

Altura: 457 m

Carga Distribuída: $\vec{f} = (627,38; 0; -2918) \text{ N/m}$

Carga de Plataforma: $\vec{F}_A = (1,1 \times 10^6; 0; -6,7 \times 10^7) \text{ N}$

$EA = 1,513 \times 10^{11} \text{ N}$

$EI_\zeta = EI_\eta = GJ = 3,518 \times 10^{13} \text{ N} \cdot \text{m}^2$

Número de Intervalos de Integração: 6

Dados dos Cabos:

Comprimento: $L = 914 \text{ m}$

Carga Distribuída: $\vec{f}_c = (14,59; 0; -182,37) \text{ N/m}$

$\nu = 1$

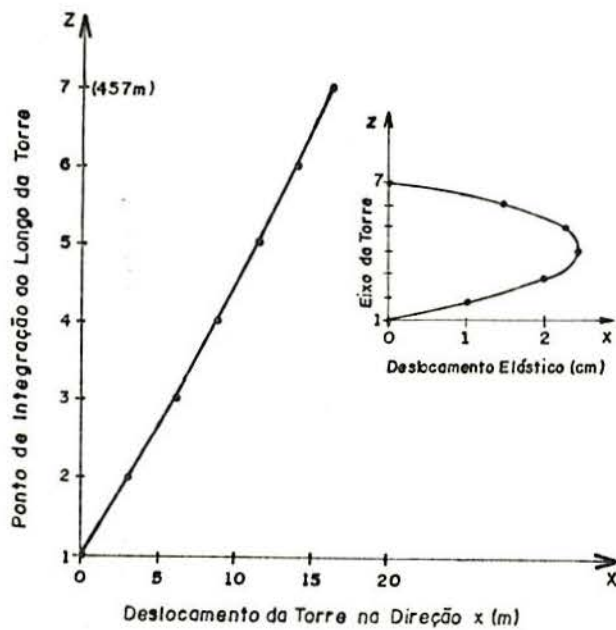
$EA = 4,45 \times 10^8 \text{ N}$

Número de Intervalos de Integração: 5

Cabo	Posição no Ponto de Fixação com a Torre $\vec{X}_C \text{ (m)}$	Posição na Ancoragem $\vec{P}_A \text{ (m)}$
1	(15,2; 0; 457)	(753,23; 244,74; 0)
2	(15,2; 0; 457)	(640,74; 465,52; 0)
3	(0; 15,2; 457)	(465,52; 640,74; 0)
4	(0; 15,2; 457)	(244,74; 753,24; 0)
5	(0; 15,2; 457)	(0; 792; 0)
6	(0; 15,2; 457)	(-244,74; 753,24; 0)
7	(0; 15,2; 457)	(-465,52; 640,74; 0)
8	(-15,2; 0; 457)	(-640,74; 465,52; 0)
9	(-15,2; 0; 457)	(-753,23; 244,74; 0)
10	(-15,2; 0; 457)	(-792; 0; 0)
11	(-15,2; 0; 457)	(-753,23; -244,74; 0)
12	(-15,2; 0; 457)	(-640,74; -465,52; 0)
13	(0; -15,2; 457)	(-465,52; -640,74; 0)
14	(0; -15,2; 457)	(-244,74; -753,24; 0)
15	(0; -15,2; 457)	(0; -792; 0)

Cabo	Posição no Ponto de Fixação com a Torre \vec{X}_C (m)	Posição na Ancoragem \vec{P}_A (m)
16	(0; -15,2; 457)	(244,74; -753,24; 0)
17	(0; -15,2; 457)	(465,52; -640,74; 0)
18	(15,2; 0; 457)	(640,74; -465,52; 0)
19	(15,2; 0; 457)	(753,23; -244,74; 0)
20	(15,2; 0; 457)	(792; 0; 0)

Resultados da Torre:



Vetor Posição \vec{X} (m)

(16,81; 0; 456,47)
 (14,03; 0; 380,39)
 (11,23; 0; 304,31)
 (8,43; 0; 228,23)
 (5,63; 0; 152,15)
 (2,81; 0; 76,08)
 (0; 0; 0)

Figura 5.3.1.2

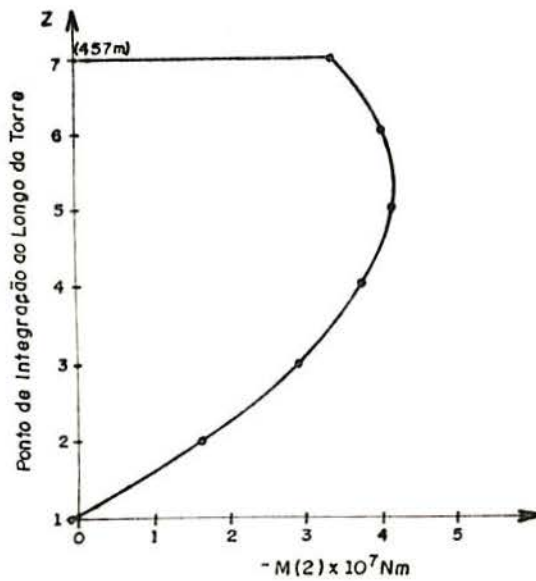


Figura 5.3.1.3

Vetor Momento Interno
 \vec{M} (Nm)

$$(0; -3,34 \times 10^7; 0)$$

$$(0; -3,93 \times 10^7; 0)$$

$$(0; -4,05 \times 10^7; 0)$$

$$(0; -3,69 \times 10^7; 0)$$

$$(0; -2,86 \times 10^7; 0)$$

$$(0; -1,57 \times 10^7; 0)$$

$$(0; 1,61 \times 10^6; 0)$$

Resultados dos Cabos

Cabo	Reação no Ponto de Fixação com a Torre \vec{F}_B (N)	Força de Tração Resultado do Programa TORRE	$T = \vec{F}_B \cdot \vec{F}_B$ (N) Resultado fornecido por Felix Rosenthal
1	$(1,41 \times 10^5; 4,55 \times 10^4; -1,76 \times 10^5)$	$2,31 \times 10^5$	$2,32 \times 10^5$
2	$(1,31 \times 10^5; 9,5 \times 10^4; -1,84 \times 10^5)$	$2,45 \times 10^5$	$2,46 \times 10^5$
3	$(1,07 \times 10^5; 1,39 \times 10^5; -1,91 \times 10^5)$	$2,59 \times 10^5$	$2,61 \times 10^5$
4	$(6,17 \times 10^4; 1,77 \times 10^5; -1,98 \times 10^5)$	$2,73 \times 10^5$	$2,75 \times 10^5$
5	$(2,42 \times 10^3; 2,15 \times 10^5; -2,14 \times 10^5)$	$3,03 \times 10^5$	$3,04 \times 10^5$
6	$(-8,62 \times 10^4; 2,63 \times 10^5; -2,5 \times 10^5)$	$3,73 \times 10^5$	$3,72 \times 10^5$
7	$(-2,9 \times 10^5; 3,85 \times 10^5; -3,67 \times 10^5)$	$6,06 \times 10^5$	$5,93 \times 10^5$
8	$(-7,15 \times 10^5; 5,23 \times 10^5; -5,97 \times 10^5)$	$1,06 \times 10^6$	$1,07 \times 10^6$
9	$(-8,87 \times 10^5; 2,90 \times 10^5; -6,25 \times 10^5)$	$1,12 \times 10^6$	$1,11 \times 10^6$
10	$(-9,52 \times 10^5; 0; -6,36 \times 10^5)$	$1,14 \times 10^6$	$1,12 \times 10^6$
11	$(-8,87 \times 10^5; -2,9 \times 10^5; -6,25 \times 10^5)$	$1,12 \times 10^6$	$1,11 \times 10^6$
12	$(-7,15 \times 10^5; -5,23 \times 10^5; -5,97 \times 10^5)$	$1,07 \times 10^6$	$1,07 \times 10^6$
13	$(-2,90 \times 10^5; -3,85 \times 10^5; -3,67 \times 10^5)$	$6,06 \times 10^5$	$5,93 \times 10^5$
14	$(-8,62 \times 10^4; -2,63 \times 10^5; -2,50 \times 10^5)$	$3,73 \times 10^5$	$3,72 \times 10^5$
15	$(2,42 \times 10^3; -2,15 \times 10^5; -2,14 \times 10^5)$	$3,03 \times 10^5$	$3,04 \times 10^5$
16	$(6,18 \times 10^4; -1,77 \times 10^5; -1,98 \times 10^5)$	$2,73 \times 10^5$	$2,75 \times 10^5$

Cabo	Reação no Ponto de Fixação com a Torre \vec{F}_B (N)	Força de Tração Resultado do Programa TORRE	$T = \vec{F}_B \cdot \vec{F}_B$ (N) Resultado fornecido por Felix Rosenthal
17	$(1,07 \times 10^5; -1,3 \times 10^5; -1,91 \times 10^5)$	$2,59 \times 10^5$	$2,61 \times 10^5$
18	$(1,31 \times 10^5; -9,5 \times 10^4; -1,84 \times 10^5)$	$2,45 \times 10^5$	$2,46 \times 10^5$
19	$(1,41 \times 10^5; -4,55 \times 10^4; -1,7 \times 10^5)$	$2,31 \times 10^5$	$2,32 \times 10^5$
20	$(1,45 \times 10^5; 0; -1,74 \times 10^5)$	$2,26 \times 10^5$	$2,27 \times 10^5$

Cabo	Matriz de Mola do Cabo $[B]$ (N/m)
1	$\begin{bmatrix} -1,83 \times 10^5 & -5,89 \times 10^4 & 2,28 \times 10^5 \\ -5,89 \times 10^4 & -1,92 \times 10^4 & 7,35 \times 10^4 \\ 2,28 \times 10^5 & 7,35 \times 10^4 & -2,85 \times 10^5 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -1,40 \times 10^5 & -1,01 \times 10^5 & 1,96 \times 10^5 \\ -1,01 \times 10^5 & -7,34 \times 10^4 & 1,41 \times 10^5 \\ 1,96 \times 10^5 & 1,41 \times 10^5 & -2,74 \times 10^5 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -8,28 \times 10^4 & -1,07 \times 10^5 & 1,48 \times 10^5 \\ -1,07 \times 10^5 & -1,40 \times 10^5 & 1,92 \times 10^5 \\ 1,48 \times 10^5 & 1,92 \times 10^5 & -2,65 \times 10^5 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -2,52 \times 10^4 & -7,13 \times 10^4 & 8,01 \times 10^4 \\ -7,13 \times 10^4 & -2,04 \times 10^5 & 2,29 \times 10^5 \\ 8,01 \times 10^4 & 2,29 \times 10^5 & -2,58 \times 10^5 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} -3,63 \times 10^2 & -2,74 \times 10^3 & 2,74 \times 10^3 \\ -2,74 \times 10^3 & -2,44 \times 10^5 & 2,43 \times 10^5 \\ 2,74 \times 10^3 & 2,43 \times 10^5 & -2,43 \times 10^5 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} -2,64 \times 10^4 & 7,94 \times 10^4 & -7,54 \times 10^4 \\ 7,94 \times 10^4 & -2,43 \times 10^5 & 2,30 \times 10^5 \\ -7,54 \times 10^4 & 2,30 \times 10^5 & -2,19 \times 10^5 \end{bmatrix}$

Cabo	Matriz de Mola do Cabo [B] (N/m)		
7	$\begin{bmatrix} -1,12 \times 10^5 & 1,48 \times 10^5 & -1,41 \times 10^5 \\ 1,48 \times 10^5 & -1,97 \times 10^5 & 1,87 \times 10^5 \\ -1,41 \times 10^5 & 1,87 \times 10^5 & -1,79 \times 10^5 \end{bmatrix}$		
8	$\begin{bmatrix} -2,19 \times 10^5 & 1,59 \times 10^5 & -1,82 \times 10^5 \\ 1,59 \times 10^5 & -1,18 \times 10^5 & 1,33 \times 10^5 \\ -1,82 \times 10^5 & 1,33 \times 10^5 & -1,53 \times 10^5 \end{bmatrix}$		
9	$\begin{bmatrix} -3,04 \times 10^5 & 9,9 \times 10^4 & -2,13 \times 10^5 \\ 9,9 \times 10^4 & -3,36 \times 10^4 & 6,97 \times 10^4 \\ -2,13 \times 10^5 & 6,9 \times 10^4 & -1,52 \times 10^5 \end{bmatrix}$		
10	$\begin{bmatrix} -3,37 \times 10^5 & 0 & -2,24 \times 10^5 \\ 0 & -1,25 \times 10^3 & 0 \\ -2,24 \times 10^5 & 0 & -1,51 \times 10^5 \end{bmatrix}$		
11	$\begin{bmatrix} -3,04 \times 10^5 & -9,9 \times 10^4 & -2,13 \times 10^5 \\ -9,9 \times 10^4 & -3,36 \times 10^4 & -6,97 \times 10^4 \\ -2,13 \times 10^5 & -6,97 \times 10^4 & -1,52 \times 10^5 \end{bmatrix}$		
12	$\begin{bmatrix} -2,19 \times 10^5 & -1,59 \times 10^5 & -1,82 \times 10^5 \\ -1,59 \times 10^5 & -1,18 \times 10^5 & -1,33 \times 10^5 \\ -1,82 \times 10^5 & -1,33 \times 10^5 & -1,53 \times 10^5 \end{bmatrix}$		
13	$\begin{bmatrix} -1,12 \times 10^5 & -1,48 \times 10^5 & -1,41 \times 10^5 \\ -1,48 \times 10^4 & -1,97 \times 10^5 & -1,87 \times 10^5 \\ -1,41 \times 10^4 & -1,87 \times 10^5 & -1,79 \times 10^5 \end{bmatrix}$		
14	$\begin{bmatrix} -2,64 \times 10^4 & -7,94 \times 10^4 & -7,54 \times 10^4 \\ -7,94 \times 10^4 & -2,43 \times 10^5 & -2,30 \times 10^5 \\ -7,54 \times 10^4 & -2,30 \times 10^5 & -2,19 \times 10^5 \end{bmatrix}$		
15	$\begin{bmatrix} -3,63 \times 10^2 & 2,74 \times 10^3 & 2,74 \times 10^3 \\ 2,74 \times 10^3 & -2,44 \times 10^5 & -2,43 \times 10^5 \\ 2,74 \times 10^3 & -2,43 \times 10^5 & -2,43 \times 10^5 \end{bmatrix}$		

Cabo	Matriz de Mola do Cabo [B] (N/m)
16	$\begin{bmatrix} -2,52 \times 10^4 & 7,13 \times 10^4 & 8,01 \times 10^4 \\ 7,13 \times 10^4 & -2,04 \times 10^5 & -2,29 \times 10^5 \\ 8,01 \times 10^4 & -2,29 \times 10^5 & -2,58 \times 10^5 \end{bmatrix}$
17	$\begin{bmatrix} -8,28 \times 10^4 & 1,07 \times 10^5 & 1,48 \times 10^5 \\ 1,07 \times 10^5 & -1,40 \times 10^5 & -1,92 \times 10^5 \\ 1,48 \times 10^5 & -1,92 \times 10^5 & -2,65 \times 10^5 \end{bmatrix}$
18	$\begin{bmatrix} -1,40 \times 10^5 & 1,01 \times 10^5 & 1,96 \times 10^5 \\ 1,01 \times 10^5 & -7,34 \times 10^4 & -1,41 \times 10^5 \\ 1,96 \times 10^5 & -1,41 \times 10^5 & -2,73 \times 10^5 \end{bmatrix}$
19	$\begin{bmatrix} -1,83 \times 10^5 & 5,89 \times 10^4 & 2,28 \times 10^5 \\ 5,89 \times 10^4 & -1,92 \times 10^4 & -7,35 \times 10^4 \\ 2,28 \times 10^5 & -7,35 \times 10^4 & -2,85 \times 10^5 \end{bmatrix}$
20	$\begin{bmatrix} -1,99 \times 10^5 & 0 & 2,39 \times 10^5 \\ 0 & -2,48 \times 10^2 & 0 \\ 2,39 \times 10^5 & 0 & -2,88 \times 10^5 \end{bmatrix}$

Os resultados mostram que a torre se deslocou na direção do eixo X, uma vez que as cargas distribuídas e concentradas possuem componentes nesta direção. A torre possuindo uma inércia muito grande, se deforma pouco e para visualizarmos melhor o problema, desenhamos na figura 5.3.1.2 o deslocamento total da mesma e a direita o seu deslocamento elástico. Este é obtido descontando-se a parcela de deslocamento de corpo rígido do deslocamento total.

As reações e constantes de mola dos cabos apresentam valores simétricos em relação ao eixo X, uma vez que não existe força atuando na direção Y.

Os cabos estão dispostos excêntricamente em relação ao eixo da torre e conseqüentemente as suas reações no topo vão provocar um momento em torno do eixo Y. Este momento fletor no topo da torre desloca o ponto de momento máximo da mes-

ma, como mostra a figura 5.3.1.3.

