

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DE SISTEMAS MULTIESCALA ACOPLADOS COM FERRAMENTAS DE
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

por

Ederval de Souza Lisboa
Mestre em Engenharia Mecânica

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, 26 de março de 2018.

ANÁLISE DE SISTEMAS MULTIESCALA ACOPLADOS COM FERRAMENTAS DE
OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

por

Ederval de Souza Lisboa
Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Co-Orientador: Prof. Dr. Volnei Borges

Aprovada por:

Prof. Dr. Renato Pavanello DMC / UNICAMP

Prof. Dr. Daniel Milbrath de Leon DEMEC / UFRGS

Profa. Dra. Adriane Prisco Petry PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha PROMEC / UFRGS

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 26 de março de 2018.

Aos meus descendentes.

" e o Espírito de Deus o encheu de habilidade, inteligência e conhecimento em todo o artifício (...), e para toda sorte de labores. Também lhe dispôs o coração para ensinar a outrem (...). Para fazer toda obra de mestre, até as mais engenhosas (...), e a elaborar desenhos."
Êxodo 35: 31-35

"Então vi eu que a sabedoria é mais excelente do que a estultícia, quanto a luz é mais excelente do que as trevas "
Eclesiastes 2:13

AGRADECIMENTOS

Ao Deus triuno, excelso criador.

À minha filha Talita da Costa Lisboa e à minha esposa Tatiane Martins da Costa Lisboa, pela compreensão e paciência.

À minha mãe Hilda Nedina de Souza, pelas incessantes orações, e ao meu pai Giovani Borges Lisboa, pela *catilogência* transmitida.

Aos amados pelo incentivo direto ou indireto: Gê (*in memorian*), Nega, Cássia, Núria, Tio Go, Sara, Roberth, Jé, Jack, LD, Jhony, Caroline, AnaLu, Rê, Jujuba, Manu, Lolô, Gilsão, Jean, D. Juraci Garcia Martins da Costa, Sr. Edi Normélio da Costa (pescador) e agregados.

Aos companheiros da Igreja Metodista.

Aos Professores Walter Jesus Paucar Casas e Volnei Borges, pela confiança, orientação, ensinamentos e dedicação.

Aos Professores da banca avaliadora, pelas palavras de sabedoria.

Ao PROMEC/UFRGS, pelo alto padrão de exigência, engajamento dos docentes e infraestrutura disponibilizada.

Aos Secretários do PROMEC, Srs. Lazie, Julien e Paulo.

Ao CNPq, pelo essencial apoio financeiro.

À nossa equipe de pesquisa atuante no Grupo de Mecânica Aplicada (GMAP) da UFRGS: Gustavo, João, Parizotto, Emanuel, Evandro, Thomas, Fernanda.

Muito obrigado!

RESUMO

A definição das estruturas hierárquicas envolve uma estrutura que pode ser observada em escalas de diversos comprimentos, sendo que um elemento estrutural de certa escala é formado por subestruturas periódicas de uma escala menor. Utilizando o método bidirecional de otimização topológica evolucionária BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) em estruturas contínuas compostas por materiais únicos e por vários materiais, modeladas através do método dos elementos finitos, este trabalho implementa os procedimentos computacionais necessários com o objetivo de otimizar o comportamento dinâmico do sistema estrutural, através da maximização da frequência fundamental bem como da separação de um ou dois pares de frequências adjacentes de forma simultânea ou não, sujeita a restrições de volume estrutural nas diversas fases. Cada nível hierárquico é assumido como um meio contínuo composto por um ou mais materiais homogêneos, cada um destes com uma microestrutura associada. No projeto simultâneo com múltiplas fases, as informações foram transferidas entre a micro e a macroescala através do método da homogeneização, enquanto que as técnicas de otimização topológica visaram encontrar a melhor distribuição de fases em ambas as escalas para a maximização das propriedades desejadas. Dessa forma se alcançaram uma série de topologias associadas às diversas funções objetivo utilizadas, decorrentes da maximização da frequência fundamental, do intervalo entre um par de frequências naturais consecutivas, da separação das frequências naturais a partir de uma frequência prescrita e da separação de dois pares de frequências consecutivas concomitantemente. Experimentos numéricos também foram realizados buscando o melhor leiaute na macroescala, na microescala, ou em ambas de forma acoplada, apresentando-se as discussões correspondentes. Conjunto de soluções ótimas foram gerados, baseado no método dos pesos, os quais possibilitaram por exemplo a identificação da perda de integridade estrutural em alguns casos otimizados. Foram obtidas estruturas com valores de separação entre duas frequências consecutivas muito maiores do que nas topologias não otimizadas. Por exemplo quando da otimização utilizando microestrutura única com dois materiais, a maximização do intervalo entre a terceira e a segunda frequências naturais supera em aproximadamente 520% a diferença entre as mesmas frequências na topologia não otimizada.

Palavras-Chave: BESO, Estruturas Hierárquicas, Homogeneização, Separação de Frequências.

ABSTRACT

Hierarchical structures are structures that can be observed at different length scales, where typically a structural element at a certain scale is composed by periodic substructures at a smaller scale. Applying the Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO) method to continuous structures made of a single or multiple materials modelled via the finite element method, this work implements the computational procedures needed in order to optimize the dynamic behavior of the structural system. The optimization is achieved either via maximization of the fundamental frequency, or via separation of adjacent natural frequencies, as well as via separation of one or two pairs of adjacent frequencies, simultaneously or not, all former cases subjected to volume restrictions in the different material phases. Each hierarchical level is treated as a continuous medium occupied by one or more homogeneous material, each material having an associated microstructure. In the simultaneous project with multiple phases, the information is transferred from the microstructure to the macrostructure through the homogenization method, while topology optimization techniques are employed to reach the best material distribution such that the chose objective function is maximized. In this way, a series of topologies associated to each optimization type were found, from the maximization of either the fundamental frequency, the gap between a pair of adjacent natural frequencies, the distance of all natural frequencies from a prescribed frequency, or the gap of two pairs of adjacent natural frequencies concurrently. Numerical experiments were conducted in order to find the best layout for the macrostructure, microstructure, or both simultaneously via a coupled formulation. Following the results a discussion is presented. Sets of optimal solutions based on the weighed method were generated, making possible to identify the loss of structural integrity in some optimized cases. It was possible to obtain structures with separation values between two consecutive frequencies much higher than the initial values in unoptimized topologies. For example, the optimization of a single microstructure containing two materials reached a gap maximization between the third and second natural frequencies approximately 520% bigger than the difference between these same frequencies in the unoptimized topology.

Keywords: BESO, Hierarchical Structures, Homogenization, Frequency Separation.

ÍNDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Generalidades.....	1
1.2	Definição do problema e motivação	6
1.3	Objetivos do trabalho	8
1.4	Organização do trabalho	9
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	11
2.1	O estado da arte do método BESO em problemas dinâmicos.....	11
3	HOMOGENEIZAÇÃO	18
3.1	Periodicidade e expansão assintótica	19
3.2	Problema geral de valor de contorno	21
3.3	Análise da microestrutura	22
3.4	Problema geral de elasticidade.....	27
3.5	Solução das equações de homogeneização	33
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA MÉTODO BESO	37
4.1	BESO para otimização da frequência natural	37
4.1.1	Interpolação das propriedades materiais	38
4.1.2	Análise da sensibilidade.....	40
4.2	Otimização da frequência natural em estruturas hierárquicas	41
4.2.1	Interpolação das propriedades dos materiais em estruturas bimatéria.....	44
4.2.2	Análise da sensibilidade na macroescala	45
4.2.3	Análise da sensibilidade na microescala	45
4.3	Efeito tabuleiro de xadrez e dependência de malha	49
4.3.1	Filtro de sensibilidade nodal	51
4.3.2	Filtro de sensibilidade elementar	53
4.3.3	Filtragem da sensibilidade via matriz de suavização H	53
4.3.4	Filtro de estabilização	55
4.4	Atualização das variáveis de projeto.....	55
4.5	Critério de parada.....	57

4.6	Implementação computacional	58
4.6.1	Descritivo dos passos do processo de otimização.....	58
4.6.2	Fluxograma do processo de otimização	60
5	VERIFICAÇÃO NUMÉRICA.....	61
5.1	Maximização da frequência fundamental em estruturas com material único	61
5.1.1	Viga biapoiada	61
5.1.2	Viga biengastada com massa concentrada	65
5.1.3	Placa retangular de alumínio.....	68
5.2	Maximização da frequência fundamental em estruturas hierárquicas acopladas	70
5.2.1	Microestrutura periódica com material único	71
5.2.2	Microestrutura periódica composta por dois materiais	74
5.2.3	Macroestrutura composta por duas microestruturas distintas	77
5.2.4	Modelo sólido-vazio em ambas microestruturas	80
5.2.5	Microestruturas com dois materiais cada.....	83
6	SEPARAÇÃO DE FREQUÊNCIAS	87
6.1	Otimização topológica para problemas de separação de frequências	88
6.2	Otimização topológica para problemas de separação de frequências em estruturas multiescala acopladas	89
7	ENSAIOS NUMÉRICOS	92
7.1	Separação de frequências em estruturas com material único.....	92
7.1.1	Viga biapoiada ($\omega_2 - \omega_1$).....	92
7.1.2	Viga biapoiada ($\omega_3 - \omega_2$) – caso 2.....	95
7.1.3	Placa retangular de alumínio.....	100
7.2	Separação de frequências em estruturas multimaterial	103
7.2.1	Projeto microestrutural ótimo para maximização de ($\omega_3 - \omega_2$).....	103
7.2.2	Projeto ótimo para maximização de ($\omega_3 - \omega_2$) em estrutura bimaterial	106
7.2.3	Projeto ótimo multiescala acoplado para maximização de ($\omega_3 - \omega_2$).....	109
7.2.4	Comparação entre os resultados do projeto ótimo para maximização de ($\omega_3 - \omega_2$) em estrutura bimaterial	112
8	OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO	114

8.1	Otimização topológica multiobjetivo de separação de frequências naturais em estruturas com material único.....	115
8.1.1	Placa retangular de alumínio, $(\omega_5 - \omega_4)$ e $(\omega_9 - \omega_8)$	115
8.1.2	Viga biapoiada, $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_8 - \omega_7)$	117
8.2	Otimização topológica multiobjetivo de separação de frequências naturais em estrutura bimaterial	119
8.2.1	Otimização microestrutural, conjunto ótimo de soluções para maximização simultânea de $(\omega_3-\omega_2)$ e $(\omega_{11}-\omega_{10})$	119
8.2.2	Otimização macroestrutural, conjunto ótimo de soluções para maximização simultânea de $(\omega_3-\omega_2)$ e $(\omega_{11}-\omega_{10})$	120
8.2.3	Otimização multiescala acoplado, conjunto ótimo de soluções para maximização simultânea de $(\omega_3-\omega_2)$ e $(\omega_{11}-\omega_{10})$	121
8.2.4	Integração dos resultados do conjunto de soluções ótimas.....	122
9	CONCLUSÕES	124
9.1	Sugestões para trabalhos futuros.....	126
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	127

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Problema de Galileu: (a) Viga engastada-livre sujeita a uma solicitação, (b) Viga otimizada [Petroski, 1994].....	2
Figura 1.2 Minimização da flexibilidade: (a) Domínio de projeto e condição de contorno (b) Otimização obtida por Michell, 1904 (c) Otimização obtida por Sigmund, 2000.	2
Figura 1.3 Tipos de otimização estrutural e fases de projeto.	4
Figura 1.4: Sistema multiescala: (a) Macroestrutura (b) Microestrutura periódica (c) Célula-base.	7
Figura 1.5: Categorias das pesquisas em otimização topológica no WCSMO10, Paulino, 2013.	8
Figura 2.1 Placa retangular de alumínio (a) Condição inicial, (b) Otimizada através do método ESO, Xie e Steven, 1996.	11
Figura 3.1 Ilustração de um meio periódico regular.....	19
Figura 3.2 Comportamentos global e local ampliado, de uma função F arbitrária periódica regular.....	20
Figura 3.3 Dimensão característica de não-homogeneidade em escala local expandida.	20
Figura 3.4 Problema de elasticidade em um corpo celular com sua célula.....	27
Figura 4.1 Curvas de penalização para $x_{min} = 0,01$	40
Figura 4.2 Sistema multiescala composto por macroestrutura, material periódico e uma microestrutura.....	42
Figura 4.3 Sistema multiescala composto por duas microestruturas.....	44
Figura 4.4 Efeito tabuleiro de xadrez, (<i>checkerboard</i>).....	50
Figura 4.5 Raio de influência para a extrapolação dos números de sensibilidade.	52
Figura 4.6 Relação entre o número de elementos e o raio do filtro.....	52
Figura 4.7 Elemento retangular, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ [Petyt, 2015].....	53
Figura 4.8 Fluxograma do método implementado.....	60
Figura 5.1 Viga biapoada em ambas as extremidades.....	61
Figura 5.2 Viga biapoada otimizada por Du e Olhoff, 2007.....	62
Figura 5.3 Viga biapoada otimizada por Huang et al., 2010a.....	62

Figura 5.4 Viga biapoçada otimizada neste trabalho.	62
Figura 5.5 Histórico de otimização da viga biapoçada, por Du e Olhoff, 2007, frequências em rad/s.	63
Figura 5.6 Histórico de otimização da viga biapoçada, por Huang et al. 2010a, frequências em rad/s.	63
Figura 5.7 Históricos de otimização viga biapoçada, implementada neste trabalho.....	64
Figura 5.8 Caso 2, viga 2D biengastada em ambas as extremidades	65
Figura 5.9 Viga biengastada, topologia ótima obtida por Yaghoobi e Hassani, 2017.	66
Figura 5.10 Viga biengastada, topologia ótima obtida neste trabalho.....	66
Figura 5.11 Histórico de otimização da viga biengastada implementada neste trabalho.	67
Figura 5.12 Placa retangular de alumínio	68
Figura 5.13 Placa retangular de alumínio otimizada por Steven e Xie, 1996.	69
Figura 5.14 Placa retangular de alumínio otimizada neste trabalho.....	69
Figura 5.15 Histórico de otimização da placa retangular de alumínio deste trabalho.....	70
Figura 5.16 Viga biengastada nas extremidades	71
Figura 5.17 Microestrutura periódica otimizada com material único por Zuo et al., 2013.....	72
Figura 5.18 Microestrutura periódica otimizada com material único, neste trabalho.	72
Figura 5.19 Histórico de otimização da microestrutura periódica com material único.....	73
Figura 5.20 Microestrutura periódica otimizada com dois materiais por Zuo et al., 2013.....	75
Figura 5.21 Microestrutura periódica otimizada com dois materiais, neste trabalho.....	75
Figura 5.22 Histórico de otimização, da microestrutura periódica com dois materiais.	76
Figura 5.23 Macroestrutura otimizada com dois materiais por Zuo et al., 2013.....	78
Figura 5.24 Macroestrutura otimizada com dois materiais neste trabalho.....	78
Figura 5.25 Histórico de otimização, da macroestrutura com dois materiais.....	79
Figura 5.26 Macroestrutura e microestruturas otimizadas por Zuo et al., 2013.....	81
Figura 5.27 Macroestrutura e microestruturas otimizada neste trabalho.....	81
Figura 5.28 Histórico de otimização, da macroestrutura com dois materiais.....	82
Figura 5.29 Macroestrutura e microestruturas otimizadas por Zuo et al., 2013.....	84
Figura 5.30 Macroestrutura e microestruturas otimizada neste trabalho.....	84
Figura 5.31 Histórico de otimização na macro e microestruturas com dois materiais.....	85
Figura 7.1 Topologia ótima para a maximização de ω_2 , por Du e Olhoff, 2007.....	93
Figura 7.2 Topologia para a maximização de $(\omega_2 - \omega_1)$ neste trabalho.....	93
Figura 7.3 Histórico de otimização $(\omega_2 - \omega_1)$ viga biapoçada.....	93

Figura 7.4 Evolução da otimização para $(\omega_2 - \omega_1)$ deste trabalho.....	94
Figura 7.5 Viga biapoada em ambas as extremidades.....	95
Figura 7.6 Topologia para separação da segunda e terceira frequências por Lopes, et al., 2017.	96
Figura 7.7 Topologia para separação da segunda e terceira frequências neste trabalho.	96
Figura 7.8 Histórico das cinco primeiras frequências naturais durante a separação da segunda e terceira frequências por Lopes, et al., 2017.	96
Figura 7.9 Histórico das cinco primeiras frequências naturais durante a separação da segunda e terceira frequências, neste trabalho.....	97
Figura 7.10 Evolução da separação da segunda e terceira frequências, neste trabalho.....	97
Figura 7.11 Topologia para separação das frequências naturais no entorno da frequência de 120Hz, neste trabalho.	98
Figura 7.12 Histórico das quinze primeiras frequências naturais durante o processo de otimização.....	99
Figura 7.13 Evolução da função objetivo.....	99
Figura 7.14 Topologia ótima para a maximização da três primeiras frequências, por Steven e Xie, 1996.	100
Figura 7.15 Topologia ótima para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ neste trabalho.....	100
Figura 7.16 Histórico de otimização $(\omega_3 - \omega_2)$ da placa retangular de alumínio neste trabalho.	101
Figura 7.17 Evolução da otimização $(\omega_3 - \omega_2)$ da placa retangular de alumínio neste trabalho.	102
Figura 7.18 Topologia ótima microestrutural para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$	104
Figura 7.19 Histórico de otimização para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$	104
Figura 7.20 Evolução da otimização microestrutural para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$	105
Figura 7.21 Topologia ótima macroestrutural para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$	107
Figura 7.22 Histórico de otimização macroestrutural para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$	107
Figura 7.23 Evolução da otimização macroestrutural para maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$	108
Figura 7.24 Topologias ótimas para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ em estrutura multiescala acoplada.	109
Figura 7.25 Histórico de otimização de $(\omega_3 - \omega_2)$ em estrutura multiescala acoplada.	110
Figura 7.26 Evolução da função $(\omega_3 - \omega_2)$ com o decaimento do volume, para um projeto ótimo multiescala acoplado.....	111

Figura 7.27 Gráfico compilado da maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ para o projeto ótimo da estrutura multiescala acoplada.....	112
Figura 8.1 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_5 - \omega_4)$ e $(\omega_9 - \omega_8)$	115
Figura 8.2 Estruturas alcançadas para a otimização multiobjetivo fora do conjunto de soluções ótimas: (a) $A = 0,20$ (b) $A = 0,25$ e (c) $A = 0,45$, e dentro do conjunto de soluções ótimas: (d) $A = 0,10$ (e) $A = 0,50$ e (f) $A = 0,95$	116
Figura 8.3 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_9 - \omega_8)$	117
Figura 8.4 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_8 - \omega_7)$	118
Figura 8.5 Estruturas alcançadas para a otimização multiobjetivo fora do conjunto de soluções ótimas: (a) $A = 0,70$ e dentro do conjunto de soluções ótimas: (b) $A = 0,75$ (c) $A = 0,25$	118
Figura 8.6 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$, simultaneamente.	120
Figura 8.7 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$, simultaneamente.	121
Figura 8.8 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$, simultaneamente.	122
Figura 8.9 Compilação das soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$, simultaneamente.....	123

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 Propriedades do material empregado na viga biapoiada	62
Tabela 5.2 Comparativo das frequências naturais em rad/s para viga biapoiada.....	65
Tabela 5.3 Propriedades do material empregado na viga biengastada	66
Tabela 5.4 Comparativo das frequências naturais em Hz para a viga bienganstada.....	66
Tabela 5.5 Propriedades da placa retangular de alumínio	68
Tabela 5.6 Comparativo das frequências naturais em Hz para a placa retangular de alumínio.	69
Tabela 5.7 Propriedades do material empregado.....	71
Tabela 5.8 Comparativo das frequências fundamentais em rad/s.	73
Tabela 5.9 Propriedades dos materiais empregados na microestrutura.....	74
Tabela 5.10 Comparativo das frequências fundamentais em rad/s.	76
Tabela 5.11 Propriedades dos materiais empregados nas microestruturas.....	77
Tabela 5.12 Comparativo das frequências fundamentais em rad/s.	79
Tabela 5.13 Propriedades dos materiais empregados nas microestruturas.....	80
Tabela 5.14 Comparativo das frequências fundamentais em rad/s.	82
Tabela 5.15 Propriedades dos materiais empregados nas microestruturas.....	83
Tabela 5.16 Comparativo das frequências fundamentais em rad/s.	85
Tabela 7.1 Comparativo das frequências (Hz) para a estrutura otimizada.....	94
Tabela 7.2 Propriedades do material empregado na viga biapoiada	95
Tabela 7.3 Comparativo das frequências naturais em Hz, para $(\omega_3 - \omega_2)$	98
Tabela 7.4 Comparativo das frequências (Hz) para a placa retangular de alumínio.....	101
Tabela 7.5 Comparativo das frequências (rad/s) para a microestrutura otimizada.	105
Tabela 7.6 Comparativo das frequências (rad/s) para a macroestrutura otimizada.....	108
Tabela 7.7 Comparativo das frequências (rad/s) otimização efetuada.....	110

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

AH	Homogeneização assintótica (<i>Asymptotic Homogenization</i>)
BEFSO	BESO Fluido-Estrutura (<i>Bi-Directional Evolutionary Fluid-Structural Optimization</i>)
BESO	Bidirecional ESO (<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimization</i>)
ESLs	<i>Equivalent Static Loads</i>
ESO	Otimização Estrutural Evolucionária (<i>Evolutionary Structural Optimization</i>)
ETO	Otimização Topológica Evolucionária (<i>Evolutionary Topology Optimization</i>)
FRF	Função Resposta em Frequência
GESO	ESO Genético (<i>Genetic Evolutionary Structural Optimization</i>)
MESO	Multiobjetivo ESO (<i>Multiobjective Evolutionary Structural Optimization</i>)
MMA	Método das Assíntotas Móveis (<i>Method of Moving Asymptotes</i>)
PUC	Célula Unitária Periódica (<i>Periodic Unit Cells</i>)
RUC	Célula Unitária Representativa (<i>Representative Unit Cell</i>)
SESO	<i>Smoothing</i> ESO (<i>Smooth Evolutionary Structural Optimization</i>)
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
TPS	Sistema Térmico de Proteção (<i>Thermal Protection System</i>)
WCSMO	<i>World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimisation</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos latinos

b	forças de corpo média, N
\mathbf{b}	Matriz das derivadas da função de forma do micromodelo
\mathbf{b}_e	Matriz elementar de deformações
e	Tensor de deformação, m/m
\mathbf{f}	Vetor de forças externas, N
f	Função da componente da força de corpo que atua ao longo domínio global da estrutura em Ω
\mathbf{p}	Trações dentro dos furos, N
p	Fator de penalização
r	Raio, m
s	Contorno do furo v , m
u	Campo de deslocamento, m
\mathbf{u}	Autovetor
\mathbf{u}_e	Campo de deslocamentos elementar
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vetor aceleração, m/s ²
v	Área do furo, m ²
\mathbf{x}^{mac}	Vetor que descreve o leiaute do macromodelo
\mathbf{x}^{mic}	Vetor que descreve o leiaute do micromodelo
\mathbf{x}	Vetor posição, m
x_i	Variável de projeto binária do i -ésimo elemento
x_{min}	Variável de projeto binária usada para denotar um elemento vazio
AR	Taxa de atualização

D	Tensor
D^H	Tensor homogeneizado
<i>E</i>	Módulo de Young, Pa
E	Tensor das características elásticas, Pa
<i>ER</i>	Taxa evolucionária
<i>F</i>	Função escalar, vetorial, ou tensorial
H	Matriz de suavização
<i>H¹</i>	Espaço de Sobolev
I	Matriz identidade
K	Matriz de rigidez, N/m
K_{ei}	Matriz de rigidez elementar, N/m
M	Matriz de massa, kg
M_e	Matriz de massa elementar, kg
<i>N</i>	Número total de elementos na estrutura
N	Matriz diagonal 3 × 3, com números inteiros arbitrários
N_e	Funções de forma
<i>ℒ</i>	Operador bilinear
<i>ℚ</i>	Função escalar, sendo a resposta do sistema - variável independente <i>u</i>
<i>Q</i>	Fator de ponderação nodal
\mathbb{R}^3	Espaço tridimensional
<i>V_i</i>	Volume do <i>i</i> -ésimo elemento, m ³
<i>V^{mac}</i>	Volume alvo macroestrutural, m ³
<i>V^{mic}</i>	volume alvo na microestrutura, m ³
<i>Volfrac</i>	volume prescrito, m ³
X	Vetor
<i>W</i>	função de ponderação

\mathbf{Y}	Vetor constante que indica os limites da estrutura em cada dimensão
\mathbb{Y}	Parte sólida da célula periódica unitária

Símbolos gregos

α	Sensibilidade
δ	Razão entre o peso da unidade vetorial da coordenada microscópica, e o peso do vetor na unidade macroscópica
κ	Função qualquer da microescala \mathbf{y}
ζ	Função qualquer da microescala \mathbf{y}
ψ	Função de ponderação
φ	Função \mathbf{Y} -periódica
σ	Tensor de tensão, Pa
τ	Critério de parada
ρ	Massa específica do material, kg/m^3
ν	Coefficiente de Poisson
ω	Frequência, Hz
Δ	Diferença entre duas frequências consecutivas, Hz
Γ_d	Domínio local
\mathcal{Y}	Operador diferencial elíptico de segunda ordem
Ω	Domínio definido

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo adentra o assunto otimização estrutural topológica, destacando a etimologia e alguns pesquisadores que atuam no tema. Também relaciona os principais métodos aplicados na atualidade, além de definir o problema e apresentar as justificativas para a escolha do tema. Por fim, delimita o alcance do trabalho, elencando objetivos geral e específicos.

1.1 Generalidades

Etimologicamente, a palavra otimização advém do nome atribuído à deusa da antiga religião romana *Ops* ou *Opis*, de origem Sabine, uma divindade da fertilidade e deusa da terra [Kim et al., 2002], tendo sido usada pela primeira vez, na área das ciências exatas, por Leibniz no século XVII, a fim de referenciar a melhor de todas as possibilidades. Por sua vez a palavra topológico provém do termo grego *topos*, o qual se refere a local, lugar, espaço ou domínio [Eschenauer e Olhoff, 2001].

Dessa forma pode ser entendido por otimização topológica como a melhor de todas as possibilidades num dado domínio.

Um dos primeiros discursos científicos sobre otimização é atribuído a Galileu Galilei no seu livro *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche*, acerca da forma ótima de uma viga engastada-livre sujeita a uma solicitação estática na extremidade livre, conforme mostra a Figura 1.1. Sobre isso Venkayya,1993, afirma que a noção de uma solução ótima para um problema de engenharia é intrigante e tem sido investigada por longo tempo. A resistência de uma viga engastada sujeita a flexão e cisalhamento, tal como formulada por Galileu foi também uma otimização de forma na busca de redução do volume sob uma restrição de tensão uniforme. O problema de Galileu foi, provavelmente, um dos problemas mais antigos de otimização.

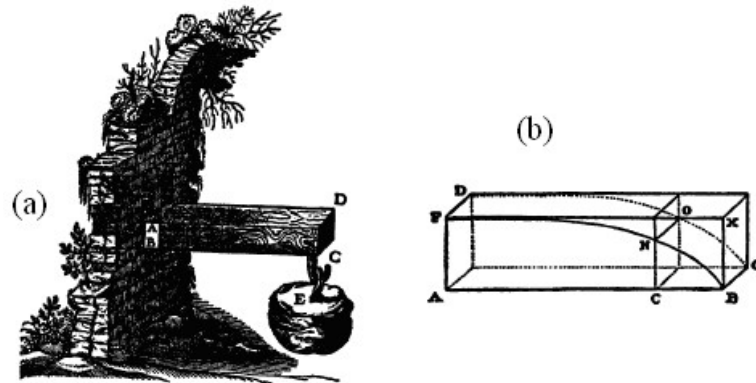


Figura 1.1 Problema de Galileu: (a) Viga engastada-livre sujeita a uma solicitação, (b) Viga otimizada [Petroski, 1994].

Outros nomes também contribuíram nessa busca constante pelo ótimo, como Leonhard Paul Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), Thomas Clausen (1801-1885), Adh mar Jean Claude Barr  de Saint-Venant (1797-1886), entre outros, que iniciaram investiga o acerca da otimiza o de estruturas sujeitas a carregamentos arbitr rios. Naquela  poca a otimiza o estrutural j  consistia em um t pico intelectualmente atrativo e tecnicamente significativo [Eschenauer e Olhoff, 2001]. Num formato mais pr ximo do que se conhece atualmente, os principais estudos s o atribu dos a James Clerk Maxwell (1831-1879), na aplica o dos conceitos de otimiza o em projetos estruturais civis, e Anthony George Maldon Michell (1870-1959), que observando as ideias de Maxwell, prop s a otimiza o de uma estrutura bi apoiada sujeita a um carregamento central. A Figura 1.2 exemplifica um estudo do projeto topol gico para minimiza o da flexibilidade, na busca da menor quantidade de em uma estrutura. De forma anal tica conforme Figura 1.2b, e de forma num rica conforme Figura 1.2c.

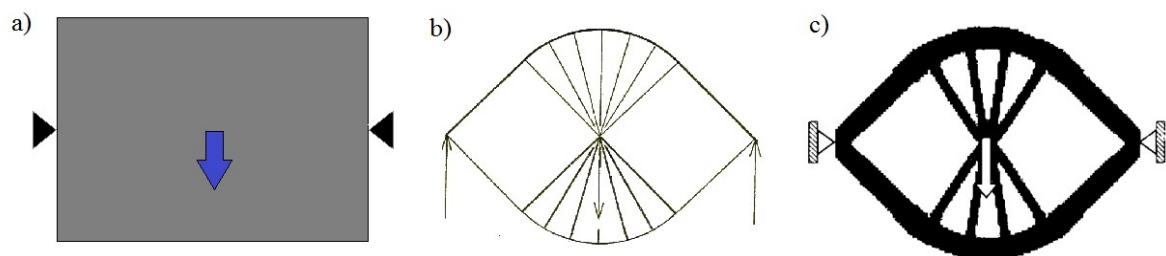


Figura 1.2 Minimiza o da flexibilidade: (a) Dom nio de projeto e condi o de contorno (b) Otimiza o obtida por Michell, 1904 (c) Otimiza o obtida por Sigmund, 2000.

Porto, 2006, considerando as defini es de Hassani e Hinton, 1999 e Zhou e Rozvany, 1991, caracteriza os tipos de otimiza o e fases de projeto do seguinte modo:

- Otimização topológica; também denominada de otimização de forma generalizada. Ferramenta que visa a determinação ótima do número e localização de furos (vazios) em meios contínuos bi e tridimensionais. Tais regiões de vazios são então desconsideradas do projeto, estabelecendo-se uma nova distribuição de material ao longo do domínio da estrutura. Bastante útil na fase de concepção do produto e altamente dependente do engenheiro.
- Otimização de forma; técnica que busca a definição ótima dos contornos externos e internos da estrutura. Uma vez determinada a topologia ótima, a forma da estrutura pode ser então otimizada. A otimização de forma pode ser aplicada durante a fase de projeto preliminar.
- Otimização paramétrica ou dimensional; obtidas topologia e forma ótima, o objetivo seguinte é determinar valores ótimos para os parâmetros geométricos da estrutura a ser projetada. Tais parâmetros podem ser: espessura, comprimento, área da seção transversal, dentre outros. Ferramenta de grande valia na fase de projeto detalhado.
- Otimização de leiaute; abordagem de problemas envolvendo estruturas reticuladas, como treliças e pórticos, com o objetivo de determinar a topologia, forma e dimensões ótimas de seus membros estruturais, assim como a localização ótima das juntas (uniões) que conectam tais membros. Técnica que envolve simultaneamente as otimizações topológica de forma e paramétrica.

A Figura 1.3 ilustra cada uma das fases de projeto, além dos tipos de otimização mencionados.

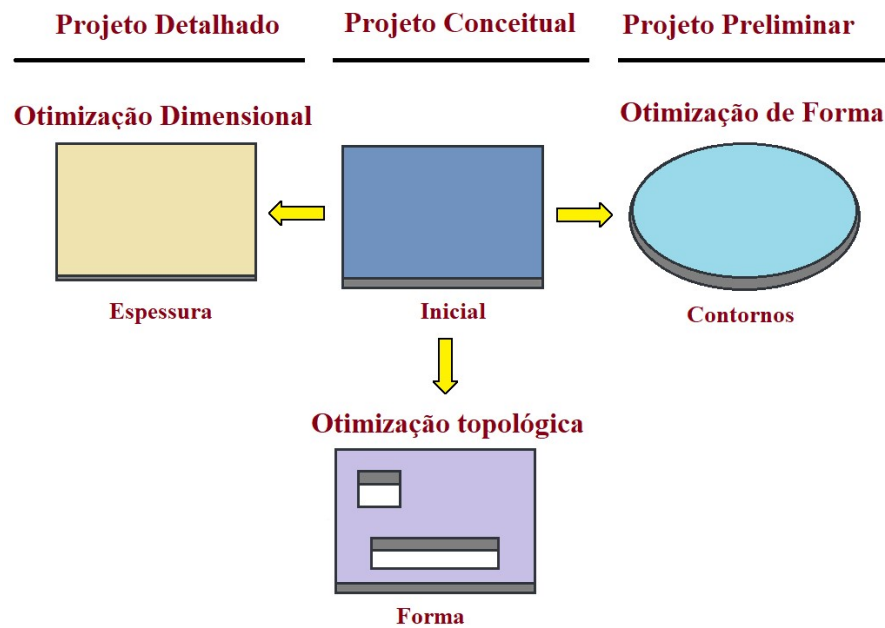


Figura 1.3 Tipos de otimização estrutural e fases de projeto.

Bendsøe e Sigmund, 2003, comentam que os métodos de otimização topológica vêm sendo aplicadas em diferentes tipos de sistemas físicos e mecânicos. Alinhados a esse pensamento, Deaton e Grandhi, 2014, destacam que a otimização topológica passou de algumas respostas estruturais lineares para aplicações em sistemas estruturais, transferência de calor, acústica, fluxo de fluido, aero elasticidade, projeto de materiais, e outras situações multifísicas.

Para exemplificar essa abrangência, podem ser citados os seguintes trabalhos: Ghabraie et al., 2010, otimização topológica simultânea da abertura, e da distribuição dos reforços na escavação de um túnel subterrâneo; De Leon et al., 2012, otimização topológica em um sistema, a fim de aumentar a velocidade de *flutter* em uma placa de compósito laminado, através da maximização da frequência natural; Molter et al., 2013, um sistema simultâneo para controle de vibração, utilizando atuadores piezelétricos, e otimização topológica em estruturas, empregando o método SIMP (*solid isotropic material with penalization*); Romero e Silva, 2014, no projeto de um rotor para turbomáquinas centrífugas com o uso de otimização topológica, entre outros.

Sigmund et al., 2003, definem o problema geral de otimização topológica como encontrar a melhor distribuição do material num dado domínio de projeto, tal que as funções objetivo são otimizadas e as restrições são satisfeitas, i.e., é o processo para determinar a conectividade, a forma, e a localização dos vazios dentro de um dado domínio de projeto [Deaton e Grandhi, 2014].

É possível afirmar que as aplicações de otimização são inúmeras, podendo ser empregada na busca da melhor solução para os mais distintos problemas, tendo como único fator limitante, a existência de parâmetros quantificáveis. Contudo, o crescimento dos estudos sobre otimização só foi possível graças ao aprimoramento dos métodos numéricos e a evolução dos recursos computacionais. Pesquisadores da área como Sigmund, 2001; Challis, 2010; Huang e Xie, 2010; Andreassen et al., 2011; Andreassen e Andreasen, 2014; Xia e Breitkopf, 2015; Da et al., 2017a; entre outros, disponibilizaram seus códigos, objetivando o desenvolvimento e o aprimoramento de seus estudos.

Cazacu e Grama, 2014, afirmam que a otimização topológica é provavelmente o tipo mais importante de otimização estrutural. Seu uso é crucial para dar aos projetistas um leiaute inicial da estrutura, otimizada em relação às especificações funcionais e tecnológicas. O método mais disseminado, tanto em termos de pesquisa como de implementação em *softwares* comerciais, é o método SIMP (*solid isotropic material with penalization*). Outro muito utilizado pelos pesquisadores é o BESO (*bidirectional evolutionary structural optimization*), sendo empregado em muitos trabalhos, mas sem implementações comerciais disponíveis. Contudo, o BESO tem um grande potencial, especialmente considerando os aprimoramentos mais recentes, e principalmente quando combinados com outras técnicas, como algoritmos genéticos, visto nos trabalhos de Liu et al., 2008 e Zuo et al., 2009.

O método ESO (*evolutionary structural optimization*) fora apresentado por Xie e Steven, 1993, onde num dado domínio de projeto, discretizado por elementos finitos, realiza-se a remoção gradual dos elementos que menos contribuem com a rigidez estrutural para um dado carregamento, até a obtenção do ótimo desejado para a topologia. Chu et al., 1996, objetivando maximizar a rigidez estrutural, reescrevem o método utilizando o critério da energia de deformação elementar. Querin et al., 1998, aprimoram o método para o bidirecional ESO (BESO), onde os materiais são adicionados para regiões de elevados esforços e retirados em regiões de esforços baixos, tipicamente implementados pela adição e remoção de elementos do modelo de elementos finitos, ou seja, elementos que em algum momento do processo foram retirados da estrutura, puderam retornar em novas iterações.

O método ganhou uma grande popularidade dentre os pesquisadores de otimização estrutural, como pode ser visto em Huang e Xie, 2007, 2010a e 2010b. Segundo Picelli, 2011, o método é bem estabelecido, e tem alcançado versões mais complexas, como a versão bidirecional ESO (BESO) de Huang e Xie, 2007; a versão multiobjetivo baseada em elementos fixos (MESO) de Tanskanen, 2006; a versão ESO genético (GESO) de Liu et al., 2008; a versão para análise de sistemas fluido-estrutura (BEFSO) de Vicente, 2013; o

smoothing ESO (SESO) de Almeida et al., 2014, que aplica uma técnica de suavização na forma de retirada dos elementos ineficientes da malha; o método ETO (do inglês *evolutionary topology optimization*) de Da et al., 2017a, capaz de gerar um contorno claro e suavizado, contrastando com o zigzague do método BESO, entre outros.

