

# III Semana Acadêmica da Pós-Graduação em Matemática

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Porto Alegre, 05 a 08 de Novembro de 2018.

---

## CADERNO DE RESUMOS

### Comissão Organizadora:

Bárbara Seelig Pogorelsky  
Cássio Baissvenger Pazinato  
Cristina Zaniol  
Juliana Sartori Ziebell  
Leonardo Duarte Silva  
Marcus Vinícius da Silva  
Rodrigo Sychocki da Silva  
Thaísa Raupp Tamusiunas  
Vanusa Moreira Dylewski

## Sumário

|   |    |
|---|----|
| <b>MINICURSO</b>  | 4  |
| <b>A transformada de Fourier em resoluções de problemas de EDP</b> . . . .  | 4  |
| <i>Wanderley Nascimento ( UFRGS )</i> . . . . .   | 4  |
| <b>PALESTRAS</b>  | 5  |
| <b>Um autovetor bilionário</b> . . . . .  | 5  |
| <i>Carlos Hoppen ( UFRGS )</i> . . . . .  | 5  |
| <b>Discutindo a teoria dos registros de representação, para além das ati-</b><br><b>vidades de tratamento e conversão</b> . . . . .   | 5  |
| <i>Cátia Nehring ( UNIJUÍ )</i> . . . . .   | 5  |
| <b>Relato de experiência: Do ensino básico à gestão</b> . . . . .   | 5  |
| <i>Eduardo Meliga Pompermayer ( IFRS - Campus Canoas )</i> . . . . .  | 5  |
| <b>Importa tratar da noção deleuziana de <i>problema</i> na educação mate-</b><br><b>mática escolar?</b> . . . . .                    | 6  |
| <i>Francisco Egger Moellwald ( UFRGS (FACED) )</i> . . . . .  | 6  |
| <b>Uma relação algébrica para geração de uma topologia no espaço de</b><br><b>Minkowsky</b> . . . . .                                 | 6  |
| <i>Glauber Rodrigues de Quadros ( UFSM - Campus Cachoeira do Sul )</i> . . . .  | 6  |
| <i>Lucas Tavares Cardoso ( UFSM - Campus Cachoeira do Sul )</i> . . . . .   | 6  |
| <b>Uma introdução aos códigos corretores de erros</b> . . . . .   | 7  |
| <i>Juliane Capaverde ( UFRGS )</i> . . . . .  | 7  |
| <b>Derivações: um pouco de história no Departamento de Matemática</b> . .   | 7  |
| <i>Renê Baltazar ( FURG - Campus Santo Antônio da Patrulha )</i> . . . . .  | 7  |
| <b>Fazendo pesquisa com amigos e desconhecidos. A "sorte"na hora de</b><br><b>formular perguntas e buscar por respostas</b> . . . . . | 7  |
| <i>Rodrigo Bissacot ( USP )</i> . . . . .   | 7  |
| <b>COMUNICAÇÕES DOS ALUNOS</b>  | 8  |
| <b>Estimativa de Fontes de Partículas Neutras</b> . . . . .   | 8  |
| <i>Cássio Baissvenger Pazinato ( IFSul - Campus Pelotas )</i> . . . . .   | 8  |
| <b>Desenvolvendo uma Medida de Núcleo de Inflação</b> . . . . .   | 9  |
| <i>Cristina Zaniol ( PPGMap )</i> . . . . .   | 9  |
| <b>Teoria de Existência e Simulações para a equação do transporte uni-</b><br><b>dimensional</b> . . . . .                            | 11 |
| <i>Debora Dalmolin ( PPGMap )</i> . . . . .   | 11 |
| <i>Fabio Azevedo ( PPGMap )</i> . . . . .   | 11 |
| <i>Esequia Sauter ( PPGMap )</i> . . . . .  | 11 |
| <b>Ações de álgebras de Hopf em álgebras - Uma introdução.</b> . . . . .  | 12 |
| <i>Félix Afonso De Afonso ( PPGMat )</i> . . . . .  | 12 |
| <i>Wagner Cortes ( PPGMat )</i> . . . . .   | 12 |
| <i>Thaísa Tamusiunas ( PPGMat )</i> . . . . .   | 12 |
| <b>Problema de Plateau assintótico em <math>\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}</math></b> . . . . .                                       | 13 |
| <i>Felix Nieto ( PPGMat )</i> . . . . .   | 13 |
| <b>Nordhaus-Gaddum inequalities for <math>l_2</math>.</b> . . . . .   | 13 |
| <i>Guilherme Porto ( PPGMap )</i> . . . . .   | 13 |
| <i>Vilmar Trevisan ( PPGMap )</i> . . . . .   | 13 |
| <b>Operadores hipercíclicos</b> . . . . .   | 14 |
| <i>Hugo Ibáñez ( PPGMat )</i> . . . . .   | 14 |
| <b>A álgebra de Taft <math>T_n(q)</math></b> . . . . .  | 16 |

|   |    |
|---|----|
| <i>Juliana Borges Pedrotti ( PPGMAT (UFMS) )</i> . . . . .  | 16 |
| <b>Ações parciais de uma álgebra de Hopf sobre seu corpo base</b> . . . . .   | 16 |
| <i>Leonardo Duarte Silva ( PPGMat )</i> . . . . .   | 16 |
| <b>Uma prova para a Desigualdade Isoperimétrica utilizando Transporte Ótimo</b> . . . . .   | 18 |
| <i>Lucas Pinto Dutra ( PPGMat )</i> . . . . .   | 18 |
| <i>Diego Marcon Farias ( PPGMat )</i> . . . . .   | 18 |
| <b>Uma Introdução ao particionamento espectral de grafos</b> . . . . .  | 18 |
| <i>Luciano Garim Garcia ( PPGMap )</i> . . . . .  | 18 |
| <i>Carlos Hoppen ( PPGMap )</i> . . . . .   | 18 |
| <b>Calculando os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos através do suporte de subárvores</b> . . . . .                   | 20 |
| <i>Maikon Machado Toledo ( PPGMap )</i> . . . . .   | 20 |
| <i>Vilmar Trevisan ( PPGMap )</i> . . . . .   | 20 |
| <i>Luiz Emílio Allem ( PPGMap )</i> . . . . .   | 20 |
| <b>Transporte Ótimo</b> . . . . .   | 21 |
| <i>Marcus Vinícius da Silva ( PPGMat )</i> . . . . .  | 21 |
| <i>Diego Marcon Farias ( PPGMat )</i> . . . . .   | 21 |
| <b>Comparação entre os Métodos da Decomposição de Adomian Modificado e Runge-Kutta44 para Solução do Processo de Digestão Anaeróbia</b> . . . . . | 22 |
| <i>Marline Ilha da Silva ( PPGMap )</i> . . . . .   | 22 |
| <i>Álvaro Luiz de Bortoli ( PPGMap )</i> . . . . .  | 22 |
| <b>Fatoração explícita de polinômios de Dickson sobre corpos finitos</b> . . . . .  | 24 |
| <i>Nelcy Esperanza Arévalo Baquero ( PPGMap )</i> . . . . .   | 24 |
| <i>Fabio Enrique Brochero Martinez ( UFMG )</i> . . . . .   | 24 |
| <b>Um método simples para obter subálgebras coideais à direita para algumas álgebras quânticas</b> . . . . .                                      | 25 |
| <i>Priscila Nunes dos Santos ( PPGMat )</i> . . . . .   | 25 |
| <b>Um método simples para obter base PBW para algumas álgebras quânticas pequenas</b> . . . . .   | 26 |
| <i>Vanusa Moreira Dylewski ( PPGMat )</i> . . . . .   | 26 |
| <b>OFICINA</b> . . . . .  | 27 |
| <b>Desvendando o Cubo Mágico</b> . . . . .  | 27 |
| <i>Gleiciano Cosmo Santos ( PPGMat )</i> . . . . .  | 27 |
| <i>Silvia Barcelos Machado ( PPGMap )</i> . . . . .   | 27 |

---

# MINICURSO

---

## A transformada de Fourier em resoluções de problemas de EDP

*Wanderley Nascimento - UFRGS*  
*wanderley.nascimento@ufrgs.br*

### Resumo

A transformada de Fourier é uma importante ferramenta para a investigação das propriedades da solução de equações diferenciais parciais, como por exemplo as equações de evolução. Neste minicurso vamos definir e estudar as principais propriedades da transformada de Fourier. Usaremos a transformada de Fourier para encontrarmos a solução clássica para a equação do calor.

---

# Palestras

---

## Um autovetor bilionário

*Carlos Hoppen - UFRGS*  
*choppen@ufrgs.br*

### Resumo

Nesse encontro, discutirei o papel da Álgebra Linear no algoritmo PageRank, que é um dos pilares do algoritmo de busca da Google. Também mencionarei outros contextos onde essa ideia é utilizada, por exemplo na avaliação de periódicos científicos.