Como já foi mostrado no item 5.2, existe um comportamento não linear governando as relações entre força e deslocamento do cabo, que pode ser observado nos resultados das forças \vec{F}_B . Na configuração final da torre, os cabos que ficam mais esticados, isto é, com menor flecha, são os que apresentam valores mais elevados das reações e maior rigidez.

Este exemplo foi proposto por Felix Rosenthal¹³ e seus resultados são os seguintes:

Vetor Posição no Topo da Torre: $\vec{X} = (16,3; 0; 456,49)$ m

Momento Máximo (à 335 m da base): $\vec{M} = (0; -4,3 \times 10^7; 0)$ Nm

A diferença do deslocamento no topo entre os dois resultados é da ordem de 3%, enquanto que o valor do momento máximo não pode ser comparado diretamente, pois o programa Torre não determinou as solicitações neste ponto, à 335 m da base da torre. Entretanto podemos concluir através do gráfico da figura 5.3.1.3, que o momento máximo deve se aproximar do valor $-4,3 \times 10^7$ Nm.

5.3.2 - Para a torre da figura 5.3.1 mudamos as suas condições de contorno no topo, fixando-a em 4 cabos, cujas características e resultados fornecidos pelo programa Torre são dados a seguir.

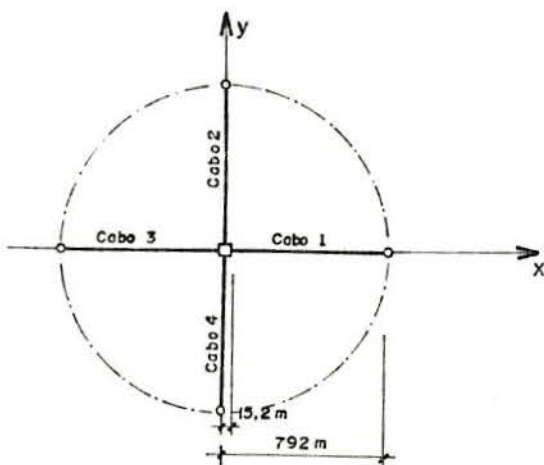


Figura 5.3.2.1

Dados dos Cabos

Comprimento: $L = 914$ m

Carga Distribuída:

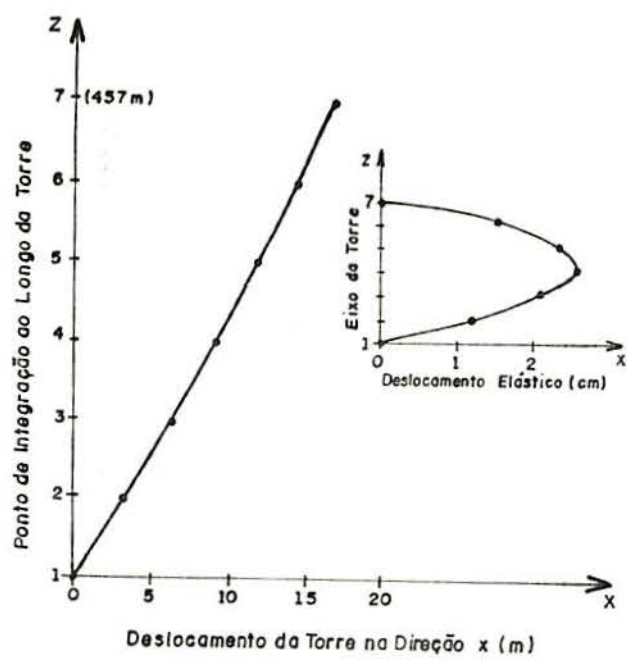
$$\vec{f}_c = (29,18; 0; -729,5) \text{ N/m}$$

$$\nu = 1$$

$$EA = 2,136 \times 10^9 \text{ N}$$

Cabo	Posição no Ponto de Fixação com a Torre \vec{X}_C (m)	Posição na Ancoragem \vec{P}_A (m)
1	(15,2; 0; 457)	(792; 0; 0)
2	(0; 15,2; 457)	(0; 792; 0)
3	(-15,2; 0; 457)	(-792; 0; 0)
4	(0; -15,2; 457)	(0; -792; 0)

Resultados da Torre



Vetor Posição \vec{X} (m)

- (16,98; 0; 456,46)
- (14,16; 0; 380,39)
- (11,34; 0; 304,31)
- (8,51; 0; 228,23)
- (5,67; 0; 152,15)
- (2,84; 0; 76,08)
- (0; 0; 0)

Figura 5.3.2.2

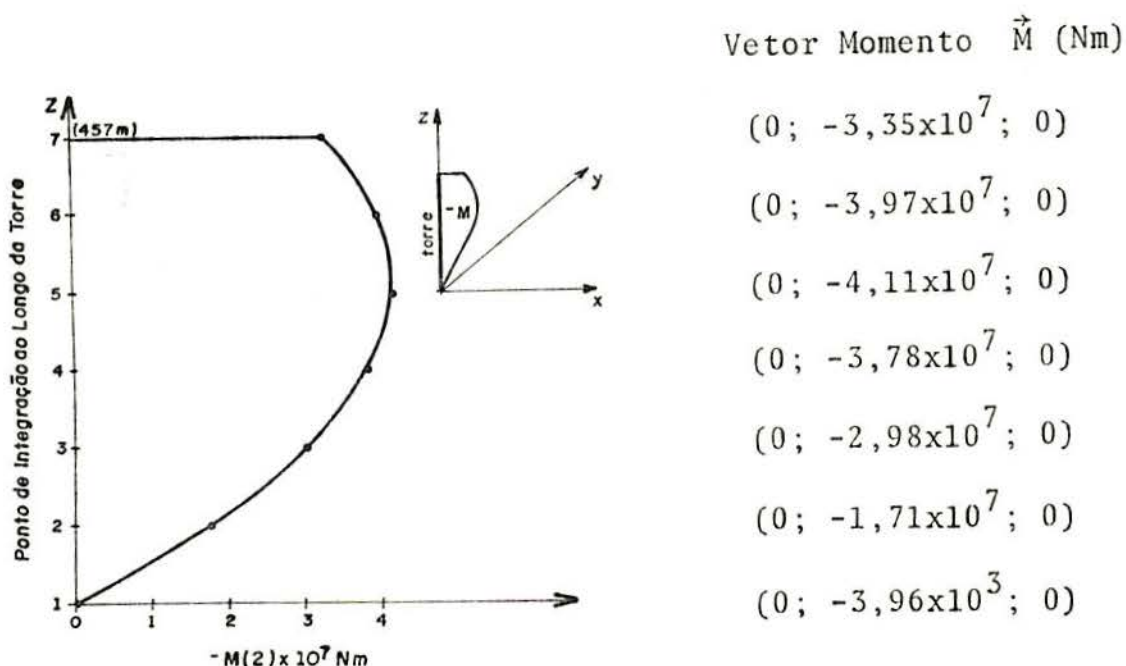


Figura 5.3.2.3

Resultados do Cabo

Cabo	Reação no Ponto de Fixação com a Torre \vec{F}_B (N)	Força de Tração $T = \vec{F}_B \cdot \vec{F}_B$ (N)
1	$(5,75 \times 10^5; 0; -7,01 \times 10^5)$	$9,07 \times 10^5$
2	$(-4,64 \times 10^3; 8,58 \times 10^5; -8,57 \times 10^5)$	$1,21 \times 10^6$
3	$(-4,45 \times 10^6; 0; -2,90 \times 10^6)$	$5,31 \times 10^6$
4	$(-4,64 \times 10^3; -8,58 \times 10^5; -8,57 \times 10^5)$	$1,21 \times 10^6$

Observamos que a torre do exemplo 5.3.1 apresenta praticamente os mesmos deslocamentos e momentos do presente exemplo, concluindo-se que os 4 cabos desempenham o mesmo efeito que os 20 cabos anteriores, que possuem EA da ordem de 5 vezes menor.

5.3.3 - Com relação a torre do exemplo 5.3.2 mudamos apenas o comprimento do cabo, a fim de analisarmos o efeito da sua flecha sobre a configuração de equilíbrio da torre.

O comprimento dos 4 cabos passa a ser da 930 m e os resultados obtidos são:

Resultados da Torre

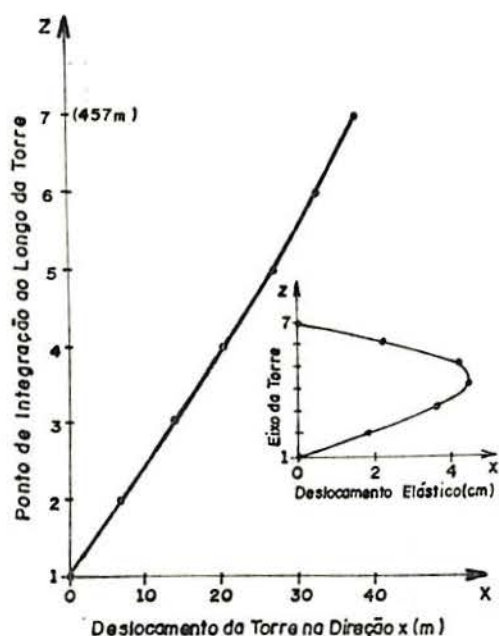


Figura 5.3.3.1

Vetor Posição \vec{X} (m)

(38,41; 0; 455,16)
 (32,03; 0; 379,29)
 (25,65; 0; 303,43)
 (19,25; 0; 227,57)
 (12,84; 0; 151,72)
 (6,42; 0; 75,86)
 (0; 0; 0)

Vetor Momento \vec{M} (Nm)

(0; $-6,19 \times 10^7$; 0)
 (0; $-6,6 \times 10^7$; 0)
 (0; $-6,44 \times 10^7$; 0)
 (0; $-5,68 \times 10^7$; 0)
 (0; $-4,34 \times 10^7$; 0)
 (0; $-2,44 \times 10^7$; 0)
 (0; $-5,58 \times 10^3$; 0)

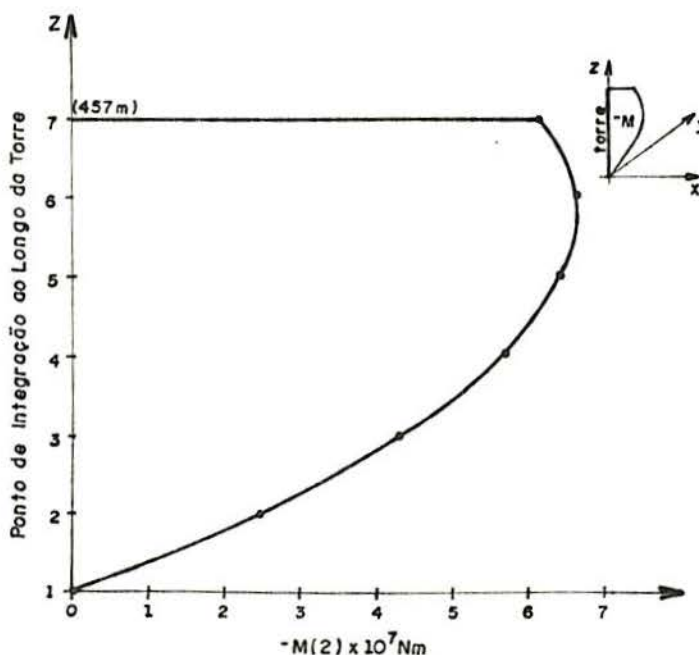


Figura 5.3.3.2

Ponto de Integração	Vetor Força Interna \vec{F} (N)
1	$(-6,0 \times 10^6; 0; -7,50 \times 10^7)$
2	$(-6,04 \times 10^6; 0; -7,48 \times 10^7)$
3	$(-6,09 \times 10^6; 0; -7,46 \times 10^7)$
4	$(-6,14 \times 10^6; 0; -7,43 \times 10^7)$
5	$(-6,19 \times 10^6; 0; -7,41 \times 10^7)$
6	$(-6,24 \times 10^6; 0; -7,39 \times 10^7)$
7	$(-6,28 \times 10^6; 0; -7,3 \times 10^7)$

Resultados dos Cabos

Cabo	Força de Tração no Ponto de Fixação com a Torre $T = \vec{F}_B \cdot \vec{F}_B$ (N)
1	$7,14 \times 10^5$
2	$9,18 \times 10^5$
3	$9,03 \times 10^6$
4	$9,18 \times 10^5$

Observamos que o aumento da flecha do cabo conduz a deslocamentos maiores ao longo da torre, pois o cabo é menos rígido.

O deslocamento no topo gera um aumento no valor da força do cabo mais tracionado e conseqüentemente os momentos devido aos cabos aumentam, modificando a distribuição de momentos ao longo da torre. Como observamos, o ponto de momento máximo aproximou-se do topo da torre.

5.3.4 - Utilizando as mesmas características da torre do exemplo 5.3.3 e acrescentando 2 cabos no centro do vão da mesma, determinamos os seus deslocamentos e solicitações.

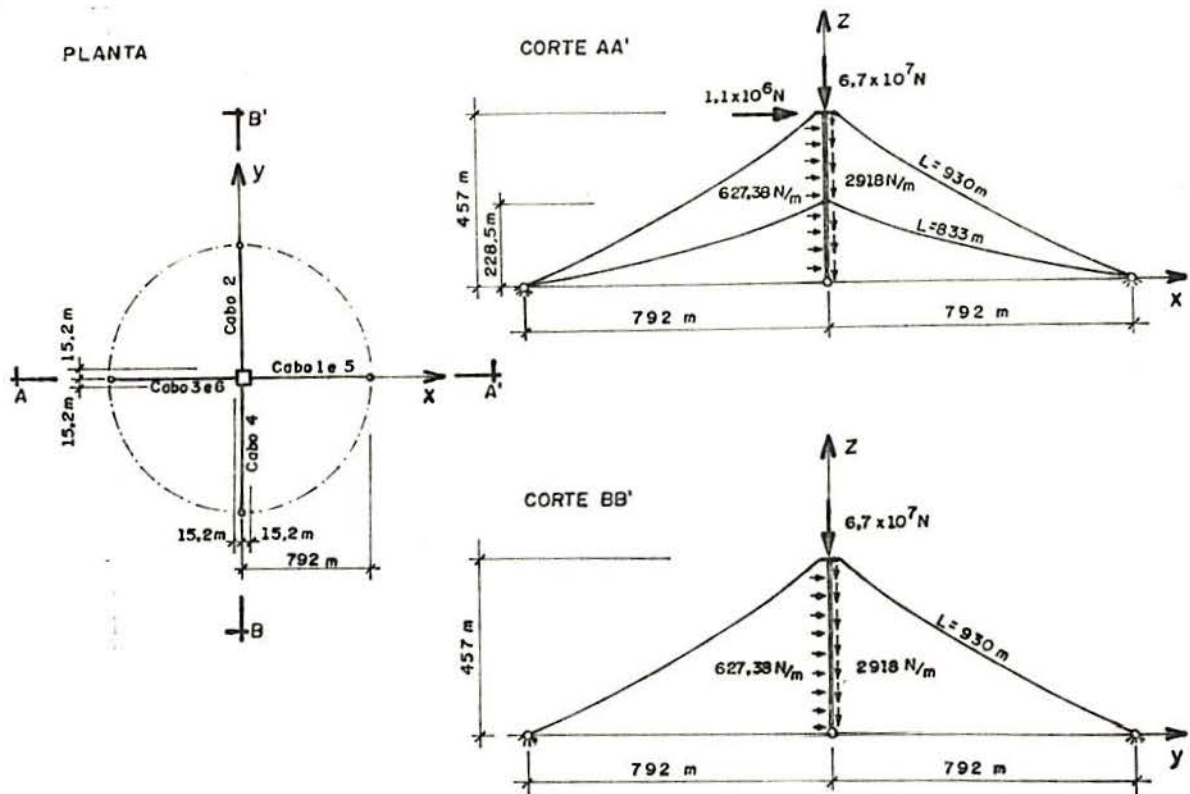


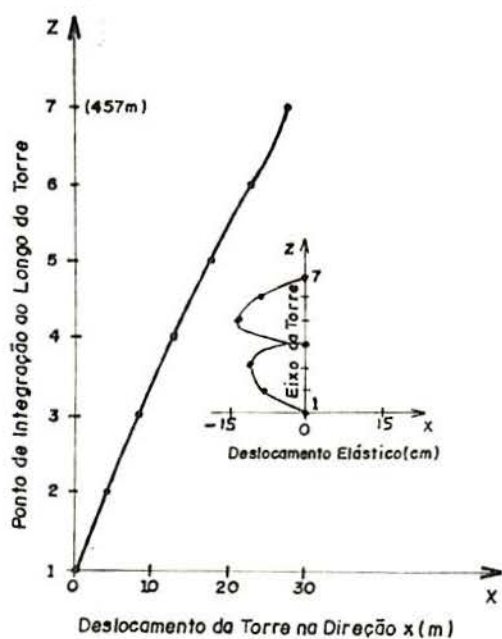
Figura 5.3.4.1

Dados dos Cabos

Cabo	Posição no Ponto de Fixação com a Torre \vec{X}_C (m)	Ponto na Ancoragem \vec{P}_A (m)
1	(15,2; 0; 457)	(792; 0; 0)
2	(0; 15,2; 457)	(0; 792; 0)
3	(-15,2; 0; 457)	(-792; 0; 0)
4	(0; -15,2; 457)	(0; -792; 0)
5	(0; 0; 228,5)	(792; 0; 0)
6	(0; 0; 228,5)	(-792; 0; 0)

As características dos cabos fixados no centro do

vão diferem dos demais apenas no seu comprimento que vale 833 m.



