

FLUXO DE CALOR BI-DIRECIONAL NÃO-ESTACIONÁRIO EM MEIOS MULTI-COMPOSTOS

Paulo O. Beyer e Marco Tulio M.B. Vilhena
 PROMEC - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
 Universidade Federal do Rio Grande do Sul
 90050-170 - Porto Alegre - RS – Brasil
 E-mail – pob@mecanica.ufrgs.br

RESUMO

Procura-se aqui uma metodologia semi-analítica aplicada ao fluxo de calor bidirecional não-estacionário em elementos multi-compostos. O objetivo principal é calcular o fluxo de calor na face interna de paredes externas de edificações. Para tanto serão consideradas variações contínuas da temperatura externa nas faces superiores e esquerda de uma parede, e temperaturas constantes na base e face direita. O objetivo é calcular o fluxo de calor na face direita desta parede.

PROBLEMA PROPOSTO

Este trabalho visa ser uma continuação, ou expansão, de um método já testado em uma direção x (Beyer 1996, Beyer et al. 1995), procurando a sua aplicação em duas direções, x e y.

Seja um elemento multi-composto conforme figura 1.

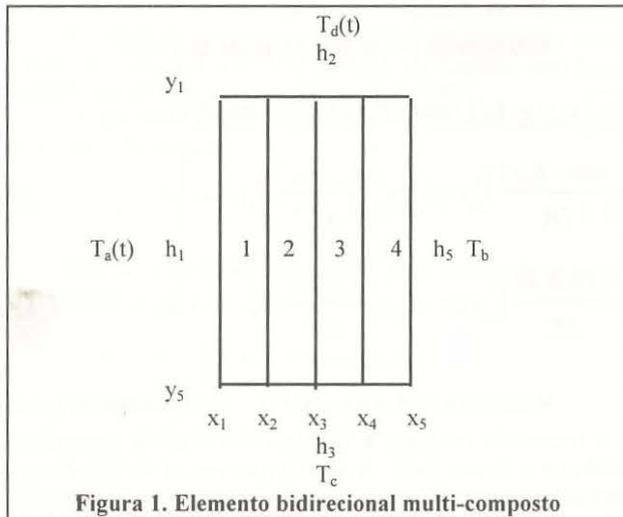


Figura 1. Elemento bidirecional multi-composto

O elemento em análise é composto por diversos meios, numerados de 1 a 4, com propriedades térmicas diferentes. Entre eles pode ou não existir contato térmico perfeito. Na face esquerda existe um fluido com temperatura variável com o tempo, chamada $T_a(t)$, e um coeficiente de convecção constante chamado h_1 . Na face direita existe um fluido com temperatura T_b e um coeficiente de convecção h_5 , ambos constantes com o tempo. Na face inferior existe uma temperatura T_c e um coeficiente de convecção h_3 , ambos constantes. Na face superior existe um fluido com temperatura variável com o tempo $T_d(t)$ e um coeficiente de convecção h_2 constante com o tempo.

A equação básica do problema é:

$$\frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial T_i(x, y, t)}{\partial t} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq x \leq x_5 \\ 1 \leq i \leq 4 \\ t > 0 \\ y_1 \leq y \leq y_5 \end{array} \right. \quad (1)$$

onde i são os meios participantes do problema e α a difusividade térmica.

As condições de contorno em x são de terceira espécie:

$$\left. \begin{array}{l} -k_1 \frac{\partial T_1(x_1, y, t)}{\partial x} = h_1 [T_a(t) - T_1(x_1, y, t)] \\ k_4 \frac{\partial T_4(x_5, y, t)}{\partial x} = h_5 [T_b - T_4(x_5, y, t)] \end{array} \right\} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} t > 0 \\ y_1 \leq y \leq y_5 \end{array} \right. \quad (1a)$$

