

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO**

RAPHAEL BASEGGIO CORRÊA

**MODELO DE SIMULAÇÃO DE GOVERNANÇA DE PASSIVO ATUARIAL DE UM
FUNDO DE PENSÃO BRASILEIRO**

**Porto Alegre
2018**

RAPHAEL BASEGGIO CORRÊA

**MODELO DE SIMULAÇÃO DE GOVERNANÇA DE PASSIVO ATUARIAL DE UM
FUNDO DE PENSÃO BRASILEIRO**

Dissertação de Mestrado Acadêmico apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Administração da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Administração na área de concentração Pesquisa Operacional.

Orientador: Prof. Tiago Pascoal Filomena, Ph.D.

**Porto Alegre
2018**

CIP - Catalogação na Publicação

Corrêa, Raphael Baseggio
Modelo de simulação de governança de passivo
atuarial de um fundo de pensão brasileiro / Raphael
Baseggio Corrêa. -- 2018.
86 f.
Orientador: Tiago Pascoal Filomena.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do
Rio Grande do Sul, Escola de Administração, Programa
de Pós-Graduação em Administração, Porto Alegre, BR-RS,
2018.

1. Passivo Atuarial de Fundos de Pensão. 2. ALM -
Asset Liability Management. 3. Programação
Estocástica. 4. Árvore de Cenários. 5. Simulação de
Monte Carlo. I. Filomena, Tiago Pascoal, orient.
II. Título.

RAPHAEL BASEGGIO CORRÊA

**MODELO DE SIMULAÇÃO DE GOVERNANÇA DE PASSIVO ATUARIAL DE UM
FUNDO DE PENSÃO BRASILEIRO**

Dissertação de Mestrado Acadêmico
apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Administração da Universidade Federal do Rio
Grande do Sul como requisito parcial para a
obtenção do grau de Mestre em Administração
na área de concentração Pesquisa Operacional.

Porto Alegre, 26 de Junho de 2018.

Banca Examinadora:

Prof. Tiago Pascoal Filomena, Ph.D.
PPGA/UFRGS
Orientador

Prof. Denis Borenstein, Ph.D.
PPGA/UFRGS

Prof. João Luiz Becker, Ph.D.
PPGA/UFRGS

Prof. Dr. Guilherme Ribeiro de Macedo
PPGCont/UFRGS

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho especialmente à minha família, por serem sempre a base forte de tudo.

AGRADECIMENTOS

Registro aqui, neste importante capítulo da minha vida, os meus sinceros agradecimentos a todos que, de alguma maneira, fizeram parte desta árdua caminhada chamada Mestrado.

A Deus e suas “luzes” por sempre terem iluminado o meu caminho e guiado os meus passos em busca dos meus objetivos.

À minha família por terem sido fundamentais nesta trajetória, me apoiando e incentivando sempre que precisei e por compreenderem a importância deste momento.

Aos meus amigos pelo apoio e por entenderem a minha ausência.

Aos colegas de curso e amigos que fiz no PPGA, obrigado pelos bons momentos compartilhados, conversas, desabafos, risadas e estudos. Em especial aos amigos Alan, Alfredo e Afonso pelas dicas durante a elaboração deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Tiago Pascoal Filomena pela paciência, ensinamentos e dedicação durante este período de orientação, mas principalmente pelo voto de confiança no início do mestrado, que parecia impossível naquela época, mas que sempre serviu de combustível para que eu não desistisse e conseguisse atingir o objetivo final de me tornar Mestre em Administração.

Aos professores da área de Pesquisa Operacional do PPGA/UFRGS, por todos os ensinamentos, comentários, apoio e pelo exemplo de excelência em sala de aula, que abrilhantaram este curso. Em especial aos professores da banca pelos comentários e críticas que enriqueceram este trabalho.

Ao CNPq pela bolsa de estudos, sem a qual dificilmente teria conseguido cursar o Mestrado.

RESUMO

Este trabalho propõe um modelo para a simulação do passivo atuarial de um fundo de pensão brasileiro. As principais fontes de incertezas que influenciam a avaliação do passivo atuarial foram especificadas como variáveis aleatórias e parâmetros do modelo. Diversos cenários são gerados utilizando a técnica de simulação de Monte Carlo e a microsimulação no intuito de determinar o status de cada participante do fundo de pensão modelo para períodos futuros em diferentes nós de uma árvore de cenários. A situação de vida de cada participante, simulada individualmente a cada nó, está condicionada ao seu estado no nó imediatamente antecessor. O resultado é um modelo flexível, que permite a configuração de parâmetros a níveis individuais e possibilita trabalhar com diversas tábuas biométricas, mostrando-se capaz de gerar cenários consistentes, realistas e variados, capturando a essência da incerteza inerente às entidades de previdência complementar e produzindo não só valores únicos e determinísticos de reservas matemáticas e fluxos de caixa atuariais, mas intervalos de valores possíveis com distribuições conhecidas, importantes para a gestão eficiente de um fundo de pensão. A metodologia proposta serve como alternativa ao cálculo atuarial tradicional, que utiliza diretamente as probabilidades das tábuas biométricas, fixas por idade e sexo, para a mensuração dos fluxos de caixa previdenciários e reservas matemáticas. Os dados gerados a partir das simulações servem como dados de entrada para um modelo estocástico completo de *Asset-Liability Management* (ALM).

Palavras-chave: Passivo Atuarial de Fundos de Pensão. *ALM* - *Asset Liability Management*. Programação Estocástica. Árvore de Cenários. Simulação de Monte Carlo.

ABSTRACT

This study proposes a model to simulate actuarial liabilities from a pension fund in Brazil. The main uncertainties that affect the liabilities have been specified as random variables and parameters of the developed model. Many scenarios are generated using Monte Carlo simulation and micro-simulation techniques in order to determine the status of each member of the pension fund for future periods in different nodes of a scenario tree. The future of each participant, simulated individually at each node, is conditioned to its status in the immediately predecessor node. The result is a flexible model which allows the parameters configuration at individual levels and that can work with several actuarial tables, showing to be itself able to generate consistent, realistic and sorted scenarios, capturing the uncertainty inherent in pension funds environment and producing not only single and deterministic values for actuarial liabilities and cash flows, but ranges of possible values with known distributions, becoming an important tool for the efficient management of the pension fund. The methodology applied is an alternative to the classic actuarial techniques, that use directly the probabilities from actuarial tables, fixed by age and gender, to calculate the liabilities and the cash flow of the pension fund. The data generated by this model were thought to be inputs for a full multistage stochastic Asset-Liability Management (ALM) model.

Keywords: Pension Funds. Actuarial Liabilities. ALM - Asset Liability Management. Stochastic Programming. Scenario Tree. Monte Carlo Simulation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1.1 - Estrutura da previdência no Brasil.....	18
Figura 2.4.1 - Árvore de eventos	28
Figura 3.1.1 - Exemplo de simulação de status dos participantes na árvore de cenários	44
Tabela 3.1.1 - Parâmetros iniciais do algoritmo	44
Figura 3.1.2 - Descrição sumária do algoritmo	45
Quadro 4.1.1 - Resumo das características da população, das regras e das premissas do fundo de pensão	58
Gráfico 4.2.1 - Convergência do valor médio do fluxo de caixa em $t = 1$	60
Gráfico 4.2.2 - Convergência do valor médio do fluxo de caixa em $t = 10$	60
Gráfico 4.2.3 - Convergência do valor médio da reserva matemática à taxa de 3% em $t = 0$..	62
Gráfico 4.2.4 - Convergência do valor médio da reserva matemática a várias taxas em $t = 10$	62
Tabela 4.2.1.1 - Tabela comparativa entre as taxas de desconto atuarial.....	63
Gráfico 4.2.1.1 - Distribuição da reserva matemática de cada taxa de desconto atuarial em $t = 10$	65
Gráfico 4.2.2.1 - Histograma da reserva matemática do período 0	66
Gráfico 4.2.2.2 - Histograma da reserva matemática do período 10	66
Figura 4.2.2.3 - Árvore de cenários para o passivo atuarial	68
Gráfico 4.2.3.1 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 1	69
Gráfico 4.2.3.2 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 2	70
Gráfico 4.2.3.3 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 3	70
Gráfico 4.2.3.4 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 4	71
Gráfico 4.2.3.5 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 5	71
Gráfico 4.2.3.6 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 6	72
Gráfico 4.2.3.7 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 7	72
Gráfico 4.2.3.8 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 8	73
Gráfico 4.2.3.9 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 9	73
Gráfico 4.2.3.10 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 10	74
Figura 4.2.3.11 - Árvore de cenários para o fluxo de caixa atuarial	75

LISTA DE NOTAÇÕES E SÍMBOLOS

RM	reserva matemática
$RMBaC$	reserva matemática de benefícios a conceder
$RMBC$	reserva matemática de benefícios concedidos
$VABF_{p_x}$	valor atual dos benefícios futuros de um participante p de idade x
$VACF_{p_x}$	valor atual das contribuições futuras de um participante p de idade x
p	participante qualquer do fundo de pensão
M	conjunto de todos os participantes p do fundo de pensão
x	idade do participante
r	idade de aposentadoria
t	período discreto de tempo
T	período de tempo final do horizonte planejado
S_{p_x}	salário anual do participante p na idade x
B_{p_x}	benefício anual do participante p na idade x
n_t	nó qualquer do período t
N_t	conjunto de todos os nós n do período t
i	taxa real de juros atuariais
θ	índice anual de inflação para correção nominal dos salários e benefícios
γ	incremento real dos salários
δ	política de recursos humanos da empresa patrocinadora do fundo de pensão
g	regra de formação do benefício
\ddot{a}_r	valor presente de uma série de pagamentos antecipados iguais à unidade pelo período futuro de vida de um participante de idade r
ω	idade final ou inalcançável da tábua de mortalidade
$\varphi_{p_{x+t}}$	proporção do benefício acumulado por tempo de contribuição pelo participante p até a sua idade $x + t$
${}_tP_r$	probabilidade de que um participante de idade r sobreviva por mais t anos
${}_{r-x}P_x$	probabilidade de que um participante de idade x sobreviva por mais $r-x$ anos
$\%CPF$	percentual de contribuição incidente sobre o salário do participante, pago pelo próprio participante
$\%CPJ$	percentual de contribuição incidente sobre o salário do participante, pago pela patrocinadora

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	DELIMITAÇÃO DO TEMA E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA ...	14
1.2	JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DO TEMA.....	15
1.3	OBJETIVOS.....	17
1.3.1	Geral	17
1.3.2	Específicos	17
2	REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1	FUNDOS DE PENSÃO NO BRASIL	18
2.1.1	Tipos de Planos de Benefícios	20
2.1.2	Riscos Associados aos Fundos de Pensão	22
2.2	<i>ASSET LIABILITY MANAGEMENT</i> - ALM	24
2.3	PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA.....	26
2.4	ÁRVORE DE CENÁRIOS	27
2.5	SIMULAÇÃO	28
2.5.1	Simulação de Monte Carlo	30
2.6	MODELAGEM DO PASSIVO ATUARIAL	31
2.6.1	Premissas Atuariais	32
2.6.1.1	Econômicas.....	32
2.6.1.2	Biométricas.....	36
2.6.2	Provisões Matemáticas	39
2.6.2.1	Reserva Matemática de Benefícios a Conceder	40
2.6.2.2	Reserva Matemática de Benefícios Concedidos.....	41
3	METODOLOGIA	43
3.1	DINÂMICA DO MODELO PROPOSTO	43
3.2	INFLAÇÃO.....	46
3.3	AUMENTO REAL DOS SALÁRIOS	47
3.4	TAXA DE DESCONTO ATUARIAL.....	48
3.5	STATUS DO PARTICIPANTE.....	48
3.6	FLUXO DE CAIXA PREVIDENCIÁRIO	51
3.7	RESERVAS MATEMÁTICAS	54

4	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	57
4.1	FUNDO DE PENSÃO MODELO E PREMISAS ADOTADAS	57
4.2	ANÁLISE DOS RESULTADOS	59
4.2.1	Efeitos da Variação da Taxa de Juros Atuariais sobre a Reserva Matemática	63
4.2.2	Distribuição dos Valores do Passivo Actuarial.....	65
4.2.3	Distribuição dos Valores de Fluxo de Caixa Previdenciário por Período....	69
5	CONCLUSÃO	76
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	77
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICE A – Testes e estimações do modelo para previsão da inflação	83

1 INTRODUÇÃO

O sensível aumento na expectativa de vida ao longo das últimas décadas, comprovado através de pesquisa realizada pelo IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2016), faz com que um grande número de pessoas passe a dar maior atenção ao planejamento financeiro de suas aposentadorias, visto que esta fase vem se tornando cada vez mais duradoura. Além disso, considerando os valores de benefícios pagos pela previdência social, muitos trabalhadores veem o seu padrão de vida diminuir consideravelmente quando se retiram do mercado de trabalho. Por este motivo, cresce o número de pessoas que recorrem à previdência privada com a intenção de complementar a renda de aposentadoria ou, ainda, de receber alguma, no caso de profissionais autônomos e empreendedores. Conforme Kastner (2016), em notícia veiculada pelo jornal Folha de S.Paulo, dados da Federação Nacional de Previdência Privada e Vida (FenaPrevi) indicam que o número de novos investidores em planos de previdência cresceu 5,8% no período de dezembro de 2015 à dezembro de 2016.

O objetivo de um plano de previdência é possibilitar que as pessoas mantenham sua capacidade de consumo após pararem de trabalhar (BARR e DIAMOND, 2006). Esta afirmação destaca a relevância social e econômica dos planos de previdência e aumenta a importância da gestão eficiente em entidades de previdência complementar, a fim de que estas cumpram suas obrigações para com seus participantes. No Brasil, a previdência complementar divide-se em Entidades Abertas (EAPC) e Entidades Fechadas (EFPC). Também denominadas Fundos de Pensão, as entidades fechadas de previdência complementar são o objeto de estudo deste trabalho. Segundo Chan, Silva e Martins (2010), no cenário brasileiro, percebe-se um movimento no sentido de incentivar e desenvolver a previdência complementar fechada, buscando segurança, atratividade e expansão. Ainda de acordo com os autores, observa-se o estabelecimento de requisitos mínimos para a garantia do equilíbrio atuarial dos planos e melhorias na gestão dos recursos, como a restrição na definição da tábua de mortalidade, da taxa de juros e a adoção de técnicas como ALM (*Asset-Liability Management*), além do incentivo a boas práticas de governança, gestão de riscos e controles internos.

O ALM é um dos métodos mais difundidos para administrar fundos de pensão, pois se baseia na gestão integrada e simultânea de ativos e de passivos. É uma técnica que se preocupa com o planejamento estratégico ótimo na gestão dos recursos financeiros e passivos em ambientes estocásticos, com os riscos de mercado, econômicos e atuariais exercendo importantes funções (DEMPSTER *et al.*, 2003). Diante das incertezas relativas ao ambiente

de negócios dos fundos de pensão, a utilização de modelos estocásticos mostra-se uma alternativa acertada.

Este trabalho apresenta um modelo de simulação para o passivo atuarial de um fundo de pensão no Brasil, com o propósito de mensurar as reservas matemáticas do plano de benefícios e de construir fluxos de caixa previdenciários sob diversos cenários. O modelo é baseado nos trabalhos de Boender (1997), Kouwenberg (2001) e Rodrigues (2008), que propõem a simulação do futuro de cada participante do plano. Variáveis aleatórias são especificadas no intuito de captar a incerteza quanto a mudanças nos principais fatores de risco para o fundo de pensão. Diversas simulações são realizadas e dispostas em nós, nos quais o status de cada membro do fundo de pensão dependerá do seu próprio estado no nó imediatamente antecessor, formando uma rede de nós interligados que configuram uma árvore de cenários. Os resultados são apurados e os valores dos fluxos de caixa em cada período do tempo e das reservas matemáticas são computados a fim de verificar suas distribuições, pontos de máximo e de mínimo, médias e desvios padrão. Desta forma, o gestor do fundo de pensão não terá somente um valor fixo determinístico de fluxo de caixa e de passivo atuarial a ser considerado em suas decisões de aplicação de recursos, mas sim um intervalo de valores com determinada probabilidade de ocorrência.

Alinhado a esta ideia, Blake, Cairns e Dowd (2001) afirmam que o veículo mais apropriado para projetar um plano de previdência é a simulação. Esta abordagem gera uma série de resultados, isto é, uma função de distribuição de probabilidades, para o valor do fundo de pensão em qualquer data futura, condicionado a diversos parâmetros como o valor das contribuições, o retorno dos investimentos dos ativos, as taxas de mortalidade e outros fatores relevantes. Nas palavras de Kouwenberg e Zenios (2006), uma abordagem geral para lidar com dados incertos é atribuir uma distribuição de probabilidades aos parâmetros desconhecidos, que deverão então ser incorporados a um modelo apropriado de programação matemática. Modelos de programação matemática para tratar de incertezas são conhecidos como programação estocástica.

Ainda segundo Kouwenberg e Zenios (2006), um ponto importante para o sucesso das aplicações de programação estocástica é a construção de árvores de eventos. De acordo com a definição dos autores, uma árvore de eventos nada mais é do que um conjunto de cenários, dispostos em formato de árvore, que representam uma previsão dos diversos estados futuros possíveis do mundo que podem ocorrer, e são utilizados como dados de entrada em modelos de programação estocástica multiestágio. Os autores afirmam ainda que os modelos de simulação procuram replicar a composição e o desenvolvimento do passivo atuarial o mais

próximo possível da realidade, a fim de aumentar a acurácia das estimativas dos compromissos do fundo de pensão.

1.1 DELIMITAÇÃO DO TEMA E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

De acordo com Boulier, Trussant e Florens (1995), as entidades de previdência complementar exercem um papel importante e reconhecido na economia. A gestão de uma entidade fechada de previdência complementar é complexa e repleta de incertezas e, nas palavras de Fabozzi, Focardi e Jonas (2005), administrar fundos de pensão é um problema de gestão de riscos. Segundo Wang, Huang e Liu (2013), a longevidade representa cada vez mais um importante risco, especialmente para planos da modalidade Benefício Definido (BD). O risco da longevidade, ou demográfico, ao qual os autores se referem é devido ao fato do benefício de aposentadoria ter caráter vitalício nos planos BD, ou seja, não se sabe ao certo por quanto tempo o fundo pagará benefícios ao participante ou assistido. Além deste, há outros riscos a serem considerados pelos administradores de uma EFPC, oriundos de incertezas em relação à data de aposentadoria, à rotatividade, à taxa de juros, à rentabilidade dos investimentos, entre outros, apenas para citar alguns exemplos. Como nos planos da modalidade Contribuição Definida (CD) o valor total a ser recebido pelo participante depende quase que exclusivamente das contribuições feitas e dos rendimentos obtidos pelo fundo, ou seja, não há o risco demográfico e o risco financeiro é transferido ao participante, a complexidade de gestão é menor. Por esta razão, este trabalho concentra-se nos planos de benefício definido que, conforme Bédard (1999), tornaram-se muito populares devido à característica de segurança para os empregados, especialmente em países como Canadá, Holanda, Estados Unidos e no Reino Unido.

Aplicações de *Asset Liability Management* tipicamente necessitam de sistemas de simulação que integrem o preço dos ativos com o valor do passivo atuarial (KOUWENBERG e ZENIOS, 2006). Segundo Kouwenberg (2001), o objetivo da gestão de ativos e passivos (ALM) para um fundo de pensão é encontrar uma política de investimento e uma política de contribuições. Contudo, a política de investimentos do fundo está diretamente ligada ao valor do seu passivo atuarial, às necessidades de capital e ao fluxo de caixa do plano de benefícios. Neste contexto, muitos estudos abordam o tema na perspectiva da otimização do portfólio de ativos, talvez influenciados pelos expressivos valores envolvidos. Porém a mesma atenção talvez não seja dada ao estudo, acompanhamento e mensuração do passivo atuarial dos planos de previdência, conforme concluem Sharpe e Tint (1990), declarando que os gestores de

fundos de pensão demonstravam fraco interesse no passivo atuarial ao considerarem suas estratégias de alocação de ativos, e Macbeth *et al.* (1994), afirmando que a maioria dos patrocinadores de fundos de pensão têm somente um entendimento superficial das técnicas atuariais.

Portanto, o foco deste trabalho é a modelagem e simulação do passivo atuarial de um fundo de pensão brasileiro que simule, de fato, uma dinâmica mais realista de uma entidade fechada de previdência complementar, com participantes contribuintes, aposentados e inválidos. A partir do estado inicial destes participantes, o modelo simula o status de cada pessoa em cada nó de cada período de tempo, lidando de forma individual com aspectos como taxas aleatórias de aumento salarial e a possibilidade de ocorrência de situações como a entrada em invalidez. Outras fontes de incertezas às quais um plano de benefícios está exposto também são tratadas, tais como as taxas de inflação e de desconto atuarial. Os resultados destas simulações são apresentados em forma de nós em uma árvore de cenários, projetando a situação do plano de benefícios em um horizonte de longo prazo e gerando valores de fluxo de caixa previdenciário e de reservas matemáticas que servirão como dados de entrada para um modelo completo estocástico multiperíodo de ALM.

1.2 JUSTIFICATIVA DA ESCOLHA DO TEMA

O gerenciamento das obrigações assumidas por uma organização e a maneira como elas serão cumpridas é fundamento básico para a saúde de qualquer negócio. No âmbito de um fundo de pensão, cujo ambiente de negócios é repleto de incertezas, os horizontes de tempo projetados são de muito longo prazo e os compromissos assumidos são os benefícios a serem pagos aos seus participantes, a eficiência na gestão torna-se ainda mais importante. Em especial, porque no caso de não pagamento dos benefícios prometidos, estará prejudicando o planejamento financeiro de pessoas que possivelmente não se encontram mais no mercado de trabalho e, além disso, porque na ocorrência de déficits financeiros, na maioria dos casos, é a empresa patrocinadora do plano de benefícios, em conjunto com os participantes até determinado limite, os responsáveis por aportar recursos extras até que o nível de solvência do fundo volte ao equilíbrio. Este tipo de desembolso pode ser considerado um prejuízo a todos os envolvidos e, particularmente à empresa, uma ameaça ao alcance de suas metas e resultados.

De acordo com o Consolidado Estatístico de dezembro de 2016 da Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Complementar (ABRAPP), há em

funcionamento no Brasil 269 entidades fechadas de previdência complementar, atendendo aproximadamente 2,5 milhões de participantes ativos e cujos patrimônios representam 12,6% do PIB brasileiro, o equivalente à aproximadamente 755 bilhões de reais. Segundo Chan, Silva e Martins (2010), embora a representatividade dos ativos dos fundos de pensão em relação ao PIB possa parecer significativa, essa participação ainda é considerada tímida quando comparada a outros países industrializados, como Holanda, Suécia, Dinamarca, Estados Unidos e Japão, o que demonstra a importância dos fundos de pensão nos mercados financeiros ao redor do mundo. Conforme Josa-Fombellida e Rincón-Zapatero (2004) afirmam, devido à grande importância que a área previdenciária adquiriu nos mercados financeiros, a gestão dinâmica ótima dos planos de pensão da modalidade benefício definido possui atualmente um considerável interesse econômico. O especial interesse nos planos da modalidade benefício definido é claramente explicado por Hurtado (2008) que diz “a aplicabilidade da metodologia ALM só se faz necessária em planos de benefício definido ou de contribuição definida com renda vitalícia, onde é verificado risco de descasamento entre ativo e passivo”.

Instituições que desejam gerir ativamente seus ativos e passivos encontram-se diante do problema de escolher, entre os métodos disponíveis, aquele que os forneça as mais eficientes ferramentas de gestão (MOYNIHAN *et al.*, 2002). Para Hilli *et al.* (2006), a programação estocástica já provou ser uma abordagem eficiente no projeto e desenvolvimento de estratégias efetivas para modelos de ALM, devido a sua habilidade em lidar com a dinâmica e complexidade das estruturas de restrições normalmente inerentes a este tipo de problema.

Segundo Moynihan *et al.* (2002), de maneira geral, os ativos e passivos das organizações tornaram-se muito complexos, inviabilizando a utilização dos métodos tradicionais para ALM. Para Kouwenberg e Zenios (2006), a técnica de simulação é uma abordagem importante nas aplicações de ALM, especialmente para os casos que envolvem uma estrutura complexa de passivos. Ainda de acordo com os autores, o passivo atuarial dos fundos de pensão geralmente consiste em muitos contratos individuais, e o cálculo do valor total do passivo é influenciado por múltiplas fontes de incerteza, o que dificulta a análise matemática do problema e faz da técnica de simulação uma alternativa valiosa.

Assim sendo, o presente trabalho se justifica por desenvolver e difundir técnicas que visam aprimorar a gestão de entidades fechadas de previdência complementar, atendendo à legislação brasileira, abordando as incertezas inerentes aos participantes e ao negócio e apoiando a administração na tomada de decisão, através de um modelo de simulação para a

geração de cenários consistentes que projetam fluxos de caixa previdenciários e mensuram os valores das reservas matemáticas, ou seja, as obrigações do fundo de pensão.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Geral

Desenvolver um modelo de simulação para gerar árvores de cenários para o passivo atuarial de um fundo de pensão brasileiro.

1.3.2 Específicos

- a) Propor e modelar variáveis aleatórias que representem os principais fatores utilizados na avaliação de um passivo atuarial, tais como a taxa de inflação, a taxa de desconto atuarial e o aumento real dos salários.
- b) Simular, em cada nó dos estágios da árvore de cenários, o status de cada participante do fundo de pensão em relação às probabilidades de ocorrência de situações como entrada em invalidez e mortalidade de inválidos e válidos, de acordo com as suas respectivas tábuas biométricas.

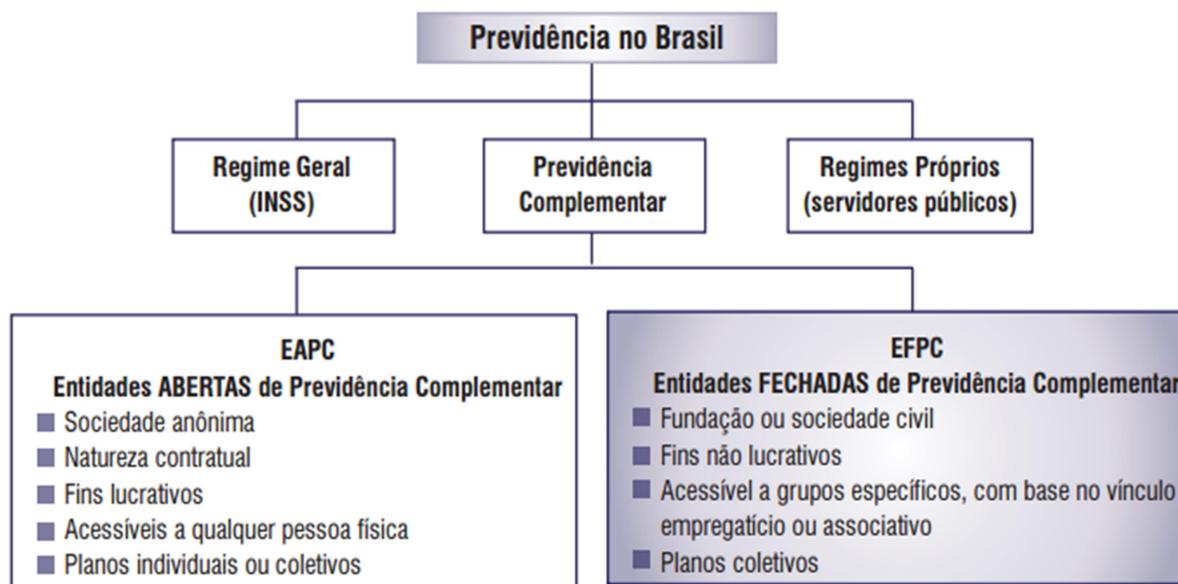
2 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente capítulo tem por objetivo dar embasamento teórico aos conceitos abordados neste trabalho.

