

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

HUGO SZMIDT NETO

**CURVA DE JUROS BRASILEIRA E SUA RELAÇÃO COM CO-MOVIMENTOS NO
MERCADO DE TÍTULOS PÚBLICOS GLOBAL.**

Porto Alegre

2018

HUGO SZMIDT NETO

**CURVA DE JUROS BRASILEIRA E SUA RELAÇÃO COM CO-MOVIMENTOS NO
MERCADO DE TÍTULOS PÚBLICOS GLOBAL.**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia, com ênfase em Economia Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. João Frois Caldeira

Porto Alegre

2018

CIP - Catalogação na Publicação

Szmidt Neto, Hugo
CURVA DE JUROS BRASILEIRA E SUA RELAÇÃO COM
CO-MOVIMENTOS NO MERCADO DE TÍTULOS PÚBLICOS GLOBAL /
Hugo Szmidt Neto. -- 2018.
52 f.
Orientador: João Frois Caldeira.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Faculdade de Ciências Econômicas,
Programa de Pós-Graduação em Economia, Porto Alegre,
BR-RS, 2018.

1. Curva de Juros. 2. Finanças. I. Frois Caldeira,
João, orient. II. Título.

HUGO SZMIDT NETO

**CURVA DE JUROS BRASILEIRA E SUA RELAÇÃO COM CO-MOVIMENTOS NO
MERCADO DE TÍTULOS PÚBLICOS GLOBAL**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Economia.

Aprovada em: Porto Alegre, 31 de agosto de 2018.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. João Fróis Caldeira – Orientador

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Prof. Dr. Eduardo de Oliveira Horta

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Prof. Dr. Flávio Augusto Zielgelmann

Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS

Prof. Dr. Márcio Poletti Laurini

Universidade de São Paulo – Ribeirão Preto (USP–RP)

Dedico o trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço colegas, amigos, meu orientador, João F. Caldeira, professores da banca examinadora, em especial ao professor Márcio Poletti Laurini, professores da UFRGS, demais conhecidos, e, claro, meus pais. Agradeço também ao CNPQ e a CAPES, pelo incentivo ao pesquisador.

Agradecimento em especial para os amigos de apartamento 101, Leandro Scherer, Rafael Moresco e Douglas Lobo, pela ótima convivência nesses anos, pelos bons momentos e pelo aprendizado. Para os grandes amigos de longa data: Andrei Carvalho, Maurício Menezes, Thomas Souza e Eduardo Bourscheidt. A Daiane Zanon, Júlia Kramer e Guilherme Morlin, até pelos dias de estudo para prova da ANPEC. Também, aos amigos Bruno Martins, Roger Stroff, Paulo Naibert, Samuel Dittrich, Jairo Garcês. Agradeço ao André Santos e demais amigos de Florianópolis, pelas ótimas férias que já tivemos. Agradeço ao Luciano Marchese e demais colegas do mestrado e doutorado, que, mesmo sem enorme convivência, considero muito, pelas ótimas pessoas que são e pelas etapas que passamos juntos.

Agradeço imensamente aos colegas de trabalho da GAP Economics: Gustav Gorski, Lucas Tesser, Mateus Sanvitto e Victor Dall'Oglio. O conhecimento proporcionado e a convivência diária me fizeram melhorar demais como pessoa e, principalmente, como economista.

Agradeço, também, todas as pessoas que fazem ou fizeram parte da minha vida, nos últimos anos ou antes, e que me querem bem. Saibam que o sentimento é recíproco, e que podem contar comigo.

Ao final, e mais importante, agradeço meus pais por todo apoio aos meus estudos, pela amizade, pelos ensinamentos e pela boa convivência. Vocês são grande parte de mim. Amo vocês.

Resumo

O presente trabalho explora se a curva de juros brasileira, especialmente seu fator de longo prazo, via modelo NS, responde a variáveis internacionais, mais especificamente a choques em variáveis econômicas, financeiras ou, mesmo, no fator de longo prazo da economia dos Estados Unidos. Inflação global, produção industrial global e fatores latentes internacionais fazem parte dos dados escolhidos. Para tal, é extraída uma curva de juros global de quatro países (Estados Unidos, Canadá, Reino Unido e Brasil) através de um *Dynamic Hierarchical Factor Model*. O modelo possui diversas vantagens, como considerar a propriedade temporal dos dados e permitir tanto a estimação da curva global em um único passo, além da obtenção coeficientes que possam nos retornar de que forma variáveis respondem aos choques. Os resultados indicam que a curva de juros global está em um nível inferior ao nível da curva de juros brasileira, que essa responde aos choques em variáveis externas, principalmente aos dados ligados a taxa de juros supranacionais, e que o efeito em direção contrária não é simétrico.

Palavras-chave: Curva de Juros. Macro-Finanças. Curva de Juros Global. *Dynamic Hierarchical Factor Model*.

Abstract

The present paper explores whether the Brazilian yield curve, especially its long-term factor, via the NS model, responds to international variables, more specifically, shocks in economic variables, financial variables or even the long-term factor of the United States economy . Global inflation, global industrial output and international latent factors are part of the data chosen. To do so, a global yield curve is extracted from four countries (United States, Canada, United Kingdom and Brazil) through a Dynamic Hierarchical Factor Model. The model has several advantages, such as considering the temporal property of the data and allowing both estimation of the global curve in a single step, as well as obtaining coefficients that can inform us in what way variables respond to shocks. The results indicate that the global yield curve is at a level below the level of the Brazilian yield curve, which responds to shocks in external variables, mainly to the data related to supranational interest rates, and that the effect in the opposite direction is not symmetrical.

Key-words: Yield Curve. Macro-Finance. Global Yield Curve. Dynamic Hierarchical Factor Model.

Lista de ilustrações

Figura 1 – <i>Yield</i> – DI-Futuro de 1 Ano - % ao Ano	24
Figura 2 – <i>Yield</i> – <i>Treasuries</i> de 1 Ano - % ao Ano	24
Figura 3 – Curva de Juros Global - % ao Ano	39
Figura 4 – Curva de Juros Brasileira - % ao Ano	39
Figura 5 – Curva de Juros – <i>Cross-section</i> - Curva global e Brasileira - % ao Ano . . .	40
Figura 6 – Função Impulso Resposta – Resposta no Nível da Curva Brasileira (Choque no Nível Global)	41
Figura 7 – FIR – Resposta no Nível da Curva Brasileira(Choque nos Fedfunds)	42
Figura 8 – Função Impulso Resposta – Resposta dos Fedfunds (Choque no Nível Brasileiro)	42
Figura 9 – FIR – Resposta no Nível da Curva Brasileira (Choque na Produção Industrial Global)	43
Figura 10 – FIR – Resposta no Nível da Curva Brasileira (Choque na Inflação Global) .	44
Figura 11 – FIR – Resposta no Nível da Curva Brasileira (Choque no VIX)	44

Lista de tabelas

Tabela 1 – <i>Yields</i> por País (% ao Ano)	23
Tabela 2 – <i>Yields</i> Globais (% ao Ano)	38

Lista de abreviaturas e siglas

DHFM - *Dynamic Hierarchical Factor Model*

ETTJ - Estrutura a termo da taxa de juros

VAR - Vetor autoregressivo

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	ARGUMENTAÇÃO TEÓRICA	15
3	DADOS	22
3.1	Descrição dos Dados	22
4	MODELO ESTIMADO	26
4.1	DHFM - Estrutura	26
4.2	Modelo Nelson-Siegel - Restrições	30
4.3	Gibbs Sampling - Estimação	30
4.4	Forward Filtering Backward Smoothing (FFBS) - Estimação	31
4.5	Decomposição de Cholesky	35
4.6	Função Impulso Resposta	36
4.7	Macro Spanning Conditions	37
5	RESULTADOS	38
5.1	Curva de Juros Global	38
5.2	Funções Impulso Resposta	40
6	CONCLUSÃO	45
	REFERÊNCIAS	47

1 Introdução

Quase a totalidade dos países têm governos nacionais endividados. Dados do FMI apontam para esse fato e relatam que somente dois países no mundo possuem dívida bruta (como porcentagem do PIB) zero ou com expectativa de ser zerada nos próximos anos: Macau e Honk Kong. A maior parte desses possui dívidas substanciais, e os Estados Unidos, nação com maior produto interno bruto do mundo, não é exceção. Em 2016, esse país acumulou dívida bruta de 107,3% do PIB. Para financiar suas dívidas, têm de atrair demandantes que aceitem, por determinada taxa de retorno, adquirir seus títulos de dívida pública. Nesse sentido, diversos fatores podem ser determinantes para definir as taxas de retorno de quem comprar os títulos, como a expectativa de ter o contrato cumprido, expectativas sobre o futuro dos cenários macroeconômicos, mudanças de governantes e de autoridades responsáveis por políticas monetárias, custos de oportunidade, como taxas de juros de outros países, dentre diversas variáveis. Além disso, demandantes e ofertantes de títulos analisam simultaneamente seus comportamentos de maneira a tentar operacionalizar a melhor estratégia para atingir seus objetivos. Esses aspectos mostram a complexidade do tema e quantos fatores podem influenciar na taxa interna de retorno do fluxo de caixa esperado de cada título, ou seja, no seu *yield*.

Como são ofertados títulos públicos de distintos vencimentos, os *yields* dos títulos podem ser representados pelas curvas de juros, que mostram, graficamente, as diferentes taxas de juros, em determinado momento, para diferentes maturidades, como 3 meses, 1 ano, ou 10 anos. Diversos fatores podem exercer papel crucial na negociação entre ofertantes e demandantes dos títulos, incluindo o aspecto temporal, que interfere nas taxas negociadas.

As curvas de juros são relevantes, inclusive, pela representação dos juros de títulos de dívida pública. Dessa forma, há interesse, tanto acadêmico quanto prático, de prever e de obter maior compreensão das características e dos movimentos das curvas de juros. Os motivos podem ser governamentais, para oferta de títulos e financiamento ou rolagem de dívida, e de *assets*, fundos de pensão ou pessoal, para seleção e *hedge* de carteiras. Essas aplicações indicam a elevada importância do assunto tratado. No cenário prático recente, por exemplo, as taxas de juros de diversos países atingiram patamares ínfimos. A forma encontrada pelo Federal Reserve (FED) para estimular ainda mais a economia, após a crise de 2008, foi através da influência na parte longa da curva, o que poderia ter sido executado com a promessa de que as mesmas seriam

mantidas por muito tempo no mesmo nível (EH), ou através de compras de ativos em larga escala (relacionadas ao prêmio de risco). O FED colocou ambas ações em prática, adquirindo ativos em grande escala do final de 2008 até outubro de 2014, ao utilizar da lógica de aumento do preço dos títulos, conseqüentemente reduzindo os respectivos *yields* (federalreserve.gov). Somente esse curso de fatos já destaca a tamanha importância de estudos na área, que podem indicar melhores e menos dispendiosas ações de política monetária.

No meio acadêmico, Diebold e Li (2006) propõem um modelo de Nelson e Siegel dinâmico no intuito de estimar e prever as curvas de juros, o qual considera três fatores, independente da quantidade de maturidades disponíveis para negociação: nível, inclinação e curvatura. A relação entre a curva de juros e variáveis macroeconômicas já havia sido explorada, como em Ang e Piazzesi (2003), resultando, entretanto, em um ajuste insatisfatório. Todavia, possuíam maior intuição, agregando a análise variáveis como taxa de inflação e produto no centro da explicação de variações nos *yields*. Após o trabalho de Diebold e Li (2006) são desenvolvidas diversas abordagens, sendo uma delas o acréscimo de variáveis econômicas e financeiras à metodologia por eles proposta. Tais incrementos permitiram melhorar as previsões e investigar melhor o tema, como no caso da importância de considerar não somente dados nacionais nas estimações, mas o comportamento dos *yields* em relação a dados externos. Outra importante característica, abordada em Gurkaynak e Wright (2012) e em Joslin, Pribsch e Singleton (2014), é a diferença entre definir as variáveis macroeconômicas como *spanned* ou *unspanned by the yields*. Caso consideradas *unspanned by the yields*, essas não afetam o *cross-section* dos *yields* de forma contemporânea.

A discussão pode se tornar ainda mais abrangente ao utilizar de dados globais, explorando sua influência nas variáveis econômicas e financeiras brasileiras. O presente trabalho estima uma curva de juros global com o objetivo de verificar se choques globais, em variáveis supranacionais ou na curva de juros construída, afetam a curva de juros brasileira, ou, mais especificamente, seu nível, fator de longo prazo do modelo de Nelson e Siegel (1987). Para tal, a análise das curvas de juros é realizada através da estimação de um modelo bayesiano. Ao utilizar de indicadores macroeconômicos globais, e modelo semelhante aos apresentados em Diebold, Li e Yue (2008), Moench, Ng e Potter (2013) e Byrne, Cao e Korobilis (2016), com técnicas estatísticas como *Gibbs Sampling*, e ao utilizar a metodologia de Carter e Kohn (1994), para executar o *Forward Filtering Backward Sampling*, é possível realizar análises sobre a relação entre os fatores dos países e fatores macroeconômicos globais, bem como obter co-movimentos nos *yields*. Tal

abordagem ainda não foi empregada considerando fatores brasileiros.

2 Argumentação Teórica

As curvas de juros, funções que representam, em cada período no tempo, a relação entre os *yields* e as maturidades dos títulos, têm relevância tanto para investidores como para os formadores de políticas. De acordo com Gurkaynak e Wright (2012), diversos pontos de sua importância podem ser destacados, como a tentativa de reverter expectativas de variáveis macroeconômicas, a reação da política monetária com relação às variações nas taxas de juros longas, de que maneira o governo pode oferecer a melhor combinação de títulos públicos para seu financiamento, além da relevância para alocação de portfólio e estratégias de *hedge*. A forma ideal para utilizar as informações das curvas de juros depende do objetivo do investidor, dos dados de cada país, da credibilidade das autoridades monetárias, dentre outros fatores.

Diversas são as tentativas de explicar e buscar intuições econômicas dado o formato assumido pelas curvas de juros. De acordo com a hipótese das expectativas (HE), em sua forma forte, as taxas de juros de longo prazo são iguais à média das expectativas das taxas de juros de curto prazo futuras (Gurkaynak e Wright, 2010). Outras explicações poderiam ser dadas pelos prêmios de risco e pela segmentação de mercado, casos que podem contradizer essa hipótese. Os estudos são incrementados ao incluir variáveis macroeconômicas, pois o formato da curva deve estar relacionado às expectativas dos agentes com o futuro da economia. No caso de uma queda exógena no prêmio a termo, por exemplo, as autoridades monetárias poderiam elevar a taxa de juros para não gerar estímulos de demanda agregada. Para isso, são necessárias abordagens que consigam identificar efeitos e mudanças na percepção dos agentes com relação às políticas e outros fatores. Diferentes percepções sobre a estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) retornam diferentes respostas práticas ideais para os objetivos de política monetária.