As condições de contorno em y são de terceira espécie:

$$\left. \begin{array}{l} -k_i \frac{\partial T_i(x, y_1, t)}{\partial y} = h_2 [T_d(t) - T_i(x, y_1, t)] \\ k_i \frac{\partial T_i(x, y_5, t)}{\partial y} = h_3 [T_c - T_i(x, y_5, t)] \end{array} \right\} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} t > 0 \\ 1 \leq i \leq 4 \\ x_1 \leq x \leq x_5 \end{array} \right. \quad (1b)$$

As condições de interface em x, considerando contato térmico perfeito, são:

$$\left. \begin{array}{l} T_i(x_{i+1}, y, t) = T_{i+1}(x_{i+1}, y, t) \\ k_i \frac{\partial T_i(x_{i+1}, y, t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}(x_{i+1}, y, t)}{\partial x} \end{array} \right\} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} t > 0 \\ 1 \leq i \leq 3 \\ y_1 \leq y \leq y_5 \end{array} \right. \quad (1c)$$

A condição inicial do problema é:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \leq i \leq 4 \\ T_i(x, y, 0) = F_i(x, y) \end{array} \right\} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq x \leq x_5 \\ y_1 \leq y \leq y_5 \end{array} \right. \quad (1d)$$

O equacionamento acima pode ser encontrado em livros de condução do calor (Özisik 1980).

TEMPERATURA MÉDIA

O principal objetivo do problema é calcular o fluxo de calor na face direita, a carga térmica do ambiente. O problema será primeiramente resolvido em termos de temperaturas médias em y, τ :

$$\tau_i(x,t) = \frac{1}{H} \int_{y_1}^{y_5} T_i(x,y,t) dy \quad (2)$$

onde $H = y_5 - y_1$.

Escrevendo o problema para temperatura média e aplicando 2 na equação 1 vem:

$$\frac{\partial^2 \tau_i(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{H} \left[\frac{\partial T_i(x,y_5,t)}{\partial y} - \frac{\partial T_i(x,y_1,t)}{\partial y} \right] = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x,t)}{\partial t} \quad (3)$$

A equação acima pode ser reescrita com termo fonte S_i :

$$\frac{\partial^2 \tau_i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \tau_i(x,t)}{\partial t} + S_i(x,t), \dots \text{onde} \quad (3a)$$

$$S_i(x,t) = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial T_i(x,y_1,t)}{\partial y} - \frac{\partial T_i(x,y_5,t)}{\partial y} \right]$$

Lembrando a equação de Fourier, $q = -k dT/dy$, facilmente observa-se que a fonte representa os fluxos de calor no contorno y, lembrando que $\alpha = k/\rho c_p$.

As condições de contorno em x ficam:

$$-k_1 \frac{\partial \tau_i(x_1,t)}{\partial x} = h_1 [T_a(t) - \tau_i(x_1,t)] \quad (3b)$$

$$k_4 \frac{\partial \tau_i(x_5,t)}{\partial x} = h_5 [T_b - \tau_i(x_5,t)]$$

As condições de contorno em y permanecem:

$$-k_i \frac{\partial T_i(x,y_1,t)}{\partial y} = h_2 [T_d(t) - T_i(x,y_1,t)] \quad (3c)$$

$$k_i \frac{\partial T_i(x,y_5,t)}{\partial y} = h_3 [T_c - T_i(x,y_5,t)]$$

As condições de interface em x ficam:

$$\tau_i(x_{i+1},t) = \tau_{i+1}(x_{i+1},t) \quad (3d)$$

$$k_i \frac{\partial \tau_i(x_{i+1},t)}{\partial x} = k_{i+1} \frac{\partial \tau_{i+1}(x_{i+1},t)}{\partial x}$$

A condição inicial fica:

$$\tau_i(x,0) = G_i(x) \quad (3e)$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE NA TEMPERATURA MÉDIA

Aplicando a Transformada de Laplace ao problema 3 vem:

$$\frac{d^2 \bar{\tau}_i(x,s)}{dx^2} - \frac{s}{\alpha_i} \bar{\tau}_i(x,s) = -\frac{\tau_{oi}(x)}{\alpha_i} + \bar{S}_i(x,s), \dots \text{onde} \quad (4)$$

$$\bar{S}_i(x,s) = \frac{1}{H} \left[\frac{d \bar{T}_i(x,y_1,s)}{dy} - \frac{d \bar{T}_i(x,y_5,s)}{dy} \right]$$