2.1 FUNDOS DE PENSÃO NO BRASIL

O sistema previdenciário brasileiro é composto por três regimes: o Regime Geral da Previdência Social, de caráter compulsório, cobre todos os trabalhadores do setor privado e é gerenciado pelo Instituto Nacional de Seguro Social (INSS); o Regime Próprio de Previdência Social, que cobre os servidores públicos da União, dos Estados, do Distrito Federal e dos Municípios; e o Regime de Previdência Privada, de caráter complementar, voluntário e organizado de forma autônoma em relação à previdência social pública (PINHEIRO, 2007). A Figura 2.1.1 ilustra a estrutura do sistema previdenciário no Brasil, com maior detalhamento acerca da previdência complementar.

Figura 2.1.1 - Estrutura da previdência no Brasil



Fonte: Ministério da Previdência Social (2008)

O principal objetivo de um plano de previdência é a manutenção do bem-estar e da qualidade de vida dos seus membros após a aposentadoria, permitindo que os mesmos mantenham o padrão de vida que possuíam quando ainda trabalhavam. No entanto, contar somente com o benefício proveniente da Previdência Social pode não ser o suficiente para a

sustentação do padrão de vida ao qual o cidadão está acostumado. Com o objetivo de complementar a renda e de garantir a manutenção do padrão de vida dos seus membros durante a aposentadoria, surgiu a previdência complementar.

Conforme Rodrigues (2008), “Fundos de Pensão são entidades sem fins lucrativos, cujo objetivo principal é garantir o pagamento, em uma data futura, de benefícios contratados (aposentadorias, pensões a beneficiários e dependentes, pecúlios etc.)”. Cabe aqui destacar que as EFPCs são acessíveis somente a grupos específicos de trabalhadores, vinculados a empregadores, normalmente denominados “Patrocinadores”, ou vinculados a entidades representativas de classes, chamados de Instituidores. Estas entidades são reguladas pelo Conselho de Gestão da Previdência Complementar (CGPC) e são fiscalizadas pela Secretaria de Previdência Complementar (SPC), ambos órgãos de competência do Ministério da Previdência Social.

Segundo Chan, Silva e Martins (2010), “por força da legislação (Lei Complementar nº 109/01), as EFPC atuam obrigatoriamente sob o regime de capitalização para o financiamento dos benefícios programados e continuados”. Ainda de acordo com os autores, “o custeio dos planos de benefícios corresponde ao conjunto de recursos necessários para o pagamento dos benefícios diferidos. O custeio pode ser classificado da seguinte maneira (art. 5º, I, Lei Complementar nº 109/01):

- a) Contributivo, quando houver necessariamente a contribuição regular de participantes ativos e do patrocinador.
- b) Não contributivo, quando custeado exclusivamente pelo patrocinador, não obstante a faculdade de o participante ativo efetuar contribuições eventuais, desde que previstas no regulamento; ou
- c) Autofinanciado, quando a responsabilidade pelo custeio é do participante”.

Os referidos autores afirmam ainda que o Plano de Custeio deve ser calculado com periodicidade mínima de um ano e deve estabelecer o nível de contribuição necessário à constituição das reservas garantidoras de benefícios, fundos, provisões e à cobertura das demais despesas (art. 18, *caput*, Lei Complementar nº 109/01). O custeio dos planos deve ser dimensionado a partir de rigorosos cálculos atuariais, que reúnem conhecimentos de matemática financeira, teoria de probabilidades, entre outros.

2.1.1 Tipos de Planos de Benefícios

Segundo a Resolução nº 16 do CGPC, de novembro de 2005, os planos de benefícios são classificados em três modalidades: Benefício Definido (BD), Contribuição Definida (CD) e Contribuição Variável (CV). Um plano de benefícios nada mais é do que o conjunto de regras, obrigações e direitos que dispõe sobre a estrutura de financiamento e pagamento de diferentes benefícios previdenciários. É composto por um conjunto de documentos, com valor jurídico, dentre os quais cabe especial atenção ao regulamento, onde estão definidos os benefícios a serem oferecidos, as diversas formas de financiá-los e as condições que deverão ser preenchidas para que o participante possa receber tanto os benefícios programados (pagamento regular de aposentadorias) quanto os de riscos (morte e invalidez). Em geral, os benefícios mais comuns de um plano de previdência são: aposentadoria por tempo de contribuição, aposentadoria por invalidez e pensão por morte.

Segundo Blake (1998), o que diferencia os tipos de planos de benefícios é o conjunto de regras estabelecidas para o cálculo dos benefícios recebidos pelo participante quando da sua aposentadoria.

a) Plano de Benefício Definido

Um plano de Benefício Definido (BD) é aquele que o valor do benefício pago ao participante do fundo é previamente definido em contrato. Normalmente são benefícios vitalícios e utiliza-se o tempo de contribuição e as médias dos recebimentos salariais para o cálculo do valor a ser pago ao membro do plano quando da sua aposentadoria. Neste tipo de plano, as avaliações atuariais é que determinam os valores das contribuições, que podem variar sempre que necessário (BÉDARD, 1999). Conforme Chan, Silva e Martins (2010), “nos planos BD, o valor dos benefícios não guarda relação direta com o grau de capitalização dos recursos, estando, portanto, sujeito a revisões no valor das contribuições, bem como outras integralizações de capital, para fazer face aos compromissos assumidos”.

Após a publicação da Lei Complementar nº 109, de 2001, caso o fundo apresente déficit, a responsabilidade de aportes adicionais de recursos a fim de restaurar o equilíbrio financeiro do plano de benefícios não é mais somente da empresa patrocinadora, mas sim desta e também dos participantes do fundo de pensão, de acordo com seus percentuais de participação no custeio do plano de aposentadoria. Desta forma, tanto os riscos atuariais como

os financeiros passaram a ser divididos entre a empresa patrocinadora e os membros do plano de aposentadoria.

b) Plano de Contribuição Definida

Para Blake (1998), os planos da modalidade Contribuição Definida (CD) são os mais simples, pois utilizam o valor dos ativos para calcular o benefício que será pago aos participantes, que pode ser maior ou menor, dependendo dos retornos dos investimentos feitos pelo gestor do fundo de pensão. Nos planos CD, a taxa de contribuição é fixa e o valor do benefício varia dependendo do valor acumulado pelo participante durante a fase de contribuição e dos retornos dos investimentos realizados pelo fundo. Isto significa que, até o momento da aposentadoria, o valor do benefício a ser pago é desconhecido. Nas palavras de Chan, Silva e Martins (2010), nos planos da modalidade CD, o valor do benefício pago ao participante do fundo dependerá somente do montante de suas contribuições e dos retornos auferidos a partir desses recursos, além de outros fundos que poderão vir a ser adicionados em função da exclusão de outros participantes.

Ainda de acordo com Chan, Silva e Martins (2010), pelo fato dos planos da modalidade CD não contemplarem o risco biométrico como um fator redutor na acumulação de capital, acabam necessitando de contribuições maiores que os planos BD para que consigam alcançar o mesmo patamar de benefícios. Em outras palavras, os custos de planos da modalidade CD costumam ser maiores que os planos BD, quando estruturados com o objetivo de pagar os mesmos valores de benefícios, pois os planos CD não consideram o princípio do mutualismo no fundo, onde o risco biométrico é diluído entre todos os participantes.

c) Plano de Contribuição Variável

É o tipo de plano que mistura as duas modalidades citadas anteriormente. As contribuições são mantidas em contas individuais de cada membro durante a fase de contribuição e, quando da aposentadoria, o valor do benefício permanece mantido, independente dos retornos dos investimentos realizados pelo fundo.

Nas palavras de Chan, Silva e Martins (2010), os planos de contribuição variável, antes chamados de planos mistos, são assim denominados pois, quando se trata dos benefícios

de risco (morte e invalidez), se assemelham aos planos BD e, quando se trata do pagamento regular de aposentadorias, assumem as características de um plano de modalidade CD.

Conforme Blake (1998), planos do tipo Contribuição Variável utilizam o mesmo esquema de contribuição definida durante a fase de acumulação, mas o valor do benefício devido ao participante após a aposentadoria é acordado previamente. Além disso, em alguns casos, os membros do fundo ainda podem se beneficiar com o aumento do valor dos benefícios devido a qualquer possível aumento no valor dos ativos do fundo, mas nunca reduzirá o valor previamente acordado de benefício.

2.1.2 Riscos Associados aos Fundos de Pensão

O caráter longínquo das obrigações futuras dificulta a gestão dos fundos de pensão. O futuro é permeado de incertezas, as quais tendem a se intensificar quanto maior for o espaço de tempo em análise (CHAN, SILVA e MARTINS, 2010). Ainda nas palavras dos autores, o ser humano está sujeito à ocorrência de diversos infortúnios, como acidentes, invalidez, demissão e morte. É dever do fundo estruturar seu plano de maneira a contemplar estas variáveis e muitas outras.

Portanto, a fim de cumprir com seu objetivo principal, que é a garantia do pagamento integral dos benefícios contratados aos participantes do fundo no momento em que estes forem elegíveis ao recebimento, é imprescindível que o gestor do fundo de pensão tenha conhecimento dos principais riscos aos quais o seu negócio está exposto, apesar de suas mensurações estarem fora do escopo deste trabalho.

a) Risco de Mercado

Para Rosen e Zenios (2006), riscos de mercado são aqueles oriundos de mudanças nos preços e taxas do mercado financeiro. Conforme Rodrigues (2008), este risco está relacionado ao valor de bens e direitos acumulados pela entidade. Representa a possibilidade de ganhos ou perdas quando se transacionam esses ativos ou por decorrência da volatilidade de preços em mercados específicos, gerando flutuações contábeis. Ainda nas palavras do autor, o risco de mercado tem forte pressão sobre planos da modalidade benefício definido. O autor afirma que a forma de garantir a solvência do plano de benefícios passa por observar constantemente a relação entre o estoque de capital (necessário para cobrir as reservas matemáticas) e os fluxos previdenciários (fundamentais ao pagamento dos benefícios em curso).

b) Risco de Crédito

Conforme Rosen e Zenios (2006), o risco de crédito se dá quando um devedor falta com a sua promessa de pagamento, ou quando a sua capacidade de efetuar pagamentos futuros passa a ser questionada. Rodrigues (2008) complementa ainda dizendo que este risco pode ser classificado em duas categorias: interno e externo. O risco de crédito interno se refere à impossibilidade de participante ou patrocinadora honrar compromissos assumidos. Já o risco de crédito externo caracteriza-se pela dificuldade dos devedores do fundo de pensão em cumprir suas obrigações contratuais, como por exemplo, o emissor de um instrumento financeiro não realizar pagamentos previamente contratados.

c) Risco de Liquidez

Riscos de liquidez são aqueles advindos da incapacidade da instituição em arrecadar recursos para o financiamento das atividades de seus negócios (ROSEN e ZENIOS, 2006). Segundo Rodrigues (2008), este tipo de risco é mais determinante em planos de benefícios em fase madura, tendo pouca influência na fase de acumulação de poupança, visto que o pagamento dos benefícios em curso pode ser efetuado com o valor arrecadado das contribuições do período. Ainda de acordo com o autor, alguns fatos significativos influenciam a ocorrência do risco de liquidez, tais como desligamentos massivos, portabilidade de direitos previdenciais, resgate de contribuições e desaquecimento do mercado financeiro.

d) Risco Demográfico

Conforme Rodrigues (2008), o risco demográfico, ou biométrico, corresponde à possibilidade das premissas assumidas pelo atuário para eventos como mortalidade e invalidez, não se realizarem como previsto. Nas palavras de Hurtado (2008), este risco está associado a mudanças significativas no perfil dos participantes do plano em relação à evolução da sobrevivência do grupo ou em relação às premissas de elegibilidade aos benefícios.

e) Risco Operacional

De acordo com Rosen e Zenios (2006), riscos operacionais são aqueles provenientes de erros humanos, fraudes, falhas na gestão, falta de controles internos ou de sistemas de informação, dados corrompidos ou modelos errôneos e ações legais. Para Rodrigues (2008), até há pouco tempo, o risco operacional nos fundos de pensão não tinha a relevância que merecia, pois era restrito, basicamente, ao controle estruturado da gestão de investimentos.

2.2 *ASSET LIABILITY MANAGEMENT* - ALM

A administração de ativos e passivos está no centro da gestão de riscos empresariais em instituições financeiras. O balanço contábil reflete, do lado do ativo, os riscos do ambiente, e no lado do passivo, a maioria dos riscos do negócio (ROSEN e ZENIOS, 2006). Ainda na opinião dos autores, alinhar estes riscos é o objetivo de um sistema de *Asset Liability Management*.

No âmbito de um fundo de pensão, pode-se adaptar o conceito de ALM definindo-o como o adequado dimensionamento dos ativos da organização (investimentos financeiros mais as contribuições recebidas dos membros do fundo) a fim de que estes estejam de acordo com as obrigações com as quais a organização está comprometida (pagamento dos benefícios aos quais os participantes terão direito quando tornarem-se elegíveis), a fim de evitar o descasamento entre ativo e passivo, reduzindo os riscos financeiros e atuariais aos quais a entidade de previdência está exposta.

Segundo Dupacová e Polívka (2009), o principal objetivo dos modelos ALM desenvolvidos recentemente é apoiar decisões de investidores de longo prazo que querem atingir determinadas metas e cumprir compromissos financeiros futuros. Neste caso, o principal objetivo financeiro da organização é garantir o pagamento dos benefícios durante o período previsto no regulamento do plano através do investimento das contribuições recebidas dos participantes no período de capitalização, esperando obter, no mínimo, uma rentabilidade que é chamada de meta atuarial (normalmente fixada como a taxa real de juros adotada na avaliação atuarial).

A integração entre ativos e passivos é crucial para o sucesso de um modelo ALM, uma vez que, frequentemente, ambos são afetados pelos mesmos fatores econômicos. Conforme Boender (1997), fatores como o crescimento salarial e a inflação são essenciais para determinar o valor do passivo atuarial de um fundo de pensão, e também estão associados

com as taxas de retorno de longo prazo de ações e títulos públicos no lado dos ativos. Para Kouwenberg e Zenios (2006), esta integração começa pela simulação consistente de cenários futuros tanto para ativos quanto para passivos. Os referidos autores afirmam ainda que o passivo atuarial é, frequentemente, único e diferente para cada aplicação de ALM.

De acordo com Rosen e Zenios (2006), os modelos de ALM podem ser classificados, de maneira geral, pela forma como abordam a gestão de riscos, em relação ao tempo e às incertezas, a saber:

a) Modelo Estático de Período Único

Tipo de modelo que considera a data atual até o final do horizonte planejado como sendo um único e mesmo período. Esta visão é estática, pois não permite alterações durante este espaço de tempo, entre a data atual e o final do horizonte planejado. Assim, os modelos de tempo estático assumem que só há o hoje, $t = 0$, e que somente uma decisão sobre o portfólio é feita. Logo, decisões a serem tomadas no futuro não são explicitamente incorporadas ao modelo de otimização.

Além disso, ainda conforme os autores, este tipo de modelo também é estático quanto às incertezas, pois assume que fatores de risco como o retorno dos ativos e as taxas de juros, permanecerão em seus estados atuais ou apresentarão, no máximo, mudanças pequenas e bem definidas.

b) Modelo Estático Multiperíodo

São modelos que buscam enxergar os problemas de ALM de forma dinâmica. Os modelos de tempo dinâmico consideram que decisões a respeito do portfólio serão tomadas em diversos momentos no futuro, $t = 1, 2, \dots, T$, e modelam explicitamente estas decisões. Os autores afirmam ainda que esta configuração é mais realista, pois os cenários são observados e ações são possíveis em diversos pontos discretos no tempo, do período corrente até o final do horizonte planejado.

No entanto, segundo Rosen e Zenios (2006), por ser estático, este tipo de modelo não permite a especificação de uma variável aleatória que descreva as mudanças do ambiente econômico. Um modelo como este seria equivalente a tomar decisões sempre de posse da informação perfeita, o que geralmente não é uma situação realista.

c) Modelo Estocástico de Período Único

Estes modelos assumem que fatores de risco podem evoluir ao longo do tempo conforme determinada distribuição de probabilidade. Os cenários esboçados a partir desta distribuição são incorporados ao modelo e, uma vez que os cenários evoluem com o passar do tempo, diferentes portfólios seriam mais apropriados para capturar as correlações entre ativos e passivos.

Entretanto, ainda nas palavras de Rosen e Zenios (2006), este tipo de modelo não leva em conta o fato de que o gestor do portfólio provavelmente realizará o seu rebalanceamento na ocorrência de superávits ou em resposta a déficits. Isto acaba por se tornar uma importante restrição para o tratamento de diversas classes de problemas, especialmente aquelas onde há passivos com longos horizontes de tempo. As limitações deste tipo de modelo foram superadas pelos modelos estocásticos multiperíodo.

d) Modelo Estocástico Multiperíodo

Os modelos estocásticos multiperíodo são aqueles que permitem tanto ativos quanto passivos evoluir dinamicamente ao longo do tempo, de acordo com alguma distribuição de probabilidade. Neste tipo de modelo, as decisões de rebalanceamento de portfólio, assim como nos modelos estáticos multiperíodo, são revistas à medida que o tempo passa e que novas informações a respeito dos ativos e dos passivos são reveladas. Ainda segundo os autores, a maioria das decisões em finanças não são irreversíveis, e a opção de reversão é algo que deve estar explicitamente incorporado ao modelo.

Desta forma, os modelos estocásticos multiperíodo são capazes de capturar tanto a natureza estocástica do problema quanto o fato de que pode ser necessário rebalancear o portfólio em algum período no tempo, permitindo-os lidar com problemas mais complexos e modelar estratégias dinâmicas.

2.3 PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

As primeiras aplicações de programação estocástica a problemas de planejamento financeiro foram feitas por Bradley e Crane (1972) e Ziemba e Vickson (1975), embora desde a metade dos anos cinquenta já existissem os primeiros modelos formulados como programas matemáticos, independentemente, por Dantzig (1955) e Beale (1955). Contudo, foi somente a

partir dos anos noventa que a programação estocástica começou a ganhar proeminência como ferramenta de apoio à decisão em problemas de *Asset Liability Management* (KOUWENBERG e ZENIOS, 2006). Ainda conforme os autores, este desenvolvimento foi motivado, em parte, por avanços algorítmicos, que possibilitaram a solução de modelos realistas de grande escala e complementam dizendo que a globalização e as inovações no mercado financeiro são a força motriz do desenvolvimento de modelos de programação estocástica para problemas de ALM relevantes até os dias atuais, apoiados nos avanços em tecnologias computacionais e na disponibilidade de softwares.

Em particular para problemas de ALM, a programação estocástica é um exemplo de modelagem poderoso, pois facilmente incorpora em uma mesma estrutura fontes múltiplas e correlacionadas de risco para ambos os lados, de ativo e de passivo, possui horizontes de tempo longos, comporta aversão ao risco, e permite o rebalanceamento dinâmico do portfólio enquanto satisfaz restrições operacionais ou regulatórias e requisitos da política de investimentos, facilitando uma visão integrada do processo de gestão de riscos da organização como um todo (KOUWENBERG e ZENIOS, 2006).

Cabe também destacar outras aplicações de sucesso da programação estocástica que não em ALM, como Mulvey e Vladimirov (1992) em alocação de ativos, Consigli e Dempster (1998) em companhias de seguros, Dert (1995) em fundos de pensão, entre outros.

2.4 ÁRVORE DE CENÁRIOS

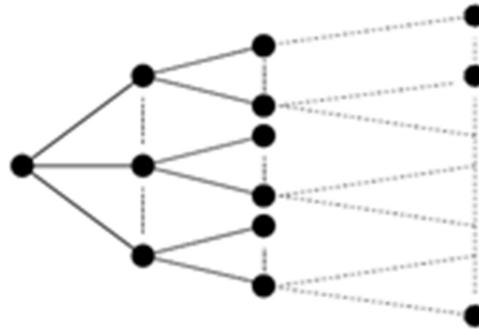
A literatura apresenta diversos sistemas de simulação propostos para lidar com a difícil tarefa de geração de cenários para problemas de ALM. Entre eles, cabe destacar Zenios (1995), Mulvey (1996) e Boender (1997).

O termo árvore de cenários se dá devido à forma como são dispostos os cenários gerados para o modelo, em forma de árvore, conforme a Figura 2.4.1. Nas palavras de Kouwenberg e Zenios (2006), um modelo de programação estocástica é baseado em uma árvore de eventos para as variáveis aleatórias consideradas chave. Cada nó da árvore de eventos possui múltiplos sucessores, com o propósito de modelar o processo da informação sendo revelada progressivamente através do tempo. A abordagem proposta pela programação estocástica determinará a decisão ótima para cada nó da árvore de eventos, de acordo com as informações disponíveis naquele momento.

Neste contexto, Oliveira *et al.* (2016) complementam dizendo que, em um modelo de ALM de programação estocástica, a árvore de cenários deve ser construída de forma a retratar

a estrutura das incertezas da forma mais precisa possível, além de ser importante a redução de possíveis vieses na geração dos cenários e das árvores.

Figura 2.4.1 - Árvore de eventos



Fonte: Kouwenberg (2001)

2.5 SIMULAÇÃO

A técnica de simulação é uma das mais utilizadas nas áreas de pesquisa operacional e ciências da gestão (LAW e KELTON, 1991). Nesta mesma linha, Banks *et al.* (2009) afirmam que a disponibilidade de linguagens de programação desenvolvidas com o propósito específico de realizar simulações, de capacidade de processamento computacional massivo a custos cada vez mais baixos, e o avanço nas metodologias de simulação fizeram com que a técnica se tornasse uma das ferramentas mais utilizadas e aceitas por analistas de sistemas e profissionais de pesquisa operacional ao redor do mundo.

De acordo com Banks *et al.* (2009), simulação é a imitação da operação de um processo do mundo real, ou sistema, ao longo do tempo. Ainda nas palavras dos autores, o estudo do comportamento de um sistema à medida que ele evolui ao longo do tempo é feito através do desenvolvimento de um modelo de simulação, o qual, normalmente, assume a forma de um conjunto de premissas relativas à operação do sistema para o qual o modelo está sendo desenvolvido. Ou seja, por definição, um modelo é a simplificação de um sistema, porém deve ser suficientemente detalhado de forma a permitir que se façam conclusões válidas sobre o sistema do mundo real. Idealmente, o modelo deverá conter somente os componentes relevantes ao estudo. Um sistema, por sua vez, é um grupo de objetos que são unidos de forma interativa e interdependente na realização de um mesmo propósito (BANKS *et al.*, 2009).

Para Law e Kelton (1991), as premissas geralmente assumem a forma de relações lógicas e matemáticas que, quando simples o bastante, possibilitam a utilização de métodos matemáticos para chegar a informações exatas sobre questões de interesse, obtendo uma chamada solução analítica. Contudo, a maioria dos sistemas do mundo real é complexa demais para permitir que modelos realistas sejam avaliados analiticamente. Por esta razão, estes modelos devem ser estudados através da simulação. Na prática, significa manipular e modificar os dados de entrada do modelo e suas relações lógicas e quantitativas a fim de verificar o seu comportamento e, conseqüentemente, verificar como reagiria o sistema real.

Segundo Banks *et al.* (2009), uma vez desenvolvido e validado o modelo, este pode ser utilizado para investigar uma grande variedade de questões do tipo “e se” (em inglês “*what if*”) sobre o sistema do mundo real que está sendo estudado. Isto quer dizer que potenciais mudanças no sistema podem ser simuladas antes de serem efetivamente implementadas, com o intuito de prever seus impactos no comportamento do sistema (BANKS *et al.*, 2009).

Law e Kelton (1991) fazem uma classificação clara e sucinta dos diferentes modelos de simulação:

- Estáticos ou Dinâmicos

Os modelos estáticos são representações do sistema em um determinado momento. Este tipo de modelo também é utilizado para representar sistemas em que o tempo não desempenha papel fundamental. Por outro lado, os modelos dinâmicos representam o sistema conforme a sua evolução ao longo do tempo.

- Determinísticos ou Estocásticos

Modelos determinísticos são aqueles que não possuem nenhum componente probabilístico (aleatório), ou seja, assumem que os dados de entrada do modelo são obtidos com certeza e que não sofrerão alterações durante o período de tempo simulado. Neste tipo de modelo, uma vez especificadas as quantidades e as relações, por mais que consuma muito tempo de processamento computacional, é possível determinar um resultado. No entanto, segundo os autores, muitos sistemas necessitam ser modelados de tal forma que haja, pelo menos, algum componente aleatório nos seus dados de entrada. Isto é, há a necessidade de se capturar a natureza probabilística de uma ou mais variáveis, o que é característica dos

modelos chamados estocásticos. Nos modelos estocásticos, os resultados produzidos são, por si só, aleatórios e, por esta razão, devem ser interpretados apenas como estimativas das reais características do modelo.

- **Contínuos ou Discretos**

De acordo com Law e Kelton (1991), modelos discretos são aqueles em que as variáveis de estado do sistema se modificam instantaneamente em pontos separados no tempo. Já os modelos contínuos são aqueles em que as variáveis de estado mudam continuamente com o passar do tempo. Para Banks *et al.* (2009), um modelo é dito discreto quando as variáveis de estado se alteram somente em um conjunto de pontos no tempo discreto. Já um modelo contínuo é aquele em que as variáveis de estado se alteram continuamente ao longo do tempo.

Para o propósito deste trabalho, o modelo é dinâmico, estocástico e discreto. Dinâmico porque projeta a situação futura dos participantes e do fundo de pensão nos períodos futuros; Estocástico porque incorpora variáveis aleatórias; e Discreto porque o sistema só pode se modificar em um número contável de pontos ao longo do tempo, neste caso, em períodos anuais.

2.5.1 Simulação de Monte Carlo

A técnica de simulação de Monte Carlo recebe este nome devido ao seu funcionamento apresentar similaridades com o comportamento aleatório de jogos como roleta e dados, praticados tradicionalmente em cassinos e, em especial, no cassino de Monte Carlo (Mônaco).

Conforme Law e Kelton (1991), este método é amplamente utilizado na solução de determinados problemas estatísticos que não são analiticamente tratáveis. Ainda segundo os autores, a simulação de Monte Carlo consiste em um esquema baseado na utilização de números aleatórios, isto é, variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre zero e um. Nas palavras de Jensen e Bard (2002), todos os métodos de Monte Carlo requerem a geração de uma sequência de números aleatórios uniformemente distribuídos entre zero e um. Então, a partir desta sequência de números aleatórios, é possível utilizar o método de Monte Carlo para

estimar os possíveis resultados para as variáveis aleatórias do modelo, de acordo com uma determinada distribuição de probabilidades.

Os números aleatórios são fundamentais na simulação de quase todos os sistemas discretos (BANKS *et al.*, 2009). Ainda conforme os autores, muitas linguagens de programação possuem sub-rotinas, objetos ou funções para a geração de números aleatórios, que são utilizados para gerar as variáveis aleatórias. Neste ponto, segundo Rodrigues (2008), destaca-se a necessidade de que se use um algoritmo gerador bem estruturado, para que os valores gerados, aparentemente independentes entre si, não venham a se repetir após um dado número de simulações.