Na média, o *cross-section* das curvas de juros apresentam inclinação positiva, ou seja, quanto maior a maturidade dos títulos maior costuma ser o *yield* correspondente. Essa característica vai contra a HE forte, pois implicaria que as taxas de juros de curto prazo tendem a aumentar indefinidamente, enquanto a versão fraca somente diz que há um termo a prêmio fixo para cada maturidade (Gurkaynak e Wright, 2012). De acordo com Ang e Piazzesi (2003), os *yields* de mesma maturidade possuem grandes autocorrelações, que aumentam conforme suas maturidades. Comportamento inverso é observado para o desvio padrão, pois quanto maior a maturidade menor, geralmente, é sua sua variabilidade. As correlações entre as taxas de diferentes maturidades

também são elevadas. Os autores encontraram correlações de até 99% em maturidades próximas. Já Diebold, Rudebusch e Arouba (2006) relatam que os fatores inclinação e curvatura parecem relacionados às frequências de ciclo de negócios, pois enquanto a correlação simples entre esses é de 0,25, a correlação que considera somente os ciclos de um filtro Hodrick-Prescott é de 0,55. Já o nível, fator geralmente ligado a expectativa de inflação no longo prazo, pode aumentar devido às surpresas inflacionárias, o que é consistente com o argumento de que suas expectativas não são bem ancoradas.

Duas formas usuais para modelar a curva de juros são baseadas na abordagem de não-arbitragem e na abordagem de equilíbrio. A primeira tem pouco a dizer sobre previsão ou sobre as taxas de juros, mas, por ajustar-se muito bem a estrutura a termo, é utilizada para precificação de derivativos, enquanto a segunda tem interesse na dinâmica da estrutura a termo da taxa de juros. Dufee (2002) destaca-se por ser um dos primeiros a abordar a questão de previsão da estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ), concluindo que os modelos usuais têm desempenho insatisfatório nesse quesito. Ademais, modelos de curva de juros utilizados na abordagem macroeconômica, com foco em expectativas de inflação e atividade real na determinação dos *yields* contrastam de forma clara com os modelos até então utilizados pelos economistas financeiros, que negavam, em seus estudos, papel explícito a esses determinantes econômicos (Diebold, Rudebusch e Arouba, 2006).

Diebold e Li (2006) propõem um modelo de Nelson e Siegel dinâmico, que consiste em executar a modelagem da curva de juros a partir de três fatores: curto prazo, médio prazo e longo prazo, denominados por Litterman e Scheinkman (1991) como nível, inclinação e curvatura, respectivamente, definidos a partir de um único parâmetro, λ , dadas as maturidades de um título. Apesar de o modelo servir de base para diversos estudos subsequentes, este apresenta fragilidades, em particular pequeno poder preditivo (Altavilla, Giacomini e Ragusa, 2014).

Com o intuito de melhorar estes modelos, autores como Diebold, Rudebusch e Piazzesi conseguiram incrementá-los ao levarem em consideração diferentes dados, características e ideias diferentes para estimação. A literatura apresenta a inclusão de variáveis macroeconômicas, e, após, a adição de variáveis financeiras. Estas variáveis permitiram melhorias na modelagem e interpretações novas da curva de juros: Ang e Piazzesi (2003) identificam uma porcentagem de 85% da variação dos *yields* dos títulos de curto e médio prazo sendo explicadas pelas variáveis macroeconômicas, enquanto os fatores não observáveis se mostraram mais úteis quanto maior a maturidade dos títulos, com mais de 60% da variação de previsão de um mês sendo explicada por

esses fatores para a parte longa da curva de juros. Com intuito de melhorar esses modelos, foi utilizada uma abordagem VAR impondo restrição de não arbitragem. Em Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) há forte evidência de que a adição de variáveis macroeconômicas, além de diminuir o montante de variação nos *yields* ocasionado pelo fator inclinação, influencia no movimento futuro da curva de juros, e mais, que não há somente a influência dessas variáveis na curva de juros, mas que o contrário também deve ocorrer, ou seja, a curva de juros também poderia alterar as variáveis macroeconômicas. Assim, é afirmado que deve existir uma ligação bidirecional entre as variáveis macroeconômicas e a estrutura a termo, enquanto em trabalhos anteriores variáveis como produto e inflação são determinadas de forma independente da curva de juros.

A ligação unidirecional entre as variáveis macroeconômicas e os juros parece, no mínimo, suscetível a questionamentos: qual seria a vantagem das autoridades monetárias influenciarem a ETTJ se a mesma não teria capacidade de influenciar as variáveis econômicas? O *paper* de Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) indica, pelos resultados obtidos na decomposição de variância, com dados dos Estados Unidos, que as variáveis macroeconômicas parecem causar maior impacto na estrutura a termo da taxa de juros que o inverso. Além disso, concluem que as variáveis macro apresentaram respostas insignificantes para choques no fator curvatura. Um aumento no fator de nível aumenta a capacidade de utilização instalada, a taxa de juros (*fed funds*) e a inflação. Já o fator inclinação e o instrumento de política monetária são muito ligados. São dadas duas interpretações para tal fato: uma é a de que o FED poderia estar reagindo aos *yields*, enquanto a outra afirma que os *yields* reagem às variáveis macroeconômicas, tentando antecipar as ações do Federal Reserve. Esse fator responde diretamente a choques positivos em todas as três variáveis macroeconômicas utilizadas.

Bianchi, Mumtaz e Surico (2009) tratam da estrutura a termo da taxa de juros do Reino Unido, utilizando dados anteriores e posteriores ao período da “grande moderação”, ou seja, pré e pós 1992, ano no qual foi adotado o regime de metas de inflação e, ao mesmo tempo, foram reduzidas volatilidades de variáveis macroeconômicas. Os autores adicionam variáveis macro em seu trabalho e almejam verificar se essas e a curva de juros variaram no tempo, encontrando resposta positiva para tal. Essa consideração serviu de contraponto para o modelo FAVAR, o qual rejeitava a hipótese das expectativas. Outro ponto relevante foi considerar volatilidade estocástica. O trabalho indica que, desde a adoção do regime de metas de inflação, o nível da curva de juros tornou-se menos importante para explicar a inflação, e a variância da política monetária foi dada

praticamente por movimentos no mesmo fator.

O interesse na previsão da curva de juros também é grande na literatura, mas o número elevado de variáveis macroeconômicas consideradas, que melhoram a previsão em modelos VAR (como em Banbura et al., 2010), traz dificuldades de estimação. Com isso, Koop e Korobilis (2013) utilizam estimação Bayesiana levando em conta o chamado fator de esquecimento. É utilizado também o Time Varying Parameter VAR, ou TVP-VAR e volatilidade estocástica. O artigo, dentre muitos outros, utiliza a hipótese de que as variáveis macroeconômicas são *unspanned by the yields*, isto é, elas não afetam o *cross-section* dos *yields* de forma contemporânea. Com objetivo de diminuir a incerteza advinda da escolha das variáveis, Byrne, Cao e Korobilis (2016) utilizam das metodologias DMA (*Dynamic Model Averaging*) e DMS (*Dynamic Model Selection*), já relatadas em Koop e Korobilis (2013), que em cada período de tempo indicam, através de probabilidades, quais devem ser os melhores modelos para previsão, ou seja, utilizando menos ou mais variáveis macroeconômicas e financeiras. São especificados três modelos, sendo que o primeiro considera os fatores de nível, inclinação e curvatura, o segundo acrescenta variáveis macroeconômicas usuais e o terceiro incorpora ainda mais variáveis, incluindo financeiras.

Com uma ampla gama de artigos sobre curva de juros, outra abordagem, com resultados práticos relevantes, e adotada no presente trabalho, ocorre na relação entre curvas de juros de diferentes países, o que pode ser tratado tanto como um *link* entre dois ou mais países como para construir curvas de juros globais e comparar com as específicas de cada país. Diebold, Li e Yue (2008), pioneiros nesse tema, apresentam um modelo de fatores dinâmicos, no qual os *yields* dependem dos fatores dos países, que por sua vez têm relação com os fatores globais. Lange (2014), por sua vez, utiliza o modelo *state space* e estima, por filtro de Kalman, a curva de juros canadense, incluindo na modelagem dados dos Estados Unidos, esses considerados exógenos. Como o autor argumenta, a parte longa da curva de juros pode ser dirigida por um grande número de fatores domésticos, como prêmio a termo, expectativa de inflação e expectativa de taxa de juros, por exemplo. A questão é que, em uma economia aberta, fatores domésticos devem ser influenciados por fatores internacionais. O *paper* indica que aproximadamente 45% da variação no nível da curva de juros do Canadá pode ser ligada a curva de juros dos Estados Unidos. Outro resultado obtido, nada convencional para outras nações, é o forte *link* bidirecional, com a curva de juros canadense explicando grande parte de variáveis macroeconômicas chave, como taxa de juros e utilização da capacidade instalada.

O trabalho de Joslin, Priebsch e Singleton (2014) discute se as variáveis macroeconômicas

devem ser consideradas *spanned* ou *unspanned by the yields*. Com a primeira imposta, as variáveis em questão podem ser replicadas pelos portfólios de *bonds*. Como consequência, se as tomarmos condicionais à curva de juros corrente, elas não são mais úteis para suas próprias previsões, nem servem para explicar os excessos de retorno. Os autores encontram forte evidência de que as variáveis macroeconômicas são úteis para tais finalidades. Os autores relatam que sua abordagem é diferente do que seria implicado tanto por uma versão irrestrita do modelo canônico quanto por um modelo VAR com fatores.

Bauer e Diez de los Rios (2012) utilizam de variáveis macroeconômicas, como crescimento real e da inflação dos países estudados, considerando-as *unspanned by the yields*, e concluem que explicam mais de 50% da variação no prêmio a termo de curto prazo, além de seus grandes efeitos no prêmio de risco relacionado ao câmbio e nas expectativas da variável monetária, principalmente para prazos curtos. O modelo utilizado segrega o efeito da expectativa de taxa de juros (hipótese das expectativas) do prêmio de risco de uma estrutura a termo internacional. Os autores destacam a importância de considerar restrições econômicas na ETTJ e no prêmio de risco do câmbio para previsão das taxas de juros e de câmbio. Como restrições econômicas os autores assumem, dentre outras, que os dois fatores globais considerados determinam o prêmio de risco, ou seja, há um mercado mundial de *bonds*, e que o mercado de títulos afeta a taxa de câmbio pela diferença nas taxas de juros de curto prazo entre os Estados Unidos e o exterior. As restrições aplicadas tornaram as expectativas de longo prazo da taxa de juros curta mais voláteis.

A correlação entre as curvas de juros norte americanas e canadense não é exceção: a correlação entre as curvas de diversos países tende a ser alta, como em Jotikasthira, Le e Lundblad (2014). As dos Estados Unidos com Reino Unido e Alemanha são de 0,92 e 0,83, respectivamente. Altas correlações entre curvas de diferentes países motivam estudos que considerem suas variações conjuntas, que podem vir, inclusive, de choques em variáveis macroeconômicas. Esses choques podem afetar a estrutura a termo via dois canais, chamados de *policy Channel* (dinâmica conjunta das variáveis, incluindo as variáveis de interesse para política monetária) e *risk compensation Channel* (prêmio a termo ligado às mesmas variáveis). O *policy Channel* está ligado à hipótese das expectativas, e não parece ser capaz de explicar a variação (e co-variação) observada nos títulos de dívida pública (*bonds*) em maturidades longas. Os choques nas variáveis macroeconômicas, seja na parte fiscal ou monetária, impactam os *bond yields*, e atingem as maturidades longas em grande parte devido ao preço do risco dado pelo mercado. Ou seja, maior maturidade implica maior probabilidade de variação divergente

da esperada pela hipótese das expectativas. Numerosos exemplos existem nos quais os juros de maturidade longa dos *bonds* se movem conjuntamente, apesar de as políticas monetárias de curto prazo divergirem, o que também vai contra a hipótese das expectativas. Além de todas essas características, o artigo de Jotikasthira, Le e Lundblad (2014) foi o primeiro trabalho a explicar a economia através das covariâncias das estruturas a termo da taxa de juros, sendo que são utilizados para tal dados dos Estados Unidos, do Reino Unido e da Alemanha. As variáveis que se mostram mais relevantes para o estudo são a taxa de inflação global e o nível da curva de juros dos Estados Unidos, juntas representando 70% da covariância internacional nos *yields*, o que ocorreu para todas as maturidades. A conclusão trata da importância do *risk compensation channel*, que explica 45% das covariâncias para maturidade de 5 anos, enquanto o *policy channel* é responsável pelo restante. Para maturidades mais longas corre a inversão dessas porcentagens, o que dá destaque ainda maior para o canal do risco. Os autores expõem que esse argumento, mesmo com políticas monetárias não convencionais utilizadas pelo FED para afetar a parte longa da curva, geralmente é deixado em segundo plano ou renegado pela literatura.

Alguns estudos vão além das características domésticas para precificação de ativos e consideram dados externos, ou globais, assim como o nesse trabalho. Nessa linha, Byrne, Cao e Korobilis (2016) tratam de verificar os co-movimentos das curvas de juros dos *bonds* entre sete economias avançadas. Para isso, utilizam da construção de uma curva de juros global. Ademais, buscam basear sua explicação tanto em fatores “fundamentais” (*fundamentals*), como dados macroeconômicos, quanto em fatores não fundamentais (*non-fundamentals*), que devem estar relacionados ao sentimento em relação à economia e a incerteza. Esse último fator parece ter apelo em aplicações de finanças. Bansal and Shaliastovich (2010) mostram que a variância dos retornos é mais sensível a medidas de confiança que a fundamentos econômicos, enquanto Lee (1998), destaca que somente 10% da variação nos preços das ações pode ser explicado pelos fundamentos. Bloom(2014) expõe a relevância da incerteza, que afeta a precificação de ativos. O estudo de Cao, Koop e Korobilis relata que a importância dos choques nos fundamentos reduz com a maturidade, e que seu principal fator seria a inflação global, com grande influência nas taxas de juros globais. Entretanto, mais de 70% dos co-movimentos nos *bond yields* se devem a choques nos *non-fundamentals*, que se mostram persistentes e bastante ligados as características dadas em Bloom(2014), e que, na média, mais de 60% da variância nos *bond yields* de cada país pode ser relacionada aos *yields* globais. De acordo com os próprios autores, o trabalho tem estrutura parecida com a utilizada em Diebold, Li e Yue(2008), mas adota estimação bayesiana

em um passo ao invés de em dois, o que deve retornar resultados com menor erro de estimação, modelagem adotada no presente trabalho. Com a consideração macro global não foi relatada diferença na dinâmica do prêmio a termo utilizando ou não o fator curvatura. Assim, como no último trabalho citado e em Bauer e Hamilton (2015), somente os fatores nível e inclinação são utilizados. Em Bauer e Diez de los Rios (2012), para fatores globais, também são utilizados somente os fatores de nível e inclinação, o que indica a robustez do argumento na literatura.