1.2 Definição do problema e motivação

Os corpos, muitas vezes tratados como estruturas discretas, na verdade são estruturas contínuas, possuindo infinitos modos de vibração. Se num dado componente estrutural, frequências de excitação coincidirem com as frequências naturais, haverá respostas ressonantes, desencadeando o colapso estrutural.

Grande parte dos equipamentos não trabalham numa frequência única, e sim dentro de uma faixa de frequências, como os motores a combustão, as bombas, as turbinas, os ventiladores, dentre outros. Em um projeto mecânico adequado, é essencial que as frequências das estruturas estejam mais distantes possíveis da frequência de excitação do sistema. Isso vale não somente para a frequência fundamental, mas também para todas as outras, cabendo uma discussão sobre a otimização de faixas de frequências.

A otimização da frequência é importante na engenharia, visto que é desejável modificar as frequências naturais para evitar respostas ressonantes ocasionadas por excitações externas. Como a frequência natural é associada ao desempenho da macroestrutura, a otimização para as frequências na microescala é raramente estudada [Zuo et al., 2013].

Os estudos como os de Zuo et al., 2013, Xu e Xie, 2015, Liu et al., 2016, demonstram a eficiência do emprego de métodos de otimização topológica nas análises dinâmicas: de estruturas fabricadas de materiais celulares, i.e., quando há apenas um tipo de material e vazios, e em estruturas compósitas, ou seja, quando há a combinação de dois ou mais materiais

Em muitas aplicações, esses materiais, são formados por um padrão repetitivo periódico. O comportamento desses materiais heterogêneos periódicos é determinado pelas propriedades dos materiais constituintes e pelas topologias no nível microscópico [Calixto, 2015], isso porque a otimização de topologia não tem sido aplicada somente para o projeto de estruturas na macroescala, mas também para projetar os materiais (microescala).

Por meio do método da homogeneização, é possível se avaliar as propriedades efetivas do material da microestrutura considerada, ou do modelo de célula unitária representativa RUC (do inglês *Representative Unit Cell*) [Da et al. 2017b].

A análise de sensibilidade em ambas as escalas deve ser acoplada, cada uma com informação da outra, onde o projeto topológico da macroestrutura é realizado de forma combinada com o da microestrutura do material.

A pesquisa na otimização de projeto multiescala, i.e., considerando simultaneamente as escalas macro e micro é relativamente recente [Zuo et al., 2013]. Rodrigues et al., 2002, e Zhang e Sun, 2006, observam que alguns trabalhos apresentam dificuldades na manufatura, onde a microestrutura do material celular é projetada para cada ponto na macroestrutura. Outro tipo de abordagem de projeto simultâneo, para ambas as escalas, é considerar apenas um material na macroestrutura e a uniformidade da microestrutura é assumida para o material periódico. A Figura 1.4, apresenta um típico problema de otimização multiescala.

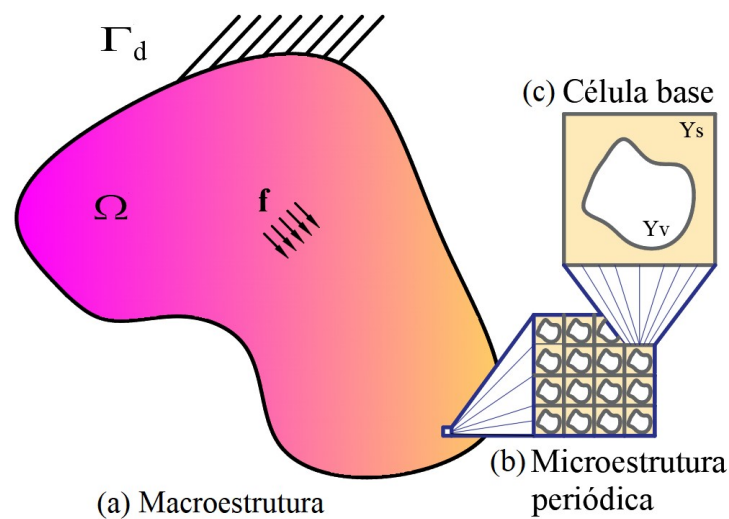


Figura 1.4: Sistema multiescala: (a) Macroestrutura (b) Microestrutura periódica (c) Célula-base.

Um bom termômetro acerca das demandas em pesquisas são os congressos, sendo o *World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimisation* - WCSMO um dos principais da área. Na edição de número 10 (ocorrida em Orlando/ Florida, USA), Paulino, 2013, elenca dez categorias de assuntos discutidos pelos pesquisadores no evento, ocupando o primeiro e o segundo lugares, multifísicos e novos métodos de otimização, respectivamente, e educacional e artes como os menos pesquisados. Materiais e microestruturas aparecem na sétima posição, conforme pode ser apreciado na Figura 1.5.

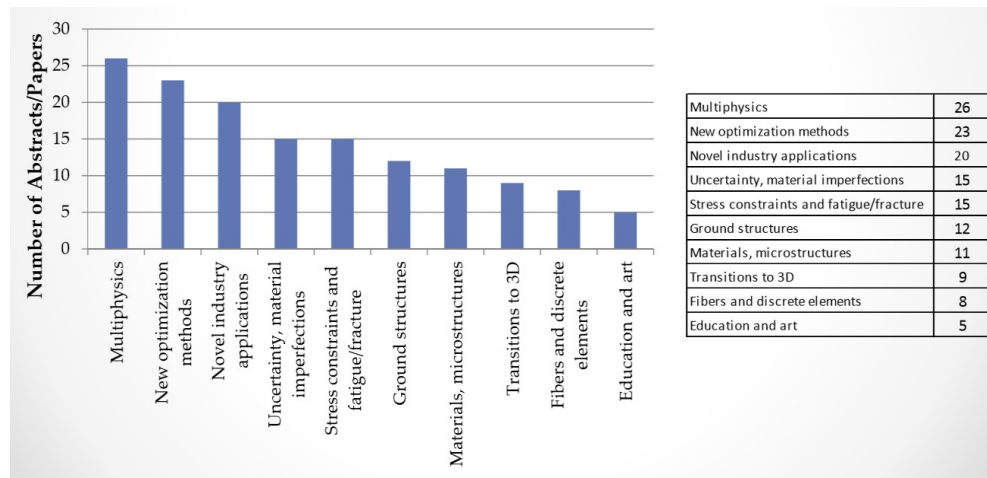


Figura 1.5: Categorias das pesquisas em otimização topológica no WCSMO10, Paulino, 2013.

Motivado pelos fatos previamente expostos, esta pesquisa foca o desenvolvimento de uma abordagem de projeto para a macro e microestrutura simultaneamente, com o uso do método BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*). Busca-se separar as frequências circunvizinhas de um dado valor de referência conhecido, sujeito a um volume prescrito inferior ao inicial. Como resultado, as topologias da macroestrutura e da microestrutura do material periódico são obtidas recebendo dois modelos de elementos finitos, ou seja, um modelo macro para a macroestrutura e um modelo micro para a microestrutura do material. Nesse caso o modelo micro descreve o padrão de geometria da célula básica do material periódico.

Uma vez que a otimização estrutural é uma ferramenta de projeto que permite não apenas diminuir custos de fabricação, mas também diminuir custos de operação, ao melhorar a performance dos componentes e sistemas criados [Coutinho, 2006], considera-se que essas investigações numéricas possam contribuir significativamente nas mais diversas aplicações, em áreas como a automobilística, naval, aeroespacial, entre outras.

1.3 Objetivos do trabalho

O objetivo geral do trabalho é desenvolver uma abordagem para maximizar o intervalo entre duas frequências naturais consecutivas de um sistema estrutural, modelado pelo método dos elementos finitos, num projeto simultâneo hierárquico de otimização topológica com o método BESO, desdobrando nos seguintes objetivos específicos:

Implementar computacionalmente o método evolucionário em uma escala, para sistemas estruturais, testando a sua aplicação para maximização da frequência fundamental.

Implementar computacionalmente o método evolucionário em duas escalas (macro e micro), para sistemas estruturais hierárquicos, realizando experimentos numéricos, de maximização da frequência fundamental.

Implementar computacionalmente o método evolucionário para separação de frequência em uma escala, testando a separação da frequência em sistemas estruturais.

Implementar computacionalmente o método evolucionário para separação de frequências naturais adjacentes, considerando as escalas micro e macro, testando a separação das frequências em um sistema estrutural hierárquico.

1.4 Organização do trabalho

O presente trabalho está organizado de acordo com os capítulos descritos a seguir.

O Capítulo 1 inicia o assunto otimização estrutural topológica, com a origem etimológica e alguns pesquisadores que atuam no tema, além de relacionar os principais métodos da atualidade. Também defini o problema tratado neste trabalho, e apresentando as justificativas para a escolha do tema, bem como o alcance e os objetivos geral e específicos.

O Capítulo 2 traz uma revisão bibliográfica atualizada sobre otimização topológica aplicada à problemas dinâmicos, com o emprego do método ESO. São destacados os principais trabalhos e pesquisadores, cujas contribuições propiciam o alavancar da área.

O Capítulo 3 trata da teoria do método da homogeneização, para o cálculo de efetivos parâmetros constitutivos, de materiais complexos com microestruturas periódicas, sendo fundamental para a realização da otimização topológica multiescala, uma vez que em sistemas acoplados, é necessário transferir informações da micro para a macroestrutura.

O Capítulo 4 aborda a fundamentação teórica do método BESO, mostrando as formulações e os desenvolvimentos das equações, para problemas de frequência natural, com a finalidade de empregar o procedimento em otimização estrutural topológica de estruturas composta por material único e múltiplos materiais de forma acoplada. Também são apresentados o descritivo do processo de otimização e o fluxograma a implementação do método desenvolvido neste trabalho.

O Capítulo 5 versa sobre ensaios numéricos, a fim de avaliar a robustez da implementação e verificar eventuais instabilidades no algoritmo. Busca-se a validação do

código implementado, testando modelos em estruturas biapoiadas e biengastadas, tendo seus resultados comparados com referências já consolidadas.

O Capítulo 6 compreende o desenvolvimento da formulação para separação de frequências objetivando maximizar o intervalo entre frequências adjacentes, em estruturas compostas por material único e por bimateriais.

O Capítulo 7 exhibe a aplicação da separação de frequências em sistemas estruturais com material único e com bimateriais, nas condições biapoiado e biengastado, realizados para baixas frequências ($\omega_2 - \omega_1$) e ($\omega_3 - \omega_2$).

O Capítulo 8 mostra aplicações multiobjetivos em separação de frequências, com o uso da soma ponderada, sendo uma aproximação para solução da otimização multiobjetivo que emprega uma combinação linear de diferentes objetivos conflitantes, auxiliados por pesos que medem a importância de um objetivo em relação a outro. São perseguidos simultaneamente a maximização do intervalo em baixas e altas frequências: ($\omega_5 - \omega_4$) e ($\omega_9 - \omega_8$), ($\omega_3 - \omega_2$) e ($\omega_9 - \omega_8$), ($\omega_3 - \omega_2$) e ($\omega_8 - \omega_7$), para estruturas compostas por material único, e ($\omega_3 - \omega_2$) e ($\omega_{11} - \omega_{10}$) para estruturas compostas por bimaterial.

O Capítulo 9 apresenta as conclusões da investigação científica realizada neste trabalho, além de sugestões para continuidade de alguns aspectos observados, mas não investigados, podendo gerar bons frutos em trabalhos vindouros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Apresenta-se neste capítulo uma revisão bibliográfica recente sobre o tema. A pesquisa bibliográfica destaca diversos aspectos relativos à análise do comportamento dos métodos evolucionários de otimização topológica, com o objetivo de caracterizar sua evolução para problemas dinâmicos, além de auxiliar na definição das hipóteses do trabalho.

2.1 O estado da arte do método BESO em problemas dinâmicos

A otimização da frequência é muito importante em vários campos da engenharia, e.g., nas indústrias aeroespacial e automotiva. Quando comparado com o extensivo número de trabalhos publicados de otimização da rigidez, é percebido um número bem menor sobre otimização topológica para frequência natural.

Contribuições iniciais sobre o tema, foram desenvolvidas por Xie e Steven, 1994, que ampliam o método ESO para otimização da frequência natural de estruturas, em problemas de maximização e minimização da frequência. Destacando-se que necessitou de investigações mais profundas sobre a eficiência do método proposto.

Logo, Xie e Steven, 1996, aplicam o método em problemas de otimização que incluem maximização de uma frequência escolhida, e maximização do intervalo entre duas frequências. O algoritmo é testado com elementos de tensão plana, em modelos de vigas curtas, placas retangulares e placas quadradas. O método se mostra eficiente, entretanto ainda necessitando de ajustes para solucionar problemas como o efeito tabuleiro de xadrez, conforme pode ser visto na Figura 2.1.

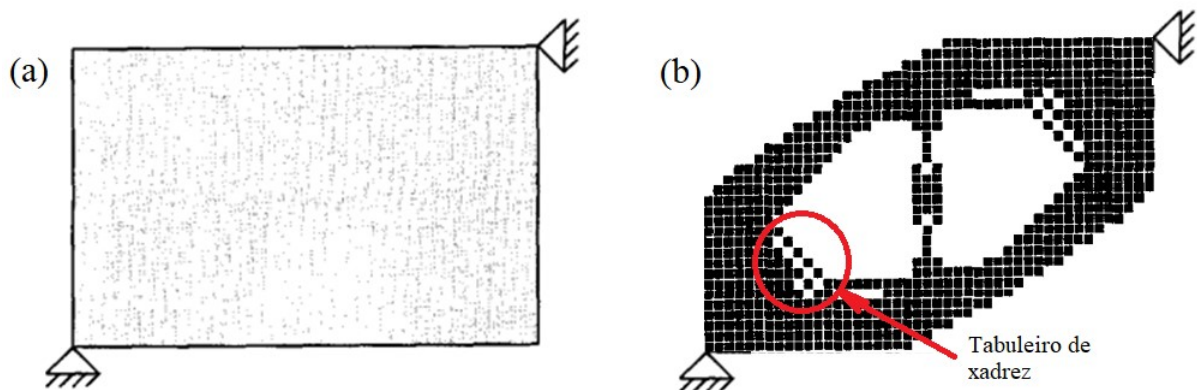


Figura 2.1 Placa retangular de alumínio (a) Condição inicial, (b) Otimizada através do método ESO, Xie e Steven, 1996.

Zhao et al.,1996, empregam o método ESO, no projeto de uma placa fina sujeita à vibração em flexão. Experimentos numéricos são realizados para maximizar a primeira ou a segunda frequência natural. Desenvolve-se um critério, que estabelece uma tolerância da variação da frequência natural na iteração atual e na anterior. Os resultados demonstram que o método atende à problemas de vibração.

Zhao et al.,1997, ampliam a utilização do método ESO, empregando-o na otimização da frequência natural de estruturas bidimensionais com massa concentrada. Para isso estabelecem cinco critérios que eliminam instabilidades do algoritmo: de eficiência do material, da definição de estrutura positiva, da mudança suave, do valor médio, da remoção mínima de elementos. Em ensaios numéricos realizados em estruturas com massas adicionais, o algoritmo se mostra capaz de alcançar bons resultados, contudo ainda são percebidos problemas de tabuleiro de xadrez.

Com a versão inicial do bidirecional ESO (BESO), Yang et al., 1999, realizam a otimização de estruturas considerando: maximização de uma única frequência, maximização de frequências múltiplas e o projeto de estruturas a partir de uma frequência prescrita. O método se mostra adequado, porém ainda muito dependente da geometria inicial.

Rong et al., 2000, utilizam o método BESO para otimizar estruturas sujeitas às vibrações aleatórias. Admite-se a teoria da dinâmica aleatória para construir uma expressão de restrições da resposta, considerando requisitos como a redução do peso estrutural. Com base no método de truncamento modal nas derivadas dos autovalores, um conjunto de formulações para números de sensibilidades é definido. Testes numéricos são realizados, demonstrando pertinência da aplicação do método em vibrações aleatórias.

Proos et al., 2001, ampliam o método ESO de otimização estrutural para análise multicritério no projeto de estruturas. O objetivo é a maximização da frequência fundamental, e a minimização da flexibilidade, simultaneamente. Os resultados mostram a capacidade de se conseguir um range de soluções para os exemplos estabelecidos. Todavia, sendo incapaz de produzir um conjunto de Pareto, e sinalizam para a necessidade de novas pesquisas estabelecendo outros critérios.

Guan et al., 2003, empregam o método ESO para otimização de pontes suspensas, com restrições de tensão e deslocamento. Um esquema de refinamento de malha é proposto para melhorar os detalhes da topologia final sem recorrer à análise completa de uma malha mais fina. Também é incorporado um sistema de restrição de frequência com uma técnica de recortes (*nibbling*), que alcança um aumento da frequência fundamental da estrutura e

aprimora os detalhes da topologia final, ou seja, permitindo à topologia ser reformulada sob a restrição da frequência após a otimização com as restrições de tensão e deslocamento. Os resultados numéricos revelam que o esquema proposto reduz o tempo de solução, pois não recorre à análise completa de uma malha refinada. A otimização de frequência com a técnica aplicada também aumenta a frequência fundamental das pontes suportadas por cabo, e melhora os detalhes das topologias já geradas.

Kim e Grandhi, 2006, desenvolvem um critério multiobjetivo, para otimização de uma estrutura tridimensional, de um sistema de proteção térmico TPS (*Thermal Protection System*). O objetivo é maximizar a frequência natural, e minimizar as tensões térmicas, simultaneamente. O método ESO é utilizado juntamente com o método da soma dos pesos. Os resultados comprovam a viabilidade do método para a aplicação.

Zuo et al., 2010, aprimoram o método BESO com uma técnica para remoção adaptativa de elementos alternados e elementos singulares. O trabalho é realizado na otimização multiobjetivo da frequência-rigidez, demonstrando eficácia na eliminação do padrão tabuleiro de xadrez dos casos apresentados.

Huang et al., 2010a, aperfeiçoam o método BESO para aplicações em frequência natural, desenvolvendo um novo esquema de interpolação de material tanto para a densidade como para o módulo de Young, corrigindo o problema com os modos de vibração artificiais que surgem nas áreas onde os elementos possuem baixas densidades. As variáveis de projeto são restritas para discretizar os valores em 1 e x_{min} (e.g. 0,001), o qual corresponde a elementos sólidos e quase vazios respectivamente. A análise da sensibilidade é feita de forma nodal e elementar. O algoritmo desenvolvido é submetido a vários testes, 2D e 3D, com material único e bimaternal, e em diferentes condições de contorno, provando seu potencial para aplicações desse tema.

Zuo et al., 2011, atualizam o método BESO para aplicações em problemas de otimização da frequência em estruturas. A formulação se dá considerando estruturas periódicas contínuas na macroescala. Uma célula unitária representativa RUC (*Representative Unit Cell*) é criada, tendo suas características aplicadas em todo domínio estrutural. Evidencia-se uma diminuição no desempenho do método, devido as características de problemas com materiais periódicos, e os modos locais são resolvidos eliminando os elementos alternados e singulares. Os resultados indicam que o projeto ótimo é afetado diretamente pelas características da célula unitária.

Outra proposta de ampliação do método BESO é feita por Zuo, et al., 2012, para otimização topológica com múltiplas restrições de frequência, deslocamento e volume.

Utilizando a técnica de relaxação Lagrangiana e a condição Kuhn-Tucker de otimização, é possível se calcular e atualizar os multiplicadores de Lagrange adicionais para cada restrição. A partir disso, são resolvidos os problemas de maximização de rigidez, obtendo resultados convergentes e atingindo as restrições adicionais, ao custo do aumento da flexibilidade quando comparados aos mesmos casos sem restrições extras. Aplicações com a técnica de relaxação Lagrangiana e a condição Kuhn-Tucker em outros métodos de otimização podem ser conferidos nos trabalhos de Pereira et al., 2004; Chiandussi et al., 2009; Manafi e Shojaei, 2018 entre outros.

Mais recentemente, Zuo et al., 2013, discretizando a estrutura com múltiplos materiais tanto na escala macro como na escala micro, verificam uso do método BESO para a maximização da frequência natural de uma estrutura. O projeto da macroestrutura e da microestrutura são acoplados, utilizando o método da homogeneização para determinar a matriz elástica. Propriedades do projeto micro são aplicadas para análise da macroestrutura, enquanto os campos de deslocamento da macroestrutura são considerados na análise da sensibilidade na microescala. A distribuição do material é controlada pelo critério ótimo de maximização da frequência. Diversos experimentos numéricos são realizados com o algoritmo, que se mostra eficiente tanto para materiais ortotrópicos quanto para materiais anisotrópicos.

Picelli, et al., 2015, desenvolvem o método BESO para otimização de sistemas vibro acústicos, objetivando a maximização da primeira frequência natural do modelo, essa extensão do método BESO permite aos elementos sólidos serem substituídos por vazios ou por elementos fluidos, podendo dessa forma considerar a condição de fronteiras móveis. A interação entre o domínio fluido e o domínio estrutural é discretizado pelas equações de onda e pelas equações de elasticidade linear, respectivamente. As condições de acoplamento são o equilíbrio e a compatibilidade cinemática entre as interfaces. O algoritmo foi testado em diferentes exemplos e condições de contorno, se mostrando capaz de minimizar a função objetivo e convergir para uma topologia otimizada, validando dessa forma a aplicação do método BESO para problemas multifísicos.

Calixto e Pavanello, 2015, empregam o método BESO para projetar um novo material celular, no domínio da microescala. Com o uso da teoria da homogeneização, é considerado que a macroestrutura é composta por uma célula-base periódica. A função objetivo é minimizar a flexibilidade ou maximizar a frequência natural, em problemas predefinidos na macroescala. Exemplos numéricos são realizados para validar a efetividade do algoritmo.

Vicente et al., 2015, aprimoram o método BESO para sistemas multifísicos envolvendo interação fluido-estrutura, onde a função objetivo é a minimização da resposta em frequência (FRF). A análise por elementos finitos é feita utilizando a formulação mista $u_s - p_f$, na qual o domínio estrutural é governado pela equação linear da elasticidade e descrito em termos do deslocamento u_s , o domínio fluido é caracterizado pela equação de Helmholtz somente através da variável primária de pressão p_f , o que apresenta uma vantagem, apesar de gerar um sistema acoplado não simétrico. Devido à natureza discreta de retirada de elementos do método e a formulação implementada, a interface entre os domínios fluido e estrutura permanecem bem definidos corroborando para delimitação clara entre os domínios. Nos problemas de variação da frequência de excitação em alguns intervalos a análise da sensibilidade, calculada para cada frequência, é determinada a partir da média aritmética de dez frequências discretas uniformemente distribuídas dentro desse intervalo, representando todo o intervalo no cálculo da função objetivo. Para diferentes condições de contorno e frequências de excitação o método se mostrou capaz de minimizar a função objetivo e convergir para a topologia otimizada.

Xu e Xie, 2015, aperfeiçoam o método BESO em problemas de vibrações randômicas, propondo um projeto concorrente de otimização topológica, onde a microestrutura, tida como periódica, é distribuída na macroestrutura do material. A análise da sensibilidade da resposta dinâmica, com relação à variável de projeto, é realizada em duas escalas, i.e., micro e macro. A função objetivo é minimizar o deslocamento da resposta em um grau de liberdade predefinido, sujeito à uma restrição de volume. Exemplos são apresentados comprovando a eficiência da aplicação.

Vicente, et al., 2016, ampliam o método BESO para encontrar a melhor configuração para um sistema hierárquico em dois níveis estruturais, macro e micro, tendo como função objetivo a minimização da função resposta em frequência (FRF) da macroestrutura. No acoplamento do sistema, é assumido que a macroestrutura é composta por um material periódico, cuja matriz de elasticidade, calculada em cada iteração na análise de elementos finitos, é obtida usando a teoria da homogeneização considerando o leiaute da microestrutura, enquanto a análise da sensibilidade na microestrutura, é calculada para cada frequência, e leva em consideração os campos de deslocamento da macroestrutura. Diversos experimentos numéricos são realizados, validando o algoritmo implementado.

Liu et al., 2016, baseados no método BESO, desenvolvem um algoritmo de otimização topológica concorrente, para maximizar a frequência natural de estruturas. Assume-se a macroestrutura como um material formado por microestrutura periódica, representada por

uma célula unitária periódica PUC (*Periodic Unit Cells*). O projeto implica na obtenção das topologias na escala macro e micro simultaneamente, alcançando dentro de um volume prescrito a máxima frequência natural. Para isso as informações da PUC são homogeneizadas, e integradas na análise da frequência da macroestrutura. A análise da sensibilidade, com respeito às variáveis de projeto, é conduzida de forma iterativa, atualizando as topologias em ambas as escalas sincronizadamente. O método é aplicado em problemas 2D e 3D, alcançando resultados que comprovam sua eficiência para os exemplos apresentados.

Xu et al., 2016, utilizam o método BESO para maximizar a energia de deformação dinâmica em estruturas, com o uso de cargas estáticas equivalente ESLs (*Equivalent Static Loads*). O projeto é desenvolvido na macro e microescala simultaneamente, com a estrutura sujeita a um volume prescrito. Exemplos são realizados atestando a eficiência do método para esse tipo de aplicação.

Munk et al., 2017, demonstram que os contornos de tensões nominais podem ser derivados das aplicações de flambagem, com os campos de deslocamento, e vibração, através dos modos de vibração. Apontam que existe uma equivalência entre as tensões dinâmicas de von Mises e os valores de sensibilidade de frequência para remoção e adição de elementos na otimização com o método BESO, e demonstram que os contornos da tensão de von Mises de flambagem e o número de sensibilidade são análogos.

O método BESO é aplicado por Lopes et al., 2017, em uma viga biapoiada de material único objetivando a maximização do intervalo entre frequências adjacentes. Para evitar o problema de instabilidades, uma otimização multiobjetivo baseado no método da soma ponderada é implementada, onde um conjunto de frequências são consideradas na função objetivo. Os resultados são comparados com métodos que forçam a periodicidade, percebendo que, em relação à otimização normal, a adição da condição de periodicidade não reduziu significativamente o intervalo entre as frequências, mas gera uma maior redução de material, implicando em maior manufaturabilidade.

Com base no retrospecto exibido, é possível detectar que não existem pesquisas realizadas com aplicação dos métodos evolucionários de otimização topológica para maximização da separação de duas frequências adjacentes numa abordagem de projeto multiescala acoplada, ou seja, ainda não há um estudo que apresente o melhor leiaute da macro e da microestrutura, alcançados simultaneamente, capaz de aumentar a separação entre duas frequências consecutivas.

Além desse, outro ponto que necessita de investigações, é o de otimização estrutural topológica multiobjetivo, sendo eles de maximização da separação entre um par de

frequências baixas (e.g. $\omega_3 - \omega_2$) e maximização da separação entre um par de frequências altas (e.g. $\omega_9 - \omega_8$), de forma concomitante.

Dentro desse contexto, este trabalho se presta a preencher a lacuna dessa área de pesquisa, lançando luz sobre a separação de frequências monobjetivo e multiobjetivo em estruturas compostas por material único e por multimaterial. No Apêndice A é apresentada a revisão bibliográfica de forma gráfica, também é destacado o local que se insere este trabalho no atual contexto científico de pesquisa.

3 HOMOGENEIZAÇÃO

Estruturas hierárquicas envolvem uma estrutura que pode ser observada em escalas de diversos comprimentos, sendo que um elemento estrutural de uma certa escala é formado por subestruturas em uma escala menor, podendo ser periódicas.

Utilizando o método da homogeneização por meio de expansão assintótica é possível se chegar nas propriedades equivalentes de materiais com microestrutura periódica, partindo da teoria da elasticidade linear. O método se baseia na condição de que o tamanho de uma célula unitária periódica é muito menor que o tamanho representativo da estrutura global [Neves et al., 2000].

Segundo Allaire, 2002, o método de homogeneização se deu inicialmente por Murat e Tartar nos anos 70 na França. Além destes, vários outros pesquisadores juntaram esforços para o desenvolvimento do método, como os também franceses Cherkaev e Lurie, na Rússia Raitum e Kohn e Strang nos Estados Unidos.

No final da década de 80, Bendsøe e Kikuchi, 1988, demonstraram a eficiência do método em otimização, transformando o problema de otimização de forma em um problema de distribuição material, onde as variáveis de projeto determinam o leiaute de uma microestrutura associada às propriedades do material utilizado. Assim o objetivo está em procurar a melhor condição de distribuição da porosidade, para que o desempenho estrutural seja otimizado.

Hassani e Hinton, 1998a, explicam que a homogeneização assintótica repousa sobre uma teoria de limites aplicada na substituição de equações diferenciais cujos coeficientes levam à variações bruscas, sob o pressuposto de periodicidade usando a expansão assintótica, por equações diferenciais com coeficientes constantes ou quase constantes.

Conforme Hollister e Kikuchi, 1994, o método da homogeneização assintótica AH (*asymptotic homogenization*) se firma sobre três pilares. O primeiro diz que o deslocamento deve ser escrito sob a forma de expansão assintótica, o segundo que o material é dividido em duas escalas, micro e macro, e se correlacionam através de uma dimensão característica de heterogeneidade, e o terceiro que os deslocamentos nos limites da célula base tenham os mesmos valores em faces opostas da célula, o que define a periodicidade.

Este capítulo versa sobre a teoria do método da homogeneização, para o cálculo de efetivos parâmetros constitutivos, de materiais complexos com microestruturas periódicas, baseado nos trabalhos de Bendsøe e Kikuchi, 1988; Hollister e Kikuchi, 1992; e Hassani e

Hinton, 1998a, 1998b e 1999. Outros detalhes sobre o método e suas aplicações podem ser conferidos em Allaire, 2002, Bendsøe e Sigmund, 2003, Andreassen e Andreassen, 2014, entre outros.

3.1 Periodicidade e expansão assintótica

Um meio heterogêneo é dito ter uma periodicidade regular se as funções que denotam alguma propriedade física do meio (geométrica ou outra) satisfizerem a Equação (3.1).

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{N}\mathbf{Y}) = F(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

sendo $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$, o vetor posição \mathbf{e} , $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix}$, uma matriz diagonal 3×3 , com

números inteiros arbitrários. $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3]^T$ um vetor constante que indica os limites da estrutura em cada dimensão. As propriedades descritas na forma da função F , em um meio com distribuição periódica de heterogeneidades, se repetem para cada célula-base de dimensão \mathbf{Y} . F pode ser uma função escalar, vetorial, ou tensorial, correspondendo à posição do vetor \mathbf{x} , que indica a posição global. A Figura 3.1, ilustra um meio composto de célula \mathbf{Y} -periódica, que varia com um período \mathbf{Y} .

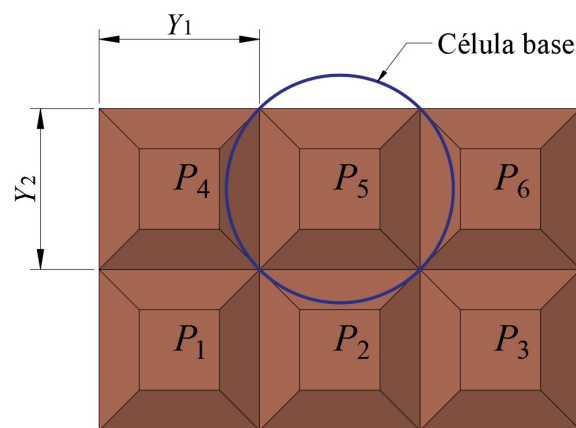


Figura 3.1 Ilustração de um meio periódico regular.

Segundo Hollister e Kikuchi, 1994, na teoria da homogeneização, \mathbf{Y} é assumido ser muito pequeno, comparado com as dimensões de todo o domínio. As funções características desse meio, altamente heterogêneo, terão uma variação brusca nas proximidades de \mathbf{x} . Esse

fato leva a consideração de duas escalas diferentes, de dependência para todo o domínio: um nível macroscópico, aonde há uma variação lenta, e outro microscópico, que descreve variações abruptas.

A razão entre o peso da unidade vetorial da coordenada microscópica, e o peso do vetor na unidade macroscópica, é dada pelo parâmetro δ , conforme Hollister e Kikuchi, 1992. Conhecido como dimensão característica da heterogeneidade, deve ser considerado suficientemente pequena. A Figura 3.2 ilustra os comportamentos global e local ampliado, de uma função $F(\mathbf{x})$ arbitrária periódica regular, que se torna também dependente da variável local, a partir da relação: $F(\mathbf{x}) = F(\delta \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

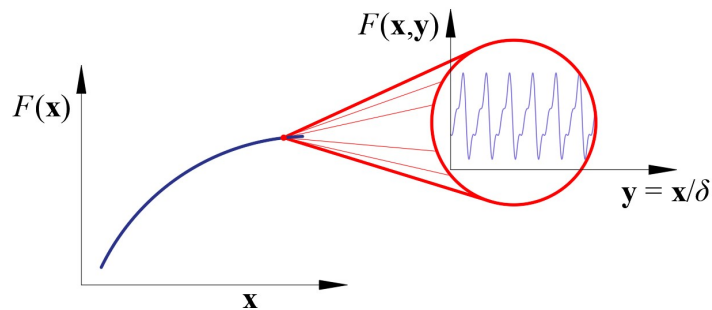


Figura 3.2 Comportamentos global e local ampliado, de uma função F arbitrária periódica regular.

A magnitude de $1/\delta$ pode ser quantificada através do fator que amplia as dimensões da célula base para ser comparada com a dimensão do material, conforme ilustrado na Figura 3.3.

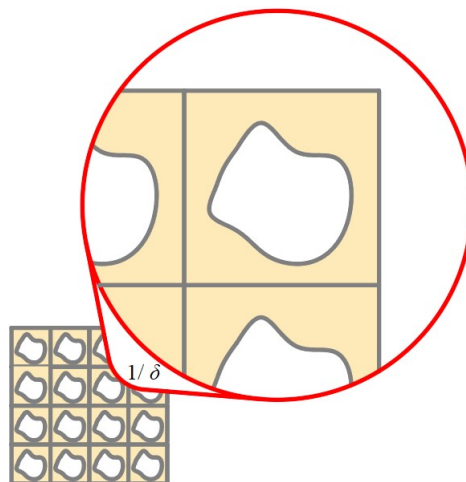


Figura 3.3 Dimensão característica de não-homogeneidade em escala local expandida.

Na técnica das duas escalas, a equação diferencial parcial do problema possui coeficientes do tipo: $F(\mathbf{x} / \delta)$ ou $F(\mathbf{y})$, onde $F(\mathbf{y})$ é a função periódica desses argumentos. O correspondente problema de valor de contorno pode ser tratado pela expansão assintótica da solução em termos de potências do parâmetro δ .

Considerando o sistema de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ em \mathbb{R}^3 , definido o domínio (Ω) do problema do material composto, assumindo periodicidade, o domínio pode ser considerado com a junção de células paralelas de idêntica dimensão. $\delta Y_1, \delta Y_2, \delta Y_3$, onde Y_1, Y_2 e Y_3 são os lados da célula base no sistema de coordenadas local (micro) $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) = \mathbf{x} / \delta$. Para um \mathbf{x} fixo no nível macroscópico, a dependência de \mathbf{y} pode ser considerada Y -periódica. Além disso é assumido que a forma e composição da célula base variam de forma suave com a variável macroscópica \mathbf{x} , isso significa que em diferentes pontos, a estrutura pode variar, mas olhando em uma escala microscópica no ponto \mathbf{x} , é encontrado um padrão periódico.

As funções que determinam o comportamento do composto pode ser expandida como: $F^\delta(\mathbf{x}) = F^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta F^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta^2 F^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots$, onde $\delta \rightarrow 0$ e as funções $F^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $F^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ... são consideradas suaves em nível macroscópico e periódicas em nível microscópico, assumindo valores iguais nos lados opostos e paralelos da célula base.

3.2 Problema geral de valor de contorno

Vários sistemas físicos, os quais não mudam com o tempo, por vezes chamados de problemas de estado estacionários, podem ser modelados por equações elípticas. Como um problema geral, aplica-se a equação do divergente elíptico num meio não homogêneo, com estrutura regular.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, um meio ilimitado composto por células unitárias \mathbf{Y} , $\mathbf{D}_{jl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y})$ um tensor de segunda ordem, aonde $\mathbf{y} = \mathbf{x} / \delta$ e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, e as funções \mathbf{D}_{jl} são periódicas nas variáveis espaciais $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. O problema de segunda ordem de valor de contorno pode ser tratado conforme as Equações (3.2) e (3.3):

$$\nabla^\delta(u^\delta) = -f \text{ em } \Omega, \quad (3.2)$$

$$u^\delta = 0 \text{ em } \Gamma_d, \quad (3.3)$$

sendo \mathcal{T} um operador diferencial elíptico de segunda ordem. A variável independente escalar u representada o campo de deslocamento, restrito ao longo do domínio local Γ_d , e f é uma função definida, que corresponde a uma dada componente da força de corpo que atua ao longo domínio global da estrutura em Ω .

Um problema de valor de contorno de segunda ordem também pode ser escrito como na Equação (3.4).

$$\mathcal{T}^\delta = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}_{jl} \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\delta} \right) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \quad (3.4)$$

onde o sobrescrito δ é usado para mostrar a dependência do operador e da solução para a dimensão característica não homogênea.