De acordo com Banks *et al.* (2009), uma sequência de números aleatórios R_1, R_2, \dots , deve possuir duas importantes propriedades estatísticas: uniformidade e independência. Isto significa dizer que cada número aleatório R_i deve ser uma amostra mutuamente independente, sorteada de uma distribuição uniforme entre zero e um. Nesta mesma linha, Glasserman (2003) complementa dizendo que a propriedade da independência é a mais importante, pois implica no fato de que qualquer par de valores neste intervalo deverá ser não correlacionado.

Por questão de conveniência, costuma-se tratar os geradores de números pseudoaleatórios como se estes fossem, de fato, geradores de números aleatórios genuínos, embora se saiba que, na verdade, são produzidos por algoritmos completamente determinísticos (GLASSERMAN, 2003). O referido autor justifica sua afirmação dizendo que os geradores de números pseudoaleatórios modernos são suficientemente bons em imitar uma genuína aleatoriedade e, por isso, possibilitam o uso de ferramentas estatísticas e probabilísticas.

2.6 MODELAGEM DO PASSIVO ATUARIAL

Qualquer modelo de *Asset Liability Management* necessita de uma projeção do valor futuro do passivo atuarial. Esse passivo atuarial normalmente corresponde ao valor esperado, descontado, de pagamentos obrigatórios futuros a serem efetuados pela entidade (KOUWENBERG e ZENIOS, 2006).

Conforme Hurtado (2008), de acordo com o artigo 5º da Resolução nº 18 do CGPC de março de 2006, para os planos da modalidade benefício definido a adoção do regime financeiro de capitalização é obrigatória. Neste tipo de regime financeiro, há a constituição de uma reserva matemática desde o ingresso do participante no plano de benefício do fundo de pensão. Ainda segundo a autora, no regime de capitalização, deve existir uma equivalência

atuarial, desde o início do plano, entre o valor atual dos benefícios futuros (*VABF*) e o valor atual das contribuições futuras (*VACF*) de cada participante. As contribuições, devidamente capitalizadas, devem permitir o pagamento de seus respectivos benefícios a cada participante do plano, sendo que, no momento da elegibilidade do participante ao benefício, a reserva já deverá estar completamente constituída.

2.6.1 Premissas Atuariais

A gestão de um plano previdenciário implica, obrigatoriamente, na definição de premissas, a partir das quais são efetuados os cálculos necessários para determinar os valores das contribuições e apurar as obrigações de uma entidade de previdência.

Conforme Rodrigues (2008), as premissas atuariais, também chamadas de hipóteses atuariais, representam um conjunto formal de estimativas para eventos biométricos, financeiros, econômicos, demográficos, sociais, etc. que o atuário espera que se realizem, com um bom nível de confiança, em determinado período sob análise. Para o autor, “a discussão e escolha das premissas atuariais são uma tarefa que exige algo de arte da ciência atuarial: requer o afastamento do caminho preciso dos modelos matemáticos, trilhando-se pela natureza subjetiva das escolhas racionais”.

De acordo com Chan, Silva e Martins (2010), pelo fato das premissas serem a base dos cálculos atuariais, nos quais está consubstanciada a estrutura do plano de benefício, pode-se dizer que a sua variabilidade está diretamente relacionada à solvência dos planos. Neste sentido, Rodrigues (2008) afirma que o emprego de hipóteses atuariais descomprometidas com a realidade em que estão inseridos os participantes, patrocinadores e entidade pode levar a custos incorretos, provocando déficit ou superávit técnico, assim como a uma leitura equivocada dos riscos aos quais estão expostos. O autor ressalta ainda que premissas conservadoras demais são tão danosas quanto as que assumem riscos em excesso, pois ambos os casos podem levar a uma incapacidade de pagamento, ora de participantes/ patrocinadores, na forma de contribuições, ora da própria entidade de previdência, na forma de benefícios.

De maneira geral, no Brasil, as premissas são classificadas da seguinte forma:

2.6.1.1 Econômicas

As premissas econômicas representam as conjecturas feitas pelos gestores do Fundo de Pensão a respeito dos valores esperados para as taxas de juros, índices de inflação de longo

prazo, índices de correção salarial, entre outros, e seus comportamentos no futuro que está sendo projetado.

Segundo Rodrigues (2008), do ponto de vista atuarial, é fundamental que se utilizem prognósticos prudentemente amparados na economia matemática, em modelos econométricos de comprovada consistência ou subsídios que possam apresentar um bom nível de rigor na regularidade dos resultados.

a) Taxa de Inflação de Longo Prazo

No âmbito de um plano previdenciário da modalidade benefício definido, onde o valor do benefício de aposentadoria pago ao participante costuma ser estabelecido a partir da média dos últimos salários, esta premissa cresce em relevância. Como o poder de compra da população é diretamente afetado pela inflação, o reajuste salarial dos colaboradores da ativa é influenciado, em conjunto com outros fatores, pela inflação, que impactará também o reajuste do valor dos benefícios pagos aos membros já aposentados.

A taxa de inflação utilizada deverá ser coerente com a realidade e, ao mesmo tempo, ser capaz de justificar as variações econômicas inflacionárias a longo prazo (RODRIGUES, 2008). Conforme explica Pinheiro (2007), o custo das aposentadorias e pensões nos planos de benefícios das EFPC é inversamente proporcional à mudança na taxa de inflação de longo prazo, ou seja, quanto maior a taxa utilizada, menor poder aquisitivo terão os valores pagos aos participantes, e menor será, conseqüentemente, em termos reais, o valor atual dos benefícios futuros do plano.

b) Ganho Real dos Investimentos

De acordo com Rodrigues (2008), o ganho real dos investimentos implica diretamente em dois pontos principais: taxa de juros e taxa de desconto atuarial. Enquanto a primeira significa o percentual mínimo de remuneração dos ativos de investimento a fim de que estes garantam os benefícios com os quais o fundo de pensão está comprometido, a segunda representa o percentual utilizado no cálculo do valor presente dos benefícios e contribuições futuras relativas ao plano. Segundo Pinheiro (2007), a rentabilidade mínima dos investimentos deve ser equivalente à taxa mínima atuarial estipulada, que corresponde à taxa real anual de juros assumida na avaliação atuarial, acrescida do indexador de correção dos benefícios pagos pelo fundo.

A partir deste relacionamento, é fácil perceber que, quando a taxa de remuneração é maior que a taxa de desconto, o fundo encontra-se em situação de superávit técnico, assim como, quando ocorre o inverso, ou seja, a taxa de remuneração é menor do que a taxa de desconto, o fundo encontra-se em situação de déficit técnico. Quando as duas taxas se equivalem, o fundo está equilibrado. É importante destacar que, em conformidade com a Resolução nº 16 do CGPC, a taxa máxima real de juros admitida nas projeções atuariais do plano de benefícios é de 6% ao ano ou sua equivalência mensal.

c) Escala de Ganhos Salariais

Esta premissa é importante por duas razões: i) as contribuições dos membros do plano são determinadas por uma proporção fixa dos seus salários, e ii) sendo o valor do benefício de aposentadoria definido a partir dos últimos salários do participante, o montante do passivo atuarial dependerá diretamente do valor dos salários finais (DEMPSTER *et al.*, 2009).

Nesta mesma linha, Kouwenberg e Zenios (2006) afirmam que, em planos da modalidade BD, o valor do benefício de aposentadoria pago ao participante, alinhado às regras estabelecidas no regulamento do fundo, depende de fatores como a inflação e o crescimento salarial.

d) Indexador dos Benefícios

De maneira geral, existem duas práticas que se destacam no mercado: utilizar um índice apurado por entidade de reconhecida competência ou vincular a atualização dos valores de benefício com o índice de correção salarial praticado pela patrocinadora para os colaboradores ativos.

O objetivo de estipular um indexador para a correção dos benefícios é a manutenção do poder aquisitivo do valor pago ao participante, para que este tenha preservada a sua capacidade de consumo frente à elevação do custo de vida, além de evitar possíveis déficits atuariais nos planos de benefícios (PINHEIRO, 2007).

Conforme Rodrigues (2008), seja qual for o índice escolhido, ele deverá guardar uma estreita relação com a perda real dos ganhos por ocasião do aumento do custo de vida, percebida a necessidade de se preservar a capacidade de consumo dos participantes assistidos. Ou seja, deverá ser escolhido o índice que melhor expresse variações médias do custo de vida segundo a classe de renda dos participantes.

Além disso, o autor ressalta que índices que expressem preços de atacado (IGP), como IGP-M, IGP-DI e IGP-10, não devem ser adotados, uma vez que combinam preços que expressam variações de produtos dissociados da inflação incorrida no custo de vida. Também devem ser evitados índices que expressem variações salariais nas patrocinadoras, já que estão dissociados fundos de pensão e patrocinadores quanto aos compromissos (e capacidade econômica para fazê-lo) de correções nominais de benefícios e salários.

Assim, Rodrigues (2008) sugere que sejam adotados índices que expressem a inflação do custo de vida (IPC), como INPC, IPC-DI, IPC-A e IPC-Fipe ou, ainda, uma mistura entre eles.

e) Teto de Benefício do Sistema Público

Em planos onde os benefícios pagos estão associados ao teto do benefício da previdência social, esta premissa representa o valor-base a partir do qual haverá a complementação de recursos por parte do fundo de pensão.

De acordo com Rodrigues (2008), existe grande preocupação nos fundos de pensão quanto a uma possível redução do teto de benefício do sistema público, fato que poderia acarretar uma necessidade maior de reservas matemáticas necessárias ao pagamento de benefícios previdenciários e, possivelmente, sem meios imediatos de cobertura. Logo, a vinculação dos benefícios do plano ao teto de benefício da previdência social constitui um considerável fator de risco para os fundos de pensão, uma vez que competiria aos próprios fundos e, possivelmente, à patrocinadora, o aporte de recursos extraordinários para suprir eventuais insuficiências de ativos.

Ainda segundo Rodrigues (2008), a solução encontrada por alguns planos foi desvincular o complemento de aposentadoria do teto de benefícios da previdência social e atrelá-lo a um valor equivalente estabelecido pelo próprio fundo, com as devidas atualizações monetárias previstas em contrato. No entanto, apesar de evitar que fatores exógenos interfiram nos valores das reservas matemáticas, esta ação é desfavorável aos participantes, tendo em vista que a redução do teto de benefício do sistema público de aposentadoria transfere aos membros do fundo o ônus da perda do complemento, havendo uma diferença entre o que a previdência social oferece e o que o plano de benefícios usa como base para o cálculo desse complemento.

2.6.1.2 Biométricas

Conforme Chan, Silva e Martins (2010), “a ocorrência de eventuais desvios em relação às premissas biométricas adotadas nos cálculos atuariais pode propiciar desequilíbrios estruturais no plano como um todo, podendo afetar os participantes, os assistidos e o(s) patrocinador(es) na proporção delineada no plano de custeio. Os autores afirmam ainda que, entre as formas previstas para o equacionamento de resultados deficitários, estão o aumento do valor das contribuições, o aporte adicional de recursos e a redução do valor dos benefícios a conceder”.

a) Mortalidade de Válidos

A premissa de mortalidade é a mensuração, através das tábuas de mortalidade ou biométricas, do evento morte em uma população. Trata-se da probabilidade de falecimento e sobrevivência de uma população a cada idade seguinte, desde a raiz da tábua (idade inicial) até a idade inalcançável (idade final).

Segundo Pinheiro (2007), a hipótese de mortalidade é muito sensível e tem uma relação direta com o valor atual dos benefícios futuros em um fundo de pensão, pois em caso de morte do participante, acarreta no pagamento do benefício de pensão por morte e, em caso de sobrevivência, mantém o participante elegível ao recebimento do benefício de aposentadoria por tempo de contribuição ou idade. Ainda de acordo com o autor, ao se utilizar tábuas de mortalidade com maior longevidade para um determinado grupo, ter-se-á como efeito esperado uma elevação no nível das reservas requeridas. Em outras palavras, caso a tábua biométrica adotada pelo fundo de pensão tiver expectativa de vida maior do que a realidade verificada no fundo, os custos serão mais altos do que deveriam. Em contrapartida, caso adote-se uma tábua de mortalidade cuja expectativa de vida seja inferior ao que ocorre no fundo de pensão, pode-se incorrer em um cenário de insolvência.

Pela Resolução nº 18 do Conselho de Gestão da Previdência Complementar (CGPC), de março de 2006, a tábua biométrica utilizada para projeção da longevidade do participante em gozo do benefício de aposentadoria programada e continuada e do beneficiário deste será aquela em que a expectativa de vida completa, ou seja, igual ou superior, no mínimo, àquela resultante da aplicação da tábua AT-83. Caso a tábua biométrica utilizada pelo plano seja segregada por sexo, o critério definido deverá basear-se na média da expectativa de vida completa ponderada entre homens e mulheres.

b) Mortalidade de Inválidos

Esta variável representa a probabilidade de morte de pessoas inválidas em função da idade. O falecimento de pessoas inválidas reflete diretamente sobre valor da reserva de benefícios concedidos, reduzindo-o devido à cessação do benefício ou à concessão de pensão por morte (RODRIGUES, 2008).

Ainda nas palavras do autor, as taxas de mortalidade de inválidos são normalmente maiores que as verificadas para pessoas não-inválidas. Entretanto, conforme Galé (1942), à medida que transcorre o tempo, a taxa de mortalidade de inválidos vai se aproximando da taxa de mortalidade comum. O organismo se acostuma, pouco a pouco, às novas condições de vida. Rodrigues (2008) ressalta que, certas doenças de ordem física e de fundo emocional podem ocasionar uma aposentadoria por invalidez, agravando as Tábuas de Entrada em Invalidez, mas não necessariamente agravando, na mesma proporção, as Tábuas de Mortalidade de Inválidos. Essas doenças não aceleram a mortalidade e o participante presente nesta situação pode manter-se longo, mesmo inválido. Assim, observa-se a importância desta premissa na apuração das reservas matemáticas.

Segundo Chan, Silva e Martins (2010), “em virtude da escassez de dados para a construção da tábua de mortalidade de inválidos, a estimativa dessa premissa mostra-se fragilizada, passível a uma margem de erro mais significativa”. No caso da mortalidade de inválidos, não há regulamentação ou exigência de uma tábua específica por parte do CGPC.

c) Entrada em Invalidez

De maneira geral, esta hipótese consiste na probabilidade de uma pessoa tornar-se inválida antes de atingir a idade seguinte. O conceito da variável entrada em invalidez vem se modificando com o passar dos anos. Rodrigues (2008) explica que, em tempos passados, quando se declarava um trabalhador inválido, isso decorria da objetiva percepção de um estado de invalidez devido à perda total ou parcial de membros, da incapacidade visual extrema, das doenças respiratórias, etc. Nos dias atuais, as doenças modernas com possibilidade de recuperação passaram a dar causa a processos de aposentadoria por invalidez, mudando bastante o conceito até então adotado. Assim, a invalidez pode ser permanente, temporária, total ou parcial.

De acordo com Pinheiro (2007), “a variável invalidez é uma das mais difíceis de estimar devido à evolução do conceito de incapacitação ao longo dos anos, que somada à imprecisão estatística de mensuração tem sido motivo de grande preocupação para a formação de reservas matemáticas apropriadas para cobrir esse tipo de risco nos planos de benefícios”.

Ainda conforme o autor, como medida para o risco de invalidez, os fundos de pensão no Brasil utilizam as tábuas de entrada em invalidez. São tábuas muito antigas, como a Álvaro Vindas, TASA-1927, RRB-1944 (Railroad Retirement Board), Hunter, Zimmermann, Light, IAPB, além de tábuas que traduzem a experiência de empresas de consultorias, tais como Mercer MW Disability e Towers. Para Chan, Silva e Martins (2010), tais tábuas de entrada em invalidez, assim como as tábuas de mortalidade de inválidos, apresentam problemas de temporalidade e setorização, que podem acarretar em riscos para o equilíbrio do plano.

“A ausência de experiência relativa ao grupo deve ser compensada por constantes verificações de consistência, sob a pena de se estar inferindo necessidades de reservas superestimadas ou subestimadas” (RODRIGUES, 2008).

d) Rotatividade

A variável rotatividade representa a mobilidade ou *turnover* dos participantes do fundo de pensão. Esta premissa deve ser muito bem amparada na realidade da movimentação de membros do plano de benefícios, uma vez que imprecisões nesta variável podem acarretar graves desvios nas provisões matemáticas. Conforme Chan, Silva e Martins (2010), quanto maior for a rotatividade de participantes que não atingiram os requisitos mínimos de benefício proporcional diferido (*vesting*), portabilidade, autopatrocínio ou resgate, menor será a necessidade de recursos para a liquidação dos compromissos futuros e, conseqüentemente, menor será o valor das reservas matemáticas. Logo, percebe-se que a taxa de rotatividade tem relação inversamente proporcional ao valor atual dos benefícios futuros.

Nas palavras de Pinheiro (2007), inúmeros elementos podem determinar a saída de um empregado da empresa patrocinadora e, conseqüentemente, do plano de benefícios, dentre os quais somente dois fatores têm uma relação significativa na determinação das taxas de saída para as entidades fechadas de previdência complementar: a idade e o tempo de serviço, pois quanto mais velho for o empregado ou maior seu tempo de serviço na patrocinadora, menor será a probabilidade de que ele deixe o emprego. Ainda segundo o autor, a tábua construída a partir desses dois fatores é chamada “*select and ultimate table*” ou dupla entrada, onde o termo “*select*” refere-se às taxas aplicáveis num período após a idade de entrada do

empregado e o termo “*ultimate*” diz respeito às taxas aplicáveis às idades superiores ao ponto para o qual o tempo de serviço é importante. No Brasil, os fundos de pensão ainda utilizam, por conveniência, no cálculo atuarial, apenas as tábuas baseadas no fator idade.

A premissa de rotatividade exerce papel importante também na liquidez do fundo de pensão. Com o advento da Lei Complementar nº 109, de 2001, que introduz o instituto da portabilidade, no qual o participante tem a opção de transferir os recursos financeiros acumulados até então para outra entidade de previdência complementar (aberta ou fechada), o dimensionamento preciso desta variável é fundamental para a disponibilidade de capital e o fluxo atuarial do plano de benefícios, pois, além da cessação das contribuições, há a possibilidade de pagamentos de curto e longo prazo aos participantes que saem do plano. Neste ponto, vale ressaltar que, “quando se aplica a rotatividade, o participante leva para outro plano, caso saia da empresa patrocinadora, apenas a sua reserva de poupança, deixando para o plano de origem a parte relativa às contribuições e rendimentos da empresa” (PINHEIRO, 2007).

O autor conclui afirmando que, em um plano da modalidade benefício definido, o ideal é que seja observada a experiência de término de vínculo empregatício por idade dos trabalhadores da empresa patrocinadora para, então, se atribuir uma taxa mais condizente com a realidade daquele grupo populacional, enquanto, na modalidade de contribuição definida, a rotatividade não afeta a estrutura financeira e atuarial do plano.

2.6.2 Provisões Matemáticas

Conforme Chan, Silva e Martins (2010), o valor das provisões matemáticas, ou reservas matemáticas, pode ser obtido, de maneira geral, a partir da diferença entre o valor atual dos benefícios a serem pagos pelo fundo de pensão aos participantes ou beneficiários e o valor atual das contribuições a serem recebidas pelo plano de benefícios.

De acordo com Rodrigues (2008), o valor do passivo atuarial, ou Reserva Matemática (*RM*), de um fundo de pensão, deve seguir a linha tradicional da soma da Reserva Matemática de Benefícios a Conceder (*RMBaC*) com a Reserva Matemática de Benefícios Concedidos (*RMBC*), sendo ambas líquidas de contribuições futuras.

$$RM_{Total} = RMBaC_{Total} + RMBC_{Total} \quad (1)$$

2.6.2.1 Reserva Matemática de Benefícios a Conceder

A reserva matemática de benefícios a conceder representa o valor necessário ao fundo de pensão para que este cumpra seus compromissos com os participantes que ainda não estão em gozo do benefício de aposentadoria.

A reserva matemática de benefícios a conceder para um determinado participante p de idade x pode ser apurada conforme a fórmula abaixo:

$$RMBaC_{p_x} = VABF_{p_x} - VACF_{p_x} \quad (2)$$

O Valor Atual dos Benefícios Futuros é dado pela fórmula abaixo, considerando-se parcelas anuais:

$$VABF_{p_x} = S_{p_x} \cdot \prod_{k=0}^{r-x} (1 + \theta_k) \cdot (1 + \gamma)^{r-x} \cdot g \cdot {}_{r-x}P_x \cdot \frac{1}{(1+i)^{r-x}} \cdot \ddot{a}_r \quad (3)$$

Onde:

S_{p_x} = salário anual do participante p na idade x .

r = idade prevista para a aposentadoria do participante p .

θ_k = índice anual de inflação do período k para correção nominal dos salários e benefícios.

γ = incremento real dos salários.

g = regra de formação do benefício.

${}_{r-x}P_x$ = probabilidade de que um participante de idade x sobreviva por mais $r-x$ anos.

i = taxa real de juros atuariais.

\ddot{a}_r = valor presente de uma série de pagamentos antecipados iguais à unidade pelo período futuro de vida de um participante de idade r .

Sendo \ddot{a}_r o fator de valor atual de uma renda atuarial vitalícia antecipada pagável ao participante p de idade r , seu valor pode ser encontrado através da seguinte fórmula:

$$\ddot{a}_r = \sum_{t=0}^{\omega-r-1} {}_tP_r \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \quad (4)$$

Onde:

ω = idade final ou inalcançável da tábua de mortalidade.

${}_t P_r$ = probabilidade de que um participante de idade r sobreviva por mais t anos.

O Valor Atual das Contribuições Futuras é dado pela fórmula abaixo, também considerando-se parcelas anuais:

$$VACF_{p_x} = \sum_{t=0}^{r-1} S_{p_x} \cdot (1 + \theta_t) \cdot (1 + \gamma)^t \cdot (\%CPF + \%CPJ) \cdot {}_t P_x \cdot \frac{1}{(1 + i)^t} \quad (5)$$

Onde:

θ_t = índice anual de inflação do período t para correção nominal dos salários e benefícios.

$\%CPF$ = percentual de contribuição incidente sobre o salário do participante, pago pelo próprio participante.

$\%CPJ$ = percentual de contribuição incidente sobre o salário do participante, pago pela patrocinadora.

${}_t P_x$ = probabilidade de que um participante de idade x sobreviva por mais t anos.

O somatório dos valores individuais de $RMBaC_p$ de todos os membros M do fundo de pensão constituirá o valor total da $RMBaC$ do fundo de pensão:

$$RMBaC_{Total} = \sum_{p=1}^M RMBaC_p \quad (6)$$

2.6.2.2 Reserva Matemática de Benefícios Concedidos

A reserva matemática de benefícios concedidos consiste no valor que o fundo deve ter a sua disposição para cobrir as suas obrigações com os membros do plano de previdência que já estão recebendo o benefício de aposentadoria.

A reserva matemática de benefícios concedidos para um determinado participante p de idade x pode ser apurada conforme a fórmula abaixo. Cabe destacar que não estão previstas

contribuições ao fundo por parte dos participantes já aposentados e, por isso, o valor da *RMBC* de cada participante corresponde ao valor descontado da expectativa de pagamentos de benefícios.

$$RMBC_{p_x} = VABF_{p_x} \quad (7)$$

O Valor Atual dos Benefícios Futuros é dado pela fórmula abaixo, considerando-se parcelas anuais:

$$VABF_{p_x} = \sum_{t=0}^T B_{p_x} \cdot (1 + \theta_t) \cdot {}_tP_x \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \quad (8)$$

Onde:

B_{p_x} = benefício anual do participante p na idade x .

O somatório dos valores individuais de $RMBC_p$ de todos os membros M do fundo de pensão resultará no valor total da *RMBC* do fundo de pensão:

$$RMBC_{Total} = \sum_{p=1}^M RMBC_p \quad (9)$$

3 METODOLOGIA

Neste capítulo será apresentada a metodologia utilizada para a geração das árvores de cenários e modelagem das principais variáveis do modelo.

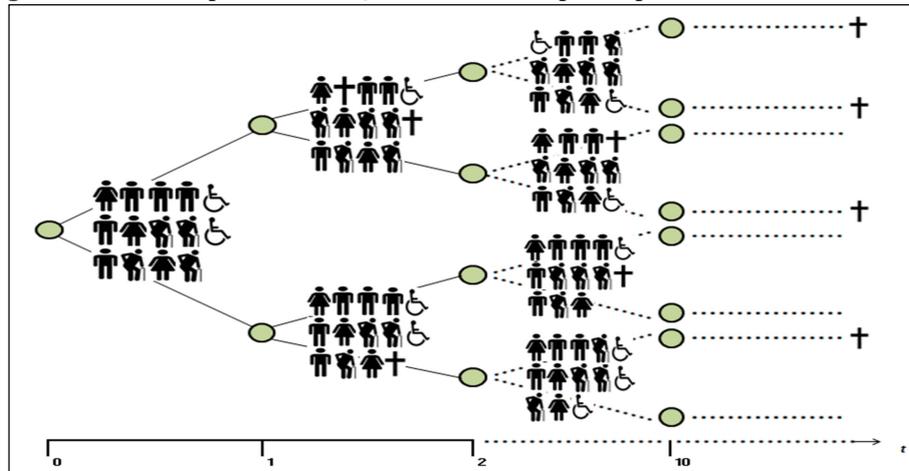
3.1 DINÂMICA DO MODELO PROPOSTO

O modelo desenvolvido neste trabalho tem o propósito de gerar árvores de cenários para o passivo atuarial de um fundo de pensão no Brasil, baseado na simulação dos principais fatores que influenciam os valores das reservas matemáticas e dos fluxos de caixa previdenciários e inspirado na metodologia utilizada por Rodrigues (2008), que simula a situação de vida de cada membro p do plano de benefícios em cada período de tempo discreto futuro. O estado atual dos participantes e as premissas atuariais do fundo de pensão, conhecidos com certeza, são representados pelo chamado nó-raiz da árvore de cenários, que é o único nó do período presente, $t = 0$. A partir deste nó, o modelo proposto simula o status dos participantes em cada um dos nós dos períodos futuros $t \in \{1, \dots, T\}$ da árvore de cenários. Define-se a notação N_t como o número de nós em um período t , e $n_t \in \{1, \dots, N_t\}$ para um nó qualquer do mesmo período t . A simulação da situação de vida de um participante em um determinado nó está sempre condicionada ao estado deste mesmo indivíduo no nó predecessor único ao que se está realizando a simulação. Um nó pode ter diversos sucessores, ou nós-filhos, porém possuirá somente um único nó antecessor, ou nó-pai. Segundo Valladão (2008), nos modelos mutiestágio, a cada período, novas ramificações interligam o estado atual a estados futuros, criando assim a estrutura de árvore de possibilidades. Os resultados das simulações nos diversos nós da árvore, em conjunto com as demais variáveis do modelo, representam os possíveis estados futuros do passivo atuarial do plano de previdência em questão.