3 Dados

Para realizar o presente trabalho são utilizados dados de quatro países, além de variáveis macroeconômicas globais. Os *yields* de todos os títulos públicos (contratos futuros de DI no caso brasileiro) são obtidos da plataforma Bloomberg, de 12 maturidades diferentes: 3 meses, 6 meses, 1 ano, 2 anos, e assim sucessivamente, de ano em ano, até a maturidade de 10 anos. Além dos *yields*, utilizados para obter a curva de juros global, outras variáveis são selecionadas. No âmbito macroeconômico, a produção industrial e a inflação dos membros da OCDE são consideradas variáveis globais, e são obtidas do site da OCDE, enquanto a taxa de juros dos Estados Unidos, com o maior mercado de títulos públicos do mundo, foi obtida no site do *Federal Reserve of St. Louis*. Do mesmo site, obtemos o *VIX*, índice de volatilidade, que representa uma variável financeira. Os dados, em formato mensal, cobrem o período entre abril de 2008 e dezembro de 2017, contemplando 117 meses.

A produção industrial global foi utilizada em formato de variação acumulada nos últimos 12 meses. Os *fed funds* são utilizados em taxa, sem considerar variações. O *VIX* também não foi considerado em formato de variação, e cada um de seus valores foi dividido por 100, apenas para as variáveis não serem estimadas em valores absolutos tão distintos. A taxa de inflação segue o padrão usual, ao considerar a inflação acumulada nos últimos 12 meses, enquanto os *yields* são utilizados em sua forma bruta.

3.1 Descrição dos Dados

São utilizados dados de quatro países para a estimação dos fatores globais da curva de juros: Estados Unidos, Canadá, Reino Unido e Brasil. Uma breve descrição é apresentada na tabela abaixo.

A tabela (I) mostra os *yields* dos países citados, para maturidades de até sete anos, juntamente com seus valores máximos e mínimos, para cada maturidade. As taxas brasileiras se apresentaram maiores que as dos países estrangeiros para qualquer maturidade. Como as taxas apresentadas são pré-fixadas, as expectativas de inflação de cada país exercem papel crucial para o preço negociado. Durante o período analisado, os *treasuries* de cinco anos dos Estados Unidos tiveram valor mínimo de 0.59%, enquanto o máximo foi de 3.5% e a média de 1.6%. Para a maturidade de 3 meses, chegaram a apresentar, na média mensal, sequência de 32 meses de taxa

Tabela 1 – Yields por País (% ao Ano)

	Maturidade	3 Meses	6 Meses	1 Ano	2 Anos	3 Anos	4 anos	5 Anos	6 Anos	7 Anos
Estados Unidos	Yield Médio	0.27	0.37	0.49	0.76	1.06	1.37	1.67	1.92	2.17
	Mínimo	0.00	0.03	0.10	0.20	0.29	0.44	0.59	0.80	1.00
	Máximo	1.89	2.17	2.36	2.67	2.94	3.22	3.50	3.64	3.78
Canadá	Yield Médio	0.83	0.90	1.02	1.19	1.38	1.57	1.73	1.88	2.04
	Mínimo	0.21	0.27	0.41	0.40	0.39	0.49	0.60	0.69	0.77
	Máximo	2.67	3.02	3.14	3.29	3.42	3.47	3.50	3.57	3.64
Reino Unido	Yield Médio	0.68	0.70	0.70	0.91	1.20	1.48	1.71	1.90	2.10
	Mínimo	0.10	0.09	0.03	0.07	0.13	0.19	0.22	0.30	0.37
	Máximo	5.18	5.18	5.21	5.30	5.26	5.24	5.23	5.22	5.22
Brasil	Yield Médio	10.80	10.94	11.09	11.64	12.16	12.31	12.39	12.46	12.51
	Mínimo	6.40	6.42	6.56	7.58	8.54	8.04	8.47	8.79	9.31
	Máximo	14.94	15.24	15.89	16.78	18.46	19.97	20.19	20.08	19.99

Fonte: Bloomberg

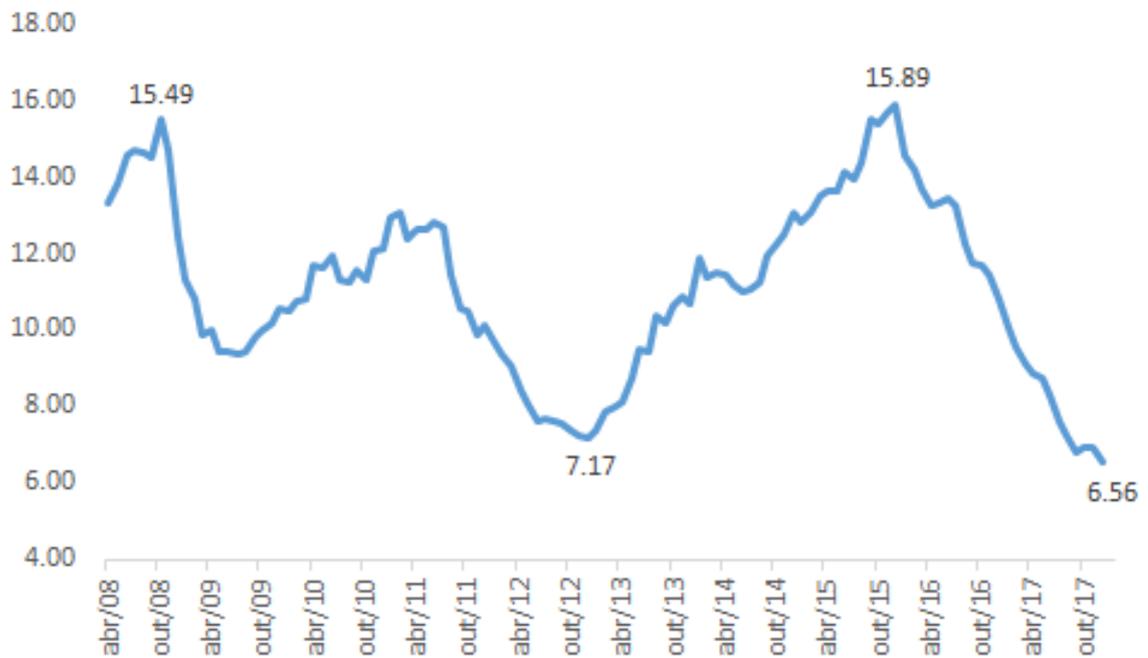
inferior a 0.1%. Para maturidades mais longas, pode-se observar que, na média, Estados Unidos, Canadá e Reino Unido remuneraram, em rentabilidade nominal, valores bem próximos para tomadores de suas dívidas e, por isso, são apresentados a seguir somente os as curvas de juros brasileira e norte-americana. Na média, todos países tiveram taxas longas maiores do que taxas curtas, característica usual nas curvas de juros (Gurkaynak, 2007).

Os *yields* de títulos brasileiros (obtidos do mercado de DI-Futuro, devido à liquidez e número de contratos de diferentes maturidades) se apresentam superiores aos *yields* encontrados nos *bonds* dos países desenvolvidos representados no estudo. Os menores *yields* para maturidades de um ano e de cinco anos são de 6.5% e 8.4%. Os maiores, nas maturidades mais longas, superaram 20%. Apesar do alto patamar atingido, nos últimos meses do estudo (com dados até o final de 2017) ocorreu uma tendência de queda, como mostra a Figura 1, abaixo.

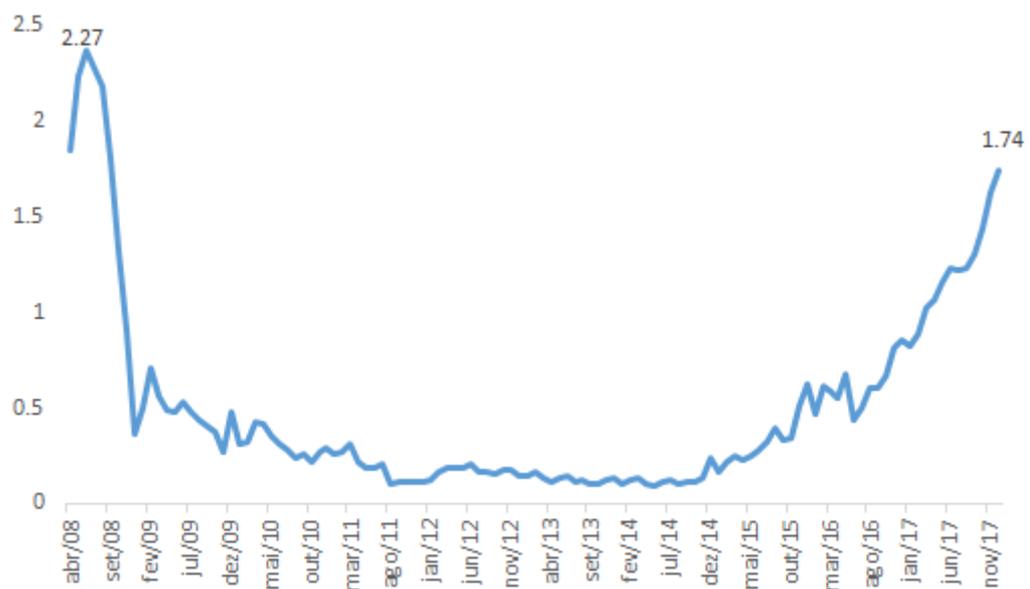
Na Figura 1 é apresentado o *yield* brasileiro com maturidade fixa de 1 ano. Com diversos patamares desde a crise financeira internacional essa taxa, assim como as de outras maturidades, diminuiu nos últimos meses. Nesse caso, desde dezembro de 2015, quando atingiu a máxima histórica do período analisado, a queda até dezembro de 2017 foi de 9.33 pontos percentuais, ou 58,7%. Os motivos para tal comportamento ao final da série podem estar relacionadas ao cenário de queda na expectativa de inflação e na inflação realizada, com cenário externo relativamente tranquilo. Os motivos, consequências e previsões, no entanto, não são de interesse do presente trabalho.

Com intuito de comparação, o *treasury* de um ano é apresentado (*bond* dos Estados Unidos):

A figura dos *treasuries* de um ano relata como, para a mesma maturidade, o comportamento dos *yields* brasileiros e dos Estados unidos são totalmente distintos, tanto em nível quanto

Figura 1 – Yield – DI-Futuro de 1 Ano - % ao Ano

Fonte: Bloomberg

Figura 2 – Yield – Treasuries de 1 Ano - % ao Ano

Fonte: Bloomberg

nas aparentes tendências. Enquanto as duas taxas tiveram picos locais próximo da crise financeira, no início das séries, o *yield* de um ano norte americano permaneceu durante vários meses com taxas próximas de 0%, e, desde o início de 2015, apresenta tendência positiva, característica totalmente oposta a do Brasil.

4 Modelo Estimado

As seções seguintes, relacionadas ao modelo estimado, são baseadas em Byrne Cao e Korobilis (2017), Moench, Ng e Potter (2013), Lutkepohl(2006) e em Higham(2009).

4.1 DHFM - Estrutura

Como relatado na revisão de literatura, há trabalhos que tentam encontrar relações entre juros de diferentes países, os quais obtiveram respostas positivas para o questionamento de as taxas de juros nacionais terem influência internacional, ou seja, se as taxas de um dado país, ou variáveis que possam alterá-las, como inflação e suas expectativas, causam impactos no nível ou na volatilidade, por exemplo, de taxas em outros países, e não efeitos puramente nos *yields* nacionais.

Dessa forma, alguns trabalhos acadêmicos visam relações entre diversas estruturas a termo da taxa de juros, e uma das maneiras para executar essa análise é pela estimação de fatores globais para uma curva de juros supranacional. Por exemplo, em Diebold, Li e Yue (2008), a estimação dos fatores globais é executada em dois passos: no primeiro, são obtidos os fatores latentes de cada país seguindo a metodologia de Nelson e Siegel para modelagem do *cross-section* dos *yields*, fixando o parâmetro de decaimento, o que torna o modelo linear e tem como consequência deixar os *loadings* dos fatores de inclinação e curvatura constantes, em qualquer tempo estimado. Na sequência, os fatores de cada país obtidos são utilizados para obter os fatores globais.

A estimação dos fatores da curva de juros global foi executada a partir de um *Dynamic Hierarchical Factor Model* (DHFM). A metodologia seguida toma como base o trabalho de Byrne, Cao e Korobilis (2016), que aplicam a metodologia para dados financeiros, e em Moench, Ng e Potter (2013), que utilizam e sugerem o DHFM para aplicações no âmbito econômico, sem, entretanto, tratar de estrutura a termo da taxa de juros. Com o método proposto é possível obter a estimação da curva de juros global em um único passo. De forma abrangente, o modelo, no presente trabalho, tem como objetivo estimar os fatores latentes globais, representados por G , através do *cross-section* dos *yields* dos países $b = 1, ..B$ em cada período de tempo $t = 1...T$, para nos permitir a execução das funções impulso resposta das variáveis de interesse. Os fatores latentes nacionais são dados por F_{bt} , enquanto F_t inclui todos os F_{bt} . O modelo, com os *yields*

dos títulos denominados por X_{bt} , é dado por:

$$X_{bt} = \Lambda^F_b F_{bt} + \epsilon^X_{bt} \quad (4.1)$$

$$F_t = \Lambda^G G_t + \epsilon^F_t \quad (4.2)$$

$$G'_t = \Psi^G G'_{t-1} + \xi^G_t \quad (4.3)$$

sendo $X_{bt} = (X_{1bt}, \dots, X_{N_b bt})'$. Os parâmetros são dados por Λ^F_b , Λ^G e por Ψ^G , enquanto ϵ^X_{bt} e ϵ^F_t são os termos de erro. A matriz de covariância dos resíduos da equação (4.3) é considerada irrestrita. A equação (1) representa a curva de juros no nível nacional, com X_{ibt} sendo o *yield* do título para o país b , na maturidade i , no tempo t , e F_{bt} é o vetor que contém os fatores latentes (não observáveis) do país b . Na equação (4.2), que relaciona os *yields* nacionais e globais, G_t possui os fatores latentes globais que direcionam os fatores latentes nacionais. Já (4.3) mostra um processo autoregressivo para a dinâmica dos fatores globais.