3.3 Análise da microestrutura

Conforme Hollister e Kikuchi, 1992, Usando uma expansão assintótica é possível se obter a variável u como mostra a Equação (3.5), em que y representa a variável espacial da escala micro e x da escala macroscópica:

$$u^\delta(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta^1 u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta^2 u^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.5)$$

A partir da Equação (3.4), e aplicando a regra da cadeia se alcança a Equação (3.6).

$$\mathcal{T}^\delta = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \quad (3.6)$$

Como y é função de \mathbf{x} , a Equação (3.6) pode ser reescrita na forma da Equação (3.7), conforme observado em Hollister e Kikuchi, 1992.

$$\mathcal{T}^\delta = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \quad (3.7)$$

Substituindo as Equações (3.5) e (3.7) na Equação (3.2), obtém-se a Equação (3.8).

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^0}{\partial x_l} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^0}{\partial x_l} \right) + \delta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^1}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^1}{\partial x_l} \right) + \\
& + \delta^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^2}{\partial x_l} \right) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^2}{\partial x_l} \right) = -f
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Expandido o a Equação (3.8), se alcança a Equação (3.9).

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^0}{\partial x_l} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^0}{\partial x_l} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^0}{\partial x_l} \right) + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^0}{\partial y_l} \right) + \\
& + \delta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^1}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^1}{\partial y_l} \right) + \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^1}{\partial x_l} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^1}{\partial y_l} \right) + \\
& \delta^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^2}{\partial x_l} \right) + \delta \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^2}{\partial y_l} \right) + \delta \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^2}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial u^2}{\partial y_l} \right) = -f
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Os operadores elípticos Υ^1 , Υ^2 e Υ^3 podem ser definidos com notação compacta, conforme as Equações (3.10), (3.11) e (3.12), respectivamente.

$$\Upsilon^1 = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \tag{3.10}$$

$$\Upsilon^2 = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \tag{3.11}$$

$$\Upsilon^3 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}^{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \tag{3.12}$$

Com o uso das Equações (3.2), (3.5), (3.10), (3.11), (3.12), a Equação (3.9) , pode ser reescrita como na Equação (3.13):

$$\begin{aligned}
& \delta^2 \Upsilon^3(u^2) + \delta [\Upsilon^3(u^0) + \Upsilon^3(u^2)] + \Upsilon^3(u^0) + \Upsilon^2(u^1) + \Upsilon^1(u^2) + \\
& + \frac{1}{\delta} [\Upsilon^2(u^0) + \Upsilon^1(u^1)] + \frac{1}{\delta^2} \Upsilon^2(u^0) = \delta^2 \cdot 0 + \delta \cdot 0 - f + \frac{1}{\delta} \cdot 0 - \frac{1}{\delta^2} \cdot 0
\end{aligned} \tag{3.13}$$

e pelo equacionamento dos termos de mesma potência do δ , obtêm-se as Equações (3.14), (3.15) e (3.16):

$$\mathcal{Y}^1(u^0) = 0 \quad (3.14)$$

$$\mathcal{Y}^2(u^0) + \mathcal{Y}^1(u^1) = 0 \quad (3.15)$$

$$\mathcal{Y}^3(u^0) + \mathcal{Y}^2(u^1) + \mathcal{Y}^1(u^2) = -f \quad (3.16)$$

Com x e y consideradas variáveis independentes, essas equações formam um sistema de equações diferenciais com a função u^0 , u^1 e u^2 parametrizada por \mathbf{x} .

Solução única para uma equação \mathbf{Y} -periódica

Para a função \mathbf{Y} -periódica escrita na Equação (3.17), u^\dagger têm uma única solução, considerando a Equação (3.18).

$$\mathcal{Y}^1 u^\dagger = P^\dagger \quad (3.17)$$

$$P = \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}_s} P^\dagger \, d\mathbf{y} = 0 \quad (3.18)$$

onde $|\mathbf{Y}|$ representa o volume da célula base microestrutural.

Considerando as Equações (3.17) e (3.18), onde $P = 0$ implica em $P^\dagger = 0$, conclui-se que a Equação (3.14) possui solução única, i.e., pois $u^0 = f(\mathbf{x})$ e, portanto, $u^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u^0(\mathbf{x})$, provando a dependência do primeiro termo da expansão assintótica do campo de deslocamento u exclusivamente da escala macroscópica \mathbf{x} , conforme indicado na Equação (3.19).

$$u^0 = u(\mathbf{x}) \quad (3.19)$$

que, substituindo na Equação (3.15), pode ser simplificada e apresenta uma relação diferencial entre as parcela u^1 e u^0 conforme mostra a Equação (3.20). Como u^0 é uma constante em relação a escala macroscópica y , o primeiro termo da equação será nulo.

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial y_l} \right)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u^1}{\partial y_l} \right) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u^1}{\partial y_l} \right) = - \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \right) \\
& \frac{\partial u^1}{\partial y_l} = - \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \\
& \Upsilon^1 u^1 = - \Upsilon^2 u^0 = - \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial u^1}{\partial y_l}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Conforme Bourgat, 1977, o desacoplamento do problema entre as duas escalas, macro e microscópica é realizado com uma função escalar $\mathcal{Q}^j(\mathbf{y})$ definida como sendo a resposta do sistema - variável independente u , sobre as condições de contorno estabelecidas. Partindo de um operador bilinear \mathcal{O} , correspondente à forma fraca da função ao qual é aplicada, dado pela Equação (3.21), onde κ e ζ são duas funções quaisquer da microescala \mathbf{y} .

$$\mathcal{O}(\kappa, \zeta) = \int_Y \mathbf{D}_{jl} \frac{\partial \kappa}{\partial y_j} \frac{\partial \zeta}{\partial y_l} dY \tag{3.21}$$

O emprego de $\mathcal{Q}^j(\mathbf{y})$ se justifica para construir uma relação em $u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, podendo ser obtida com a solução da Equação (3.22), onde ψ representa uma função de ponderação.

$$\mathcal{O}(\mathcal{Q}^j - y, \psi) = 0 \quad \forall \psi \tag{3.22}$$

A Equação (3.22) também pode ser mostrada como na Equação (3.23).

$$\int_Y \mathbf{D}_{kl} \frac{\partial \mathcal{Q}^j}{\partial y_k} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} dY - \int_Y \mathbf{D}_{jl} \frac{\partial \psi}{\partial y_l} dY = 0 \tag{3.23}$$

Considerando-se $\mathcal{Q}^j(\mathbf{y})$ uma função Y -periódica, onde Y é o próprio volume da célula unitária, decorrem as seguintes relações mostradas nas Equações (3.24) e (3.25).

$$\int_Y \mathcal{Q}^j(\mathbf{y}) dY = 0 \tag{3.24}$$

$$\int_Y \frac{\partial \mathcal{Q}^j(\mathbf{y})}{\partial y} dY = 0 \quad (3.25)$$

Aplicando o operador elíptico Υ^1 no operador bi linear $\mathcal{Q}^j(\mathbf{y})$, seguindo a Equação (3.20), alcança-se uma nova relação com a Equação (3.26).

$$\Upsilon^1(\mathcal{Q}^j) = \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\mathbf{D}_{kl} \frac{\partial \mathcal{Q}^j(\mathbf{y})}{\partial y_l} \right) = \frac{\partial \mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y})}{\partial y_j} \quad (3.26)$$

A relação de $u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ é determinada na Equação (3.27), obtida reescrevendo a Equação (3.26) e aplicando duas integrações sobre a célula periódica Y .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}_{jl} \frac{\partial u^1}{\partial y_l} \right) &= - \frac{\partial u^0}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{D}_{kl} \frac{\partial \mathcal{Q}^j(\mathbf{y})}{\partial y_k} \right) \\ \mathbf{D}_{jl} \frac{\partial u^1}{\partial y_l} &= - \frac{\partial u^0}{\partial x_i} \mathbf{D}_{kl} \frac{\partial \mathcal{Q}^j(\mathbf{y})}{\partial y_k} + \theta(\mathbf{x}) \\ u^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= - \mathcal{Q}^j(\mathbf{y}) \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \tilde{\theta}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Onde $\mathcal{Q}^j(\mathbf{y})$ é a solução Y -periódica da Equação (3.26), e $\theta(\mathbf{x})$ é uma constante proveniente da integração realizada em Y .

Retomando à Equação (3.19), para u^2 tendo \mathbf{x} como parâmetro. Ponderando uma solução única para uma equação Y -periódica, considerando a Equação (3.28).

$$- \frac{1}{|Y|} \int_Y (\Upsilon^2 u^1 + \Upsilon^3 u^2) dY + f = 0 \quad (3.28)$$

Combinando as Equações (3.27) e (3.28), chega-se a Equação homogeneizada (3.29), para $u(\mathbf{x})$.

$$\mathbf{D}_{jl}^H \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_l} = -f \text{ em } \Omega \quad (3.29)$$

onde, na Equação (3.30),

$$\mathbf{D}_{mn}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(\mathbf{D}_{mn}(\mathbf{y}) + \mathbf{D}_{jl}(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathcal{Q}^j(\mathbf{y})}{\partial y_l} \right) d\mathbf{y} \quad (3.30)$$

Passa-se a ter duas diferentes equações a serem resolvidas: determinar $\mathcal{Q}^j(\mathbf{y})$ da Equação (3.26), resolvido na célula base; resolve-se a Equação (3.29), com $u = 0$ em Γ_d , e os coeficientes homogeneizados \mathbf{D}_{mn}^H são obtidos da Equação (3.30).

3.4 Problema geral de elasticidade

Dado o problema de elasticidade construído a partir de um material com um corpo poroso com uma microestrutura celular periódica, forças de corpo \mathbf{f} e tração \mathbf{t} são aplicadas. Ω é assumido como um subconjunto aberto de \mathbb{R}^3 com uma fronteira suave em Γ compreendendo Γ_d , onde os deslocamentos são prescritos, e Γ_t onde as trações são prescritas. A célula base do corpo celular \mathbf{Y} é ilustrada na Figura 3.4. \mathbf{Y} é assumido como um domínio retangular aberto em \mathbb{R}^3 , definido como $\mathbf{Y} =]0, Y_1[\times]0, Y_2[\times]0, Y_3[$, possuindo um furo v , o contorno de v é definido como s ($\partial v = s$), assumido ser suave, podendo as trações \mathbf{p} existirem dentro dos furos.

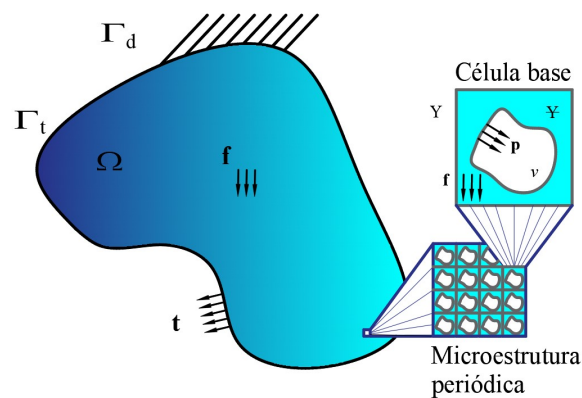


Figura 3.4 Problema de elasticidade em um corpo celular com sua célula

A parte sólida da célula é denotada por \mathbb{Y} , portanto, a parte sólida do domínio pode ser definida como $\Omega_\delta = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid (\mathbf{y} = \mathbf{x}/\delta) \in \mathbb{Y}\}$, e $S^\delta = \bigcup_{i=1}^{\text{todas células}} s_i$.

Considerando as relações de tensão-deformação e deformação-deslocamento, Equações (3.31) e (3.32), respectivamente, o deslocamento virtual pode ser construído pela Equação (3.33).

$$\sigma_{ij}^\delta = E_{ijkl}^\delta e_{kl}^\delta \quad (3.31)$$

$$e_{kl}^\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^\delta}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^\delta}{\partial x_k} \right) \quad (3.32)$$

$$\int_{\Omega_\delta} E_{ijkl}^\delta \frac{\partial u_k^\delta}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega_\delta} f_i^\delta v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma + \int_{S_\delta} p_i^\delta v_i dS, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}^\delta \quad (3.33)$$

onde $\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega_\delta)]^3 \text{ e } \mathbf{v}|_{\Gamma_d} = 0\}$, e H^1 é um espaço de Sobolev.

$H^1(\Omega_\delta)$ é definido como $\{w(\mathbf{x}) \mid w(\mathbf{x}) \in L_2(\Omega_\delta) \text{ e } \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x_i} \in L_2(\Omega_\delta)\}$.

Sendo $L_2(\Omega_\delta) = \{w(\mathbf{x}) \mid \int_{\Omega_\delta} [w(\mathbf{x})]^2 < \infty \text{ e } \mathbf{x} \in \Omega_\delta\}$, assume-se: $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij}$,

$\exists D > 0 : E_{ijkl}^\delta e_{kl} = D e_{ij}, \forall e_{ij} = e_{ji}$.

Aplicando a função assintótica em duas escalas, e as regras de derivação indireta (Apêndice B) na Equação (3.33), chega-se à Equação (3.34).

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\delta} E_{ijkl} \left\{ \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial u_k^0}{\partial g_l} \frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{1}{\delta} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] + \right. \\ & \left. + \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] + \delta(\dots) \right\} d\Omega \\ & = \int_{\Omega_\delta} f_i^\delta v_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma + \int_{S_\delta} p_i^\delta v_i dS, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\Omega \times \mathbf{Y}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde $\mathbf{V}_{\Omega \times \mathbf{Y}} = \{v(\mathbf{x}, \mathbf{y}); (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \mathbf{Y} \mid v(\cdot, \mathbf{y}) \text{ Y-periódica; } v \text{ suficientemente suave e } v|_{\Gamma_d} = 0\}$.

Similarmente \mathbf{V}_Ω e $\mathbf{V}_\mathbf{Y}$ são definidos como: $\mathbf{V}_\Omega = \{v(\mathbf{x}) \text{ definido em } \Omega \mid v \text{ suficientemente suave e } v|_{\Gamma_d} = 0\}$ e $\mathbf{V}_\mathbf{Y} = \{v(\mathbf{y}) \text{ definido em } \mathbf{Y} \mid v(\mathbf{y}), \text{ Y-periódica suficientemente diferenciável}\}$.

Para uma função $\varphi(\mathbf{y})$ Y-periódica, quando $\delta \rightarrow 0$, emprega-se as Equações (3.35) e (3.36).

$$\int_{\Omega_\delta} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) d\Omega = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} \varphi(\mathbf{y}) dY d\Omega \quad (3.35)$$

$$\int_{S_\delta^s} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right) d\Omega = \frac{1}{\delta|Y|} \int_{\Omega} \int_s \varphi(\mathbf{y}) dS d\Omega \quad (3.36)$$

Assumindo que as funções são todas suavizadas, quando $\delta \rightarrow 0$, todas as integrais existem. Equacionando os termos de mesma potência em δ , chega-se as Equações (3.37), (3.38) e (3.39).

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dY d\Gamma = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\Omega \times \mathbb{Y}} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dY \right\} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_s p_i v_i dS \right) d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\Omega \times \mathbb{Y}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] dY \right\} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} f_i v_i dY \right) d\Omega + \int_{\Gamma_i} t_i v_i d\Gamma, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\Omega \times \mathbb{Y}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sendo \mathbf{v} uma função arbitrária, aplica-se $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{y})$ (i.e. $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathbb{Y}}$). Integrando por partes e aplicando o teorema da divergência para a integral em \mathbb{Y} , e usando a periodicidade da Equação (3.37), obtém-se a Equação (3.40).

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \left\{ \int_{\mathbb{Y}} \left[-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right) \right] v_i dY + \int_s \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} n_j \right) v_i dS \right\} d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \quad (3.40)$$

sendo v arbitrário, resulta nas Equações (3.41) e (3.42).

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right) = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \quad (3.41)$$

$$E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} n_j = 0 \text{ em } s \quad (3.42)$$

Considerando que há solução única para uma equação Y -periódica, na Equação (3.41), chega-se a Equação (3.43).

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u^0(\mathbf{x}) \quad (3.43)$$

Isso significa que o primeiro termo da expansão assintótica depende apenas da escala macroscópica \mathbf{x} .

Como v é uma função arbitrária, considerada $v = v(\mathbf{x})$ (i.e. v é somente uma função de \mathbf{x}), dessa forma, a partir da Equação (3.38), conclui-se a Equação (3.44).

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{|Y|} \int_s p_i \, ds \right) v_i(\mathbf{x}) \, d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\Omega} \quad (3.44)$$

o qual implica que (Equação (3.45)):

$$\int_s p_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, ds = 0 \quad (3.45)$$

Por outro lado, introduzindo a Equação (3.43), na Equação (3.38), e aplicando $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{y})$, é obtida a Equação (3.46).

$$\int_{\mathbf{Y}} E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_l} \, dY = \int_s p_i v_i \, ds, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathbf{Y}} \quad (3.46)$$

Fazendo a integração por partes, usando o teorema da divergência, e aplicando as condições de periodicidade nas faces opostas em Y :

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathfrak{Y}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \right] v_i \, dY + \int_s E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) v_i n_j \, ds \\
= \int_s p_i v_i \, ds, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathfrak{Y}}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Sendo \mathbf{v} , arbitrário, conclui-se que:

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(E_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) = \frac{\partial}{\partial y_j} E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l}, \text{ em } \mathfrak{Y} \tag{3.48}$$

$$E_{ijkl} \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} = -E_{ijkl} \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} n_j + p_i, \text{ em } s \tag{3.49}$$

Considerando a Equação (3.39), e aplicando $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, resulta em um estado de equilíbrio no nível macroscópico, conforme a Equação (3.50).

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{\mathfrak{Y}} E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) dY \right] \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega \\
= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{\mathfrak{Y}} f_i \, dY \right] v_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_i v_i(\mathbf{x}) \, d\Gamma, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\Omega}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Uma vez assumido $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{y})$ na Equação (3.39), chega-se na Equação que representa o equilíbrio da célula base no nível microscópico:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{\mathfrak{Y}} E_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY \right] d\Omega \\
= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{\mathfrak{Y}} f_i v_i(\mathbf{y}) \, dY \right] d\Omega, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathfrak{Y}}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

O procedimento mostrado até o momento pode ser aplicado para termos mais de alta ordem da expansão. Segundo Bourgat, 1977, neste caso, os termos de primeira ordem são suficientes. O comportamento mecânico macroscópico é representado por u^0 , e u^1 representa o comportamento mecânico microscópico.

O objetivo é encontrar as constantes elásticas homogeneizadas, de tal forma que a equação de equilíbrio possa ser construída no sistema de coordenadas macroscópicas. As

constantes homogeneizadas devem ser tais, de forma que a equação de equilíbrio correspondente reflita o comportamento mecânico da microestrutura do material celular, sem usar explicitamente o parâmetro δ . Dessa forma, considera-se novamente a Equação (3.46). Sendo ela linear com relação aos parâmetros u^0 e \mathbf{p} , tem-se:

(i) Sendo $\mathcal{Q}^{kl} \in \mathbf{V}_{\mathfrak{Y}}$, como solução da Equação (3.52).

$$\int_{\mathfrak{Y}} E_{ijpq} \frac{\partial \mathcal{Q}_p^{kl}}{\partial y_q} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY = \int_{\mathfrak{Y}} E_{ijkl} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathfrak{Y}} \quad (3.52)$$

(ii) e $\varphi \in \mathbf{V}_{\mathfrak{Y}}$ solução da Equação (3.53).

$$\int_{\mathfrak{Y}} E_{ijkl} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_l} \frac{\partial v_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} dY = \int_s p_i v_i(\mathbf{y}) dY, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathfrak{Y}} \quad (3.53)$$

Considerando \mathbf{x} como um parâmetro, a Equação (3.54) pode ser solução de u^1 , onde \tilde{u}_i^1 é uma constante arbitrária de integração em \mathbf{y} .

$$u_i^1 = -\mathcal{Q}_i^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} - \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \tilde{u}_i^1(\mathbf{x}) \quad (3.54)$$

Introduzindo a Equação (3.54), na Equação (3.50), produz-se a Equação (3.55).

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{\mathfrak{Y}} \left(E_{ijkl} - E_{ijpq} \frac{\partial \mathcal{Q}_p^{kl}}{\partial y_q} \right) dY \right] \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{\mathfrak{Y}} E_{ijkl} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_l} dY \right] \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{\mathfrak{Y}} f_i dY \right] v_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i(\mathbf{x}), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\Omega} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Evidenciando alguns elementos da (3.55), tem-se as Equações (3.56), (3.57) e (3.58), em que E_{ijkl}^H representa a constante elástica homogeneizada, τ_{ij} representa as tensões residuais média dentro da célula, devido às trações \mathbf{p} dentro dos furos, e b_i as forças de corpo média.

$$D_{ijkl}^H(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_{\mathfrak{Y}} \left(E_{ijkl} - E_{ijpq} \frac{\partial \mathcal{Q}^{kl}}{\partial y_p} \right) dY \quad (3.56)$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\mathfrak{Y}} E_{ijkl} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_l} dY \quad (3.57)$$

$$b_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_{\mathfrak{Y}} f_i dY \quad (3.58)$$

A Equação (3.55) pode ser reescrita como na Equação (3.59), que muito se assemelha a Equação (3.33), e representa o equilíbrio macroscópico.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_{ijkl}^H \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega &= \int_{\Omega} \tau_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} b_i(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i(\mathbf{x}) d\Gamma, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\Omega} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Os problemas microscópicos e macroscópicos não são acoplados, e para se obter a solução do problema de elasticidade deve se encontrar \mathcal{Q} e φ dentro da célula base, resolvendo as Equações (3.52) e (3.53), encontrar a matriz dos coeficientes elásticos, com o uso das Equações (3.56), (3.57) e (3.58), e construir a Equação (3.59), nas coordenadas macroscópicas.

Se todo o domínio do material celular for constituído por uma estrutura celular uniforme, assim como as aplicações de trações no limite dos furos das células, será necessário resolver as Equações microscópicas (3.52) e (3.53) uma única vez. Caso contrário as equações devem ser resolvidas para todo ponto \mathbf{x} em Ω .

3.5 Solução das equações de homogeneização

A teoria da homogeneização é utilizada para se determinar a propriedade mecânica macroscópica do material. Usualmente é resolvida empregando métodos numéricos, como elementos finitos.

Após a determinação e discretização do domínio de referência com elementos finitos, assume-se que cada elemento consiste de um material celular, com microestrutura

específica. Os parâmetros geométricos dessa microestrutura são as variáveis de projeto do problema de otimização.

O problema é resolvido num domínio fixo, não necessitando de alteração no modelo durante a análise, com o tensor das propriedades elásticas tido conforme Equação (3.60).

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & E_{1212} \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \quad (3.60)$$

Contudo, como não há restrição das topologias utilizadas na célula unitária, as microestruturas podem não apresentar dois planos de simetria (ortotrópica). Nesses casos, a matriz das propriedades homogeneizadas obtida é anisotrópica e, para um problema bidimensional, pode ser escrita conforme a Equação (3.61) [Calixto, 2015].

$$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} D_{1111}^H & D_{1122}^H & D_{1112}^H \\ D_{1122}^H & D_{2222}^H & D_{2212}^H \\ D_{1112}^H & D_{2212}^H & D_{1212}^H \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Em materiais ortotrópicos $D_{1112}^H = D_{2212}^H = 0$

A característica microscópica do campo de deslocamento ξ^{kl} , é uma solução Y-periódica da Equação (3.52), sendo aplicada na Equação (3.56), para se alcançar os efetivos coeficientes de elasticidade. A obtenção dos termos da matriz elástica homogeneizada se dá expandindo as equações com diferentes valores para os índices, que em problemas 2D são considerados $ijkl = 1$ ou 2 . Considerou-se: **caso (a)** $k = l = 1$; **caso (b)** $k = l = 2$; **caso (c)** $k = 1, l = 2$.

Caso (a): $k = l = 1$

A expansão da Equação (3.52), resulta na Equação (3.62).

$$D_{1111}^H = \int_Y \left(E_{1111} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} E_{1122} \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right) dY \quad (3.62)$$

Considerando $i = j = 1$, da Equação (3.56) se obtém a Equação (3.63).

$$D_{1111}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{1111} - E_{1111} \frac{\partial \mathcal{Q}_1^{11}}{\partial y_1} - E_{1122} \frac{\partial \mathcal{Q}_2^{11}}{\partial y_2} \right) dY \quad (3.63)$$

Para $i = j = 2$, da Equação (3.56) se obtém a Equação (3.64).

$$D_{2211}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{2211} - E_{2211} \frac{\partial \mathcal{Q}_1^{11}}{\partial y_1} - E_{2222} \frac{\partial \mathcal{Q}_2^{11}}{\partial y_2} \right) dY \quad (3.64)$$

Caso (b): $k = l = 2$

Seguindo o caso anterior, a Equação (3.52) resulta na Equação (3.65).

$$D_{1122}^H = \int_Y \left(E_{1122} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + E_{2222} \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right) dY \quad (3.65)$$

Para $i = j = 1$, da Equação (3.56) se obtém a Equação (3.66).

$$D_{1122}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{1122} - E_{1111} \frac{\partial \mathcal{Q}_1^{22}}{\partial y_1} - E_{1122} \frac{\partial \mathcal{Q}_2^{22}}{\partial y_2} \right) dY \quad (3.66)$$

Se $i = j = 2$, da Equação (3.56) se obtém a Equação (3.67).

$$D_{2222}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(E_{2222} - E_{2211} \frac{\partial \mathcal{Q}_1^{22}}{\partial y_1} - E_{2222} \frac{\partial \mathcal{Q}_2^{22}}{\partial y_2} \right) dY \quad (3.67)$$

Caso (c): $k = 1, l = 2$

Similarmente, a Equação (3.52) resulta na Equação (3.68).

$$D_{1212}^H = \int_Y \left(E_{1212} \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \right) dY \quad (3.68)$$

Para $i = 1$ e $j = 2$, da Equação (3.56) se obtém a Equação (3.69).

$$D_{1212}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(1 - \frac{\partial \mathcal{Q}_1^{12}}{\partial y_2} - \frac{\partial \mathcal{Q}_2^{12}}{\partial y_1} \right) dY \quad (3.69)$$

Escrevendo as Equações (3.63), (3.66), (3.67) e (3.69) na forma matricial e aplicando o método dos elementos finitos à nível elementar, obtém-se as Equações (3.70), (3.71), (3.72) e (3.73) já de forma simplificada, onde \mathbf{b}_e é a matriz elementar de deformações, enquanto \mathbf{u}_e é o campo de deslocamentos elementar.

$$D_{1111}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y (E_{1111} - \mathbf{e}_1^T \mathbf{b}_e \mathbf{u}_e) dY \quad (3.70)$$

$$D_{1122}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y (E_{1122} - \mathbf{e}_1^T \mathbf{b}_e \mathbf{u}_e) dY \quad (3.71)$$

$$D_{2222}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y (E_{2222} - \mathbf{e}_2^T \mathbf{b}_e \mathbf{u}_e) dY \quad (3.72)$$

$$D_{1212}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y (E_{1212} - \mathbf{e}_3^T \mathbf{b}_e \mathbf{u}_e) dY \quad (3.73)$$

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA MÉTODO BESO

Neste capítulo consta a fundamentação teórica do método BESO para estruturas sujeitas a vibrações livres não amortecidas, composta por material único e múltiplos materiais, com a finalidade de empregar o procedimento em um sistema de otimização estrutural topológica multiescala acoplado. São abordados aspectos como interpolação das propriedades materiais, análise da sensibilidade, efeito tabuleiro de xadrez e dependência de malha, critério de parada e implementação computacional. Nas referências indicadas ao longo do texto, podem ser encontrados maiores detalhes sobre cada item abordado.

4.1 BESO para otimização da frequência natural

Versões mais recentes do método BESO tem alcançado bons resultados em otimização computacional, não apenas para problemas de minimização da flexibilidade média estrutural, mas também em problemas relacionados a vibrações. Em ambos os casos os algoritmos se assemelham, mas com a mudança da função objetivo, torna-se necessário inserir os dados da matriz de massa da estrutura, o que gera um acréscimo dessa variável também ao se analisar a sensibilidade da função no processo de otimização. Além disso, segundo Sepulveda, 1995, passa-se a trabalhar com uma função de comportamento não monótono.

O comportamento de um sistema não amortecido com carregamento dinâmico pode ser analisado pela Equação (4.1).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.1)$$

onde, \mathbf{M} representa a matriz de massa, $\ddot{\mathbf{u}}$ o vetor aceleração, \mathbf{u} o vetor deslocamento, \mathbf{K} a matriz de rigidez e \mathbf{f} o vetor de forças externas.

Assumindo o carregamento igual a zero (sistema homogêneo), a Equação (4.1) pode ser escrita como na Equação (4.2), definindo ω como a frequência natural de vibração, e \mathbf{u} o autovetor correspondente.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

Trata-se de um problema geral de autovalores, sendo utilizada para a otimização da frequência natural, uma vez que a k -ésima frequência natural ω_k e seu correspondente autovetor \mathbf{u}_k podem ser relacionados através do quociente de Rayleigh, conforme a Equação (4.3).

$$\omega_k^2 = \frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{K} \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k} \quad (4.3)$$

A aplicação do método BESO para maximização da k -ésima frequência natural, objetiva encontrar a melhor topologia numa dada estrutura sujeita a um volume prescrito. Dessa forma num projeto de sólido-vazio, o problema de otimização pode ser representado pelas Equações (4.4) - (4.7).

$$\text{Encontrar: } \mathbf{x} \mid x_i = x_{min} \vee 1 \quad (4.4)$$

$$\text{Que maximize: } \omega_k \quad (4.5)$$

$$\text{Sujeito à: } Volfrac - \sum_{i=1}^N x_i V_i = 0 \quad (4.6)$$

$$(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

onde a variável \mathbf{x} descreve o leiaute do macromodelo, composto de x_i que é a variável de projeto binária do i -ésimo elemento, e x_{min} (e.g. 10^{-3}) usada para denotar um elemento vazio. $Volfrac$ é o volume prescrito, N o número total de elementos na estrutura e V_i o volume do i -ésimo elemento.

4.1.1 Interpolação das propriedades materiais

A fim de se obter o gradiente da variável de projeto, torna-se necessário interpolar o material entre x_{min} e 1. Dentre os métodos de interpolação, o SIMP, desenvolvido de forma independente por Bendsøe, 1989, e Zhou e Rozvany, 1991, detém destaque na indústria e no meio acadêmico. Detalhes adicionais sobre formas de penalização, assim como outros métodos, podem ser conferidos em Sigmund, 2007; Deaton e Grandhi, 2014, entre outros.

Para o projeto sólido-vazio, conforme Bendsøe e Sigmund, 2003, a massa específica do material (ρ) e o módulo de Young (E) são funções da variável elementar de projeto x_i , conforme as Equações (4.8) e (4.9), respectivamente.

$$\rho(x_i) = x_i \rho^0 \quad (4.8)$$

$$E(x_i) = x_i^p E^0 \quad (4.9)$$

onde, ρ^0 e E^0 são densidade e módulo de elasticidade na condição inicial, respectivamente. p é o fator de penalização e $0 < x_{min} \leq x_i \leq 1$. O valor mínimo é requerido para evitar problemas numéricos associados com o valor zero; as dificuldades incluem matrizes singulares, e em alguns casos, a incapacidade do material em reocupar uma área com densidade zero.

Para diferentes tipos de aplicações em otimização topológica, como de vibrações, transferência de calor, fluxo eletromagnético, entre outros, são requeridas variações nos métodos de interpolação que compreendam as nuances dos problemas físicos em análise [Deaton e Grandhi, 2014].

As Equações (4.8) e (4.9) do método SIMP, não devem ser diretamente aplicadas em problemas de otimização da frequência, pois para pequenos valores de x_i (em que $p > 1$), surgem modos artificiais localizados nas regiões de baixa densidade [Huang e Xie, 2010a]. Uma solução proposta está em fazer a razão entre a massa e a rigidez constante, conforme as Equações (4.10) e (4.11), quando $x_i = x_{min}$.

$$\rho(x_{min}) = x_{min} \rho^0 \quad (4.10)$$

$$E(x_{min}) = x_{min} E^0 \quad (4.11)$$

Em decorrência, outro esquema de interpolação do material pode ser expresso empregando as Equações (4.8), para a densidade do material, e (4.12) para o módulo de elasticidade, conforme Huang e Xie, 2010.

$$E(x_i) = \left[\frac{x_{min} - x_{min}^p}{1 - x_{min}^p} (1 - x_i^p) + x_i^p \right] E^0 \quad (4.12)$$

Na Figura 4.1 se observa curvas de penalização referente a Equação (4.12), $(E(x_i)/E^0)$.

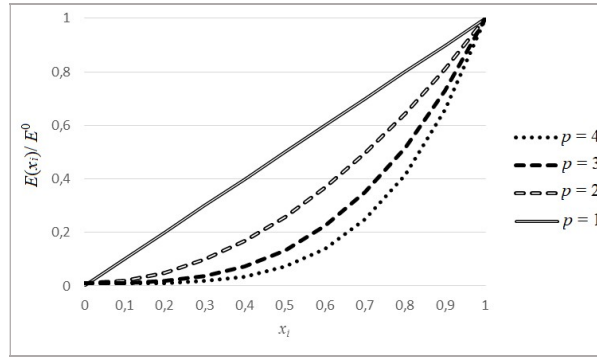


Figura 4.1 Curvas de penalização para $x_{min} = 0,01$.

Ao derivar a matriz global de massa \mathbf{M} em relação a variável de projeto x_i , obtém-se uma matriz com apenas os termos de matriz de massa elementar \mathbf{M}_e , Equação (4.13). Por sua vez, os termos da matriz de rigidez elementar \mathbf{K}_{ei} aparecem derivados da Equação (4.12) com respeito à x_i , sendo obtida a Equação (4.14) (ver Apêndice B).

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} = \mathbf{M}_{e_i} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = p x_i^{(p-1)} \frac{1 - x_{min}}{1 - x_{min}^p} \mathbf{K}_{e_i} \quad (4.14)$$

4.1.2 Análise da sensibilidade

Para se determinar a modificação da estrutura, é realizada uma análise do comportamento da função objetivo diante da remoção ou adição dos elementos. Para tanto, é calculada a derivada desta função em relação a cada variável elementar, as quais são tratadas como variáveis de projeto. A derivada representa a variação do valor da k -ésima frequência natural de vibração da estrutura, que ocorre quando um dado elemento é removido ou adicionado.

Partindo da Equação (4.5), e simplificando com base na Equação (4.2), se obtém a Equação (4.15).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} &= \frac{1}{2\omega_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k} \left\{ \left[2 \frac{\partial \mathbf{u}_k^T}{\partial x_i} \overbrace{(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M})}^{=0} \mathbf{u}_k \right] + \left[\mathbf{u}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) \mathbf{u}_k \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\omega_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k} \left[\mathbf{u}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) \mathbf{u}_k \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Substituindo as derivadas das matrizes de massa e rigidez, Equações (4.13) e (4.14), respectivamente, e normalizando o vetor \mathbf{u}_k com respeito à matriz de massa ($\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k = 1$), chega-se a sensibilidade da k -ésima frequência natural com relação a i -ésima variável de projeto, conforme a Equação (4.16).

$$\begin{aligned} \alpha_i = \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} &= \frac{1}{2\omega_k \underbrace{\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k}_{=1}} \left[\mathbf{u}_k^T \left(\underbrace{\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i}}_{\substack{px_i^{p-1} \frac{1-x_{min}}{1-x_{min}^p} \mathbf{K}_{e_i}}} - \omega_k^2 \underbrace{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}}_{\mathbf{M}_{e_i}}} \right) \mathbf{u}_k \right] \\ &= \frac{1}{2\omega_k} \left[\mathbf{u}_k^T \left(px_i^{p-1} \frac{1-x_{min}}{1-x_{min}^p} \mathbf{K}_{e_i} - \omega_k^2 \mathbf{M}_{e_i} \right) \mathbf{u}_k \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Uma vez que o método trata a variável de projeto de forma discreta ($x_i = 1 \vee x_{min}$), é possível se aplicar simplificações ($x_{min} \rightarrow 0$) na Equação (4.16), chegando-se a Equação (4.17).

$$\alpha_i = \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i} = \begin{cases} \frac{1}{2\omega_k} \left[\mathbf{u}_k^T (p\mathbf{K}_{e_i} - \omega_k^2 \mathbf{M}_{e_i}) \mathbf{u}_k \right], & x_i = 1 \\ -\frac{\omega_k}{2} (\mathbf{u}_k^T \mathbf{M}_{e_i} \mathbf{u}_k) & , x_i = x_{min} \end{cases} \quad (4.17)$$

4.2 Otimização da frequência natural em estruturas hierárquicas

A seleção do material para a macroestrutura é um processo complexo que envolve não apenas as propriedades do material, mas também as condições de operação, a forma da estrutura, as cargas aplicadas e as condições de contorno [Yan et al. 2014].

Embora ao longo dos últimos anos trabalhos de diversos pesquisadores tenham sido direcionados ao estudo de algoritmos para otimizar estruturas sujeitas à problemas dinâmicos,

abordagens considerando macro e microestrutura do material de forma acoplada, são relativamente limitadas, afirmam Vicente et al., 2015.

Alguns trabalhos como os de Radman et al., 2013; Xia e Breitkopf, 2015, e Huang et al., 2015, são direcionados para projetar materiais com propriedades extremas, a fim de que seu emprego eleve a performance da estrutura, ou seja, desenvolvem diretamente as microestruturas dos materiais independente das características macroestruturais, como pode ser visto em Moreira et al., 2017a.

No entanto, espera-se que um design ótimo de uma macroestrutura, possua uma topologia macroscópica ideal, composta de materiais compósitos com microestruturas ideais, tendo o projeto desenvolvido de forma acoplada [Yan et al., 2014], ou seja, deve-se conceber simultaneamente as topologias da macro e da microestrutura do material.

Dessa forma, no estudo de otimização topológica em estruturas hierárquicas, com a função objetivo de maximização da frequência natural, dois tipos de modelos de elementos finitos são empregados, i.e., macromodelo para a macroestrutura e micromodelo para a microestrutura do material. O micromodelo descreve a geometria padrão da unidade básica do material periódico, que é o material da célula base [Zuo et al., 2013]. A Figura 4.2 mostra a representação de um sistema multiescala.