Neste estudo, optou-se pela criação de uma árvore de cenários binária, ou seja, cada nó possui somente duas ramificações (nós-filhos) e a probabilidade de ocorrência dos nós de um mesmo período é distribuída uniformemente. A Figura 3.1.1 ilustra um exemplo genérico da estrutura do modelo proposto, no qual os membros de um fundo de pensão têm a sua situação conhecida, isto é, sabe-se com certeza, além de outras informações, quais deles são contribuintes, aposentados ou inválidos no período inicial e, a partir desta condição, executam-se duas (por se tratar de árvore binária) simulações independentes para o status futuro de cada participante, sendo o resultado de cada uma destas duas simulações atribuído a

um nó distinto, consecutivo e interligado ao nó predecessor único. Esta rotina é realizada sucessivamente para cada nó ao longo da árvore, de acordo com o conceito de árvore de cenários utilizado em programação estocástica que, conforme Valladão (2008), “é baseada em cenários para os fatores de risco estruturados em uma árvore de possibilidades, onde novas realizações são geradas dada a existência de um nó antecessor”. Ao chegar no último período da árvore, para cada um dos 1.024 nós, simula-se a situação de cada participante nos períodos futuros em caminhos únicos, até que não haja mais ninguém vivo.

Figura 3.1.1 - Exemplo de simulação de status dos participantes na árvore de cenários



Fonte: elaborado pelo autor

A fim de facilitar o entendimento da dinâmica do modelo proposto, apresenta-se na Figura 3.1.2 uma descrição sumária do algoritmo desenvolvido para a geração das árvores de cenários do passivo atuarial do fundo de pensão. Este algoritmo necessita de alguns parâmetros pré-definidos que, em sua maioria, dependem do regulamento do plano de benefícios e do tipo de árvore de cenários a ser gerada, detalhados na Tabela 3.1.1.

Tabela 3.1.1 - Parâmetros iniciais do algoritmo

<i>PlnHoriz</i>	número de estágios da árvore de cenários
<i>Nº_Branches</i>	ramificações da árvore de cenários
<i>Nº_Trees</i>	número de árvores a serem geradas
<i>W_MinCtrTime</i>	tempo mínimo de contribuição para mulheres
<i>M_MinCtrTime</i>	tempo mínimo de contribuição para homens
<i>%CPF</i>	percentual de contribuição incidente sobre o salário do participante, pago pelo participante
<i>%CPJ</i>	percentual de contribuição incidente sobre o salário do participante, pago pela patrocinadora
<i>LumpSum_Death</i>	pecúlio pago por morte de participante titular (em R\$)
δ	política de recursos humanos da empresa patrocinadora do fundo de pensão
<i>g</i>	regra de formação do benefício
<i>i</i>	taxa real de juros atuariais
ω	idade final ou inalcançável da tábua de mortalidade

Fonte: elaborado pelo autor

Figura 3.1.2 - Descrição sumária do algoritmo

Algoritmo 1 Geração de Árvores de Cenários para o Passivo Atuarial do Fundo de Pensão

Passo 1 (Inicialização): escolher valores para os parâmetros $PlnHoriz$, $N^o_Branches$, N^o_Trees , $W_MinCtrTime$, $M_MinCtrTime$, $\%CPF$, $\%CPI$, $LumpSum_Death$, g , δ , i . Ir para o passo 2.

Passo 2 (Cria estrutura da árvore de cenários): para cada $t \in \{0, \dots, PlnHoriz\}$ fazer $N_t = (N^o_Branches)^t$. Ir para o passo 3.

Passo 3 (Tábuas biométricas): atribuir valores aos parâmetros q_{x+t}^z , q_{x+t}^{rd} , q_{x+t}^d e ω de acordo com as tábuas biométricas. Ir para o passo 4.

Passo 4 (Dados dos participantes): carga de dados para $S_{p,x,t=0}$, $Ctr_Time_{p,x,t=0}$, r_p e $B_{p,x,t=0}$. Ir para o passo 5.

Passo 5 (Taxa de inflação): definição do parâmetro θ_t para $t \in \{1, \dots, T\}$ conforme seção 3.2. Ir para o passo 6.

Passo 6 (Geração de árvores em sequência): define $Run \leftarrow 1$. Ir para o passo 7.

Passo 7 (Fluxo de caixa em cada nó): para cada $t \in \{1, \dots, T\}$, para cada $n_t \in \{1, \dots, N_t\}$ e para cada $p \in M$, fazer:

Passo 7.1 (Simula status dos participantes):

Se $\left[1 - E\left(q_{p,x+t-1,n_{t-1}}^{rd}\right)\right] \cdot E\left(q_{p,x+t-1,n_{t-1}}^z\right) = 0$ ou $E\left(q_{p,x+t-1,n_{t-1}}^{rd}\right) \cdot E\left(q_{p,x+t-1,n_{t-1}}^d\right) = 0$, ir para o próximo participante p .

Se $\left[1 - E\left(q_{p,x+t-1,n_{t-1}}^{rd}\right)\right] \cdot E\left(q_{p,x+t-1,n_{t-1}}^z\right) = 1$, testar mortalidade conforme (14). Atribuir o resultado à $E\left(q_{p,x+t,n_t}^z\right)$.

Se $E\left(q_{p,x+t-1,n_{t-1}}^{rd}\right) \cdot E\left(q_{p,x+t-1,n_{t-1}}^d\right) = 1$, testar mortalidade de inválido conforme (17). Atribuir o resultado à $E\left(q_{p,x+t,n_t}^d\right)$.

Se $E\left(q_{p,x+t,n_t}^z\right)$ ou $E\left(q_{p,x+t,n_t}^d\right) = 0$, pagar pecúlio por morte de participante ($LumpSum_Death$).

Se $E\left(q_{p,x+t,n_t}^z\right) = 1$, testar elegibilidade à aposentadoria conforme (19). Atribuir resultado à $E\left(q_{p,x+t,n_t}^r\right)$.

Se $E\left(q_{p,x+t,n_t}^z\right) = 1$ e $E\left(q_{p,x+t,n_t}^r\right) = 0$, testar entrada em invalidez conforme (15). Atribuir o resultado à $E\left(q_{p,x+t,n_t}^{rd}\right)$.

Se $E\left(q_{p,x+t,n_t}^{rd}\right) = 1$, definir $E\left(q_{p,x+t,n_t}^r\right) = 1$ conforme (16).

Se $E\left(q_{p,x+t,n_t}^{rd}\right) = 0$, nada fazer.

Passo 7.2 (Atualiza salários e benefícios acumulados dos contribuintes):

Se $E\left(q_{p,x+t,n_t}^z\right) = 1$ e $E\left(q_{p,x+t,n_t}^r\right) = 0$, simula a taxa de crescimento salarial $Y_{p,x+t,n_t}$ conforme (13), calcula

$S_{p,x+t,n_t} = S_{p,x+t-1,n_{t-1}} \cdot (1 + \theta_{t-1}) \cdot (1 + Y_{p,x+t,n_t})$ e atualiza os valores de $\varphi_{p,x+t}$ e $B_{p,x+t,n_t}$ conforme (21) e (22).

Passo 7.3 (Atualiza benefícios dos aposentados):

Se $E\left(q_{p,x+t,n_t}^r\right)$ ou $E\left(q_{p,x+t,n_t}^{rd}\right) = 1$, então $B_{p,x+t,n_t} = B_{p,x+t-1,n_{t-1}} \cdot (1 + \theta_{t-1})$

Passo 7.4 (Calcula o valor do fluxo de caixa no nó):

Calcula o valor de FC_{n_t} conforme (20). Ir para o passo 8.

Passo 8 (Reserva matemática em cada nó do último período da árvore de cenários): para cada $n_{10} \in \{1, \dots, N_{10}\}$, fazer:

Calcula o valor de $RM_{n_{10}}$ conforme (23), (24) e (25). Ir para o passo 9.

Passo 9 (Reserva matemática em cada nó da árvore de cenários até $t = 0$): para cada $t \in \{PlnHoriz, \dots, 0\}$ e para cada $n_t \in \{1, \dots, N_t\}$, fazer:

Calcula o valor de RM_{n_t} conforme (26). Ir para o passo 10.

Passo 10 (Computa valores de fluxo de caixa e reserva matemática de cada nó): para cada $t \in \{0, \dots, PlnHoriz\}$ e para cada $n_t \in \{1, \dots, N_t\}$, fazer:

Guardar os valores calculados de FC_{n_t} e RM_{n_t} . Ir para o passo 11.

Passo 11 (Critério de término): define $Run \leftarrow Run + 1$. Se $Run > N^o_Trees$, PARAR! Caso o contrário, ir para o passo 7.

3.2 INFLAÇÃO

Como já mencionado anteriormente, a inflação exerce papel importante entre as premissas econômicas de um fundo de pensão, uma vez que impacta tanto o salário futuro dos contribuintes do plano quanto os benefícios dos participantes já aposentados. Para projetar a taxa de inflação, optou-se pela utilização do modelo de Wilkie (1995), bastante comum na modelagem da inflação em estudos atuariais (HURTADO, 2008).

De acordo com o modelo de Wilkie, sendo θ_t o valor do índice de preços no período t , tem-se que:

$$\theta_t = \theta_{t-1} \cdot \exp\{I_t\} \quad (10)$$

Portanto,

$$I_t = \ln \frac{\theta_t}{\theta_{t-1}} = \ln \theta_t - \ln \theta_{t-1} \quad (11)$$

Onde I_t é a força da inflação no período $(t-1, t)$. Como se pode observar, a força da inflação I_t é expressa pela diferença entre os logaritmos do índice de preços a cada ano, e pode ser modelada como uma série autorregressiva de primeira ordem, AR(1), que também pode ser escrita como AR(μ, a, σ), pois:

$$I_t = \mu + a \cdot (I_{t-1} - \mu) + \sigma \cdot \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim i.i.d. N(0, 1) \quad (12)$$

Onde:

- μ = taxa média da força de inflação
- a = coeficiente autoregressivo
- σ = desvio-padrão do termo de inovação
- ε_t = resíduo padronizado

Assim, o modelo estabelece que a cada ano a força da inflação é igual à sua taxa média μ mais uma proporção a da diferença entre a força da inflação do período anterior e a média, ou seja, o desvio em relação à média no período $t-1$, mais uma inovação aleatória com média zero e desvio padrão σ . Os parâmetros (μ, a, σ) são estimados a partir dos dados e então a taxa de inflação pode ser calculada em função de I_t utilizando-se a equação (10).

Conforme destaca Hurtado (2008), o objetivo deste modelo não é exatamente alcançar bom desempenho em previsões de curto prazo, mas sim fornecer estruturas realistas de variância e covariância para o longo prazo e, assim, tornar-se uma ferramenta importante no âmbito dos estudos atuariais.

Para o propósito deste trabalho, a série histórica utilizada para a projeção da inflação foi a série anual do IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo) de 1996 à 2017, disponível no site do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA). O modelo AR(1) descrito acima foi utilizado para se chegar aos valores das taxas de inflação para o período igual ao horizonte projetado da árvore de cenários. Para os demais períodos (até a extinção do fundo) utilizou-se uma taxa de inflação de longo prazo de 4,25% a.a. Os detalhes dos resultados dos testes de diagnóstico do modelo utilizado para a previsão da taxa de inflação encontram-se no Apêndice A.

3.3 AUMENTO REAL DOS SALÁRIOS

De acordo com Winklevoss (1993), o aumento dos salários ocorre basicamente devido a três motivos: i) reposição às perdas decorrentes de inflação, ii) méritos e iii) produtividade da empresa como um todo. Nas palavras de Rodrigues (2008), existem algumas maneiras de se chegar a uma resultante quanto ao crescimento real dos salários. Ainda segundo o autor, uma delas é considerar o incremento salarial de forma agregada, desconsiderando chances individuais de carreira, isto é, atribuindo-se uma taxa única para todos os participantes do plano de acordo com a política de recursos humanos da empresa patrocinadora do fundo de pensão.

No entanto, como o objetivo deste trabalho é simular o status de vida de cada participante ao longo do tempo, faz-se necessária também a simulação de taxas reais de crescimento salarial individuais. Soma-se a isto a metodologia de simular o status de cada pessoa em cada nó de cada período da árvore de cenários, logo, as taxas reais de aumento salarial devem ser, além de individuais, específicas por nó e por período também.

Conforme Rodrigues (2008), é natural observar taxas maiores de aumento salarial em pessoas mais jovens, tendendo esta mesma taxa a diminuir e se estabilizar em idades mais avançadas. Portanto, a metodologia proposta para a modelagem do aumento real dos salários contempla taxas maiores para pessoas mais jovens, e também mantém uma variável sob controle da política de recursos humanos da empresa patrocinadora do fundo de pensão, de forma a controlar os aumentos gerais. Assim, propõe-se a seguinte fórmula para o cálculo da

taxa real de crescimento salarial de um participante p de idade $x+t$ no nó n do período t , (γ_{p_{x+t}, n_t}) :

$$\gamma_{p_{x+t}, n_t} = 1 + \frac{[(\omega - x - t) \cdot 0,01 + \delta \cdot R(s)]}{100} \quad (13)$$

Onde:

ω = idade final ou inalcançável da tábua de mortalidade.

δ = política de recursos humanos da empresa patrocinadora do fundo de pensão.

$R(s)$ = variável aleatória, sendo $R(s) \sim U[0,1]$.

Neste trabalho define-se arbitrariamente $\delta = 3$, fazendo uma analogia aos 3% da taxa geral aplicada a todos os membros do plano, comumente encontrada na literatura e adotada como premissa em alguns dos maiores fundos de pensão brasileiros.

3.4 TAXA DE DESCONTO ATUARIAL

Segundo Valladão (2008), e alinhado ao que afirma Pinheiro (2007), os fluxos reais do passivo atuarial, até a extinção do plano de benefícios, devem ser descontados pela rentabilidade da carteira, ou seja, considerando o real custo de oportunidade do fundo de pensão. Isto significa que a taxa de desconto atuarial, ou taxa de juros atuariais, deve ser igual ao ganho real dos investimentos.

O valor máximo da taxa real de desconto atuarial, estabelecido na legislação vigente, é de 6% a.a. ou a sua equivalência mensal, não havendo restrição ao valor mínimo. A fim de analisar os efeitos das variações da taxa de desconto atuarial sobre os valores das reservas matemáticas do fundo de pensão, serão utilizadas taxas reais no intervalo discreto de 1% a 6% ao ano, de forma que, para cada ponto percentual, gera-se a mesma quantidade de árvores de cenários para realizar a comparação entre os valores médios do passivo atuarial.

3.5 STATUS DO PARTICIPANTE

A abordagem de simular o futuro de cada participante individualmente é também utilizada em Boender (1997). Chamada de microssimulação, o autor declara que, desta forma, torna-se mais fácil a validação do modelo e a incorporação de planos de pensão individuais

flexíveis e modernos. Uma das vantagens da microsimulação é que, por exemplo, ao invés da tradicional fórmula atuarial que considera as probabilidades das tábuas biométricas, sempre fixas por idade e sexo, no cálculo das reservas matemáticas e fluxos de caixa do fundo de pensão, a microsimulação substitui essas probabilidades por variáveis aleatórias com distribuição binomial, ou processos de Bernoulli, uma vez que simulam a ocorrência ou não de eventos chave para o planejamento do fundo, como a idade de uma possível entrada em invalidez, a morte de cada participante, etc. em cada nó de cada período de tempo futuro. Por este motivo, em um contexto de árvore de cenários e tratando-se exclusivamente do risco biométrico, a microsimulação apresenta uma variabilidade interessante, especialmente quando comparada ao método atuarial clássico citado anteriormente.

Para definir o status de cada participante em cada nó, são feitos testes que resultam em respostas binárias, ou seja, mutuamente excludentes. Estas respostas indicarão, por exemplo, se o indivíduo está ou não vivo, se sofreu alguma situação de invalidez, se está ou não aposentado, entre outros. Estes testes são feitos para cada nó, em cada período.

Assim temos:

- $E(q_{p_{x+t}, n_t}^z)$: corresponde ao status vivo ou não do participante p , do sexo z , no período $x+t$ para um determinado nó n_t . O resultado para este evento se dá através de escolha randômica na forma:

$$E(q_{p_{x+t}, n_t}^z) = \{0; 1\}, \quad q_{p_{x+t}, n_t}^z = \begin{cases} 0, & \text{se } R(q_{p_{x+t}, n_t}^z) \leq q_{x+t}^z \\ 1, & \text{se } R(q_{p_{x+t}, n_t}^z) > q_{x+t}^z \end{cases} \quad (14)$$

Onde:

$E(q_{p_{x+t}, n_t}^z) = 0$ se morto ou 1 se vivo com a idade $x + t$, sexo z , no nó n_t .

$R(q_{p_{x+t}, n_t}^z)$ = geração randômica para a variável aleatória q_{p_{x+t}, n_t}^z , que deve ser comparada ao valor dado pela tábua de mortalidade para o sexo z e idade $x+t$, sendo

$$R(q_{p_{x+t}, n_t}^z) \sim U[0,1].$$

Supondo que a tábua utilizada apresente a probabilidade $q_{x+t}^z = 0,001305$ e que a geração randômica obtida seja $R(q_{p_{x+t}, n_t}^z) = 0,002000$. Logo, $R(q_{p_{x+t}, n_t}^z) > q_{x+t}^z$ e, por isso, $E(q_{p_{x+t}, n_t}^z) = 1$, isto é, o participante permanece vivo.

- $E(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd})$: representa a ocorrência ou não do evento entrada em invalidez (*rd*) para determinado membro p do fundo de pensão no período $x+t$ para um certo nó n_t . O valor desta variável aleatória será:

$$E(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd}) = \{0; 1\}, \quad q_{p_{x+t}, n_t}^{rd} = \begin{cases} 0, & \text{se } R(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd}) > q_{x+t}^{rd} \\ 1, & \text{se } R(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd}) \leq q_{x+t}^{rd} \end{cases} \quad (15)$$

Onde:

$E(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd}) = 0$ se não entrou em invalidez ou 1 se entrou em invalidez na idade $x+t$ no nó n_t .
 $R(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd}) =$ geração randômica para a variável aleatória q_{p_{x+t}, n_t}^{rd} , que deve ser comparada ao valor dado pela tábua de entrada em invalidez relativa à idade $x+t$, sendo $R(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd}) \sim U[0,1]$.

Cabe destacar neste ponto que, em caso de ocorrência de uma situação de entrada em invalidez por um participante p qualquer, este mesmo participante será automaticamente aposentado. Ou seja:

$$P[E(q_{p_{x+t}, n_t}^r) = 1 | E(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd}) = 1] = 1 \quad (16)$$

- $E(q_{p_{x+t}, n_t}^d)$: define se um participante p , inválido (*d*), vive ou morre no período $x+t$ em um determinado nó n_t . O resultado para esta variável dependerá da seguinte definição:

$$E(q_{p_{x+t}, n_t}^d) = \{0; 1\}, \quad q_{p_{x+t}, n_t}^d = \begin{cases} 0, & \text{se } R(q_{p_{x+t}, n_t}^d) \leq q_{x+t}^d \\ 1, & \text{se } R(q_{p_{x+t}, n_t}^d) > q_{x+t}^d \end{cases} \quad (17)$$

Onde:

$E(q_{p_{x+t}, n_t}^d) = 0$ se inválido morto ou 1 se inválido vivo com a idade $x+t$, no nó n_t .
 $R(q_{p_{x+t}, n_t}^d) =$ geração randômica para a variável aleatória q_{p_{x+t}, n_t}^d , que deve ser comparada ao valor dado pela tábua de mortalidade de inválidos relativa à idade $x+t$, sendo $R(q_{p_{x+t}, n_t}^d) \sim U[0,1]$.

É importante destacar que, no caso da ocorrência de morte de qualquer membro do plano de benefícios, tanto inválido quanto comum, esse status permanecerá inalterado para

todos os nós descendentes daquele em que houve o falecimento do participante. Isto é, uma vez que o indivíduo tenha falecido em determinado nó de determinado período, ele é automaticamente excluído da simulação de vida nos nós decorrentes até o final do horizonte planejado. Logo:

$$P[E(q_{p_{x+t}, n_t}^z) = 0 | E(q_{p_{x+t-1}, n_{t-1}}^z) = 0] = 1 \quad (18)$$

Sendo n_{t-1} e n_t nós consecutivos e interligados.

Condição semelhante aplica-se ao caso de ocorrência do evento entrada em invalidez de qualquer membro do fundo de pensão para qualquer nó de um período t . O status do participante permanecerá “Aposentado por Invalidez” nos nós subsequentes àquele na qual a ocorrência da invalidez foi registrada, alterando-se somente em caso de morte do participante inválido conforme demonstrado anteriormente.

- $E(q_{p_{x+t}, n_t}^r)$: indica se o indivíduo está ou não aposentado no período $x+t$. Neste caso, a resposta dependerá do regulamento do plano de benefícios, pois:

$$E(q_{p_{x+t}, n_t}^r) = \{0; 1\}, \quad q_{p_{x+t}, n_t}^r = \begin{cases} 0, & \text{se } x+t < r_p \\ 1, & \text{se } x+t \geq r_p \end{cases} \quad (19)$$

Onde:

$E(q_{p_{x+t}, n_t}^r) = 0$ se ativo ou 1 se aposentado com a idade $x+t$, no nó n_t .

r_p = idade prevista para a aposentadoria do participante p .

3.6 FLUXO DE CAIXA PREVIDENCIÁRIO

Uma vez definido, através de simulação, o status de cada participante em cada um dos nós dos diferentes estágios da árvore de cenários, é possível atribuir valores de fluxo de caixa para o membro do fundo de pensão e, posteriormente, mensurar as reservas matemáticas.

O valor do fluxo de caixa nominal FC em cada nó n_t se dá através da diferença entre o total de benefícios pagos e o total de contribuições recebidas. De maneira oposta ao que é comumente encontrado na literatura, neste trabalho, optou-se por inverter a ordem dos termos da equação, a fim de que nos casos onde a totalidade dos benefícios pagos no nó supere o

somatório das contribuições recebidas o valor represente um número negativo, ou seja, uma saída de caixa do ponto de vista do gestor do fundo de pensão. Assim, temos que:

$$FC_{n_t} = \sum_{p=1}^M \text{Contribuições}_{p,n_t} - \sum_{p=1}^M \text{Benefícios}_{p,n_t} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} FC_{n_t} = & \sum_{p=1}^M S_{p_{x+t-1}, n_{t-1}} \cdot (1 + \theta_{t-1}) \cdot (1 + \gamma_{p_{x+t}, n_t}) \cdot (\%CPF + \%CPJ) \cdot \\ & \cdot [1 - E(q_{p_{x+t}, n_t}^r)] \cdot E(q_{p_{x+t}, n_t}^z) - \sum_{p=1}^M B_{p_{x+t-1}, n_{t-1}} \cdot (1 + \theta_{t-1}) \cdot E(q_{p_{x+t}, n_t}^r) \cdot \\ & \cdot \{ E(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd}) \cdot E(q_{p_{x+t}, n_t}^d) + [1 - E(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd})] \cdot E(q_{p_{x+t}, n_t}^z) \} \end{aligned}$$

Sendo n_{t-1} e n_t consecutivos e interligados.

Onde:

$S_{p_{x+t-1}, n_{t-1}}$ = salário anual do participante p de idade $x + t - 1$, no nó antecessor n_{t-1} .

θ_{t-1} = índice anual de inflação medido durante o período $t - 1$.

γ_{p_{x+t}, n_t} = incremento anual real do salário do participante p na idade $x + t$, no nó n_t .

$\%CPF$ = percentual de contribuição incidente sobre o salário do participante, pago pelo próprio participante.

$\%CPJ$ = percentual de contribuição incidente sobre o salário do participante, pago pela patrocinadora.

$B_{p_{x+t-1}, n_{t-1}}$ = benefício anual do participante p de idade $x + t - 1$, no nó antecessor n_{t-1} .

$E(q_{p_{x+t}, n_t}^r) = 0$ se ativo ou 1 se aposentado com a idade $x + t$, no nó n_t .

$E(q_{p_{x+t}, n_t}^z) = 0$ se morto ou 1 se vivo com a idade $x + t$, no nó n_t .

$E(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd}) = 0$ se não entrou em invalidez ou 1 se inválido na idade $x + t$ no nó n_t .

$E(q_{p_{x+t}, n_t}^d) = 0$ se inválido morto ou 1 se inválido vivo no nó n_t .

É natural que os membros de um fundo de pensão precisem cumprir um tempo mínimo de contribuição, previsto no regulamento do plano de benefícios, para que, em conjunto com outros critérios, tornem-se elegíveis ao recebimento regular da aposentadoria. Contudo, nem sempre é possível cumprir o tempo mínimo requerido, como, por exemplo, nos

casos de aposentadoria por invalidez. Para a finalidade deste trabalho, o parâmetro φ representa a razão entre o tempo de contribuição já atingido pelo participante p , até a sua idade $x + t$, e o período mínimo previsto. Portanto, temos que:

$$\varphi_{p_{x+t}} = \frac{\min(\text{tempo de contribuição; tempo mínimo de contribuição})}{\text{tempo mínimo de contribuição}} \quad (21)$$

No período inicial da simulação, o fundo de pensão tem certeza somente dos valores de benefícios de aposentadoria a serem pagos aos membros que já estão aposentados. No caso dos participantes que ainda estão contribuindo para o plano, o valor do benefício ao qual eles terão direito quando tornarem-se elegíveis a isto ainda é uma incógnita, uma vez que dependerá de diversos fatores ao longo do tempo, sobretudo ao valor do último salário do participante antes de se aposentar. Assim, pode-se definir o valor do benefício a ser recebido por um participante p , na idade $x + t$, imediatamente antes da aposentadoria, em um determinado nó n_t , através da fórmula:

$$B_{p_{x+t}, n_t} = S_{p_{x+t}, n_t} \cdot g \cdot \varphi_{p_{x+t}} \quad (22)$$

Onde:

S_{p_{x+t}, n_t} = salário antes da aposentadoria do participante p de idade $x + t$, no nó n_t .

g = regra de formação do benefício.

$\varphi_{p_{x+t}}$ = proporção do benefício acumulado por tempo de contribuição pelo participante p até a sua idade $x + t$.

Em palavras, podemos resumir o cálculo do Fluxo de Caixa em um nó da seguinte maneira: se o participante está vivo e contribuindo, ou seja, $E(q_{p_{x+t}, n_t}^z) \cdot [1 - E(q_{p_{x+t}, n_t}^r)] = 1$, atualiza-se o seu salário anual do nó antecessor no período $t - 1$, $(S_{p_{x+t-1}, n_{t-1}})$, com a taxa real de aumento salarial simulada para este mesmo participante p de idade $x+t$ no nó n_t (γ_{p_{x+t}, n_t}) e também com a taxa de inflação entre o período $t - 1$ e t , (θ_{t-1}) . Uma vez que o salário anual esteja atualizado, aplica-se o percentual de contribuição, considerando-se tanto o pagamento a ser feito pelo membro do fundo (%CPF) quanto o pagamento a ser efetuado pela empresa patrocinadora (%CPJ). No caso do participante estar vivo e aposentado, isto é, $E(q_{p_{x+t}, n_t}^z) \cdot E(q_{p_{x+t}, n_t}^r) = 1$, o

processo é semelhante ao do membro contribuinte, mas, neste caso, atualiza-se o benefício anual do participante no nó antecessor do período anterior $(B_{p_{x+t-1}, n_{t-1}})$ apenas pela taxa de inflação. Outra diferença entre a simulação de um contribuinte e a de um aposentado é que, no caso do aposentado, caso tenha sido aposentado por invalidez, a probabilidade de morte provém da tábua de mortalidade de inválidos, enquanto que para os aposentados comuns e para os contribuintes a tábua de mortalidade utilizada é a de válidos. O valor final do fluxo de caixa atuarial do nó será o somatório do valor resultante de cada participante p .