Tratando de cada equação separadamente, o primeiro passo é criar blocos com os *yields* de cada país, $b = 1, 2, \dots, B$, sendo B o número de países incluídos no estudo. Cada país tem os *yields* escritos da forma $X_{bt} = (X_{1bt}, \dots, X_{N_b bt})'$ em (4.1), onde X_{bt} é um vetor $N_b \times 1$ do país b para suas diferentes maturidades ($N_b = 12$). F_{bt} é um vetor $k_b \times 1$ dos fatores latentes (não observáveis) dos *yields* em nível nacional ($k_b=2$, nível e inclinação), Λ^F_b é matriz de coeficientes de dimensão $N_b \times k_b$ (12×2) e ϵ^X_{bt} é o vetor de componentes idiossincráticos. Em (4.2), $F_t = (F_{1,t}, F_{2,t}, \dots, F_{B,t})'$ é vetor $K^F \times 1$. Com quatro países e dois fatores, o vetor tem 8 componentes: nível e inclinação de cada país. O lado direito da equação apresenta o vetor G_t , $K^G \times 1$, no qual K^G é o número de fatores comuns globais, Λ^G é uma matriz $K^F \times K^G$ e ϵ^F_t representa os componentes específicos de cada país no nível nacional-global. Em (4.3), os fatores globais são determinados seus valores anteriores e pelas inovações, $\epsilon^G_t \sim N(0, \Sigma^G)$, com Σ^G irrestrita. As dimensões são apresentadas cada período de tempo, e não para a amostra como um todo. Nas equações (4.1), (4.2) e (4.3) somente X_{bt} é observável (*yields* de cada país), enquanto os coeficientes e variáveis restantes são, obviamente, não observáveis, e precisam de chutes iniciais para a estimação do modelo ou, de alguma forma, serem fixadas na estimação. Essa última opção foi adotada para o coeficiente Λ^F_b (fatores de Nelson e Siegel), com lógica considerada como em Diebold, Li e Yue (2008).

O modelo é completado por:

$$\epsilon_{bt}^X = \Psi_b^X \epsilon_{b,t-1}^X + \xi_{b,t}^X \quad (4.4)$$

$$\epsilon_t^F = \Psi^F \epsilon_{t-1}^F + \xi_t^F \quad (4.5)$$

com $\Psi_b^X (Nb \times Nb)$ e $\Psi^F (K^F \times K^F)$, matrizes diagonais de coeficientes $\xi_{b,t}^X \sim N(0, \Sigma_b^X)$ e $\xi_t^F \sim N(0, \Sigma^F)$. Ou seja, os resíduos das equações (4.1) e (4.2) têm relação com os resíduos do período imediatamente anterior, sendo mais persistente quanto maiores os valores dos respectivos coeficientes Ψ . Essa representação do modelo torna mais fácil a visualização dos passos da estimação

É feita uma extensão do modelo apresentado acima para incluir as variáveis macroeconômicas e financeiras em (4.3), assim como em Byrne, Cao e Korobilis (2017), sendo reescrita como:

$$G'_t = \begin{pmatrix} M_t \\ G_t \end{pmatrix} = \Psi^G \begin{pmatrix} M_{t-1} \\ G_{t-1} \end{pmatrix} + u_t \quad (4.6)$$

$$u_t \sim N(0, \Sigma^G) \quad (4.7)$$

onde Σ^G é a matriz de covariância de u_t e M_t representa as variáveis econômicas e financeiras citadas anteriormente. O método permite extrair, cada período de tempo, os fatores latentes globais, que podem ser comparados com os fatores nacionais e variáveis macroeconômicas globais através de um modelo *Factor Augmented Vector Autoregressive* (FAVAR). As variáveis macroeconômicas inclusas servem para isolar efeitos dos *yields*, o que deve melhorar a interpretação das funções impulso resposta. Como são acrescentadas variáveis macroeconômicas e financeiras (produção industrial global, inflação global, *fed funds*, *VIX* e Nível da curva de juros brasileira), G'_t é vetor de dimensão $(5+K^G)$, com $K^G=2$.

A equação (4.1) relaciona os *yields* nacionais, dados, com os *factor loadings*, Λ_{Fb} , fixados, dadas as maturidades, para obter os fatores latentes nacionais, F_{bt} . Na sequência das equações, esse vetor obtido é utilizado para obter G_t , ou os fatores globais da curva de juros que, por fim, são colocados juntamente com variáveis macroeconômicas e financeiras na equação (4.3). Para cada país são considerados dois fatores, nível e inclinação. De acordo com Byrne, Cao e Korobilis (2016), o fator curvatura faz diferença nas *premium dynamics* se as variáveis macroeconômicas não são consideradas na estimação. Com a inclusão das variáveis citadas, a adição de mais fatores

não altera a *premium dynamics*, e, assim, consideram a parametrização mais parcimoniosa com menos fatores. Como o presente estudo foi desenvolvido com dados de quatro países, com cada *cross-section* representado por dois fatores latentes, F_{bt} , de dimensão 2×1 , e F_t , de dimensão 8×1 . A matriz “aumentada” G'_t na equação (4.6) contém tanto os fatores globais da curva de juros quanto variáveis macroeconômicas e financeiras. Como relatado em Byrne, Cao e Korobilis (2016), as variáveis macroeconômicas utilizadas são usuais em modelagens de estrutura a termo da taxa de juros, enquanto a inclusão de alguma variável financeira é feita para considerar as chamadas “condições financeiras”, relacionadas ao risco de crédito e de liquidez. O presente trabalho inclui, junto com variáveis macroeconômicas e financeiras na matriz G'_t , na equação (4.6), o nível da curva de juros brasileira, o que permite a comparação entre a curva nacional e as outras variáveis incluídas no modelo, ou seja, G'_t , aumentada, é um vetor com sete variáveis.

O modelo Dynamic Hierarchical Factor Model (DHFM) é utilizado por conter uma série de vantagens em relação a possíveis concorrentes na forma de obter fatores globais. Uma das estimações mais rápidas e simples que poderia ser utilizada para estimar fatores globais seria utilizar da técnica dos componentes principais. Com essa, é possível obter fatores globais dos fatores nacionais, obtidos dos *yields*. Outra opção seria estimar um modelo como proposto em Diebold Li e Yue (2008), modelo aplicado em dois passos. A metodologia dos componentes principais tem como hipótese que os dados utilizados tenham T e N grandes, ou seja, uma base com muitos períodos de tempo e muitas variáveis, o que não é o caso no presente trabalho, já que $N=4$ países. Além disso, leva em consideração somente a variabilidade do *cross-section* dos dados, sem internalizar que os mesmos têm características de uma sequência temporal, ou seja, o modelo não capta a dinâmica temporal existente, além de não poder revelar a importância de choques estruturais. O artigo citado tem limitações diferentes: a informação dos fatores globais não é levada em conta quando se faz o *sampling* dos fatores dos países, por exemplo, e o modelo é estimado em dois passos, o que pode introduzir algum viés se não for considerada totalmente a dinâmica dos fatores em uma camada mais elevada do modelo. O DHFM apresenta avanços ao trazer estimativas coerentes dos fatores em diferentes níveis, podendo lidar, mas não precisando, de grande N ou T. Permite, também, levar em consideração tanto a parte do *cross-section* quanto a do *time series* para criar os fatores globais, e a adição de variáveis econômicas globais auxilia na compreensão do comportamento da curva de juros global, ao isolar os efeitos dessas importantes variáveis, e deixa em aberto a possibilidade de verificar como os fatores da curva considerada variam quando ocorrem choques em quaisquer variáveis de interesse.

Algumas restrições são impostas ao DHFM. Para cada país, Λ_b^F é fixado, dado que o parâmetro de decaimento λ é mantido constante em 0.0609, valor padrão apresentado na literatura. Nelson e Siegel (1987) afirmam que não há grande ganho prático em escolher o parâmetro de decaimento individualmente, enquanto Byrne, Cao e Korobilis (2016) relatam que a escolha do parâmetro através de um *grid* de valores pode selecionar um valor que não é ótimo. Como tratamos de uma curva de juros global, considerar um fator de decaimento adequado para o mercado mais importante do mundo não aparenta ser motivo de preocupação para a análise. Em Λ^G , o bloco de coeficientes correspondente a cada país é diagonal, ou seja, não há relação contemporânea entre os fatores de nível e inclinação globais e nacionais. Além disso, os coeficientes em Λ^G ligados aos fatores dos Estados Unidos, primeiro país considerado pela ordenação do trabalho, são fixados em um bloco diagonal com valores 1, para a identificação da metodologia, que permaneceria correta mesmo com possíveis alterações do modelo DHFM (Bai e Wang, 2012).

Os valores obtidos de G_t em cada iteração (desconsiderando os fatores macroeconômicos e financeiros) representam os fatores de nível e inclinação globais e, com estes, é possível construir a curva de juros global.

4.2 Modelo Nelson-Siegel - Restrições

Seguindo Diebold, Li e Yue (2008), podemos utilizar dos fatores nível e inclinação da ETTJ para estimação. A equação para os *yields*, é dada em (4.1). Os fatores de nível e inclinação, em F_{bt} , são também chamados na literatura de L_t^{NS} e S_t^{NS} , respectivamente. A restrição imposta no modelo é de fixar os *factor loadings*, com $\lambda=0,0609$. Enquanto o fator de nível dá peso uniforme para todas as maturidades, o fator inclinação (*spread* entre os *yields* longos e curtos) dá peso maior para maturidades curtas. Com Λ fixo, temos Λ_b^F fixado na equação (4.1). Outra restrição imposta é a de que Λ^G é uma matriz de blocos diagonais. Essa formulação tem como consequência que os fatores de nível e inclinação são conduzidos apenas pelos respectivos fatores globais, ou seja, sem influências entre os níveis e as inclinações nacionais e globais.

4.3 Gibbs Sampling - Estimação

Para estimação foi utilizado o *software* Matlab, tomando de referência o código de Moench, Ng e Potter (2013) que, entretanto, não trata sobre curvas de juros, e executa o modelo com um nível a mais que o necessário no presente trabalho. Para descrever o processo, denominamos

Λ de cada país, além de Λ^G , na matriz Λ . Ψ incluirá $(\Psi^{X_1}, \Psi^{X_2}, \dots, \Psi^{X_B})$, Ψ^G e Ψ^F , e Σ será dada por $(\Sigma^{X_1}, \Sigma^{X_2}, \dots, \Sigma^{X_B})$, Σ^F e Σ^G . É necessário estimar Λ , Ψ e Σ , e, para tal, é utilizado um MCMC (Markov Chain Monte Carlo). O modelo bayesiano utiliza *Gibbs Sampling*, com 100.000 iterações, das quais são salvas somente 1000 (*burn in* de 50.000, salvando uma a cada 50 das iterações restantes). Observados os valores de M_t e os valores iniciais de F_{bt} e G_t (obtidos por OLS, ao considerar Λ_b^F como os fatores fixados como em Diebold, Li e Yue(2008), e Λ^G como blocos de matrizes identidade), são executadas as iterações, sendo que, para cada uma, são executados os seguintes passos, considerando toda a amostra dos dados:

1. Obter G_t condicional em F_t , Λ , Ψ e Σ .
2. Obter Ψ^G condicional em Σ^G , G_t e M_t .
3. Obter Σ^G condicional em G_t , Ψ^G e M_t
4. Obter Λ^G condicional em G_t e F_t .
5. Para cada b , obter $F_{b,t}$ condicional em G_t , Λ , Ψ e Σ
6. Para cada b , obter b_{th} elementos de Ψ^F e Σ^F condicional em G_t e F_t .
7. Para cada b , obter Λ_b^F , Ψ_b^X e Σ_b^X condicional em F_t e X_{bt} .

Assim como em Diebold, Li e Yue (2008), Moench, Ng e Potter (2013) e Byrne, Cao e Korobilis (2017), os elementos de Λ e Ψ tem prioris normais, enquanto Σ segue uma distribuição gama inversa, simplificando a distribuição *posteriori*. O trabalho segue Kim e Nelson (1999) e Carter e Kohn (1994) para rodar FFBS (*Forward Filtering Backward Sampling*), apresentado na seção seguinte, que consiste em obter uma estimativa para os fatores globais e fatores locais através de um filtro de Kalman, seguido da metodologia de Carter e Kohn (1994) para realizar o *smoothing*. A matriz Ψ^G , estimada, será utilizada para obter as funções impulso resposta das variáveis de interesse, como a variação do nível da curva de juros brasileira dado um choque na curva de juros global.

4.4 Forward Filtering Backward Smoothing (FFBS) - Estimação

Apresentadas as equações na seção 4.1 e os passos executados em cada iteração do *Gibbs Sampling* em *Gibbs Sampling* - Estimação, essa seção, mais técnica, mostra a construção, de forma generalizada, das matrizes para a estimação de G_t e F_t , vetores atualizados em cada iteração. Para tal, parte-se das equações (4.2) e (4.1), respectivamente, que servem como base para as

equações de medida dos respectivos filtros de Kalman. Como temos as equações (4.4) e (4.5), temos de escrever as matrizes na estimação considerando que (4.2) e (4.1) têm resíduos que dependem dos resíduos passados. No presente trabalho, as equações (4.4) e (4.5) são executadas com um *lag*.

Sampling G_t

$$F_t = \Lambda_G(L)G_t + \epsilon_{Gt} \quad (4.8)$$

Com erros iid, temos:

$$\Psi_F(L)F_t = \Psi_F(L)\Lambda_G G_t + \epsilon_{Gt} \quad (4.9)$$

onde abreviaremos $\tilde{F}_t = \Psi_F(L)F_t$ e $\tilde{\Lambda}_G(L) = \Psi_F(L)\Lambda_G(L) = \Lambda_{G0} + \Lambda_{G1}L + \dots$ com índice de F ate $q_F + s_F$, onde o primeiro desses termos é o lag de F e o segundo o lag de seu coeficiente.