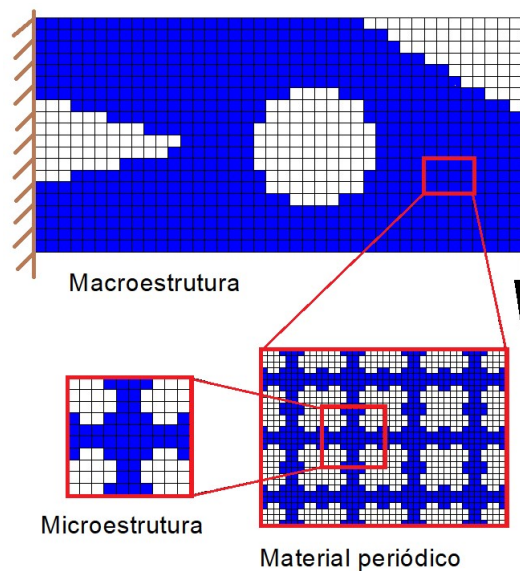


Figura 4.2 Sistema multiescala composto por macroestrutura, material periódico e uma microestrutura.

A função de otimização para problemas de vibrações livres em estruturas multiescala em geral, pode ser escrita através das Equações (4.7), (4.18) - (4.21), neste caso constituída por duas microestruturas distintas.

$$\text{Encontrar: } \mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{mac}, \mathbf{x}^{mic,1}, \mathbf{x}^{mic,2} \mid \begin{array}{l} x_i^{mac} = x_{min} \vee 1 \\ x_j^{mic,1} = x_{min} \vee 1 \\ x_j^{mic,2} = x_{min} \vee 1 \end{array} \} \quad (4.18)$$

Que maximize: ω_k

$$\text{Sujeito à: } (\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

$$\text{Volfrac}^{mac} - \sum_{i=1}^M x_i^{mac} V_i^{mac} = 0 \quad (4.19)$$

$$\text{Volfrac}^{mic,1} - \sum_{j=1}^N x_j^{mic,1} V_j^{mic,1} = 0 \quad (4.20)$$

$$\text{Volfrac}^{mic,2} - \sum_{j=1}^N x_j^{mic,2} V_j^{mic,2} = 0 \quad (4.21)$$

Na Equação (4.18), o vetor \mathbf{X} consiste dos submodelos: \mathbf{x}^{mac} , que descreve o leiaute do macromodelo, $\mathbf{x}^{mic,1}$ que descreve o leiaute do micromodelo 1, na fase 1 do macromodelo (\mathbf{x}^{mac}), e $\mathbf{x}^{mic,2}$ que descreve o leiaute do micromodelo 2, na fase 2 do macromodelo (\mathbf{x}^{mac}).

Cada micromodelo corresponde a microestrutura de cada fase do macromodelo, i.e., $\mathbf{x}^{mic,1}$ descreve a microestrutura para os elementos $x_i^{mac} = 1$, e $\mathbf{x}^{mic,2}$ para $x_i^{mac} = x_{min}$. Para macro e micromodelos, as variáveis de projeto assumem o valor de x_{min} , representando a presença de uma fase, ou 1 representando a outra fase.

A Equação (4.19) descreve a restrição do volume no macromodelo, controlando o volume da primeira macro fase ($x_i^{mac} = 1$). V_i^{mac} denota o volume do i -ésimo macro elemento, e Volfrac^{mac} o volume prescrito da primeira fase na macroescala.

As Equações (4.20) e (4.21) descrevem as restrições de volume na microescala. $V_j^{mic,1}$ é o volume do j -ésimo elemento do primeiro micromodelo e $\text{Volfrac}^{mic,1}$ é a fração de volume prescrito na primeira fase deste micromodelo; $V_j^{mic,2}$ e $\text{Volfrac}^{mic,2}$ são os correspondentes termos para o segundo micromodelo.

Os volumes das segundas fases estão restritos pelos volumes prescritos na primeira fase, pois a soma das frações volumétricas da primeira e segunda fase do modelo devem atingir 100%. A Figura 4.3 ilustra a aplicação de duas microestruturas em uma macroestrutura.

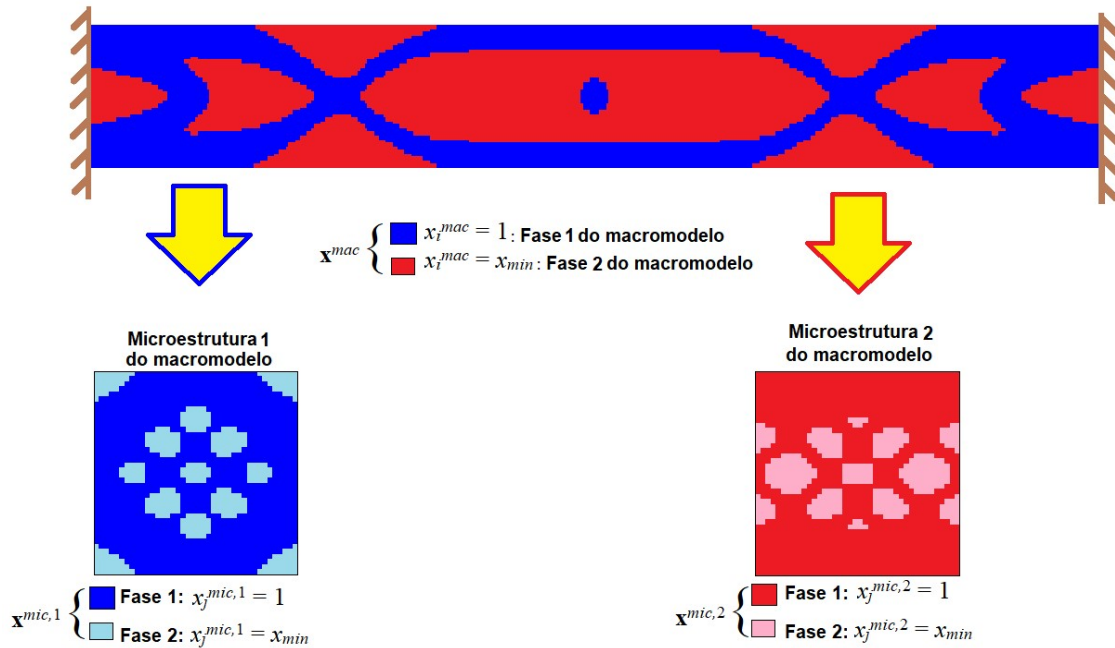


Figura 4.3 Sistema multiescala composto por duas microestruturas.

4.2.1 Interpolação das propriedades dos materiais em estruturas bimatricial

A função objetivo, Equação (4.18), depende da variável de projeto x_i^{mac} do macromodelo, e das variáveis de projeto x_j^{mic} dos micromodelos ($x_j^{mic,1}$ e $x_j^{mic,2}$), caracterizando um típico problema de otimização topológica multiescala, onde as topologias da macro e da microestrutura do material devem ser determinadas simultaneamente [Liu et al. 2016].

Aplica-se o processo de interpolação para se estabelecer a relação entre as variáveis de projeto e as propriedades dos materiais nos níveis macro e microestruturais, Equações (4.22), (4.23) e (4.24) [Zuo et al., 2013].

$$\mathbf{M}(x_i^{mac}) = x_i^{mac} \mathbf{M}_{e_i}^1 + [1 - x_i^{mac}] \mathbf{M}_{e_i}^2 \quad (4.22)$$

$$\mathbf{K}(x_i^{mac}) = (x_i^{mac})^p \mathbf{K}_{e_i}^1 + [1 - (x_i^{mac})^p] \mathbf{K}_{e_i}^2 \quad (4.23)$$

$$\mathbf{E}(x_j^{mic}) = (x_j^{mic})^p \mathbf{E}_j^1 + [1 - (x_j^{mic})^p] \mathbf{E}_j^2 \quad (4.24)$$

Os sobrescritos 1 e 2 se referem as fases, para \mathbf{M} e \mathbf{K} na macroestrutura, e para \mathbf{E} na microestrutura do material, enquanto \mathbf{E} representa o tensor das características elásticas. As derivadas da massa, rigidez e do tensor das características elásticas seguem conforme Equações (4.25), (4.26) e (4.27), respectivamente.

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i^{mac}} = \mathbf{M}_{e_i}^1 - \mathbf{M}_{e_i}^2 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i^{mac}} = p(x_i^{mac})^{p-1} (\mathbf{K}_{e_i}^1 - \mathbf{K}_{e_i}^2) \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_j^{mic}} = p(x_j^{mic})^{p-1} (\mathbf{E}_j^1 - \mathbf{E}_j^2) \quad (4.27)$$

4.2.2 Análise da sensibilidade na macroescala

O procedimento realizado de obtenção da sensibilidade na macroescala para estrutura composta por dois materiais, é análogo ao realizado com material único, chegando na Equação (4.28).

$$\alpha_i^{mac} = \frac{\partial \omega_k}{\partial x_i^{mac}} = \frac{1}{2\omega_k \underbrace{\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k}_{\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k = 1}} \left\{ \left[\begin{array}{l} 2 \frac{\partial \mathbf{u}_k^T}{\partial x_i^{mac}} \overbrace{(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})}^{(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0} \mathbf{u}_k + \\ \mathbf{u}_k^T \left(\underbrace{p(x_i^{mac})^{p-1} (\mathbf{K}_{e_i}^1 - \mathbf{K}_{e_i}^2)}_{\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i^{mac}}} - \omega_k^2 \underbrace{(\mathbf{M}_{e_i}^1 - \mathbf{M}_{e_i}^2)}_{\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i^{mac}}} \right) \mathbf{u}_k \end{array} \right] \right\} \quad (4.28)$$

$$= \frac{1}{2\omega_k} \mathbf{u}_k^T \left[p(x_i^{mac})^{p-1} (\mathbf{K}_{e_i}^1 - \mathbf{K}_{e_i}^2) - \omega_k^2 (\mathbf{M}_{e_i}^1 - \mathbf{M}_{e_i}^2) \right] \mathbf{u}_k$$

4.2.3 Análise da sensibilidade na microescala

O tensor homogeneizado de característica elástica do material, denotado \mathbf{D}^H conforme Equação (4.29), é obtido da integração no domínio da célula base, definida pela variável \mathbf{x}^{mic} . Aspectos sobre a implementação computacional de \mathbf{D}^H podem ser encontrados em Andreassen

e Andreasen, 2014. O micromodelo contém a microestrutura do material homogêneo, sendo utilizado como propriedade do material para os elementos na macroestrutura.

$$\mathbf{D}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{E}(\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u}) dY \quad (4.29)$$

onde, $|Y|$ representa o volume da célula base, \mathbf{E} o tensor elástico microestrutural, \mathbf{I} é uma matriz identidade 3×3 , \mathbf{b} a matriz das derivadas da função de forma do micromodelo, \mathbf{u} é o vetor deslocamento da microescala, causado pelos campos de deformação uniforme $[1,0,0]^T$, $[0,1,0]^T$ e $[0,0,1]^T$. A equação de equilíbrio da microestrutura pode ser escrita conforme a Equação (4.30).

$$\int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{b} dY \mathbf{u} = \int_Y \mathbf{b}^T \mathbf{E} dY \quad (4.30)$$

A matriz de rigidez \mathbf{K} global é formada a partir das matrizes elementares de rigidez \mathbf{K}_{ei} , Equação (4.31). E a matriz de massa \mathbf{M} global é formada a partir das matrizes elementares de massa \mathbf{M}_{ei} , Equação (4.32).

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^M x_i \mathbf{K}_{e_i} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^M x_i \mathbf{M}_{e_i} \quad (4.32)$$

A matriz de rigidez elementar \mathbf{K}_{ei} , do macromodelo pode ser calculada conforme a Equação (4.33). Para casos bidimensionais, os campos de deslocamento \mathbf{u} são obtidos impondo uma condição de contorno periódica pelos campos de deformação uniforme $[1, 0, 0]^T$, $[0, 1, 0]^T$, $[0, 0, 1]^T$.

$$\mathbf{K}_{e_i} = \int_{V_i} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D}^H \mathbf{B}_e dV_i \quad (4.33)$$

onde, \mathbf{B}_e é a matriz de deformação, e V_i é o volume do i -ésimo elemento no macromodelo.

A matriz de massa \mathbf{M}_{ei} é mostrada na Equação (4.34), onde \mathbf{N}_e representa as funções de forma. E ρ^H representa a soma ponderada das densidades dos elementos na célula unitária, expresso na Equação (4.35).

$$\mathbf{M}_{e_i} = \int_{V_i} \rho^H \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV_i \quad (4.34)$$

$$\rho^H = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M [\rho^1 x_j^{mic} + \rho^2 (1 - x_j^{mic})] \quad (4.35)$$

A derivada da matriz elementar de rigidez (\mathbf{K}_e) com relação a variável de projeto da microestrutura (x_j^{mic}), pode ser obtida a partir da Equação (4.33), resultando na Equação (4.36)

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{e_i}}{\partial x_j^{mic}} = \int_{V_i} \mathbf{B}_e^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial x_j^{mic}} \mathbf{B}_e dV_i \quad (4.36)$$

A derivada da matriz elementar de massa (\mathbf{M}_e) com relação a variável de projeto da microestrutura (x_j^{mic}), pode ser obtida a partir das Equações (4.34) e (4.35), resultando na Equação (4.37).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}_{e_i}}{\partial x_j^{mic}} &= \int_{V_i} \frac{\partial \rho^H}{\partial x_j^{mic}} \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV_i \\ &= \frac{1}{M} \int_{V_i} \sum_{j=1}^M \frac{\partial}{\partial x_j^{mic}} \left\{ (x_j^{mic}) \rho^1 + [1 - (x_j^{mic})] \rho^2 \right\} \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV_i \\ &= \int_{V_i} \sum_{j=1}^M (\rho^1 - \rho^2) \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV_i \\ &= \int_{V_i} (\rho^1 - \rho^2) \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV_i \end{aligned} \quad (4.37)$$

Derivando a k -ésima frequência natural da Equação (4.3) do quociente de Rayleigh, com respeito a i -ésima variável de projeto da microestrutura, temos a Equação (4.38).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_k}{\partial x_j^{mic}} &= \frac{\partial}{\partial x_j^{mic}} \left(\frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{K} \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k} \right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{2\omega_k} \underbrace{\left[\frac{\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k}{\mathbf{u}_k^T \mathbf{M} \mathbf{u}_k} \right]}_{=1} \left\{ \left[2 \frac{\partial \mathbf{u}_k^T}{\partial x_j^{mic}} \overbrace{\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \right)}^{(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})=0} \mathbf{u}_k \right] + \left[\mathbf{u}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j^{mic}} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_j^{mic}} \right) \mathbf{u}_k \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2\omega_k} \left[\mathbf{u}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_j^{mic}} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_j^{mic}} \right) \mathbf{u}_k \right]
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Em problemas multiescala acoplados, a retirada de um elemento x_j^{mic} na célula base é relevante para todos os elementos na macroestrutura que contém este tipo de material. Dessa forma, a sensibilidade da k -ésima frequência natural com relação à variável de projeto microestrutural x_j^{mic} , pode ser escrita como o somatório da derivada de todas as energias dos elementos da macroestrutura que contém esta célula-base.

Considerando as Equações (4.31), (4.32), (4.36) e (4.37), a Equação (4.38) pode ser expressa como na Equação (4.39), onde a variável M para esta equação representa o número total de elementos na macroestrutura.

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial x_j^{mic}} = \frac{1}{2\omega_k} \sum_{i=1}^M \mathbf{u}_{k_i}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{e_i}}{\partial x_j^{mic}} \mathbf{u}_{k_i} - \frac{\omega_k}{2} \sum_{i=1}^M \mathbf{u}_{k_i}^T \frac{\partial \mathbf{M}_{e_i}}{\partial x_j^{mic}} \mathbf{u}_{k_i} \tag{4.39}$$

Zuo et al., 2010, afirmam que variações de massa da microestrutura da célula base do material em nível da macroestrutura, podem ser desprezadas, uma vez que mudanças da matriz de massa elementar no modelo macro, devido a cada elemento no modelo micro, podem ser assumidas constantes. Com isso, o segundo termo da Equação (4.39) não tem efeito na classificação da sensibilidade que determina a remoção ou adição dos elementos na implementação numérica. De uma forma simplificada, o número de sensibilidade pode ser definido como na Equação (4.40).

$$\begin{aligned}
\alpha_j^{mic} &= \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j^{mic}} = \frac{\omega_k}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^M \mathbf{u}_{k_i}^T \frac{\partial \mathbf{M}_{e_i}}{\partial x_j^{mic}} \mathbf{u}_{k_i}}_{=0} + \frac{1}{2\omega_k} \sum_{i=1}^M \mathbf{u}_{k_i}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{e_i}}{\partial x_j^{mic}} \mathbf{u}_{k_i} \\
&= \frac{1}{2\omega_k} \sum_{i=1}^M \mathbf{u}_{k_i}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{e_i}}{\partial x_j^{mic}} \mathbf{u}_{k_i}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Considerando a derivada da macro rigidez elementar \mathbf{K}_{ei} dada na Equação (4.36), a Equação (4.40) pode ser expressa como na Equação (4.41).

$$\alpha_j^{mic} = \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j^{mic}} = \frac{1}{2\omega_k} \sum_{i=1}^M \mathbf{u}_{k_i}^T \int_{V_i} \mathbf{B}_e^T \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial x_j^{mic}} \mathbf{B}_e dV_i \mathbf{u}_{k_i} \quad (4.41)$$

A derivada da matriz elástica homogeneizada com as propriedades do material pode ser obtida a partir das Equações (4.27) e (4.29), gerando a Equação (4.42).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{D}^H}{\partial x_j^{mic}} &= \frac{1}{|Y|} \int_Y (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u})^T \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_j^{mic}} (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u}) dY \\ &= \frac{p(x_j^{mic})^{p-1}}{|Y|} \int_Y (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u})^T (\mathbf{E}_j^1 - \mathbf{E}_j^2) (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u}) dY \end{aligned} \quad (4.42)$$

A otimização deve ser simultânea, já que cada mudança em uma parte influencia na outra diretamente, ou seja, elementos da microestrutura estão inseridos no cálculo da macroestrutura e vice-versa, mostrando uma dependência entre as duas escalas. Dessa forma a sensibilidade da frequência natural na macroestrutura com respeito a variável de projeto no micromodelo, é encontrada substituindo a Equação (4.42) na Equação (4.41), gerando a Equação (4.43).

$$\alpha_j^{mic} = \frac{p(x_j^{mic})^{p-1}}{2|Y|\omega_k} \sum_{i=1}^M \left\{ \mathbf{u}_{k_i}^T \left[\int_{V_i} \mathbf{B}_e^T \left[\int_Y (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u}_j)^T (\mathbf{E}^1 - \mathbf{E}^2) (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u}_j) dY \right] \mathbf{B}_e dV_i \right] \mathbf{u}_{k_i} \right\} \quad (4.43)$$

4.3 Efeito tabuleiro de xadrez e dependência de malha

O efeito chamado dependência de malha trata da incapacidade de se obter qualitativamente a mesma solução para diferentes tamanhos de malhas, i.e., quanto maior a discretização elementar, maiores serão os detalhes da estrutura final.

Huang e Xie, 2010, destacam que se trata de problemas numéricos, característicos em aplicações de otimização topológica, sendo a utilização de filtros, em geral, a solução aplicada para se evitar problemas dessa ordem.

A comprovação matemática acerca da filtragem de densidades por convolução, é apresentada em Bourdin, 2001. Problemas do efeito tabuleiro de xadrez, e de dependência de malha em otimização topológica são avaliados em Sigmund e Petersson, 1998. Com o uso da equação de Helmholtz, Lazarov e Sigmund, 2011, aplicam a suavização das sensibilidades, demonstrando ser uma alternativa mais eficiente em termos computacionais. Sigmund e Maute, 2012, propõem um filtro de sensibilidades baseado na elasticidade suavizada pelo gradiente de elasticidade de Askes et al., 2008, a fim de eliminar singularidades no campo de deformações e tensões.

Sigmund e Petersson, 1998, destacam a tendência de surgirem os efeitos de tabuleiro de xadrez (*checkerboard*), onde se formam regiões com rápida alternância entre elementos sólidos e vazios. Ordenados como num tabuleiro de xadrez, os elementos são ligados apenas por seus vértices, tendo os elementos adjacentes aos seus lados removidos, conforme exemplificado na Figura 4.4. Segundo Jog e Harber, 1996, problemas dessa natureza ocorrem quando se emprega elemento finito com funções de interpolação de baixa ordem, encontrando um padrão local mais rígido do que qualquer outro arranjo.

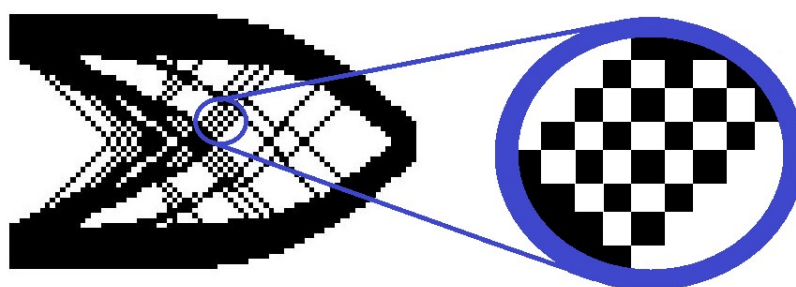


Figura 4.4 Efeito tabuleiro de xadrez, (*checkerboard*).

O método BESO, diferentemente do ESO, permite a adição dos elementos outrora removidos, necessitando de um valor de sensibilidade para que os elementos ausentes da estrutura possam retornar. Entretanto, como estes possuem um valor quase nulo, o cálculo de seus valores de sensibilidade não representa a variação da função objetivo que seria causada pela sua adição à estrutura, necessitando da aplicação de filtros.

Apesar do filtro numérico ser puramente heurístico, sua aplicação é simples e soluciona muitos problemas em otimização topológica, como o tabuleiro de xadrez e dependência da malha [Calixto, 2015]. Os filtros são aplicados após o cálculo da sensibilidade de cada elemento, para suavizar os valores dentro de um domínio estabelecido.

Outros aspectos sobre tipos e aplicações de filtros, que fogem do escopo desse trabalho, podem ser conferidos em Bendsøe e Sigmund, 2003; Xia e Breitkopf, 2015, e nas suas respectivas referências.

4.3.1 Filtro de sensibilidade nodal

Para suavizar o valor da sensibilidade, transfere-se o valor encontrado na sensibilidade do i -ésimo elemento α_i para os seus nós, passando a ser chamada de sensibilidade nodal α^n , definida pela média ponderada dos números de sensibilidade elementar de todos os elementos próximos, conforme a Equação (4.44).

$$\alpha_j^n = \sum_{i=1}^m Q_{ij} \alpha_i \quad (4.44)$$

onde a variável m , para esta equação, representa o número total de elementos conectados ao j -ésimo nó. O fator de ponderação nodal Q_{ij} , atribuído ao elemento i para o nó j , sendo $\sum_{i=1}^M Q_{ij} = 1$, é definido conforme a Equação (4.45), em que r_{ij} é a distância entre o nó j e o centroide do elemento i .

$$Q_{ij} = \frac{1}{M-1} \left(1 - \frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^m r_{ij}} \right) \quad (4.45)$$

Os valores de sensibilidade nodais α_j^n são então projetados no subdomínio Ω_i . Essa projeção é baseada em um raio mínimo de comprimento r_{min} , conforme pode ser visto na Figura 4.5, o qual, segundo Huang e Xie, 2007, não muda com malhas de diferentes graus de refinamento e garante uniformidade nas topologias geradas da estrutura.

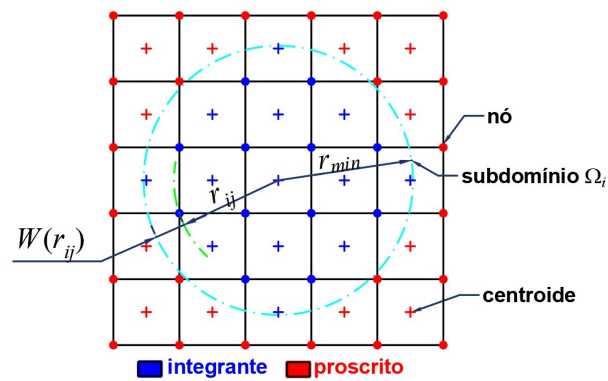


Figura 4.5 Raio de influência para a extrapolação dos números de sensibilidade.

Analisando as diversas malhas da Figura 4.6, cujos elementos possuem as mesmas dimensões, se percebe que para cada incremento do raio de filtragem o número de elementos que faz parte do cálculo aumenta, onerando o custo computacional.

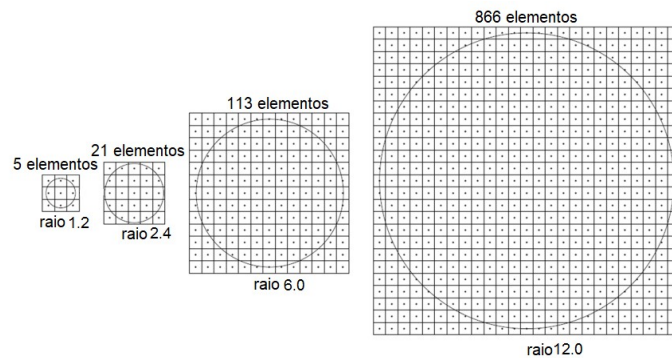


Figura 4.6 Relação entre o número de elementos e o raio do filtro.

Como a quantidade de elementos impactados pelo raio de filtragem está diretamente relacionada ao tamanho dos elementos, é possível se estabelecer uma relação de dependência entre o raio de filtragem e a maior aresta elementar. Na Equação (4.46) é apresentada essa relação, onde a aresta possui comprimento $2a$.

$$r_{min} \geq 2a \quad (4.46)$$

A Figura 4.7 mostra a geometria de um elemento retangular de quatro nós, com dimensões $2b$ na vertical e $2a$ na horizontal.

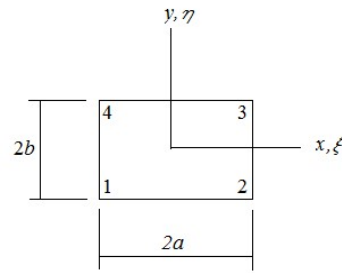


Figura 4.7 Elemento retangular, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ [Petyt, 2015].

4.3.2 Filtro de sensibilidade elementar

Os valores de sensibilidade nodal α_j^n retornam ao elemento empregando um sistema de filtragem que utiliza uma função de ponderação W com base em r_{ij} , que é a distância do nó j no subdomínio Ω_i em relação ao centroide do elemento i . Um novo valor de sensibilidade elementar suavizada $\hat{\alpha}_i$ é calculado conforme a Equação (4.47), onde a variável n para esta equação representa o número total de nós dos elementos pertencentes ao subdomínio Ω_i .

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^n W(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^n W(r_{ij})} \quad (4.47)$$

O fator de ponderação elementar $W(r_{ij})$, representado na Figura 4.5, é a diferença entre o raio r_{min} do círculo que define o subdomínio Ω_i e a distância r_{ij} do j -ésimo nó em relação ao centroide do i -ésimo elemento), conforme a Equação (4.48).

$$W(r_{ij}) = \begin{cases} r_{min} - r_{ij}, & (r_{ij} < r_{min}) \\ 0, & (r_{ij} \geq r_{min}) \end{cases} \quad (4.48)$$

4.3.3 Filtragem da sensibilidade via matriz de suavização H

Como visto em Lisboa et al. 2016, Moreira et al., 2017b e Link et al., 2017, após o cálculo dos fatores de ponderação, a mesmo procedimento para filtragem da sensibilidade pode ser realizada de uma outra forma, conforme as Equações (4.49) e (4.50).

$$\boldsymbol{\alpha}^n = \mathbf{Q}\boldsymbol{\alpha} \quad (4.49)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{W}\boldsymbol{\alpha}^n \quad (4.50)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ e $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ são vetores de dimensão $n \times 1$, para N igual ao número de elementos, e possuem as sensibilidades elementares não filtradas α , e filtradas $\hat{\alpha}$, respectivamente. $\boldsymbol{\alpha}^n$ representa um vetor $Y \times 1$ que contém as sensibilidades nodais α^n , em que Y é o número de nós. \mathbf{Q} é uma matriz $Y \times n$, e contém os pesos de ponderação nodais Q , enquanto \mathbf{W} possui dimensão $n \times Y$, e contém a ponderação elementar $W(r_{ij})$.

Com a combinação das Equações (4.49) e (4.50), encontra-se a Equação (4.51).

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}\boldsymbol{\alpha} \quad (4.51)$$

Podendo ser feito como na Equação (4.52), onde \mathbf{H} é uma matriz de suavização, com dimensão $n \times n$.

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\alpha} \quad (4.52)$$

Esse desenvolvimento, dispensa efetuar o cálculo ou armazenamento dos valores de sensibilidade nodais, ou ainda de duas matrizes separadas.

Apesar da geração da matriz de suavização \mathbf{H} possuir um elevado custo computacional, uma vez definida a malha, torna-se fixa, pois depende apenas dos valores das coordenadas dos nós e elementos. Após ser determinada na primeira iteração, será reutilizada nas iterações seguintes.

Como este filtro não leva em consideração a diferença de volume, ou área, dos elementos, sua utilização em sistemas com grande variação de área entre elementos vizinhos pode provocar resultados indesejados. Essa situação pode ser amenizada efetuando a relação entre a sensibilidade e o comprimento elementar (raiz quadrada da área) antes e depois da aplicação do filtro [Moreira et al., 2017b e Link et al., 2017].

4.3.4 Filtro de estabilização

Elementos que outrora continham sensibilidade com valor zero, podem passar a ter um valor diferente de zero devido a contribuição gerada pelos elementos vizinhos, tornando-se um elemento sólido. Huang et al., 2010b, apontam que isso pode causar instabilidades na função objetivo, pois elementos removidos através da análise da sensibilidade acabam por onerar seus vizinhos. Por ordem do processo de filtragem, haverá um aumento nos valores de sensibilidade dos removidos, causando a reinserção, isso desencadeará o efeito denominado *loop*, pois os mesmos elementos são repetidamente removidos e reinseridos.

Para amenizar esse efeito, emprega-se mais filtro, o de estabilização, que modifica o valor de sensibilidade de cada elemento, determinando um novo valor para a sensibilidade $\tilde{\alpha}_i$, com base nas informações do histórico de cada elemento, ou seja, conforme a Equação (4.53), em que q se refere a iteração atual.

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_i^q + \hat{\alpha}_i^{(q-1)}) \quad (4.53)$$

4.4 Atualização das variáveis de projeto

O método BESO para sistemas multiescala inicia com arquiteturas distintas para o macromodelo e para os micromodelos.

A fração volumétrica da iteração seguinte é determinada para as duas escalas, podendo ser maior ou menor do que a fração de volume da iteração atual, *i.e.*, o volume desejado para a próxima iteração poderá aumentar ou diminuir até que se alcance o volume objetivo, dentro de uma tolerância pré-estabelecida.

Através de um esquema iterativo, ambos os volumes são gradualmente alterados em direção ao volume desejado, segundo os quesitos de sensibilidade macro e microestrutural.

A taxa evolucionária ER , parâmetro de entrada do algoritmo de otimização, controla a variação do volume das iterações subsequentes, no macromodelo conforme a Equação (4.54), e no micromodelo conforme a Equação (4.55).

$$V^{mac,(q+1)} = V^{mac,(q)}(1 \pm ER^{mac}) \quad (4.54)$$

$$V^{mic,(q+1)} = V^{mic,(q)} (1 \pm ER^{mic}) \quad (4.55)$$

onde $V^{mac,(q+1)}$ representa a fração do volume alvo macroestrutural da q -ésima iteração, e $V^{mac,(q)}$ da iteração anterior. De forma análoga, com $V^{mic,(q+1)}$ e $V^{mic,(q)}$ para a microestrutura.

Uma vez atingido o volume final, a fração de volume da estrutura permanece constante nas iterações seguintes, ou seja, após o algoritmo atingir o volume prescrito ($Volfrac$), alcança-se um patamar onde o volume é constante, mas a distribuição de material pode variar.

Em cada iteração após o cálculo da sensibilidade (Equação (4.53)), os elementos são ordenados de acordo com seus valores de sensibilidade de forma decrescente, individualmente no macro e nos micromodelos.

Dois limites de sensibilidades são adotados, um $\tilde{\alpha}_{add}^{ath}$ para a inserção, e outro $\tilde{\alpha}_{del}^{ath}$ para a remoção dos elementos. Elementos com valor de sensibilidade inferior a $\tilde{\alpha}_{add}^{ath}$, são definidos vazios (atribuindo $x_i = x_{min}$), podendo ser atualizados para sólidos, conforme condição da Equação (4.57). Elementos com sensibilidade superior a $\tilde{\alpha}_{del}^{ath}$ são definidos como sólidos (atribuindo $x_i = 1$), podendo ser alterados para vazios segundo a condição da Equação (4.56).

$$\tilde{\alpha}_i \leq \tilde{\alpha}_{del}^{ath} \quad (4.56)$$

$$\tilde{\alpha}_i > \tilde{\alpha}_{add}^{ath} \quad (4.57)$$

Huang e Xie, 2007, apresentam três passos para a obtenção dos valores de $\tilde{\alpha}_{add}^{ath}$ e $\tilde{\alpha}_{del}^{ath}$:

1. Adotar $\tilde{\alpha}_{del}^{ath} = \tilde{\alpha}_{add}^{ath} = \tilde{\alpha}^{ath}$, determinado $\tilde{\alpha}^{ath}$ para o volume de referência. Por exemplo, existindo 1000 elementos $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_{1000}$, com os valores de sensibilidade ordenados de forma decrescente. Se o volume de referência $V^{(q+1)}$ corresponde à uma fração de volume com 725 elementos, $\alpha^{ath} = \alpha^{725}$.
2. Determinar a taxa de adição volumétrica (AR), partindo da relação entre o número de elementos adicionados, pelo número total de elementos no domínio de projeto.

Se $AR \leq AR^{max}$, sendo AR^{max} a taxa máxima prescrita de adição de volume, pular o passo 3. Senão, calcular $\tilde{\alpha}_{add}^{ath}$ e $\tilde{\alpha}_{del}^{ath}$ segundo o passo 3.

3. Ordenar os números de sensibilidade dos elementos vazios e definir $\tilde{\alpha}_{add}^{ath}$. O número de elementos a serem atualizados de vazios para cheios é igual ao produto entre AR^{max} e o número total de elementos no domínio de projeto. $\tilde{\alpha}_{add}^{ath}$ é o valor de sensibilidade do elemento ranqueado logo após o último elemento adicionado. $\tilde{\alpha}_{del}^{ath}$ é então determinado de modo que $[(volume\ de\ elementos\ removidos) = V^{mic,(q+1)} - V^{mic,(q)} + (volume\ de\ elementos\ adicionados)]$.

4.5 Critério de parada

Antes de alcançar o volume prescrito, as mudanças na topologia da estrutura podem ser bruscas. Após, com as restrições estruturais já satisfeitas, ainda é necessário realizar algumas iterações, para alcançar a estrutura final, porém com uma quantidade menor de elementos modificados.

A otimização é concluída mediante a observação de três critérios:

- i) As condições restritivas, aplicadas gradativamente, devem ser obedecidas por completo.
- ii) Com o item (i) alcançado, algumas iterações ainda são executadas, até que a mudança no valor da função objetivo seja menor do que um valor de tolerância. Apesar de não haver uma variação no volume, a topologia da estrutura pode mudar enquanto elementos são adicionados e removidos.
- iii) Após se alcançar o item (i), e de forma concorrente com (ii), o valor da função objetivo da iteração atual é comparado com o *melhor valor* encontrado, e caso esteja numa condição mais favorável, assume com o posto de *melhor valor*, tendo a configuração da estrutura também salva. Caso haja uma falha para se alcançar uma condição mais favorável, durante um certo número de iterações, o processo é finalizado.

Em outras palavras, uma vez alcançado o volume prescrito $Volfrac$, conforme as Equações (4.6) ou (4.19) para a macroestrutura, e conforme as Equações (4.20) e (4.21) para a microestrutura, o processo de adição e remoção de elementos continuará na busca pela

maximização da frequência natural, conforme Equação (4.5), até que não haja variação significativa na função objetivo durante um dado número iterações, ou seja, verifica-se ω_k nas últimas N iterações, observando-se um erro máximo permitido, conforme a Equação (4.58), em que τ representa o critério de parada, τ^* o erro máximo admissível e N o número de iterações.

$$\tau = \frac{\left| \sum_{i=1}^N (\omega_k^{q-i+1} - \omega_k^{q-N-i+1}) \right|}{\sum_{i=1}^N \omega_k^{q-i+1}} \leq \tau^* \quad (4.58)$$

4.6 Implementação computacional

A seguir é apresentado o procedimento para a análise do método BESO conforme implementação realizada para estruturas sujeitas a vibrações livres não amortecidas, composta por material único e múltiplos materiais, definindo a distribuição ótima de material para a estrutura.

4.6.1 Descritivo dos passos do processo de otimização

A seguir são relacionados os passos empregados na implementação do método BESO, para problemas de frequência natural aplicados em estruturas multiescala acoplada.