As condições de contorno em x ficam:

$$-k_1 \frac{d \bar{\tau}_i(x_1,s)}{dx} + h_1 \bar{\tau}_i(x_1,s) = h_1 \bar{T}_a(s) \quad (4a)$$

$$k_4 \frac{d \bar{\tau}_i(x_5,s)}{dx} + h_5 \bar{\tau}_i(x_5,s) = h_5 \frac{T_b}{s}$$

As condições de contorno em y ficam:

$$-k_i \frac{d \bar{T}_i(x,y_1,s)}{dy} + h_2 \bar{T}_i(x,y_1,s) = h_2 \bar{T}_d(s) \quad (4b)$$

$$k_i \frac{d \bar{T}_i(x,y_5,s)}{dy} + h_3 \bar{T}_i(x,y_5,s) = h_3 \frac{T_c}{s}$$

As condições de interface em x ficam:

$$\bar{\tau}_i(x_{i+1},s) = \bar{\tau}_{i+1}(x_{i+1},s) \quad (4c)$$

$$k_i \frac{d \bar{\tau}_i(x_{i+1},s)}{dx} = k_{i+1} \frac{d \bar{\tau}_{i+1}(x_{i+1},s)}{dx}$$

A solução do problema 4 é tomada da forma:

$$\bar{\tau}_i(x,s) = A_i(s) \exp(-R_i x) + B_i(s) \exp(R_i x) \quad (5)$$

$$+ \frac{\exp(-R_i x)}{2R_i} \int_{x_1}^x \exp(R_i x) \left[\frac{\tau_{oi}(x)}{\alpha_i} + \bar{S}_i(x,s) \right] dx$$

$$- \frac{\exp(R_i x)}{2R_i} \int_{x_1}^x \exp(-R_i x) \left[\frac{\tau_{oi}(x)}{\alpha_i} + \bar{S}_i(x,s) \right] dx$$

Nesta equação R_i vale $\sqrt{s / \alpha_i}$. Para resolver a equação 5 é necessário conhecer a distribuição inicial de temperaturas médias e o termo fonte. A distribuição inicial de temperaturas será tomada por polinômios quadráticos, como feito nos trabalhos anteriores unidirecionais (Beyer 1996, Beyer et al. 1995). Resta conhecer a fonte S_i .

EQUAÇÃO AUXILIAR PROPOSTA

Para a temperatura transformada T_i constituinte do termo fonte será proposta uma equação baseada também em polinômios quadráticos em x e y, obtendo-se:

$$\bar{T}_i^p(x,y,s) = \sum_{n=0}^2 a_{ni}(s) y^n + \left(\sum_{n=0}^2 b_{ni}(s) y^n \right) x + \left(\sum_{n=0}^2 c_{ni}(s) y^n \right) x^2 \quad (6)$$

As equações propostas serão assinaladas por um índice p. Para encontrarem-se os coeficientes a_{ni} , b_{ni} e c_{ni} serão utilizadas as equações de contorno em y (4b) e a definição da temperatura

média, equação 2, obtendo-se (para $y_1 = 0$ e $y_5 = 1$, ou seja, parede com 1 m de altura):

$$\bar{\tau}_i^p(x, s) = \sum_{n=0}^2 \frac{a_{ni}(s)}{n+1} + \left(\sum_{n=0}^2 \frac{b_{ni}(s)}{n+1} \right) x + \left(\sum_{n=0}^2 \frac{c_{ni}(s)}{n+1} \right) x^2 \quad (7)$$

Como tem-se um total de nove incógnitas, a equação acima, junto com as condições de contorno em y serão aplicadas em três seções de cada meio i . Para tanto é necessária a derivada em y , obtendo-se:

$$\frac{d\bar{\tau}_i^p(x, y, s)}{dy} = \sum_{n=1}^2 n a_{ni} y^{n-1} + \left(\sum_{n=1}^2 n b_{ni} y^{n-1} \right) x + \left(\sum_{n=1}^2 n c_{ni} y^{n-1} \right) x^2 \quad (8)$$