Acumulando os *lags* de G , temos a *companion form*:

$$\tilde{F}_t = [\tilde{\Lambda}_{G0} \quad \tilde{\Lambda}_{G1} \quad \dots \quad \tilde{\Lambda}_{G_{s^*_F}}] \begin{pmatrix} G_t \\ G_{t-1} \\ \dots \\ G_{t-s^*_F} \end{pmatrix} + \epsilon_{Gt} \quad (4.10)$$

$$\begin{pmatrix} G_t \\ G_{t-1} \\ G_{t-2} \\ \dots \\ G_{t-s^*_{G+1}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{G1} & \dots & \Psi_{G_{q_G}} & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & I & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & I & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} G_{t-1} \\ G_{t-2} \\ G_{t-3} \\ \dots \\ G_{t-s^*_G} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{Ft} \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denotaremos Ξ_G o conjunto de parametros $(\Lambda_G, \Psi_G, \Sigma_G, \Sigma_F)$. Então, seguindo Carter e Kohn (1994), a distribuição condicional dos fatores globais, dados os fatores nacionais e Ξ_G , pode ser obtida ao executar o filtro de Kalman para obter os parâmetros $G_{T|T}$ dos fatores e sua matriz de covariância $P_{T|T}$ no período T , baseado em toda a informação disponível na amostra:

$$\vec{G}_{t+1|t} = \vec{\Psi}_G \vec{G}_{t|t} \quad (4.11)$$

$$\vec{P}_{G_{t+1|t}} = \vec{\Psi}_G \vec{P}_{t|t} \vec{\Psi}_G^T + \vec{\Sigma}_G \quad (4.12)$$

$$\vec{G}_{t|t} = \vec{G}_{t|t-1} + \vec{P}_{G_{t|t-1}} \vec{\Lambda}'_G (\vec{\Lambda}_G \vec{P}_{t|t-1} \vec{\Lambda}'_G + \vec{\Sigma}_G)^{-1} \quad (4.13)$$

$$\vec{P}_{G_{t|t}} = \vec{P}_{G_{t|t-1}} - \vec{P}_{G_{t|t-1}} \vec{\Lambda}'_G (\vec{\Lambda}_G \vec{P}_{G_{t|t-1}} \vec{\Lambda}'_G + \vec{\Sigma}_G)^{-1} \vec{\Lambda}_G \vec{P}_{G_{t|t-1}} \quad (4.14)$$

A seguir, fizemos o *draw* de \vec{G}_T da distribuição condicional dado Ξ_G e os dados até o período T:

$$\vec{G}_T | \tilde{F}_T, \Xi_G \sim N(\vec{G}_{T|T}, \vec{P}_{FT|T}) \quad (4.15)$$

Então, para $t = T - 1, \dots, 1$ é feito o *backward sampling*, gerando *draws* de

$$\vec{G}_{t|T} | \vec{G}_{t+1}^*, \tilde{F}_T, \Xi_G \sim N(\vec{G}_{t|t, \vec{G}_{t+1}^*}, \vec{P}_{t|t, \vec{G}_{t+1}^*}) \quad (4.16)$$

Onde

$$\vec{G}_{t|t, \vec{G}_{t+1}^*} = \vec{G}_{t|t} + \vec{P}_{t|t} \Psi_{G'}^* (\Psi_{G'}^* \vec{P}_{t|t} \Psi_{G'}^{*'} + \Omega_G^*)^{-1} (\vec{G}_{t+1}^* - \Psi_G^* \vec{G}_{t|t}) \quad (4.17)$$

$$\vec{P}_{t|t, \vec{G}_{t+1}^*} = \vec{P}_{t|t} - \vec{P}_{t|t} \Psi_{G'}^* (\Psi_{G'}^* \vec{P}_{t|t} \Psi_{G'}^{*'} + \Omega_G^*)^{-1} \Psi_G^* \vec{P}_{t|t} \quad (4.18)$$

onde Ω_G^* representa o bloco $K_F x K_F$ de Ω_G , positivo definido, e \vec{G}_t^* e Ψ_t^* representam as primeiras K_F linhas de \vec{G}_t e Ψ_t , respectivamente. O filtro de Kalman foi inicializado com média e variâncias incondicionais dos estados \vec{G} .

Sampling F_t

Um algoritmo similar é utilizado para obter cada *sample* de F . Como a dinâmica desses blocos é assumida como independente, isso pode ser feito bloco por bloco. Relembre que:

$$\tilde{X}_{bt} = \tilde{\Lambda}_{Fb}(L) F_{bt} + \epsilon_{Xbt}, \quad \forall b = 1, \dots, B \quad (4.19)$$

onde $\tilde{X}_{bt} = \Psi_{Xb}(L) X_{bt}$ e $\tilde{\Lambda}_{Fb}(L) = \Psi_{Xb}(L) \Lambda_{Gb}(L)$ tem dimensão $N_b \times K_b$ de ordem $s_G^* = q_X + s_G$. Além disso:

$$\begin{pmatrix} F_{bt} \\ F_{bt-1} \\ F_{bt-2} \\ \dots \\ F_{bt-qG+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{Gbt} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_{Fb1} & \dots & \Psi_{FqbF} & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & I & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & I & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{bt-1} \\ F_{bt-2} \\ F_{bt-3} \\ \dots \\ F_{bt-qG} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{Fbt} \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde $\alpha_{Gbt} = \Psi_{Fb}(L) \Lambda_G(L) G_t$, $\forall b = 1, \dots, B$. Essas duas equações, conjuntamente, implicam na seguinte *state space form*:

$$\tilde{X}_{bt} = [\tilde{\Lambda}_{Fb0} \quad \tilde{\Lambda}_{Fb1} \quad \dots \quad \tilde{\Lambda}_{Fbs_G^*}] \begin{pmatrix} F_{bt} \\ F_{bt-1} \\ \dots \\ F_{bt-s_F^*} \end{pmatrix} + \epsilon_{Xbt} \quad (4.20)$$

$$\begin{pmatrix} F_{bt} \\ F_{bt-1} \\ F_{bt-2} \\ \dots \\ F_{bt-qG+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{Gbt} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_{Fb1} & \dots & \Psi_{FqbF} & 0 & \dots & 0 \\ I & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & I & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & I & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{bt-1} \\ F_{bt-2} \\ F_{bt-3} \\ \dots \\ F_{bt-qG} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{Fbt} \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$\tilde{X}_{bt} = \vec{\Lambda}_{Fb} \vec{F}_{bt} + \epsilon_{Xbt} \quad (4.21)$$

$$\vec{\Psi}_{Fb}(L) \vec{F}_{bt} = \vec{\alpha}_{Gbt} + \vec{\epsilon}_{Xbt} \quad (4.22)$$

Denotaremos Ξ_{Fb} o conjunto de parâmetros $(\Lambda_{Fb}, \Psi_{Fb}, \Sigma_{Fb}, \Sigma_{Xb})$. Condicional em Ξ_{Fb} e G_{bt} , as equações acima representam um modelo *state space* com intercepto variante no tempo. Assim, temos de ajustar o método de Carter e Kohn (1994) escrito anteriormente. Como antes, o filtro de Kalman é executado, mas agora considerando Λ_{Fb} .

$$\vec{F}_{t+1|t} = \alpha_{Gbt} + \vec{\Psi}_{Fb} \vec{F}_{bt|t} \quad (4.23)$$

$$\vec{P}_{Fbt+1|t} = \vec{\Psi}_{Fb} \vec{P}_{Fbt|t} \vec{\Psi}_{Fb}^T + \vec{\Sigma}_{Fb} \quad (4.24)$$

$$\vec{F}_{bt|t} = \vec{F}_{bt|t-1} + \vec{P}_{Fbt|t-1} \vec{\Lambda}'_{Fb} (\vec{\Lambda}_{Fb} \vec{P}_{Fbt|t-1} \vec{\Lambda}'_{Fb} + \vec{\Sigma}_{Fb})^{-1} \quad (4.25)$$

$$\vec{P}_{Fbt|t} = \vec{P}_{Fbt|t-1} - \vec{P}_{Fbt|t-1} \vec{\Lambda}'_{Fb} (\vec{\Lambda}_{Fb} \vec{P}_{Fbt|t-1} \vec{\Lambda}'_{Fb} + \vec{\Sigma}_{Fb})^{-1} \vec{\Lambda}_{Fb} \vec{P}_{Fbt|t-1} \quad (4.26)$$

Novamente, o filtro é inicializado com média e covariância incondicional dos estados. As iterações nos retornam as distribuições condicionais de $F_{bt|T}$ dado Ξ_{Fb} e os dados até o período T :

$$\vec{F}_{bT} | \tilde{X}_{bt}, \Xi_{Fb} \sim N(\vec{F}_{bT|T}, \vec{P}_{FbT|T}) \quad (4.27)$$

Dada a estrutura markoviana e gaussiana do *state space model*, a distribuição de \vec{G}_{bt} dado \vec{G}_{bt+1} e \tilde{X}_{bt} é normal:

$$\vec{F}_{bT} | \tilde{X}_{bt}, \vec{F}_{bt+1}^*, \Xi_{Fb} \sim (\vec{F}_{bt|t, \vec{F}_{bt+1}^*}, \vec{P}_{Fbt|t, \vec{F}_{bt+1}^*}) \quad (4.28)$$

Onde

$$\vec{F}_{bt|t, \vec{F}^*_{bt+1}} = E[\vec{F}_{bt} | \vec{X}_{bt|t}, \vec{F}^*_{bt+1}] \quad (4.29)$$

$$= \vec{F}_{t|t} + \vec{P}_{Fbt|t} \Psi_{Fb}^{*\prime} (\Psi_{Fb}^* \vec{P}_{Fbt|t} \Psi_{Fb}^{*\prime} + \Sigma_{Fb}^*)^{-1} (\vec{F}^*_{bt+1} - \vec{\alpha}_{bt+1} - \Psi_{Fb}^* \vec{F}_{bt|t}) \quad (4.30)$$

$$\vec{P}_{Fbt|t, \vec{F}^*_{bt+1}} = Var(\vec{F}_{bt} | \vec{X}_{bt}, \vec{F}^*_{bt+1}) \quad (4.31)$$

$$= \vec{P}_{Fbt|t} - \vec{P}_{Fbt|t} \Psi_{Fb}^{*\prime} (\Psi_{Fb}^* \vec{P}_{Fbt|t} \Psi_{Fb}^{*\prime} + \Sigma_{Fb}^*)^{-1} \Psi_{Fb}^* \vec{P}_{Fbt|t} \quad (4.32)$$

e onde \vec{F}^*_{bt+1} e $\vec{\Psi}^*_{Fb}$ denotam as primeiras k_b linhas de \vec{F}_{bt+1} e $\vec{\Psi}_{Fb}$, respectivamente. Dadas essas distribuições condicionais, podemos executar o *backward sampling*, gerando *draws* de \vec{F}^*_{bt} para $t = T - 1, \dots, 1$.

A equação de transição de G_t é de extrema importância, sendo essa, basicamente, a equação (4.6) adaptada ao modelo proposto. Sua estimação permite a obtenção das funções impulso resposta entre fatores globais e variáveis macroeconômicas globais. Sua matriz de covariância é irrestrita, obtida de um VAR (Vetor Autoregressivo) bayesiano com a priori não informativa. Já a variável α_{Gbt} é o *link* entre os fatores globais e os fatores nacionais das curvas de juros. Como mostra a equação de transição de F_t , são levados em conta na estimação dos fatores nacionais os fatores globais.

4.5 Decomposição de Cholesky

Uma matriz A , $n \times n$, é positiva definida se a forma quadrática $x^T A x$ é positiva para todos os vetores de valores diferentes de zero, ou, de forma equivalente, se todos os autovalores de A são positivos. Matrizes positivas podem ser expressas no formato

$$A = X^T X \quad (4.33)$$

para uma matriz X não singular. A decomposição de Cholesky é uma forma particular de fatoração em que X é matriz triangular superior com elementos diagonais positivos e, consequentemente, X^T é matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos. No caso de um escalar, a decomposição de Cholesky retorna a raiz quadrada do mesmo elemento. Tal decomposição é utilizada na matriz de covariância do VAR com intuito de identificar os choques nas variáveis.

4.6 Função Impulso Resposta

Como relatado em Hamilton (1994), um modelo VAR(p) pode ser escrito como:

$$y_t = \Pi y_{t-1} + \epsilon_t \quad (4.34)$$

chamada de *companion form*, com y e ϵ de dimensão $p \times 1$.

Seguindo Hamilton(1994) e *How to calculate the impulse response function of a VAR(1)?* (<https://stats.stackexchange.com>), pela objetividade da explanação, a função impulso resposta é a derivada com respeito aos choques, pois o modelo var pode ser escrito em como função dos resíduos. Para o horizonte h , um choque na variável j

$$\partial y_{t+h} / \partial \epsilon_{j,t} = \partial (\Pi y_{t+h-1} + \epsilon_{t+h-1}) / \partial \epsilon_{j,t} \quad (4.35)$$

Ou seja, a derivada anula todos os termos menos o do horizonte h específico, dado por

$$\partial y_{t+h} / \partial \epsilon_{j,t} = \partial \Pi^h \epsilon_t / \partial \epsilon_{j,t} = \Pi^h e_j \quad (4.36)$$

sendo e_j a j -ésima linha da matriz identidade axa , e a o número de variáveis. Isto é, a resposta de todas as a variáveis no horizonte h a um choque na variável A_j é a j -ésima coluna de Π^h . Este é o não-ortogonalizado, sem identificação. Pode-se também aplicar algum esquema de identificação, como a decomposição de Cholesky. Dessa forma, é mais conveniente escrever o modelo no formato de média móvel:

$$y_t = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s \epsilon_{t-s} \quad (4.37)$$

O problema com essa interpretação é se os termos de erro são correlacionados, pois um choque exógeno na variável j seria simultaneamente correlacionado com um choque na variável k , por exemplo. A decomposição de Cholesky faz a ortogonalização das inovações. Supondo a matriz de covariância dos erros como Ω , decomposmos $\Omega = PP'$ e fizemos a relação $v_t = P^{-1} \epsilon_t$, na qual v_t são termos de erro com uma matriz identidade como matriz de covariância. Manipulando a equação anterior obtemos:

$$y_t = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s \epsilon_{t-s} = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s P P^{-1} \epsilon_{t-s} = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s^* v_{t-s} \quad (4.38)$$

onde $\Psi_s^* = \Psi_s P$. Ao final, considerando a resposta obtida de um choque ortogonalizado, temos:

$$\partial y_{t+h} / \partial v_{j,t} = \partial \left(\sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s^* v_{t+h-s} \right) / \partial v_{j,t} = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s^* e_j \quad (4.39)$$

4.7 Macro Spanning Conditions

Da mesma forma que em Byrne, Cao e Korobilis (2017), Joslin, Priebisch and Singleton (2014) e Coroneo, Giannone and Modugno (2015), são impostas as *knife-edge restrictions*, ou a chamada *Unspanned Macro Risks*. Isso implica que os fatores macroeconômicos não afetam os *yields* de forma contemporânea, os influenciando somente pela correlação com seus fatores. Com essa restrição, também, os fatores macroeconômicos não podem ser invertidos dos *yields*. No caso *fully spanned*, a utilização de somente fatores macroeconômicos no modelo pode ajustar os *yields* satisfatoriamente.