- 1- Discretizar o domínio correspondente ao modelo da macroestrutura \boxed{mac} , definindo o número de elementos $\boxed{N^{mac}}$. Determinar: a restrição de volume $\boxed{Volfrac^{mac}}$ (Equação (4.19)), taxa de evolução $\boxed{ER^{mac}}$ (Equação (4.54)), taxa de atualização $\boxed{AR_{max}^{mac}}$, raio mínimo $\boxed{r_{min}^{mac}}$ (Equação (4.46)) e tolerância $\boxed{\tau^*}$ (Equação (4.58)).
- 2- Discretizar o domínio correspondente ao modelo das microestruturas $\boxed{mic,1}$ $\boxed{mic,2}$, definindo o número de elementos $\boxed{N^{mic,1}}$ $\boxed{N^{mic,2}}$ para ambas. Determinar as restrições dos volumes $\boxed{Volfrac^{mic,1}}$ $\boxed{Volfrac^{mic,2}}$ (Equações (4.20) e (4.21)), as taxas

- evolucionárias $ER^{mic,1}$ $ER^{mic,2}$ (Equações (4.54) e (4.55)), taxa de atualização $AR_{max}^{mic,1}$ $AR_{max}^{mic,2}$ e o raio mínimo $r_{min}^{mic,1}$ $r_{min}^{mic,2}$ (Equação (4.46)).
- 3- Calcular as matrizes constitutivas \mathbf{D}^H (Equação (4.29)) através do método da homogeneização.
 - 4- Substituir cada matriz constitutiva \mathbf{D}^H (Equação (4.29)) nos elementos do macromodelo e obter o modo de vibração normalizado \mathbf{u}_k com respeito a matriz de massa \mathbf{M} , correspondente a k -ésima frequência natural ω_k do macromodelo.
 - 5- Calcular a função objetivo conforme o processo de otimização estabelecido (Equações (4.5), (4.7) e (4.18)).
 - 6- Calcular a sensibilidade α_i^{mac} com relação as variáveis de projeto x_i^{mac} do macromodelo (Equação (4.28)). Calcular as sensibilidades $\alpha_i^{mic,1}$ $\alpha_i^{mic,2}$, com relação as variáveis de projeto x_j^{mic} dos micromodelos (Equação (4.43)).
 - 7- Utilizar o esquema de filtro nodal e determinar a sensibilidade nodal α_j^n (Equação), tanto no macromodelo $\alpha_j^{n,mac}$ quanto no micromodelo $\alpha_j^{n,mic,1}$ $\alpha_j^{n,mic,2}$ (Equação (4.44)). Utilizar o esquema de filtro e determinar a nova sensibilidade elementar (Equação (4.47)), tanto no macromodelo $\hat{\alpha}_i^{mac}$ quanto no micromodelo $\hat{\alpha}_i^{mic,1}$ $\hat{\alpha}_i^{mic,2}$.
 - 8- Determinar uma nova sensibilidade $\tilde{\alpha}_i^{mac}$, aplicando o filtro de estabilização (Equação (4.53)), através da média baseada em informações do histórico da sensibilidade $\hat{\alpha}_i$, tanto no macromodelo quanto nos micromodelos.
 - 9- Determinar a fração volumétrica alvo da próxima iteração, tanto no macromodelo $V^{mac(q+1)}$ (Equação (4.54)) quanto nos micromodelos $V^{mic,1(q+1)}$ $V^{mic,2(q+1)}$ (Equação (4.55)).

- 10- Atualizar as variáveis de projeto x_i^{mac} $x_j^{mic,1}$ $x_j^{mic,2}$ de acordo com as sensibilidades $\tilde{\alpha}_i$ (Equação (4.53)) e volume atual, tanto no macromodelo V^{mac} (Equação (4.54)), quanto nos micromodelos V^{mic} (Equação (4.55)).
- 11- Repetir passos de 3 a 10 até que: as restrições de volume $Volfrac$ (Equação (4.19), (4.20) e (4.21)) e critério de parada τ^* (Equação (4.58)), sejam satisfeitos.

4.6.2 Fluxograma do processo de otimização

O fluxograma apresentado na Figura 4.8 ilustra a forma empregada para implementação do algoritmo.

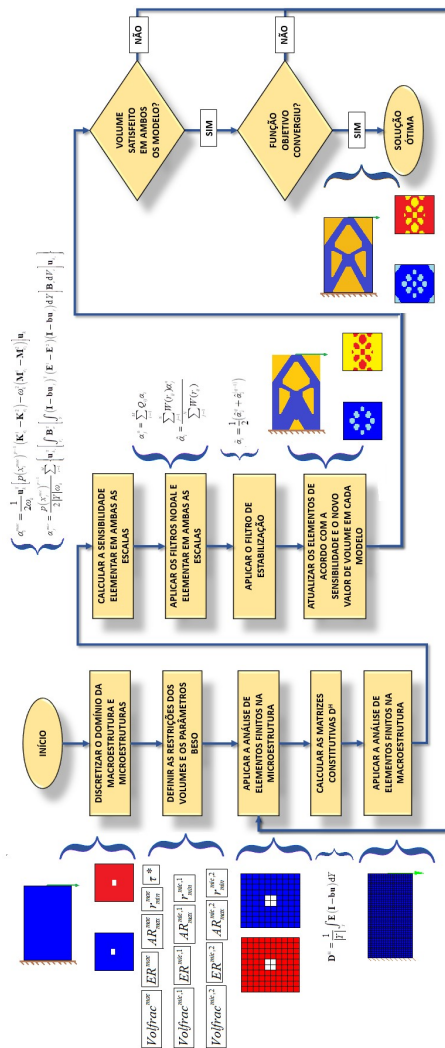


Figura 4.8 Fluxograma do método implementado.

5 VERIFICAÇÃO NUMÉRICA

Com o programa feito, testes foram realizados a fim de avaliar a robustez da implementação e verificar eventuais instabilidades numéricas. Tais testes foram comparados com referências já consolidadas, e os resultados são apresentados a seguir, sendo todas as malhas discretizadas com elementos lineares quadrilaterais de tensão plana com quatro nós cada.

5.1 Maximização da frequência fundamental em estruturas com material único

Os ensaios numéricos se iniciam com validação do algoritmo com respeito a maximização da frequência fundamental de estruturas compostas por material único, sendo experimentados os modelos dos trabalhos de Du e Olhoff, 2007; Huang et al. 2010a; Steven e Xie, 1996 e Yaghoobi e Hassani, 2017.

5.1.1 Viga biapoçada

Como primeiro exemplo, foi considerado uma viga biapoçada em ambas as extremidades, conforme Figura 5.1. O domínio é retangular com dimensões de $8\text{ m} \times 1\text{ m}$, discretizado com 320×40 elementos. O objetivo é maximizar a frequência fundamental com uma fração de volume de 50%. Na Tabela 5.1 são mostradas as propriedades do material empregado na viga.

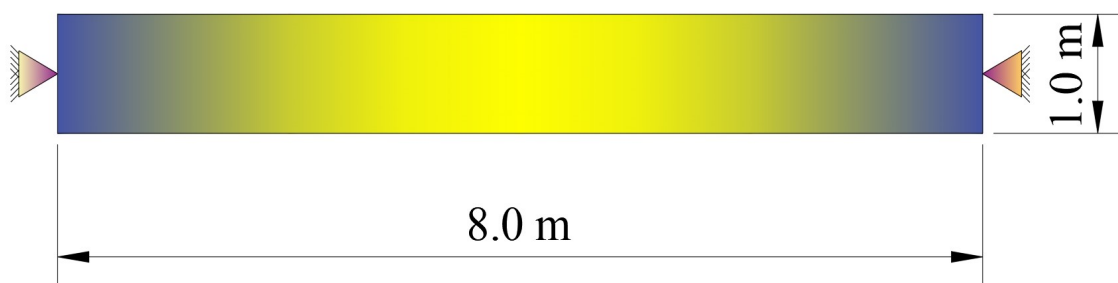


Figura 5.1 Viga biapoçada em ambas as extremidades

Tabela 5.1 Propriedades do material empregado na viga biapoiada

Módulo de Young (E)	1×10^7 Pa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3
Massa específica (ρ)	1 kg/m ³

Os dados de entrada do método BESO são: taxa evolucionária $ER = 6\%$, $x_{min} = 10^{-3}$, raio de filtragem $r_{min} = 2$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,001$ e fator de penalização $p = 3,0$.

A topologia ótima encontrada por Du e Olhoff, 2007 pode ser vista na Figura 5.2, enquanto na Figura 5.3, a alcançada por Huang et al., 2010a. Já na Figura 5.4 é apresentado o resultado da otimização obtida com o método BESO, conforme implementado neste trabalho.



Figura 5.2 Viga biapoiada otimizada por Du e Olhoff, 2007.



Figura 5.3 Viga biapoiada otimizada por Huang et al., 2010a.



Figura 5.4 Viga biapoiada otimizada neste trabalho.

Na Figura 5.5 pode ser visto o histórico de otimização para as três primeiras frequências naturais obtidas por Du e Olhoff, 2007. O histórico de otimização com a variação da fração de volume, alcançada por Huang et al., 2010a, é mostrado na Figura 5.6, enquanto

na Figura 5.7, são apresentadas as três primeiras frequências naturais e a variação da fração de volume, obtidos com o algoritmo implementado neste trabalho.

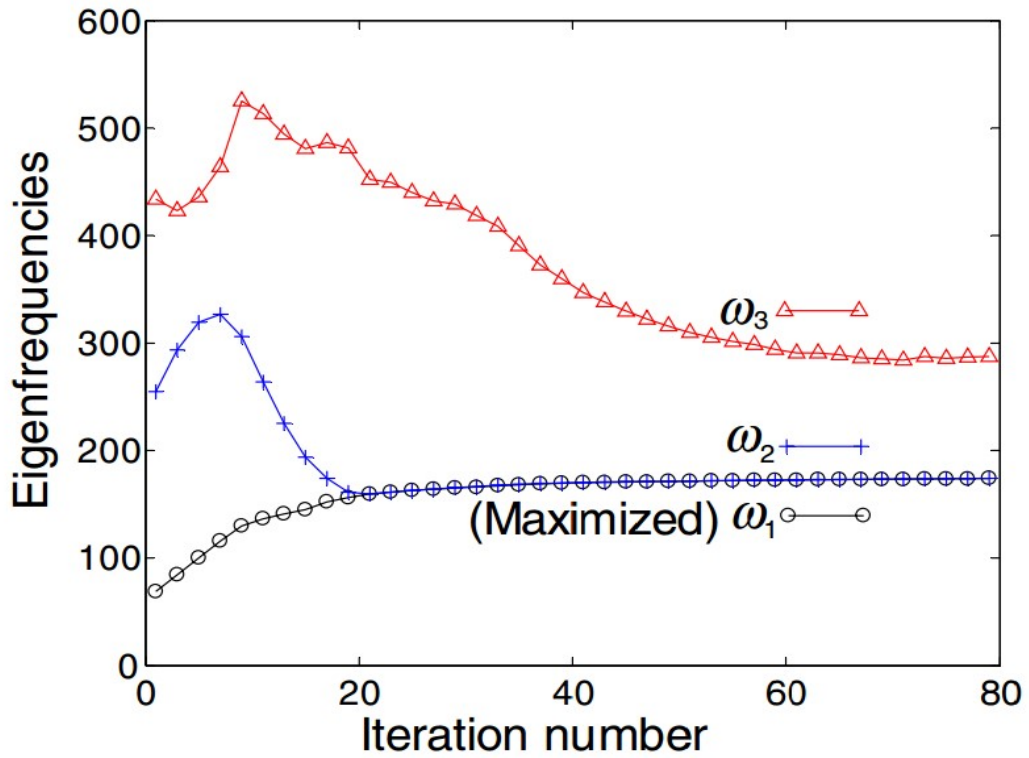


Figura 5.5 Histórico de otimização da viga biapoiada, por Du e Olhoff, 2007.

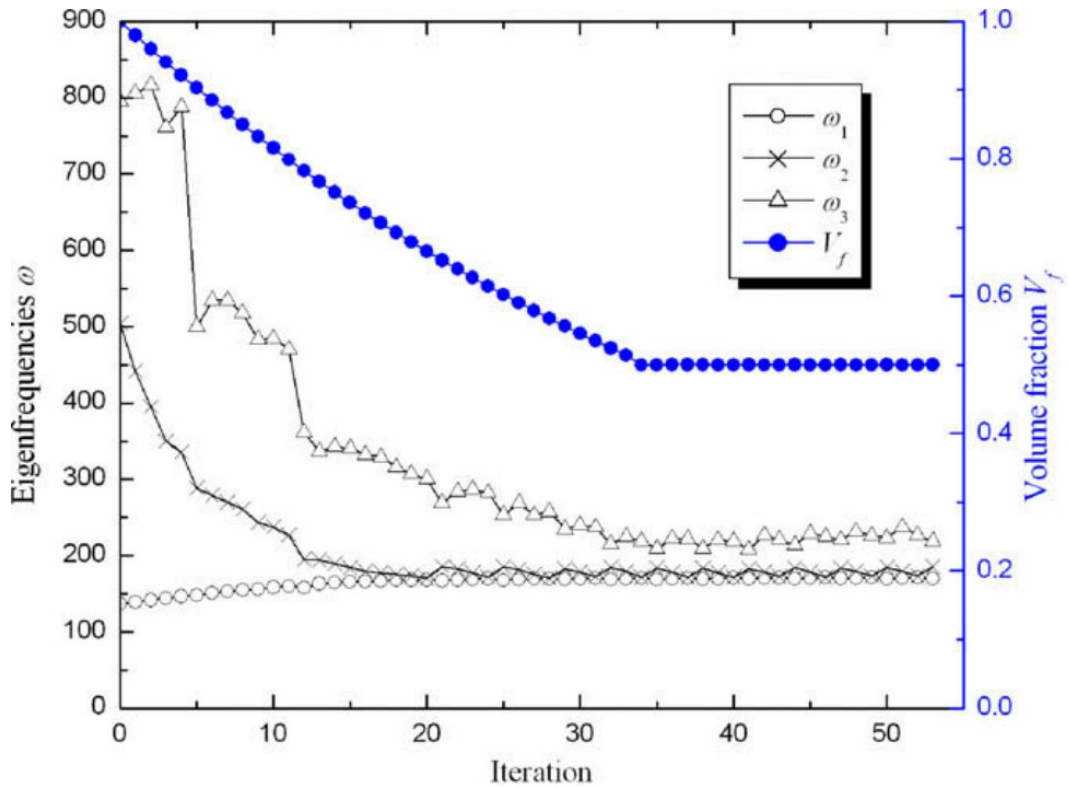


Figura 5.6 Histórico de otimização da viga biapoiada, por Huang et al. 2010a.

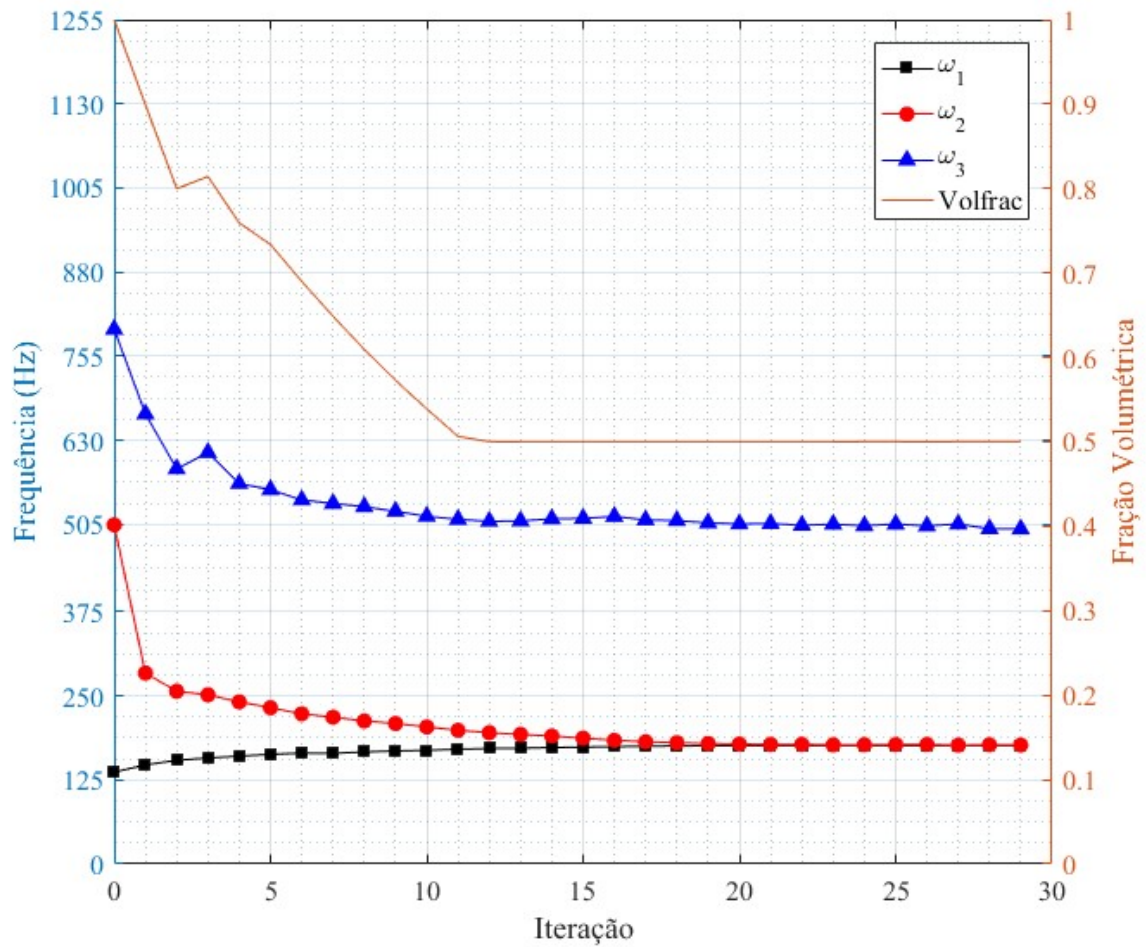


Figura 5.7 Históricos de otimização viga biapoada, implementada neste trabalho.

Avaliando os resultados alcançados, observa-se que há um aumento da primeira frequência natural e um decaimento da segunda à medida que diminui a fração do volume. Sobre a proximidade dos valores da primeira e da segunda frequência natural, trata-se de uma condição conhecida como multimodal.

Seyranian et al., 1994, afirmam que ao considerar a diferenciação do autovalor em relação a uma única variável, se as matrizes de massa e rigidez são continuamente diferenciáveis, existem n funções continuamente diferenciáveis que representam os autovalores (repetidos) do problema.

Na prática, quando a diferença entre um dado autovalor e seu subsequente é muito pequena, digamos menos de 3%, esses autovalores são considerados múltiplos [Zuo et al., 2010]. No entanto, a sensibilidade das frequências múltiplas não é única, devido à falta de

propriedades de diferenciação usuais do subespaço abrangido pelos autovetores associados a múltiplas frequências [Ruiz et al., 2017].

Para o caso da viga biapoiada, a topologia ótima encontrada se assemelha com os resultados da literatura. Comparando os resultados encontrados (Tabela 5.2), a diferença entre os valores da frequência fundamental deste trabalho é de 1,6% para o trabalho de Du e Olhoff, 2007 e 3,4% para o trabalho de Huang et al., 2010a. Além disso, o número de iterações foi reduzido.

Tabela 5.2 Comparativo das frequências naturais em rad/s para viga biapoiada.

Autor	Método	ω_1	ω_2	ω_3	iterações
Du e Olhoff, 2007	SIMP	174,7	174,7	284,9	80
Huang et al., 2010a	BESO	171,5	173,3	220	55
Este trabalho	BESO	177,5	177,5	502,6	29

5.1.2 Viga biengastada com massa concentrada

O segundo teste foi realizado com base no trabalho desenvolvido por Yaghoobi e Hassani, 2017, de uma viga biengastada em ambas as extremidades, com uma massa adicionada em seu centro geométrico, conforme Figura 5.8. O domínio retangular de $14 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 0,01 \text{ m}$, é discretizado com 280×40 elementos. O objetivo é maximizar a frequência fundamental com uma fração de volume de 50,29%, mesmo valor utilizado em Yaghoobi e Hassani, 2017. A Tabela 5.3 mostra as propriedades do material empregado na viga.

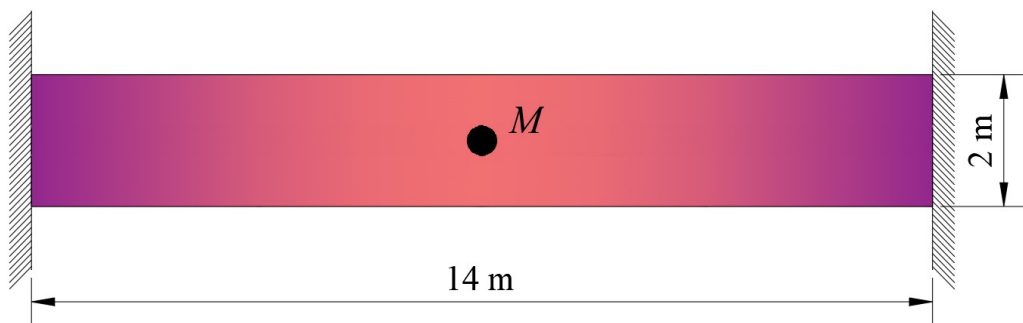


Figura 5.8 Caso 2, viga 2D biengastada em ambas as extremidades

Tabela 5.3 Propriedades do material empregado na viga biengastada

Módulo de Young (E)	25 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3
Massa específica (ρ)	2.500 kg/m ³
Massa concentrada (M)	125 kg

Os dados de entrada do método BESO são: taxa evolucionária $ER = 1,5\%$, $x_{min} = 10^{-6}$, raio de filtragem $r_{min} = 3$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,001$ e fator de penalidade $p = 6,0$.

Na Figura 5.9 pode ser visto a melhor topologia alcançada por Yaghoobi e Hassani, 2017, enquanto na Figura 5.10 é apresentado o resultado da otimização obtida neste trabalho.



Figura 5.9 Viga biengastada, topologia ótima obtida por Yaghoobi e Hassani, 2017.



Figura 5.10 Viga biengastada, topologia ótima obtida neste trabalho.

As topologias alcançadas em ambos os trabalhos apresentam diferenças, contudo, analisando os dados da Tabela 5.4, se percebe uma proximidade entre os resultados alcançados, com uma diferença de 0,16% entre os autores.

Tabela 5.4 Comparativo das frequências naturais em Hz para a viga biengastada.

Autor	Método	ω_1	ω_2	iterações
Yaghoobi e Hassani, 2017	SIMP	24,35	-	-
Este trabalho	BESO	24,31	57,5	50

Como os métodos empregados são diferentes, bem como nem todos os dados da referência são conhecidos, alterações nos dados de entrada implicam em variações no resultado final da topologia e da função objetivo, chegando-se numa topologia mais próxima. Assim, os resultados alcançados nesse trabalho são considerados suficientes

A Figura 5.11 apresenta o histórico de otimização para o problema em questão. Percebe-se que mesmo retirando material da estrutura, para este caso, o algoritmo implementado se mostra estável, sem variações bruscas durante o processo. Além disso, o processo de otimização confirma sua eficiência, uma vez que comparando com o valor inicial da frequência fundamental (24,5 Hz), se reduz ~50% do material inicial para uma diminuição < 1% da frequência.

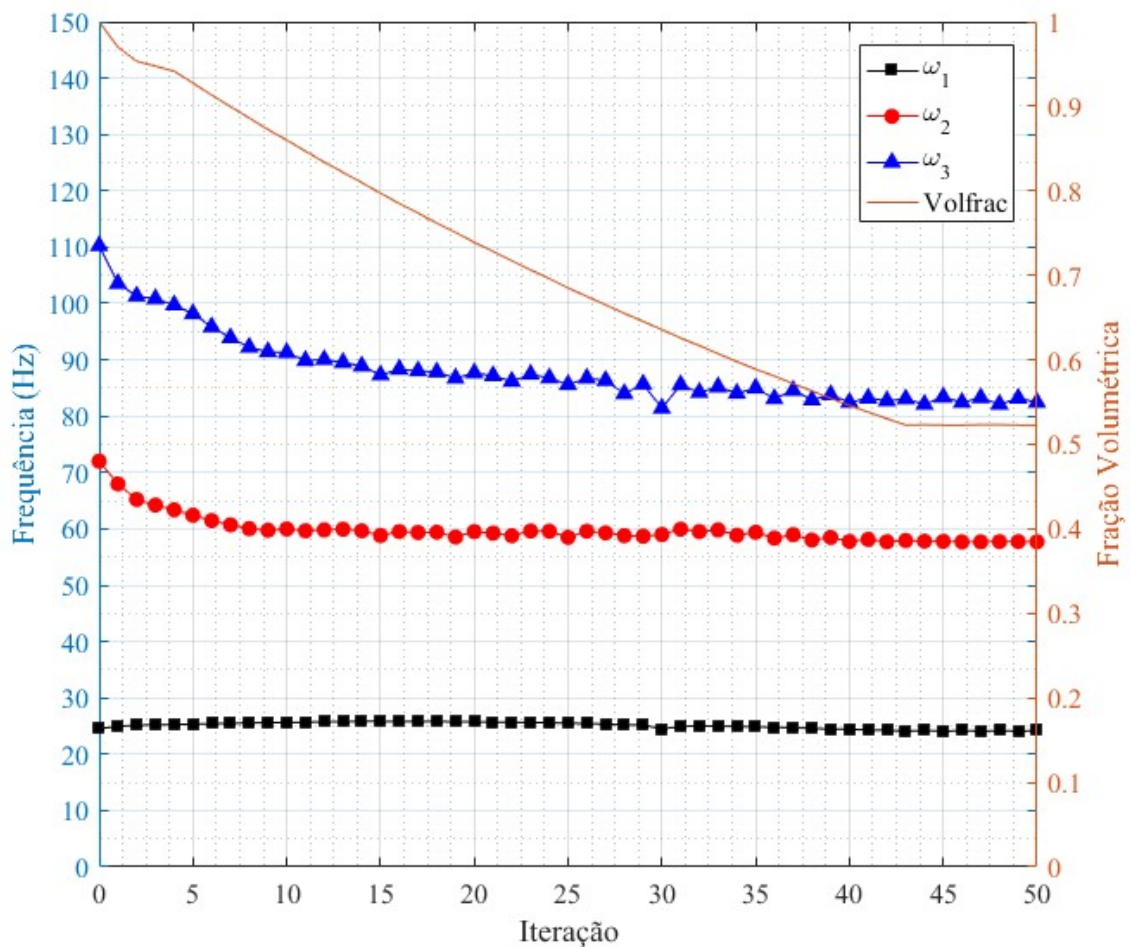


Figura 5.11 Histórico de otimização da viga biengastada implementada neste trabalho.

5.1.3 Placa retangular de alumínio

O terceiro exemplo realizado se baseou no trabalho de Steven e Xie, 1996. Para uma dada placa retangular de alumínio fixada em dois cantos em diagonal, com dimensões de $0,15 \text{ m} \times 0,1 \text{ m} \times 1 \text{ mm}$, conforme Figura 5.12.

O objetivo é maximizar a primeira frequência natural com uma fração de volume prescrita de 50%. O domínio discretizado conta com 45×30 elementos. As propriedades do material são mostradas na Tabela 5.5.

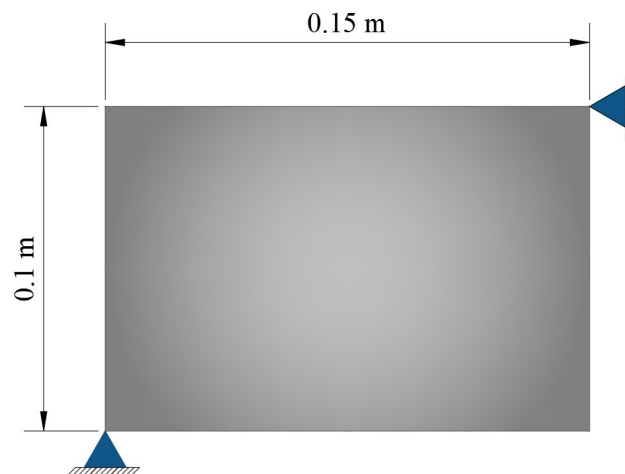


Figura 5.12 Placa retangular de alumínio

Tabela 5.5 Propriedades da placa retangular de alumínio

Módulo de Young (E)	70 GPa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3
Massa específica (ρ)	2700 kg/m ³

Os dados de entrada são: taxa evolucionária $ER = 0,06$, $x_{min} = 10^{-6}$, raio de filtragem $r_{min} = 2,5$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,001$ e fator de penalidade $p = 2,0$.

Na Figura 5.13 pode ser visto o projeto ótimo alcançado por Steven e Xie, 1996, enquanto na Figura 5.14 é apresentado o resultado da otimização obtida neste trabalho.

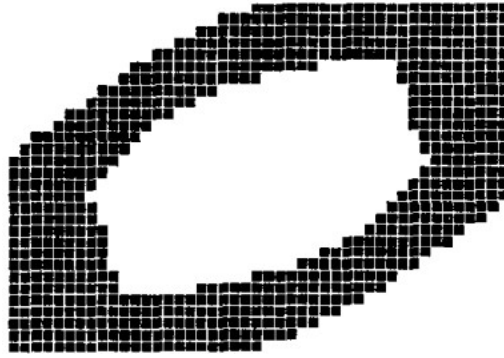


Figura 5.13 Placa retangular de alumínio otimizada por Steven e Xie, 1996.

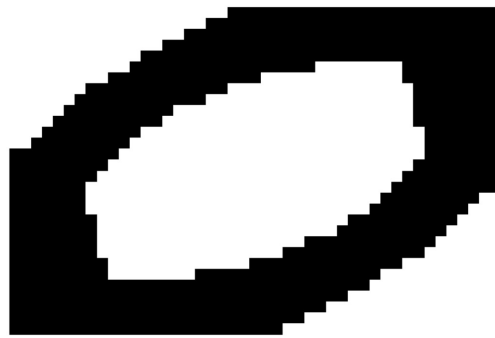


Figura 5.14 Placa retangular de alumínio otimizada neste trabalho.

Após 22 iterações se alcança uma frequência fundamental de 3467,8 Hz, que comparado ao valor inicial não otimizado de 2500 Hz inicial, corresponde a 38,7% de acréscimo da primeira frequência natural da placa, conforme Figura 5.15.

O valor da primeira frequência natural se aproxima do valor reportado na literatura, conforme Tabela 5.6, com uma diferença de 2,2%. Também se verifica uma redução no número de iterações.

Tabela 5.6 Comparativo das frequências naturais em Hz para a placa retangular de alumínio.

Autor	Método	ω_1	ω_2	ω_3	iterações
Steven e Xie, 1996	ESO	3392,8	-	-	85
Este trabalho	BESO	3467,3	4200	6000	22

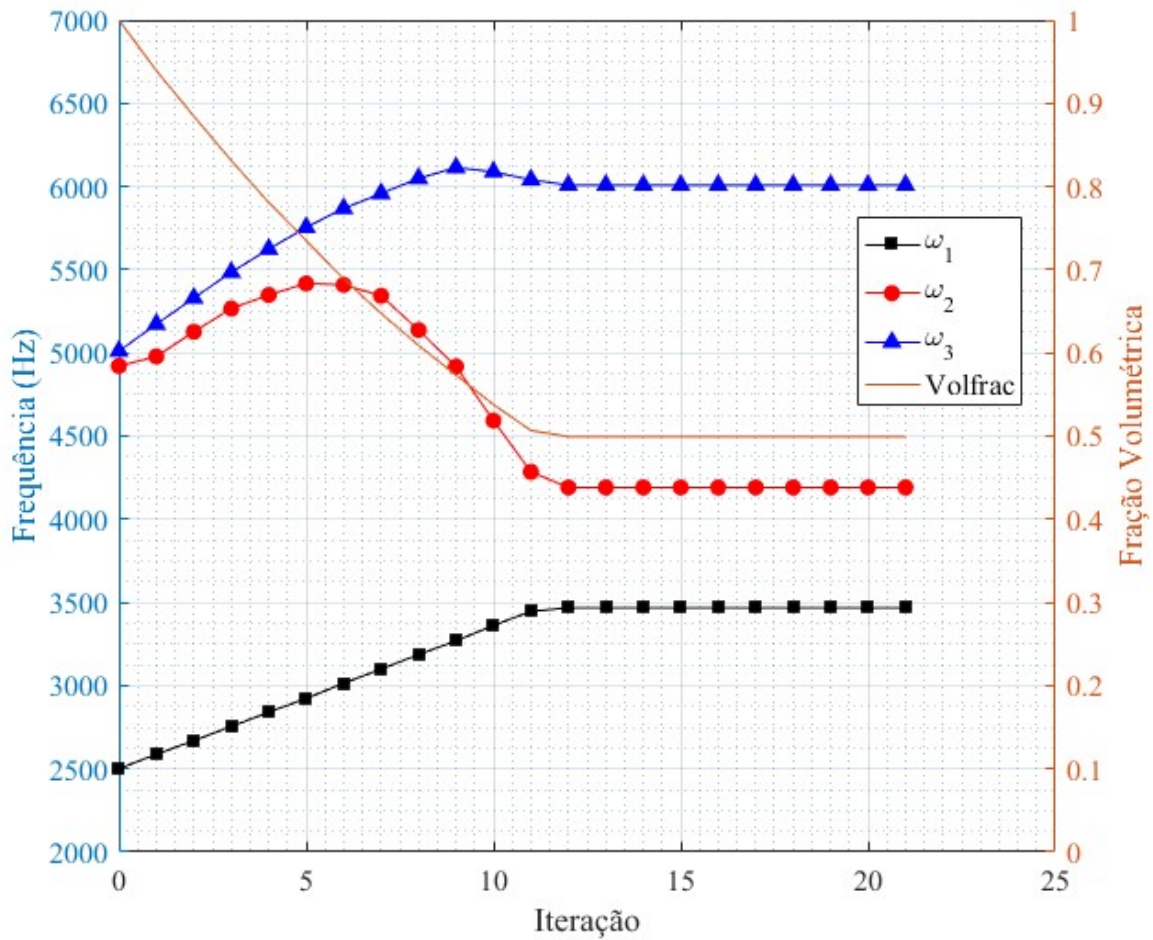


Figura 5.15 Histórico de otimização da placa retangular de alumínio deste trabalho.

5.2 Maximização da frequência fundamental em estruturas hierárquicas acopladas

Nesta seção, os ensaios numéricos são realizados a fim de validar o algoritmo com respeito a maximização da frequência fundamental de estruturas compostas por vários materiais, sendo experimentados os modelos do trabalho de Zuo et al., 2013, que trata de uma viga biengastada, conforme Figura 5.16, discretizada com 80×40 elementos na macroestrutura. Em todos os casos a viga é composta por microestrutura(s), discretizada(s) com 40×40 elementos. Também é atribuído Coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ em todos os casos.

Chamaremos daqui em diante de estrutura mais rígida para aquela possui maior módulo de Young, e de estrutura menos rígida aquela que possui menor módulo de Young.

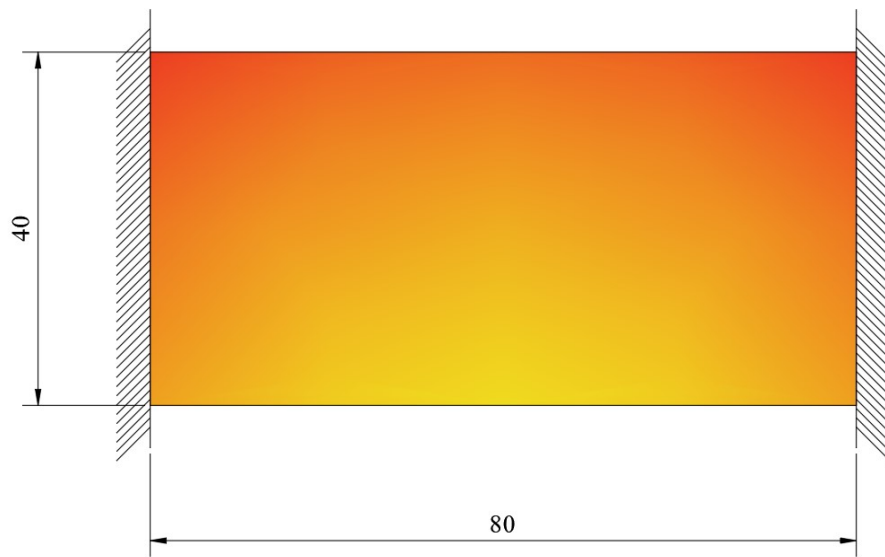


Figura 5.16 Viga biengastada nas extremidades

5.2.1 Microestrutura periódica com material único

Para este caso, objetiva-se alcançar a máxima frequência fundamental da estrutura, tendo ela reduzido em 50% o volume inicial, mas sem alteração da macroestrutura. A otimização se dará buscando o melhor leiaute para uma microestrutura periódica. As propriedades do material são mostradas na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 Propriedades do material empregado

Propriedades	Material 1
Módulo de Young (E)	1 Pa
Massa específica (ρ)	1,0 kg/m ³

Os dados de entrada do método BESO são: taxas evolucionárias $ER^{mic} = 5\%$, taxa de adição máxima $AR_{max}^{mic,1} = 5\%$, fração de volume prescrito $Volfrac^{mac} = 100\%$ e $Volfrac^{mic,1} = 50\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,01\%$ e fator de penalidade $p = 3,0$.

Na Figura 5.17 pode ser visto o projeto ótimo alcançado por Zuo et al., 2013, enquanto na Figura 5.18 é apresentado o resultado da otimização neste trabalho.

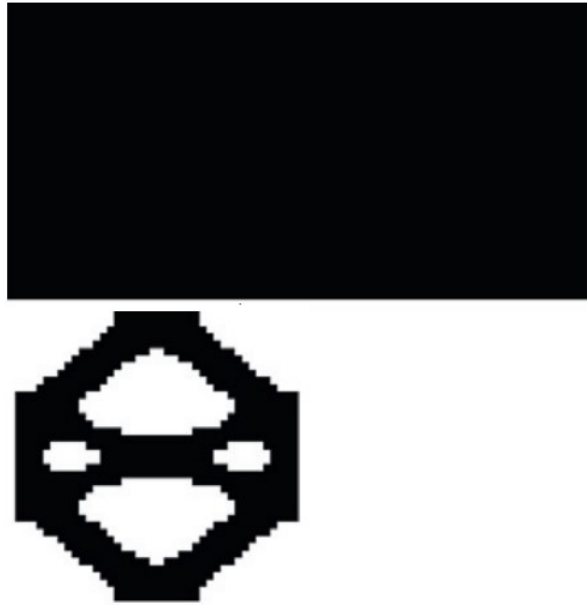


Figura 5.17 Microestrutura periódica otimizada com material único por Zuo et al., 2013.