Vetor Posição \vec{X} (m)

(27,83; 0; 455,93)

(22,90; 0; 379,98)

(18,03; 0; 303,98)

(13,32; 0; 228,00)

(8,78; 0; 152,00)

(4,36; 0; 76,00)

(0; 0; 0)

Figura 5.3.4.2

Vetor Momento \vec{M} (Nm)

(0; $-7,83 \times 10^6$; 0)

(0; $3,50 \times 10^8$; 0)

(0; $7,08 \times 10^8$; 0)

(0; $1,06 \times 10^9$; 0)

(0; $7,11 \times 10^8$; 0)

(0; $3,56 \times 10^8$; 0)

(0; $-2,10 \times 10^2$; 0)

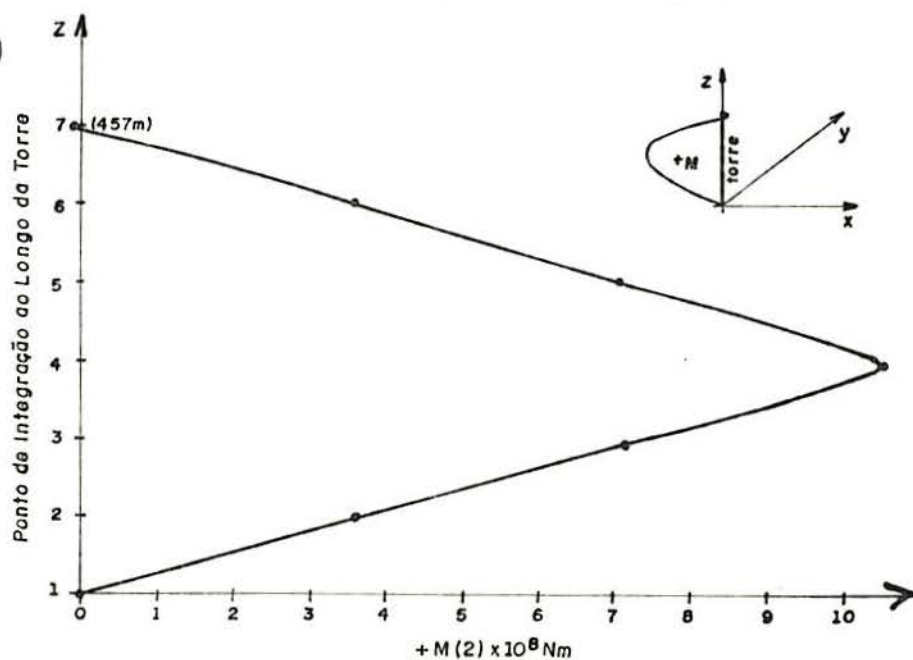


Figura 5.3.4.3

Resultados dos Cabos

Cabo	Força de Tração no Ponto de Fixação com a Torre T (N)
1	$7,49 \times 10^5$
2	$9,18 \times 10^5$
3	$1,79 \times 10^6$
4	$9,18 \times 10^5$
5	$8,81 \times 10^5$
6	$1,06 \times 10^7$

Observamos que os deslocamentos da torre resultaram menores em relação aos do exemplo anterior e o diagrama de momentos mudou de sinal, em consequência da introdução dos cabos intermediários. Estes são inicialmente mais tracionados do que os cabos do topo, resultando que, obtida a configuração de equilíbrio final da torre, o cabo 6 é o que apresenta a maior força de tração, sendo de grande influência no diagrama de momentos da figura 5.3.4.3.

5.3.5 - Para a torre do exemplo 5.3.4 analisamos o efeito da retirada da carga de plataforma, através dos resultados abaixo indicados.

Resultados da Torre

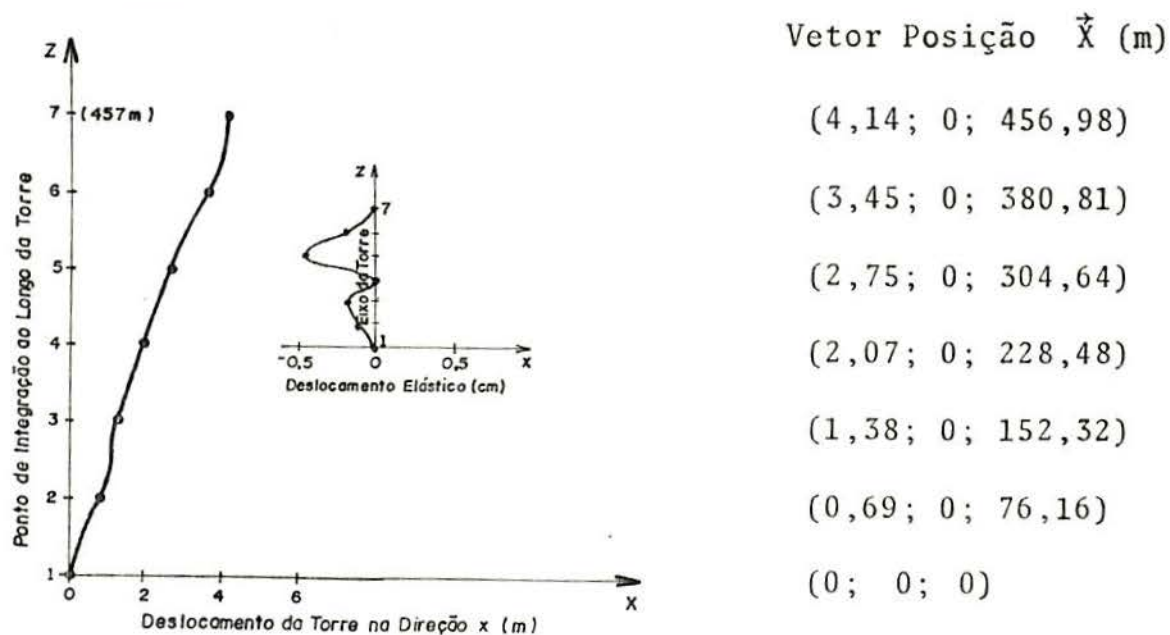


Figura 5.3.5.1

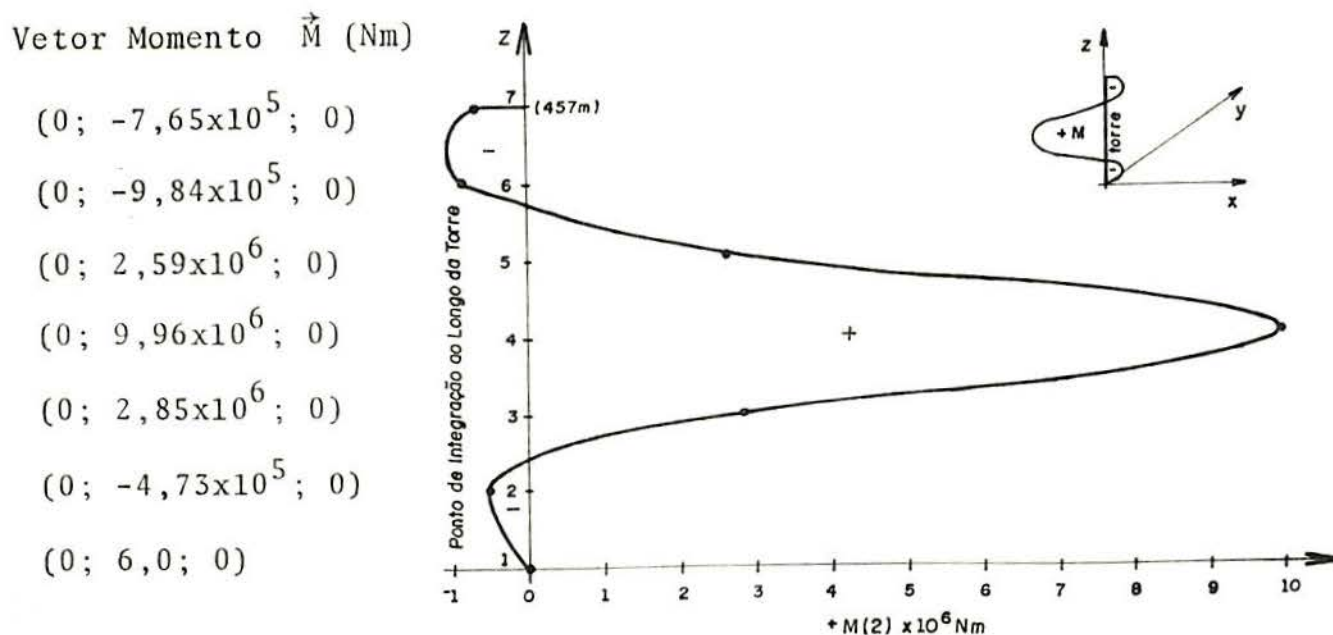


Figura 5.3.5.2

Resultados dos Cabos

Cabo	Reação no Ponto de Fixação com a Torre $\vec{F}_B \cdot (\text{N})$	Força de Tração no Ponto de Fixação com a Torre $T \text{ (N)}$
1	$(5,49 \times 10^5; 0; -9,24 \times 10^3)$	$8,80 \times 10^5$
2	$(1,16 \times 10^4; 5,83 \times 10^5; -7,11 \times 10^5)$	$9,19 \times 10^5$
3	$(-6,26 \times 10^5; 0; -7,38 \times 10^5)$	$9,67 \times 10^5$
4	$(1,16 \times 10^4; -5,83 \times 10^5; -7,11 \times 10^5)$	$9,19 \times 10^5$
5	$(1,01 \times 10^6; 0; -6,03 \times 10^5)$	$1,12 \times 10^6$
6	$(-1,26 \times 10^6; 0; -6,77 \times 10^5)$	$1,43 \times 10^6$

A retirada da carga de plataforma alterou consideravelmente os resultados, conduzindo a deslocamentos da torre muito menores e a um diagrama de momentos deslocado em relação ao seu eixo. Observamos que a carga da plataforma produz um efeito de 2^a ordem sobre a torre devido a sua componente axial e uma vez que influi nos deslocamentos da mesma, também é responsável pelo efeito de 2^a ordem devido as reações axiais dos cabos.

Conseqüentemente, a carga da plataforma gera efeitos não lineares sobre a torre, o que podemos observar através dos

resultados das solicitações e deslocamentos.

5.3.6 - A torre da figura 5.3.6.1, fixa no topo por 4 cabos e rotulada na base, é submetida a carga de vento de mesmo valor na direção X e Y, peso próprio e carga de plataforma nula. O programa Torre fornece os resultados abaixo relacionados.

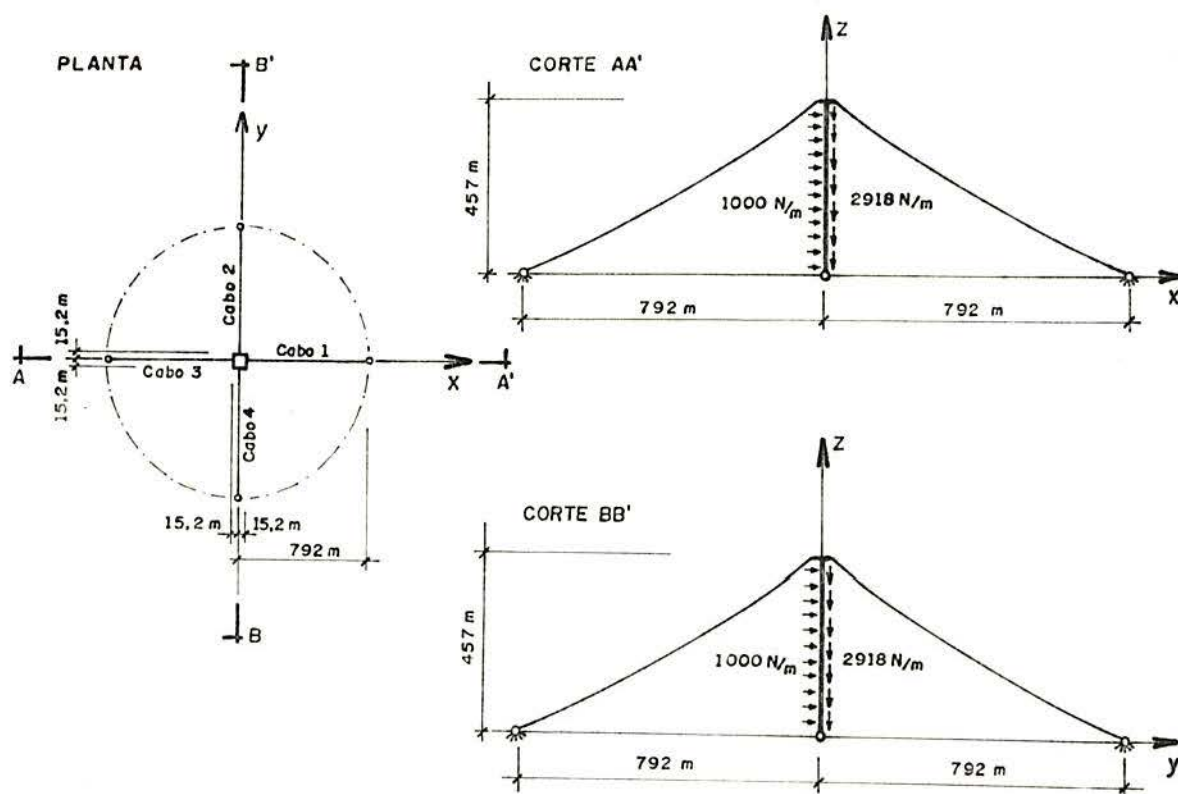


Figura 5.3.6.1

Dados da Torre

Altura: 457 m

Carga Distribuída: $\vec{f} = (1000; 1000; -2918) \text{ N/m}$

Carga Plataforma: $\vec{F}_A = (0; 0; 0) \text{ N}$

$EA = 1,513 \times 10^{11} \text{ N}$

$EI_{\zeta} = EI_{\eta} = GJ = 3,518 \times 10^{13} \text{ Nm}^2$

Dados dos Cabos

Comprimento: $L = 930 \text{ m}$

Carga Distribuída: $\vec{f}_c = (0; 0; -729,5) \text{ N/m}$

$\nu = 1$

$EA = 2,136 \times 10^9 \text{ N}$

Cabo	Posição no Ponto de Fixação com a Torre $\vec{X}_c \text{ (m)}$	Posição na Ancoragem $\vec{P}_A \text{ (m)}$
1	(15,2; 0; 457)	(792; 0; 0)
2	(0; 15,2; 457)	(0; 792; 0)
3	(-15,2; 0; 457)	(-792; 0; 0)
4	(0; -15,2; 457)	(0; -792; 0)

Resultados da Torre

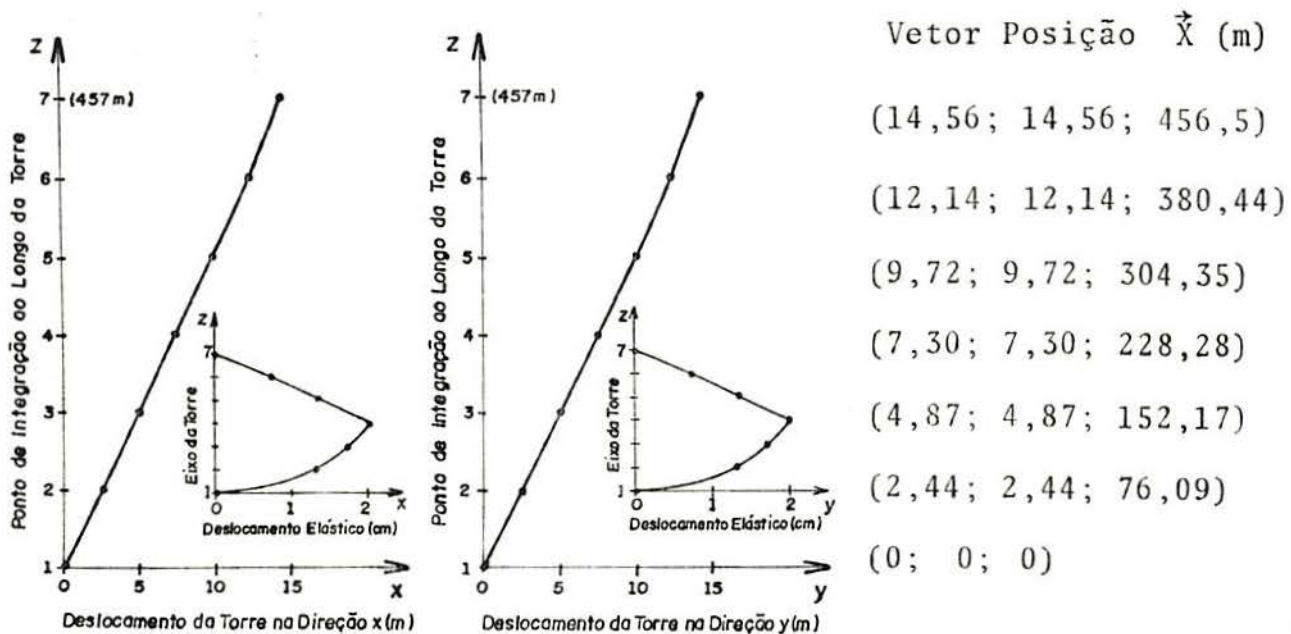


Figura 5.3.6.2

Ponto de Integração	Vetor Força Interna $\vec{F} \text{ (N)}$	Vetor Momento $\vec{M} \text{ (Nm)}$
1	$(1,19 \times 10^5; 1,19 \times 10^5; -4,28 \times 10^6)$	$(-4,36 \times 10^2; 4,13 \times 10^2; 0)$
2	$(4,24 \times 10^4; 4,24 \times 10^4; -4,06 \times 10^6)$	$(1,63 \times 10^7; -1,63 \times 10^7; 0)$
3	$(-3,38 \times 10^4; -3,38 \times 10^4; -3,83 \times 10^6)$	$(2,62 \times 10^7; -2,62 \times 10^7; 0)$