## Discutindo a teoria dos registros de representação, para além das atividades de tratamento e conversão

*Cátia Nehring - UNIJUÍ*  
*catia@unijui.edu.br*

### Resumo

A teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval é utilizada no Brasil sustentando diferentes pesquisas de mestrado e doutorado, a partir da década de 80, muito focado em explicitar as dificuldades nas atividades de tratamento e conversão. A principal questão do autor é explicar como se dá a aprendizagem matemática nos sujeitos. Nesta fala apresento/discuto alguns elementos que levam o Grupo de Estudos em Educação Matemática, ampliar as compreensões a partir da teoria dos RRS, como modo de explicitar e compreender os processos de ensino e aprendizagem, utilizando para isso a teoria da objetivação e a teoria da atividade.

## Relato de experiência: Do ensino básico à gestão

*Eduardo Meliga Pompermayer - IFRS - Campus Canoas*  
*eduardo.pompermayer@canoas.ifrs.edu.br*

### Resumo

Relato da vida acadêmica e profissional, apresentando como a pós-graduação influenciou na carreira docente. Apresentando os novos desafios na carreira profissional.

# Importa tratar da noção deleuziana de *problema* na educação matemática escolar?

*Francisco Egger Moellwald - UFRGS (FACED)*  
*chicoegger@gmail.com*

## Resumo

Esta conversa refere a um exercício de pensamento que se atualiza a partir de uma produção escrita discente; exercício e produção escrita que constituem, respectivamente, objetivo e temática dos planos de ensino de disciplinas referentes à prática dos estágios de docência de dois cursos de Licenciatura em Matemática e uma estratégia docente empregada em uma disciplina do Curso de Mestrado em Ensino de Matemática, todos da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Essa produção se caracteriza como um exercício analítico com base teórica fundamentada em referências estudadas em classe e em seções de orientação. Portanto, o objeto desta conversa se caracteriza como um processo de atualização que brota com a elaboração de um texto, cujo foco se concentra na busca de possíveis efeitos da noção deleuziana de problema na educação matemática escolar. Esta noção se origina da potência de um signo que surge de um encontro fortuito e que violenta o sentido, provocando-nos certa estupefação e forçando-nos à necessidade de criar, “gênese do ato de pensar no próprio pensamento” (DELEUZE, 2006a, p. 91). Desta forma, pensar e aprender se entrecruzam pela interpretação de signos, o que nos leva a atentar para a potência da noção de problema, segundo Deleuze, em nosso cotidiano escolar.

# Uma relação algébrica para geração de uma topologia no espaço de Minkowsky

*Glauber Rodrigues de Quadros - UFSM - Campus Cachoeira do Sul*  
*glauber.quadros@ufsm.br*  
*Lucas Tavares Cardoso - UFSM - Campus Cachoeira do Sul*  
*ltcfisica@yahoo.com.br*

## Resumo

O estudo da Teoria da Relatividade Especial envolve o conceito de *Espaço de Minkowsky*, um espaço vetorial de dimensão 4 sobre  $\mathbb{R}$  com um produto interno de Lorentz de índice 1 nele definido. Este produto é parte da estrutura do espaço pois carrega a ideia fundamental de causalidade. No trato de aspectos topológicos de  $\mathcal{M}$ , usualmente se admite a topologia Euclideana. Entretanto, o produto interno de Lorentz não induz sequer uma topologia métrica, pois é somente uma forma bilinear simétrica indefinida, desta forma não é natural equipar  $\mathcal{M}$  com a topologia Euclideana. Uma forma de contornar este problema é encontrar uma topologia em  $\mathcal{M}$  que tenha significado proveniente da física. Esta topologia deve partir do princípio fundamental de causalidade, o qual induz uma ordem parcial no espaço-tempo. Este trabalho tem como objetivo construir uma topologia para o espaço de Minkowsky, através de uma relação algébrica obtida por meio da observação do princípio de causalidade.

## Uma introdução aos códigos corretores de erros

*Juliane Capaverde - UFRGS*  
*juliane.capaverde@ufrgs.br*

### Resumo

Os códigos corretores de erros estão presentes no nosso cotidiano sempre que fazemos uso de informações digitalizadas. O objetivo desses códigos é acrescentar dados à informação que será transmitida ou armazenada, de modo que seja possível detectar e corrigir erros que possam ocorrer na transmissão. Esta é uma área de pesquisa bastante ampla e ativa, e que mistura técnicas de álgebra abstrata com aplicações na vida real. Nesta palestra, faremos uma introdução à teoria dos códigos corretores de erro, e apresentaremos algumas famílias de códigos utilizadas na prática.

## Derivações: um pouco de história no Departamento de Matemática

*Renê Baltazar - FURG - Campus Santo Antônio da Patrulha*  
*renebaltazar@furg.br*

### Resumo

Apresentaremos alguns aspectos que justificam o interesse no estudo de Derivações em um contexto algébrico. Para isso, será proposto um apanhado de trabalhos que influenciaram as primeiras pesquisas na área no Departamento de Matemática na UFRGS; em destaque, as atuações de Yves Lequain (IMPA) e Miguel Ferrero (UFRGS). No que segue, será proposto uma série de tópicos recentes de problemas: muitos deles com um viés geométrico.

## Fazendo pesquisa com amigos e desconhecidos. A "sorte" na hora de formular perguntas e buscar por respostas

*Rodrigo Bissacot - USP*  
*bissacot@ime.usp.br*

### Resumo

Discutiremos, de maneira não técnica, como questões em áreas da Matemática (pura e aplicada) podem gerar respostas e motivar novas perguntas em outras áreas supostamente distantes. Com exemplos concretos, que vão da Física-Matemática à Combinatória, passando por Análise, Probabilidade, Álgebra e Sistemas Dinâmicos, abordaremos a questão de como fazer colaborações científicas e de como escolher (e também quando abandonar) problemas enquanto estudante de pós-graduação e no início na carreira, as dificuldades e facilidades na pesquisa nos dias de hoje.

---

# Comunicações dos Alunos

---

## Estimativa de Fontes de Partículas Neutras

*Cássio Baissvenger Pazinato - IFSul - Campus Pelotas*  
*cpazinatto@ufrgs.br*

### Resumo

Inicialmente relacionada ao tratamento de fenômenos relacionados a dinâmica de gases rarefeitos, a equação de transporte fornece um importante modelo para o transporte de partículas neutras. Pode-se citar aplicações relacionadas à análise e modelagem de reatores nucleares [5], à detecção de materiais nucleares em questões de segurança de fronteiras [6], às análises tomográficas [1], à identificação não destrutiva de materiais [3], à perfilagem de poços de petróleo [2], entre outros.

Alguns dos problemas citados acima dizem respeito à classe dos chamados problemas inversos [4]. Por exemplo, a estimativa de fontes de partículas, um problema típico da detecção de materiais nucleares, pode-se utilizar medições interiores ao domínio com a finalidade de estimar a distribuição espacial e a intensidade de uma fonte interna de partículas. Tais processos demandam muito tempo computacional e, nesse sentido, a adjunta da equação de transporte surge como uma ferramenta que pode ser bastante útil.

Neste trabalho, é considerado um problema de estimativa de fontes de partículas, no qual tenta-se estimar uma fonte isotrópica de partículas através do conhecimento de leituras – ruidosas – de diversos detectores de partículas situados no interior do domínio do problema. Para isso, são assumidas como conhecidas todas as propriedades físicas do meio no qual as partículas estão migrando, bem como o fluxo de partículas incidente nas fronteiras. Então, utiliza-se a adjunta da equação de transporte para derivar um modelo linear que relaciona a taxa de absorção de partículas dos detectores com os coeficientes da expansão da fonte (ou aproximação) em alguma base de funções. Posteriormente, tais coeficientes são estimados pela minimização da norma 2 da discrepância entre leituras numéricas (provenientes do modelo) e as observadas. Para o tratamento dos ruídos inerentes das leituras, aplica-se a regularização de Tikhonov [4], que nada mais é do que uma versão penalizada do problema original de minimização.

### Referências

- [1] A. Addoum, O. Farges, and F. Asllanaj. Optical properties reconstruction using the adjoint method based on the radiative transfer equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 204:179–189, 2018.
- [2] Y. Azmy and E. Sartori. *Nuclear Computational Science: A Century in Review*. Springer, 2010.
- [3] M. Haltmeier, L. Neumann, and S. Rabanser. Single-stage reconstruction algorithm for quantitative photoacoustic tomography. *Inverse Problems*, 31(6):1–24, 2015.