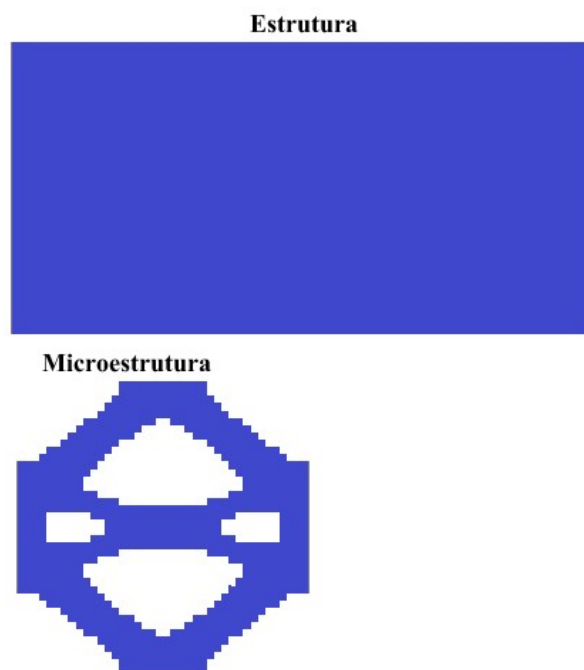


Figura 5.18 Microestrutura periódica otimizada com material único, neste trabalho.

Na Figura 5.19 é apresentado o histórico de otimização com a evolução realizada pela microestrutura. Enquanto na Tabela 5.8 são comparados os resultados alcançados.

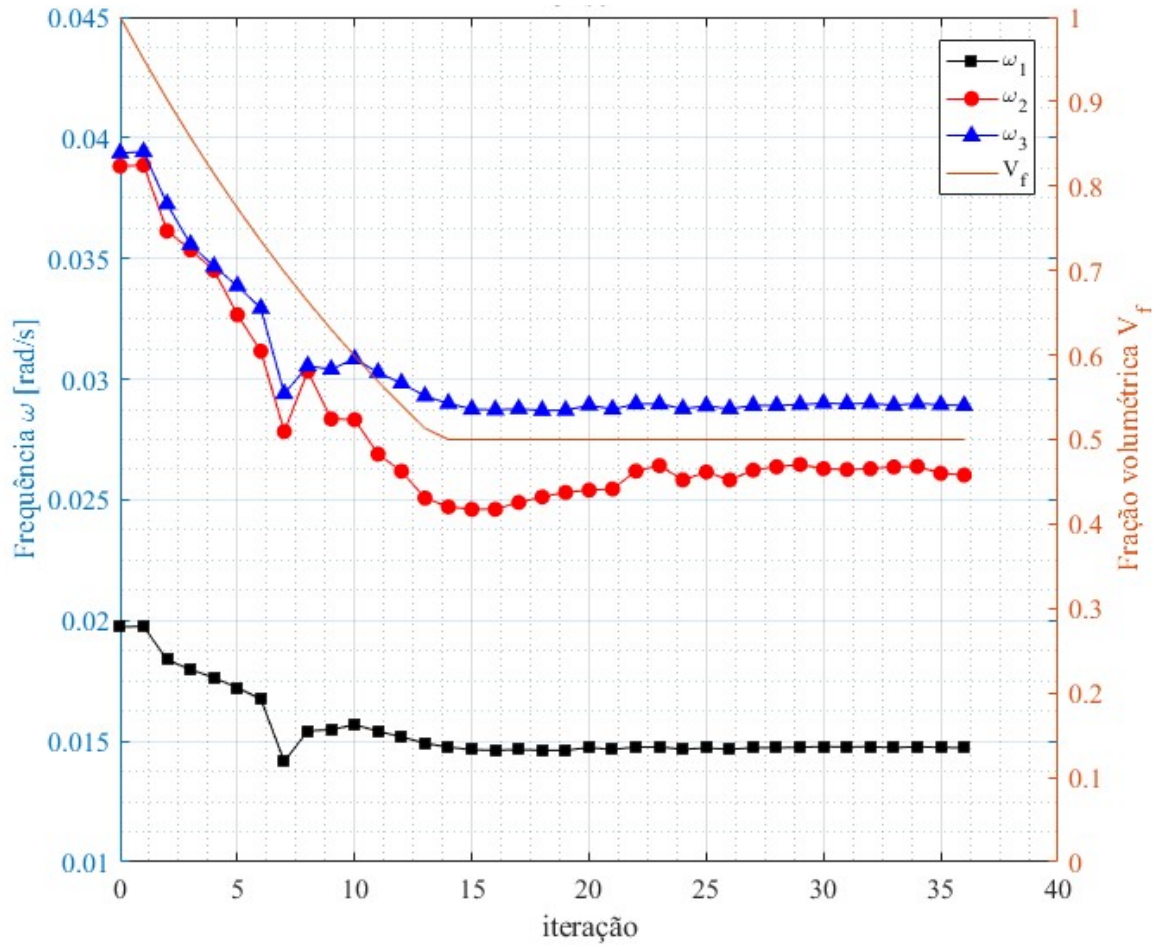


Figura 5.19 Histórico de otimização da microestrutura periódica com material único.

Tabela 5.8 Comparativo das frequências fundamentais em rad/s.

Autor	ω_1	ω_2	ω_3	iterações
Zuo et al., 2013	0,0148	-	-	41
Este trabalho	0,0147	0,0260	0,0289	36

Percebe-se haver uma semelhança entre as topologias encontradas nas microestruturas, assim como para os valores alcançados para a frequência fundamental da macroestrutura, idênticos até a terceira casa decimal. Outro item relevante a ser comparado são as matrizes homogeneizadas da microestrutura, nas Equações (5.1) e (5.2), são apresentadas segundo Zuo et al., 2013 e conforme este trabalho, respectivamente, sendo os valores entre elas idênticos até a segunda casa decimal.

$$\mathbf{D}^{H,mic,1} = \begin{bmatrix} 0,3230 & 0,1148 & 0 \\ & 0,1255 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,1117 \end{bmatrix}, [\text{Zuo et al., 2013}] \quad (5.1)$$

$$\mathbf{D}^{H,mic,1} = \begin{bmatrix} 0,3224 & 0,1155 & 0 \\ & 0,1243 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,1124 \end{bmatrix}, \text{este trabalho} \quad (5.2)$$

5.2.2 Microestrutura periódica composta por dois materiais

Semelhante ao anterior, neste caso a macroestrutura não será alterada, somente a microestrutura do material. Objetiva-se alcançar a máxima frequência fundamental da estrutura, com a redução em 50% do volume inicial. A otimização se dá buscando o melhor leiaute para uma microestrutura periódica composta por dois materiais, em que a fase 1 possui maior rigidez quando comparado com a fase 2. As propriedades dos materiais da microestrutura são mostradas na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 Propriedades dos materiais empregados na microestrutura

Propriedades	Material 1	Material 2
Módulo de Young (E)	1 Pa	0,2 Pa
Massa específica (ρ)	1,0 kg/m ³	2,0 kg/m ³

Os dados de entrada do método BESO são: taxa evolucionária $ER^{mic} = 5\%$, taxa de adição máxima $AR_{max}^{mic,1} = 5\%$, fração de volume prescrito $Volfrac^{mac} = 100\%$ e $Volfrac^{mic,1} = 50\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,01\%$ e fator de penalidade $p = 3,0$.

Na Figura 5.20 pode ser visto o projeto ótimo alcançado por Zuo et al., 2013, enquanto na Figura 5.21 é apresentado o resultado da otimização neste trabalho.

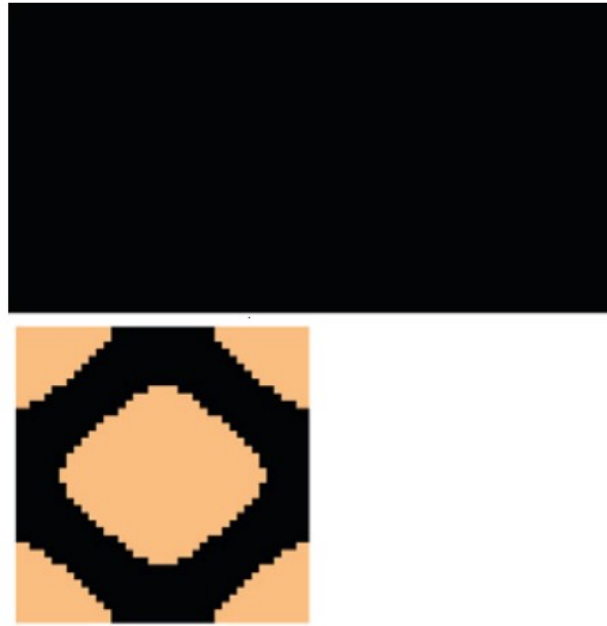


Figura 5.20 Microestrutura periódica otimizada com dois materiais por Zuo et al., 2013.

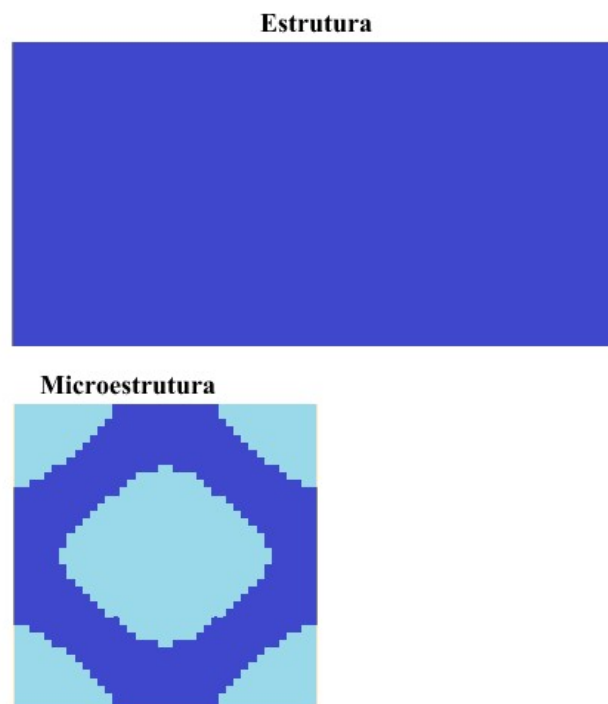


Figura 5.21 Microestrutura periódica otimizada com dois materiais, neste trabalho.

Na Figura 5.22 é apresentado o histórico de otimização com a evolução realizada pela microestrutura. Enquanto na Tabela 5.10 são comparados os resultados alcançados.

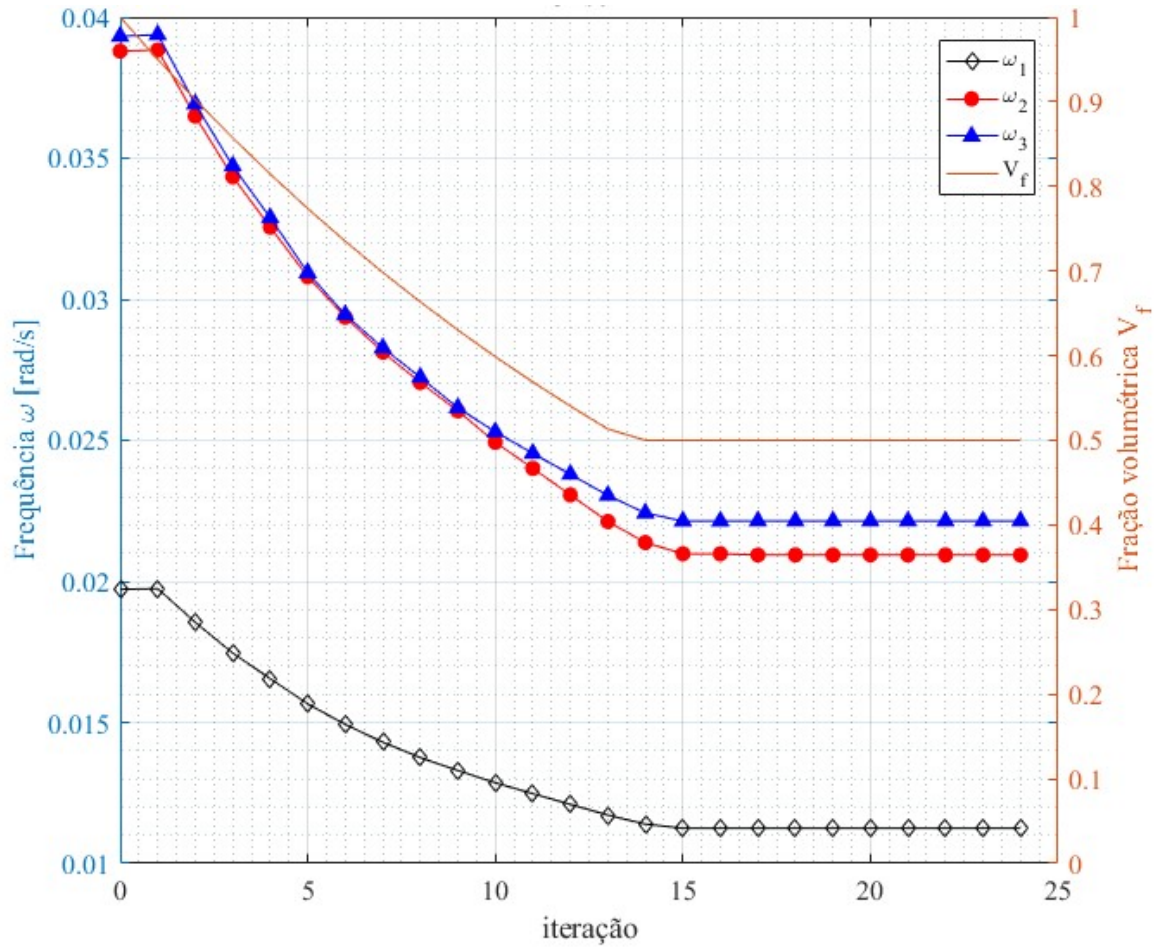


Figura 5.22 Histórico de otimização, da microestrutura periódica com dois materiais.

Tabela 5.10 Comparativo das frequências fundamentais em rad/s.

Autor	ω_1	ω_2	ω_3	iterações
Zuo et al., 2013	0,0113	-	-	45
Este trabalho	0,0113	0,0209	0,0221	24

As topologias encontradas nas microestruturas para este se assemelham, além disso os valores alcançados para a frequência fundamental da macroestrutura são idênticos até a quarta casa decimal. Nas matrizes homogeneizadas da microestrutura, Equações (5.3) e (5.4), conforme Zuo et al., 2013 e conforme este trabalho, respectivamente, é possível se notar valores idênticos entre elas até a segunda casa decimal.

$$\mathbf{D}^{H,mic,1} = \begin{bmatrix} 0,4976 & 0,1830 & 0 \\ & 0,4672 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,1972 \end{bmatrix}, [\text{Zuo et al.,2013}] \quad (5.3)$$

$$\mathbf{D}^{H,mic,1} = \begin{bmatrix} 0,4899 & 0,1823 & 0 \\ & 0,4555 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,1954 \end{bmatrix}, \text{ este trabalho} \quad (5.4)$$

5.2.3 Macroestrutura composta por duas microestruturas distintas

Este caso difere dos anteriores, pois a otimização se dá na macroestrutura, enquanto as microestruturas permanecem inalteradas. Objetiva-se alcançar a máxima frequência fundamental da estrutura, com a redução em 50% do volume inicial da macroestrutura. A otimização se dará buscando o melhor leiaute da macroestrutura, onde micro 1 e 2 são consideradas a fase mais rígida e menos rígida na macroestrutura, respectivamente. As propriedades dos materiais das microestruturas são mostradas na Tabela 5.11.

Tabela 5.11 Propriedades dos materiais empregados nas microestruturas

Propriedades	Microestrutura 1	Microestrutura 2
Módulo de Young (E)	1 Pa	0,2 Pa
Massa específica (ρ)	1,0 kg/m ³	2,0 kg/m ³

Os dados de entrada do método BESO são: taxa evolucionária $ER^{mac} = 5\%$, taxa de adição máxima $AR_{max}^{mac} = 5\%$, fração de volume prescrito $Volfrac^{mac} = 50\%$ e $Volfrac^{mic,1} = Volfrac^{mic,2} = 100\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,01\%$ e fator de penalidade $p = 3,0$.

Na Figura 5.23 pode ser visto o projeto ótimo alcançado por Zuo et al., 2013, enquanto na Figura 5.24 é apresentado o resultado da otimização deste trabalho.

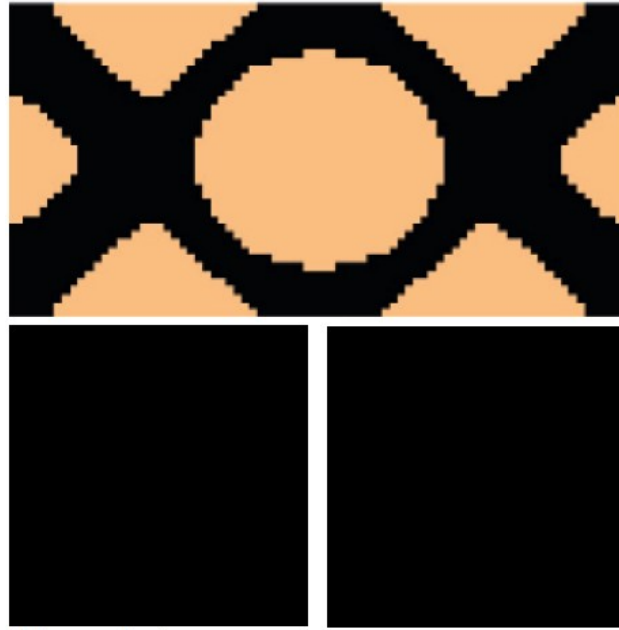


Figura 5.23 Macroestrutura otimizada com dois materiais por Zuo et al., 2013.

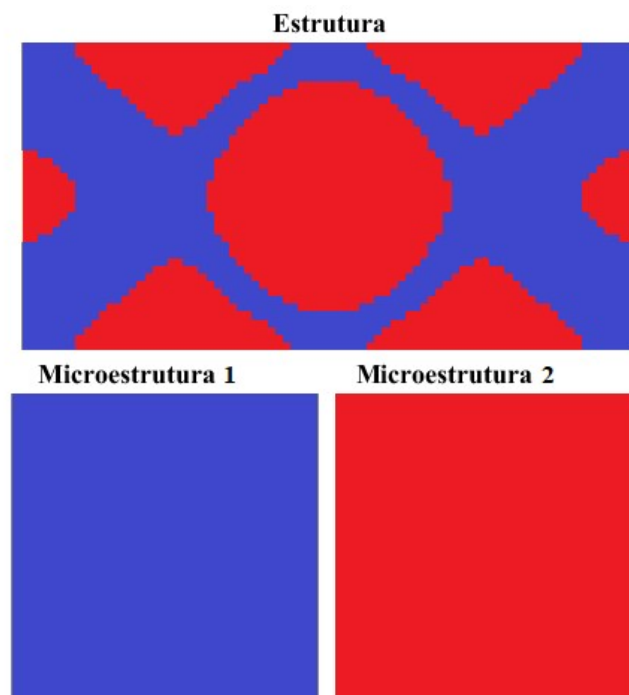


Figura 5.24 Macroestrutura otimizada com dois materiais neste trabalho.

Na Figura 5.25 é apresentado o histórico de otimização com a evolução realizada pela macroestrutura. Enquanto na Tabela 5.12 são comparados os resultados alcançados.

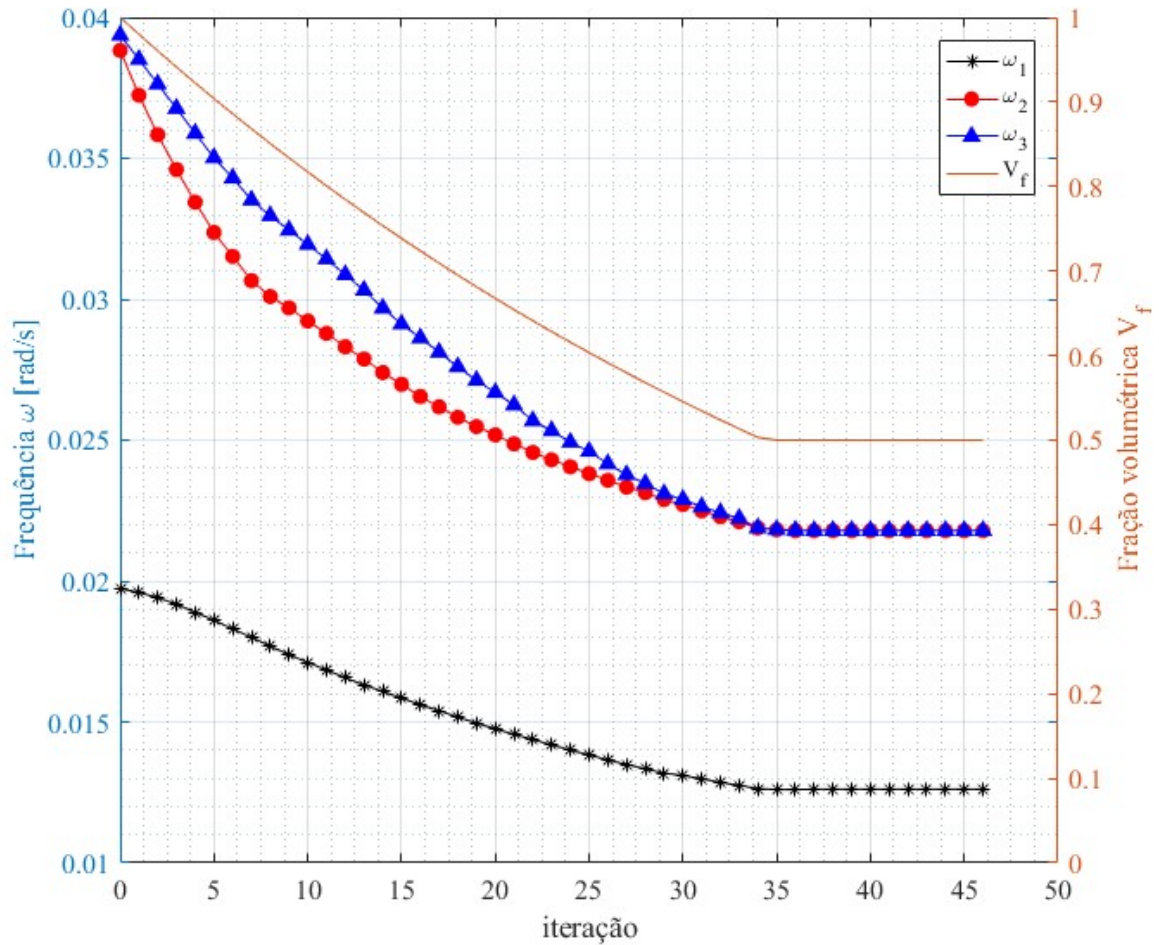


Figura 5.25 Histórico de otimização, da macroestrutura com dois materiais.

Tabela 5.12 Comparativo das frequências fundamentais em rad/s.

Autor	ω_1	ω_2	ω_3	iterações
Zuo et al., 2013	0,0127	-	-	44
Este trabalho	0,0126	0,0218	0,0218	47

As topologias encontradas nas macroestruturas para este caso se assemelham, além disso os valores alcançados para a frequência fundamental da macroestrutura são idênticos até a terceira casa decimal. As matrizes homogeneizadas da microestrutura, Equações (5.5) e (5.6), por Zuo et al., 2013 e conforme este trabalho, respectivamente, possuem valores idênticos para ambas microestruturas. Neste caso a matriz homogeneizada e não homogeneizada são idênticas.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^{H,mic,1} &= \begin{bmatrix} 1,0989 & 0,3297 & 0 \\ & 1,0989 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,3846 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}^{H,mic,2} &= \begin{bmatrix} 0,2198 & 0,0659 & 0 \\ & 0,2198 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,0769 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{D}^{H,mic,1} \\ \mathbf{D}^{H,mic,2} \end{aligned}} \right\} , [\text{Zuo et al.,2013}] \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^{H,mic,1} &= \begin{bmatrix} 1,0989 & 0,3297 & 0 \\ & 1,0989 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,3846 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}^{H,mic,2} &= \begin{bmatrix} 0,2198 & 0,0659 & 0 \\ & 0,2198 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,0769 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{D}^{H,mic,1} \\ \mathbf{D}^{H,mic,2} \end{aligned}} \right\} , \text{este trabalho} \quad (5.6)$$

5.2.4 Modelo sólido-vazio em ambas microestruturas

Neste caso o processo de otimização se dará tanto na macroestrutura quanto em ambas microestruturas. Objetiva-se alcançar a máxima frequência fundamental da estrutura, com a redução em 50% do volume inicial. A otimização na macroestrutura se dará buscando a melhor distribuição das microestruturas, em que a micro 1 é considerada mais rígida e 2 menos rígida, enquanto que as microestruturas terão seus volumes reduzidos em 50%. As propriedades dos materiais das microestruturas são mostradas na Tabela 5.13.

Tabela 5.13 Propriedades dos materiais empregados nas microestruturas

Propriedades	Microestrutura 1	Microestrutura 2
Módulo de Young (E)	1 Pa	0,2 Pa
Massa específica (ρ)	1,0 kg/m ³	2,0 kg/m ³

Os dados de entrada do método BESO são: taxas evolucionárias $ER^{mac} = ER^{mic,1} = ER^{mic,2} = 5\%$, taxas de adição máxima $AR_{max}^{mac} = AR_{max}^{mic,1} = AR_{max}^{mic,2} = 5\%$, fração de volume prescrito $Volfrac^{mac} = Volfrac^{mic,1} = Volfrac^{mic,2} = 50\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,01\%$ e fator de penalidade $p = 3,0$.

Na Figura 5.26 pode ser visto o projeto ótimo alcançado por Zuo et al., 2013, enquanto na Figura 5.27 é apresentado o resultado da otimização deste trabalho.



Figura 5.26 Macroestrutura e microestruturas otimizadas por Zuo et al., 2013.

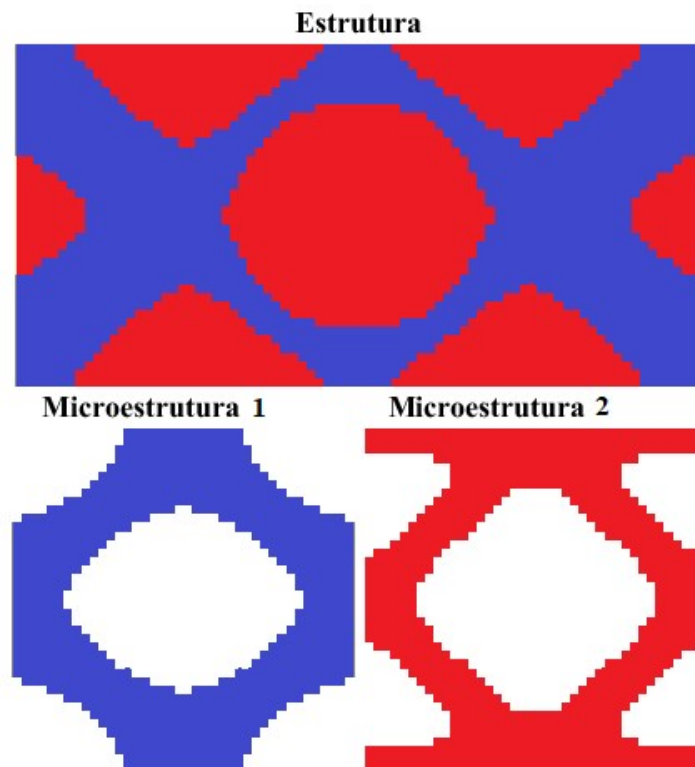


Figura 5.27 Macroestrutura e microestruturas otimizada neste trabalho.

Na Figura 5.28 é apresentado o histórico da otimização realizada, enquanto na Tabela 5.14 são comparados os resultados alcançados.

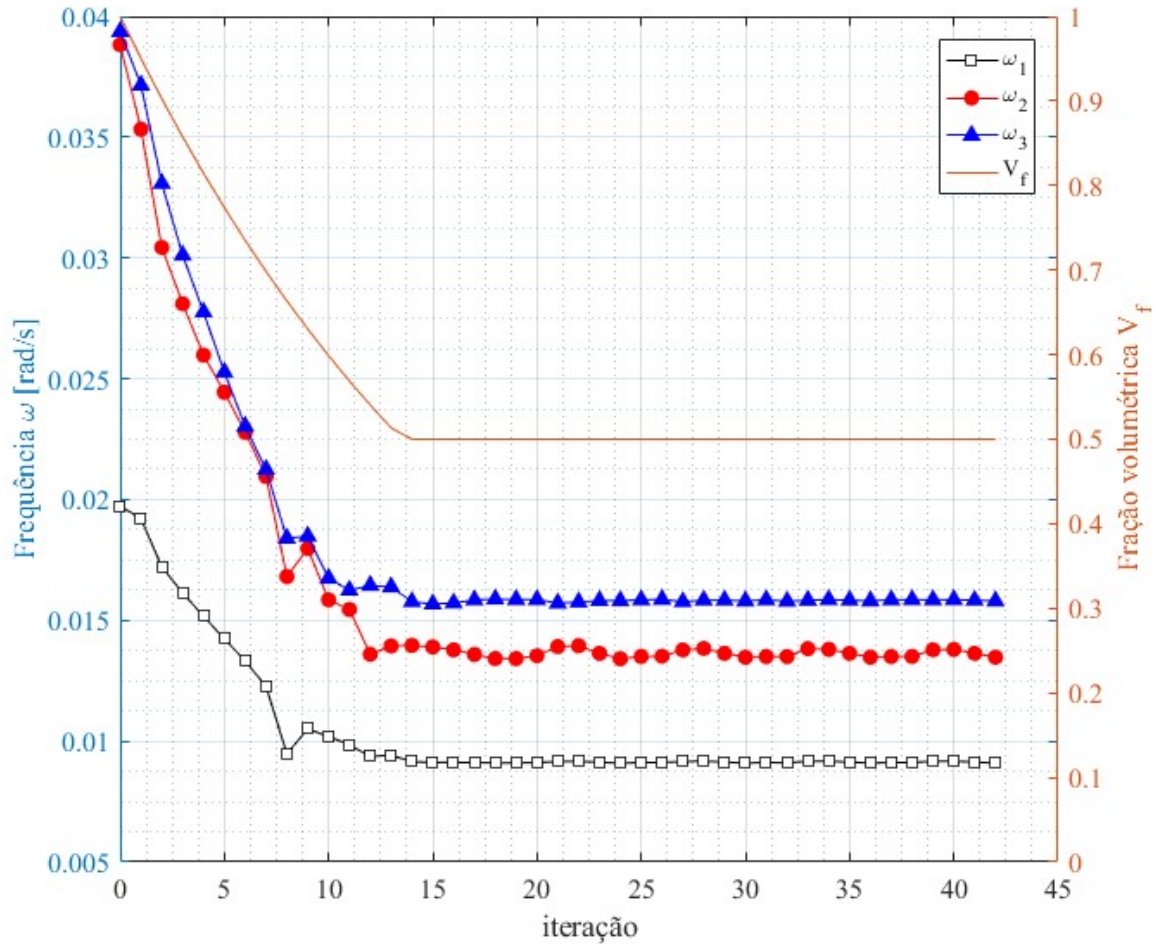


Figura 5.28 Histórico de otimização, da macroestrutura com dois materiais.

Tabela 5.14 Comparativo das frequências fundamentais em rad/s.

Autor	ω_1	ω_2	ω_3	iterações
Zuo et al., 2013	0,0092	-	-	45
Este trabalho	0,0092	0,0135	0,0158	42

As topologias encontradas nas macroestruturas para este caso se assemelham, assim como ambas as microestruturas, já os valores alcançados para a frequência fundamental da macroestrutura são idênticos. Sobre as matrizes homogeneizadas das microestruturas, Equações (5.7) e (5.8), segundo Zuo et al., 2013 e conforme este trabalho, respectivamente, em ambas as microestruturas os valores são idênticos até a segunda casa decimal, verifica-se a convergência dos resultados na busca pela solução ótima.

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{D}^{\text{H},mic,1} &= \begin{bmatrix} 0,2538 & 0,1448 & 0 \\ & 0,1660 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,1259 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}^{\text{H},mic,2} &= \begin{bmatrix} 0,0650 & 0,0222 & 0 \\ & 0,0322 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,0218 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} [\text{Zuo et al.,2013}] \quad (5.7)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{D}^{\text{H},mic,1} &= \begin{bmatrix} 0,2576 & 0,1436 & 0 \\ & 0,1635 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,1253 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}^{\text{H},mic,2} &= \begin{bmatrix} 0,0636 & 0,0216 & 0 \\ & 0,0309 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,0211 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\}, \text{este trabalho} \quad (5.8)$$

5.2.5 Microestruturas com dois materiais cada

Neste caso o processo de otimização se dá tanto na macroestrutura quanto em ambas microestruturas. Objetiva-se alcançar a máxima frequência fundamental da estrutura, com a redução em 50% do volume inicial. A otimização da macroestrutura busca a melhor leiaute para a distribuição das fases mais rígidas (micro 1) e menos rígidas (micro 2). Enquanto que as microestruturas, composta por duas fases cada, produzirá a busca da melhor distribuição de cada fase dentro de cada microestrutura. As propriedades dos materiais das microestruturas são mostradas na Tabela 5.15.

Tabela 5.15 Propriedades dos materiais empregados nas microestruturas

Propriedades	Microestrutura 1		Microestrutura 2	
	Fase 1	Fase 2	Fase 1	Fase 2
Módulo de Young (E)	1 Pa	0,2 Pa	0,3 Pa	0,05 Pa
Massa específica (ρ)	1,0 kg/m ³	2,0 kg/m ³	1,5 kg/m ³	0,8 kg/m ³

Os dados de entrada do método BESO são: taxas evolucionárias $ER^{\text{mac}} = ER^{\text{mic},1} = ER^{\text{mic},2} = 5\%$, taxas de adição máxima $AR^{\text{mac}} = AR^{\text{mic},1} = AR^{\text{mic},2} = 5\%$, fração de volume

prescrito $Volfrac^{mac} = Volfrac^{mic,1} = Volfrac^{mic,2} = 50\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,01\%$ e fator de penalidade $p = 3,0$.

Na Figura 5.29 pode ser visto o projeto ótimo alcançado por Zuo et al., 2013, enquanto na Figura 5.30 é apresentado o resultado da otimização deste trabalho.

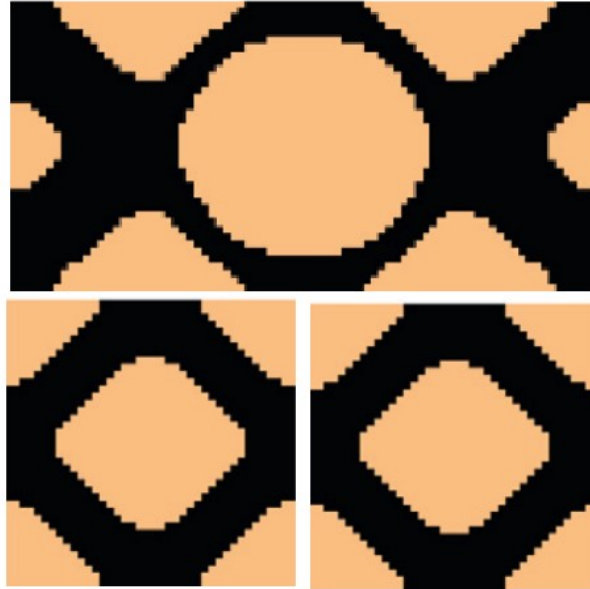


Figura 5.29 Macroestrutura e microestruturas otimizadas por Zuo et al., 2013.

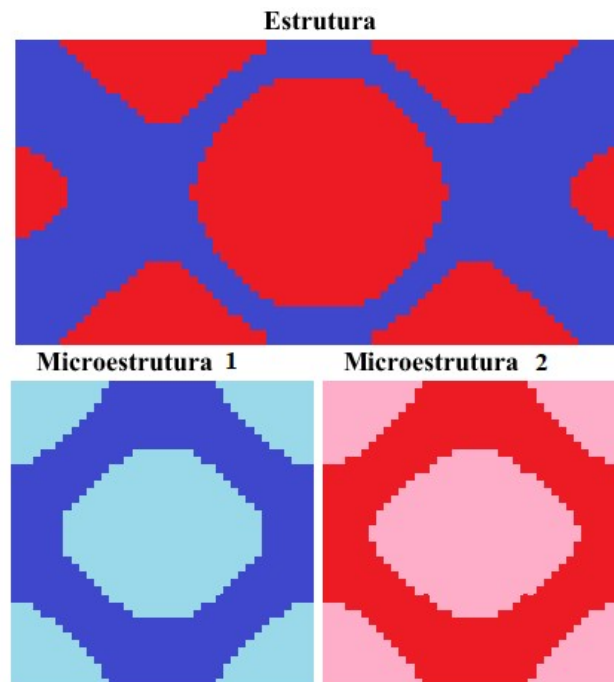


Figura 5.30 Macroestrutura e microestruturas otimizada neste trabalho.

Na Figura 5.31 é apresentado o histórico de otimização, enquanto na Tabela 5.16 são comparados os resultados alcançados.