Ponto de Integração	Vetor Força Interna \vec{F} (N)	Vetor Momento \vec{M} (Nm)
4	$(-1,10 \times 10^5; -1,10 \times 10^5; -3,61 \times 10^6)$	$(2,98 \times 10^7; -2,98 \times 10^7; 0)$
5	$(-1,86 \times 10^5; -1,86 \times 10^5; -3,39 \times 10^6)$	$(2,70 \times 10^7; -2,70 \times 10^7; 0)$
6	$(-2,62 \times 10^5; -2,62 \times 10^5; -3,17 \times 10^6)$	$(1,79 \times 10^7; -1,79 \times 10^7; 0)$
7	$(-3,38 \times 10^5; -3,38 \times 10^5; -2,95 \times 10^6)$	$(2,42 \times 10^6; -2,42 \times 10^6; 0)$

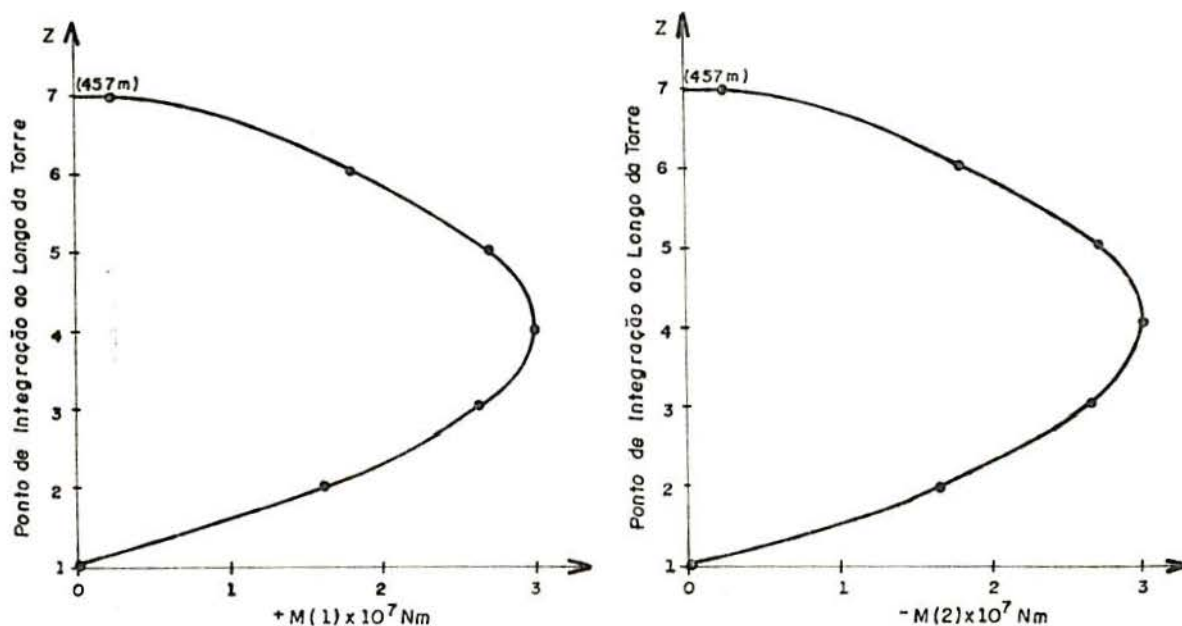


Figura 5.3.6.3

Resultados dos Cabos

Cabo	Força de Tração no Ponto de Fixação com a Torre T (N)
1	$8,10 \times 10^5$
2	$8,10 \times 10^5$
3	$1,13 \times 10^6$
4	$1,13 \times 10^6$

Observamos a simetria nos valores dos deslocamentos e solicitações que ocorrem na direção dos eixos X e Y, o que é esperado uma vez que existe simetria de carregamento na torre e os cabos estão apenas submetidos a cargas verticais.

O momento de torção é nulo, pois os momentos de torção provocados pelas forças na direção X e Y se anulam.

Os momentos no topo devido aos cabos são muito pequenos, fazendo com que, para este carregamento, os momentos máximos ocorram no centro do vão.

5.3.7 - Para a torre do exemplo 5.3.6 mudamos as suas condições de contorno, substituindo a rótula da base por molas que restringem o giro em torno dos eixos \bar{X} e η .

$$\text{Onde } K_X = 3 \times 10^6 \text{ Nm/rad e } K_Y = 3 \times 10^6 \text{ Nm/rad.}$$

Os resultados fornecidos mostram a mesma simetria de deslocamentos e solicitações do exemplo anterior, uma vez que as constantes de mola K_X e K_Y possuem o mesmo valor. Estas geram um momento restaurador na base \vec{M}_S de valor muito baixo e conseqüentemente os deslocamentos e solicitações da torre apresentam valores praticamente iguais aos do problema anterior.

Resultados

Vetor Posição no Topo da Torre: $\vec{X} = (14,55; 14,55; 456,5) \text{ m}$

Momento Máximo, no centro do vão:

$$\vec{M} = (2,97 \times 10^7; -2,97 \times 10^7; 10) \text{ Nm}$$

Momento Restaurador na Base:

$$\vec{M}_S = (-9,60 \times 10^4; 9,59 \times 10^4; -3,07 \times 10^3) \text{ Nm}$$

Momento na Base da Torre:

$$\vec{M} = (-9,64 \times 10^4; 9,54 \times 10^4; 3,2 \times 10^1) \text{ Nm}$$

Força de Tração nos Cabos 1 e 2: $T = 8,10 \times 10^5 \text{ N}$

Força de Tração nos Cabos 3 e 4: $T = 1,13 \times 10^6 \text{ N}$

5.3.8 - Para a torre do exemplo 5.3.6 adicionamos uma carga de vento na direção X, em cada cabo, permanecendo iguais todos os outros dados do problema.

A carga distribuída nos cabos é, então, dada pelo vetor $\vec{f}_c = (29,18; 0; -729,5)$ N/m.

Resultados da Torre

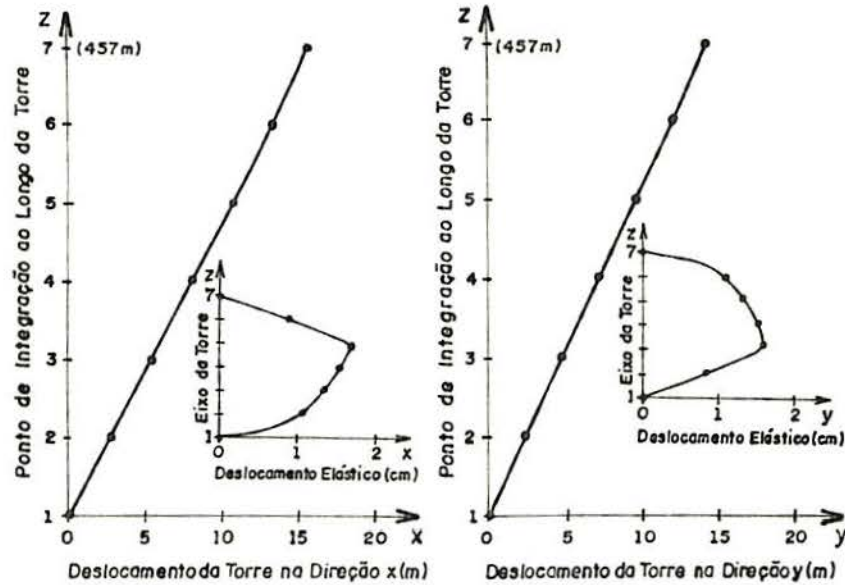


Figura 5.3.8.1

Ponto de Integração

Vetor Posição \vec{X} (m)

1	(0; 0; 0)
2	(2,67; 2,43; 76,08)
3	(5,33; 4,86; 152,16)
4	(7,99; 7,28; 228,34)
5	(10,65; 9,70; 304,32)
6	(13,30; 12,12; 380,40)
7	(15,95; 14,53; 456,48)

Ponto	Vetor Força Interna \vec{F} (N)	Vetor Momento \vec{M} (Nm)
1	$(1,08 \times 10^5; 1,18 \times 10^5; -4,30 \times 10^6)$	$(-8,20 \times 10^4; -3,51 \times 10^4; -9,0 \times 10^2)$
2	$(3,17 \times 10^4; 4,22 \times 10^4; -4,08 \times 10^6)$	$(1,62 \times 10^7; -1,65 \times 10^7; -4,54 \times 10^4)$
3	$(-4,45 \times 10^4; -3,40 \times 10^4; -3,85 \times 10^6)$	$(2,61 \times 10^7; -2,66 \times 10^7; -7,19 \times 10^4)$
4	$(-1,21 \times 10^5; -1,10 \times 10^5; -3,63 \times 10^6)$	$(2,97 \times 10^7; -3,03 \times 10^7; -8,02 \times 10^4)$
5	$(-1,97 \times 10^5; -1,86 \times 10^5; -3,41 \times 10^6)$	$(2,70 \times 10^7; -2,75 \times 10^7; -7,06 \times 10^4)$
6	$(-2,73 \times 10^5; -2,62 \times 10^5; -3,19 \times 10^6)$	$(1,79 \times 10^7; -1,84 \times 10^7; -4,28 \times 10^4)$
7	$(-3,49 \times 10^5; -3,39 \times 10^5; -2,96 \times 10^6)$	$(2,41 \times 10^6; -2,90 \times 10^6; 2,88 \times 10^3)$

Resultados dos Cabos

Cabo	Reação no Ponto de Fixação com a Torre \vec{F}_B (N)
1	$(4,71 \times 10^5; -8,71 \times 10^3; -6,50 \times 10^5)$
2	$(4,96 \times 10^3; 4,75 \times 10^5; -6,57 \times 10^5)$
3	$(-8,24 \times 10^5; -1,54 \times 10^4; -8,41 \times 10^5)$
4	$(-1,48 \times 10^3; -7,89 \times 10^5; -8,16 \times 10^5)$

O acréscimo de carga de vento nos cabos, na direção do eixo X positivo, gerou um aumento de deslocamentos da torre nesta direção, desfazendo as condições de simetria do exemplo 5.3.6. Em consequência, surge um momento de torção ao longo da mesma, dado pela terceira componente do vetor \vec{M} .

5.3.9 - A torre da figura 5.3.9.1 é fixa no topo por 2 cabos e rotulada na base, estando submetida a cargas de vento, peso próprio e plataforma, cujas características são dadas abaixo.

Dados da Torre

Altura: 457 m

Carga Distribuída: $\vec{f} = (627,38; 0; -2918)$ N/m

Carga de Plataforma: $\vec{F}_A = (1,1 \times 10^6; 0; -6,7 \times 10^7)$ N

$EA = 1,513 \times 10^{11}$ N

$EI_\zeta = EI_\eta = GJ = 3,518 \times 10^{13}$ Nm²

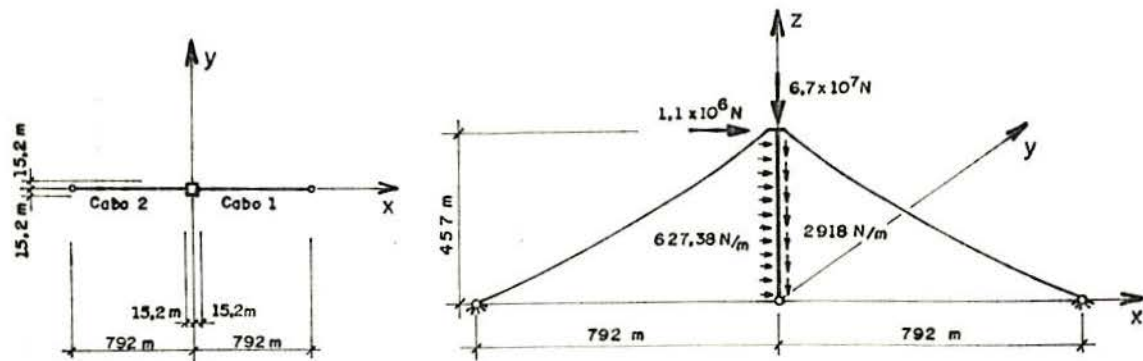


Figura 5.3.9.1

Dados dos Cabos

Comprimento: $L = 930 \text{ m}$

Carga Distribuída: $\vec{f}_c = (29,18; 0; -729,5) \text{ N/m}$

$\nu = 1$

$EA = 2,136 \times 10^6 \text{ N}$

Cabo	Posição no Ponto de Fixação com a Torre $\vec{X}_c \text{ (m)}$	Posição na Ancoragem $\vec{P}_A \text{ (m)}$
1	(1; 0; 457)	(792; 0; 0)
2	(-1; 0; 457)	(-792; 0; 0)

Resultados da Torre

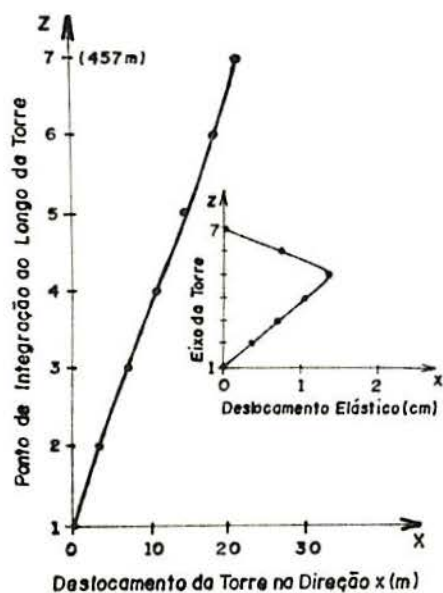


Figura 5.3.9.2

Vetor Posição \vec{X} (m)

(21,88; 0; 456,26)

(18,24; 0; 304,17)

(14,60; 0; 304,17)

(10,95; 0; 228,13)

(7,30; 0; 152,09)

(3,65; 0; 76,05)

(0; 0; 0)

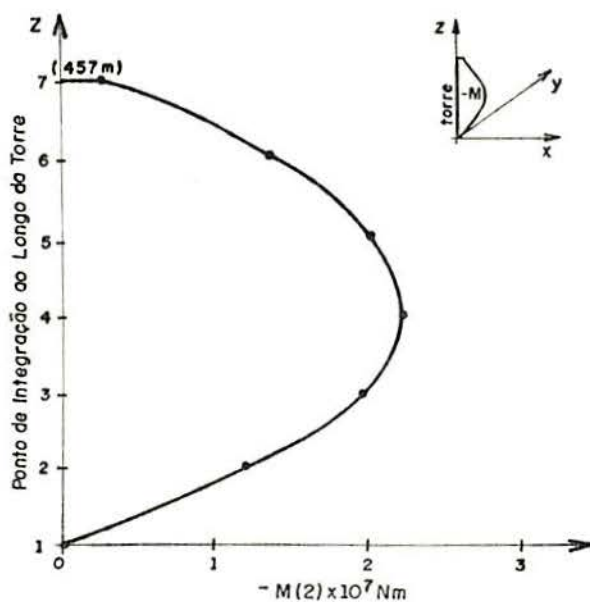


Figura 5.3.9.3

Vetor Momento \vec{M} (Nm)

(0; $-2,59 \times 10^6$; 0)

(0; $-1,38 \times 10^7$; 0)

(0; $-2,04 \times 10^7$; 0)

(0; $-2,23 \times 10^7$; 0)

(0; $-1,95 \times 10^7$; 0)

(0; $-1,21 \times 10^7$; 0)

(0; $-4,94 \times 10^3$; 0)

Cabo	Reação no Ponto de Fixação com a Torre \vec{F}_B (N)	Força de tração T (N)
1	$(5,20 \times 10^5; 0; -6,73 \times 10^5)$	$8,51 \times 10^5$
2	$(-5,19 \times 10^6; 0; -3,26 \times 10^6)$	$6,13 \times 10^6$

Este problema foi proposto por Felix Rosenthal¹² e seus resultados são:

Vetor Posição da Torre no Topo: $\vec{X} = (20,25; 0; 456,34)$ m

Momento Máximo da Torre: $\vec{M} = (0; 2,07 \times 10^7; 0)$ Nm

Força de Tração do Cabo 2: $T = 5,84 \times 10^6$ N

A diferença entre os resultados dados por Rosenthal e o programa Torre pode ser atribuída ao fato que Rosenthal calculou a torre considerando-a como uma estrutura no plano e com isto os cabos puderam ser fixados no eixo baricêntrico da mesma.