O modelo DHFM, como salientado, identifica os fatores tanto pela variância do *cross-section* quanto pelas propriedades de *time series* dos dados. A consequência disso é que, mesmo não sendo necessária a restrição de *Unspanned*, os fatores obtidos devem atender a verdadeira dinâmica e mitigar erros de especificação, como relata o artigo de Byrne, Cao e Korobilis (2017). A metodologia torna o possível erro na escolha da restrição insignificante. Um ponto fundamental é não confundir que as condições apresentadas impliquem que as variáveis macro tenham ou não tenham importância significativa nos *yields*. O caso *fully Spanned* não impõe que os fatores macroeconômicos tenham grande poder explanatório sobre os *yields*. As condições dizem respeito sobre se os fatores dos títulos contém toda a informação de variáveis macroeconômicas que podem ser utilizadas para estimar o prêmio a termo, que é sempre uma função linear dos fatores macroeconômicos em um modelo macro-financeiro, independentemente de os fatores serem *Spanned* ou não.

5 Resultados

5.1 Curva de Juros Global

Estimado o modelo, os primeiros dados analisados são os da curva de juros global construída pelo modelo DHFM. A curva foi obtida através dos fatores estimados. Abaixo, são descritos alguns dados, relacionados por suas respectivas maturidades.

Tabela 2 – Yields Globais (% ao Ano)

Maturidade	3 Meses	6 Meses	1 Ano	2 Anos	3 Anos	4 Anos
Média	1.39	1.48	1.63	1.85	1.99	2.09
Mínimo	0.69	0.87	1.15	1.45	1.54	1.59
Máximo	2.55	2.67	2.86	3.14	3.33	3.45
Maturidade	5 Anos	6 Anos	7 Anos	8 Anos	9 Anos	10 Anos
Média	2.16	2.21	2.24	2.27	2.29	2.31
Mínimo	1.63	1.65	1.66	1.67	1.67	1.68
Máximo	3.54	3.60	3.65	3.68	3.71	3.74

Fonte: Elaborado pelo Autor

A Tabela 2 relata como os *yields* globais são considerados baixos para os padrões brasileiros, o que já era esperado, já que consideramos, além do Brasil, somente países desenvolvidos e que tiveram longos períodos com taxas de juro muito baixas, inclusive próximas de zero, como os *treasuries* dos Estados Unidos. O valor médio dos *yields* tem relação direta com a maturidade, comportamento usual indicado pela literatura: quanto maior a maturidade maiores tendem a ser os riscos incorridos, e maior o *yield* para compensar tal fato. A diferença entre as taxas dos títulos com maturidade de um ano e de dez anos é significativa, mas menor do que 1%. O período pós crise financeira de 2008, influenciado pelos *quantitative easings*, tem grande influência nas médias, mas podem ser vistos de forma mais clara pelos *yields* mínimos: os de taxas curtas se apresentaram próximos de zero. Nenhum dos países apresentou *yields* menores do que zero no período, e essa característica se manteve na curva global, extraída dos mesmos. Entretanto, alguns países não adicionados na análise, como o Japão e Alemanha, não respeitaram a “*zero lower bound*”, com taxas negativas em maturidades curtas, como mostram dados observados no *software* Bloomberg. Ou seja, seus compradores, pelo menos em casos sem deflação, estavam dispostos a pagar para emprestar parte de sua riqueza. Com mais países desenvolvidos incluídos no estudo, como alguns da zona do Euro, os *yields* globais deveriam ser ainda menores que os aqui apresentados. A média dos *yields* entre os países adotados no estudo resultaria em um

“*yield* global” de 3.14% ao ano para a maturidade de 3 meses, bem acima do 1.34% a.a. obtido pelo modelo DHFM. O *yield* global máximo para a maturidade de 10 anos se apresentou bem próximo do correspondente americano.

Para melhor visualização da curva de juros global, é apresentada a Figura 3, abaixo, contendo seus *yields* para duas maturidades distintas, durante todo período estudado. A fim de comparação, a Figura 4 faz o mesmo, entretanto, utiliza dos dados brasileiros.

Figura 3 – Curva de Juros Global - % ao Ano



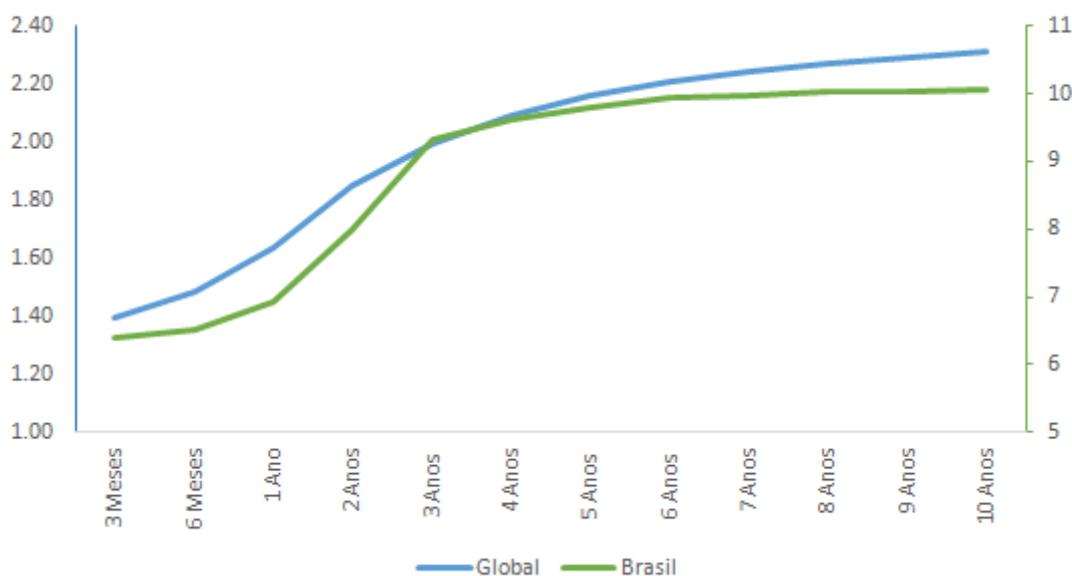
Figura 4 – Curva de Juros Brasileira - % ao Ano



A figura acima apresenta a evolução das taxas de DI-Futuro brasileiro, na maturidade de 1 ano e na maturidade de 5 anos. Mesmo com as duas figuras apresentando convergências e

divergências entre as respectivas curvas, no caso global as mesmas têm *spread* com menor variabilidade que as correspondentes brasileiras. Em alguns períodos, inclusive, os *yields* brasileiros com maturidade de um ano superaram os *yields* de cinco anos (final de 2014, início de 2015 e meados de 2016), tamanhas as incertezas com relação à economia brasileira no curto prazo, fato não observado na curva de juros global.

Figura 5 – Curva de Juros – *Cross-section* - Curva global e Brasileira - % ao Ano



Fonte: Elaborado pelo Autor

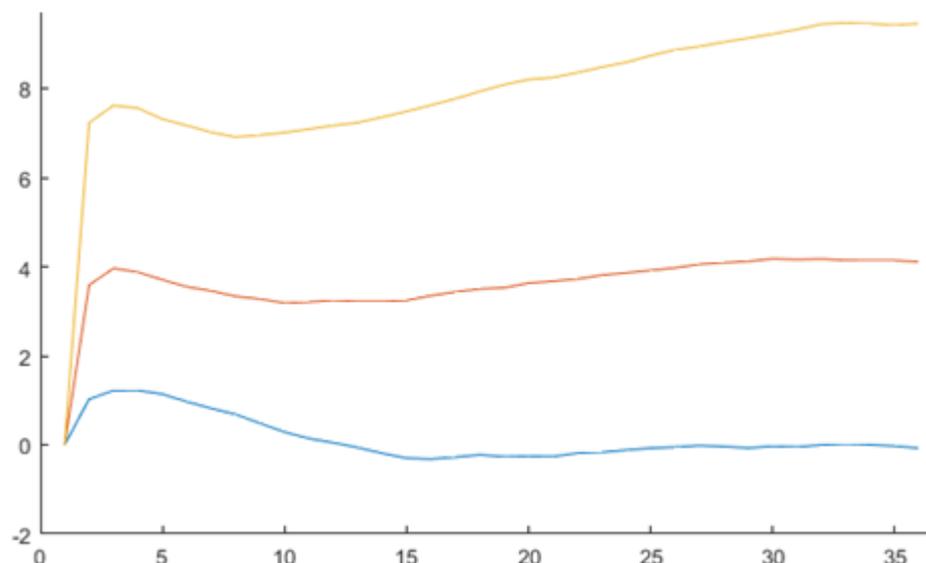
Já a Figura 5 mostra a curva de juros global estimada e a curva de juros brasileira, para as mesmas maturidades, em Novembro de 2017. A curva de juros global e a curva de juros brasileira são representadas pelas cores azul e verde, com eixos do lado esquerdo e direito, respectivamente. Pode-se observar que, nesse mês, ambas têm inclinação positiva, com formatos similares. Entretanto, o nível das duas curvas é bem diferente: enquanto a curva global tem taxas médias próximas de 2,30% ao ano para a maturidade de 10 anos, a curva de juros brasileira, para mesma maturidade, apresenta taxas médias acima de 10% ao ano. Esses dados evidenciam o quanto a estrutura a termo da taxa de juros brasileira está longe do baixo patamar atingido por países desenvolvidos.

5.2 Funções Impulso Resposta

Além dos resultados apresentados na seção anterior, são estimadas as funções impulso resposta de algumas variáveis de interesse. Em cada figura a seguir, como de forma usual, o eixo

horizontal representa os h períodos após o choque, e o eixo vertical a resposta ao choque em alguma variável escolhida. A linha intermediária, em cada caso, representa a média da resposta de uma variável, para cada h , em relação ao choque inicial em outra determinada variável, com as linhas superior e inferior relatando os percentis de 10 e 90 por cento dos mesmos choques nas 1000 *samples*.

Figura 6 – Função Impulso Resposta – Resposta no Nível da Curva Brasileira (Choque no Nível Global)

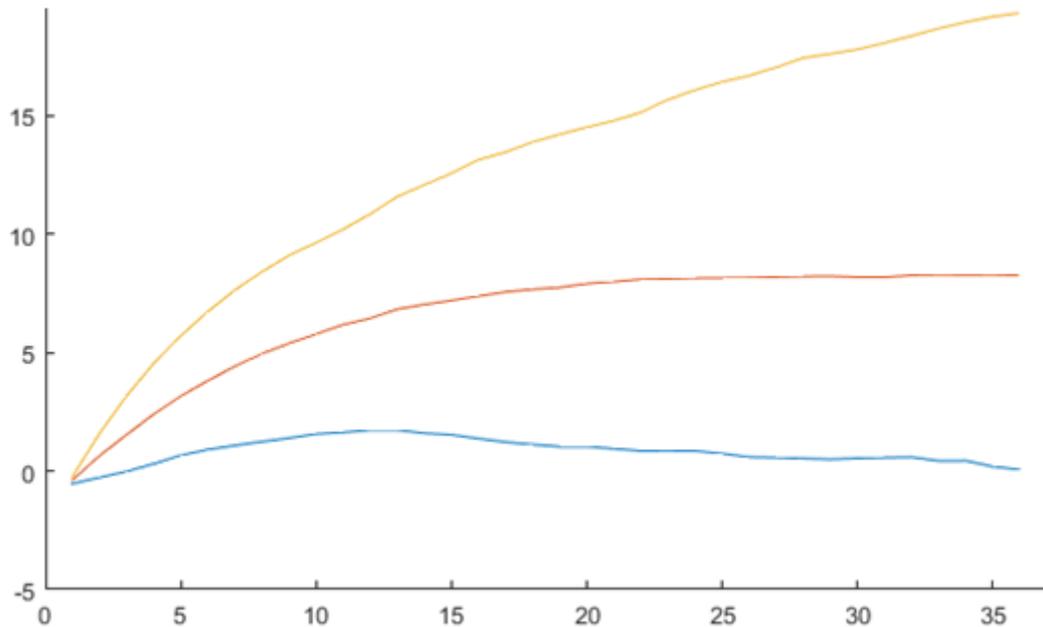


Fonte: Elaborado pelo Autor

A Figura 6 mostra a reação do nível da curva de juros brasileira a um choque no nível da curva de juros global. O resultado diz que um choque global positivo afeta em poucos horizontes (meses) a curva de juros brasileira na mesma direção, e mais, que a resposta é forte e muito persistente. Isso implica que a curva de juros brasileira está muito sujeita ao cenário externo. O cenário econômico brasileiro atual, de meados de Maio de 2018, pós dados da estimação, parece sugerir que os juros brasileiros podem se modificar bastante por fatores externos. Para obter indícios, novos estudos, com dados mais recentes, teriam grande valor.