- [4] J. Kaipio and E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer, New York (NY), 2005.
- [5] A. K. Prinja and E. W. Larsen. *General Principles of Neutron Transport, Chapter 5 in Handbook of Nuclear Engineering, Vol. 1: Nuclear Engineering Fundamentals*. Springer, New York (NY), 2010.
- [6] E. Somasundaram and T. Palmer. Application of variational variance reduction for source-detector problems in nuclear non-proliferation. *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 45(7):554–577, 2016.

## Desenvolvendo uma Medida de Núcleo de Inflação

*Cristina Zaniol - PPGMap*  
*criszaniol@gmail.com*

### Resumo

### Introdução

A inflação nada mais é que o aumento dos preços que pode ser mensurado através da utilização de um índice de preços. Para acompanhar a evolução são utilizados uma série de índices, entre estes o Índice de Preços ao Consumidor (IPCA). O objetivo do IPCA é oferecer a medida do movimento geral dos preços no mercado varejista, isto é, um indicador da inflação ao nível do consumo pessoal, excluindo extremos, como famílias cujo rendimento está abaixo de um salário mínimo ou com rendimentos muito elevados [4].

O IPCA, assim como outras medidas de inflação convencionais, possuem ruídos de alta frequência que refletem a dinâmica de curto prazo da economia. Estes efeitos transitórios dificultam a previsão e a implementação de políticas monetárias, sendo necessário a adoção de uma medida, os Núcleos de Inflação, que reduza a volatilidade e permita uma boa previsão [2, 3].

### Wavelets

Wavelets são definidas como uma combinação de funções ortogonais [5],

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a > 0, \quad (1)$$

onde  $a$  e  $b$  são os parâmetros de escala e translação, respectivamente. A partir desta construção, é possível decompor sinais em componentes de alta e baixa frequências, possibilitando também o estudo destas diferentes frequências separadamente. O sinal é, portanto, decomposto em uma aproximação e em seus detalhes.

As wavelets utilizadas no presente trabalho são as Daubechies. Estas são uma família de wavelets ortogonais e de suporte compacto desenvolvidas por Ingrid Daubechies, as quais não possuem forma explícita, isto é, são definidas recursivamente com exceção da db1 (Haar).

## Resultados Preliminares

Os dados utilizados para a construção do Núcleo de Inflação foram obtidos no Banco Central [1], onde foram selecionados de janeiro de 2000 até janeiro de 2018. Para este teste, o Núcleo de Inflação foi gerado utilizando uma decomposição em três níveis da Daubachies 4, utilizando apenas dois níveis para a reconstrução.

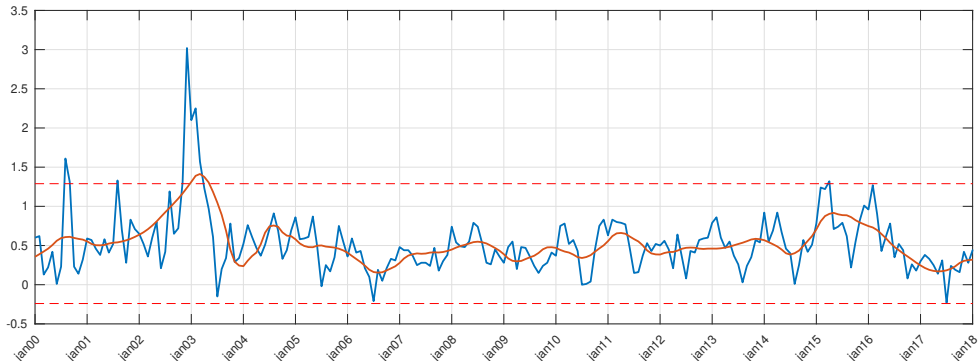


Figura 1: Reconstrução do IPCA com um nível de detalhe.

## Discussões

O presente trabalho é apenas um resultado preliminar que converge para o desenvolvimento de uma nova métrica de Núcleo de Inflação, utilizando Wavelets e Redes Neurais, que considere outros indicadores na previsão da inflação, como taxa de câmbio, de juros e o crescimento econômico. Pretende-se, com isso, a criação de uma ferramenta robusta que possa ser utilizada como instrumento auxiliar na construção de políticas monetárias.

## Referências

- [1] BANCO CENTRAL DO BRASIL. Séries Temporais. Disponível em [https : //www.bcb.gov.br/?serietemp](https://www.bcb.gov.br/?serietemp), acessado em 22/10/2018.
- [2] BAQAEE, David. Using wavelets to measure core inflation: the case for New Zeland. North American Journal of Economics and Finance. Elsevier, v. 21. 2010.
- [3] CHECCHETTI, Stephen G.. Measuring short-run inflation for central bankers. Federal Reserve Bank of St. Louis Review. St. louis: Federal Reserve Bank of St. Louis, v. 79, n. 3, May/Jun 1997.
- [4] IBGE. SSistema Nacional de Índice de Preço ao Consumidor: Estrutura de Ponderação a Partir da Pesquisa de Orçamentos Familiares 2008-2009, v. 38, 2012 (Série Relatórios Metodológicos). Disponível em [https : //ww2.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc\\_ipca/srmipca\\_pof\\_2008\\_2009.pdf](https://ww2.ibge.gov.br/home/estatistica/indicadores/precos/inpc_ipca/srmipca_pof_2008_2009.pdf), acessado em 25/10/2017.
- [5] NIEVERGELT, Y. Wavelets Made Easy. Birkhauser, 1999.

# Teoria de Existência e Simulações para a equação do transporte unidimensional

*Debora Dalmolin - PPGMap*  
*deborasdalmolin@hotmail.com*  
*Fabio Azevedo - PPGMap*  
*fabio.azevedo@ufrgs.br*  
*Esequia Sauter - PPGMap*  
*esequia@gmail.com*

## Resumo

Consideramos o modelo dado pela equação de transporte em estado estacionário em um meio participativo com fontes internas e fronteiras semi-reflectiva. Ainda, consideraremos o problema linear unidimensional em um meio homogêneo no domínio  $D = \{(x, \mu); (x, \mu) \in [0, L] \times [-1, 1]\}$ , isto é:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} I(x, \mu) + \lambda I(x, \mu) = \sigma \hat{I}(x) + S(x), \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad -1 \leq \mu \leq 1,$$

onde  $\hat{I}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(x, \mu) d\mu$  e representa o fluxo escalar.

Neste problema  $I(x, \mu)$  é o fluxo de partículas na posição  $x$  na direção de  $\mu$ , onde  $x$  é a variável espacial e  $\mu$  é cosseno do ângulo formado entre a direção de propagação e o eixo  $x$ . O termo  $S(x)$  é dado representa a fonte interna do problema. Os coeficientes de absorção e espalhamento são não-negativos e denotados, respectivamente, por  $\lambda$  e  $\sigma$ , e  $\sigma < \lambda$ .

A equação de transporte fica completa quando adicionamos as equações de contorno:

$$\begin{aligned} I(0, \mu) &= \rho_0(\mu)I(0, -\mu) + (1 - \rho_0(\mu))B_0(\mu), \quad \mu > 0; \\ I(L, \mu) &= \rho_L(\mu)I(L, -\mu) + (1 - \rho_L(\mu))B_L(\mu), \quad \mu < 0, \end{aligned}$$

onde  $B_0(\mu)$  e  $B_L(\mu)$  são funções integráveis que representam contribuições de fronteira e  $0 \leq \rho_0, \rho_L \leq 1$  são os coeficientes de reflexão.

Resolvemos esse problema tanto analítica como numericamente. Do ponto de vista analítico, generalizamos a teoria de existência para soluções no espaço  $C^\alpha$  quando as fontes estão no espaço de funções contínuas. Para obter uma solução numérica para o fluxo escalar, escrevemos a equação como uma equação de Fredholm do segundo tipo e aplicamos o método de Nyström com as quadraturas de Boole e Gauss-Legendre. Técnicas analíticas e computacionais foram implementadas para lidar com a singularidade do núcleo. Além disso, calculamos os autovalores do problema que neste contexto consolida os testes numéricos. Mostramos a eficiência do método proposto através de alguns testes numéricos e comparamos nossos resultados com aqueles que podem ser encontrados na literatura.