Colocando a equação 8 em 4 obtém-se:

$$\bar{S}_i^p(x, s) = -2 \left(a_{2i}(s) + b_{2i}(s)x + c_{2i}(s)x^2 \right) \quad (9)$$

SOLUÇÃO DO PROBLEMA

A condição inicial τ_{oi} da equação 5 será calculada por ajuste de polinômio quadrático, da forma:

$$\tau_{oi}(x) = \sum_{n=0}^2 d_{ni} x^n \quad (10)$$

Estes dados deverão ser colocados na equação 5, que deverá ser integrada e derivada, para ser colocada nas condições de contorno, formando um sistema que deverá ser resolvido, como no caso unidirecional, por Transformada de Laplace com Quadratura Gaussiana (Beyer 1996, Beyer et al. 1995).

O caso mais simples é quando $x = x_i$, quando as integrais ficam nulas, obtendo-se:

$$\bar{\tau}_i(x_i, s) = A_i(s) \exp(-R_i x_i) + B_i(s) \exp(R_i x_i) \quad (11)$$

Para um x qualquer, a equação 5 pode ser escrita de outra forma, ficando então:

$$\bar{\tau}_i(x, s) = A_i(s) \exp(-R_i x) + B_i(s) \exp(R_i x)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\exp(-R_i x)}{2R_i} \int_{x_i}^x \exp(R_i x) \frac{\tau_{oi}(x)}{\alpha_i} dx \\ & - \frac{\exp(R_i x)}{2R_i} \int_{x_i}^x \exp(-R_i x) \frac{\tau_{oi}(x)}{\alpha_i} dx \\ & + \frac{\exp(-R_i x)}{2R_i} \int_{x_i}^x \exp(R_i x) \bar{S}_i(x, s) dx \\ & - \frac{\exp(R_i x)}{2R_i} \int_{x_i}^x \exp(-R_i x) \bar{S}_i(x, s) dx \end{aligned} \quad (12)$$

Observa-se na equação acima que a segunda e terceira linhas representam o problema unidimensional já resolvido, e a quarta e quinta linhas o efeito da segunda dimensão. Pode-se portanto utilizar o resultado unidirecional acrescido do resultado das duas integrais das últimas linhas acima. Como o termo fonte

tem uma equação semelhante à condição inicial, os resultados das integrais também serão semelhantes, obtendo-se:

$$\bar{\tau}_i(x, s) = A_i(s) \exp(-R_i x) + B_i(s) \exp(R_i x)$$

$$+ \frac{I_i(x)}{2s} - \frac{\alpha_i S_i(x)}{s} \quad (13)$$

onde

$$I_i(x) = 2 \left[d_{1i} + d_{2i}x + d_{3i} \left(\frac{2}{R_i^2} + x^2 \right) \right] \quad (13a)$$

$$- N_1 \exp(-R_i x) - N_2 \exp(R_i x)$$

onde

$$N_j = \exp(\mu R_i x_i) (K_j + M_j x_i + d_{3i} x_i^2) \dots, j = 1, 2$$

$$K_j = d_{1i} - \frac{d_{2i}}{\pm R_i} + \frac{2d_{3i}}{R_i^2} \quad (13b)$$

$$M_j = d_{2i} - \frac{2d_{3i}}{\pm R_i}$$

$$S_i(x) = 2 \left[a_{3i} + b_{3i}x + c_{3i} \left(\frac{2}{R_i^2} + x^2 \right) \right] \quad (13c)$$