5.3.10 - Retirando a carga de plataforma da torre do exemplo 5.3.9 e mantendo os mesmos dados do problema, chegamos aos seguintes resultados:

Resultados da Torre

Ponto	Vetor Posição \vec{X} (m)	Vetor Momento \vec{M} (Nm)
1	(0; 0; 0)	(0; $6,11 \times 10^5$; 0)
2	(0,60; 0; 76,16)	(0; $-8,95 \times 10^6$; 0)
3	(1,19; 0; 152,23)	(0; $-1,47 \times 10^7$; 0)
4	(1,79; 0; 228,49)	(0; $-1,67 \times 10^7$; 0)
5	(2,38; 0; 304,65)	(0; $-1,50 \times 10^7$; 0)
6	(2,97; 0; 380,82)	(0; $-9,42 \times 10^6$; 0)
7	(3,55; 0; 456,98)	(0; $-9,70 \times 10^4$; 0)

Ponto de Integração	Vetor Posição \vec{X} (m)
1	(0; 0; 0)
2	(0,021; 0; 76,16)
3	(0,040; 0; 152,33)
4	(0,057; 0; 228,49)
5	(0,072; 0; 304,66)
6	(0,084; 0; 380,82)
7	(0,094; 0; 456,99)

Vetor Momento \vec{M} (Nm)

(0; $-9,71 \times 10^4$; 0)
 (0; $-9,21 \times 10^6$; 0)
 (0; $-1,47 \times 10^7$; 0)
 (0; $-1,65 \times 10^7$; 0)
 (0; $-1,46 \times 10^7$; 0)
 (0; $-9,14 \times 10^6$; 0)
 (0; $4,69 \times 10^3$; 0)

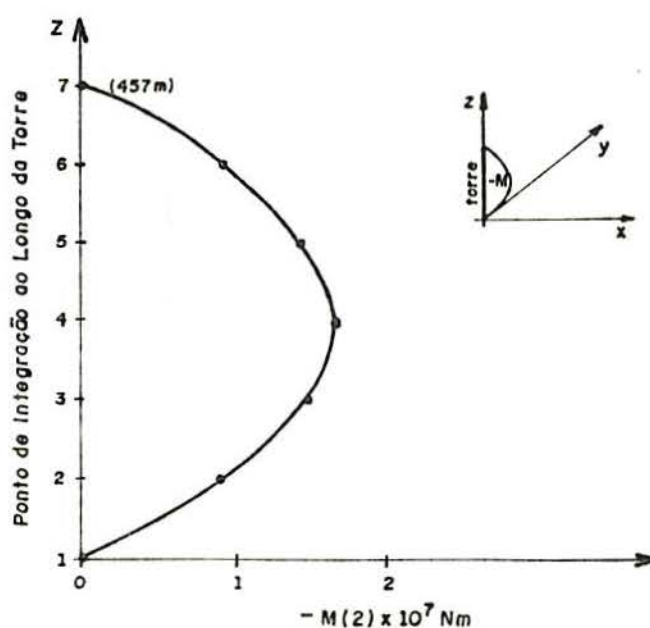


Figura 5.3.11.2

Resultados dos Cabos

Cabo	Reação no Ponto de Fixação com a Torre \vec{F}_B (N)	Matriz de Mola $[B]$ (N/m)
------	---	----------------------------

1 (2,39x10⁶; 0; -1,71x10⁶)

$$\begin{bmatrix} -1,54 \times 10^6 & 0 & 1,11 \times 10^6 \\ 0 & -3,21 \times 10^3 & 0 \\ 1,11 \times 10^6 & 0 & -7,96 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

Cabo	Reação no Ponto de Fixação com a Torre \vec{F}_B (N)	Matriz de Mola $[B]$ (N/m)
2	$(-2,53 \times 10^6; 0; -1,81 \times 10^6)$	$\begin{bmatrix} -1,55 \times 10^6 & 0 & -1,10 \times 10^6 \\ 0 & -3,40 \times 10^3 & 0 \\ -1,10 \times 10^6 & 0 & -7,93 \times 10^5 \end{bmatrix}$

Comparando com o exemplo anterior, observamos uma redução significativa nos deslocamentos da torre, mas os momentos permanecem com a mesma ordem de grandeza. Como a torre sofre um deslocamento muito pequeno no topo, o valor das reações e constantes de mola do cabo 1 e 2 não variam muito, em módulo.

5.3.12 - Acrescentamos à torre do exemplo anterior, 2 cabos no centro do vão, mantendo constante todas as outras características do problema.

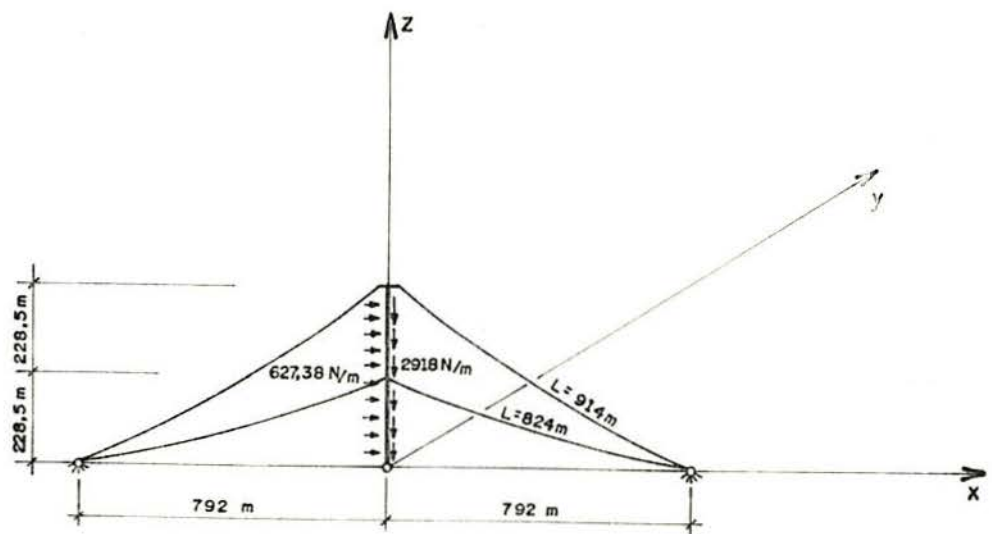


Figura 5.3.12.1

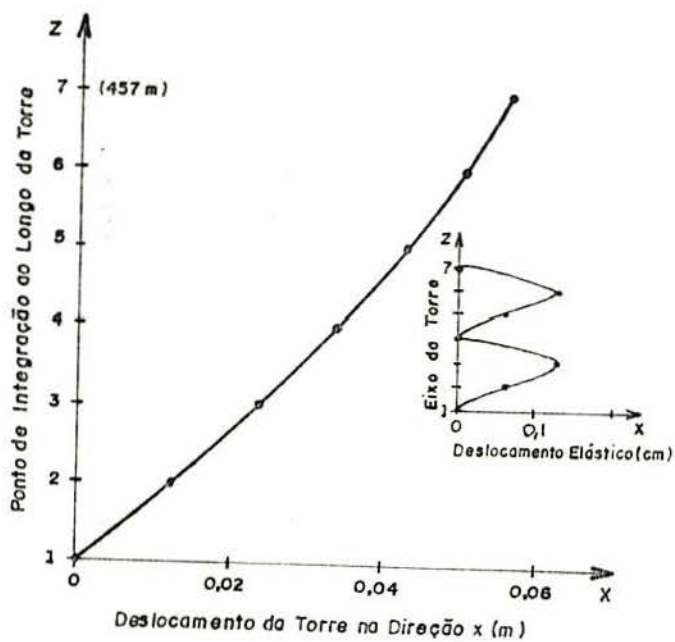
Dados dos Cabos

Cabo	Posição no Ponto de Fixação com a Torre \vec{X}_C (m)	Posição na Ancoragem \vec{P}_A (m)
1	$(1; 0; 457)$	$(792; 0; 0)$

Cabo	Posição no Ponto de Fixação com a Torre \vec{X}_C (m)	Posição na Ancoragem \vec{P}_A (m)
2	(-1; 0; 457)	(-792; 0; 0)
3	(0,5; 0; 228,5)	(792; 0; 0)
4	(-0,5; 0; 228,5)	(-792; 0; 0)

Comprimento dos Cabos 3 e 4: $L = 824$ m

Resultados da Torre



Vetor Posição \vec{X} (m)

(0,056; 0; 456,98)

(0,050; 0; 380,82)

(0,042; 0; 304,65)

(0,034; 0; 228,49)

(0,024; 0; 152,33)

(0,012; 0; 76,16)

(0; 0; 0)

Figura 5.3.12.2

Vetor Momento \vec{M} (Nm)

$$(0; -7,67 \times 10^4; 0)$$

$$(0; -6,47 \times 10^6; 0)$$

$$(0; -9,23 \times 10^6; 0)$$

$$(0; -8,33 \times 10^6; 0)$$

$$(0; -9,20 \times 10^6; 0)$$

$$(0; -6,42 \times 10^6; 0)$$

$$(0; 1,04 \times 10^4; 0)$$

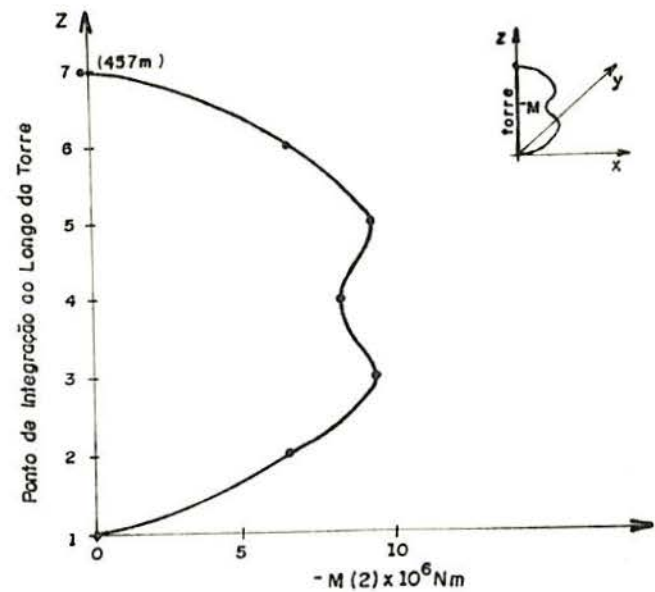


Figura 5.3.12.3

Resultados dos Cabos

Cabo Reação no Ponto de
Fixação com a Torre
 \vec{F}_B (N)

Matriz de Mola [B] (N/m)

1	$(2,40 \times 10^6; 0; -1,72 \times 10^6)$	$\begin{bmatrix} -1,55 \times 10^6 & 0 & 1,1 \times 10^6 \\ 0 & -3,23 \times 10^4 & 0 \\ 1,1 \times 10^6 & 0 & -7,95 \times 10^5 \end{bmatrix}$
2	$(-2,5 \times 10^6; 0; -1,8 \times 10^6)$	$\begin{bmatrix} -1,55 \times 10^6 & 0 & -1,1 \times 10^6 \\ 0 & -3,37 \times 10^4 & 0 \\ -1,1 \times 10^6 & 0 & -7,95 \times 10^5 \end{bmatrix}$
3	$(2,87 \times 10^6; 0; -1,13 \times 10^6)$	$\begin{bmatrix} -2,25 \times 10^6 & 0 & 8,82 \times 10^5 \\ 0 & -3,73 \times 10^4 & 0 \\ 8,82 \times 10^5 & 0 & -3,51 \times 10^5 \end{bmatrix}$
4	$(-2,94 \times 10^6; 0; -1,16 \times 10^6)$	$\begin{bmatrix} -2,25 \times 10^6 & 0 & -8,81 \times 10^5 \\ 0 & -3,83 \times 10^4 & 0 \\ -8,81 \times 10^5 & 0 & -3,50 \times 10^5 \end{bmatrix}$

Os cabos do centro do vão provocaram uma diminuição nos deslocamentos da torre e além destes, os seus efeitos podem ser observados no diagrama da figura 5.3.12.3.

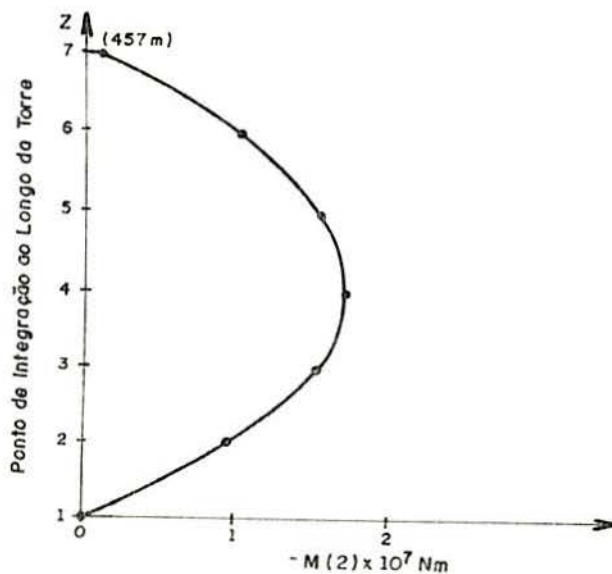
5.3.13 - Para a torre do exemplo 5.3.11 acrescentamos uma carga de plataforma composta apenas pela componente na direção X, dado por $\vec{F}_A = (1,1 \times 10^6; 0; 0)$ N.

Resultados da Torre

Ponto de Integração

Vetor Posição \vec{X} (m)

1	(0; 0; 0)
2	(0,21; 0; 76,16)
3	(0,42; 0; 152,33)
4	(0,63; 0; 228,5)
5	(0,83; 0; 304,65)
6	(1,03; 0; 380,82)
7	(1,23; 0; 456,99)



Vetor Momento \vec{M} (Nm)

(0; -7,31x10 ⁵ ; 0)
(0; -9,84x10 ⁶ ; 0)
(0; -1,53x10 ⁷ ; 0)
(0; -1,70x10 ⁷ ; 0)
(0; -1,50x10 ⁷ ; 0)
(0; -9,34x10 ⁶ ; 0)
(0; 2,80x10 ⁴ ; 0)

Figura 5.3.13.1

Resultados dos Cabos

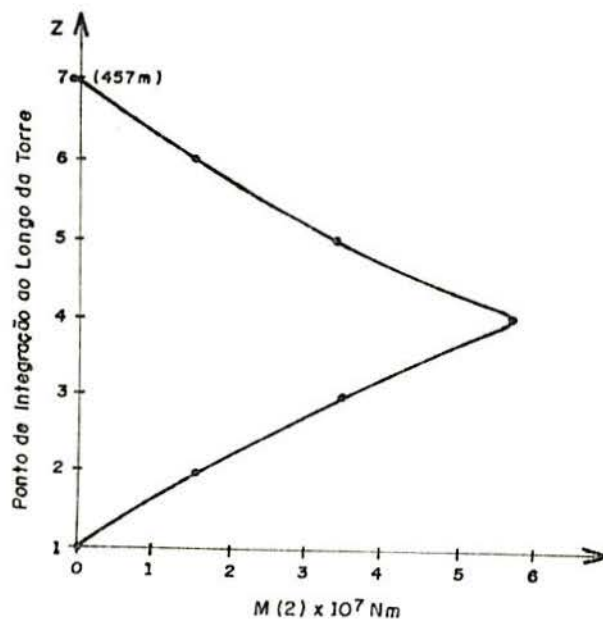
Cabo	Reação no Ponto de Fixação com a Torre \vec{F}_B (N)
1	$(1,98 \times 10^6; 0; -1,48 \times 10^6)$
2	$(-3,23 \times 10^6; 0; -2,21 \times 10^6)$

Comparando com os resultados do exemplo 5.3.11 notamos que os deslocamentos ao longo da torre aumentaram, o que se deve a carga de plataforma.