# Ações de álgebras de Hopf em álgebras - Uma introdução.

*Félix Afonso De Afonso - PPGMat*

*felix2afonso@gmail.com*

*Wagner Cortes - PPGMat*

*cortes@mat.ufrgs.br*

*Thaísa Tamusiunas - PPGMat*

*trtamusiunas@yahoo.com.br*

## Resumo

No início da década de 60 Pierre Cartier e, paralelamente, Armand Borel introduziram o conceito de álgebra de Hopf, nome esse dado por Borel em homenagem ao matemático Heinz Hopf. Hoje as álgebras de Hopf representam um importante tema de estudo da álgebra, sendo amplamente explorada em diversos aspectos. As ações de álgebras de Hopf, no caso parcial, são um desses aspectos estudados. Para entender esta noção, que foi estendida do contexto de grupos para o contexto de álgebras de Hopf por S. Caenepeel e K. Janssen no final dos anos 2000, é necessário entender o caso global. Nesta direção que trazemos esse trabalho, que surgiu dos estudos da disciplina de Ações de Álgebras de Hopf e temas relacionados, ministrada pelos professores Dr. Wagner Cortes e Dra. Thaísa Tamusiunas. Portanto, temos como objetivo definir uma ação de álgebra de Hopf em álgebras, isto é, dada uma álgebra de Hopf  $H$  o que significa dizer que  $H$  age em uma álgebra  $A$ ? Além disso, vamos trazer também uma importante definição no estudo de álgebras de Hopf, o produto smash, que é definido através do produto tensorial de uma álgebra  $A$  e uma álgebra de Hopf  $H$ , indo mais além, trazemos uma generalização do produto smash, denominada produto cruzado, que é dado quando a álgebra de Hopf  $H$  age fracamente em  $A$ , isto é, uma das condições da definição de ação não é satisfeita. Por fim, temos alguns exemplos desta teoria nos caso em que a álgebra de Hopf em questão é a álgebra de grupos.

## Referências

DASCALESCU, S. Et al. Hopf algebras: an introduction. Marcel Dekker, Inc, 2000.

FERREIRA, V. MURAKAMI, L., Introdução às álgebras de Hopf. Notas de aula 2015. USP, São Paulo.

# Problema de Plateau assintótico em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

*Felix Nieto - PPGMat*  
*fnietoc@ut.edu.com*

## Resumo

Nesta comunicação gostaria de apresentar a definição de bordo assintótico na variedade  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , do mesmo modo explicar o que seria o problema de Plateau no bordo assintótico de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  e possíveis generalizações para superfícies CMC-H com  $0 \leq H \leq 1/2$ .

# Nordhaus-Gaddum inequalities for $l_2$ .

*Guilherme Porto* - PPGMap  
*guilherme.porto@ufrgs.br*  
*Vilmar Trevisan* - PPGMap  
*vilmar.trevisan@ufrgs.br*

## Resumo

In this note, we consider a simple graph  $G = (V(G), E(G))$  on  $n$  vertices and  $e(G)$  edges, where  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  is the vertex set and  $E(G)$  is the edge set.

The *Laplacian matrix* of  $G$  is the matrix  $L(G) = D(G) - A(G)$ , where  $A(G)$  is the *adjacency matrix* and  $D(G)$  is the *diagonal matrix* with the degree sequence on its main diagonal. It is well-known that  $L(G)$  is symmetric and positive semidefinite. The eigenvalues of  $L(G)$  are called the *Laplacian eigenvalues* of  $G$ , and are denoted by  $l_1(G) \geq l_2(G) \geq \dots \geq l_n(G) = 0$ .

The *complement of a graph*  $G$  is a graph  $G^c$  on the same vertex set such that two distinct vertices of  $G^c$  are adjacent if and only if they are not adjacent in  $G$ . Let  $\rho = \rho(G)$  be an invariant in a graph  $G$ , we denote by  $\rho^c = \rho(G^c)$  the same invariant in  $G^c$ .

This work is loosely inspired by the seminal paper of V. Nikiforov [1], where bounds for the (partial sums of) eigenvalues of graphs are obtained and numerous problems on the topic are proposed. Instead of dealing with the adjacency matrix of a graph  $G$ , here we are concerned with the Laplacian matrix of  $G$ . More precisely, we narrow down to investigate Nordhaus-Gaddum inequalities for its second largest eigenvalue.

In 1956, E. Nordhaus and J. Gaddum [2] gave lower and upper bounds on the sum and the product of the chromatic number of a graph and its complement, in terms of the order of the graph. Since then, any bound on the sum and/or the product of a graph invariant of  $G$  and the same invariant of  $G^c$  is called a *Nordhaus-Gaddum type inequality*. In general these inequalities are quite elegant as they reveal extremal values for a graph parameter and its complement. On the other hand, it may be quite difficult to be obtained.

A spectral graph invariant is a graph parameter defined using eigenvalues of the matrices associated with the graph, including the eigenvalues themselves. Many Nordhaus-

Gaddum type inequalities involve eigenvalues of the adjacency, Laplacian and signless Laplacian matrices of graphs.

In 2013, Nordhaus-Gaddum type inequalities for graph parameters were surveyed by M. Aouchiche and P. Hansen [3], where it may be seen that relations of a similar type have been proposed for many other graph invariants, in several hundred papers.

We present here Nordhaus-Gaddum type inequalities for the second largest eigenvalue of the Laplacian matrix. More precisely, we have studied the following conjecture.

**Conjecture 1.** Let  $G$  be a graph of order  $n \geq 2$ . Then

$$n \leq l_2 + l_2^c \leq 2n - 2.$$

**Conjecture 2.** Let  $G$  be a graph of order  $n \geq 4$ , with  $2 \leq e(G) \leq \binom{n}{2} - 2$ . Then

$$n - 2 \leq l_2 l_2^c \leq n(n - 2).$$

We show that the conjectures are valid for trees and unicyclic graphs. Moreover, we show that these bounds are the best possible presenting graphs satisfying the equality.

## Referências

- [1] Nikiforov, Vladimir. Extrema of graph eigenvalues. *Linear Algebra and its Applications*, 482 (2015): 158-190.
- [2] Nordhaus, E. A., and Jerry W. Gaddum. On complementary graphs. *The American Mathematical Monthly*, 63.3 (1956): 175-177.
- [3] Aouchiche, Mustapha, and Pierre Hansen. A survey of Nordhaus-Gaddum type relations. *Discrete Applied Mathematics*, 161.4 (2013): 466-546.

## Operadores hipercíclicos

Hugo Ibáñez - PPGMat  
 hugoibanez2000@gmail.com

### Resumo

O objetivo da apresentação é após definir operador hípercíclico, apresentar um exemplo exposto no artigo: On orbits of elements de S. Rolewicz em 1969. Aí está o exemplo:

**Teorema:** Seja  $X$  ou  $\ell^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) ou  $c_0$ . Para todo número real  $a > 1$  arbitrário, existe um operador  $T$  e um elemento  $x_0$  tal que a órbita  $orb(x_0, T)$  é densa em  $X$ .

*Demonstração.* Sejam  $B$  o shift à esquerda

$$B(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

e  $F$  o shift à direita

$$F(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Definimos assim  $T = aB$  e  $S = F/a$ . Então  $\|T\| = a$ ,  $\|S\| = 1/a$ ,  $TS = I$ , onde  $I$  denota o operador identidade.

Agora começaremos a contruir o vetor  $x_0$ . Seja  $\{x^{(n)} : n \geq 1\}$  um conjunto denso em  $X$  formado por seqüências finitas, ou seja, somente um número finito de suas coordenadas é não nulo. Seja  $m_k$  o maior índice com  $x_{m_k}^{(k)} \neq 0$ .

Defina uma seqüência  $(n_k)_k$  de inteiros positivos tal que

$$n_k > \max_{1 \leq i \leq k} m_i \quad (2)$$

e

$$\|S^{n_k} x^{(k)}\| < \frac{1}{2^k}. \quad (3)$$

Seja

$$p(k) = \sum_{i=1}^k n_i. \quad (4)$$

Escrevemos

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} S^{p(k)} x^{(k)}. \quad (5)$$

De (1.2) obtemos que (1.4) é convergente, pois,

$$\|S^{p(k)} x^{(k)}\| \leq \|S^{n_1}\| \cdot \|S^{n_2}\| \cdots \|S^{n_{k-1}}\| \cdot \|S^{n_k} x^{(k)}\| < \frac{1}{a^{p(k-1)} 2^k}.$$

A condição (1.1) implica que

$$T^{n_k} x^{(i)} = 0 \quad \text{para } i < k. \quad (6)$$

Assim sendo

$$\begin{aligned} T^{p(k)} x_0 &= T^{p(k)} (S^{p(1)} x^{(1)} + \cdots + S^{p(k)} x^{(k)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} S^{p(i)} x^{(i)}) \\ &= x^{(k)} + \sum_{i=k+1}^{\infty} S^{p(i)-p(k)} x^{(i)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Mas

$$\left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} S^{p(i)-p(k)} x^{(i)} \right\| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \|S^{n_i} x^{(i)}\| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k}. \quad (8)$$

Portanto

$$\|T^{p(k)} x_0 - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}. \quad (9)$$

Seja  $x \in X$  arbitrário. Como  $\{x^{(n)} : n \geq 1\}$  é denso em  $X$ , podemos extrair uma subseqüência  $(x^{(n_j)})_j$  tal que  $x^{(n_j)} \rightarrow x$ . Então

$$\|T^{p(n_j)} x_0 - x\| \leq \|T^{p(n_j)} x_0 - x^{(n_j)}\| + \|x^{(n_j)} - x\| \quad (10)$$

fazendo  $j \rightarrow \infty$  obtemos  $T^{p(n_j)} x_0 \rightarrow x$ . Isso nos dá que  $orb(x_0, T)$  é densa em  $X$ .  $\square$

## A álgebra de Taft $T_n(q)$

*Juliana Borges Pedrotti - PPGMAT (UFSM)*  
*julianabpedrotti@gmail.com*

### Resumo

A álgebra de Taft  $T_n(q)$ , foi introduzida por Earl J. Taft em 1971 [3], com base na álgebra de Sweedler e é um dos principais exemplos de álgebras de Hopf não comutativa, não cocomutativa, e que possui antípoda de ordem par.