3.7 RESERVAS MATEMÁTICAS

Assim como na fórmula para apuração dos fluxos de caixa de cada nó da árvore de cenários, a equação para a mensuração da reserva matemática de benefícios a conceder também apresenta a ordem inversa ao que é comumente encontrado na literatura, isto é, as contribuições com o sinal positivo e os benefícios notados com o sinal negativo.

O cálculo da reserva matemática total é feito em duas etapas neste trabalho. A primeira etapa calcula a reserva matemática em cada um dos nós do último período da árvore de cenários, pois após a geração da árvore em si, que é simulada em um número reduzido de períodos à frente, cada nó é projetado para os períodos futuros em caminhos únicos, ou seja, sem novas ramificações, até a extinção do fundo de pensão, considerando os fluxos de caixa residuais de cada nó.

Para uma árvore de cenários com 10 períodos, o valor da reserva matemática de benefícios a conceder de um nó n_{10} qualquer do último período da árvore pode ser apurado através da seguinte fórmula:

$$\begin{aligned}
 RMBaC_{n_{10}} = & \sum_{p=1}^M \sum_{t=11}^T S_{p_{x+t-1}, n_{t-1}} \cdot (1 + \theta_{t-1}) \cdot \frac{1}{(1+i)^{t-10}} \cdot \\
 & \cdot \{(\%CPF + \%CPJ) \cdot (1 + \gamma_{p_{x+t}, n_t}) \cdot [1 - E(q_{p_{x+t}, n_t}^r)] \cdot E(q_{p_{x+t}, n_t}^z) - \\
 & - g \cdot \varphi_{p_{x+t}} \cdot E(q_{p_{x+t}, n_t}^r) \cdot [E(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd}) \cdot E(q_{p_{x+t}, n_t}^d) + (1 - E(q_{p_{x+t}, n_t}^{rd})) \cdot E(q_{p_{x+t}, n_t}^z)]\} \}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Sendo n_{t-1} e n_t consecutivos e interligados.

Onde:

i = taxa real de juros atuariais.

Quando comparada ao método atuarial clássico de cálculo da reserva matemática de benefícios a conceder, percebe-se claramente que as probabilidades existentes na fórmula tradicional foram substituídas por valores esperados binários, que assumem valor zero ou um dependendo dos resultados das simulações em cada nó de cada período, sempre condicionadas ao estado do nó antecessor. Isto ocorre porque, onde antes havia a probabilidade de ocorrência de um evento, agora há a simulação deste evento no período futuro, informando se ele ocorreu ou não em determinada simulação. Esta mesma lógica é aplicada ao cálculo da reserva matemática de benefícios concedidos.

Considerando-se novamente uma árvore de cenários com 10 estágios, o cálculo do valor da reserva matemática de benefícios concedidos de um nó n_{10} qualquer do último período da árvore de cenários é realizado através da fórmula abaixo:

$$RMBC_{n_{10}} = \sum_{p=1}^M \sum_{t=11}^T B_{p_{x+t-1}, n_{t-1}} \cdot (1 + \theta_{t-1}) \cdot \frac{1}{(1+i)^{t-10}} \cdot \left[E(q_{p_{x+t}}^{rd}, n_t) \cdot E(q_{p_{x+t}}^d, n_t) + (1 - E(q_{p_{x+t}}^{rd}, n_t)) \cdot E(q_{p_{x+t}}^z, n_t) \right] \quad (24)$$

Sendo n_{t-1} e n_t consecutivos e interligados.

Portanto, o valor total da reserva matemática em um nó qualquer do último período da árvore de cenários, $RM_{n_{10}}$, será a soma de $RMBaC$ e $RMBC$ deste nó, ou seja:

$$RM_{n_{10}} = RMBaC_{n_{10}} + RMBC_{n_{10}} \quad (25)$$

A segunda etapa consiste no cálculo das reservas matemáticas de cada um dos nós da árvore de cenários baseado nas suas probabilidades de ocorrência. O cálculo de cada nó é feito primeiro somando-se as reservas matemáticas de seus nós-filhos aos seus respectivos fluxos de caixa atuariais. Depois, multiplica-se o valor obtido no primeiro passo pela

probabilidade de ocorrência de cada nó-filho e, então, desconta-se um período sob a taxa real de desconto atuarial. Este procedimento inicia-se nos nós do último período da árvore de cenários e anda para trás no tempo até chegar ao nó-raiz, ou seja, no período presente, quando $t = 0$.

Sendo cada nó equiprovável, a reserva matemática de cada nó da árvore de cenários pode ser calculada através da seguinte fórmula:

$$RM_{t=0} = \sum_{t=9}^0 \sum_{n=1}^N (RM_{n_{t+1}} + FC_{n_{t+1}}) \cdot 0,5 \cdot \frac{1}{(1+i)} \quad (26)$$

Sendo n_t e n_{t+1} consecutivos e interligados.

4 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Este capítulo apresenta, primeiramente, a descrição do fundo de pensão modelo e as premissas atuariais adotadas, utilizados como parâmetros e dados de entrada da simulação. Posteriormente, apresentam-se os resultados obtidos pelo modelo de simulação proposto.

As árvores de cenários geradas neste trabalho possuem 10 períodos anuais e são binárias, pois cada nó apresenta apenas duas ramificações para os nós do estágio seguinte. Ao se chegar ao último período da árvore, ou seja, quando $t = 10$, o modelo projeta cada um dos 1.024 nós em caminhos sem ramificações até a extinção do plano, isto é, até que todos os participantes tenham falecido e supondo que não haja novas adesões ao fundo. Desta forma, o fluxo de caixa residual é contemplado em todos os nós e a complexidade computacional é reduzida.

A escolha de um intervalo de tempo de 10 anos para a árvore de cenários se dá muito por conta do caráter exponencial do problema. O total de nós simulados em uma árvore binária são $2^{t+1} - 1$, sendo 2^t o número de nós em cada estágio t . Portanto, projetar a dinâmica de um fundo de pensão, cujos compromissos se estendem por longos prazos de 40, 50 anos ou até mais, seria algo proibitivo computacionalmente, mesmo tratando-se de árvores com somente duas ramificações a cada nó. Por exemplo, se um participante com 30 anos de idade no último período da árvore de cenários viver, pelo menos, até os 100 anos, o modelo precisará simular a situação de vida deste participante por mais 70 anos, ou seja, $t = 80$ ($10+70$). Para os fins deste estudo, o modelo proposto foi desenvolvido em R.

4.1 FUNDO DE PENSÃO MODELO E PREMISSAS ADOTADAS

Devido à dificuldade na obtenção de dados reais em virtude do caráter sigiloso de determinadas informações, como valores de salários e benefícios dos participantes, os dados do fundo de pensão representado neste trabalho são fictícios. Contudo, este fato não compromete os objetivos da pesquisa, uma vez que ao implementarmos o modelo em uma entidade de previdência real, estes dados seriam naturalmente fornecidos.

As premissas adotadas e as regras do fundo de pensão modelo seguem sugestões encontradas na literatura e são utilizadas também em grandes fundos de pensão do Brasil. O quadro abaixo apresenta um resumo das características da população do plano de benefícios e das regras empregadas na simulação:

Quadro 4.1.1 - Resumo das características da população, das regras e das premissas do fundo de pensão

	Mulheres	Homens
População do plano	505	495
Participantes contribuintes	391	399
Participantes aposentados	111	90
Participantes aposentados por invalidez	3	6
Salário de participação mensal médio (R\$)	9.345,64	
Benefício mensal médio (R\$)	9.165,30	
Tempo médio de contribuição em anos	18,4	
Idade média da população em anos	55,5	
Idade média de adesão ao plano em anos	37,1	
Tempo mínimo de contribuição em anos	30	35
Idade mínima de aposentadoria em anos	55	60
Idade máxima de adesão ao plano em anos	60	60
Idade máxima de aposentadoria em anos	70	70
Percentual de contribuição pago pelos participantes	9%	9%
Percentual de contribuição pago pela patrocinadora	9%	9%
Percentual do salário final base do cálculo do benefício (g)	80%	80%
Tábua mortalidade de válidos	AT-2000 suavizada em 10%	AT-2000 suavizada em 10%
Tábua mortalidade de inválidos	Winklevoss	
Tábua entrada em invalidez	Light média	
Pecúlio pago por morte de participante titular (R\$)	5.000,00	

Fonte: elaborado pelo autor

Além dos pontos resumidos no quadro acima, é importante ressaltar ainda os seguintes aspectos sobre o fundo de pensão:

- Todas as tábuas biométricas foram retiradas do “Banco de Tábuas Biométricas”, disponível no site do Instituto Brasileiro de Atuária (IBA). Vale destacar que, por não ser o foco deste trabalho, não foi realizado nenhum teste de aderência das tábuas selecionadas para a população do fundo de pensão, apesar da importância de tal teste em casos reais. Tampouco foi feito qualquer estudo de *improvement*, técnica utilizada para reproduzir tendências de variações futuras em tábuas biométricas, normalmente sob a hipótese de redução da mortalidade devido ao aumento na expectativa de vida.
- Assume-se que as contribuições a serem recebidas e o pagamento dos benefícios ocorrem sempre no início de cada período.
- Participantes e patrocinadora contribuem de forma paritária para o plano de benefícios de acordo com o percentual sobre o salário bruto do participante estipulado no regulamento do fundo de pensão.

- d) Além do benefício de aposentadoria por tempo de contribuição, o plano de benefícios oferece também aposentadoria por invalidez e pagamento de pecúlio por morte de participante titular.
- e) Para fins de simplificação, não foram considerados neste estudo os casos de pagamento de pensão para cônjuge/filhos, aposentadoria antecipada e os institutos: autopatrocínio, benefício proporcional diferido, portabilidade e resgate.
- f) Não há restrição quanto à idade mínima para adesão ao plano de benefícios. Contudo, uma vez que o participante tenha atingido o tempo de contribuição necessário para a aposentadoria, suas contribuições serão interrompidas e ele deverá aguardar até que atenda aos demais critérios exigidos para aposentar-se.
- g) No momento em que um membro do fundo de pensão estiver elegível ao recebimento de aposentadoria por ter cumprido o tempo mínimo de contribuição e já ter ultrapassado a idade mínima de aposentadoria, automaticamente ele passará a receber o benefício acumulado e suas contribuições ao fundo cessarão.
- h) Participantes já aposentados não são considerados passíveis da ocorrência de uma situação de invalidez, uma vez que, o principal motivo da utilização das tábuas de entrada em invalidez e mortalidade de inválidos é a projeção da probabilidade de pagamento de benefício de aposentadoria por invalidez a participantes que ainda deveriam estar contribuindo.
- i) No caso da ocorrência de uma situação de entrada em invalidez por um participante que ainda não tenha se aposentado, este será automaticamente considerado aposentado por invalidez e o valor do benefício a ser recebido corresponderá ao valor de benefício acumulado até a data de ocorrência da invalidez proporcional ao tempo de contribuição, ou seja, φ .

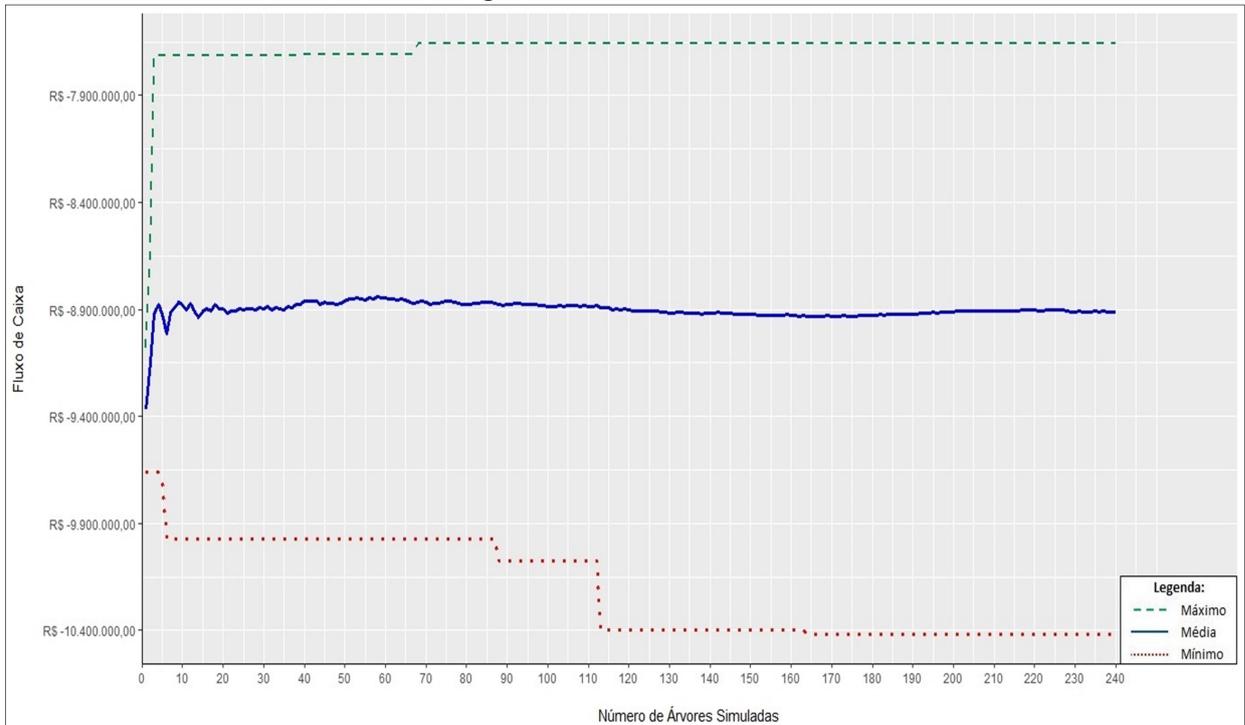
4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Em análises que envolvem modelos de simulação, um ponto importante a ser considerado é até quando o modelo deve ser calculado. No caso deste estudo, diversas árvores de cenários foram geradas a fim de verificar a convergência das médias dos valores de fluxo de caixa e de reserva matemática do fundo de pensão.

Os gráficos a seguir demonstram os valores da média, máximos e mínimos do fluxo de caixa previdenciário a cada árvore simulada, sendo que o Gráfico 4.2.1 ilustra a convergência

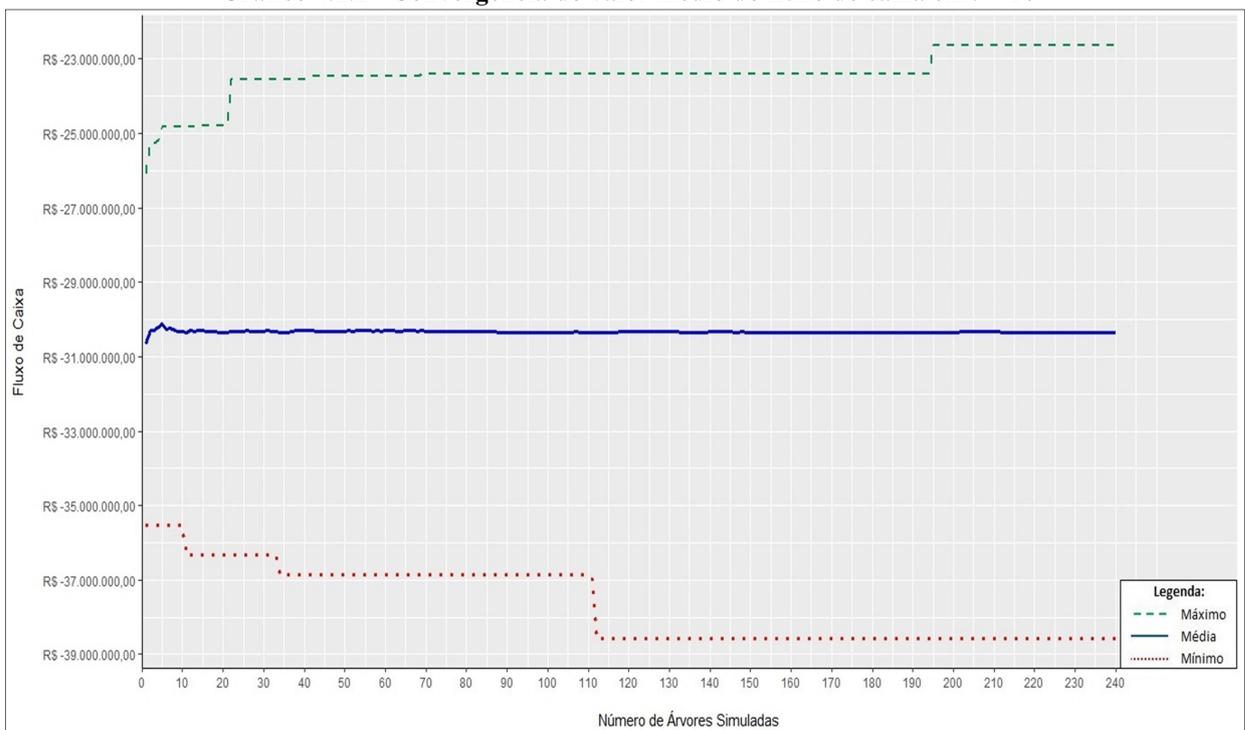
em um período inicial ($t = 1$) e o Gráfico 4.2.2 em um período final ($t = 10$) da árvore de cenários.

Gráfico 4.2.1 - Convergência do valor médio do fluxo de caixa em $t = 1$



Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.2 - Convergência do valor médio do fluxo de caixa em $t = 10$



Fonte: elaborado pelo autor

Ao analisar os gráficos 4.2.1 e 4.2.2, duas diferenças significativas entre um estágio inicial e um estágio final de uma árvore de cenários chamam a atenção: a velocidade de convergência das médias e a amplitude dos valores assumidos pela variável fluxo de caixa. A amplitude dos valores de fluxo de caixa aumenta conforme a distância do período simulado para o nó-raiz da árvore cresce. Este entendimento é intuitivo e se verifica nos gráficos, pois quanto mais estágios houver entre o período sob análise e o período inicial, maior será o número de estados possíveis simulados (cenários) entre eles e, conseqüentemente, maior será a dispersão dos dados. Por outro lado, em um ponto inicial da árvore de cenários, a amplitude dos valores possíveis de fluxo de caixa mostra-se muito menor, como no gráfico 4.2.1, pois o período ilustrado corresponde ao estágio seguinte, muito próximo ao nó-raiz da árvore, no qual a situação dos participantes e o estado do fundo de pensão são conhecidos com certeza.

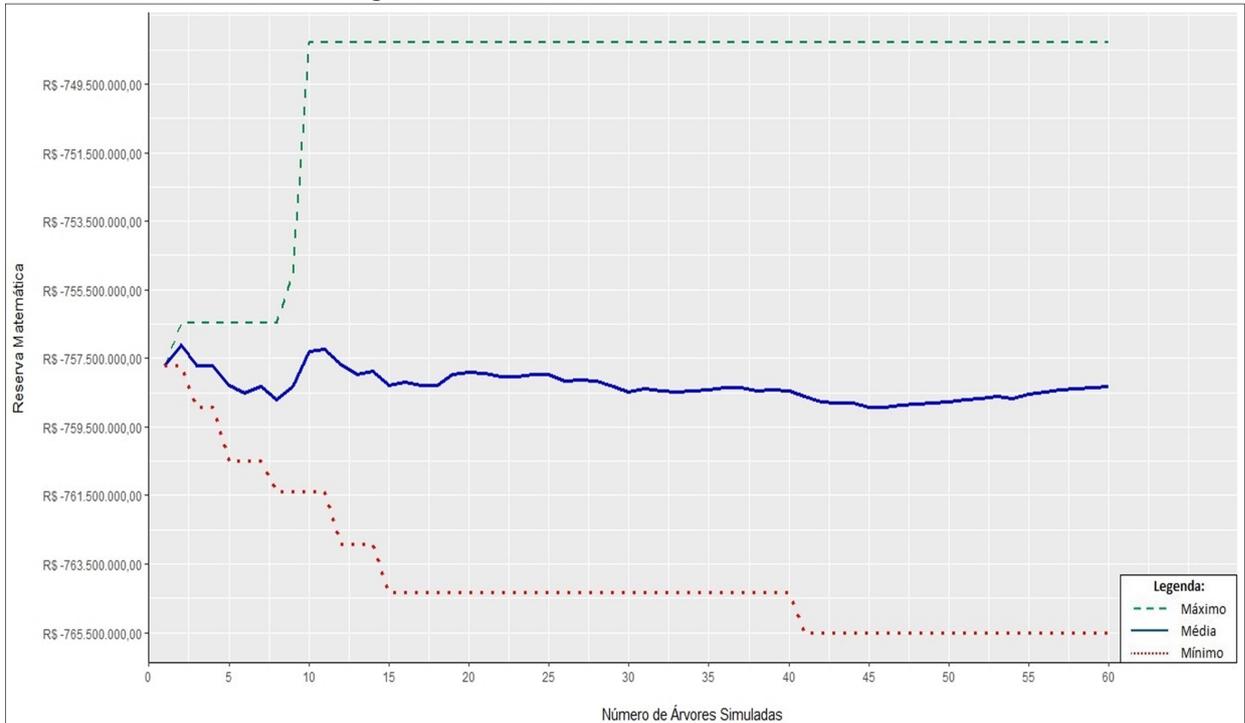
Já no caso da velocidade de convergência das médias, por se tratarem de árvores binárias, os períodos finais possuem um número maior de observações que os primeiros períodos e, por isso, estes estágios iniciais das árvores de cenários necessitam que o modelo seja calculado mais vezes até acumular uma quantidade suficientemente grande de dados (nós) e a média tender para um determinado valor. O que se observa no gráfico 4.2.1 é que o valor médio do fluxo de caixa começa a convergir a partir da 25ª árvore gerada, apresentando ainda algumas pequenas oscilações, mas retornando para um intervalo estável, enquanto que no gráfico 4.2.2, por se tratar de um período final e, por isso, ter mais nós simulados em cada árvore, a convergência da média da variável de fluxo de caixa é mais rápida, a partir da 10ª árvore gerada. Portanto, considerando-se apenas a variável fluxo de caixa, pode-se afirmar que 40 árvores de cenários são suficientes para garantir a convergência da média e, a partir deste número, continuar rodando o modelo de simulação seria um desperdício de recursos.

Faz-se necessário também verificar a convergência do valor médio da variável reserva matemática. Para este propósito são apresentados outros dois gráficos, um para o período presente ($t = 0$) e outro novamente para o último período da árvore de cenários ($t = 10$). Porém, os gráficos ilustram a convergência do valor médio do passivo atuarial em duas situações distintas. Como o valor desta variável é diretamente influenciado pela taxa de desconto atuarial adotada como premissa, optou-se por demonstrar a convergência da média à uma taxa fixa no Gráfico 4.2.3 e, no Gráfico 4.2.4, a convergência da média com as taxas variando uniformemente entre 1% e 6%.

Observando os gráficos 4.2.3 e 4.2.4, percebe-se que quando uma taxa fixa de desconto atuarial é estabelecida, a convergência da média da variável reserva matemática se comporta de maneira semelhante à da variável fluxo de caixa, tendendo para um determinado

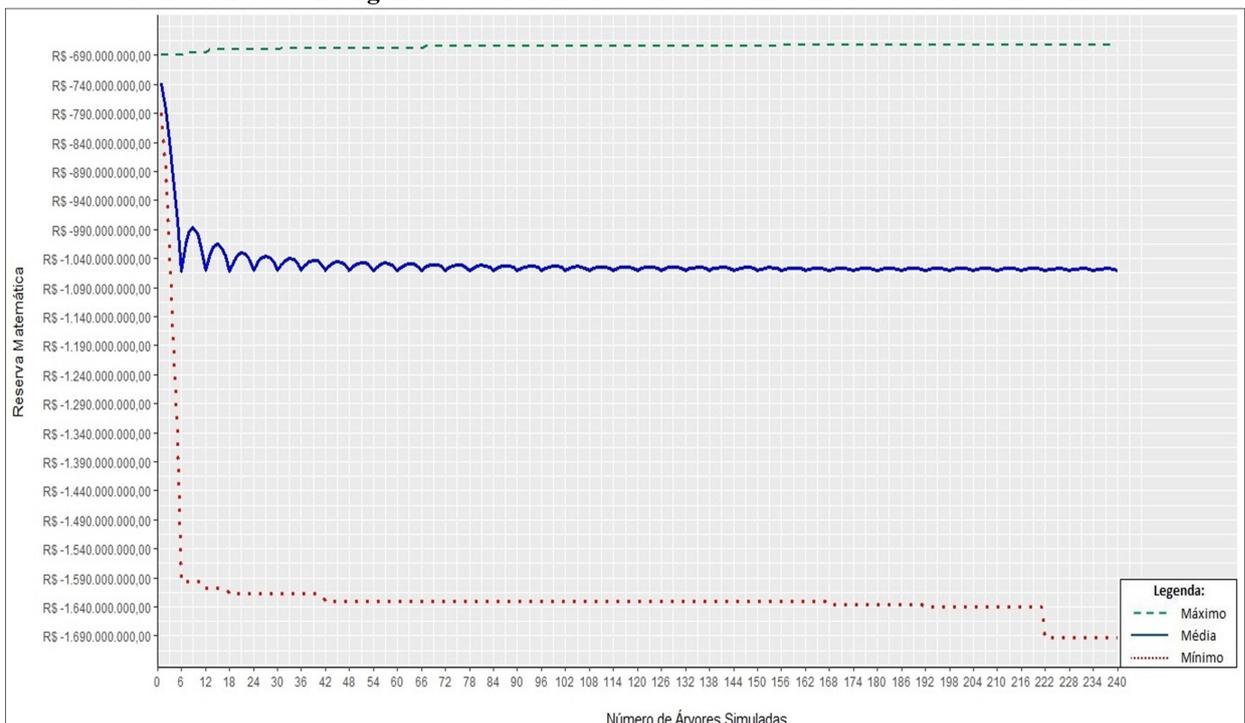
valor a partir da 30ª árvore gerada. Já no Gráfico 4.2.4, em que as taxas variam, o valor médio começa a convergir para um determinado número após uma quantidade significativamente maior de árvores de cenários, aproximadamente 100.

Gráfico 4.2.3 - Convergência do valor médio da reserva matemática à taxa de 3% em $t = 0$



Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.4 - Convergência do valor médio da reserva matemática a várias taxas em $t = 10$



Fonte: elaborado pelo autor

4.2.1 Efeitos da Variação da Taxa de Juros Atuariais sobre a Reserva Matemática

A fim de analisar os efeitos das diferentes taxas reais de juros atuariais sobre os valores de reservas matemáticas, foram geradas 40 árvores de cenários para cada uma das taxas, de 1% à 6%, totalizando 240 árvores. Vale lembrar que as taxas de juros atuariais, ou taxas de desconto atuarial, são aquelas utilizadas para trazer a valor presente o fluxo de caixa dos períodos futuros.