$$- N'_1 \exp(-R_i x) - N'_2 \exp(R_i x)$$

onde

$$N'_j = \exp(\mu R_i x_i) (K'_j + M'_j x_i + c_{3i} x_i^2) \dots, j = 1, 2$$

$$K'_j = a_{3i} - \frac{b_{3i}}{\pm R_i} + \frac{2c_{3i}}{R_i^2} \quad (13d)$$

$$M'_j = b_{3i} - \frac{2c_{3i}}{\pm R_i}$$

A equação acima é a solução genérica do problema. A equação 13a é a parte unidirecional, e a 13c o efeito da segunda dimensão. Esta equação, junto com a 11, deve ser colocada nas condições de contorno para encontrarem-se as constantes de integração A_i e B_i . Além delas, é necessário colocarem-se as derivadas destas equações, obtendo-se para x_i :

$$\frac{d\bar{\tau}_i(x_i, s)}{dx} = R_i [B_i(s) \exp(R_i x_i) - A_i(s) \exp(-R_i x_i)] \quad (14)$$

Para x qualquer obtém-se, também baseado na análise unidirecional:

$$\frac{d\bar{\tau}_i(x, s)}{dx} = R_i [B_i(s) \exp(R_i x) - A_i(s) \exp(-R_i x)] \quad (15)$$

$$+ \frac{Id_i(x)}{2s} - \frac{\alpha_i Sd_i(x)}{s}$$

onde

$$Id_i(x) = (2d_{2i} + 4d_{3i}x) + R_i [N_1 \exp(-R_i x) - N_2 \exp(R_i x)] \quad (15a)$$

$$Sd_i(x) = (2b_{3i} + 4c_{3i}x) + R_i [N'_1 \exp(-R_i x) - N'_2 \exp(R_i x)] \quad (15b)$$

SISTEMA A SER RESOLVIDO PARA A TEMPERATURA MÉDIA

Também a equação 15a representa o problema unidirecional, e a 15b o bidirecional. Deve-se agora colocar as equações 11, 13, 14 e 15 nas condições de contorno em x, equações 4a, e interface em x, equações 4c, para acharem-se as constantes de integração das equações 11 e 13, soluções do problema, obtendo-se:

$$\left. \begin{aligned} -k_j \frac{d\bar{\tau}_j(x_j, s)}{dx} + h_j \bar{\tau}_j(x_j, s) &= h_j \bar{T}_a(s) \\ \bar{\tau}_i(x_{i+1}, s) &= \bar{\tau}_{i+1}(x_{i+1}, s) \\ k_i \frac{d\bar{\tau}_i(x_{i+1}, s)}{dx} &= k_{i+1} \frac{d\bar{\tau}_{i+1}(x_{i+1}, s)}{dx} \dots, \dots, i = 1, 2, 3 \\ k_4 \frac{d\bar{\tau}_4(x_5, s)}{dx} + h_5 \bar{\tau}_4(x_5, s) &= h_5 \frac{T_b}{s} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Com as equações acima pode-se montar um sistema linear para obtenção dos coeficientes A_i e B_i obtendo-se para a matriz dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & b_{12} & a_{22} & b_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & b_{13} & a_{23} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{24} & b_{24} & a_{34} & b_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{25} & b_{25} & a_{35} & b_{35} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} & b_{36} & a_{46} & b_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{37} & b_{37} & a_{47} & b_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{48} & b_{48} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Os coeficientes podem ser encontrados nos trabalhos anteriores (Beyer 1996, Beyer et al. 1995). Esta matriz, junto com os termos independentes retirados da equação 16 permitem encontrar A_i e B_i por métodos conhecidos de solução de sistemas (Press et al, 1992).

CONVERGÊNCIA DA EQUAÇÃO PROPOSTA

É necessário encontrarem-se os coeficientes a_{ni} , b_{ni} e c_{ni} das equações acima. Como tem-se nove incógnitas, serão necessárias nove equações para cada meio, as duas de contorno em y e a temperatura média, aplicadas em três seções x. A conexão entre os meios foi feita pela solução do problema unidirecional. Este método foi chamado matriz 9.

Outra alternativa foi resolver o problema conectando os meios através das condições de interface, resultando em um problema único com matriz 36 x 36. Esta alternativa foi chamada matriz 36.