Neste trabalho iremos mostrar que a álgebra de Taft é uma álgebra de Hopf, para isso usaremos algumas definições e resultados da teoria de Álgebras Livres.

### Referências

- [1] Iglesias, A. G., *Álgebras de Hopf - Parte II*, Notas de minicurso, Programa de Pós Graduação em Matemática, UFSM, 2012.
- [2] Dăscălescu, S., Năstăsescu, C. e Raianu, S. *Hopf Algebras: An Introduction*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 235, Marcel Dekker, 2001.
- [3] Taft, E. J., *The Order of the Antipode of Finite-Dimensional Hopf Algebra*. Proc. Nat Acad. of Sci. USA 68, No. 11 2631-2633, 1971.

## Ações parciais de uma álgebra de Hopf sobre seu corpo base

*Leonardo Duarte Silva - PPGMat*  
*leonardoufpel@gmail.com*

### Resumo

As ações parciais surgiram inicialmente dentro da teoria de álgebra de operadores. Mais precisamente, no trabalho de R. Exel [10] sobre  $C^*$ -álgebras geradas por isometrias parciais em um espaço de Hilbert. Rapidamente o autor percebeu o potencial de tal objeto, sacando-o deste contexto e desenvolvendo-o como um conceito por si próprio. Desde então, ações parciais têm se mostrado uma ferramenta importante para a pesquisa em vários campos da matemática, e portanto têm sido um objeto de ampla pesquisa nos últimos anos. Para detalhes e mais informações, veja por exemplo [7, 8].

Nosso interesse é em ações parciais de uma  $\mathbb{k}$ -álgebra de Hopf  $H$  sobre uma  $\mathbb{k}$ -álgebra unitária  $A$ . Para os interessados nos resultados e desenvolvimentos desta teoria, recomendamos os trabalhos [3, 4, 5, 9], junto de suas extensas listas de referências.

Dizemos que  $H$  age parcialmente sobre  $A$  se existir uma aplicação  $\mathbb{k}$ -linear, chamada de *ação parcial de  $H$  sobre  $A$* ,  $\cdot : H \otimes A \rightarrow A$  tal que para todos  $h, k \in H$  e  $a, b \in A$ , valem:

- (i)  $1_H \cdot a = a$ ;
- (ii)  $h \cdot ab = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$ ;



$$(iii) \quad h \cdot (k \cdot a) = (h_1 \cdot 1_A)(h_2 k \cdot a).$$

Uma classe importante de exemplos é dada quando consideramos  $H$  agindo em  $A$  através de uma ação parcial  $\cdot$  de  $H$  sobre seu corpo base  $\mathbb{k}$ , isto é,  $h \cdot a := (h \cdot 1_{\mathbb{k}})a$ , para cada  $h \in H$  e  $a \in A$ . Muitos autores têm conseguido caracterizar este caso específico de ação parcial, veja por exemplo [1, 2, 6]. Neste caso, uma ação parcial de  $H$  sobre o corpo base  $\mathbb{k}$  está em correspondência com um funcional  $\lambda : H \rightarrow \mathbb{k}$  satisfazendo  $\lambda(1_H) = 1_{\mathbb{k}}$  e  $\lambda(h)\lambda(k) = \lambda(h_1)\lambda(h_2k)$ , para todos  $h, k \in H$ .

Neste trabalho, utilizando a correspondência via o funcional  $\lambda$ , desenvolvemos um método e algumas propriedades que auxiliam no cálculo das ações parciais de  $H$  em  $\mathbb{k}$ , para uma  $\mathbb{k}$ -álgebra de Hopf  $H$  dada. Como exemplo, apresentamos algumas destas ações parciais calculadas para certas famílias de álgebras de Hopf.

Este trabalho foi desenvolvido em colaboração com Eneilson Campos Fontes (FURG), Grasiela Martini (FURG) e Graziela Langone Fonseca (IFSUL - Campus Charqueadas).

## Referências

- [1] E. R. Alvares, M. M. S. Alves, E. Batista. *Partial Hopf module categories*. Journal of Pure and Applied Algebra 217 (8) (2013) 1517-1534.
- [2] M. M. S. Alves, E. Batista. *Enveloping actions for partial Hopf actions*. Communications in Algebra 38 (8) (2010) 2872-2902.
- [3] M. Alves, E. Batista, *Globalization theorems for partial Hopf (co)actions and some of their applications*. Contemporary Mathematics - American Mathematical Society 537 (2011) 13-30.
- [4] E. Batista. *Partial actions: what they are and why we care*. Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin 24 (1) (2017) 35-71.
- [5] S. Caenepeel, K. Janssen. *Partial (co)actions of Hopf algebras and partial Hopf-Galois theory*. Communications in Algebra 36 (8) (2008) 2923-2946.
- [6] F. Castro, A. Paques, G. Quadros, A. Sant'Ana. *Partial actions of weak Hopf algebras: smash product, globalization and Morita theory*. Journal of Pure and Applied Algebra 219 (12) (2015) 5511-5538.
- [7] M. Dokuchaev. *Partial actions: a survey*. Contemporary Mathematics - American Mathematical Society 537 (2011) 173-184.
- [8] M. Dokuchaev. *Recent developments around partial actions*. São Paulo Journal of Mathematical Sciences (2018) <https://doi.org/10.1007/s40863-018-0087-y>.
- [9] M. Dokuchaev, M. Ferrero, A. Paques. *Partial actions and Galois theory*. Journal of Pure and Applied Algebra 208 (1) (2007) 77-87.
- [10] R. Exel. *Circle actions on  $C^*$ -algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequences*. Journal of Functional Analysis 122 (3) (1994) 361-401.

# Uma prova para a Desigualdade Isoperimétrica utilizando Transporte Ótimo

Lucas Pinto Dutra - PPGMat  
*lucas.dutra@caxias.ifrs.edu.br*  
 Diego Marcon Farias - PPGMat  
*diego.marcon@ufrgs.br*

## Resumo

Resumo: O objetivo da apresentação é introduzir uma versão bastante geral e apresentar uma demonstração para a famosa Desigualdade Isoperimétrica, seguindo uma adaptação de uma prova já conhecida devida à Gromov. Para tal, explicamos as ferramentas básicas da teoria de Transporte Ótimo, definições e resultados básicos, como a existência de uma aplicação de transporte ótimo (Teorema de Brenier, 1987). Além disso, enunciamos uma versão quantitativa do problema isoperimétrico; mais precisamente, dois resultados, um devido à Fusco, Maggi e Pratelli, e outro à Figalli, Maggi e Pratelli, que foram obtidos de maneira independente e com técnicas diferentes.

# Uma Introdução ao particionamento espectral de grafos

Luciano Garim Garcia - PPGMap  
*lucianogarim@gmail.com*  
 Carlos Hoppen - PPGMap  
*choppen@ufrgs.br*

## Resumo

Frequentemente, os grafos são utilizados por matemáticos e cientistas da computação para extrair abstrações interessantes que podem modelar problemas reais. Neste sentido, um problema bem conhecido em Computação como o agrupamento de dados (*clustering*) pode ser transformado em um problema de particionamento de grafos. Formalmente, esse problema depende de um conjunto finito  $S$  de dados e de uma função de similaridade  $f: S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , onde  $f(x, y) > f(w, z)$  implica que  $x$  e  $y$  são mais similares do que  $z$  e  $w$ . Dado um inteiro positivo  $k$ , o objetivo é particionar o conjunto  $S$  em  $k$  classes de forma que elementos em uma mesma classe sejam similares e elementos em classes distintas não o sejam. Isso é feito através da otimização de uma função objetivo. Vale ressaltar que a escolha dessa função não é canônica, ilustrando o fato de que a noção de uma "boa partição" pode ser diferente em diferentes contextos.