Uma das vantagens de se fazer a análise das reservas matemáticas a partir de mais de uma taxa de desconto atuarial é a de obter maior visibilidade quanto às possibilidades de valores que a variável pode assumir em cenários distintos e quais os seus impactos, contrastando com o que seria obtido caso o passivo atuarial do fundo de pensão fosse mensurado utilizando-se apenas uma única taxa. A Tabela 4.2.1.1 mostra os valores da média, desvio padrão, máximo e mínimo da reserva matemática de cada uma das taxas de juros atuariais mencionadas anteriormente, apurados no período zero e no último estágio das árvores de cenários, que são os períodos de maior interesse para a análise da reserva matemática. O último estágio representa o passivo atuarial ao final do horizonte projetado pela árvore de cenários, tendo em vista que ao final do último período de cada árvore o modelo simula o status de cada participante até a extinção do plano de benefícios e desconta os respectivos fluxos de caixa até o instante $t = 10$. Já o período inicial, além de considerar as reservas matemáticas do último estágio da árvore, desconta estes valores somados aos fluxos de caixa dos nós intermediários das árvores até o nó-raiz, representando o valor total do passivo atuarial no tempo presente após todo o processo de simulação.

Tabela 4.2.1.1 - Tabela comparativa entre as taxas de desconto atuarial

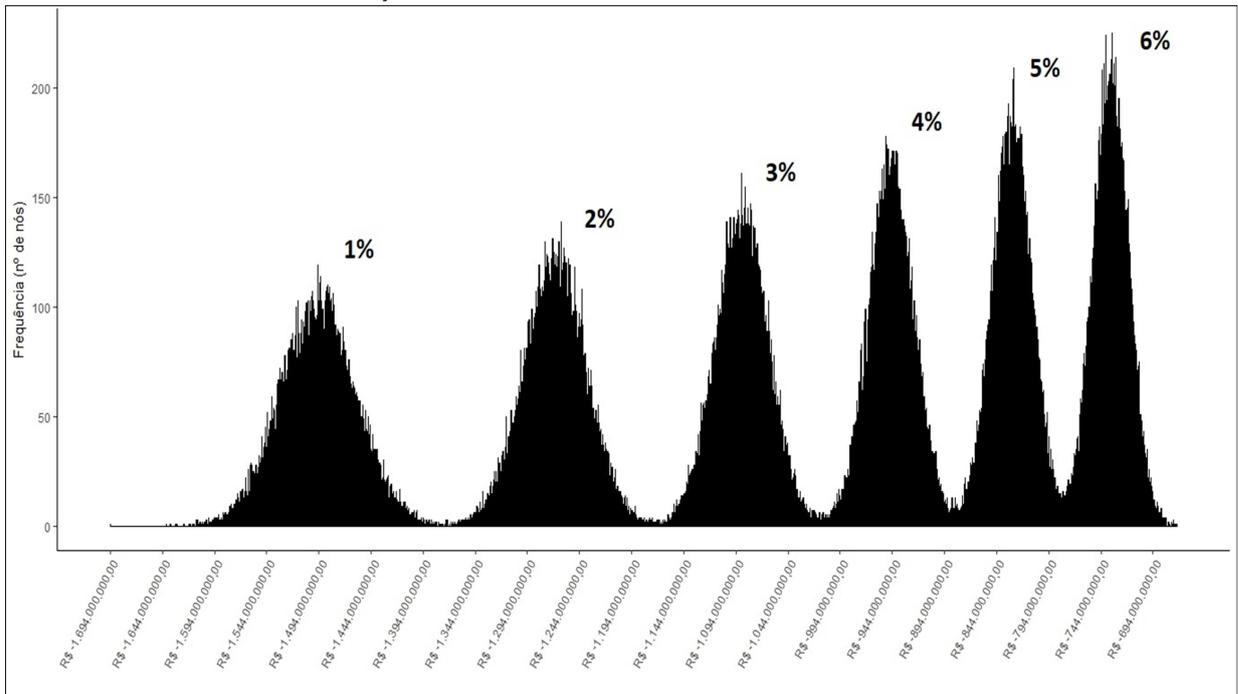
		Taxas de Juros Atuariais					
		1% a.a.	2% a.a.	3% a.a.	4% a.a.	5% a.a.	6% a.a.
Período Inicial ($t = 0$)	Máximo	-R\$ 1.194.661.531,00	-R\$ 938.451.147,00	-R\$ 748.272.927,00	-R\$ 608.818.566,00	-R\$ 497.419.800,00	-R\$ 415.039.772,00
	Média	-R\$ 1.204.989.613,00	-R\$ 948.147.713,00	-R\$ 758.444.392,00	-R\$ 614.579.297,00	-R\$ 506.729.730,00	-R\$ 421.831.564,00
	Desvio Padrão	R\$ 4.799.737,00	R\$ 4.052.711,00	R\$ 3.072.922,00	R\$ 2.608.418,00	R\$ 3.196.176,00	R\$ 2.553.354,00
	Mínimo	-R\$ 1.215.002.013,00	-R\$ 955.188.836,00	-R\$ 764.336.080,00	-R\$ 620.709.106,00	-R\$ 512.515.780,00	-R\$ 426.045.497,00
Período Final ($t = 10$)	Máximo	-R\$ 1.316.243.115,00	-R\$ 1.148.128.507,00	-R\$ 975.096.356,00	-R\$ 854.302.822,00	-R\$ 748.812.002,00	-R\$ 671.202.745,00
	Média	-R\$ 1.494.715.285,00	-R\$ 1.267.473.674,00	-R\$ 1.088.567.419,00	-R\$ 944.985.515,00	-R\$ 829.260.585,00	-R\$ 734.428.384,00
	Desvio Padrão	R\$ 35.288.272,00	R\$ 29.342.569,00	R\$ 24.715.936,00	R\$ 21.408.000,00	R\$ 18.939.797,00	R\$ 16.901.338,00
	Mínimo	-R\$ 1.693.766.485,00	-R\$ 1.384.331.784,00	-R\$ 1.193.197.919,00	-R\$ 1.030.632.149,00	-R\$ 914.501.310,00	-R\$ 810.577.431,00

Fonte: elaborado pelo autor

Ao observar a tabela acima, percebe-se de forma clara a relação inversamente proporcional entre a taxa de juros atuariais e o valor da reserva matemática do plano previdenciário, pois quanto maior for a taxa de desconto atuarial, menores serão os compromissos, em termos absolutos, do fundo de pensão e, conseqüentemente, menores serão as exigências de ativos para cobrir as obrigações do plano. Na prática isto significa que, no caso de um déficit devido ao fraco desempenho dos investimentos, o gestor do fundo de pensão poderia adotar como premissa uma taxa de desconto atuarial mais alta para, na verdade, mascarar uma situação de insolvência.

Quando comparadas as médias dos valores de reservas matemáticas no tempo presente ($t = 0$) das duas taxas mais extremas utilizadas neste comparativo, 1% e 6%, o valor médio da reserva matemática chega a aumentar quase três vezes quando se passa da maior taxa permitida pela legislação vigente para uma taxa de desconto atuarial de 1% a.a, o que representa um crescimento de aproximadamente 185% nos compromissos do fundo de pensão e resulta em um montante de mais de R\$ 780.000.000,00 de diferença. Já quando se faz a mesma comparação no último estágio da árvore de cenários ($t = 10$), as variações percentuais entre as taxas se mostram menores, apesar do valor da reserva matemática calculada com a maior taxa (6%) ser o dobro da reserva matemática calculada com menor taxa de desconto atuarial (1%). Quando se desconsideram as taxas mais extremas e avaliam-se os efeitos da variação de apenas um ponto percentual na taxa de juros atuariais, apura-se que as variações médias nos valores das reservas matemáticas são de aproximadamente 18%, das quais a mínima foi 11% e a máxima 27%, sendo que as maiores variações ocorreram entre as taxas mais baixas no período zero. Percebe-se também que o impacto financeiro pode chegar a mais de R\$ 250.000.000,00 entre as taxas de 1% e 2% no nó-raiz da árvore de cenários, mas a variação média dos valores de reservas matemáticas fica em torno de R\$ 150 M.

Chama a atenção também o comportamento do desvio-padrão, que aumenta quando a taxa de juros atuariais é reduzida. Intuitivamente, quanto maior for a taxa de juros utilizada para descontar um fluxo de caixa, e fazendo esta taxa tender ao infinito, o valor dos fluxos de caixa descontados tendem à zero. Por este motivo, os fluxos de cada nó se concentram mais em torno da média, fazendo com que o valor do desvio-padrão seja menor. É possível perceber estas diferenças no Gráfico 4.2.1.1, que ilustra as distribuições dos valores de reservas matemáticas das 40 árvores de cada taxa de desconto atuarial no último período da árvore de cenários em um único gráfico.

Gráfico 4.2.1.1 - Distribuição da reserva matemática de cada taxa de desconto atuarial em $t = 10$ 

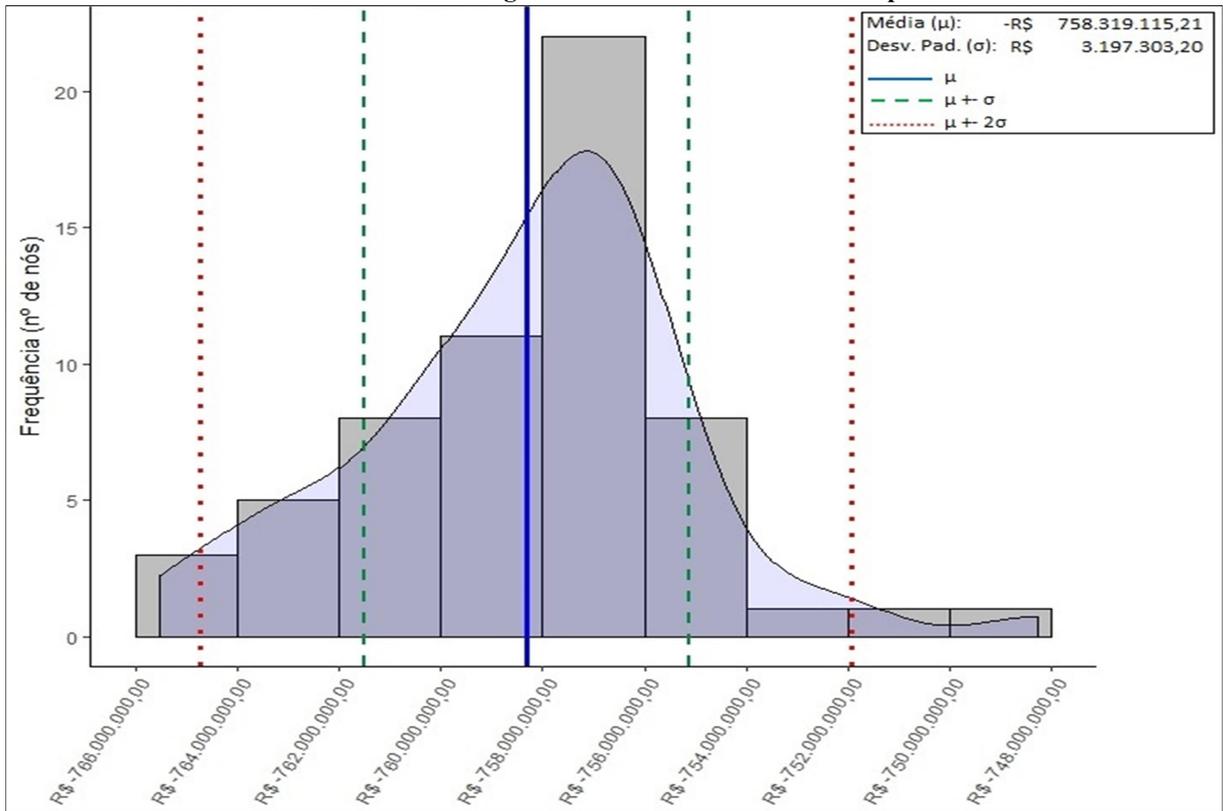
Fonte: elaborado pelo autor

4.2.2 Distribuição dos Valores do Passivo Atuarial

Para a análise da distribuição dos valores de reservas matemáticas foram escolhidos novamente apenas dois períodos, o nó-raiz, no tempo presente, e o último estágio da árvore de cenários, ou seja, no instante $t = 10$, pelos motivos já expostos anteriormente. Como pode ser observado na seção anterior, os valores assumidos pela variável reserva matemática apresentam grande amplitude quando calculados utilizando-se diferentes taxas de juros atuariais. Portanto, para melhor ilustrar a distribuição dos valores obtidos em determinado estágio da árvore de cenários, optou-se por apresentar os histogramas de apenas uma taxa de desconto atuarial, neste caso 3% a.a. Contudo, os dados se resumiram à somente 40 árvores de cenários, que no caso do período zero, por possuir somente o nó-raiz, representa uma amostra muito pequena. Para amenizar este problema, foram geradas mais 20 árvores de cenários utilizando a mesma taxa de juros atuariais de 3%, perfazendo um total de 60 árvores.

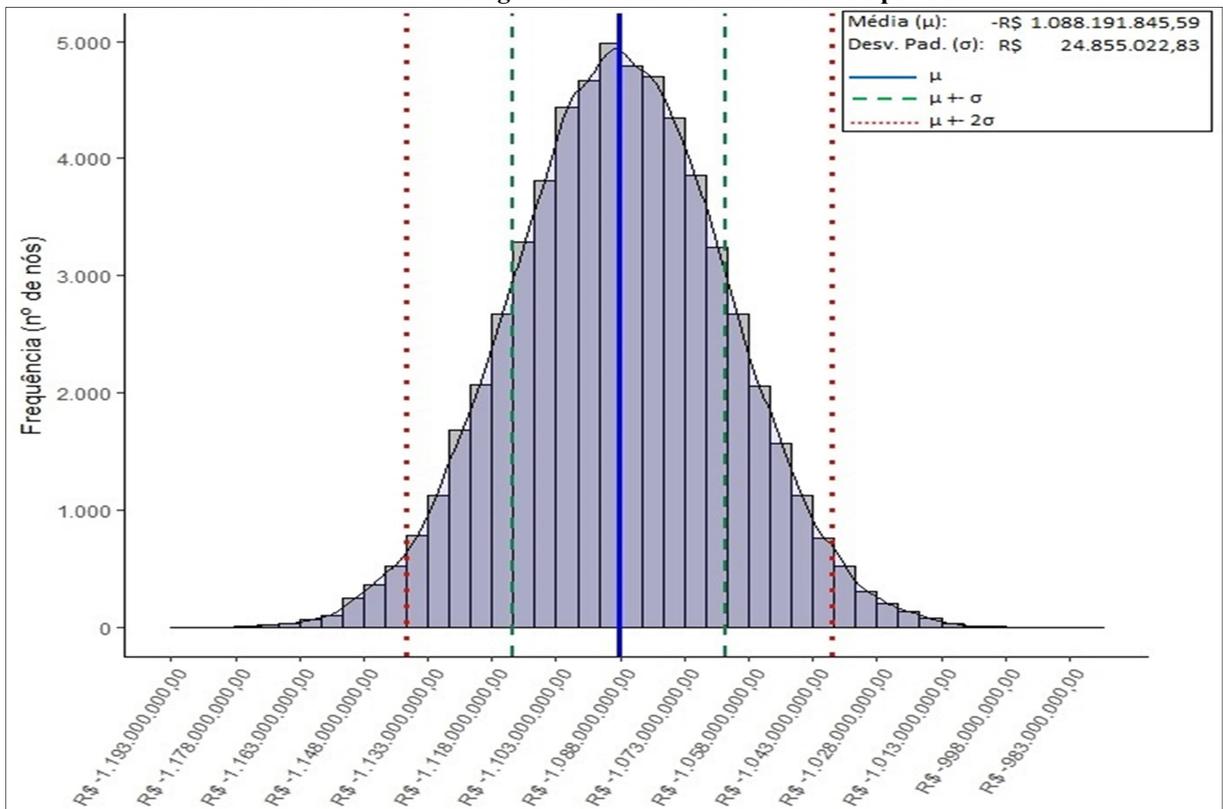
Os Gráficos 4.2.2.1 e 4.2.2.2 apresentam a frequência, em número de nós, dos valores discretizados da variável reserva matemática nos períodos zero e dez, respectivamente. A linha contínua vertical ao centro do gráfico representa a média (μ) dos valores obtidos, enquanto a linha tracejada representa o primeiro desvio padrão (σ) da média e a linha pontilhada representa duas vezes o desvio padrão (2σ) a partir da média.

Gráfico 4.2.2.1 - Histograma da reserva matemática do período 0



Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.2.2 - Histograma da reserva matemática do período 10



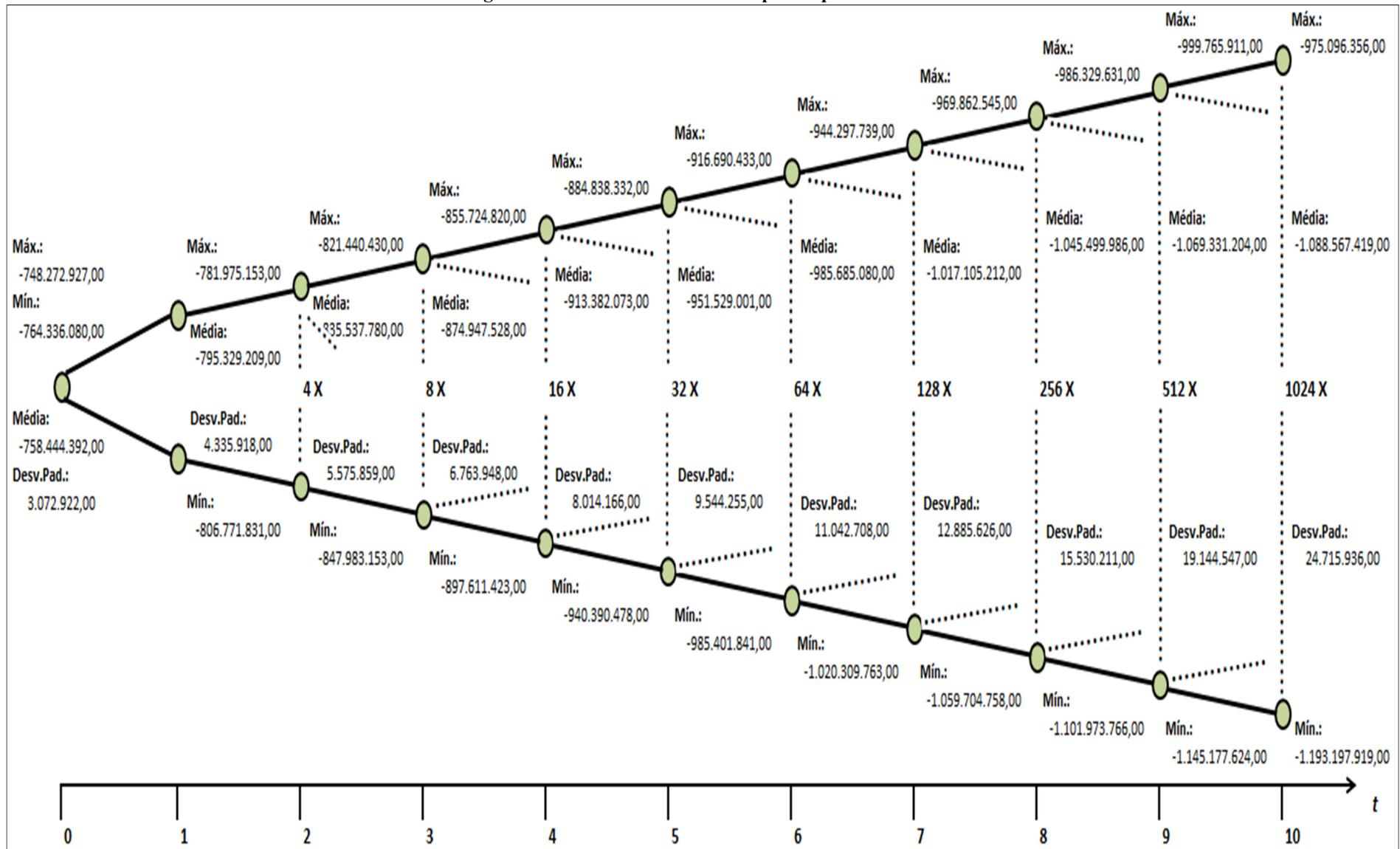
Fonte: elaborado pelo autor

Observando os gráficos acima, um dos aspectos que se destaca é a diferença entre as formas das distribuições. Enquanto o histograma do período 10 apresenta nitidamente a forma de uma distribuição Normal, o período 0 não demonstra esta característica com a mesma clareza. O motivo para isto é a quantidade de nós simulados em cada um dos dois períodos (dados), pois enquanto o período zero, conforme já mencionado, possui apenas o nó-raiz da árvore de cenários, o período 10 possui 1024 nós simulados. Outro ponto que chama a atenção na análise dos gráficos, já verificado nas ilustrações de convergência das médias, é a amplitude dos valores assumidos pela variável aleatória, uma vez que quanto mais distante do nó-raiz, no qual se tem certeza da situação dos participantes e, conseqüentemente, do passivo atuarial do fundo de pensão, maior é a distância da informação certa e maior é a quantidade de cenários simulados, por isso a maior dispersão nos dados.

Os valores de reservas matemáticas, calculados também em cada nó dos diferentes estágios da árvore de cenários, servem como restrições para os problemas de otimização de ativos nos modelos completos de ALM, uma vez que a política de investimentos do plano deve considerar o passivo atuarial na gestão integrada de ativos e passivos. Esta política de investimentos deve obedecer, basicamente, a duas condições principais: equilíbrio e liquidez. A primeira condição diz respeito à necessidade do fundo ter capital suficiente para pagar todos os benefícios até a extinção do plano. Ou seja, o valor dos ativos deve ser maior que o valor somado dos compromissos trazidos ao valor presente. A segunda condição expressa que a política de investimentos deve prover capital suficiente para arcar com a demanda corrente das obrigações e, portanto, está relacionada aos valores de fluxos de caixa, também calculados em cada nó dos diferentes períodos da árvore. Ambas as condições são afetadas pela política de investimentos e pelos retornos esperados dos ativos e pagamentos dos benefícios. Estas informações são fundamentais para a gestão do fundo de pensão, pois indicam o nível de solvência e de liquidez do fundo de pensão a cada período. Isto faz do modelo ALM uma prática de grande importância para o objetivo financeiro das instituições, especialmente daquelas que recebem e investem dinheiro com a necessidade de atender demandas de capital no futuro.

De acordo com a proposta desta pesquisa e para melhor ilustrar o resultado produzido pelo modelo de simulação desenvolvido neste estudo, a Figura 4.2.2.3 ilustra, em partes, os nós de uma árvore de cenários, já que demonstrar o valor da reserva matemática calculado em cada um dos nós é inviável devido ao tamanho da árvore. Em cada estágio foram apurados os valores de máximo, mínimo, média e desvio padrão obtidos pelo processo de simulação da dinâmica do passivo atuarial do plano de benefícios.

Figura 4.2.2.3 - Árvore de cenários para o passivo atuarial



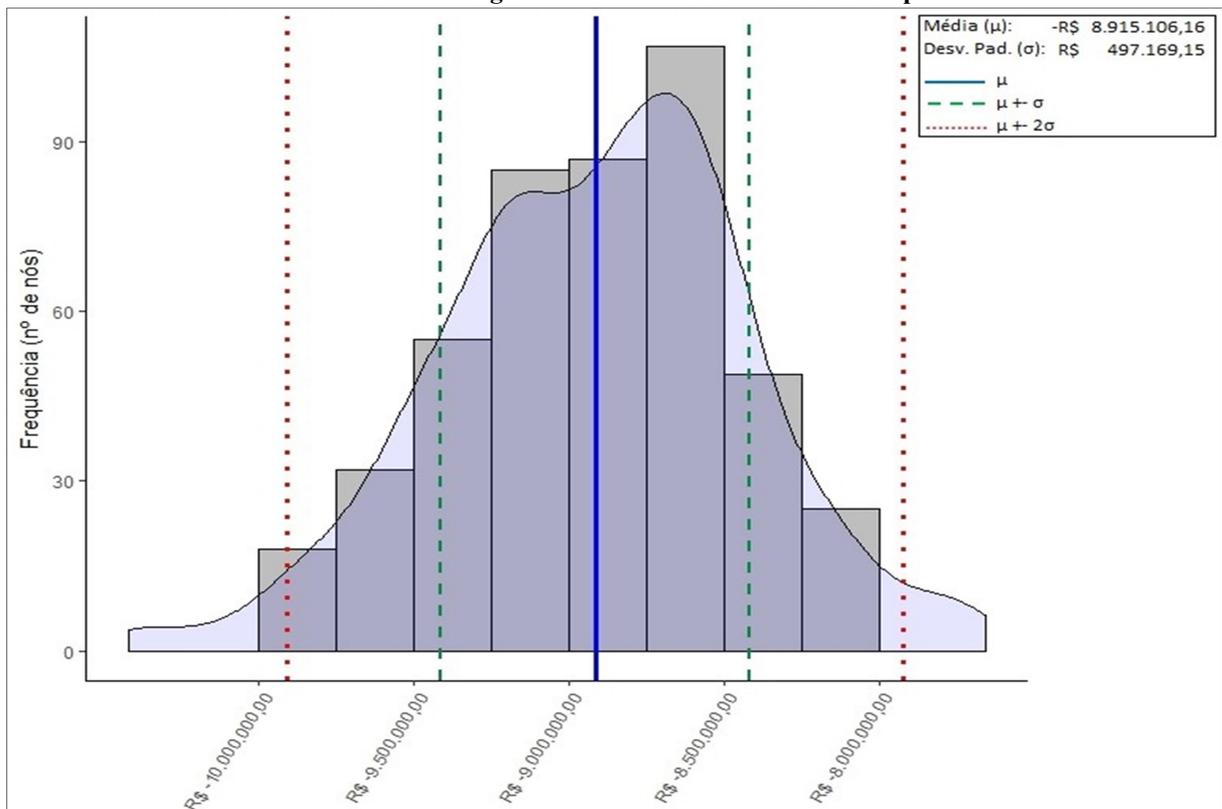
Fonte: elaborado pelo autor

4.2.3 Distribuição dos Valores de Fluxo de Caixa Previdenciário por Período

Como os valores dos fluxos de caixa atuariais não são afetados pela taxa de desconto atuarial adotada, já que estes são demonstrados no seu próprio período de realização, foram utilizados para a análise da distribuição dos valores da variável fluxo de caixa previdenciário os dados (nós simulados) das 240 árvores de cenários geradas anteriormente. A opção pela utilização dos dados de todas as árvores foi motivada por melhor ilustrar a distribuição dos valores de fluxo de caixa por período, especialmente dos primeiros estágios da árvore de cenários, tendo em vista que estes possuem um número muito menor de nós simulados em comparação aos últimos períodos. Mais precisamente, 2^t nós em cada estágio, no qual t representa o período de tempo.