5.3.14 - Utilizando a torre do exemplo 5.3.12 e acrescentando uma carga de plataforma $\vec{F}_A = (1,1 \times 10^6; 0; 0)$ N, obtemos os seguintes resultados:

Resultados da Torre

Vetor Posição no Topo: $\vec{X} = (0,92; 0; 456,98)$ m



Vetor Momento \vec{M} (Nm)

- $(0; -5,45 \times 10^5; 0)$
- $(0; 1,49 \times 10^7; 0)$
- $(0; 3,41 \times 10^7; 0)$
- $(0; 5,69 \times 10^7; 0)$
- $(0; 3,43 \times 10^7; 0)$
- $(0; 1,53 \times 10^7; 0)$
- $(0; 3,72 \times 10^4; 0)$

Figura 5.3.14.1

Resultados dos Cabos

Cabo	Reação no Ponto de Fixação com a Torre \vec{F}_B (N)	Matriz de Mola [B] (N/m)
1	$(2,07 \times 10^6; 0; -1,53 \times 10^6)$	$\begin{bmatrix} -1,51 \times 10^6 & 0 & 1,12 \times 10^6 \\ 0 & -2,82 \times 10^3 & 0 \\ 1,12 \times 10^6 & 0 & -8,28 \times 10^5 \end{bmatrix}$
2	$(-3,00 \times 10^6; 0; -2,08 \times 10^6)$	$\begin{bmatrix} -1,58 \times 10^6 & 0 & -1,09 \times 10^6 \\ 0 & -4,0 \times 10^3 & 0 \\ -1,09 \times 10^6 & 0 & -7,6 \times 10^5 \end{bmatrix}$
3	$(2,62 \times 10^6; 0; -1,06 \times 10^6)$	$\begin{bmatrix} -2,23 \times 10^6 & 0 & 8,99 \times 10^5 \\ 0 & -3,42 \times 10^3 & 0 \\ 8,99 \times 10^5 & 0 & -3,66 \times 10^5 \end{bmatrix}$
4	$(-3,26 \times 10^6; 0; -1,25 \times 10^6)$	$\begin{bmatrix} -2,26 \times 10^6 & 0 & -8,63 \times 10^5 \\ 0 & -4,23 \times 10^3 & 0 \\ -8,63 \times 10^5 & 0 & -3,34 \times 10^5 \end{bmatrix}$

Comparando com o exemplo 5.3.13, notamos que a torre sofreu deslocamentos menores e que o diagrama de momento fletor mudou de sinal, devido a influência da reação do cabo 4, como pode ser visto na figura 5.3.14.1.

5.3.15 - A torre da figura 5.3.15.1 está engastada na base e fixa no topo por 2 cabos, cujas características e resultados do programa Torre são dados abaixo.

Dados da Torre

Altura: 457 m

Carga Distribuída: $\vec{f} = (628,38; 0; -2918)$ N/m

Carga de Plataforma: $\vec{F}_A = (1,1 \times 10^6; 0; -4,45 \times 10^8)$ N

EA = $1,513 \times 10^{11}$ N

$$EI_{\zeta} = EI_{\eta} = GJ = 3,518 \times 10^{13} \text{ Nm}^2$$

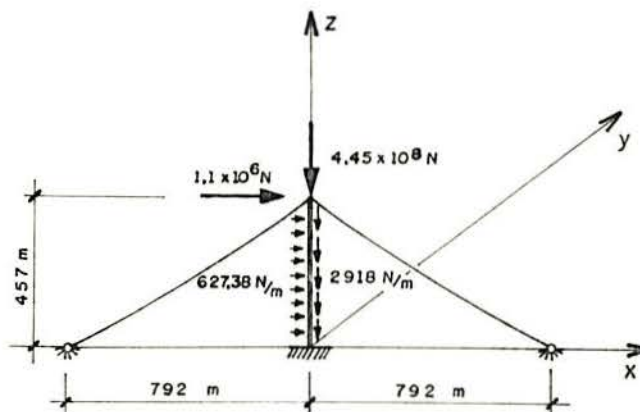


Figura 5.3.15.1

Dados dos Cabos

Comprimento do Cabo: $L = 930 \text{ m}$

Carga Distribuída: $\vec{f}_c = (29,18; 0; -729,5) \text{ N/m}$

$\nu = 1$

$EA = 2,136 \times 10^9 \text{ N}$

Resultados da Torre

Ponto de Integração

Vetor Momento \vec{M} (Nm)

1	$(0; 8,03 \times 10^9; 0)$
2	$(0; 8,04 \times 10^9; 0)$
3	$(0; 7,39 \times 10^9; 0)$
4	$(0; 6,14 \times 10^9; 0)$
5	$(0; 4,39 \times 10^9; 0)$
6	$(0; 2,29 \times 10^9; 0)$
7	$(0; 0; 0)$

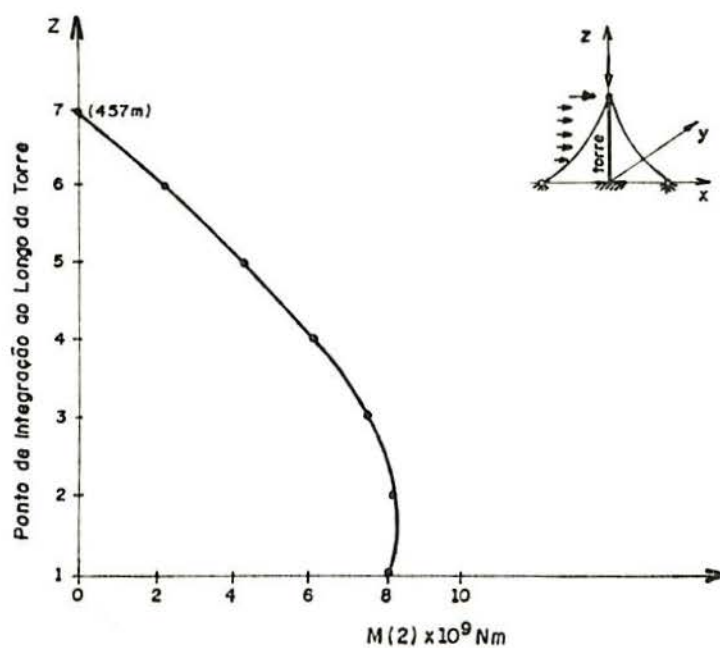
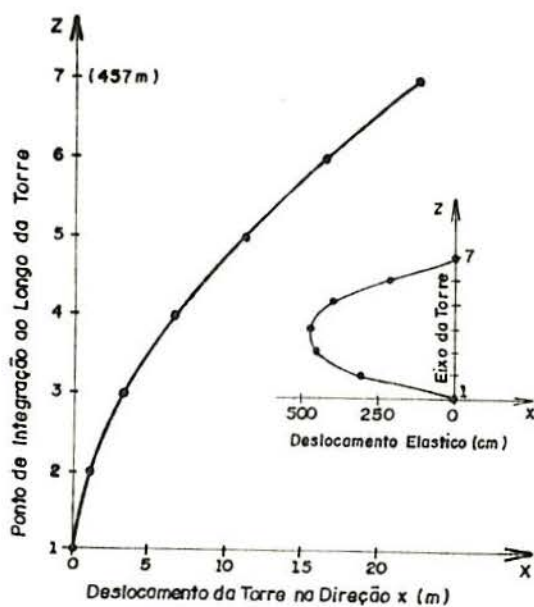


Figura 5.3.15.2

Vetor Posição \vec{X} (m)



(22,50; 0; 455,95)

(16,62; 0; 379,24)

(11,16; 0; 303,49)

(6,49; 0; 227,70)

(2,95; 0; 151,84)

(0,74; 0; 75,93)

(0; 0; 0)

Figura 5.3.15.3

Resultados dos Cabos

Cabo	Força de Tração	$T = \vec{F}_B \cdot \vec{F}_B \text{ (N)}$
1		$8,48 \times 10^5$
2		$7,57 \times 10^6$

O programa Torre foi também rodado para uma torre com mesmas características deste exemplo, mas rotulada na base. Os resultados mostram que o engaste na base diminuiu os deslocamentos ao longo da torre, na ordem de 40% e o momento máximo aproximou-se da base.

6. CONCLUSÕES

Com o objetivo de verificarmos a eficiência do método desenvolvido, diversos exemplos de torres estaiadas com diferentes características foram calculadas utilizando-se o programa Torre, rodado no computador Burroughs B6700.

Os resultados obtidos mostram o comportamento não linear das forças e constantes de mola dos cabos, com relação aos deslocamentos do ponto de fixação com a torre. Este é função de vários fatores, tais como tensão inicial do cabo, lei constitutiva e carga atuante sobre o mesmo.

A sistemática adotada permite levar em conta, para qualquer carregamento no cabo, todos estes fatores, dando assim condições de avaliar, com boa precisão, os efeitos destes apoios sobre a estrutura.

O método possui, ainda, a vantagem adicional de permitir a definição do efeito do cabo, ou um conjunto de cabos, sobre a torre na forma de uma matriz 3×3 . Esta característica o diferencia de outros métodos onde a discretização do cabo leva à obtenção de matrizes de grandes dimensões.

Observamos a importância dos efeitos de segunda ordem que ocorrem na torre, provenientes das componentes axiais das forças exercidas pelos cabos e de cargas aplicadas sobre a mesma, que podem estar representando cargas de plataforma.

O programa também mostra a vantagem de uma análise espacial, que estabelece com precisão o comportamento da estrutura sob a ação de cargas atuando simultaneamente nas direções dos eixos X, Y e Z.

Os métodos de integração numérica utilizados são bastante precisos, mesmo para poucos intervalos de integração.

Todas as matrizes do método são de dimensão 3×3 , permitindo que o programa Torre não necessite equipamento computacional de grande porte. Entretanto, como o método consis-

te de um processo iterativo para os cabos e outro para a torre, existe uma grande repetição dos ciclos de cálculos e consequentemente a necessidade de um grande tempo computacional. Este pode ser diminuído se iniciarmos os cálculos a partir de uma configuração deslocada para a torre, e que quanto mais próxima estiver da configuração final de equilíbrio, mais rápido o processo convergirá.

Com base nos resultados obtidos, concluímos que o método desenvolvido para a análise estática de torres estaiadas no espaço, é bastante eficiente, pois procura levar em consideração todas as características reais do comportamento da mesma podendo, portanto, ser utilizado com bastante segurança no projeto e verificação de torres.

Sugerimos que seja estudada uma forma de incluir os efeitos dinâmicos, provocados pelo vento sobre a torre, no método aqui desenvolvido para análise estática.

APÊNDICE A

A.1 - Integração Numérica das Equações Diferenciais da Viga-Coluna e do Cabo

a) Vetor força distribuída \vec{f} .

O vetor \vec{f} é uma função linear seccionalmente contínua e portanto, todas as derivadas de ordem superior a primeira são nulas.

As derivadas à direita e à esquerda do vetor \vec{f} , em coordenadas globais, são definidas como:

- derivada à direita

$$\vec{f}'_j = (1/h) \cdot (\vec{f}_{j+1} - \vec{f}_j) \quad (\text{A.1})$$

- derivada à esquerda

$$\vec{f}'_j = (1/h) \cdot (\vec{f}_j - \vec{f}_{j-1}) \quad (\text{A.2})$$

Onde h representa o intervalo de integração e j o número do ponto de integração.

O vetor de força distribuída, segundo o sistema de eixos locais, é chamado de $\vec{f}_{(\zeta)}$ e definido como:

$$\vec{f}_{(\zeta)} = [L] \cdot \vec{f} \quad (\text{A.3})$$

As componentes do vetor $\vec{f}_{(\zeta)}$ são denominadas de

$$f_{(\zeta)} (1) = f_{\zeta} \quad (\text{A.4.a})$$

$$f_{(\zeta)} (2) = f_{\eta} \quad (\text{A.4.b})$$

$$f_{(\zeta)} (3) = f_t \quad (\text{A.4.c})$$

Derivando a equação (A.3) obtemos as derivadas do vetor força distribuída, segundo o sistema de eixos locais.

$$\vec{f}'_{(\zeta)} = [L'] \cdot \vec{f} + [L] \cdot \vec{f}' \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{f}''_{(\zeta)} = [L''] \cdot \vec{f} + 2 \cdot [L'] \cdot \vec{f}' \quad (\text{A.6})$$

b) Vetor força interna \vec{F} .

A equação diferencial do vetor força interna, dada pela equação (2.3.3) é integrada pela Regra dos Trapézios.

$$\vec{F}_{j-1} = \vec{F}_j + (h/2) \cdot (\vec{f}_j + \vec{f}_{j-1}) \quad (\text{A.7})$$

Onde \vec{F}_j define o vetor força interna \vec{F} no ponto de integração j.

O vetor força interna, segundo o sistema de eixos locais, é denominado de $\vec{F}_{(\zeta)}$ e definido como:

$$\vec{F}_{(\zeta)} = [L] \cdot \vec{F} \quad (\text{A.8})$$

As componentes do vetor $\vec{F}_{(\zeta)}$ são denominadas de

$$F_{(\zeta)} (1) = F_{\zeta} \quad (\text{A.9.a})$$

$$F_{(\zeta)} (2) = F_{\eta} \quad (\text{A.9.b})$$

$$F_{(\zeta)} (3) = F_t \quad (\text{A.9.c})$$

As derivadas de F_t , até a 3ª ordem, serão necessárias para a integração da equação diferencial do vetor posição, descrita no item e.

Derivando, portanto, a equação (A.8) obtemos:

$$F'_t = \vec{F}'^T \cdot \vec{t} + \vec{F}^T \cdot \vec{t}' \quad (\text{A.10})$$

Sendo

$$\dot{\vec{f}}'^T = - \dot{\vec{f}}^T \quad (\text{A.11})$$

Conseqüentemente

$$\dot{\vec{f}}'^T \cdot \dot{\vec{t}} = - \dot{\vec{f}}^T \cdot \dot{\vec{t}} = - f_t \quad (\text{A.12})$$

Chamando de $\vec{\Omega}_{03}$ o vetor formado pela 3ª linha da matriz $[\Omega_0]$, definimos:

$$\dot{\vec{t}}'^T = \vec{\Omega}_{03}^T \cdot [L] \quad (\text{A.13})$$

Logo

$$\dot{\vec{t}}' = (\vec{\Omega}_{03}^T \cdot [L])^T = [L]^T \cdot \vec{\Omega}_{03} \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\vec{F}}^T \cdot \dot{\vec{t}}' = \dot{\vec{F}}^T \cdot [L]^T \cdot \vec{\Omega}_{03} = \vec{\Omega}_{03}^T \cdot [L] \cdot \dot{\vec{F}} \quad (\text{A.15})$$

Sabemos que

$$\dot{\vec{F}}_{(\zeta)} = [L] \cdot \dot{\vec{F}}$$

Podemos, finalmente, escrever a terceira componente do vetor $\dot{\vec{F}}'_{(\zeta)}$

$$F_t' = - f_t + \vec{\Omega}_{03}^T \cdot \dot{\vec{F}}_{(\zeta)} \quad (\text{A.16})$$

Derivando duas vezes a equação (A.8) obtemos

$$F_t'' = \dot{\vec{F}}''^T \cdot \dot{\vec{t}} + 2 \cdot \dot{\vec{F}}'^T \cdot \dot{\vec{t}}' + \dot{\vec{F}}^T \cdot \dot{\vec{t}}'' \quad (\text{A.17})$$

Onde

$$\dot{\vec{F}}''^T = - \dot{\vec{F}}'^T \quad (\text{A.18})$$

E conseqüentemente

$$\dot{\vec{F}}''^T \cdot \dot{\vec{t}} = - \dot{\vec{F}}'^T \cdot \dot{\vec{t}} = - f_t' \quad (\text{A.19})$$

$$\vec{f}'^T \cdot \vec{t}' = - \vec{f}'^T \cdot [L]^T \cdot \vec{\Omega}_{03} = - \vec{\Omega}_{03}^T \cdot \vec{f}'_{(\zeta)} \quad (\text{A.20})$$

Chamando de $\vec{\Omega}_{13}$ o vetor formado pela 3^a linha da matriz $[\Omega_1]$, definida a seguir, estabelecemos:

$$\vec{t}''^T = \vec{\Omega}_{13}^T \cdot [L] \quad (\text{A.21})$$

$$\vec{f}'^T \cdot \vec{t}'' = \vec{\Omega}_{13}^T \cdot \vec{f}'_{(\zeta)} \quad (\text{A.22})$$

Da mesma forma, determinamos a terceira componente do vetor $\vec{f}''_{(\zeta)}$

$$F''_t = - f'_t - 2 \cdot \vec{\Omega}_{03}^T \cdot \vec{f}'_{(\zeta)} + \vec{\Omega}_{13}^T \cdot \vec{f}'_{(\zeta)} \quad (\text{A.23})$$

Derivando três vezes a equação (A.8) temos:

$$F'''_t = \vec{f}''''^T \cdot \vec{t} + 3 \cdot \vec{f}''^T \cdot \vec{t}' + 3 \cdot \vec{f}'^T \cdot \vec{t}'' + \vec{f}^T \cdot \vec{t}''' \quad (\text{A.24})$$

Chamando de $\vec{\Omega}_{23}$ o vetor formado pela 3^a linha da matriz $[\Omega_2]$, e utilizando o mesmo desenvolvimento realizado para calcular F'_t e F''_t , determinamos a terceira componente do vetor $\vec{f}'''_{(\zeta)}$

$$F'''_t = - f''_t - 3 \cdot \vec{\Omega}_{03}^T \cdot \vec{f}'_{(\zeta)} - 3 \cdot \vec{\Omega}_{13}^T \cdot \vec{f}'_{(\zeta)} + \vec{\Omega}_{23}^T \cdot \vec{f}'_{(\zeta)} \quad (\text{A.25})$$

c) Vetor momento interno \vec{M} .