A comparação do nível da curva de juros brasileira com choques na taxa de juros mais importante do mundo (*fed funds*, taxa de juros dos Estados Unidos) também foi estimada, e apresentada abaixo. Um choque nos *fed funds* parece ter um efeito maior no nível da curva de juros brasileira ao longo do tempo, mas com efeito em formato mais gradual. O resultado dá indícios de que a curva de juros brasileira responde mais aos juros dos Estados Unidos que aos juros de outros países. Entretanto, essa afirmação não é necessariamente verdadeira pelos resultados, pois a estamos comparando com um choque em uma taxa específica, e não com algum

Figura 7 – FIR – Resposta no Nível da Curva Brasileira(Choque nos Fedfunds)

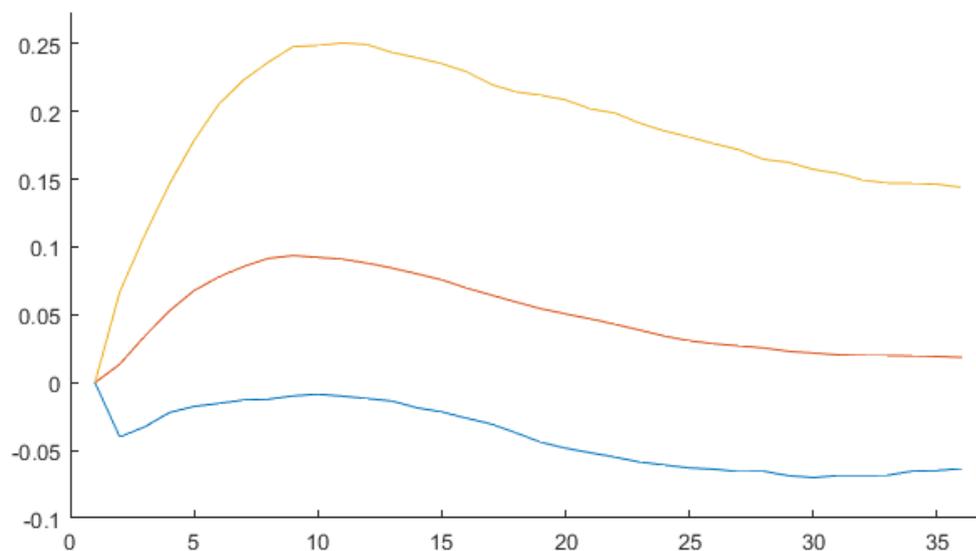


Fonte: Elaborado pelo Autor

dado que represente todos o *cross-section* dos *yields*. Apesar de o Brasil ser um país considerado comercialmente fechado, com relativamente pouca influência externa no PIB, devido às baixas importações e exportações como percentual do produto interno bruto, o mesmo parece longe de ser válido para as taxas de juros, que parecem responder e muito aos dados internacionais.

Com intuito de comparação, a Figura 8 relata a lógica oposta, de como um choque no nível brasileiro afeta os *fed funds*.

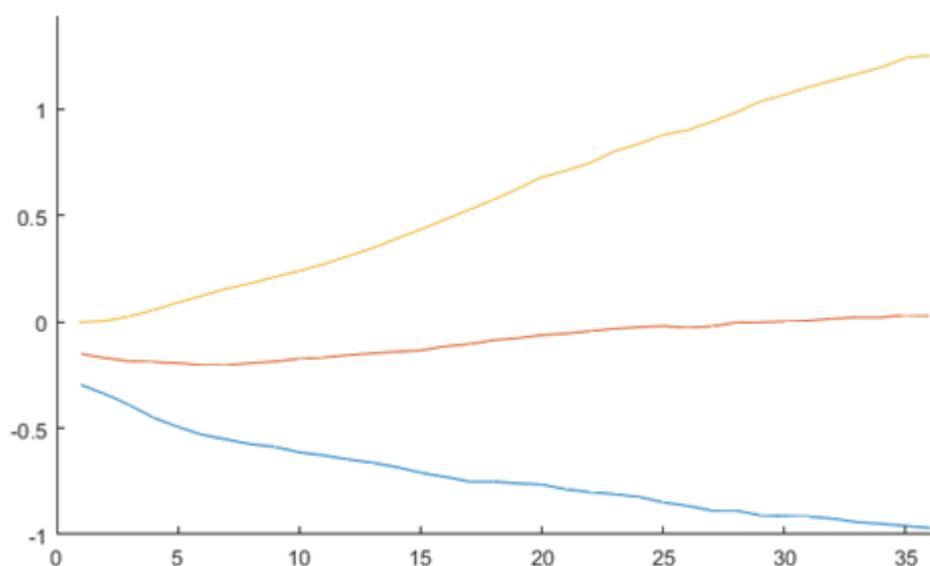
Figura 8 – Função Impulso Resposta – Resposta dos Fedfunds (Choque no Nível Brasileiro)



Fonte: Elaborado pelo Autor

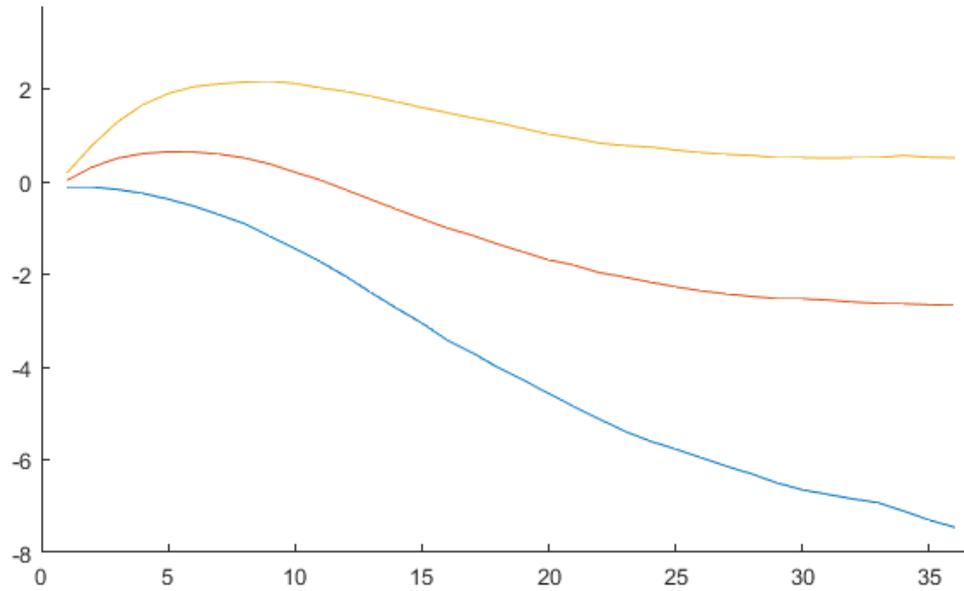
O formato da resposta média pode não ser dos mais claros, mas a escala da figura deixa claro como as respostas aos choques são assimétricas: os juros dos Estados Unidos praticamente não sofrem alteração com um choque em nível na curva de juros brasileira, comportamento totalmente distinto do visto na Figura 7. A reação aos choques na produção industrial global, na inflação global e no VIX, por parte do nível da curva de juros brasileira, são os últimos resultados do trabalho. As Figuras 9, 10 e 11, abaixo, mostram respostas bem mais sutis do nível da curva brasileira com relação aos choques especificados. Choques positivos na inflação global parecem aumentar o nível positivamente somente nos horizontes subsequentes ao choque, se apresentando como o resultado mais contraintuitivo retornado pela estimação. Pode-se perceber que, na média, a produção industrial global praticamente não tem efeito na curva de juros brasileira, enquanto um choque no VIX tem algum efeito, principalmente no curto prazo, ou seja, choques de volatilidade globais, na média, tendem a aumentar o nível da curva de juros brasileira em um horizonte próximo ao choque, mas o efeito é relativamente pequeno se comparado com os choques em variáveis ligadas as taxas de juros, apresentadas anteriormente.

Figura 9 – FIR – Resposta no Nível da Curva Brasileira (Choque na Produção Industrial Global)



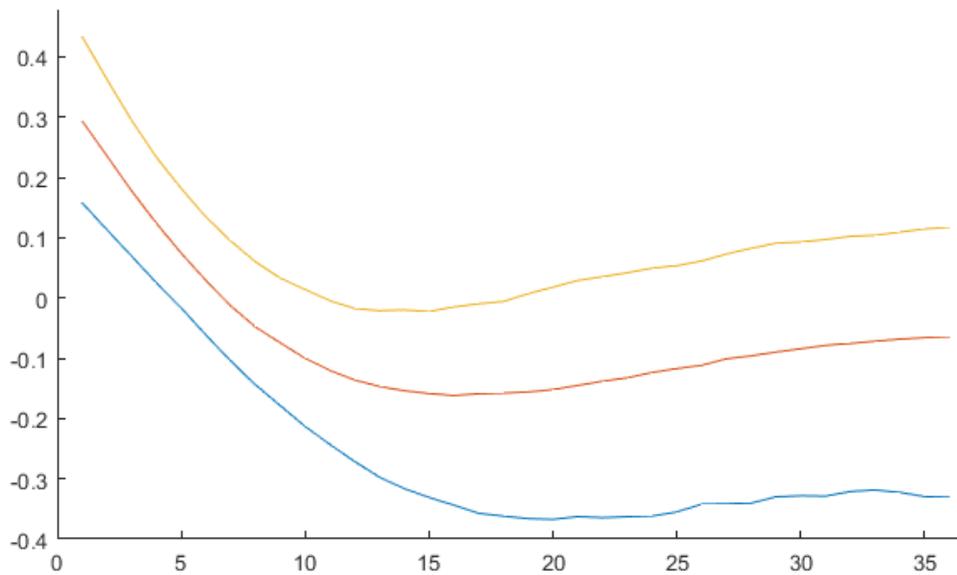
Fonte: Elaborado pelo Autor

Figura 10 – FIR – Resposta no Nível da Curva Brasileira (Choque na Inflação Global)



Fonte: Elaborado pelo Autor

Figura 11 – FIR – Resposta no Nível da Curva Brasileira (Choque no VIX)



Fonte: Elaborado pelo Autor

6 Conclusão

O presente trabalho estima a curva de juros global com o objetivo de verificar se choques globais em variáveis supranacionais ou na curva de juros construída afetam a curva de juros brasileira, ou, mais especificamente, seu nível, fator de longo prazo do modelo de Nelson e Siegel (1987). Para tal, foi estimado um modelo *Dynamic Hierarchical Factor Model* (DHFM), inspirado nos trabalhos de Moench, Ng e Potter (2013) e de Byrne, Cao e Korobilis (2016), que fazem a aplicação do modelo para títulos públicos. O DHFM tem vantagens em relação a outras aplicações utilizadas na literatura para obtenção de fatores latentes globais da curva de juros, como o método dos componentes principais, que leva em conta somente o *cross-section* dos dados, e o modelo empregado por Diebold, Li e Yue (2008), que é estimado em dois passos. Para executar tal modelo, é empregado um *Gibbs sampling* com objetivo de atualizar os parâmetros necessários e obter o nível e a inclinação da curva de juros global, extraída de Estados Unidos, Canadá, Reino Unido e Brasil. Dentro das iterações, um VAR(1) bayesiano, com fatores globais atualizados, e a priori difusa, é estimado. Assim, é possível obter, com seus resultados, as funções impulso resposta desejadas. Ao fixar os *factor loadings* do modelo NS na forma padrão da literatura, a curva de juros global para cada período de tempo considerado no estudo (abril de 2008 até dezembro de 2017) foi obtida, e comparações relatadas.

A curva de juros global apresentou, na média, a característica padrão usual das curvas de juros relatadas na literatura, de taxas maiores para maturidades mais longas. Suas taxas se mostraram muito inferiores às taxas brasileiras. Incluir mais países desenvolvidos no estudo deve aumentar ainda mais esse *spread*, pois as curvas de juros de diversos países europeus se encontraram em níveis extremamente baixos no período considerado no estudo. Os resultados mostram que o nível da curva de juros brasileira apresenta grande variação em resposta a choques em variável globais ou internacionais, principalmente com relação aos juros externos, reagindo pouco aos choques na produção industrial global, por exemplo. Indo além, é estimada a resposta nos *fed funds* com relação a um choque no nível brasileiro, que apresenta, como esperado, que o efeito dos choques é muito assimétrico. Choques nos *fed funds* tiveram maior impacto no nível brasileiro que choques na curva global, o que pode indicar que o principal mercado do mundo teve maior relevância para movimentos da estrutura a termo brasileira que o resto do mundo. A inclusão de maior período de tempo, de mais países e diferentes especificações no modelo, como

ordens maiores nos coeficientes, podem ser testadas e ficam como sugestão para obtenção de um resultado mais fidedigno e robusto.

Referências

- ALTAVILLA, C., GIACOMINI, R., RAGUSA, G. **Anchoring the Yield Curve Using Survey Expectations**. European Central Bank: 2014. (Working Paper Series, 1632). Disponível em: <<https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp1632.pdf?77f523b15cc80265cbe4386d238f2a15>>. Acesso em: 27 ago. 2017.
- ANDREWS, D. W.K., PLOBERGER, W. (1994). Optimal tests when a nuisance parameter is present only under the alternative. **Econometrica**, Chicago, v.62, n.6, p. 1383–1414. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2951753?seq=1#_page_scan_tab_contents>. Acesso em: 23 jun. 2017.
- ANG, A., PIAZZESI, M. (2003). A non-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. **Journal of Monetary Economics**, Amsterdam, v. 50, p. 745-787. Disponível em: <<http://www.nber.org/papers/w8363>>. Acesso em: 08 ago. 2017.
- BAI, J., WANG, P. (2015). Identification and Bayesian estimation of dynamic factor models. **Journal of Business and Economic Statistics**, Boston, v.33, n.2, p. 221–240. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07350015.2014.941467?journalCode=ubes20>>. Acesso em: 15 jan. 2018.
- BANSAL, R., SHALIASTOVICH, I. (2010). Confidence risk and asset prices. **American Economic Review**, Pittsburgh, v.100, n.2, p. 537–41. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/27805054>>. Acesso em: 3 Nov. 2017.
- BAUER, G.H., and DEIZ DE LOS RIOS, A. **An international dynamic term structure model with economic restrictions and unspanned risks**. Bank of Canada: 2012. (Working Paper 2012-5). Disponível em: <https://www.ecb.europa.eu/events/pdf/conferences/131216/Third_FX_Workshop_Bauer_delosRios_wp2012-05.pdf?11df0eceeef94994d02a0fcea845c22e>. Acesso em: 22 jun. 2017.
- BAUER, M.D., RUDEBUSCH, G.D. **Resolving the spanning puzzle in macrofinance term structure models**. Federal Reserve Bank of San Francisco: 2015-01. Disponível em: <<https://www.frbsf.org/economic-research/files/wp2015-01.pdf>>. Acesso em: 01 set. 2017.
- BAUER, M.D., MICHAEL D., HAMILTON, J.D.. (2015). **Robust bond risk premia**. University of California at San Diego: 2015. (Working Paper Series 5541). Disponível em: <http://econw eb.ucsd.edu/~jhamilto/bh_robust.pdf>. Acesso em: 09 out. 2017.
- BERNANKE, B.S., BOIVIN, J. (2003). Monetary policy in a data-rich environment. **Journal of Monetary Economics**, Rochester, v.50, n.3, p. 525–546. Disponível em: <<http://faculty.wcas.northwestern.edu/~lchrist/finc520/sdarticle.pdf>>. Acesso em: 27 02 jul. 2017.
- BIANCHI, F., MUMTAZ, H., SURICO, P. (2009). The great moderation of the term structure of UK interest rates. **Journal of Monetary Economics**, Rochester, v.56, n.6, p. 856–871. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0304393209000786>>. Acesso em: 03 set. 2017.
- BLOOM, N. (2014). Fluctuations in uncertainty. **The Journal of Economic Perspectives**, Pittsburgh, v.28, n.2, p. 153–175. Disponível em: <<https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/jep.28.2.153>>. Acesso em: 14 dez. 2017.
- BYRNE, J., CAO, S., KOROBILIS, D. **Co-movement, spillovers and excess returns in global bond markets**. Glasgow, Business School – Economics, University of Glasgow:

2015. (Working Paper Series, 2015-12). Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/gla/glaewp/2015_12.html>. Acesso em: 05 ago. 2017.