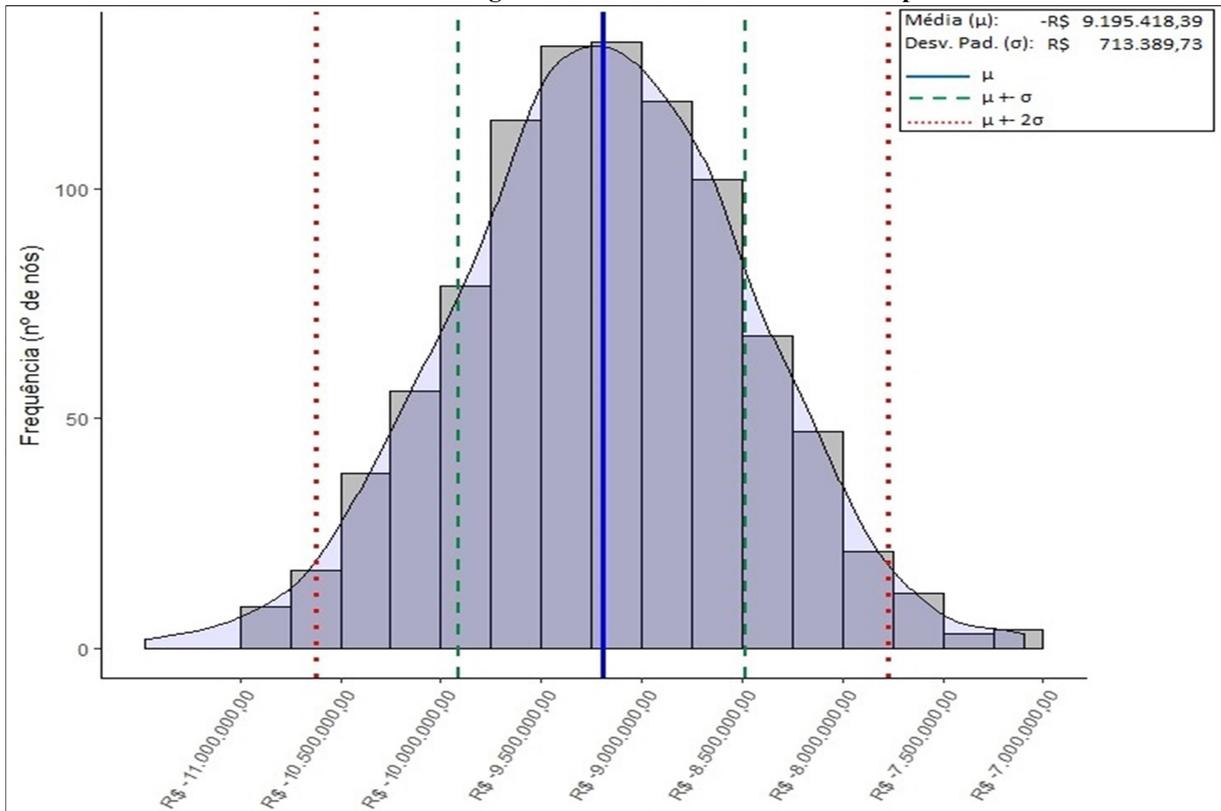
Conforme já mencionado anteriormente, estes valores de fluxo de caixa, calculados em cada nó dos diversos estágios da árvore de cenários, são importantes para a gestão do fundo de pensão no sentido de programar o capital necessário em cada período a fim de honrar os compromissos no devido momento.

Gráfico 4.2.3.1 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 1



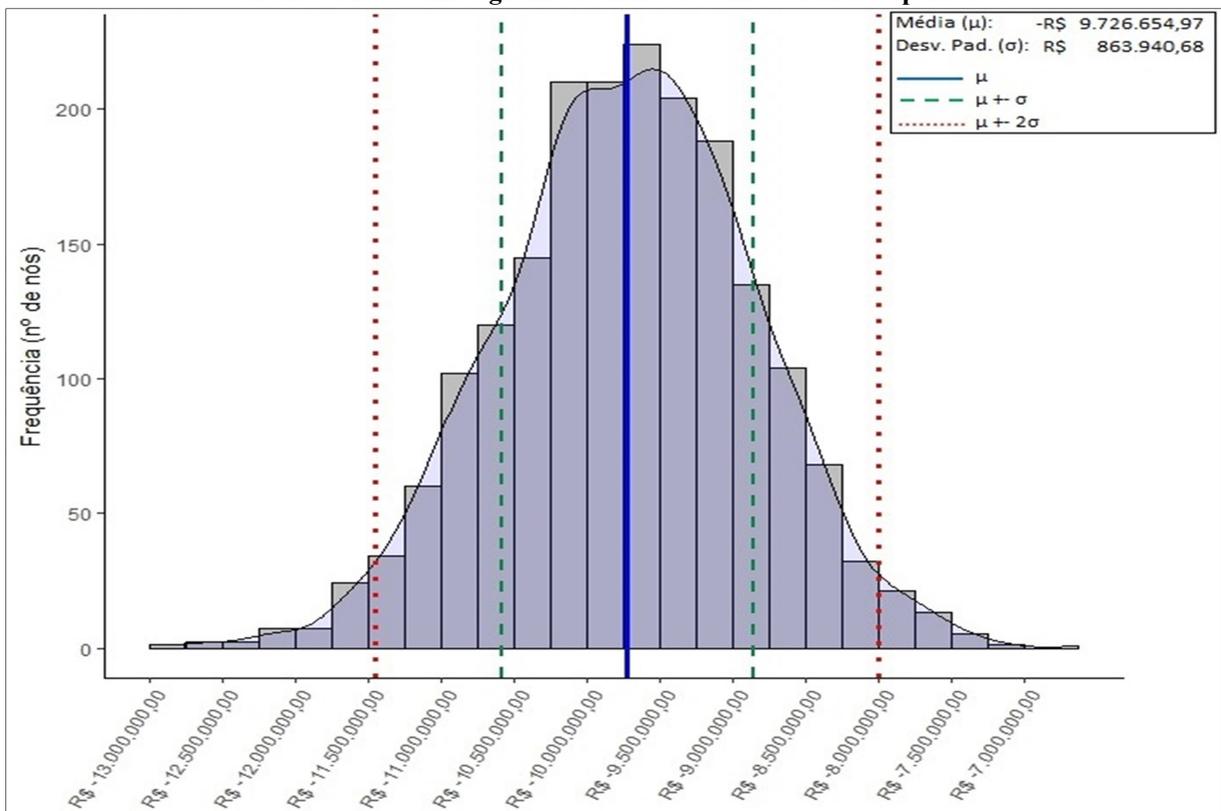
Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.3.2 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 2



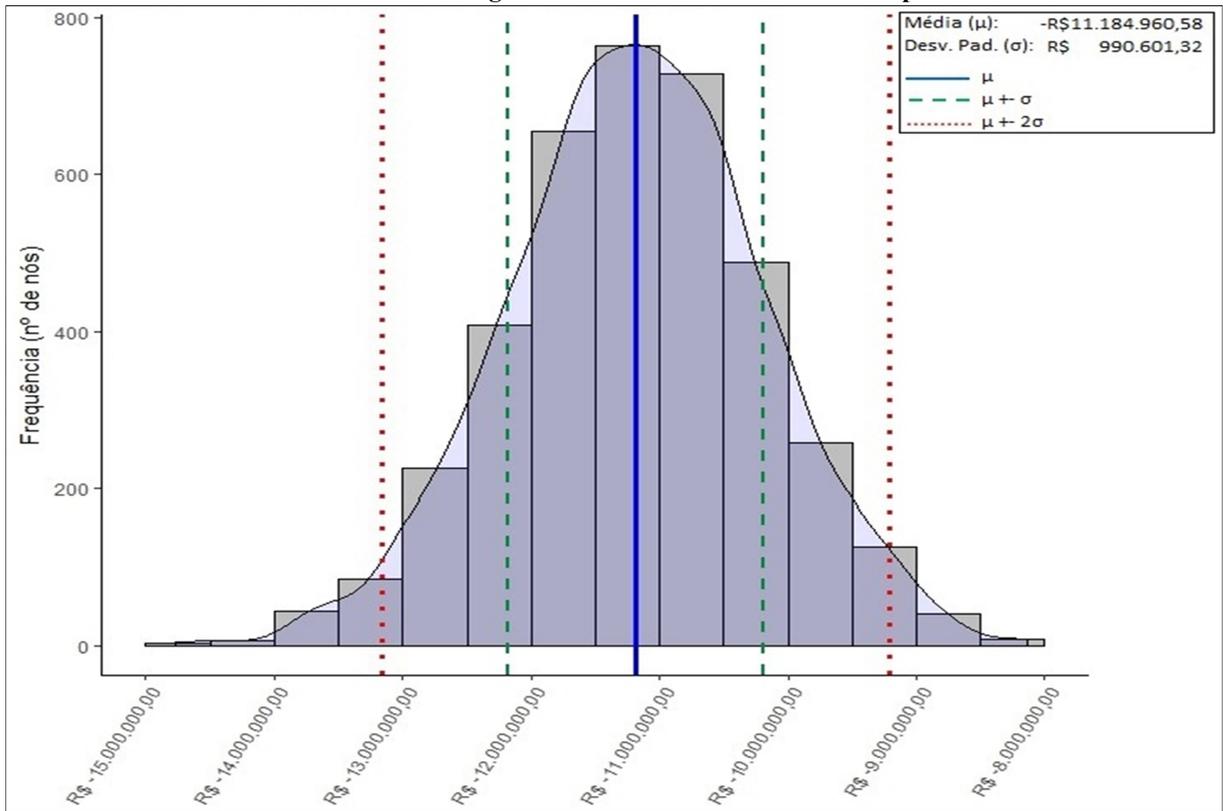
Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.3.3 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 3



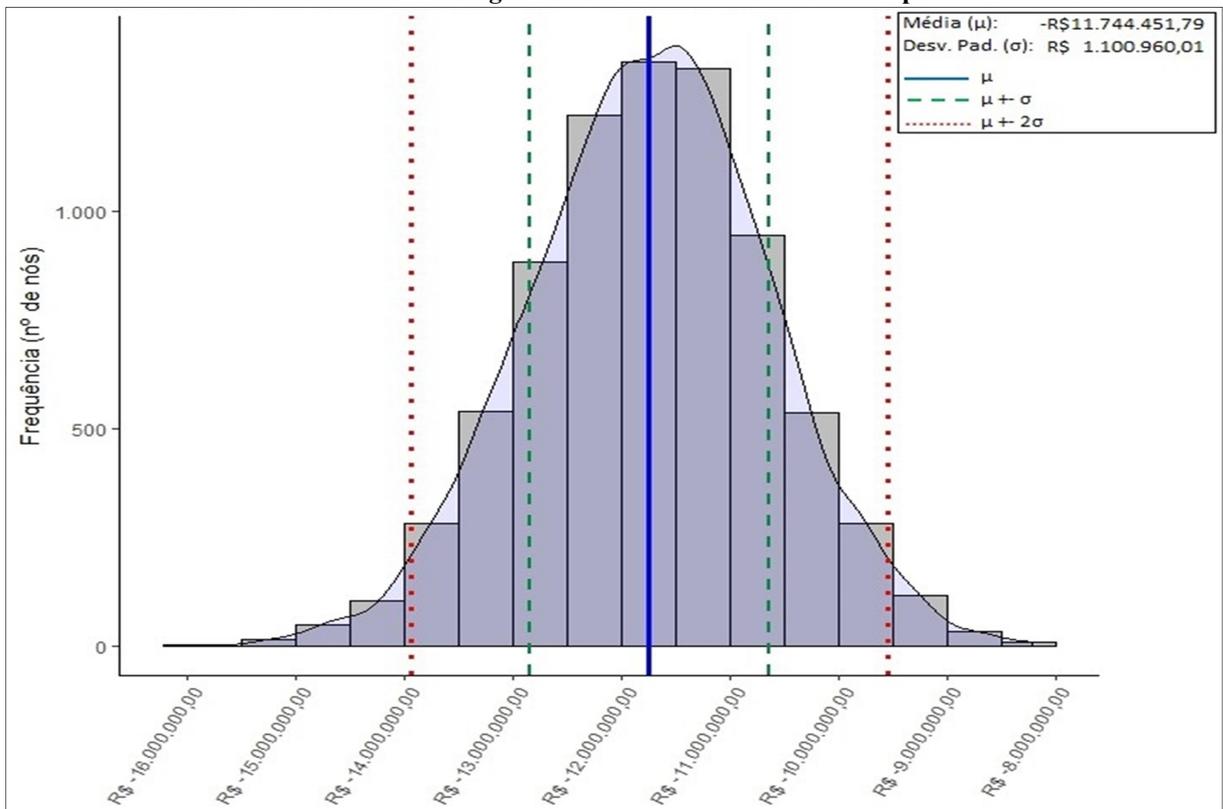
Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.3.4 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 4



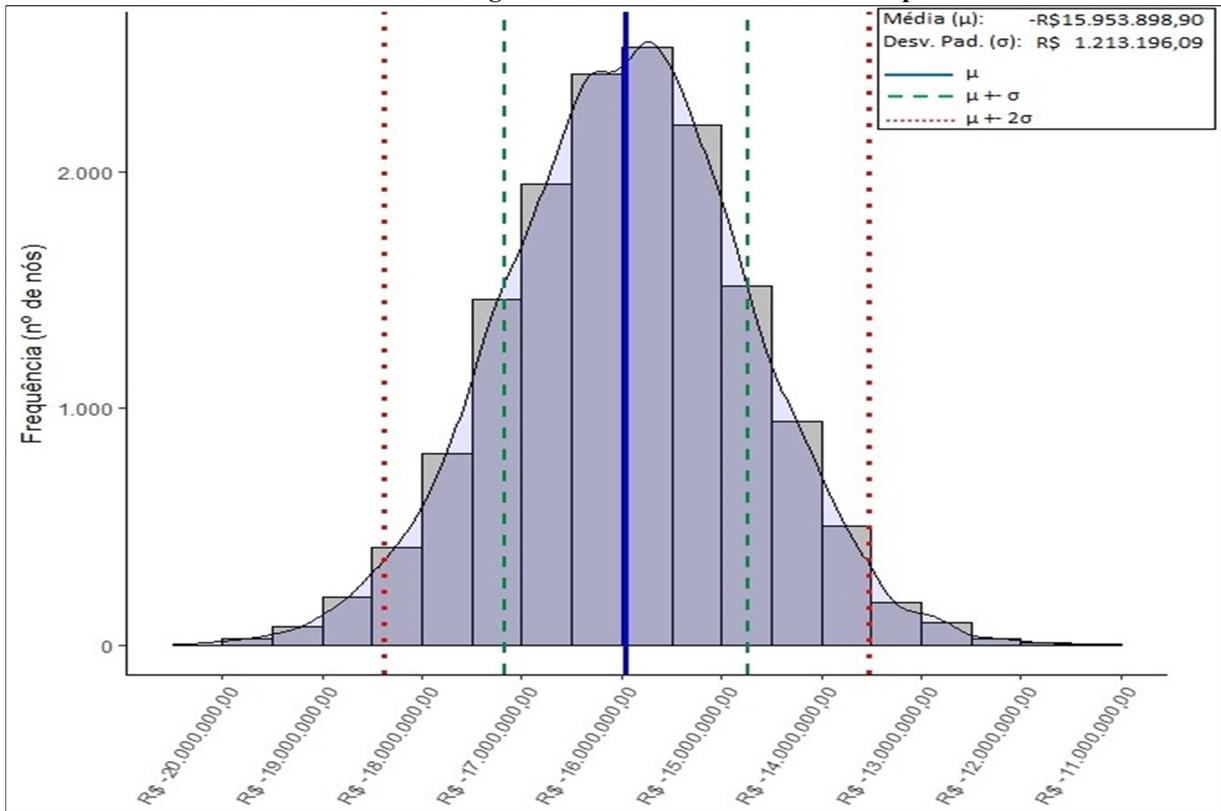
Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.3.5 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 5



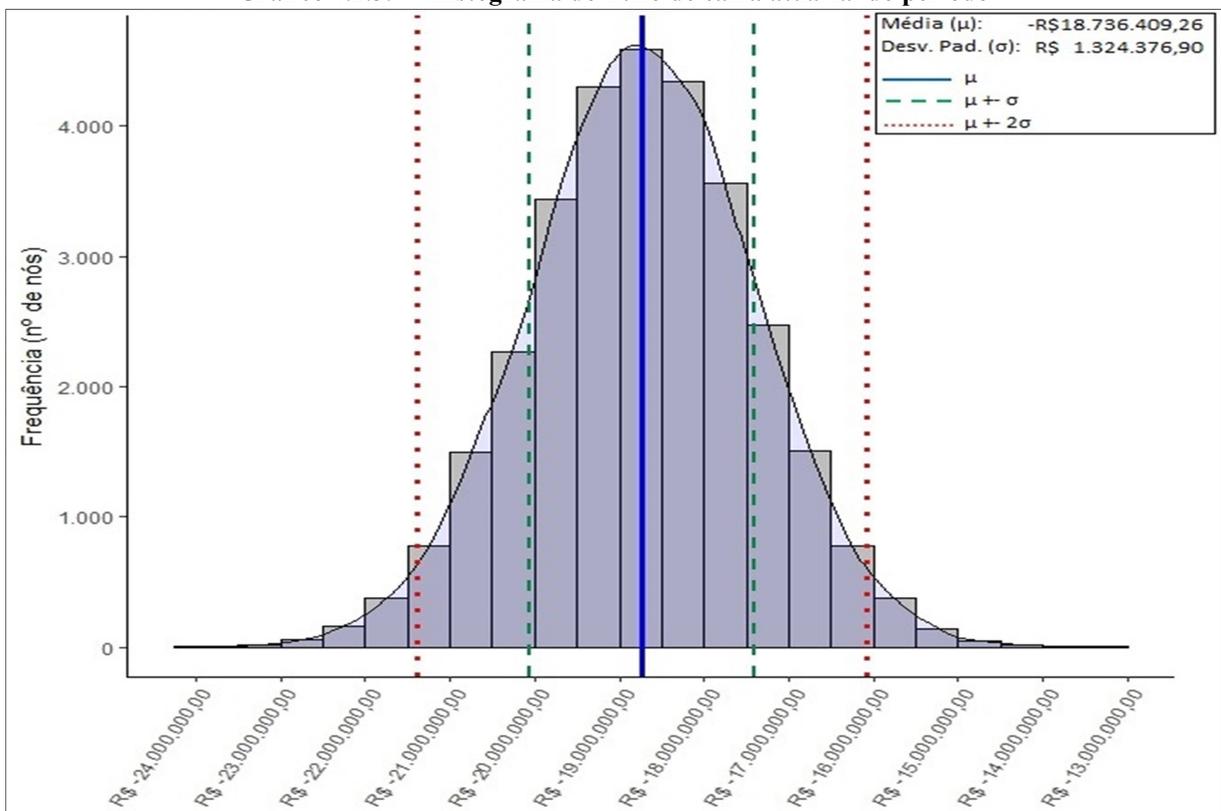
Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.3.6 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 6



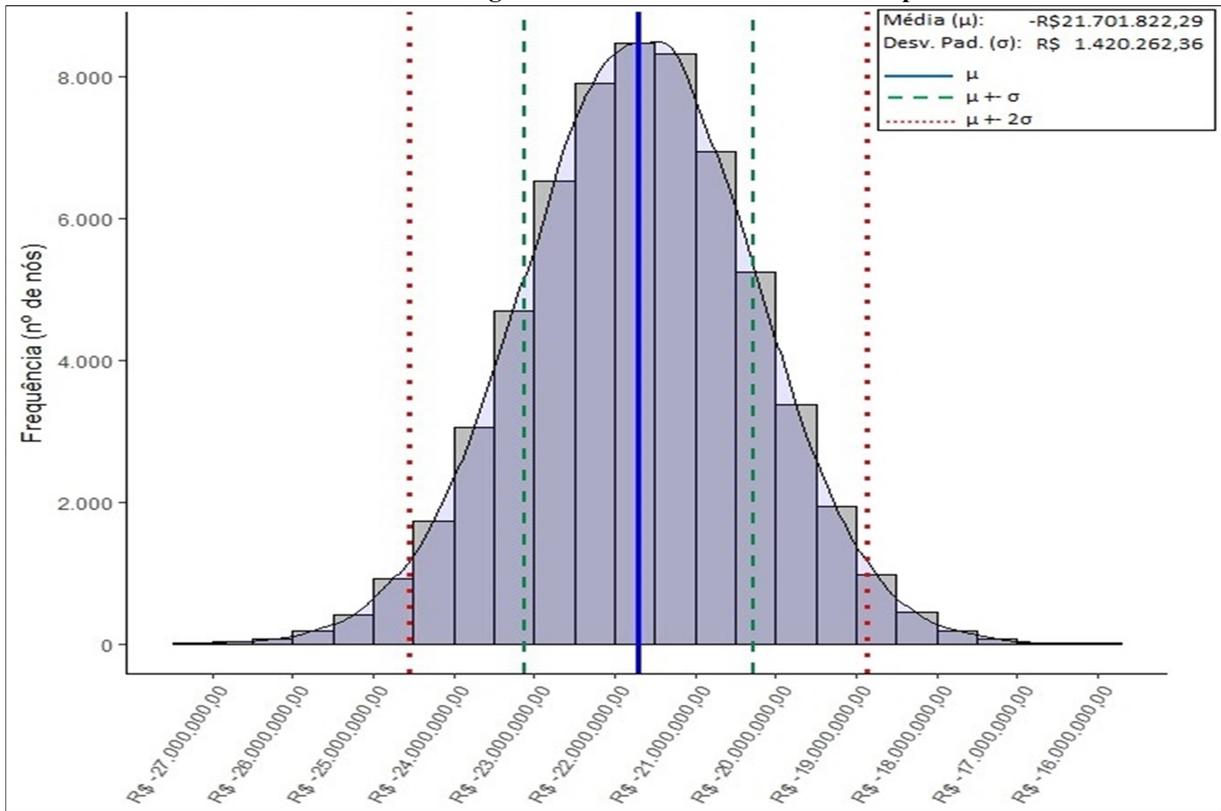
Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.3.7 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 7



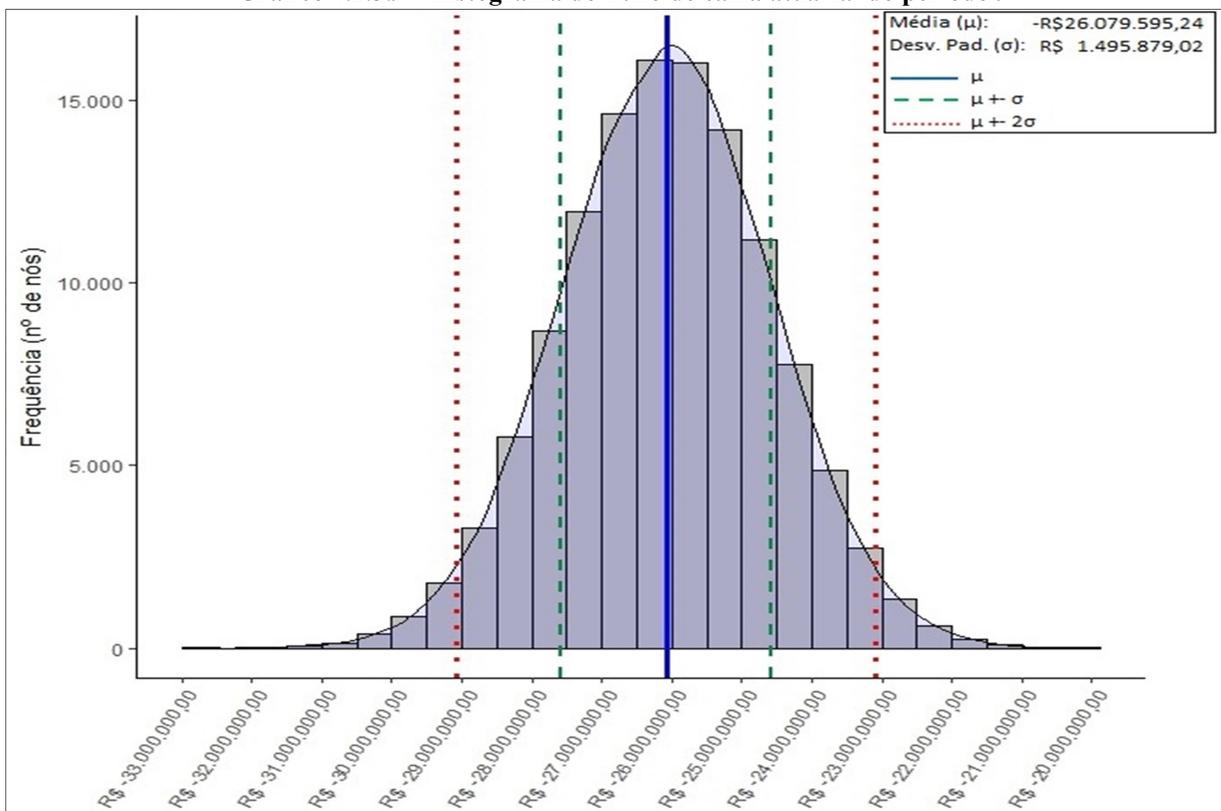
Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.3.8 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 8



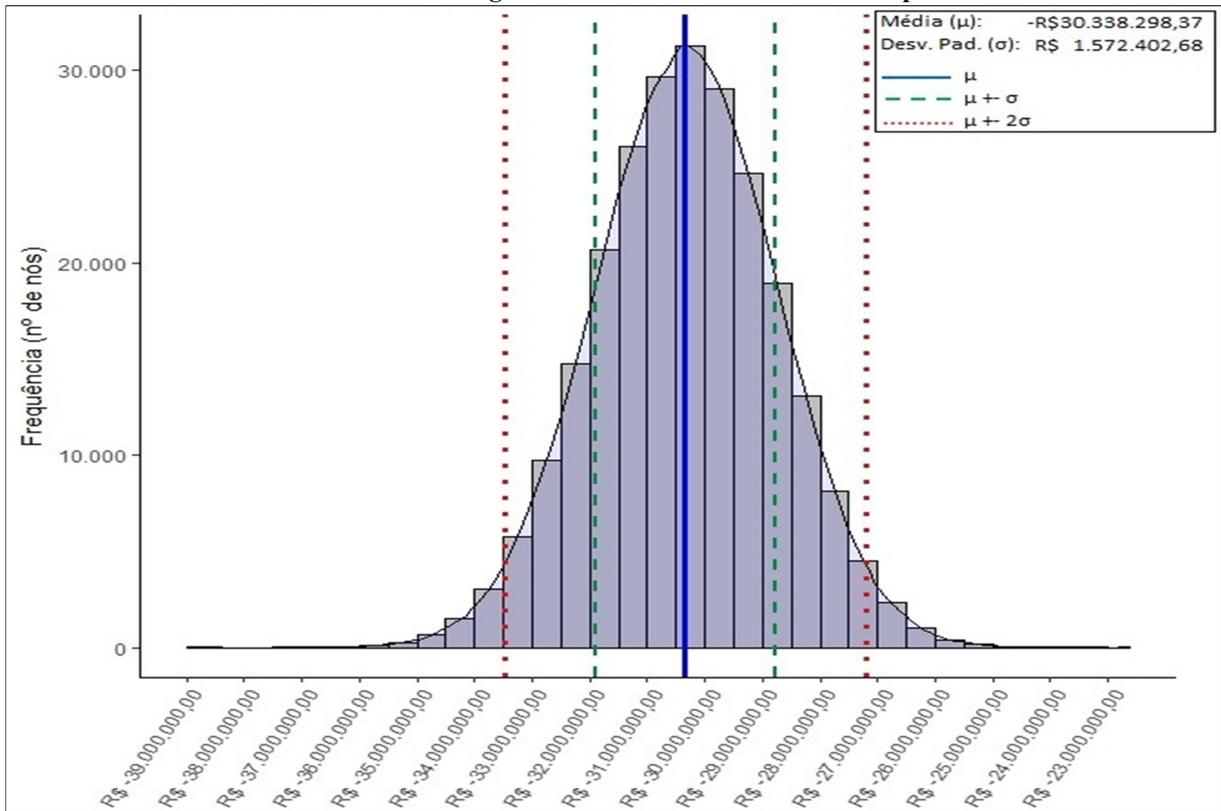
Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.3.9 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 9