O vetor momento interno \vec{M} , em coordenadas globais, é obtido através de uma integração de cima para baixo, utilizando a expansão de Taylor de 3^a ordem.

A equação (2.3.5) é portanto integrada como segue:

$$\vec{M}_{j-1} = \vec{M}_j - h \cdot \vec{M}'_j + (h^2/2) \cdot \vec{M}''_j - (h^3/6) \cdot \vec{M}'''_j \quad (\text{A.26})$$

Sendo

$$\vec{M}'''_j = (1/h) \cdot (\vec{M}''_j - \vec{M}''_{j-1}) \quad (\text{A.27})$$

Substituindo a equação (A.27) na equação (A.26) estabelecemos a equação que integra o vetor \vec{M} como:

$$\vec{M}_{j-1} = \vec{M}_j - h \cdot \vec{M}'_j + (h^2/6) \cdot (2 \cdot \vec{M}''_j + \vec{M}''_{j-1}) \quad (\text{A.28})$$

As derivadas necessárias para calcular a equação acima são dadas pela equação (2.3.5) e suas derivadas.

$$\vec{M}' = \vec{F} \times \vec{t} \quad (\text{A.29})$$

$$\vec{M}'' = \vec{F}' \times \vec{t}' - \vec{F} \times \vec{t}'' \quad (\text{A.30})$$

Onde \vec{t}' representa o vetor formado pela 3ª linha da matriz $[L']$.

A fim de calcularmos a matriz de curvaturas $[\Omega_0]$ e suas derivadas, os momentos e correspondentes derivadas devem ser expressos segundo o sistema de eixos locais. Esta transformação é dada por:

$$\vec{M}_{(\zeta)} = [L] \cdot \vec{M} \quad (\text{A.31})$$

$$\vec{M}'_{(\zeta)} = [L] \cdot \vec{M}' + [L'] \cdot \vec{M} \quad (\text{A.32})$$

$$\vec{M}''_{(\zeta)} = [L] \cdot \vec{M}'' + 2 \cdot [L'] \cdot \vec{M}' + [L''] \cdot \vec{M} \quad (\text{A.33})$$

Com isto, temos condições de estabelecer todas as componentes das matrizes $[\Omega_0]$, $[\Omega'_0]$, $[\Omega''_0]$, definidas anteriormente.

Para o cálculo da matriz de orientação as seguintes matrizes serão necessárias:

$$[\Omega_1] = [\Omega'_0] + [\Omega_0^2] \quad (\text{A.34})$$

$$[\Omega_2] = [\Omega''_0] + 2 \cdot [\Omega'_0] \cdot [\Omega_0] + [\Omega_0] \cdot [\Omega_1] \quad (\text{A.35})$$

d) Matriz de orientação [L]

Os vetores de força interna, momento interno e matriz de velocidade angular foram integrados de cima para baixo ao longo da viga-coluna, de acordo com o descrito anteriormente. Entretanto, a matriz de orientação e vetor posição serão integrados no sentido de baixo para cima, iniciando a integração pela base da torre.

A integração da matriz de orientação é feita através da expansão da equação em uma série de Taylor de 4ª ordem, tendo a seguinte forma

$$[L]_{j+1} = [L]_j + h \cdot [L']_j + (h^2/2) \cdot [L'']_j + (h^3/6) \cdot [L''']_j + (h^4/24) \cdot [L^{1v}]_j \quad (\text{A.36})$$

Usando diferenças finitas ascendentes

$$[L^{1v}]_j = ([L''']_{j+1} - [L''']_j)/h \quad (\text{A.37})$$

Derivando a equação (2.2.3) obtemos

$$[L'''] = [\Omega'_0] \cdot [L] + [\Omega_0] \cdot [L'] \quad (\text{A.38})$$

Logo

$$[L''] = [\Omega_1] \cdot [L] \quad (\text{A.39})$$

$$[L'''] = [\Omega''_0] \cdot [L] + 2 \cdot [\Omega'_0] \cdot [L'] + [\Omega_0] \cdot [L''] \quad (\text{A.40})$$

Utilizando os resultados das equações (A.34-35) podemos escrever

$$[L'''] = [\Omega_2] \cdot [L] \quad (\text{A.41})$$

Substituindo as equações (A.37), (A.39) e (A.41) na equação (A.36) temos

$$\begin{aligned}
[L]_{j+1} = & \{ [I] + h \cdot [\Omega_0]_j + (h^2/2) \cdot [\Omega_1]_j + (h^3/24) \cdot (3 \cdot [\Omega_2]_j + \\
& + [\Omega_2]_{j+1}) + (h^4/24) \cdot [\Omega_2]_{j+1} \cdot [\Omega_0]_j \} \cdot [L]_j \quad (A.42)
\end{aligned}$$

Onde $[I]$ representa a matriz identidade

Necessitamos calcular apenas os 3 cosenos diretores independentes $L(1,2)$, $L(3,1)$, $L(3,2)$ e o sinal dos cosenos $L(2,2)$ e $L(3,3)$, uma vez que os outros elementos devem ser calculados de modo a fornecerem a ortonormalidade da matriz $[L]$.

As relações de ortonormalidade são dadas por

$$L(2,2) = \pm (1 - L(1,2)^2 - L(3,2)^2)^{1/2} \quad (A.43)$$

$$L(3,3) = \pm (1 - L(3,1)^2 - L(3,2)^2)^{1/2} \quad (A.44)$$

$$\begin{aligned}
L(1,1) = & L(2,2)^2 - L(3,1)^2 \cdot (1 - L(1,2)^2) / (L(2,2) \cdot \\
& \cdot L(3,3) + L(1,2) \cdot L(3,1) \cdot L(3,2)) \quad (A.45)
\end{aligned}$$

$$L(1,3) = -L(1,1) \cdot L(3,1) + L(1,2) \cdot L(3,2) / L(3,3) \quad (A.46)$$

$$L(2,1) = -L(1,1) \cdot L(1,2) + L(3,1) \cdot L(3,2) / L(2,2) \quad (A.47)$$

$$L(2,3) = -L(2,1) \cdot L(3,1) + L(2,2) \cdot L(3,2) / L(3,3) \quad (A.48)$$

e) Vetor posição \vec{X}

O vetor posição \vec{X} , segundo o sistema de coordenadas globais é obtido através de uma integração que inicia na base da torre. A equação (2.3.8) é integrada utilizando uma expansão da Série de Taylor de 5ª ordem, como segue:

$$\begin{aligned}
\vec{X}_{j+1} = & \vec{X}_j + h \cdot \vec{X}'_j + (h^2/2) \cdot \vec{X}''_j + (h^3/6) \cdot \vec{X}'''_j + \\
& + (h^4/24) \cdot \vec{X}^{IV}_j + (h^5/120) \cdot \vec{X}^V_j \quad (A.49)
\end{aligned}$$

Usando diferenças finitas ascendentes

$$\vec{X}_j^V = (1/h) \cdot (\vec{X}_{j+1}^{IV} - \vec{X}_j^{IV}) \quad (\text{A.50})$$

Substituindo a equação (A.50) na equação (A.49) obtemos

$$\begin{aligned} \vec{X}_{j+1} = \vec{X}_j + h \cdot \vec{X}'_j + (h^2/2) \cdot \vec{X}''_j + (h^3/6) \cdot \vec{X}'''_j + (h^4/120) \cdot \\ \cdot (4 \cdot \vec{X}_j^{IV} + \vec{X}_{j+1}^{IV}) \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

As derivadas necessárias para o cálculo da equação são estabelecidas em termos da componente F_t e de suas derivadas, deduzidas anteriormente.

$$\vec{X}' = (1 + F_t/A \cdot E) \cdot \vec{t} \quad (\text{A.52})$$

$$\vec{X}'' = (1 + F_t/A \cdot E) \cdot \vec{t}' + (F'_t/A \cdot E) \cdot \vec{t} \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} \vec{X}''' = (1 + F_t/A \cdot E) \cdot \vec{t}'' + 2 \cdot (F'_t/A \cdot E) \cdot \vec{t}' + \\ + (F''_t/A \cdot E) \cdot \vec{t} \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} \vec{X}^{IV} = (1 + F_t/A \cdot E) \cdot \vec{t}''' + 3 \cdot (F'_t/A \cdot E) \cdot \vec{t}'' + \\ + 3 \cdot (F''_t/A \cdot E) \cdot \vec{t}' + (F'''_t/A \cdot E) \cdot \vec{t} \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

f) O vetor posição na ancoragem do cabo é obtido integrando-se a equação (3.2.16) através da fórmula composta dos Trapézios.

Denominando

$$g(\xi) = (1 + \varepsilon_{(\xi)}) \cdot (\vec{R}_{(\xi)}/T_{(\xi)}) \quad (\text{A.56})$$

obtemos

$$\int_0^L g(\xi) d\xi = \frac{h}{2} \left[g(\xi_0) + g(\xi_n) \right] + h \sum_{j=1}^{n-1} g(\xi_j) \quad (\text{A.57})$$

Onde h representa o intervalo de integração e $g(\xi_j)$ o valor da função no ponto de integração j .

g) A matriz $[C]$ do cabo é também integrada utilizando-se a fórmula composta dos trapézios, como foi descrito no item anterior.

APÊNDICE B - CARACTERÍSTICAS MECÂNICAS DOS CABOS

B.1 - Introdução

A História nos mostra que os cabos têm sido utilizados, como elementos estruturais de tração, desde 685 AC, quando um cabo de cobre foi encontrado nas ruínas de Ninevah, perto da Babilônia.

As peças encontradas nas escavações de Pompeia, mostram que os romanos utilizaram cordas de bronze em suas construções e amostras encontram-se no English Museum e no Museu Barbônico de Nápoles.

Acredita-se que o primeiro cabo foi feito em 1834, na Alemanha, por A. Albert, assemelhando-se muito aos atuais, sendo que a primeira máquina de fabricar cabos, foi construída por John A. Roebling, depois de 1850.

Até a construção do pavilhão Livestock, em Raleigh, na década de 1950, poucas estruturas de cabos tinham sido construídas .

O uso de cabos estruturais em pontes, além das pontes convencionais de suspensão, surgiu na Alemanha, depois da II Guerra Mundial, quando muitas pontes destruídas foram substituídas por modernas pontes com cabos estaiados.

Atualmente existem cabos de diversos tipos e materiais, principalmente de aço e fibras naturais ou sintéticas.

As fibras ou fios são transados em cordões e estes em cabos, seguindo uma lei específica de montagem. Segundo uma lei usual, as fibras ou fios dos cordões tem um giro direcional, com sentido oposto ao dos cordões. A lei é a da "mão direita" se o giro for horário, e da "mão esquerda" se o giro for anti-horário.

Os fios que formam os cabos de aço, podem ter graus diferentes de resistência e devem ser galvanizados, para proteger da corrosão.

Um cabo de aço é, normalmente, composto de 6 cordões, cada um contendo 19, 24 ou 37 fios individuais, que são enrolados em torno de um núcleo de aço ou de alguma fibra. Os cabos de fibras são constituídos, normalmente, de 3 cordões.

Os materiais típicos que formam as fibras são a manila, sisal, nylon, dracon, rayon, coir e prolene.

As características dos cabos, dadas nos itens seguintes, baseiam-se nos resultados fornecidos por Wilson¹⁹.

B.2 - Propriedades do Peso dos Cabos de Aço e de Fibras

O peso dos cabos, no ar e n'água, fornecido pelos fabricantes de cabos, mostram uma lei quadrática relacionando o peso e o diâmetro dos mesmos.

Em geral, o peso dos cabos, por unidade de comprimento, no ar e n'água, pode ser expresso pelas seguintes equações:

- Peso n'água

$$W = C_w \cdot d^2 \quad (\text{B.2.1})$$

- Peso no ar

$$W_a = C_a \cdot d^2 \quad (\text{B.2.2})$$

Onde C_w e C_a são as constantes de proporcionalidade n'água e no ar, respectivamente, e d o diâmetro do cabo.

As figuras (B.2.1) e (B.2.2) fornecem os gráficos que representam as equações B.2.1 e B.2.2 para alguns tipos de cabos.

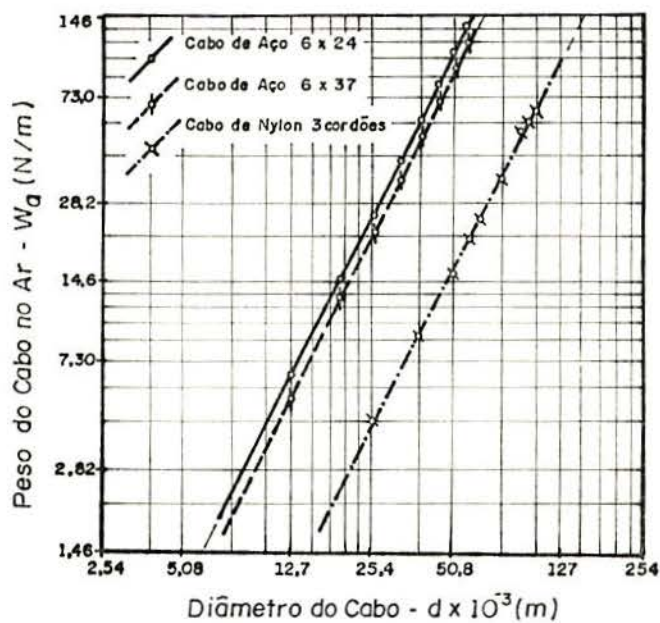


Figura B.2.1 - Relação peso-diâmetro do cabo no ar.

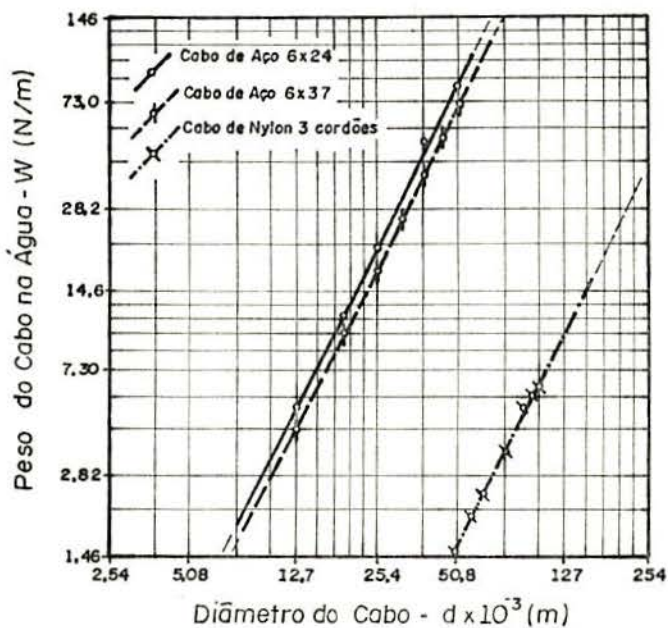


Figura B.2.2 - Relação peso-diâmetro do cabo n'água.

B.3 - Resistência Última de Cabos de Aço e de Fibras Típicas

Na figura (B.3.1) estão relacionadas as forças de ruptura T_u com os diâmetros dos cabos de aço e de algumas fibras típicas. A equação abaixo fornece a força de ruptura T_u em função do diâmetro do cabo.

$$T_u = C_u \cdot d^2 \quad (\text{B.3.1})$$

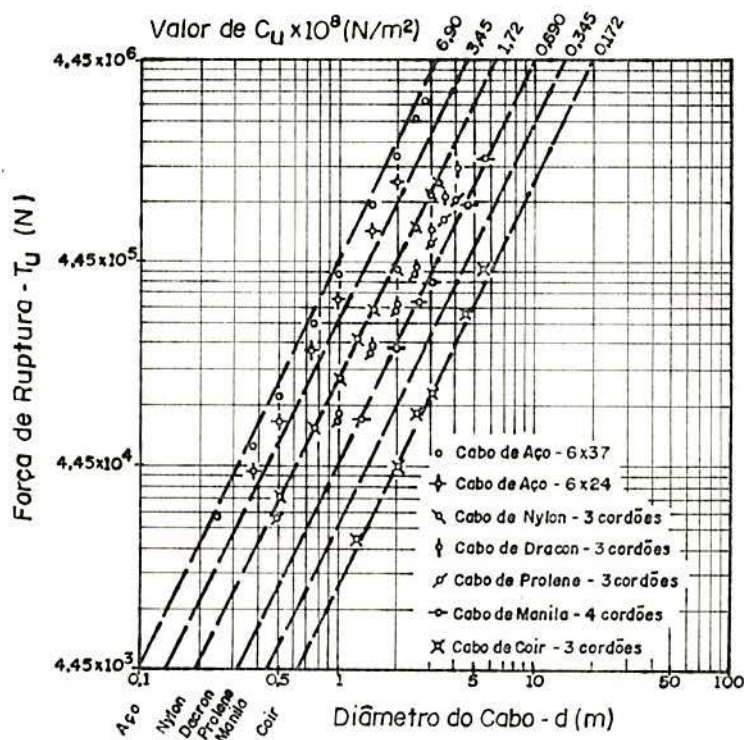


Figura B.3.1 - Relação força de ruptura - diâmetro do cabo.