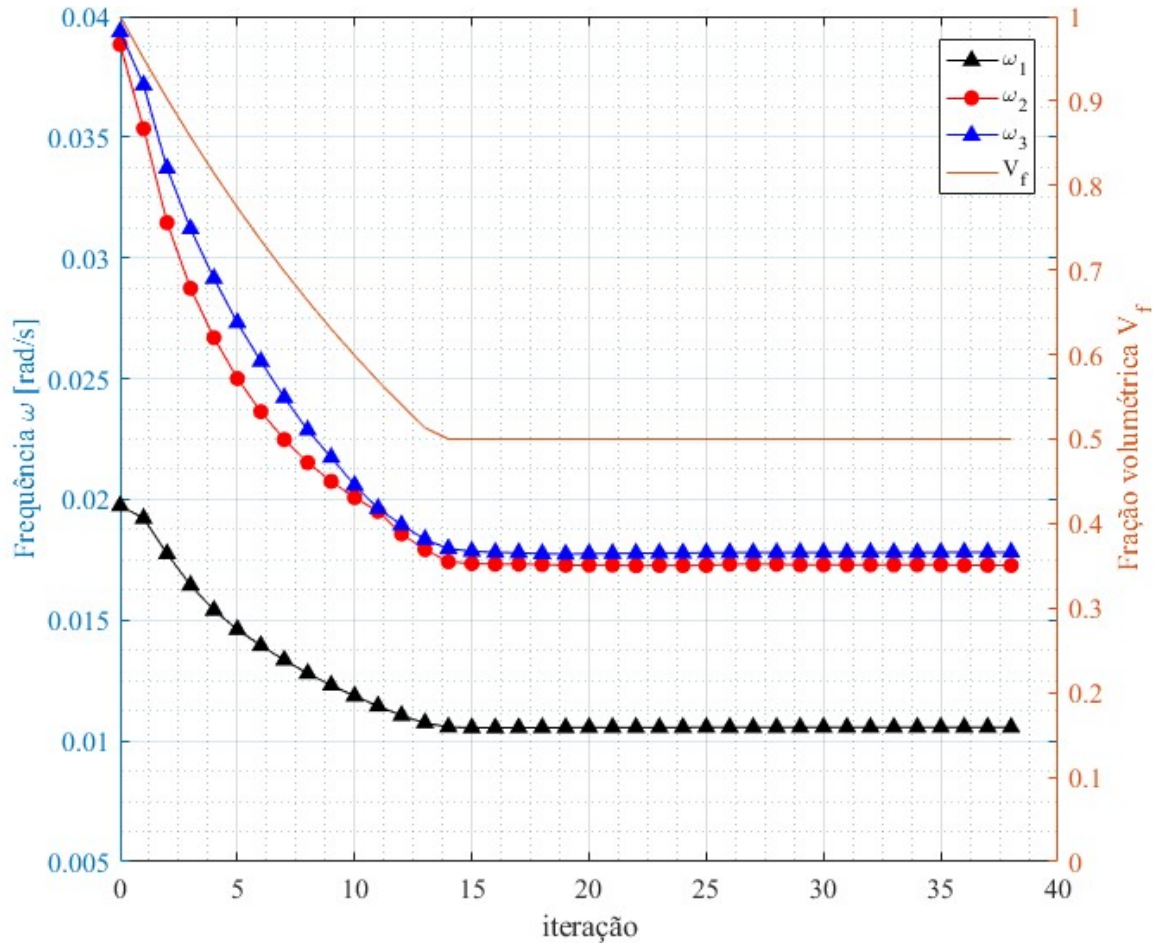


Figura 5.31 Histórico de otimização na macro e microestruturas com dois materiais.

Tabela 5.16 Comparativo das frequências fundamentais em rad/s.

Autor	ω_1	ω_2	ω_3	iterações
Zuo et al., 2013	0,0092	-	-	44
Este trabalho	0,0106	0,0173	0,0178	38

As topologias encontradas tanto na macro como nas microestruturas para este caso se assemelham. As matrizes homogeneizadas das microestruturas, Equações (5.9) e (5.10), apresentadas segundo Zuo et al., 2013 e conforme este trabalho, respectivamente, apresentam valores idênticos na primeira casa decimal para a microestrutura 1, e valores idênticos até a segunda casa decimal para a microestrutura 2.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^{\text{H},mic,1} &= \begin{bmatrix} 0,6084 & 0,2050 & 0 \\ & 0,5999 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,2300 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}^{\text{H},mic,2} &= \begin{bmatrix} 0,1101 & 0,0390 & 0 \\ & 0,1078 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,0430 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{H},mic,1} \\ \mathbf{D}^{\text{H},mic,2} \end{aligned}} \right\} \text{,[Zuo et al.,2013]} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^{\text{H},mic,1} &= \begin{bmatrix} 0,5902 & 0,2011 & 0 \\ & 0,5702 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,2240 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}^{\text{H},mic,2} &= \begin{bmatrix} 0,1084 & 0,0383 & 0 \\ & 0,1029 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,0420 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathbf{D}^{\text{H},mic,1} \\ \mathbf{D}^{\text{H},mic,2} \end{aligned}} \right\} \text{, este trabalho} \quad (5.10)$$

6 SEPARAÇÃO DE FREQUÊNCIAS

De grande valor no meio científico, a maioria dos estudos em otimização estrutural de frequência natural está associado a maximização da frequência fundamental para um volume prescrito, como visto em Lisboa et al., 2017, Hassani e Yaghoobi, 2017, Da et al., 2017b, entre outros.

Contudo Olhoff e Parbery, 1984, destacam que um projeto estrutural mais eficaz pode ser obtido pela maximização da separação entre duas frequências adjacentes, por exemplo, onde a frequência de excitação esteja entre duas frequências naturais separadas. Isso leva a redução da possibilidade de ocorrer o fenômeno de ressonância nessa faixa de frequência prescrita [Olhoff et al., 2012].

Um dos precursores desse assunto foi Troitskii, 1976, apresentando uma formulação matemática do problema de maximização da diferença entre a primeira e a segunda frequência natural, para um problema de vibração axial de uma barra com um dado comprimento e volume [apud Olhoff e Parbery, 1984]. Olhoff, 1989, apresenta um estudo de otimização estrutural multicritério via formulação de contorno para a maximização do espaçamento de frequências naturais adjacentes de uma viga engastada com uma massa na extremidade livre.

Em otimização topológica, os precursores para problemas envolvendo frequência natural foram Diaz e Kikuchi, 1992, com o projeto para a maximização da frequência empregando o método da homogeneização.

Ma et al., 1994, pontuam que o uso de apenas uma única frequência natural como função objetivo pode gerar problemas de descontinuidade nas sensibilidades da função, devido às altas variações que as frequências estruturais estão sujeitas, podendo acarretar em oscilação e divergência no processo de otimização. Logo, apresentam uma equação generalizada para problemas de frequência natural, que emprega um autovalor intermediário.

No trabalho desenvolvido por Jensen e Pedersen, 2006, foi apresentado um método para separação de duas frequências adjacentes quaisquer em modelos contínuos uni e bidimensionais, considerando estruturas compostas por bimateriais. Formulações distintas foram aplicadas para maximizar o intervalo, a diferença e a razão entre os quadrados das frequências, apontando para um intervalo maior utilizando o critério de diferença do que a razão.

Ampliando a discussão sobre problemas de maximização e separação de frequências adjacentes, Olhoff e Du (2007) aplicam o método das assíntotas móveis (MMA) em vigas biengastadas e placas tridimensionais com massas concentradas. Para isso, desenvolvem um método, detectando a multiplicidade dos autovalores e calculando os incrementos das variáveis para o problema específico (separação ou maximização). Os resultados foram comparados com outras técnicas de separação como, por exemplo, a do autovalor intermediário, se mostrando mais eficiente.

Como o custo computacional é um problema recorrente em otimização de frequência natural, Bogomolny, 2010, propõe um método baseado no método de aproximação combinada (CA) e na análise de sensibilidade adjunta, para reduzir o tempo computacional necessário em problemas de otimização de vibração livre. Modos localizados são resolvidos aplicando um sistema de penalização. Testes numéricos são realizados para maximização da frequência fundamental e separação de duas frequências consecutivas.

Utilizando o método ESO, problemas de separação de frequência são vistos em Xie e Steven, 1996, enquanto que em uma abordagem bem mais recente, Lopes et al., 2017, aplicam o método BESO em uma viga biapoada com o objetivo de maximizar o intervalo entre frequências adjacentes, sendo este um ponto de atenção no projeto de estruturas, como pode ser observado em Hassani e Yaghoobi, 2017; Calixto, 2015; Zargham et al., 2016.

6.1 Otimização topológica para problemas de separação de frequências

A função de otimização para a separação de duas frequências consecutivas, pode ser escrita como na Equação (6.1), partindo-se das equações apresentadas em Ma et al., 1994.

$$(\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2) = \left\{ \left[\sum_{j=n+1}^m \frac{1}{(\omega_{n_j}^2 - \omega_0^2)} \right]^{-1} - \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_{n_j}^2)} \right]^{-1} \right\} \quad (6.1)$$

onde ω_0 representa uma frequência entre a n -ésima frequência natural e sua consecutiva. A derivada da Equação (6.1), com relação a uma variável de projeto x_i , é expressa pela Equação (6.2), que representa a sensibilidade da função.

$$\alpha_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega_{n+1}^2 - \omega_n^2) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\sum_{j=n+1}^m \frac{1}{(\omega_{n_j}^2 - \omega_0^2)} \right]^{-2} \sum_{j=n+1}^m \frac{1}{(\omega_{n_j}^2 - \omega_0^2)^2} \mathbf{u}_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \omega_{n_j}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) \mathbf{u}_j + \\ - \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_{n_j}^2)} \right]^{-2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_{n_j}^2)^2} \mathbf{u}_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \omega_{n_j}^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) \mathbf{u}_j \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

6.2 Otimização topológica para problemas de separação de frequências em estruturas multiescala acopladas

A função de otimização para problemas de separação de frequências em estruturas multiescala acopladas pode ser escrita através das Equações (4.7), (4.19) - (4.21) e (6.3), tomando-se duas microestruturas distintas.

$$\text{Encontrar: } \mathbf{X} = \{ \mathbf{x}^{mac}, \mathbf{x}^{mic,1}, \mathbf{x}^{mic,2} \mid \begin{array}{l} x_i^{mac} = x_{min} \vee 1 \\ x_j^{mic,1} = x_{min} \vee 1 \\ x_j^{mic,2} = x_{min} \vee 1 \end{array} \}$$

$$\text{Que maximize: } \mathcal{A} \quad (6.3)$$

$$\text{Sujeito à: } (\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

$$\text{Volfrac}^{mac} - \sum_{i=1}^M x_i^{mac} V_i^{mac} = 0$$

$$\text{Volfrac}^{mic,1} - \sum_{j=1}^N x_j^{mic,1} V_j^{mic,1} = 0$$

$$\text{Volfrac}^{mic,2} - \sum_{j=1}^N x_j^{mic,2} V_j^{mic,2} = 0$$

A função \mathcal{A} , para um caso desejável, de minimização de uma frequência natural e maximização da frequência consecutiva, é definida na Equação (6.4), determinando a maximização do intervalo entre a k -ésima frequência e a conseguinte, em que k representa a frequência de referência.

$$\mathcal{A} = (\omega_{k+1} - \omega_k) \quad (6.4)$$

Para o caso de estruturas multiescala acopladas, a sensibilidade na escala macroestrutural é determinada pela derivação da função objetivo com respeito a variável de projeto macro x_i^{mac} , conforme apresentada na Equação (6.5).

$$\begin{aligned} \alpha_i^{mac} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i^{mac}} = \frac{\partial}{\partial x_i^{mac}} (\omega_{k+1_i} - \omega_{k_i}) \\ &= \left(\frac{\partial \omega_{k+1_i}}{\partial x_i^{mac}} - \frac{\partial \omega_{k_i}}{\partial x_i^{mac}} \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

A Equação (6.5) pode ser reescrita como na Equação (6.6).

$$\alpha_i^{mac} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i^{mac}} = \left[\left(\frac{1}{2\omega_{k+1_i}} \frac{\partial \omega_{k+1_i}^2}{\partial x_i^{mac}} \right) - \left(\frac{1}{2\omega_{k_i}} \frac{\partial \omega_{k_i}^2}{\partial x_i^{mac}} \right) \right] \quad (6.6)$$

Baseado nas Equações (4.28) e (6.6), a sensibilidade da função de afastamento da k -ésima frequência natural e de sua consecutiva, com relação a i -ésima variável de projeto da macroestrutura, é apresentada na Equação (6.7), baseado na hipótese de $\partial u / \partial x_i = 0$ ao longo das iterações.

$$\alpha_i^{mac} = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i^{mac}} = \frac{1}{2(\omega_{k+1_i} \omega_{k_i})} \left\{ \begin{aligned} &\omega_{k_i} \left[\mathbf{u}_{k+1_i}^T \left[p(x_i^{mac})^{(p-1)} (\mathbf{K}_{e_i}^1 - \mathbf{K}_{e_i}^2) - \omega_{k+1_i}^2 (\mathbf{M}_{e_i}^1 - \mathbf{M}_{e_i}^2) \right] \mathbf{u}_{k+1_i} \right] + \\ &-\omega_{k+1_i} \left[\mathbf{u}_{k_i}^T \left[p(x_i^{mac})^{(p-1)} (\mathbf{K}_{e_i}^1 - \mathbf{K}_{e_i}^2) - \omega_{k_i}^2 (\mathbf{M}_{e_i}^1 - \mathbf{M}_{e_i}^2) \right] \mathbf{u}_{k_i} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Similarmente, a sensibilidade na microescala se determina pela diferenciação da função objetivo com relação a variável de projeto microestrutural x_j^{mic} , conforme é apresentada na equação (6.8).

$$\begin{aligned} \alpha_j^{mic} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j^{mic}} = \frac{\partial}{\partial x_j^{mic}} (\omega_{k+1_j} - \omega_{k_j}) \\ &= \left(\frac{\partial \omega_{k+1_j}}{\partial x_j^{mic}} - \frac{\partial \omega_{k_j}}{\partial x_j^{mic}} \right) \\ &= \left[\left(\frac{1}{2\omega_{k+1_j}} \frac{\partial \omega_{k+1_j}^2}{\partial x_j^{mic}} \right) - \left(\frac{1}{2\omega_{k_j}} \frac{\partial \omega_{k_j}^2}{\partial x_j^{mic}} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.8)$$

A partir da Equação (6.8), e considerando a Equação (4.46), é apresentada a Equação (6.9), que representa a sensibilidade da função \mathcal{A} , de afastamento da k -ésima frequência natural e de sua subsecutiva, com relação a j -ésima variável de projeto da microestrutura.

$$\alpha_j^{mic} = \frac{p(x_j^{mic})^{(p-1)}}{2|Y|(\omega_{k+1_j}^2 \omega_{k_j}^2)} \left[\begin{array}{l} \omega_{k_j}^2 \sum_{j=1}^M \left\{ \mathbf{u}_{k+1_j}^T \left[\int_{V_i} \mathbf{B}_e^T \left[\int_Y (\mathbf{P}_j^T (\mathbf{E}^1 - \mathbf{E}^2) \mathbf{P}_j) dY \right] \mathbf{B}_e dV_i \right] \mathbf{u}_{k+1_j} \right\} + \\ - \omega_{k+1_j}^2 \sum_{j=1}^M \left\{ \mathbf{u}_{k_j}^T \left[\int_{V_i} \mathbf{B}_e^T \left[\int_Y (\mathbf{P}_j^T (\mathbf{E}^1 - \mathbf{E}^2) \mathbf{P}_j) dY \right] \mathbf{B}_e dV_i \right] \mathbf{u}_{k_j} \right\} \end{array} \right] \quad (6.9)$$

sendo \mathbf{P}_j definido como:

$$\mathbf{P}_j = (\mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{u}_j) \quad (6.10)$$

7 ENSAIOS NUMÉRICOS

Com a validação do algoritmo de maximização da frequência fundamental para estruturas compostas por material único e bimaterial, a implementação foi ampliada, com a inserção das equações de separação de frequência.

Os resultados envolvendo separação de frequências são apresentados a seguir, sendo todas as malhas discretizadas com elementos lineares quadrilaterais de tensão plana com quatro nós cada.

7.1 Separação de frequências em estruturas com material único

Os ensaios numéricos se iniciam com a verificação da separação de frequências para estruturas compostas por um único tipo de material, os exemplos aqui utilizados são empregados nos trabalhos de Du e Olhoff, 2007, Lopes et al., 2017 e Steven e Xie, 1996.

7.1.1 Viga biapoiada ($\omega_2 - \omega_1$).

Como visto na Figura 5.7 e na Tabela 5.2, durante o processo de otimização surgem frequências multimodais, que correspondem às frequências com autovalores de magnitudes idênticas ou muito próximas. Com essa motivação, parte-se do mesmo modelo utilizado na Figura 5.1, cujo domínio é retangular com dimensões de $8 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, discretizado com 320×40 elementos. O objetivo para este caso é maximizar a separação entre as frequências naturais de número dois e um, sujeito à uma redução de 50% do volume. Na Tabela 5.1 são mostradas as propriedades do material empregado na viga.

Os dados de entrada são: taxa evolucionária $ER = 0,05$, $x_{min} = 10^{-3}$, raio de filtragem $r_{min} = 3,5$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,001$, $\omega_0 = 50 \text{ Hz}$ e fator de penalidade $p = 6,0$. Na Figura 7.1 é mostrada a topologia obtida por Du e Olhoff para a maximização da segunda frequência natural, enquanto que na Figura 7.2 é apresentada a topologia obtida com o método BESO, conforme implementado neste trabalho, para a maximização de $(\omega_2 - \omega_1)$.



Figura 7.1 Topologia ótima para a maximização de ω_2 , por Du e Olhoff, 2007.



Figura 7.2 Topologia para a maximização de $(\omega_2 - \omega_1)$ neste trabalho.

Ao fim de 24 iterações se alcança uma diferença entre a segunda e a primeira frequência de 70,27 Hz, conforme Figura 7.3. Na Tabela 7.1 são comparados os valores encontrados nas condições: (a) não otimizada; (b) com a maximização da frequência fundamental, realizada neste trabalho (visto na Tabela 5.2), e (c) com a maximização da separação entre as frequências naturais de número dois e um, realizada neste trabalho.

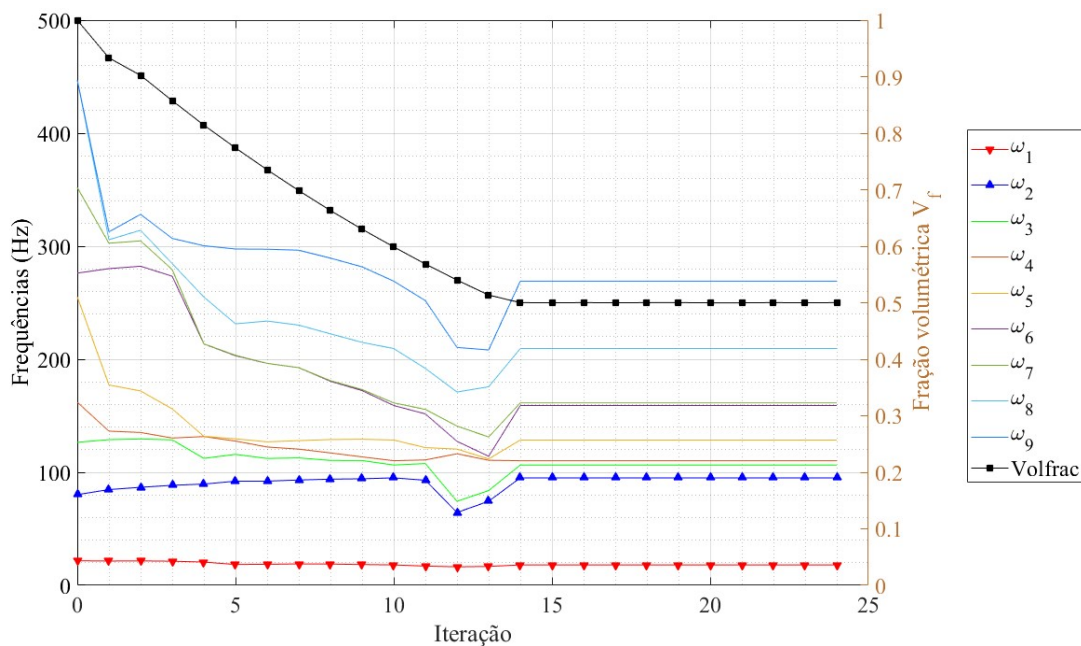
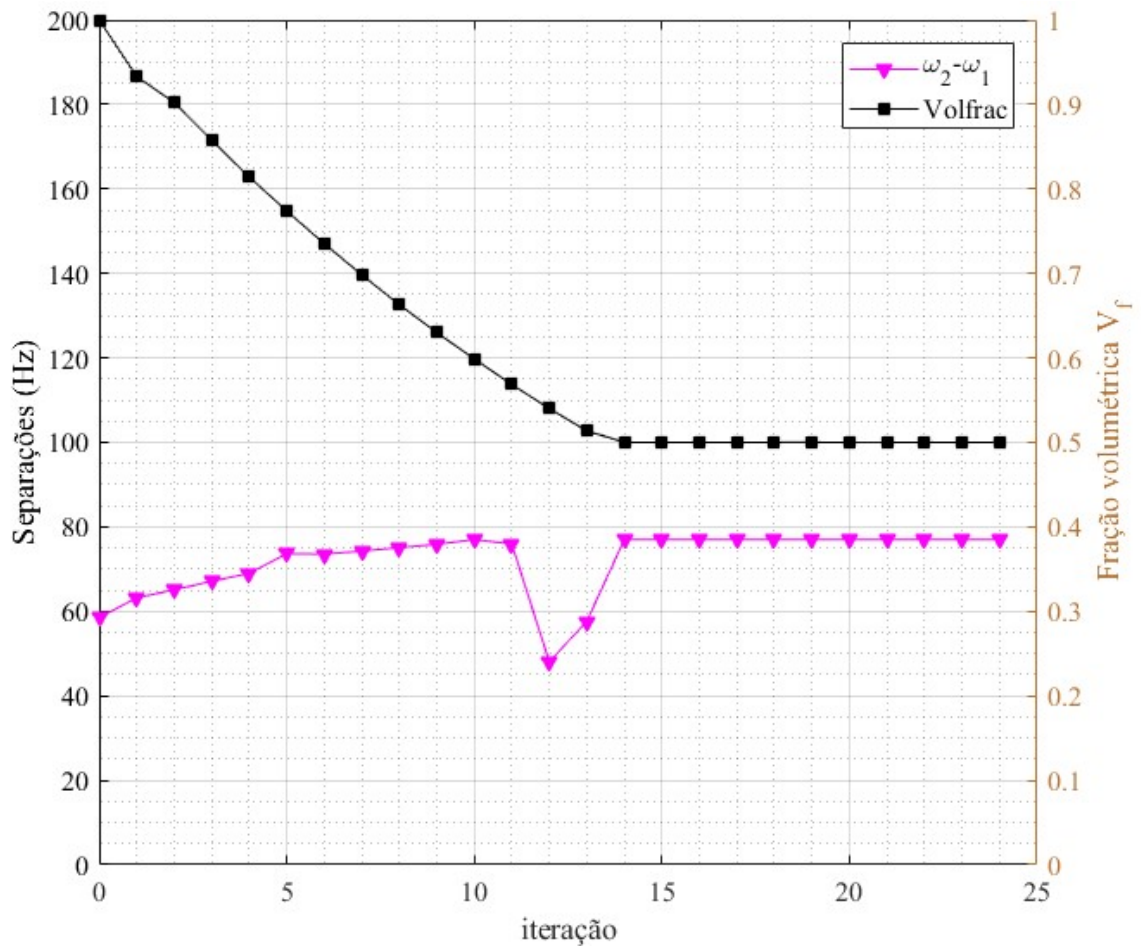


Figura 7.3 Histórico de otimização $(\omega_2 - \omega_1)$ viga biapoiada.

Tabela 7.1 Comparativo das frequências (Hz) para a estrutura otimizada.

Condição	ω_1	ω_2	ω_3	$(\omega_2 - \omega_1)$	iterações
(a)	21,9	80	127,3	58,1	-
(b)	28,25	28,25	80	0	28
(c)	20	90,27	105	70,27	24

Na Figura 7.4 é destacada a evolução da função objetivo durante a separação da primeira e da segunda frequências naturais, neste trabalho.

Figura 7.4 Evolução da otimização para $(\omega_2 - \omega_1)$ deste trabalho.

Em formulações de otimização paramétrica, para problemas dessa natureza, às vezes é assumida condição de periodicidade múltipla no projeto. No entanto, se percebe não ser necessário, pois em geral, com a maximização do espaço entre duas frequências naturais

consecutivas, chega-se a uma periodicidade de projeto significativa, conforme Olhoff et al., 2012.

7.1.2 Viga biapoçada ($\omega_3 - \omega_2$) – caso 2.

Mesmo sendo semelhante ao caso anterior, a opção pela realização desse caso se justifica por haver um trabalho recente (Lopes et al., 2017) implementado com o mesmo método BESO, permitindo outras comparações.

Foi considerado uma viga biapoçada em ambas as extremidades, conforme Figura 7.5. O domínio é retangular com dimensões de $10\text{ m} \times 1\text{ m}$, discretizado com 420×42 elementos. O objetivo é maximizar a separação entre a terceira e a segunda frequências naturais, com uma fração de volume de 60%. Na Tabela 7.2 são mostradas as propriedades do material empregado na estrutura.

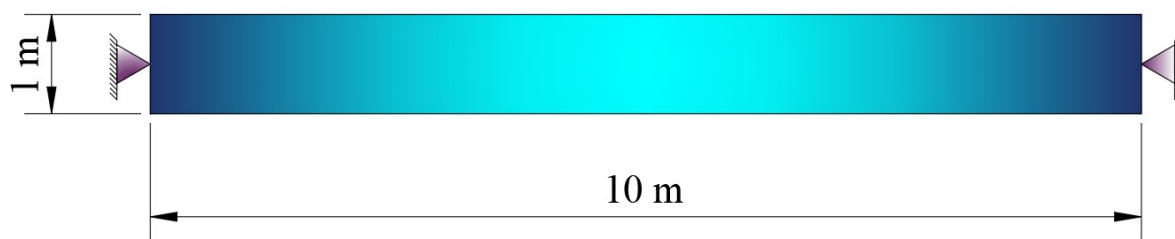


Figura 7.5 Viga biapoçada em ambas as extremidades

Tabela 7.2 Propriedades do material empregado na viga biapoçada

Módulo de Young (E)	1×10^6 Pa
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3
Massa específica (ρ)	1 kg/m^3

Os dados de entrada do método BESO empregados neste trabalho foram: taxa evolucionária $ER = 10\%$, $x_{min} = 10^{-3}$, raio de filtragem $r_{min} = 3,5$ elementos, erro máximo admissível $\tau^* = 0,001$, $\omega_0 = 80,57$ Hz e fator de penalização $p = 5,0$. Enquanto que os utilizados por Lopes et al., 2017, foram: volume prescrito de 60%, $ER = 2\%$, $AR_{max} = 1\%$, $p = 5$, $x_{min} = 10^{-6}$, $r_{min} = 75$ mm e erro máximo admissível $\tau^* = 0,01\%$.

Na Figura 7.6 pode ser vista a topologia ótima encontrada por Lopes, et al., 2017, enquanto que na Figura 7.7 é apresentado o resultado da otimização obtida com o método BESO, conforme implementado neste trabalho.



Figura 7.6 Topologia para separação da segunda e terceira frequências por Lopes, et al., 2017.



Figura 7.7 Topologia para separação da segunda e terceira frequências neste trabalho.

Na Figura 7.8 pode ser visto o histórico de otimização para as cinco primeiras frequências naturais obtidas por Lopes, et al., 2017, enquanto que na Figura 7.9, são apresentadas as nove primeiras frequências naturais, e a variação da fração de volume obtidos neste trabalho. Já a evolução do crescimento da separação entre as frequências durante o processo de iteração, é destacada na Figura 7.10.

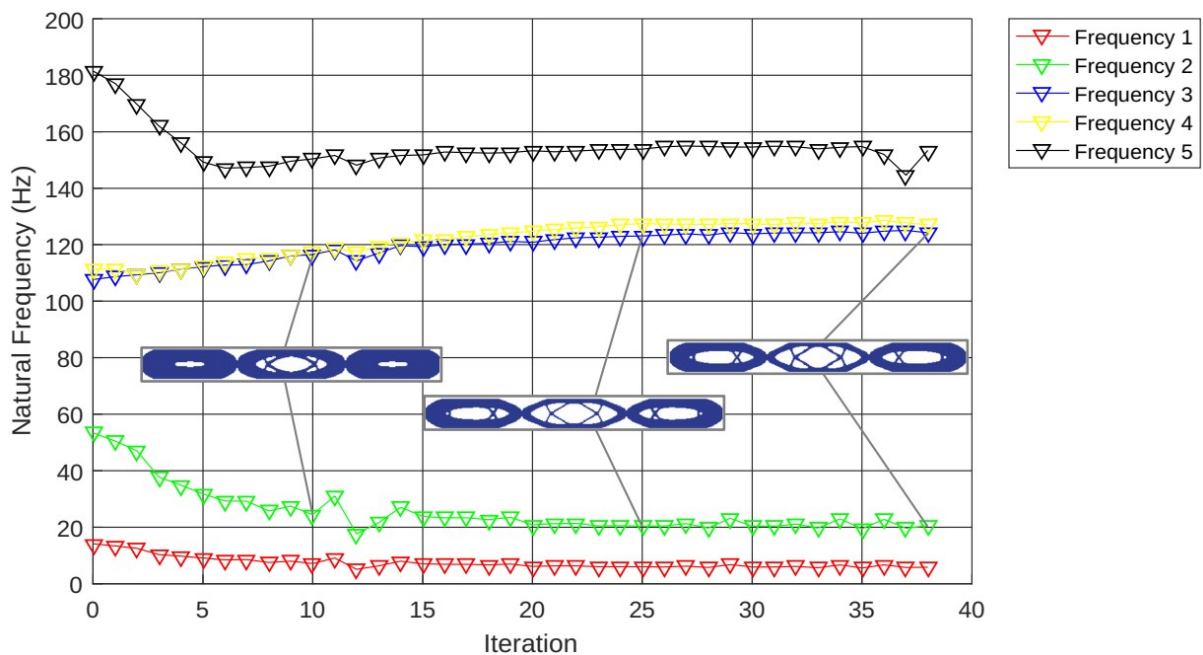


Figura 7.8 Histórico das cinco primeiras frequências naturais durante a separação da segunda e terceira frequências por Lopes, et al., 2017.

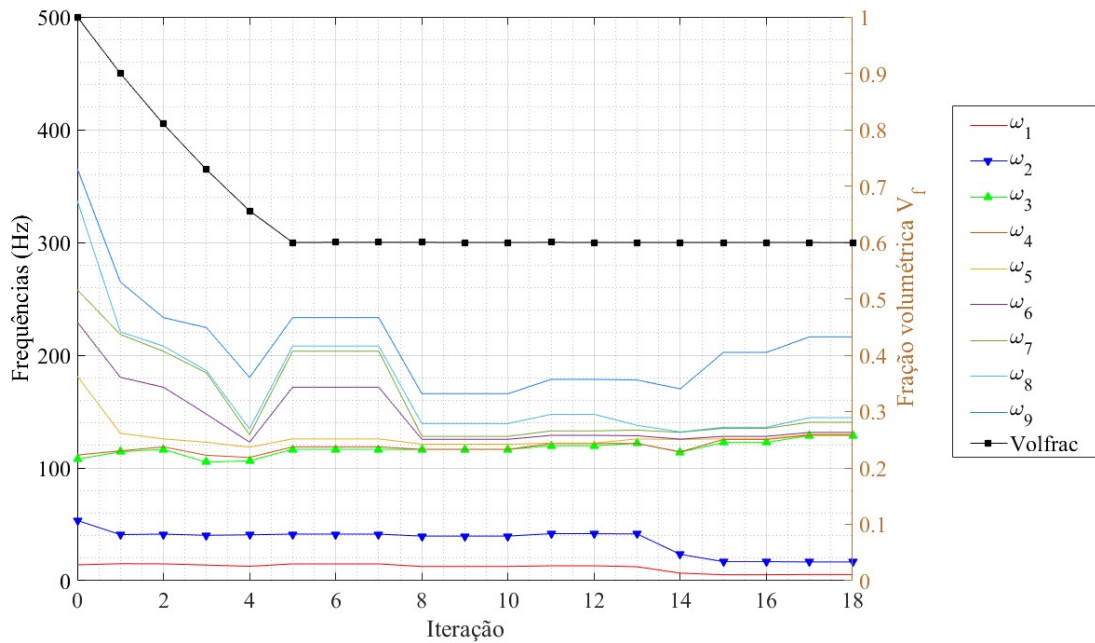


Figura 7.9 Histórico das cinco primeiras frequências naturais durante a separação da segunda e terceira frequências, neste trabalho.

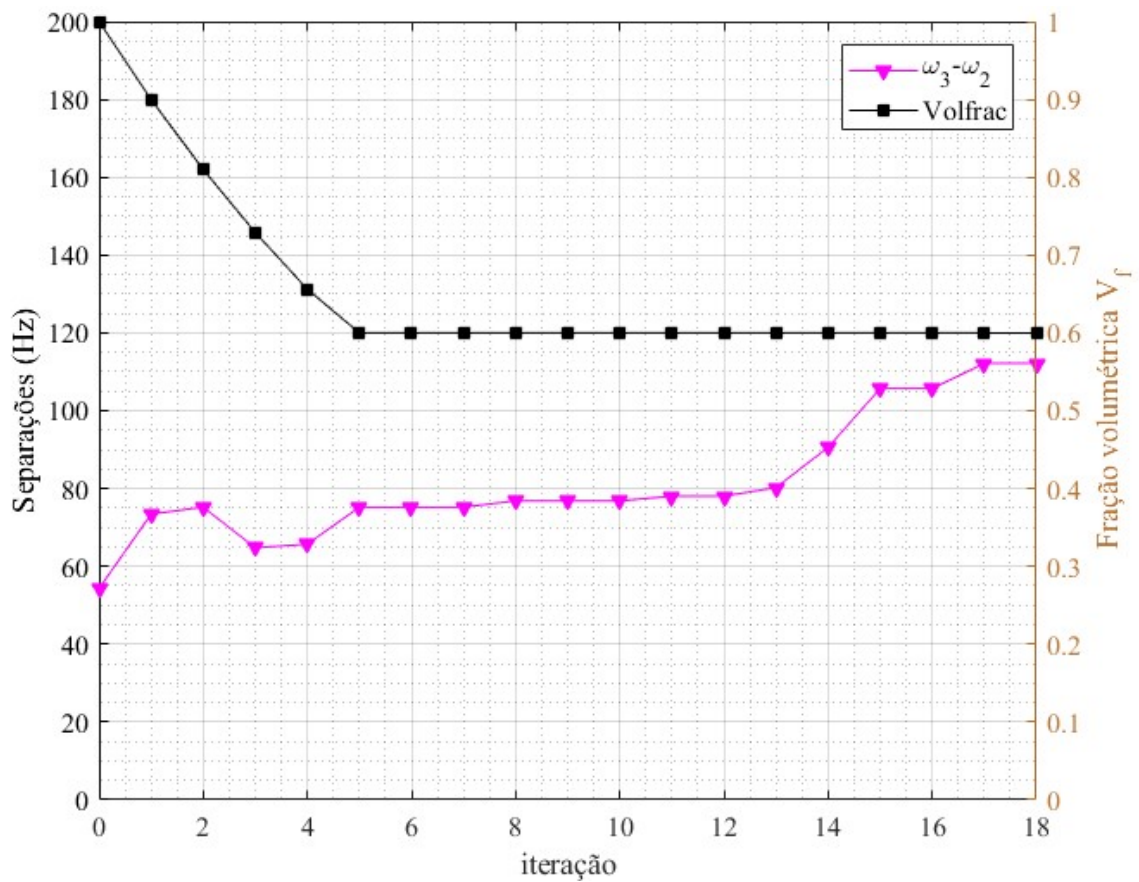


Figura 7.10 Evolução da separação da segunda e terceira frequências, neste trabalho.

Avaliando os resultados alcançados, observa-se que a topologia ótima encontrada possui diferenças com a de Lopes et al., 2017, contudo comparando os resultados mostrados na Tabela 7.3, a diferença entre os valores de $(\omega_3 - \omega_2)$ é superior em 8,97%, enquanto que o número de iterações está reduzido em 52,63%, evidenciando uma maior rapidez na obtenção dos resultados.

Tabela 7.3 Comparativo das frequências naturais em Hz, para $(\omega_3 - \omega_2)$.

Autor	ω_1	ω_2	ω_3	$(\omega_3 - \omega_2)$	iterações
Lopes et al., 2017	5,647	20,13	122,7	102,54	38
Este trabalho	5,232	15,029	126,77	111,74	18

Um novo teste foi realizado com a mesma estrutura, aplicando a Equação (6.1), que considera uma frequência de entrada, a fim de que a separação seja feita em sua vizinhança, com isso o algoritmo identifica as frequências naturais que precede e sucede o valor de entrada e passa a distanciá-las da frequência de referência.

Os dados de entrada do método BESO empregados neste trabalho foram: fração volumétrica $Volfrac = 60\%$, taxa evolucionária $ER = 5\%$, $x_{min} = 10^{-3}$, raio de filtragem $r_{min} = 2,5$ elementos, erro máximo admissível $\tau^* = 0,001$, $\omega_0 = 120$ Hz e fator de penalização $p = 6,0$. Na Figura 7.11, é apresentado o resultado da topologia ótima obtida neste trabalho.



Figura 7.11 Topologia para separação das frequências naturais no entorno da frequência de 120Hz, neste trabalho.