Para modelar esse problema em termos de grafos, supomos que os dados sejam vértices e a similaridade entre os dados seja descrita por pesos não-negativos associados às arestas. Dado um número  $k \in \mathbb{N}_{>1}$  e um grafo  $G = (V, E)$  com pesos não-negativos em suas arestas,  $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , o problema de particionamento de grafo (GPP) busca determinar uma partição  $P$  de  $V$  com classes de vértices  $P = \{V_1, \dots, V_k\}$  satisfazendo as seguintes condições:  $V_1 \cup \dots \cup V_k = V$  e  $V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j$ . Dessa forma, deseja-se encontrar uma partição no grafo tal que os vértices em diferentes grupos possuam pouca similaridade e vértices do mesmo grupo possuam alta similaridade.

Para medir a qualidade de uma partição, é possível considerar o problema do corte mínimo (Mincut), que consiste em escolher uma partição  $V_1, \dots, V_k$  que minimize:  $Cut(V_1, \dots, V_k) = \sum_i^k cut(V_i, V_i^c)$ , aqui,  $cut(V_i, V_i^c) = \sum_{u \in V_i, v \in V_i^c} \omega_{uv}$  é o peso das arestas entre um conjunto e seu complementar. É claro que essa formulação não considera a informação de similaridade dentro dos grupos e, em muitos casos, a solução do Mincut consiste simplesmente na separação de um vértice isolado dos demais, o que tipicamente não é uma partição desejável para o problema prático.

Um modo de contornar este problema é favorecer partições cujas classes sejam grandes. Neste sentido, pode-se utilizar o método de corte por razão (Ratiocut) e corte normalizado (Ncut), que buscam uma partição que minimize, respectivamente, as funções dadas por  $Ratiocut(V_1, \dots, V_k) = \sum_i^k \frac{cut(V_i, V_i^c)}{|V_i|}$  e  $Ncut(V_1, \dots, V_k) = \sum_i^k \frac{cut(V_i, V_i^c)}{vol(V_i)}$ , onde  $|V_i|$  representa a cardinalidade da classe e  $vol(V_i)$  é o total de pesos provenientes da classe.

Basicamente, a formulação de corte por Ratiocut tipicamente leva a partições mais equilibradas, já que os termos são normalizados pelo tamanho das classes da partição. Porém, ainda não é considerada a similaridade entre os vértices no interior de uma mesma classe. Essa informação é considerada para o Ncut, que substitui a normalização dada pela cardinalidade da classe, pela similaridade entre os vértices da classe. Infelizmente, quando se introduz condições para obter partições balanceadas, o problema de Mincut anteriormente simples de resolver torna-se um problema NP-difícil. Dessa forma, métodos heurísticos ou aproximados têm sido propostos com frequência, os quais fornecem soluções sub-ótimas com significativa redução da complexidade na solução do problema. Entretanto, devido à grande heterogeneidade das aplicações de problemas de agrupamento, as heurísticas são normalmente desenvolvidas para determinadas classes de problemas. Uma família importante de heurísticas são as heurísticas espectrais, baseadas em ferramentas da teoria espectral de grafos.

Pela abordagem espectral, para se aproximar a minimização das formulações Ratiocut e Ncut, são calculados autovetores associados a autovalores específicos de matrizes associadas a grafos, como a matriz laplaciana e matriz laplaciana sem sinal. De fato, tais autovetores correspondem a soluções de relaxações dos problemas apresentados acima. Por exemplo, a partir do Teorema de Rayleigh-Ritz, é possível demonstrar que o autovetor associado ao segundo menor autovalor da matriz laplaciana, conhecido como vetor de Fiedler, é a solução de uma versão relaxada do Ratiocut. Uma consequência disso é que, ao contrário da solução do problema original, que seria dada por vetores característicos das classes da partição, a solução do problema relaxado é dada por vetores em  $\mathbb{R}^k$ , sendo necessário utilizar um algoritmo de agrupamento para transformar os vetores-solução do problema relaxado  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k), x_i \in \mathbb{R}$  em vetores característicos de partições  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k), x_i \in \{0, 1\}$ .

Em fim, este trabalho tem por objetivo apresentar a metodologia de particionamento de grafos pelo espectro, discutindo a relação entre a solução exata e a solução obtida pela relaxação do problema. Além disso, pretende-se apresentar alguns caminhos que estão sendo seguidos na pesquisa para determinar o quão próxima a solução relaxada está da solução exata do problema olhando para determinadas classes de grafos.

## Referências

- [1] A. Addoum, O. Farges, and F. Asllanaj. Optical properties reconstruction using the adjoint method based on the radiative transfer equation. *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, 204:179–189, 2018.

- [2] Y. Azmy and E. Sartori. *Nuclear Computational Science: A Century in Review*. Springer, 2010.
- [3] M. Haltmeier, L. Neumann, and S. Rabanser. Single-stage reconstruction algorithm for quantitative photoacoustic tomography. *Inverse Problems*, 31(6):1–24, 2015.
- [4] J. Kaipio and E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer, New York (NY), 2005.
- [5] A. K. Prinja and E. W. Larsen. *General Principles of Neutron Transport, Chapter 5 in Handbook of Nuclear Engineering, Vol. 1: Nuclear Engineering Fundamentals*. Springer, New York (NY), 2010.
- [6] E. Somasundaram and T. Palmer. Application of variational variance reduction for source-detector problems in nuclear non-proliferation. *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 45(7):554–577, 2016.

## Calculando os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos através do suporte de subárvores

Maikon Machado Toledo - PPGMap

*maikon.toledo@ufrgs.br*

Vilmar Trevisan - PPGMap

*vilmar.trevisan@ufrgs.br*

Luiz Emílio Allem - PPGMap

*emilio.allem@ufrgs.br*

### Resumo

O suporte de um grafo é um subconjunto de vértices do grafo tal que pelo menos uma de suas respectivas coordenadas dos autovetores da base do espaço nulo da matriz de adjacência é diferente de zero. O estudo do suporte de grafo é muito importante, pois ele nos fornece informações estruturais de um grafo. Por exemplo, em [1], D. Jaume e G. Molina usaram o suporte de uma árvore  $T$  para obter fórmulas fechadas para dois parâmetros clássicos. O primeiro é o número de independência de um grafo  $G$ , denotado por  $\alpha(G)$ . Vários matemáticos estudaram  $\alpha(G)$  (por exemplo [3, 4, 5]). Vale destacar que o problema de computar  $\alpha(G)$  é  $NP$ -difícil [2]. O segundo é o número de emparelhamento de um grafo  $G$ , denotado por  $\nu(G)$  [6].

Nessa ótica, nos propomos a estudar quais características podemos obter de um grafo unicíclico através do suporte, mais especificamente, neste trabalho obtivemos fórmulas fechadas para os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos usando o suporte de subárvores. Essas fórmulas permitem calcular os números de independência e emparelhamento de grafos unicíclicos usando métodos de álgebra linear.

## Referências

- [1] D. A. Jaume and G. Molina. Null Decomposition of Trees. *Discrete Mathematics*, 341:836-850, 2018.
- [2] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations*, 85-103, 1972.
- [3] J. B. Shearer. A note on the independence number of triangle-free graphs. *Discrete Mathematics*, 46:83-87, 1983.
- [4] A. M. Frieze. On the Independence Number of Random Graphs. *Discrete Mathematics*, 81:171-175, 1990.
- [5] N. Alon and N. Kahale. Approximating the Independence Number via the J -function. *Mathematical Programming*, 80:253-264, 1998.
- [6] G. J. Ming and T. S. Wang A relation between the matching number and laplacian spectrum of a graph. *Linear Algebra and its Applications* 325, 71-74, 2001.

## Transporte Ótimo

Marcus Vinícius da Silva - PPGMat

*marcus423@gmail.com*

Diego Marcon Farias - PPGMat

*diego.marcon@ufrgs.br*

### Resumo

A teoria de Transporte Ótimo surgiu basicamente dos esforços para resolver os seguintes problemas:

- 1) o Problema do Transporte Ótimo de Kantorovich, que é minimizar

$$I[\pi] = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

entre todas probabilidades  $\pi$  com marginais  $\mu$  e  $\nu$ ;

- 2) e o Problema do Transporte Ótimo de Monge, que é minimizar

$$I[T] = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x)$$

entre todos mapas mensuráveis  $T : X \rightarrow Y$  tais que  $T_{\#}\mu = \nu$ .

Os problemas são semelhantes, porém diferem em alguns aspectos importantes. Em 1) podemos espalhar a massa de cada ponto em  $X$  em vários pontos de  $Y$ . Já em 2) toda a massa de  $x$  é levada para  $y = T(x)$ . Outra diferença importante é que o conjunto em que buscamos os minimizadores é sempre não-vazio em 1), mas não necessariamente em 2).