No topo da figura (B.3.1) cada linha fornece o valor da constante C_u , para os diferentes materiais.

Depois do aço, os cabos de nylon são os de maior resistência e também de grande utilidade, devido ao seu baixo peso.

A tabela 1 fornece os valores das constantes C_u , para os diferentes materiais.

Tipo de Cabo		Constante de Proporcionalidade C_u (N/m ³)	
Material	Construção	No ar	Na água
Aço	6 x 37 cabo aço galvanizado	$2,00 \times 10^9$	
	6 x 24 cabo aço galvanizado	$1,47 \times 10^9$	
Nylon	Lei Regular (3 cordões)	$5,20 \times 10^8$	$4,75 \text{ a } 5,43 \times 10^8$
Dacron		$4,19 \times 10^8$	$4,19 \times 10^8$
Prolene		$4,07 \times 10^8$	$4,30 \times 10^8$
Manila	Lei Regular (4 cordões)	$2,26 \times 10^8$	
Fibra (coir)	Lei Regular	$5,66 \times 10^7$	$5,09 \times 10^7$

Tabela 1 - Resistência última dos cabos.

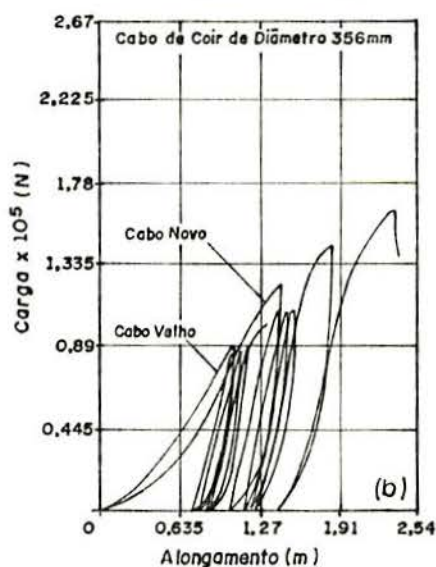
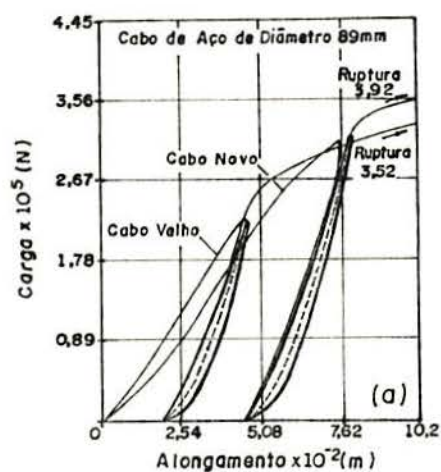
B.4 - Propriedades Elásticas de Cabos de Aço e de Fibras Típicas

Um cabo típico de aço, quando submetido a uma força de tração sofre um alongamento que é parte elástico e parte permanente.

Curvas que representam as relações entre força de tração e alongamento, obtidas de ensaios experimentais, são apresentadas na figura (B.4.1) para os cabos de aço e de fibra.

Podemos observar que quando a carga é completamente removida, a curva de descarga segue um caminho diferente ao do carregamento, no diagrama força-deslocamento, estabelecendo-se assim um alongamento permanente.

A carga, sendo outra vez aplicada, segue uma nova curva, formando um laço de histerese com a curva de descarga. A área do laço de histerese representa a energia absorvida pelo sistema.



Figuras B.4.1.a e B.4.1.b - Resultados dos ensaios de carga e descarga versus alongamento.

Quando o carregamento é repetido, a relação entre a força e o alongamento pode ser considerada linear, ao longo da parte ascendente do eixo do laço de histerese.

Ensaio semelhante foram realizados em cabos de coir de grande diâmetro, novos e velhos e mostraram a mesma tendência de comportamento elástico.

Na figura (B.4.1) é evidente o aumento do alongamento permanente, devido aos sucessivos laços de histerese. Também está claro, através da comparação entre cabos novos e velhos, de aço ou de fibra, que o cabo muito usado tem 50% da resistência do cabo novo e pouca capacidade de ser recarregado.

tica c'e.

A figura (B.4.3) apresenta o diagrama tensão-deformação para um cabo de aço, onde as deformações elástica e permanente são traçadas separadamente. Existe uma grande não linearidade governando o trecho da deformação permanente, que como esperado, tende a uma forma assintótica, até atingir a carga última, dada pela equação (B.3.1) como $T_u/d^2 = 4.83 \times 10^4$ N/cm².

O trecho elástico da deformação, mostrado à direita da figura (B.4.3) é aproximadamente linear, dentro do nível de carga que tem importância para os cabos de aço.

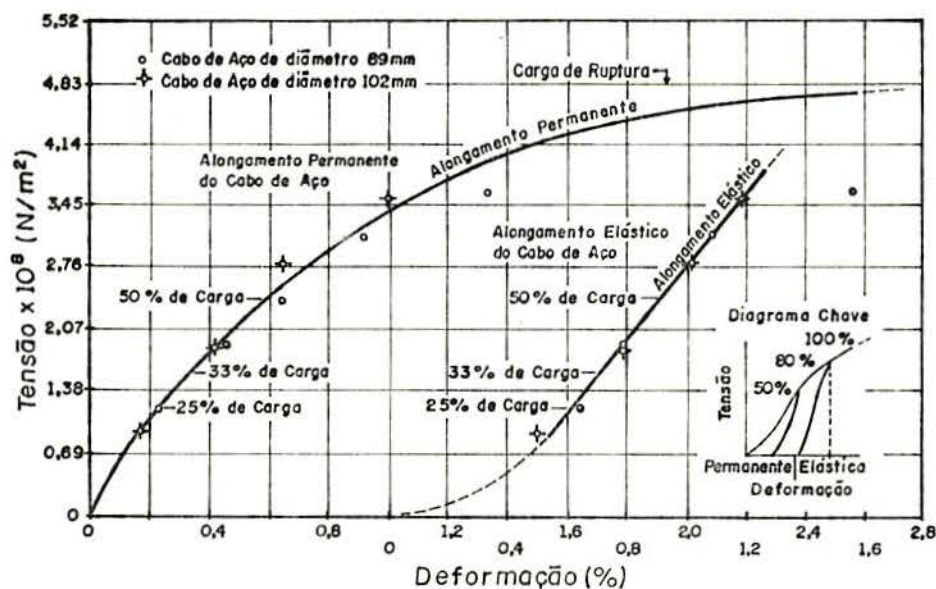


Figura B.4.3 - Relação tensão-deformação para cabos de aço.

Para os cabos de aço, nylon e fibra, o trecho elástico do alongamento ΔS pode ser aproximado pela seguinte equação:

$$\frac{T}{d^2} = C_e \cdot \left[\frac{\Delta S}{S_0} \right]^m \quad (\text{B.4.1})$$

Sendo C_e uma constante de proporcionalidade e m um expoente numérico. Os valores de C_e e m , que fornecem uma boa aproximação do comportamento elástico destes 3 cabos, são dados na tabela 2.

Reconhecendo que a área efetiva A , capaz de transmitir carga, é sempre menor que a área do círculo de diâmetro d , podemos escrever

$$A = C_A \cdot d^2 \quad (\text{B.4.2})$$

Sendo C_A um coeficiente numérico dependente do tipo e construção do cabo.

Conseqüentemente a equação (B.4.1) pode ser escrita como

$$\frac{T}{A} = \frac{C_e}{C_A} \left[\frac{\Delta S}{S_0} \right]^m \quad (\text{B.4.3})$$

Os valores de C_A e da relação C_e/C_A , para os diferentes tipos de cabos, são dados na tabela 3.

Tipo de Cabo	C_e (N/m^2)	m
Aço	$2,69 \times 10^{11}$	3/2
Nylon	$1,53 \times 10^{10}$	3
Fibra (Coir)	$9,52 \times 10^8$	2

Tabela 2 - Constantes elásticas.

Tipo do Cabo	Constante C_A	C_e/C_A (N/m ²)
Aço	0,405	$6,64 \times 10^{11}$
Nylon	0,630	$2,43 \times 10^{10}$
Fibra (Coir)	0,630	$1,51 \times 10^9$

Tabela 3 - Constantes elásticas.

B.5 - Comportamento dos Cabos Quando Submetidos a Carregamento Repetido

Considerando um cabo em sua posição de equilíbrio, vamos designar por T_e a força média desenvolvida no mesmo, como mostra a figura (B.4.2).

Denominamos S_0 o comportamento inicial do cabo ou seja, quando não está submetido a cargas externas e é nula a deformação. Quando o mesmo é submetido à força de equilíbrio T_e ou à tensão T_e/A , a deformação é dada pelo trecho Ob do diagrama da figura (B.4.2).

A deformação estática ϵ_s pode ser considerada como constituída de duas partes, como segue

$$\epsilon_s = \frac{\Delta S_0 + \Delta S}{S_0} = \epsilon_0 + \epsilon \quad (\text{B.5.1})$$

Onde ΔS_0 e ΔS são as parcelas de alongamento permanente e elástico, ϵ_0 e ϵ as deformações, respectivamente.

Sob carregamento dinâmico, que ocorre por exemplo devido às flutuações dos ventos, a tensão no cabo tende a flutuar em torno do valor médio T_e/A , com incrementos de $\pm \Delta T/A$.

Quando a tensão $(T_e + \Delta T)/A$ for atingida, então estamos no ponto f do diagrama tensão-deformação, correspondendo ao acréscimo de deformação be. A retirada da carga, de maneira rápida, resulta em um ciclo de carga e descarga em torno do ponto h, do eixo fc' do laço de histerese e a variação da tensão tende a seguir a linha escura do trecho da curva fc'.

Denominando a deformação Ob de ϵ_s e a deformação Od de ϵ_d , é evidente que o comprimento S_e do cabo, relacionado com o cabo submetido à carga estática de equilíbrio T_e , tem a seguinte expressão

$$S_e = S_o (1 + \epsilon_s) \quad (B.5.2)$$

Sob condições dinâmicas, o novo comprimento do cabo S'_e , será

$$S'_e = S_o (1 + \epsilon_d) \quad (B.5.3)$$

Na realidade a tensão que ocorre no cabo varia dentro do intervalo $(T_e \pm \Delta T)/A$ e portanto o alongamento elástico deve ser relacionado com o comprimento S'_e . Conseqüentemente o módulo de elasticidade longitudinal E do cabo, definido como a tangente da curva fc' , no ponto h , é dado por

$$E = \frac{\Delta T}{A} / \frac{\Delta \zeta}{S_o} \quad (B.5.4)$$

Onde $\Delta \zeta$ representa o alongamento elástico devido ao incremento de carga dinâmica ΔT .

Diferenciando a equação (B.4.3) obtemos

$$\frac{\Delta T}{A} = \frac{m \cdot C_e}{C_A} \left[\frac{\Delta S}{S_o} \right]^{m-1} \frac{\Delta \zeta}{S_o} \quad (B.5.5)$$

Conseqüentemente, o módulo de elasticidade E , para cabos submetidos a cargas repetidas, tem a seguinte expressão

$$E = \frac{m \cdot C_e}{C_A} \left[\frac{\Delta S}{S_o} \right]^{m-1} \quad (B.5.6)$$

O módulo de elasticidade \bar{e} , portanto, uma função não linear da deformação elástica, como pode ser observado nos diagramas das figuras anteriores.

Os valores de E do aço, deduzidos nas equações acima, aproximam-se muito dos resultados experimentais obtidos

por diversos pesquisadores [19]. Também deve ser considerado que o módulo de elasticidade dos cabos de aço, variam com a qualidade do aço e com o tipo de construção dos cordões.

É possível estabelecer uma equação geral para definir o módulo de elasticidade E , em função da força T_e , a partir das seguintes equações

$$\frac{T_e}{T_u} = \left[\frac{C_e}{C_u} \right]^m \quad (\text{B.5.7})$$

$$\epsilon = \frac{\Delta S}{S_o} \quad (\text{B.5.8})$$

A equação (B.5.6) pode ser novamente escrita como

$$E = \frac{m \cdot C_e}{C_A} \epsilon^{(m-1)} \quad (\text{B.5.9})$$

Utilizando as equações acima obtemos a seguinte relação

$$\epsilon = \left[\frac{T_e}{T_u} \right]^{1/m} \left[\frac{C_u}{C_e} \right]^{1/m} \quad (\text{B.5.10})$$

Substituindo a equação (B.5.10) na equação (B.5.9) obtemos a equação geral do módulo de elasticidade longitudinal E .

$$E = K_e \cdot \left[\frac{T_e}{T_u} \right]^i \quad (\text{B.5.11})$$

Onde:

$$K_e = \frac{m \cdot C_e}{C_A} \left[\frac{C_u}{C_e} \right]^{(m-1)/m} \quad (\text{B.5.12})$$

$$i = \frac{m-1}{m} \quad (\text{B.5.13})$$

O valor de E assim calculado será utilizado, no capítulo 3, na equação que define a deformação específica longitudinal do cabo como

$$\epsilon = \left(\frac{T}{EA}\right)^i$$

A tabela 4 fornece os valores de K_e e i para os 3 cabos típicos, baseados nos valores de m , C_u , C_A , C_e dados nas tabelas 1, 2 e 3.

Tipo de Cabo	Expoente Numérico i	Constante Elástica K_e (N/m ²)	
		No ar	Na água
Aço	1/3	$1,21 \times 10^{11}$	$1,21 \times 10^{11}$
Nylon	2/3	$3,47 \times 10^9$	$3,28 \times 10^9$
Fibra (Coir)	1/2	$4,06 \times 10^8$	$3,87 \times 10^8$

Tabela 4 - Constantes para o módulo de elasticidade.

BIBLIOGRAFIA

1. CHEN, Wai-Fah & ATSUTA, Toshio. Theory of beam-columns. New York, McGraw-Hill, 1976. v.1.
2. CHU, Kuang-Han & MA, David Chia-Chiun. Nonlinear cable and frame interaction. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 102(3):569-89, Mar. 1976.
3. COHEN, Edward. Design of multi-level guyed towers: wind loading. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 83(5):1-29, Sept. 1957.
4. DEAN, D.L. Static and dynamic analysis of guy cables. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 87(1):1-21, Jan. 1961.
5. GOLDBERG, John E. & GAUNT, John T. Stability of guyed towers. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 99(4):741-56, Apr. 1973.
6. GOLDBERG, John E. & MEYERS, V.J. A study of guyed towers. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 91(4):57-76, Aug. 1965.
7. HULL, Frederick H. Stability analysis of multi-level guyed towers. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 88(2):61-80, Apr. 1962.
8. KING, Ian P. A computer program for analysis of guyed transmission towers. Computers and Structures, Oxford, 2(5/6):933-42, Dec. 1972.
9. O'BRIEN, Terence W. & FRANCIS, Arthur J. Cable movements under two-dimensional loads. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 90(3):89-123, June 1964.
10. ODLEY, E.G. Analysis of high guyed towers. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 92(1):169-97, Feb. 1966.

11. ROSENTHAL, Felix & SKOP, Richard A. An exact method for guyed tower analysis. Trabalho apresentado à Annual Convention & Exposition, Atlanta, Ga., Oct. 2-6, 1979.
12. _____. Guyed towers under arbitrary loads. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 106(3):679-92, Mar. 1979.
13. _____. Method for analysis of guyed towers. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 108(3):543-58, Mar. 1982.
14. SKOP, Richard A. Cable spring constants for guyed tower analysis. Journal of the Structural Division, New York, ASCE, 105(7):1307-18, July 1979.
15. SKOP, R.A. & O'HARA, G.J. A method for the analysis of internally redundant structural cable arrays. Marine Technology Society Journal, 6(1):6-18, Jan./Feb. 1972.
16. _____. The method of imaginary reactions: a new technique for analysing structural cable systems. Marine Technology Society Journal, 4(1):21-30, Jan./Feb. 1970.
17. TIMOSHENKO, Stephen P. Theory of elastic stability. New York, McGraw-Hill, 1936.
18. WANG, Ping-Chun. Numerical and matrix methods in structural mechanics, with applications to computers. New York, John Wiley, 1966.
19. WILSON, B.W. Elastic characteristics of moorings. Journal of the Waterways and Harbors Division, New York, ASCE, 93(4):27-56, Nov. 1967.