A equação proposta para T transformada (eq. 6) deve ser aplicada nas condições de contorno em y junto com sua derivada

(eq. 8). Obtém-se então as seguintes equações, escritas para as interfaces x_1 a x_5 e os pontos centrais de cada meio 1 a 4:

$$\begin{aligned} (h_2 a_{0i} - K_i a_{1i}) + (h_2 b_{0i} - K_i b_{1i})x + (h_2 c_{0i} - K_i c_{1i})x^2 &= \\ = h_2 \bar{T}_d(s) \\ \sum_{n=0}^2 (nK_i + h_3) a_{ni} + \sum_{n=0}^2 (nK_i + h_3) x b_{ni} + \sum_{n=0}^2 (nK_i + h_3) x^2 c_{ni} &= \\ = h_3 \frac{T_c}{s} \end{aligned} \quad (18)$$

A temperatura média proposta pode ser vista na eq. 7, que será igualada ao resultado da equação 15, junto com as condições de contorno em y, formando um sistema a ser resolvido iterativamente para se encontrar os coeficientes a_{ni} , b_{ni} e c_{ni} .

SISTEMA A SER RESOLVIDO PARA A EQUAÇÃO PROPOSTA

O sistema será resolvido substituindo-se s por p_k/t dos pontos de quadratura e encontrando-se a_{ni} , b_{ni} e c_{ni} iterativamente. Os termos da matriz codificados u(linha,coluna) podem ser vistos abaixo.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & u_{14} & u_{15} & 0 & u_{17} & u_{18} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & u_{24} & u_{25} & 0 & u_{27} & u_{28} & 0 \\ u_{31} & u_{32} & 0 & u_{34} & u_{35} & 0 & u_{37} & u_{38} & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_{45} & u_{46} & u_{47} & u_{48} & u_{49} \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} & u_{54} & u_{55} & u_{56} & u_{57} & u_{58} & u_{59} \\ u_{61} & u_{62} & u_{63} & u_{64} & u_{65} & u_{66} & u_{67} & u_{68} & u_{69} \\ u_{71} & u_{72} & u_{73} & u_{74} & u_{75} & u_{76} & u_{77} & u_{78} & u_{79} \\ u_{81} & u_{81} \\ u_{91} & u_{92} & u_{93} & u_{94} & u_{95} & u_{96} & u_{97} & u_{98} & u_{99} \end{bmatrix} \quad (19)$$

É necessária uma estimativa inicial para a_{ni} , b_{ni} e c_{ni} . Uma primeira consideração pode ser um campo de temperatura constante, independente de x e y. Isto leva para a_{0i} igual ao valor da temperatura inicial, e os demais coeficientes iguais à zero. Após, é feita a convergência dos coeficientes. No problema resolvido, a convergência foi feita adotando um critério de diferença máxima de 0,5% (zero vírgula cinco por cento) entre o valor adotado e o calculado. O cálculo considerando critério de 1% não apresentou diferenças significativas. Foi tomado 0,5% por segurança.

O retorno da temperatura média τ para o domínio tempo também será feito, como no caso unidirecional, através de Quadratura Gaussiana, obtendo-se (Heydarian e Mullineaux, 1981):

$$\tau_i(x, t) = \sum_{k=1}^n A_k(p_k/t) \bar{\tau}_i(x, p_k/t) \quad (20)$$

Nesta equação a temperatura média transformada é calculada pelas equações 13, e aplicada na equação acima utilizando os pontos de quadratura $A(k)$ e $p(k)$, encontrados em Stroud e Secrest (1966).

As temperaturas externas função do tempo serão consideradas como Temperaturas Sol-Ar, conforme considerado nos problemas unidirecionais (Beyer 1996, Beyer et al, 1995). A parede será a mesma, voltada para oeste, com um metro de altura. Logo, $T_a(t)$ será a mesma do problema unidimensional. A temperatura $T_d(t)$ será calculada para uma superfície horizontal, com insolação direta a partir das 12 horas. Antes, será considerada com a mesma insolação da superfície oeste. A temperatura Sol-Ar para a superfície horizontal pode então ser vista na tabela 1. O problema resolvido unidimensional é encontrado no ASHRAE Handbook Fundamentals (1997).