Um caso particular do problema de Kantorovich se dá quando os conjuntos  $X$  e  $Y$  são finitos. Nessas condições o problema é um caso especial da teoria de programação linear e tem inúmeras aplicações práticas.

No entanto, estamos interessados em avaliar o caso  $X = Y = \mathbb{R}^n$  com função custo dada por  $c(x, y) = d(x, y)^2$ , em que  $d$  é a métrica euclidiana. Para esse caso (sob algumas hipóteses extras) temos o Teorema de Brenier, que nos garante a existência e unicidade de um plano de transporte ótimo  $\pi$  dado por

$$\pi(x, y) = (Id \times \nabla\varphi)_\# \mu$$

onde  $\varphi$  é uma função convexa cujo gradiente é tal que  $\nabla\varphi_\# \mu = \nu$ . Além disso, é possível verificar que  $T = \nabla\varphi$  é uma aplicação de transporte ótimo.

Podemos ainda generalizar a função custo para o valor assumido por uma ação de um lagrangiano em seu minimizante. Isto é:

$$c(x, y) = \inf_{\gamma} \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

onde o ínfimo é tomado entre todas curvas  $\gamma$  com  $\gamma(a) = x$  e  $\gamma(b) = y$ . Isto é inspirado na mecânica clássica, onde as trajetórias de um sistema mecânico  $\gamma(t)$  são as curvas com mínima ação.

Essa generalização nos permite falar em distâncias mais sofisticadas e com significados diferentes, como por exemplo a energia necessária para ir de  $x$  a  $y$  (usando o lagrangiano mecânico usual).

## Comparação entre os Métodos da Decomposição de Adomian Modificado e Runge-Kutta44 para Solução do Processo de Digestão Anaeróbia

*Marline Ilha da Silva* - PPGMap  
*marline.ilhadasilva@gmail.com*  
*Álvaro Luiz de Bortoli* - PPGMap  
*dbortoli@mat.ufrgs.br*

### Resumo

A Digestão Anaeróbia (*Anaerobic Digestion* - AD) é um processo bioquímico de produção de biogás (biocombustível, constituído principalmente de metano e dióxido de carbono [15]). Neste processo, o biocombustível é formado a partir da degradação biológica da biomassa [14], matéria-prima mais abundante do mundo, constituída por substâncias de origem orgânica (vegetal, animal e microorganismos) e, ao contrário das fontes fósseis de energia, como o petróleo e o carvão mineral, a biomassa é renovável em curto intervalo de tempo.

O processo de digestão anaeróbia é complexo, formado por várias etapas de interações metabólicas, realizado por uma comunidade bem organizada de populações microbianas, na ausência de oxigênio [5, 10]. O modelo matemático para a digestão anaeróbia é obtido de acordo com o número de reações químicas presentes em cada estágio do processo. Esta modelagem fornece um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas e não lineares [11, 12], que na maioria das vezes deve ser resolvido numericamente. Dessa maneira, obter uma solução analítica torna-se atrativo para este problema.

O método da decomposição de Adomian (*Adomian Decomposition Method* - ADM) é uma técnica poderosa usada para resolver este tipo de problema, na qual decompõem cada equação em uma parte linear e uma parte não linear. A partir desta decomposição, a solução é obtida com base em um somatório de termos, os chamados termos de Adomian. Além disso, um ponto fundamental da técnica é a representação da parte não linear da equação por um somatório de polinômios conhecidos como polinômios de Adomian.

Adomian [2] demonstra que através do ADM é possível resolver problemas de equações diferenciais lineares e não lineares, obtendo soluções contínuas e semi analíticas.

Atualmente, o ADM vem sendo utilizado por muitos autores, em diversas áreas, para resolver problemas de equações diferenciais lineares e não-lineares envolvendo problemas de valor inicial ou de condições de contorno [3, 8, 9]. Além disso, o ADM pode ser usado para resolver sistemas de equações diferenciais não lineares e também para encontrar a solução de equações diferenciais de ordem superior [4, 7]. Alguns pesquisadores introduziram modificações no ADM [1, 6]. Por exemplo, Younker [13] utiliza o ADM com o tempo discretizado para a resolução de um sistema de equações diferenciais acopladas que descrevem taxas de reação química

Neste trabalho, é desenvolvido um modelo químico e matemático para o processo de digestão anaeróbia, utilizando a celulose como substrato. Além disso, simula-se este processo resolvendo o sistema de equações diferenciais ordinárias pelos métodos de Runge-Kutta de quarta ordem e quatro estágios e Adomian modificado, aplicado ao tempo variado [13]. As duas aproximações para a solução são comparadas e conclui-se que ocorre concordância entre elas.

## Referências

- [1] S. Abbasbandy, and M. T. Darvishi. A numerical solution of Burgers equation by time discretization of Adomian's decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 170:95–102, 2005.
- [2] G. Adomian. Analytic solutions for nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 26: 77–88, 1988.
- [3] J. Biazar, M. Tango, E. Babolian, and R. Islam. Solution of the kinetic modeling of lactic acid fermentation using Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 144:433–439, 2003.
- [4] J. Biazar, E. Babolian, and R. Islam. Solution of the system of ordinary differential equations by Adomian decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 147:713–719, 2004.
- [5] L. Bjornsson. Intensification of the biogas process by improved process monitoring and biomass retention. Ph.D. thesis, Department of Biotechnology, Lund University, Sweden, 2000.

- [6] F. Chen, and Q. Liu. Modified asymptotic Adomian decomposition method for solving Boussinesq equation of groundwater flow, *Applied Mathematics and Mechanics*, 35:481–488, 2014.
- [7] H. Gu, and Z. Li. A modified Adomian method for system of nonlinear differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 187:748–755, 2007.
- [8] H. Huang and T. S. Lee. On the Adomian decomposition method for solving the Stefan problem. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 25:912–928, 2015.
- [9] D. Kaya, and A. Yokus, A numerical comparison of partial solutions in the decomposition method for linear and nonlinear partial differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 60:507–512, 2002.
- [10] Z. Prokopová, and R. Prokop, Modelling and simulation of dry anaerobic fermentation. In *European Conference on Modelling and Simulation*, 2010.
- [11] M. Silva, and A. L. Bortoli, Modelagem e Simulação do Processo de Formação do Biogás. In *Anais do Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (XXXVII CNMAC)*, São José dos Campos, São Paulo, Brasil, 2017.
- [12] M. Silva, and A. L. Bortoli, Simulation of biogas production from the anaerobic digestion process. In *Anais do Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (XXXVIII CILAMCE)*, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, 2017.
- [13] J. M. Younker, Numerical integration of the chemical rate equations via a discretized Adomian decomposition. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 50:3100–3109, 2011.
- [14] L.Yu, Simulation of flow, mass transfer and bio-chemical reactions in anaerobic digestion. Ph.D. thesis, Department of Biological Systems Engineering, Faculty of Washington State University, 2012.
- [15] K. Ziemiński, and M. Frac, Methane fermentation process as anaerobic digestion of biomass: Transformations, stages and microorganisms. *African Journal of Biotechnology*, 11: 4127–4139, 2012.

## Fatoração explícita de polinômios de Dickson sobre corpos finitos

*Nelcy Esperanza Arévalo Baquero - PPGMap*

*nearevalob@unal.edu.com*

*Fabio Enrique Brochero Martinez - UFMG*

*fbrocher@mat.ufmg.br*

### Resumo



O presente trabalho apresenta a fatoração em fatores irredutíveis de  $T_n(x, a)$  sobre  $\mathbb{F}_q$ , onde  $q$  denota a potência de um primo  $p$ ,  $\mathbb{F}_q$  é um corpo finito de  $q$  elementos e  $T_n(x, a) \in \mathbb{F}_q[x]$  é um polinômio de Dickson do primeiro o segundo tipo de grau  $n$  na indeterminada  $x$  e com parâmetro  $a$ .

Impondo condições sobre  $n$  e  $q$  determinamos expressões explícitas para os fatores irredutíveis desta família de polinômios. Calculamos a fatoração seguindo as mesmas técnicas usadas no artigo [2], onde são encontrados explicitamente os fatores irredutíveis do polinômio  $x^n - 1$  sobre o corpo  $\mathbb{F}_q$ . Este resultado generaliza os resultados encontrados nos artigos [3],[4] e [7].