Fonte: elaborado pelo autor

Gráfico 4.2.3.10 - Histograma do fluxo de caixa atuarial do período 10

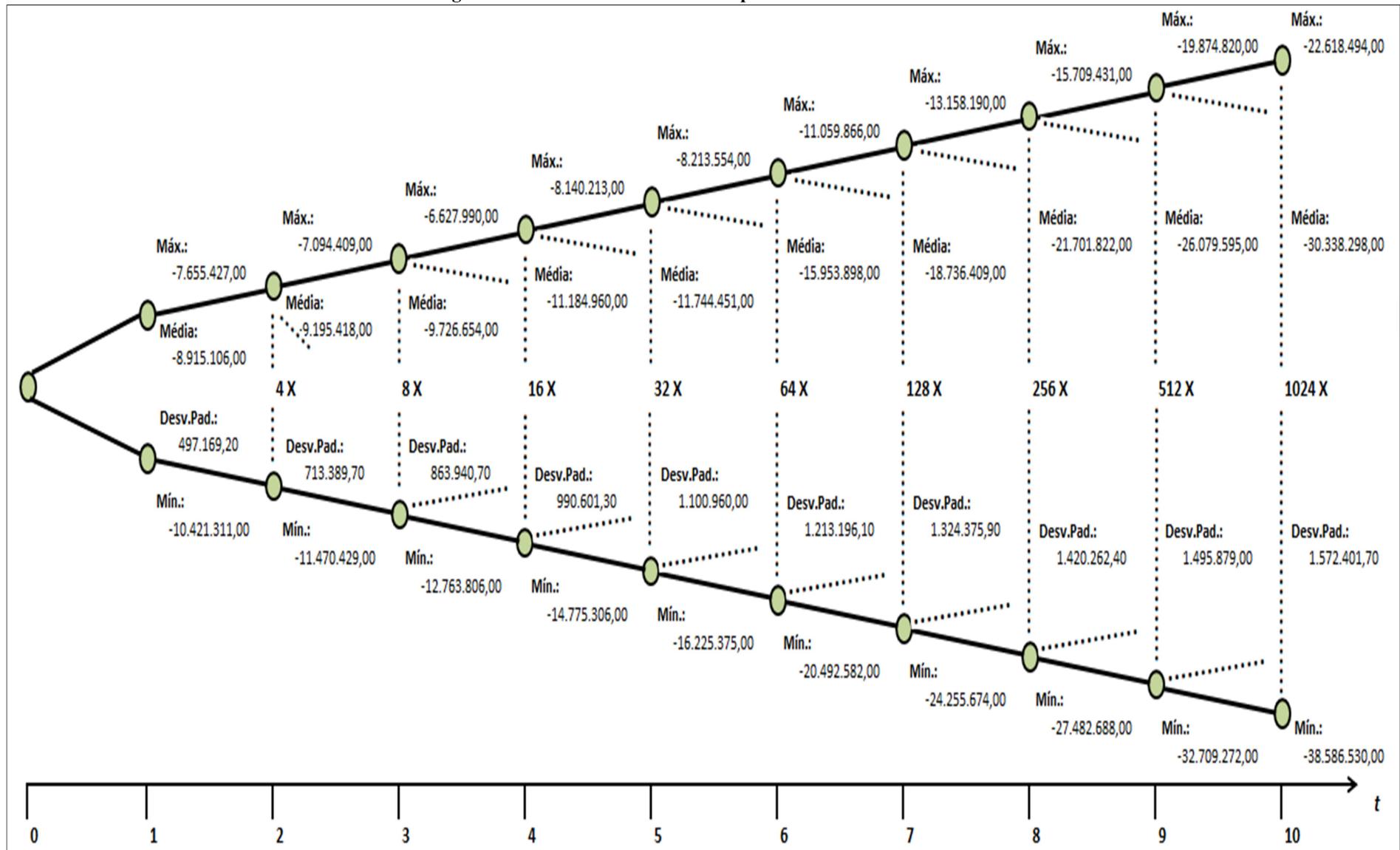


Fonte: elaborado pelo autor

Analisando os gráficos apresentados acima, percebe-se que as distribuições dos valores de fluxo de caixa em cada período, assim como já ocorrera com as reservas matemáticas, também se aproximam da forma de uma distribuição Normal, especialmente nos períodos mais distantes do nó raiz, onde o número de nós simulados é significativamente maior do que nos estágios iniciais da árvore de cenários. Outro aspecto que se verifica nos histogramas, e também já havia sido observado nos gráficos de convergência e nas distribuições das reservas matemáticas, é a maior amplitude dos valores observados nos períodos finais das árvores. Cabe destacar que, além do aumento no número de estados possíveis simulados entre os estágios, o valor médio do fluxo de caixa do plano de benefícios aumenta ao longo dos anos, o que se explica pelo número de participantes que se aposentam e pela falta de novos entrantes em fase de contribuição. Este resultado já era esperado e em nada compromete a análise do fluxo de caixa do fundo de pensão, pois a simulação deve ser rodada anualmente e, portanto, as novas adesões serão consideradas no próximo ano.

A Figura 4.2.3.11 procura ilustrar os valores de fluxo de caixa atuarial simulados em cada nó de todas as árvores de cenários geradas pelo modelo, sintetizadas em uma única árvore que, devido ao tamanho, permite apresentar somente os valores de máximo, mínimo, média e desvio padrão de cada período.

Figura 4.2.3.11 - Árvore de cenários para o fluxo de caixa atuarial



Fonte: elaborado pelo autor

5 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um modelo de simulação para gerar árvores de cenários que representassem possíveis estados futuros do passivo atuarial de um fundo de pensão no Brasil. Para este propósito, as principais fontes de incertezas que influenciam a avaliação de um passivo atuarial foram especificadas como variáveis aleatórias e parâmetros do modelo, de maneira que possibilitassem uma simulação consistente e realista da dinâmica do plano de benefícios e viabilizassem a mensuração das reservas matemáticas e construção do fluxo de caixa previdenciário sob diversos cenários.

Partindo-se de um período inicial em que o estado de cada participante é conhecido com certeza, a técnica de microsimulação foi utilizada para projetar as possíveis situações de vida de cada membro do fundo de pensão em cada nó ao longo dos diversos estágios da árvore de cenários. Esta abordagem de simulação individual proporciona ao gestor do plano de previdência saber, por exemplo, se um evento ocorre ou não com um certo participante em um determinado período de tempo, atribuindo valor unitário ou nulo conforme o resultado do experimento. Isto implica, na prática, em considerar, para fins de cálculo das reservas matemáticas e fluxos de caixa previdenciários, os valores integrais das operações financeiras, representadas pelo recebimento das contribuições e pelo pagamento dos benefícios, que podem ocorrer ou não, mas cuja apuração de seus valores não mais depende direta e exclusivamente da probabilidade de ocorrência de sinistros como morte, invalidez, etc., como no cálculo atuarial clássico, mas depende somente do valor das variáveis aleatórias com distribuição Bernoulli simuladas. Além disso, a utilização da técnica de microsimulação, em um contexto de árvore de cenários e tratando-se exclusivamente do risco biométrico, apresenta um ganho considerável em termos de variabilidade entre os nós de um mesmo período da árvore, uma vez que a situação de vida dos membros do plano pode variar a cada estágio e de um nó para outro, inclusive do mesmo período, enquanto que com o método atuarial tradicional mencionado anteriormente, as probabilidades das tábuas biométricas, fixas por idade dos participantes, resultariam em um valor constante por pessoa em qualquer um dos nós de um mesmo estágio da árvore de cenários.

Outro aspecto importante deste modelo é que o fato de simular individualmente o status de cada pessoa abre uma gama de interessantes possibilidades a serem exploradas, como por exemplo, informar ao modelo dados referentes a avaliações de desempenho do participante, a fim de obter resultados mais assertivos sobre a sua evolução salarial e carreira; ou então agravar/ atenuar as taxas de mortalidade utilizadas para um determinado sujeito de

acordo com os seus exames médicos; ou ainda, utilizar tábuas de entrada em invalidez distintas dependendo do cargo ou do tipo de atividade desempenhada pelo membro do fundo de pensão, de forma que a tábua utilizada apresente probabilidades maiores de ocorrência de situações de invalidez para pessoas que trabalhem com atividades mais perigosas, enquanto pessoas que desempenham funções com menor risco de lesões permanentes utilizariam uma tábua de entrada em invalidez com probabilidades mais suavizadas. As oportunidades mencionadas e evidenciadas neste estudo, talvez a sua maior contribuição, vão ao encontro do que Boender (1997) sugere como uma das vantagens da utilização da microsimulação, que é a facilidade de incorporar ao modelo planos de pensão individuais flexíveis e modernos.

Por fim, a análise dos resultados obtidos pelo modelo proposto apresenta informações relevantes para a gestão de um fundo de pensão e suas decisões de aplicação de recursos sob o ponto de vista da estimativa de fluxos de caixa futuros e da mensuração do passivo atuarial do plano de benefícios, oferecendo não só valores únicos de fluxos de caixa e de reservas matemáticas, mas um intervalo de valores possíveis e com níveis de confiança conhecidos, distribuídos entre os diversos nós de cada estágio das árvores de cenários. O estudo também traz uma análise dos efeitos da variação da taxa real de desconto atuarial sobre os valores de reservas matemáticas, demonstrando o risco que a taxa de juros representa para um fundo de pensão quanto ao cumprimento de seus compromissos. Vale ressaltar que uma boa estimativa de fluxos de caixa e de reservas matemáticas para períodos futuros de um plano de previdência são fundamentais para a política de investimentos e para a administração do fundo, uma vez que, considerando-se a metodologia ALM, a gestão de ativos e passivo atuarial é integrada. Portanto, o modelo desenvolvido neste trabalho mostra-se bastante satisfatório, especialmente pela metodologia de simulação da situação de vida dos participantes que compõem o plano de benefícios ao considerar as possibilidades individuais de aumento salarial, situações de invalidez e abrir espaço para outros parâmetros a serem empregados a nível individual.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

De maneira geral, as aplicações de *Asset Liability Management* costumam apresentar estruturas muito complexas, de tal forma que um dos principais desafios para a solução deste tipo de problema consiste em contemplar o grande número de variáveis que possuem influência significativa na dinâmica do desenvolvimento dos ativos e passivos ao longo do tempo. Sendo assim, a sugestão para trabalhos futuros é a inclusão de fatores que foram

simplificados neste trabalho, tais como os institutos de portabilidade, autopatrocínio, resgate e benefício proporcional diferido, além do pagamento de pensão para cônjuges e/ou filhos de participantes titulares falecidos. Soma-se a isto a complexidade exponencial da abordagem via árvore de cenários, que se torna proibitiva quando da reprodução de grandes instâncias do problema.

Além disso, conforme já mencionado neste trabalho, o método ALM necessita de sistemas de simulação que integrem o preço dos ativos com o valor das reservas matemáticas, ou seja, a simulação do passivo atuarial, por si só, não é o suficiente para resolver por completo a gestão de um fundo de pensão. Por esta razão, fica também como sugestão para trabalhos futuros a integração do modelo proposto nesta dissertação com um modelo completo estocástico de *Asset Liability Management*, que utilizará os cenários simulados de fluxo de caixa previdenciário e das reservas matemáticas como dados de entrada para a otimização da carteira de ativos do fundo de pensão.

REFERÊNCIAS

- ABRAPP – Associação Brasileira das Entidades Fechadas de Previdência Complementar. **Consolidado Estatístico**: dezembro de 2016. Disponível em: < http://www.abrapp.org.br/Consolidados/Consolidado%20Estat%C3%ADstico_12_2016.pdf>. Acesso em: 06 de mai. 2017.
- BANKS, Jerry et al. **Discrete-Event System Simulation**. 5th Edition. 2009.
- BARR, Nicholas; DIAMOND, Peter. The economics of pensions. **Oxford Review of Economic Policy**, v. 22, n. 1, 2006.
- BEALE, E. M. L. On minimizing a convex function subject to linear inequalities. **Journal of the Royal Statistical Society**, v. 17, p. 173-184, 1955.
- BÉDARD, Diane. Stochastic pension funding: proportional control and bilinear processes. **Astin Bulletin**, v. 29, n. 2, p. 271-293, 1999.
- BLAKE, David. Pension schemes as options on pension fund assets: implications for pension fund management. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 23, p. 263-286, 1998.
- _____ ; CAIRNS, Andrew J. G.; DOWD, Kevin. Pensionmetrics: stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 29, p. 187-215, 2001.
- BOENDER, Guus C. E. A hybrid simulation/optimisation scenario model for asset/liability management. **European Journal of Operational Research**, v. 99, p. 126-135, 1997.
- BOULIER, Jean F.; TRUSSANT, Etienne; FLORENS, Daniele. A dynamic model for pension funds management. In: AFIR INTERNATIONAL COLLOQUIUM, 5., 1995, Bruxelas.
- BRADLEY, S. R.; CRANE, D. B. A dynamic model for bond portfolio management. **Management Science**, v. 19, p. 139-151, 1972.
- BRASIL. Lei Complementar n. 109, de 29 de maio de 2001. Dispõe sobre o Regime de Previdência Complementar e dá outras providências.
- CAIRNS, Andrew et al. Revisiting The Wilkie Investment Model. In: AFIR INTERNATIONAL COLLOQUIUM, 18., 2008, Roma.
- CGPC – Conselho de Gestão da Previdência Complementar. Resolução nº 16, de 22 de novembro de 2005.
- _____. Resolução nº 18, de 28 de março de 2006.
- CHAN, Betty Lilian; SILVA, Fabiana Lopes da; MARTINS, Gilberto de Andrade. **Fundamentos da Previdência Complementar**: da atuária à contabilidade. São Paulo: 2010.

CONSIGLI, G.; DEMPSTER M. A. H. Dynamic stochastic programming for asset – liability management. **Annals of Operations Research**, v. 81, p. 131-161, 1998.

DANTZIG, G. B. Linear programming under uncertainty. **Management Science**, v. 1, p. 197-206, 1955.

DEMPSTER, M. A. H. et al. Global asset liability management. **British Actuarial Journal**, v. 9, n. 1, p. 137-195, 2003.

_____. Risk-profiling defined benefit pension schemes. **The Journal of Portfolio Management**, v. 35, n. 4, p. 76-93, 2009.

DETT, C. **Asset liability management for pension funds**. 1995. Tese (PhD thesis), Erasmus University, Rotterdam, Holanda. 1995.

DUPACOVÁ, Jitka; POLÍVKA, Jan. Asset-liability management for Czech pension funds using stochastic programming. **Annals of Operations Research**, v. 165, p. 5-28, 2009.

FABOZZI, Frank J.; FOCARDI, Sergio M.; JONAS, Caroline L. Market experience with modeling for defined-benefit pension funds: evidence from four countries. **Journal of Pension Economics and Finance**, v. 4, p. 313-327, 2005.

GALÉ, J. G. **Elementos de Cálculo Actuarial**. Buenos Aires: 1942.

GLASSERMAN, Paul. **Monte Carlo Methods in Financial Engineering**: stochastic modelling and applied probability. v. 53. 2003.

HILLI, Petri et al. A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension company. **Annals of Operations Research**, v. 152, p. 115-139, 2006.

HURTADO, Natalie H. **Análise de Metodologias de Gestão de Ativos e Passivos de Planos de Benefício Definido em Fundos de Pensão**: uma abordagem financeiro-atuarial. 2008. Tese (Doutorado em Administração) - Instituto de Pós-Graduação e Pesquisa em Administração COPPEAD, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Tábua completa de mortalidade para o Brasil – 2015**: breve análise da evolução da mortalidade no Brasil. 2016. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/tabuadevida/2015/default.shtm>>. Acesso em: 02 de mai. 2017.

IPEA - Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas. **Inflação IPCA**. 2017. Disponível em: <<http://www.ipeadata.gov.br/Default.aspx>>. Acesso em: 13 de jan 2018.

JENSEN, Paul A.; BARD, Jonathan F. **Operations Research**: models and methods. 2002.

JOSA-FOMBELLIDA, Ricardo; RINCÓN-ZAPATERO, Juan Pablo. Optimal risk management in defined benefit stochastic pension funds. **Insurance: Mathematics and Economics**, v. 34, p. 489-503, 2004.

KASTNER, Tássia. Procura por planos de previdência privada aumenta em meio à crise. **JORNAL FOLHA DE S.PAULO**. 2016. Disponível em: <<http://folha.com/no1840495>>. Acesso em: 06 de mai. 2017.

KOUWENBERG, Roy. Scenario generation and stochastic programming models for asset liability management. **European Journal of Operational Research**, v. 134, p. 279-292, 2001.

_____; ZENIOS, Stavros A. Stochastic programming models for asset liability management. In: ZENIOS, Stavros A.; ZIEMBA, William T., (Ed.) **Handbook of Asset and Liability Management. v. 1: Theory and methodology**. Amsterdam: Elsevier, 2006. p. 253-303.

LAW, Averill. M.; KELTON, W. David. **Simulation Modeling & Analysis**. New York: 1991.

MINISTÉRIO DA PREVIDÊNCIA SOCIAL. Secretaria de Previdência Complementar. Previdência complementar: cartilha do participante. 2008.

MOYNIHAN, Gary P. et al. DSSALM: A decision support system for asset and liability management. **Decision Support Systems**, v. 33, p. 23-38, 2002.

MULVEY, John M.; VLADIMIROU, Hercules. Stochastic network programming for financial planning problems. **Management Science**, v. 38, n. 11, p. 1642-1664, 1992.

_____. Generating scenarios for the towers Perrin investment system. **Interfaces**, v. 26, p. 1-15, 1996.

OLIVEIRA, A. D. DE et al. A multistage stochastic programming asset-liability management model: an application to the Brazilian pension fund industry. **Optimization and Engineering**, 2016.

PINHEIRO, Ricardo P. **A Demografia dos Fundos de Pensão**. Brasília: Ministério da Previdência Social. Secretaria de Políticas de Previdência Social, 2007. 292 p. (Coleção Previdência Social. Série estudos, v. 24).

RODRIGUES, José Angelo. **Gestão de Risco Atuarial**. São Paulo: 2008.

ROSEN, Dan; ZENIOS, Stavros A. Enterprise-wide asset and liability management. In: ZENIOS, Stavros A.; ZIEMBA, William T., (Ed.) **Handbook of Asset and Liability Management. v. 1: Theory and methodology**. Amsterdam: Elsevier, 2006. p. 1-23.

VALLADÃO, Davi M. **Alocação Ótima e Medida de Risco de um ALM para Fundo de Pensão Via Programação Estocástica Multi-Estágio e Bootstrap**. 2008. Dissertação (Mestrado em Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ZENIOS, Stavros A. Asset/liability management under uncertainty for fixed-income securities. **Annals of Operations Research**, v. 59, p. 77-97, 1995.

ZIEMBA, W. T.; VICKSON, R. G. (Eds.). **Stochastic Optimization Models in Finance**. San Diego: Academic Press, 1975.

WANG, C. W.; HUANG H. C.; LIU I. C. Mortality modeling with non-gaussian innovations and applications to the valuation of longevity swaps. **The Journal of Risk and Insurance**, v. 80, n. 3, p. 775-797, 2013.

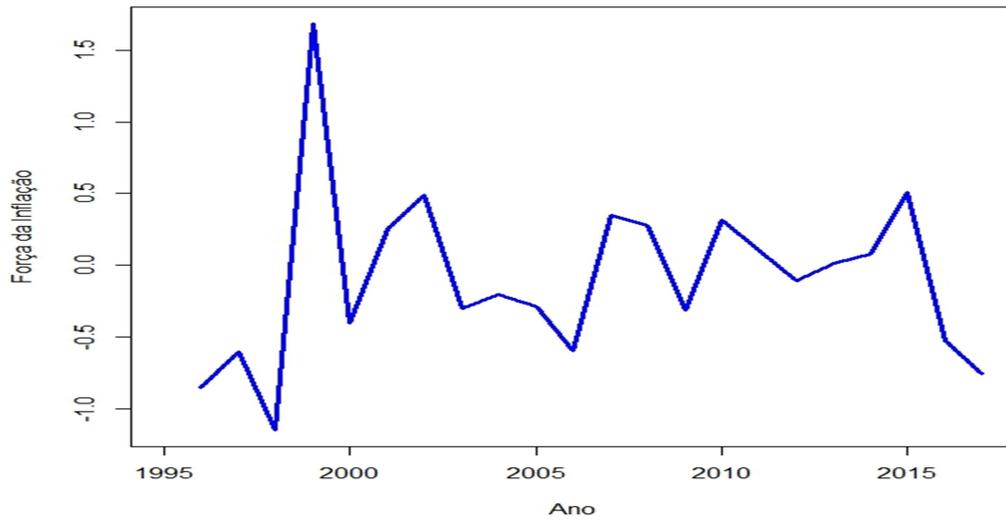
WILKIE, A. D. More on a stochastic asset model for actuarial use. **British Actuarial Journal**, v. 1, p. 777-964, 1995.

WINKLEVOSS, Howard. E. **Pension Mathematics with Numerical Illustrations**. Pension Research Council of the Wharton School of the University of Pennsylvania, 1993.

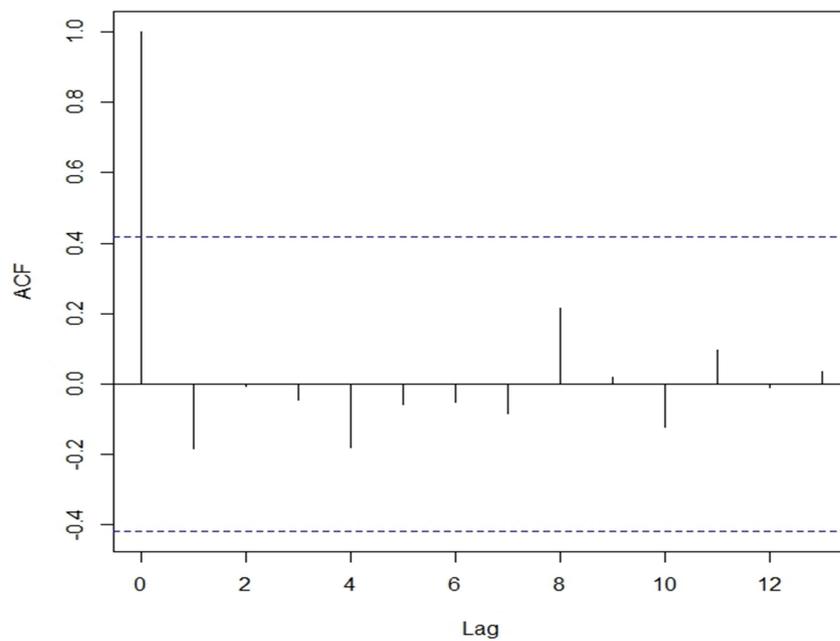
APÊNDICE A – Testes e estimações do modelo para previsão da inflação

Neste apêndice são apresentados os testes de diagnósticos e estimações do modelo utilizado para a previsão da inflação, realizados no R.

Gráfico da Série Temporal



Correlograma



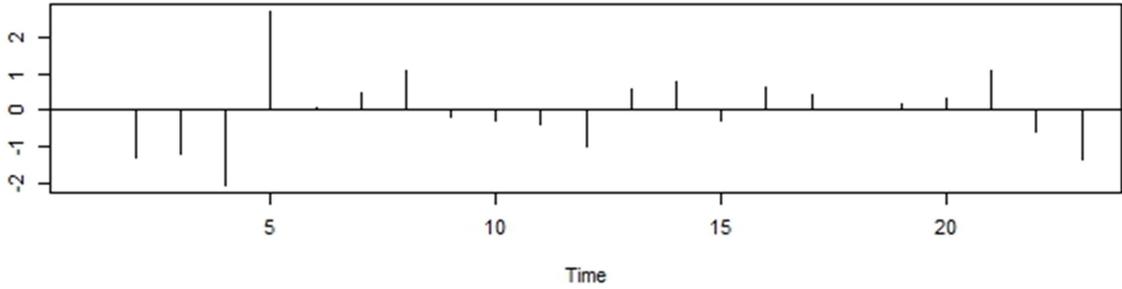
```
Call:
arima(x = Infl_Hist_Serie[, 5], order = c(1, 0, 0))
```

Coefficients:

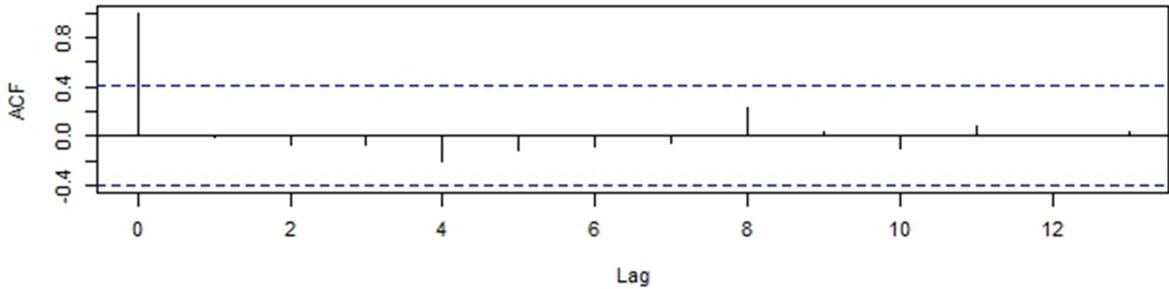
	ar1	intercept
	-0.2028	-0.0811
s.e.	0.2199	0.1037

sigma² estimated as 0.3338: log likelihood = -19.17, aic = 44.34

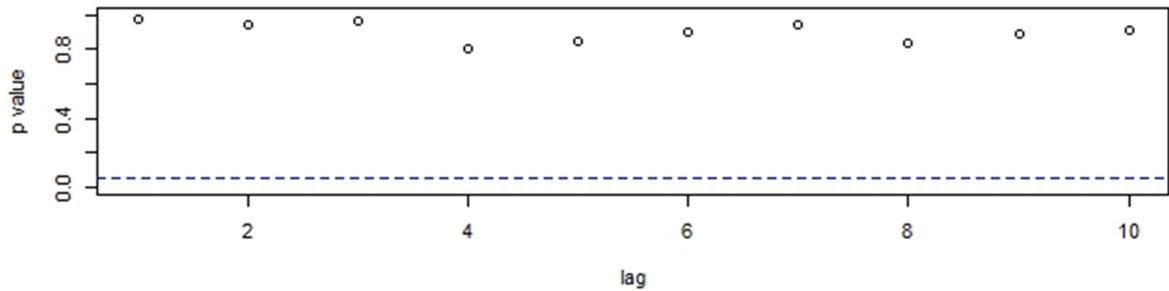
Standardized Residuals



ACF of Residuals



p values for Ljung-Box statistic



Box-Ljung test

```
data: Infl_Model$residuals
X-squared = 0.0007091, df = 1, p-value = 0.9788
```

Previsão:

\$pred

Time Series:

Start = 24

End = 33

Frequency = 1

[1] 0.05598715 -0.10888327 -0.07544149 -0.08222471 -0.08084882

[6] -0.08112790 -0.08107129 -0.08108278 -0.08108045 -0.08108092

\$se

Time Series:

Start = 24

End = 33

Frequency = 1

[1] 0.5777818 0.5895478 0.5900269 0.5900466 0.5900474 0.5900474

[7] 0.5900474 0.5900474 0.5900474 0.5900474