Tabela 1 Temperatura Sol-Ar para Superfície Horizontal

h	T_{sa}	h	T_{sa}	h	T_{sa}
1	25.43	9	29.764	17	41.128
2	24.88	10	31.7	18	35.29
3	24.44	11	33.752	19	31.286
4	24.11	12	53.946	20	29.83
5	24	13	54.642	21	28.62
6	25.104	14	53.624	22	27.52
7	26.382	15	50.886	23	26.64
8	27.918	16	46.604	24	25.98

As duas temperaturas Sol-Ar podem ser vistas na figura 2.

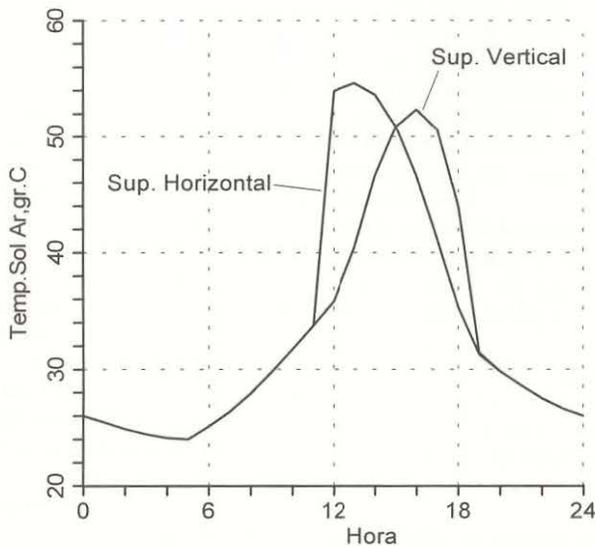


Figura 2 Temperaturas Sol-Ar Vertical e Horizontal

O dia foi dividido em cinco problemas seqüenciais, como no problema unidirecional, com intervalo nas principais inflexões do gráfico acima, a saber: às 5, 11, 15 e 19 horas, quando são calculadas as condições iniciais dos problemas seguintes. Para o cálculo das temperaturas médias foram considerados 12 pontos de quadratura, por ter sido o melhor valor na análise de erro feito no problema unidimensional (Beyer 1996, Hornbeck 1975).

Os fluxos de calor para os problemas resolvidos para o quarto dia pelo método proposto e por volumes finitos (Patankar, 1980) podem ser vistos na tabela 2.

Como pode ser visto, a diferença entre ambos é pequena. Os dois fluxos de calor podem ser vistos na figura 3. Pode-se notar um atraso temporal na onda de calor, com pequenas diferenças nos valores máximos e mínimos.

É importante comentar a rapidez computacional do método proposto, capaz de calcular os quatro dias em 2-3 minutos.

Hora	Númérico	Matriz 9	Matriz 36
0	11.854	14.049	14.132
1	10.188	12.530	12.652
2	8.686	11.104	11.223
3	7.339	9.779	9.887
4	6.140	8.549	8.643
5	5.093	7.414	7.492
6	4.295	6.357	6.422
7	3.802	5.439	5.497
8	3.644	4.763	4.813
9	3.833	4.371	4.417
10	4.357	4.276	4.318
11	5.195	4.478	4.513
12	8.200	4.359	4.394
13	10.602	4.579	4.593
14	12.323	5.526	5.490
15	14.255	7.283	7.166
16	16.194	9.954	9.889
17	18.010	13.103	13.038
18	19.318	16.219	16.193
19	19.818	18.590	18.581
20	19.250	19.335	19.339
21	17.629	18.574	18.587
22	15.655	17.187	17.214
23	13.689	15.624	15.672
24	11.854	14.049	14.132