## Referências

- [1] Bhargava, M., and Zieve, M., *Factoring Dickson polynomials over finite fields*. Finite Fields Appl. 5 (1999) 103-111.
- [2] Brochero Martínez, F.E., Giraldo Vergara, C.R., Batista de Oliveira, L., *Explicit Factorization of  $x^n - 1 \in \mathbb{F}_q[x]$* , Des. Codes Cryptogr. Vol 77 (1) (2015) 277-286.
- [3] Chou, W.S., *The Factorization of Dickson Polynomials over finite fields*. Finite Fields Appl. 3 (1997) 84-96.
- [4] Fitzgerald, R.W., and Yucas, J.L., *Explicit factorization of cyclotomic and Dickson Polynomials over finite fields*. Arithmetic of Finite Fields. Lecture Notes in Computer Science, vol 4547, pp. 1-10. Springer, Berlin (2007).
- [5] Fitzgerald, R.W., and Yucas, J.L., *Generalized Reciprocals, Factors of Dickson Polynomials and Generalized Cyclotomic Polynomials over Finite Fields*. Finite Fields Appl. 13 (2007) 492-515.
- [6] Lidl, R., Mullen, G.L., Turnwald, G., *Dickson Polynomials*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Math., Longman/Harlow/Essex, 1993.
- [7] Tosun, S., *Explicit factorizations of generalized Dickson Polynomials of order  $2^m$  via generalized cyclotomic polynomials over finite fields*. Finite Fields Appl. 38 (2016) 40-56.

## Um método simples para obter subálgebras coideais à direita para algumas álgebras quânticas

*Priscila Nunes dos Santos - PPGMat*  
*priscila.nns@hotmail.com*

### Resumo

Neste trabalho, calculamos o reticulado de subálgebras coideais à direita dos grupos quânticos multiparâmetro  $U_q^+(\mathfrak{g})$ , onde  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie simples de dimensão pequena, no caso em que o parâmetro principal de quantização  $q$  não é raiz da unidade. O método utilizado aqui é semelhante ao que é utilizado para o caso  $G_2$  em [3] e muito mais simples do que os anteriores a este (vide [1], [2], [3]).

## Referências

- [1] I. Heckenberger and S. Kolb, *Homogeneous right coideal subalgebras of quantized enveloping algebras*, Bulletin of the London Mathematical Society 44(4), 2011.
- [2] V. K. Kharchenko and A. V. Lara Sagahón, *Right coideal subalgebras in  $U_q(sl_{n+1})$* , Journal of Algebra, 319(2008), 2571–2625.
- [3] V. K. Kharchenko, *Right coideal subalgebras in  $U_q^+(so_{2n+1})$* , Journal of the European Mathematical Society 13(6), 1675-1733.
- [4] B. Pogorelsky, *Right coideal subalgebras of the quantum Borel algebra of type  $G_2$* , Journal of Algebra, 322(2009), 2335-2354.

## Um método simples para obter base PBW para algumas álgebras quânticas pequenas

*Vanusa Moreira Dylewski - PPGMat*  
*vanusamdylewski@gmail.com*

### Resumo

Neste trabalho descrevemos explicitamente geradores PBW de grupos quânticos de multiparâmetro  $U_q^+(\mathfrak{g})$ , onde  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie simples de dimensão pequena, enquanto que o parâmetro principal de quantização  $q$  não é uma raiz da unidade. O método usado é semelhante ao usado para o caso de  $G_2$  em [3] e muito mais simples do que os já existentes(ver [1], [2]).

## Referências

- [1] I. Angiono, *Nichols algebras with standard braiding*, Alg. and Number Theory 3 Vol.1 (2009), 35–106.
- [2] V. K. Kharchenko, *A combinatorial approach to the quantifications of Lie algebras*, Pacific Journal of Mathematics, 203, N1(2002), 191–233.
- [3] B. Pogorelsky, *Right coideal subalgebras of the quantum Borel algebra of type  $G_2$* , Journal of Algebra, 322(2009), 2335–2354.

---

# OFICINA

---

## Desvendando o Cubo Mágico

*Gleiciano Cosmo Santos - PPGMat*  
*professorgleisonmat@gmail.com*

*Silvia Barcelos Machado - PPGMap*  
*sbmmtm@gmail.com*

---

**Proposta:** Oficina Desvendando o Cubo Mágico

**Tempo:** 2 horas

**Resumo:** A oficina “Desvendando o Cubo Mágico” tem como proposta apresentar alguns fatos sobre o cubo mágico, e apresentar um método de solução: o método das camadas. No decorrer da oficina, os participantes manipularão os cubos mágicos disponíveis tentando solucioná-los.

---

### Um pouco sobre o cubo mágico:

O cubo mágico, como é popularmente conhecido o Cubo de Rubik, foi criado no ano de 1974, pelo húngaro Ernő Rubik, professor de arquitetura do Departamento de Desenho de Interiores da Academia de Artes e Trabalhos Manuais de Budapeste, com o intuito de auxiliar seus alunos a visualizarem melhor objetos tridimensionais.

O cubo convencional (3x3x3) tem 6 faces com cores distintas, e cada face está dividida em 9 quadrados iguais, onde pode-se movimentar 26 peças. O seu criador demorou um mês para resolvê-lo pela primeira vez.

A partir dos anos de 1980, o cubo mágico tornou-se mundialmente conhecido. No ano de 1982, durante o Rubiks Cube World Championship Budapeste, registraram-se os primeiros recordes de solução do cubo mágico:

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| Mihn Thai (Estados Unidos) | 22,95s |
| Razoux Schultz (Holanda)   | 24,32s |
| Zoltan Labas (Hungria)     | 24,49s |

A partir do ano de 2004, com a fundação do World Cube Association (WCA), as competições passaram a ser reguladas mundialmente pela associação e os recordes mundiais atuais são:

|                                  |               |       |
|----------------------------------|---------------|-------|
| Feliks Zemdegs (Austrália)       | Maio/2018     | 4,22s |
| Max Park (Estados Unidos)        | Agosto/2018   | 4,40s |
| SeungBoem Cho (Coreia do Sul)    | Outubro/2017  | 4,59s |
| Tanzer Balimtas (Estados Unidos) | Agosto/2018   | 4,64s |
| Patrick Ponce (Estados Unidos)   | Setembro/2017 | 4,69s |

**A matemática envolvida no cubo mágico:** As combinações possíveis de posições que se pode obter no cubo mágico é um problema de Análise Combinatória. Para isso, considera-se:

- O cubo convencional (3x3x3) possui 8 quinas (ou vértices) que podem comutar entre si:

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$$

- Possui 12 meios (ou arestas) que também podem comutar entre si: 12!
- Rotacionando 2 quinas, obrigatoriamente rotaciona-se 2 meios; então, para não repetir a contagem, dividimos o resultado por 2;
- Cada quina possui 3 orientações possíveis e a orientação de uma quina depende da orientação das 7 demais quinas:  $3^7$ ;
- Cada meio possui 2 orientações possíveis e um processo análogo ao das quinas ocorre:  $2^{11}$ .

Desta forma, tem-se que o número de combinações no cubo mágico é

$$\frac{8! \cdot 12! \cdot 3^7 \cdot 2^{11}}{2} = 43.252.003.274.489.856.000.$$

Para solucionar o cubo mágico, estudos e métodos de resolução foram desenvolvidos a fim de otimizar o número de movimentos necessários. No ano de 1997, o professor Richard Korf calculou que a solução ótima para o cubo de Rubik é de 18 movimentos. Em 2010, provou-se que, para qualquer combinação inicial do cubo, são necessários no mínimo 20 movimentos para resolvê-lo. O método de resolução Fridrich, descrito por Jessica Fridrich, que soluciona o cubo por camadas é muito utilizado atualmente e permite resolver o cubo rapidamente.

#### **A proposta da oficina “Desvendando o cubo mágico”:**

O público alvo da oficina são os estudantes do curso de matemática e dos cursos de pós-graduação em matemática, matemática aplicada e ensino de matemática da Universidade Federal Do Rio Grande do Sul, que desejam aprender a resolver o cubo mágico para conhecimento próprio e/ou para inserir a resolução do cubo em sala de aula.

Em um primeiro momento, como introdução, será apresentado um breve histórico sobre o cubo mágico, comentando-se sobre sua história, recordes mundiais, variadas formas de cubos e algumas curiosidades.

No segundo momento, será apresentado o método de resolução por camadas: cruz branca, face branca, primeira camada das laterais, segunda camada, face amarela e terceira camada das laterais. Diversos cubos serão disponibilizados aos participantes para que os próprios manipulem e tentem solucionar os cubos.

#### **Referências:**

Cubo de Rubik: < [https://pt.wikipedia.org/wiki/Cubo\\_de\\_Rubik](https://pt.wikipedia.org/wiki/Cubo_de_Rubik) >

Método CFOP: < [https://en.wikipedia.org/wiki/CFOP\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/CFOP_method) >

Método das camadas: < <http://www.cubovelocidade.com.br/tutoriais/cubo-magico-basico-metodocamadas-1-passo-cruz-branca.html> >