BYRNE, J., CAO, S., KOROBILIS, D. **Decomposing Global Yield Curve Co-Movement**. Essex Finance Centre Working Papers: 2017. Disponível em <<https://ideas.repec.org/p/esy/uefcwp/18194.html>>. Acesso em: 1 set. 2017.

BYRNE, J., CAO, S., KOROBILIS, D. (2017, *forthcoming*). Forecasting the term structure of government bond yields in unstable environments. **R&R Journal of Empirical Finance**. Amsterdam. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0927539817300804>>. Acesso em: 30 out. 2017.

BYRNE, J.P., FAZIO, G., FIESS, N. (2012). Interest rate co-movements, global factors and the long end of the term spread. **Journal of Banking and Finance**, Amsterdam, v.36, n. 1, p.183–192. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378426611002135>>. Acesso em: 29 set. 2017.

CARTER, C.K., KOHN, R. (1994). On Gibbs sampling for state space models. **Biometrika**, Oxford, v. 81, n.3, p. 541–553. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2337125?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 15 out. 2017.

CASELLA, G., GEORGE, E.I. (1992). Explaining the Gibbs Sampler. **The American Statistician**, Washington, v.46, n.3, p. 167–174. Disponível em: <http://biostat.jhsph.edu/~mmccall/articles/casella_1992.pdf>. Acesso em: 03 out. 2017.

CHRISTENSEN, J. H.; DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSCH, G. D. (2011). The affine arbitrage free class of Nelson-Siegel term structure models. **Journal of Econometrics**, Amsterdam, v. 164, n. 1, p.4 – 20, 2011. Annals Issue on Forecasting. Disponível em: <<https://www.frbsf.org/economic-research/files/wp07-20bk.pdf>>. Acesso em: 26 nov. 2017.

CHRISTENSEN, J.H.E., RUDEBUSCH, G. (2012). The response of interest rates to US and UK quantitative easing. **The Economic Journal**, London, v.122, n. 564, p. 385–414. Disponível em: <<https://www.frbsf.org/economic-research/files/wp12-06bk.pdf>>. Acesso em: 1 dez. 2017.

COCHRANE, J. H. (2009). **Asset pricing**. Princeton university press, Princeton, 2005.

COCHRANE, J.H.,PIAZZESI, M. **Decomposing the yield curve**. Stanford, Stanford University Working Paper: 2008. (Working Paper Series 2008-3). Disponível em: <https://faculty.chicagobooth.edu/john.cochrane/research/papers/interest_rate_revised.pdf>. Acesso em: 08 nov. 2017.

CORONEO, L., GIANNONE, D., MODUGNO, M. (2014). Unspanned macroeconomic factors in the yield curve. **Journal of Business and Economic Statistics**, Boston, v.34, n.3, p. 472-485, Disponível em: <<https://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2014/201457/201457pap.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2017.

DEL NEGRO, M., F. SCHORFHEIDE, F. (2011): Bayesian Macroeconometrics, in **The Oxford Handbook of Bayesian Econometrics**, ed. by J. Geweke, G. Koop, and H. van Dijk. Oxford University Press. Disponível em: <<https://www.newyorkfed.org/medialibrary/media/research/economists/delnegro/B9AF4A64-F0AB-F7AF-1B0CB70D57957496.pdf>>. Acesso em: 14 set. 2017.

DIEBOLD, F. X., LI, C. (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. **Journal of Econometrics**, Amsterdam, v.130, n.2, p. 337–364. Disponível

em:<<https://www.sas.upenn.edu/~fdiebold/papers/paper49/Diebold-Li.pdf>>. Acesso em: 11 jul. 2017.

DIEBOLD, F. X, LI, C, YUE, V.Z. (2008). **Global yield curve dynamics and interactions: A dynamic Nelson-Siegel approach**. *Journal of Econometrics*, Amsterdam, v. 146, n. 2, p. 351–363. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407608001127>>. Acesso em: 16 jul. 2017.

DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSCH, G. D. (2013). **Yield Curve Modeling and Forecasting The Dynamic Nelson-Siegel Approach**. The Econometric and Tinbergen Institutes Lectures, Princeton University Press.

DIEBOLD, F. X., D. RUDEBUSCH, G.D., ARUOBA, B. S. (2006). The macroeconomy and the yield curve: A dynamic latent factor approach. *Journal of Econometrics*, Amsterdam, v. 131, n.1, p. 309–338. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/e876/92b94447574a05280cdf2e90ee1e77443a30.pdf>>. Acesso em: 18 set. 2017.

DUFFEE, G. R. (2002). Term premia and interest rate forecasts in affine models. *Journal of Finance*, Salt Lake City, v.57, n.1, p. 405–443. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/1540-6261.00426>>. Acesso em: 08 out. 2017.

DUFFEE, G.R. **Expected inflation and other determinants of Treasury yields**. Johns Hopkins University: 2014. (Department of Economics Working Paper). Disponível em: <[http://portal.idc.ac.il/he/schools/business/homepage/documents/excepted-inflation\(greg\).pdf](http://portal.idc.ac.il/he/schools/business/homepage/documents/excepted-inflation(greg).pdf)>. Acesso em: 09 dez 2017.

DUFFIE, D.; KAN, R. (1996). A yield-factor model of interest rates. *Mathematical finance*, Oxford, v. 6, n. 4, p. 379–406. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9965.1996.tb00123.x>>. Acesso em: 03 nov. 2017.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA. Disponível em: http://economia.unipv.it/pagp/pagine_personali/erossi/dottorato_svar.pdf. Acesso em: 22 fev. 2018.

EFRON, B. (2010). **Large-Scale Inference: Empirical Bayes Methods for Estimation, Testing, and Prediction**. Cambridge University Press.

FEDERAL RESERVE. Disponível em: <<https://www.federalreserve.gov/faqs/what-were-the-federal-reserves-large-scale-asset-purchases.htm>>. Acesso em: 24 ago.2017.

GURKAYNAK, R.S., WRIGHT, J.H. (2012). Macroeconomics and the term structure. *Journal of Economic Literature*, Nashville, v.50 n.2, p. 331–367. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/23270023?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 01 jul. 2017.

GURKAYNAK, R.S., SACK, B., SWANSON, E. (2003). **The excess sensitivity of long term interest rates: evidence and implications for macroeconomic models**. Manuscript, Federal Reserve Board. Disponível em: <<https://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2003/200350/200350pap.pdf>>. Acesso em: 17 jul. 2017.

GURKAYNAK, R.S., SACK, B., WRIGHT, J.H. (2007). The US Treasury yield curve: 1961 to the present. *Journal of Monetary Economics*, Amsterdam, v. 54, n. 8, p. 2291–2304. Disponível em: <<http://yoksis.bilkent.edu.tr/pdf/files/10.1016-j.jmoneco.2007.06.029.pdf>>. Acesso em: 16 abr. 2017.

HAMILTON, J. (1994). **Time series analysis**. Princeton: Princeton University Press.

HAUTSCH, N., YANG, F. (2012). Bayesian inference in a stochastic volatility Nelson- Siegel model. **Computational Statistics and Data Analysis**, Amsderdam, v. 56, n.11, p. 3774–3792. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947310002768>>. Acesso em: 08 jan. 2018.

HEJSEB. **How to calculate the impulse response function of a VAR(1)? (With example)**. Cross Validated. Disponível em: <<https://stats.stackexchange.com/q/143296>>. Acesso em: 12 de fev.2018

HIGHAM, N.J. (2009). Cholesky Factorization. **Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics**, Hoboken, vol. 1, pp. 251-254. Disponível em: <<http://www.maths.manchester.ac.uk/~higham/papers/high09c.pdf>>. Acesso em: 25 nov. 2017.

JOSLIN, S., LE, A., SINGLETON, K.J. (2013). Gaussian macro-finance term structure models with lags. **Journal of Financial Econometrics**, Oxford, v.11, n. 4, p. 581–609. Disponível em: <<http://www-bcf.usc.edu/~sjoslin/papers/JLS2.pdf>>. Acesso em: 20 fev. 2017.

JOSLIN, S., LE, A., PRIEBSCH, M., SINGLETON, K.J. (2014). Risk premiums in dynamic term structure models with unspanned macro risks. **The Journal of Finance**, Salt Lake City, v.69, n.3, p. 1197–1233. Disponível em: <http://www-bcf.usc.edu/~sjoslin/papers/JPS_JF.pdf>. Acesso em: 04 ago. 2017.

JOTIKASTHIRA, P., LE, A., LUNDBLAD, C.T. (2015). Why do term structures in different currencies Co-move? **Journal of Financial Economics**, Amsterdam, v. 115, n.1, p. 58–83. Disponível em:< <https://ideas.repec.org/a/eee/jfinec/v115y2015i1p58-83.html> >. Acesso em: 10 set. 2017.

KIM, C.J., NELSON, C.R. (1999). **State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications**. the MIT Press, Vol. 1. Acesso em: 15 nov. 2017.

KOOP, G., KOROBILIS, D. (2009). Bayesian multivariate time series methods for empirical macroeconomics. **Foundations and Trends in Econometrics**, New York, v.3, n.4, p. 267–358. Disponível em: <https://ideas.repec.org/p/rim/rimwps/47_09.html>. Acesso em: 24 ago. 2017.

KOOP, G., KOROBILIS, D. (2012). Forecasting inflation using Dynamic Model Averaging. **International Economic Review**, Pennsylvania, v. 53, n. 3, p. 867–886. Disponível em: < Forecasting inflation using Dynamic Model Averaging >. Acesso em: 23 jul. 2017.

KOOP, G., KOROBILIS, D. (2013). Large time-varying parameter VARs. **Journal of Econometrics**, Amsterdam, v. 177, n.2, p. 185–198. Disponível em: <https://econpapers.repec.org/article/eeeconom/v_3a177_3ay_3a2013_3ai_3a2_3ap_3a185198.htm>. Acesso em: 28 nov. 2017.

KOOP, G., KOROBILIS, D. (2014). A new index of financial conditions. **European Economic Review**, White Plains, v. 71, n.0, p. 101–116. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0014292114001068>>. Acesso em: 19 out. 2017.

KUMAR, A., LEE, C. (2006). Retail investor sentiment and return comovements. **The Journal of Finance**, Salt Lake City, v.61, n.5, p. 2451–2486. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1540-6261.2006.01063.x> >. Acesso em: 13 jan. 2017.

LAUBACH, T., TETLOW, R.J., WILLIAMS, J.C. **Learning and the role of macroeconomic factors in the term structure of interest rates**. Board of Governors of the Federal Reserve System Working Paper: 2007. Disponível em: <https://www.snb.ch/n/mmr/reference/sem_2007_09_laubach/source/sem_2007_09_laubach.en.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2017.

LEE, B.S. (1998). Permanent, temporary, and non-fundamental components of stock prices. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Washington D.C., v. 33, n. 1, p. 1–32. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2331376?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 16 dez. 2017.

LITTERMAN, R.B., SCHEINKMAN, J. (1991). Common factors affecting bond returns. **The Journal of Fixed Income**, New York, v. 1, n.1, p. 54–61. Disponível em: <<http://jfi.ijournal.s.com/content/1/1/54>>. Acesso em: 23 set. 2017.

LITTERMAN, R.B., SCHEINKMAN, J., WEISS, L. (1991). Volatility and the yield curve. **The Journal of Fixed Income**, New York, v. 1, n. 1, p. 49–53. Disponível em: <<http://jfi.ijournals.com/content/1/1/49>>. Acesso em: 04 ago. 2017.

LUDVIGSON. S.C., NG, S. (2009). Macro factors in bond risk premia. **Review of Financial Studies**, Oxford, v. 22, n. 12, p. 5027–5067. Disponível em: <<http://www.columbia.edu/~sn2294/pub/rfs09.pdf>>. Acesso em: 21 nov. 2017.

LUTKEPOHL, H. (2006). **New Introduction to Multiple Time Series Analysis**. New York: Springer Verlag.

MOENCH, E. (2008). Forecasting the yield curve in a data-rich environment: A no arbitrage factor- augmented VAR approach. **Journal of Econometrics**, Amsterdam, v. 146, n.1, p. 26–43. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407608000730>>. Acesso em: 13 dez. 2017.

MOENCH, E., NG, S., POTTER, S. (2013). Dynamic hierarchical factor models. **Review of Economics and Statistics**, Cambridge, v. 95, n. 5, p. 1811–1817. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/tpr/restat/v95y2013i5p1811-1817.html>>. Acesso em: 11 ago . 2017.

NELSON, C.R., SIEGEL, A.F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. **Journal of Business**, Chicago, v. 60, n. 4, p. 473–489. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2352957?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 17 set. 2017.

NOVY-MARX, R. (2014). Predicting anomaly performance with politics, the weather, global warming, sunspots, and the stars. **Journal of Financial Economics**, Amsterdam, v. 112, n. 2, p. 137–146. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304405X14000208>>. Acesso em: 28 dez. 2017.

MONIKA, P. (2010). Affine term structure models. **Handbook of Financial Econometrics**, v.1,p. 691–766.

PRADO, R., West, M. (2010). **Time Series: Modeling, Computation, and Inference**. Chapman &Hall/CRC Texts in Statistical Science, Taylor & Francis.

SIEGEL, A.F., NELSON, C.R. (1988). Long-term behavior of yield curves. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Washington D.C., v. 23, n. 0, p. 105–110. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2331027?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 30 jun. 2017.

STACK EXCHANGE. Disponível em: <https://stats.stackexchange.com/>. Acesso em: 12 de fev.2018.

WRIGHT, J.H. (2011). Term premia and inflation uncertainty: Empirical evidence from an international panel dataset. **American Economic Review**, Pittsburgh, v. 101, n. 4, p. 1514–1534. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/23045907?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 26 fev. 2018.