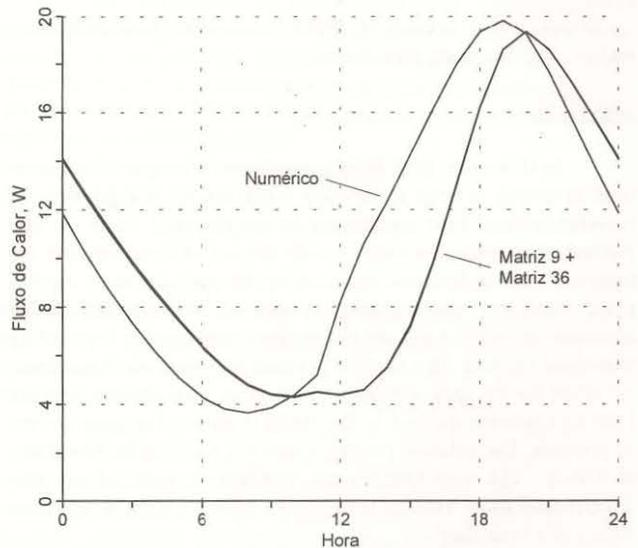


Fig. 3 Fluxos de Calor Para Soluções Numérica e Proposta

CONCLUSÕES

A solução proposta apresenta-se como uma metodologia simples e que permite o cálculo de difusão de calor em duas dimensões, reduzindo o problema para uma dimensão. Apresenta boas possibilidades de ser expandida para três direções, x, y e z.

O método apresenta recursos a serem explorados, como a tentativa de outras equações propostas. Também pode ser procurada a solução do campo de temperaturas pontuais, talvez com o mesmo tipo de polinômio em x e y utilizado para a temperatura transformada da fonte.

Apresenta como vantagem a não necessidade de discretização dos domínios espacial e temporal, resguardando-se a necessidade dos incrementos temporais entre problemas seqüenciais.

ais, já que o dia é dividido em cinco problemas seqüenciais. Isto permite que o problema tenha um incremento temporal de aproximadamente cinco horas.

Resolveu bastante bem o problema proposto, que era o cálculo do fluxo de calor na face interna da parede. A comparação com a solução numérica mostrou diferenças aceitáveis para a sistemática usual do cálculo dos fluxos de calor em paredes, que tem como objetivo o cálculo das cargas térmicas de ar condicionado.

REFERÊNCIAS

ASHRAE, *Handbook of Fundamentals*, ASHRAE, pp.26.17-26.28, 1997.

Beyer, P.O., Vielmo, H.A. e Vilhena, M.T.M.B., 1995, "Estudo Comparativo entre Soluções para a Transferência de Calor em Paredes Multicompostas", *XIII Congresso Brasileiro e II Ibero Americano de Engenharia Mecânica*, Belo Horizonte, MG.

Beyer, P.O., 1996, "Fluxo de Calor Não-Estacionário em Meios Multi-Compostos", *ENCIT - Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, Florianópolis, SC.

Heydarian, M. e Mullineaux, N., 1981, "Solution of Parabolic Partial Differential Equations", *Appl. Math. Mod.*, 5, pp.448-449.

Hornbeck, R. W., 1975, "Numerical Methods", Quantum Publishers, New York.

Özisik, M.N., "Heat Conduction", Ed. John Wiley & Sons, 1980.

Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", New York, McGraw Hill.

Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. e Flannery, B.P., 1992, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press.

Stroud, A.H. e Secrest, D., 1966, "Gaussian Quadrature Formulas", Prentice Hall, New Jersey.

ABSTRACT

In this work, the Laplace transform technique with numerical inversion is used to develop solutions for the problem of two-dimensional heat conduction in multilayered walls. In this method, the partial derivatives with respect to time variable are removed from differential equation by the application of the Laplace transform, the resulting system of ordinary differential equations are solved and the temperature transform is inverted by numerical method. This method is based on Gaussian Quadrature, a method for the approximation of integrals. The advantage of the Laplace/Gaussian method is that there is no need to step in time or position. The solution for any value of t or x can be found immediately. The two-dimensional problem is reduced to one-dimensional using average temperature across x section, and heat source at y boundary.