Na Figura 7.12, são apresentadas as quinze primeiras frequências naturais, e a variação da fração de volume obtidos. Já a evolução do crescimento da separação durante o processo de iteração, é destacada na Figura 7.13.

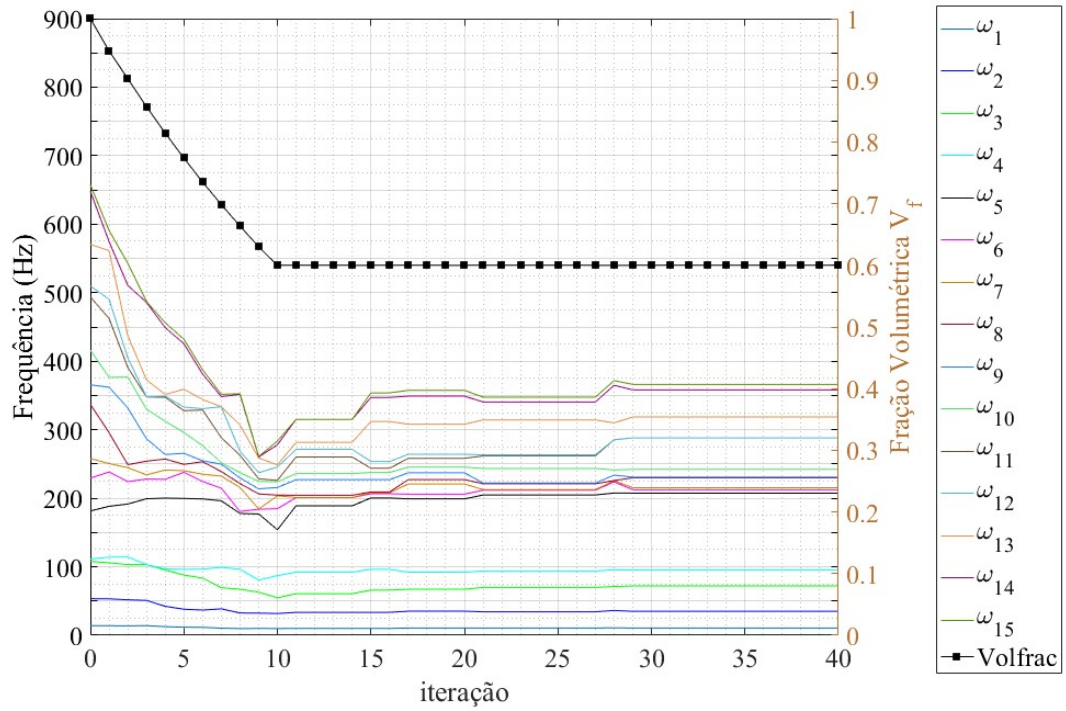


Figura 7.12 Histórico das quinze primeiras frequências naturais durante o processo de otimização.

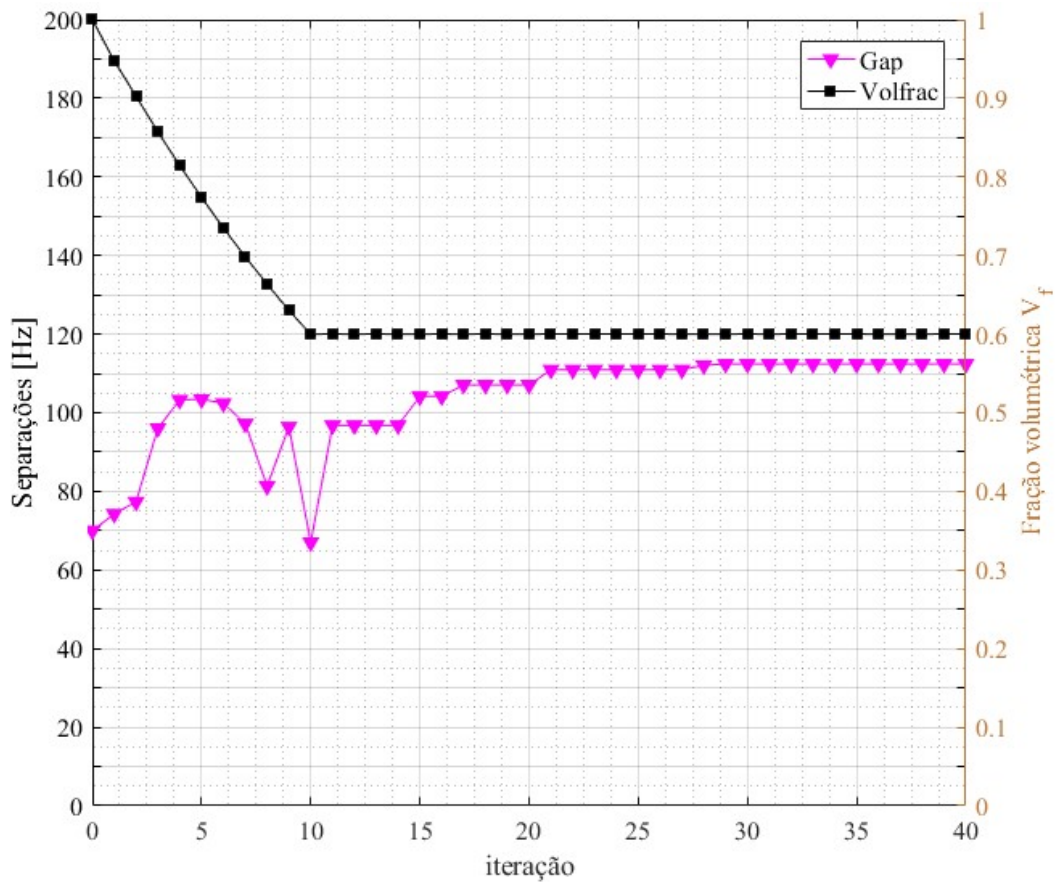


Figura 7.13 Evolução da função objetivo.

7.1.3 Placa retangular de alumínio

O modelo da placa retangular de alumínio é repetido neste caso. As propriedades do material são mostradas na Tabela 5.5, e o domínio conforme Figura 5.12, é discretizado com 45×30 elementos.

Para um volume prescrito correspondente a 50% do inicial, objetiva-se a maximização da separação entre a terceira e a segunda frequência natural.

Os dados de entrada são: taxa evolucionária $ER = 0,05$, $x_{min} = 10^{-6}$, raio de filtragem $r_{min} = 3,0$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,001$, $\omega_0 = 3000$ Hz e fator de penalidade $p = 5,0$.

Steven e Xie, 1996, utilizam esse modelo para a maximização das três primeiras frequências, na Figura 7.14 é mostrado o projeto ótimo alcançado, enquanto que na Figura 7.15 é apresentado o resultado da otimização obtida neste trabalho considerando a separação de frequências ($\omega_3 - \omega_2$).

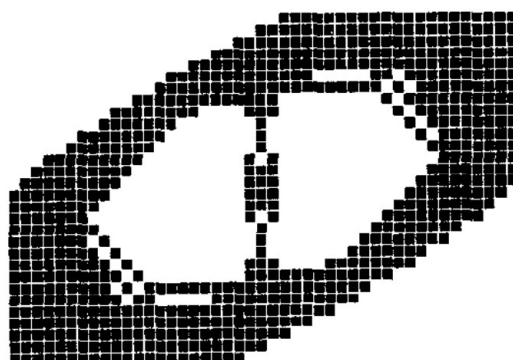


Figura 7.14 Topologia ótima para a maximização da três primeiras frequencias, por Steven e Xie, 1996.



Figura 7.15 Topologia ótima para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ neste trabalho.

Após 25 iterações se alcança uma diferença entre a terceira e a segunda frequência de 2.080 Hz, que comparado a um valor inicial não otimizado de 100 Hz, corresponde a 1980% de acréscimo na separação entre as frequências citadas, conforme Figura 7.16.

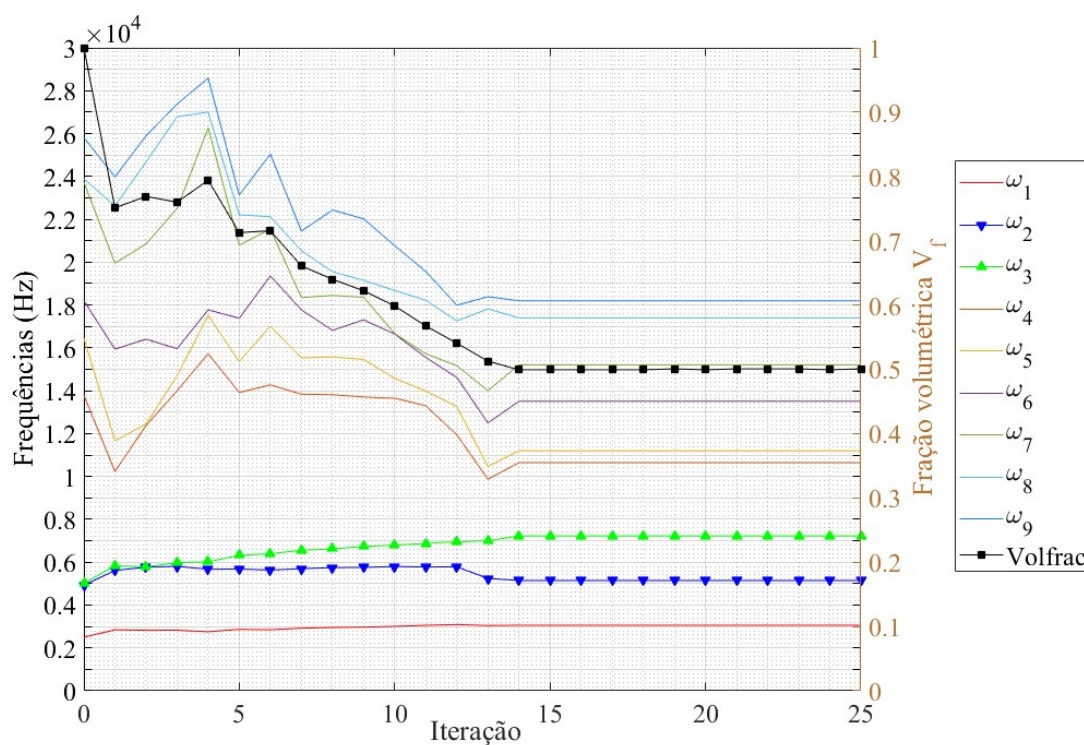


Figura 7.16 Histórico de otimização ($\omega_3 - \omega_2$) da placa retangular de alumínio neste trabalho.

Os valores alcançados são apresentados na Tabela 7.4, que compara os valores das frequências da placa para as condições: (a) não otimizada; (b) com as três primeiras frequências maximizadas por Steven e Xie, 1996; (c) com a maximização da frequência fundamental (visto na Tabela 5.6), e (d) com a maximização da separação entre a terceira e a segunda frequências, realizada neste trabalho.

Tabela 7.4 Comparativo das frequências (Hz) para a placa retangular de alumínio.

Condição	ω_1	ω_2	ω_3	$(\omega_3 - \omega_2)$	iterações
(a)	2.500	4.800	4.900	100	-
(b)	3.308	5.716	6.335	619	85
(c)	3.467,3	4.200	6.000	1.800	22
(d)	3.000	5.120	7.200	2.080	25

A Figura 7.17, destaca a evolução da função objetivo durante a separação da segunda e terceira frequências, neste trabalho.

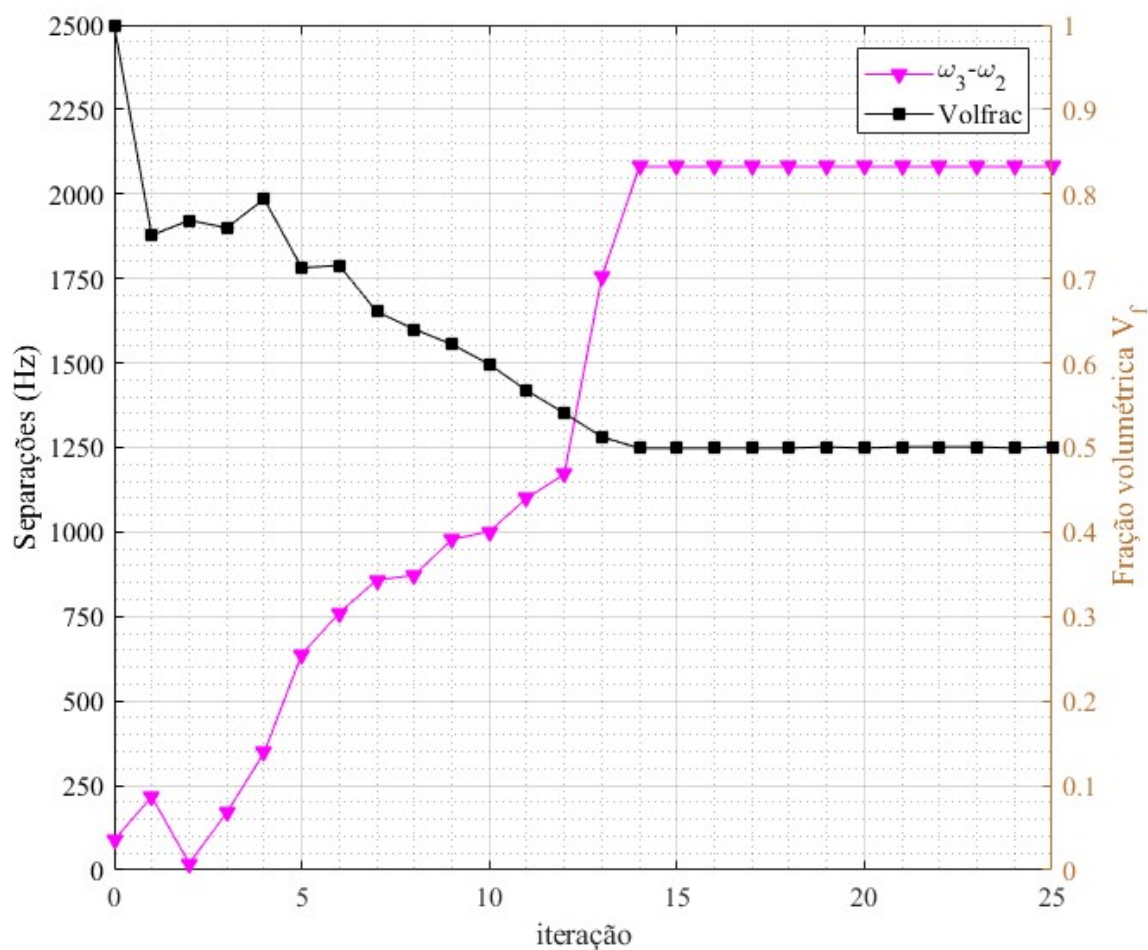


Figura 7.17 Evolução da otimização ($\omega_3 - \omega_2$) da placa retangular de alumínio neste trabalho.

Percebe-se que a convergência da função objetivo se mostra suave, conforme a Figura 7.17. Ma et al., 1994, apontam que a otimização de um autovalor único resulta em oscilações substanciais dos valores estruturais das frequências. Durante as iterações é observado que, enquanto as frequências naturais de número um e três aumentam, todas as demais diminuem, se estabilizando com o alcance do volume prescrito.

7.2 Separação de frequências em estruturas multimaterial

Os ensaios numéricos que seguem refletem uma novidade em pesquisa na área, lançando luz ao desenvolvimento de uma abordagem de projeto para a macro e microestrutura simultaneamente, com o uso do método BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*), a fim de aumentar a separação entre duas frequências naturais consecutivas em estruturas compostas por múltiplos materiais, sujeito a um volume prescrito inferior ao inicial.

A otimização é realizada em ambas as escalas, macro e micro, e de forma acoplada, ou seja, ao mesmo tempo em que se projeta a melhor microestrutura do material, a partir das condições de contorno impostas na macroestrutura, se verifica a melhor disposição de cada microestrutura na macroestrutura, definindo o leiaute ótimo tanto da micro quanto a macroestrutura, que levará a maior separação entre duas frequências naturais consecutivas.

Para todos os experimentos é utilizada uma estrutura biengastada conforme Figura 5.16, discretizada com 80×40 elementos na escala macro.

As propriedades materiais são calculadas a partir da topologia da microestrutura através do método da homogeneização, onde o elemento de volume representativo é discretizado pelo método dos elementos finitos em uma malha de 40×40 elementos. Também é atribuído Coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ em todos os casos.

7.2.1 Projeto microestrutural ótimo para maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$

Para este caso, objetiva-se alcançar a melhor topologia microestrutural que proporcione a máxima separação de frequências $(\omega_3 - \omega_2)$ da estrutura, considerando um volume final correspondente a 50% do volume inicial, e sem a alteração da macroestrutura. A otimização é realizada na busca do melhor leiaute para uma única microestrutura periódica composta por dois materiais, em que a fase 1 é considerada mais rígida e a fase 2 menos rígida. As propriedades dos materiais da microestrutura são mostradas na Tabela 5.9.

Os dados de entrada do método BESO são: taxa evolucionária $ER^{mic} = 5\%$, taxa de adição máxima $AR_{max}^{mic,1} = 5\%$, fração de volume prescrito $Volfrac^{mac} = 100\%$ e $Volfrac^{mic,1} = 50\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,01\%$ e fator de penalidade $p = 3,0$.

Na Figura 7.18 é apresentada a topologia ótima alcançada, e na Figura 7.19 o histórico de otimização da separação de frequência.

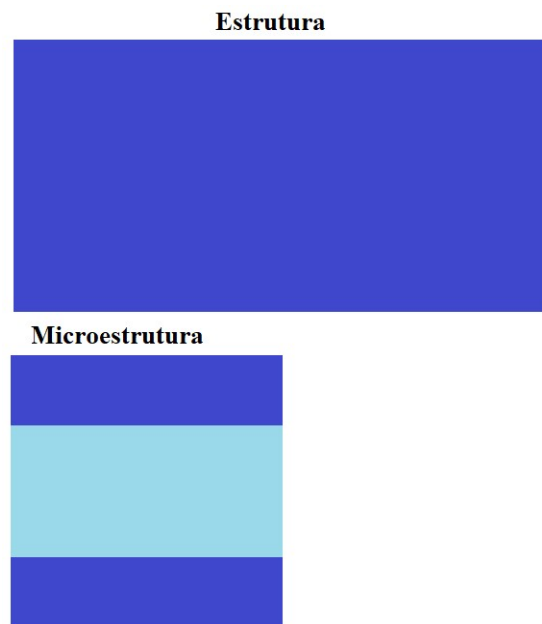


Figura 7.18 Topologia ótica microestrutural para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$.

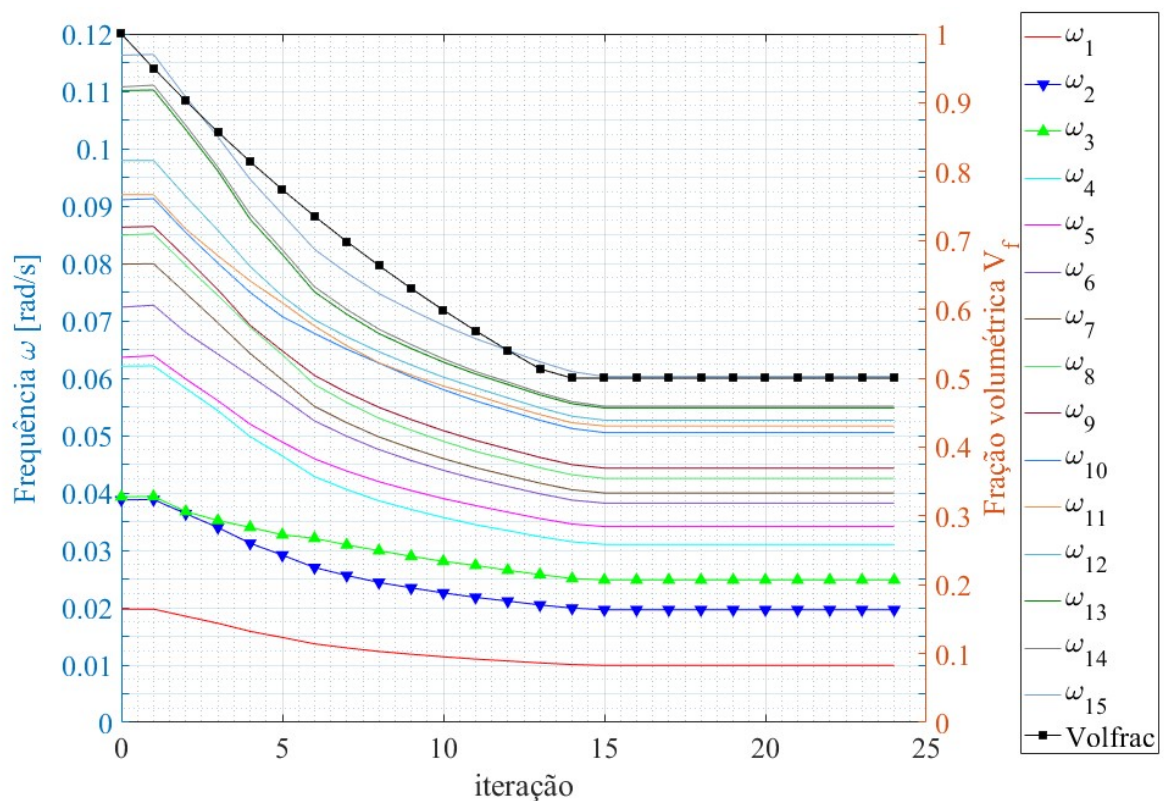


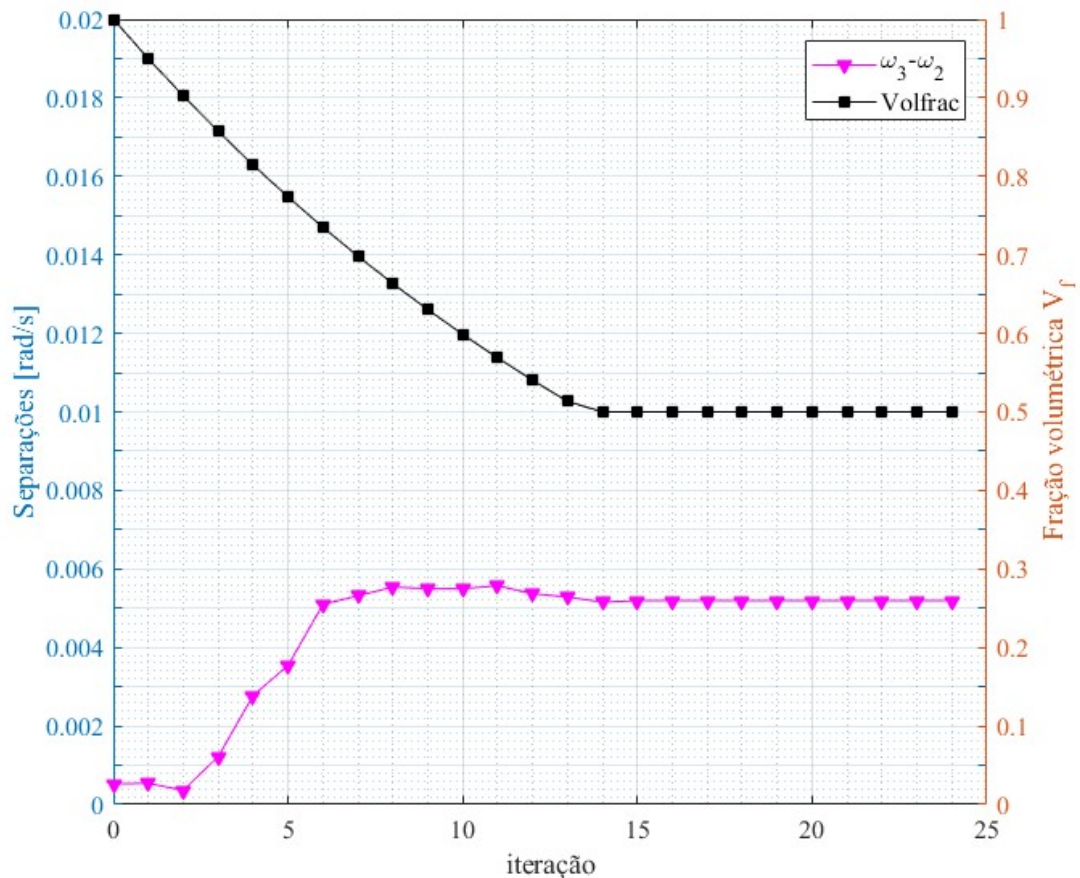
Figura 7.19 Histórico de otimização para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$.

Os resultados alcançados são mostrados na Tabela 7.5, que compara aos valores de $(\omega_3 - \omega_2)$ para as condições de: (a) maximização da separação entre a terceira e a segunda frequências, e (b) maximização da frequência fundamental (visto na Tabela 5.10).

Tabela 7.5 Comparativo das frequências (rad/s) para a microestrutura otimizada.

Condição	$(\omega_3 - \omega_2)$	iterações
(a)	0,0052	24
(b)	0,0012	24

Na Figura 7.20 é destacada a evolução da função objetivo com o decaimento do volume, enquanto que na Equação (7.1) é apresentada a matriz homogeneizada da microestrutura ótima alcançada, e que proporciona a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ na macroestrutura, podendo ser comparada com a, alcançada para maximização de ω_1 (Equação (5.4)).

Figura 7.20 Evolução da otimização microestrutural para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$.

$$\mathbf{D}^{H,mic} = \begin{bmatrix} 0,6330 & 0,1099 & 0 \\ & 0,3663 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,1282 \end{bmatrix}, \text{maximização de } (\omega_3 - \omega_2) \quad (7.1)$$

$$\mathbf{D}^{H,mic} = \begin{bmatrix} 0,4899 & 0,1823 & 0 \\ & 0,4555 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,1954 \end{bmatrix}, \quad \text{maximização de } \omega_1$$

Conforme os dados apresentados, é percebido que a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ supera em 333% a separação alcançada entre as mesmas frequências, quando da maximização somente da frequência fundamental.

7.2.2 Projeto ótimo para maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ em estrutura bimatéria

Diferente do item anterior, neste caso a otimização é realizada na macroestrutura, enquanto as microestruturas permanecem inalteradas. Objetiva-se alcançar o leiaute macroestrutural que proporcione a máxima separação das frequências naturais $(\omega_3 - \omega_2)$ da estrutura, com a redução em 50% do volume inicial da macroestrutura. A otimização busca a melhor distribuição de material na macroestrutura, onde as microestruturas 1 e 2 são consideradas a fase mais rígida e menos rígida na macroestrutura, respectivamente. As propriedades dos materiais das microestruturas são mostradas na Tabela 5.11.

Os dados de entrada do método BESO são: taxa evolucionária $ER^{mac} = 5\%$, taxa de adição máxima $AR_{max}^{mac} = 5\%$, fração de volume prescrito $Volfrac^{mac} = 50\%$ e $Volfrac^{mic,1} = Volfrac^{mic,2} = 100\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,01\%$ e fator de penalidade $p = 3,0$.

Na Figura 7.21 é apresentada a topologia ótima alcançada, e na Figura 7.22 o histórico de otimização da separação de frequências.

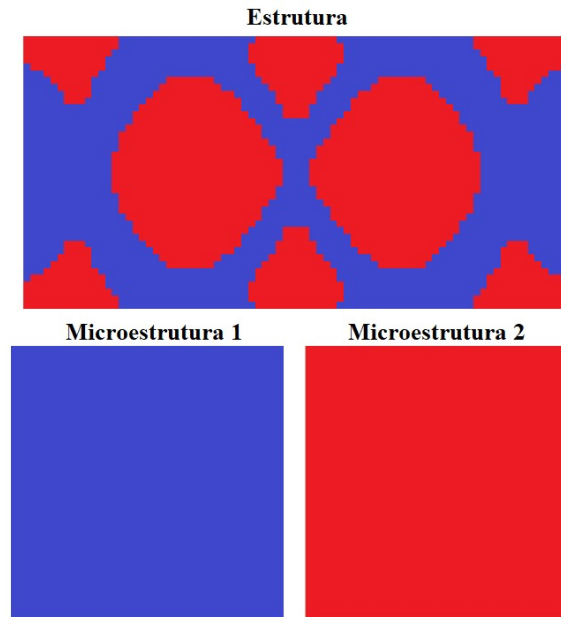


Figura 7.21 Topologia ótima macroestrutural para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$.

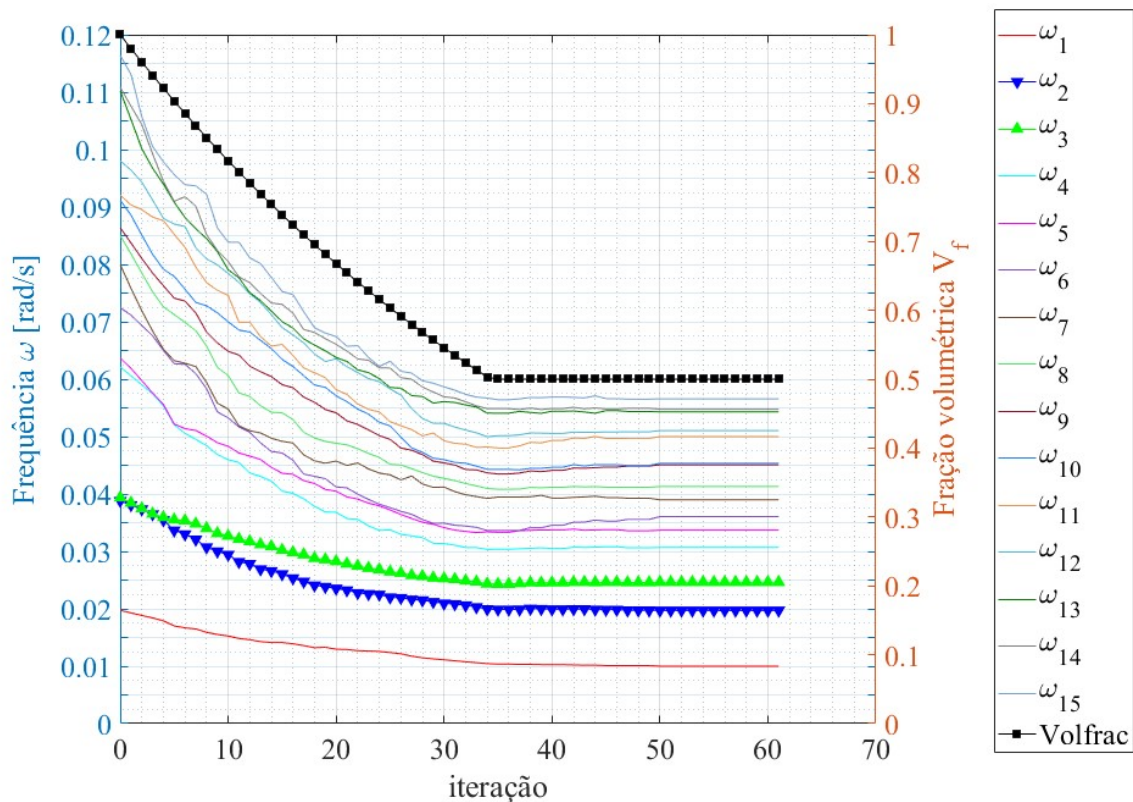


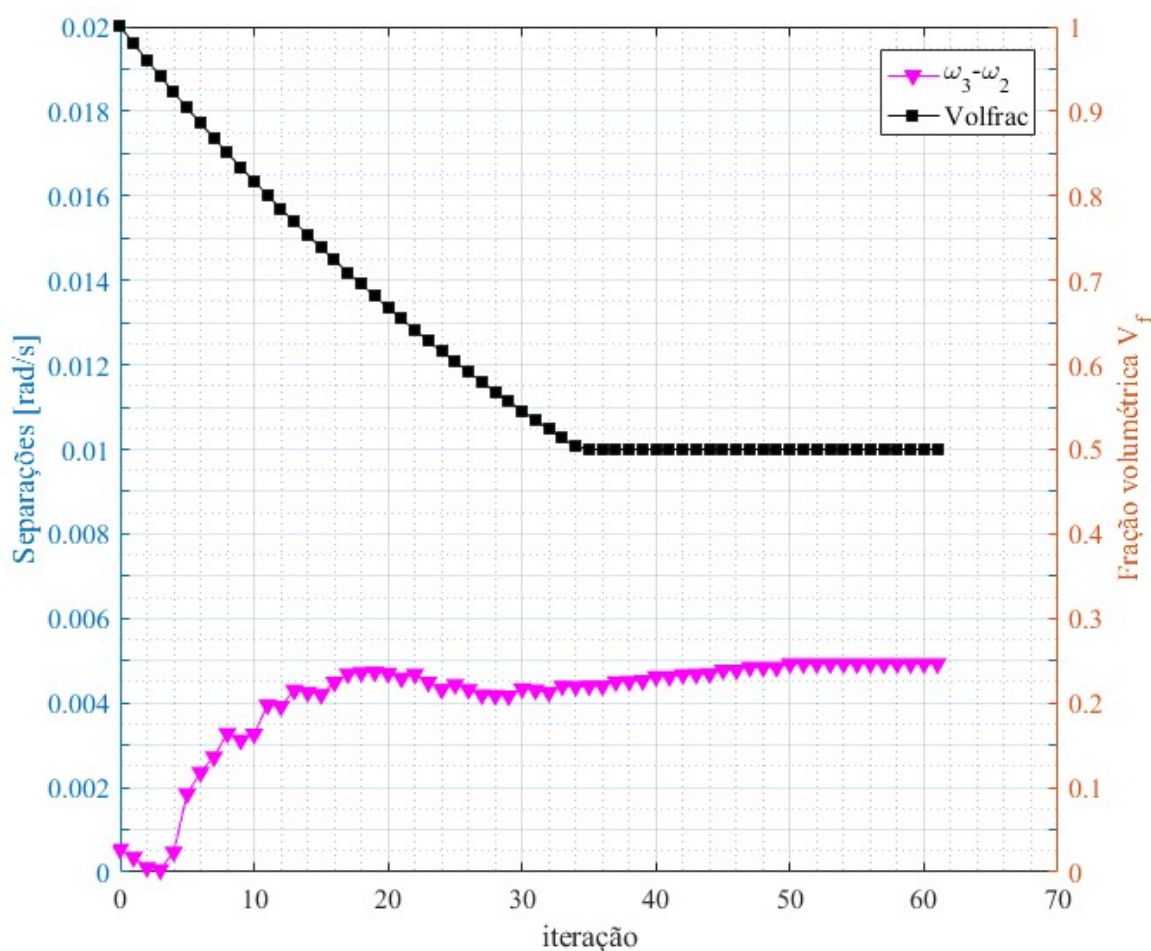
Figura 7.22 Histórico de otimização macroestrutural para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$.

Os resultados alcançados são mostrados na Tabela 7.6, que compara os valores de $(\omega_3 - \omega_2)$ para as condições de: (a) maximização da separação entre a terceira e a segunda frequências, e (b) maximização da frequência fundamental (visto na Tabela 5.12).

Tabela 7.6 Comparativo das frequências (rad/s) para a macroestrutura otimizada.

Condição	$(\omega_3 - \omega_2)$	iterações
(a)	0,0049	61
(b)	0	47

Na Figura 7.23 é destacada a evolução da função objetivo com o decaimento do volume, para uma macroestrutura ótima alcançada com bimatéria, que proporciona a maximização dos valores das frequências naturais de número três e dois.

Figura 7.23 Evolução da otimização macroestrutural para maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$.

Conforme os dados apresentados, é percebido que a maximização efetuada entre a terceira e a segunda frequências naturais possibilita o afastamento de duas frequências outrora multimodais, visto na Figura 5.25.

7.2.3 Projeto ótimo multiescala acoplado para maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$

Para este caso são abordados os dois casos anteriores de forma simultânea, uma vez que o processo de otimização é realizado tanto na macroestrutura quanto em ambas microestruturas. Objetiva-se alcançar a máxima separação das frequências naturais $(\omega_3 - \omega_2)$, com a redução em 50% do volume inicial.

A otimização da macroestrutura busca o melhor leiaute para a distribuição das fases mais rígida (micro 1) e menos rígida (micro 2). Enquanto que as microestruturas, composta por duas fases cada, busca a melhor distribuição de cada fase dentro de cada microestrutura. Na Tabela 5.15 são mostradas as propriedades dos materiais das microestruturas empregadas.

Os dados de entrada do método BESO são: taxas evolucionárias $ER^{mac} = ER^{mic,1} = ER^{mic,2} = 5\%$, taxas de adição máxima $AR_{max}^{mac} = AR_{max}^{mic,1} = AR_{max}^{mic,2} = 5\%$, fração de volume prescrito $Volfrac^{mac} = Volfrac^{mic,1} = Volfrac^{mic,2} = 50\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,01\%$ e fator de penalidade $p = 3,0$.

Na Figura 7.24 são apresentadas as topologias ótimas alcançadas, e na Figura 7.25 o histórico de otimização da separação de frequências.

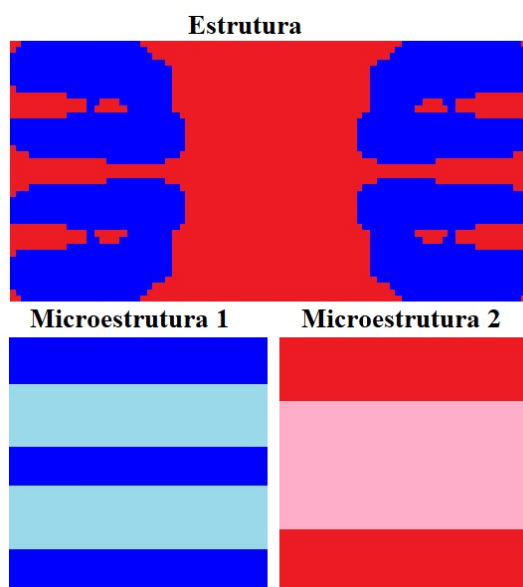


Figura 7.24 Topologias ótimas para a maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ em estrutura multiescala acoplada.

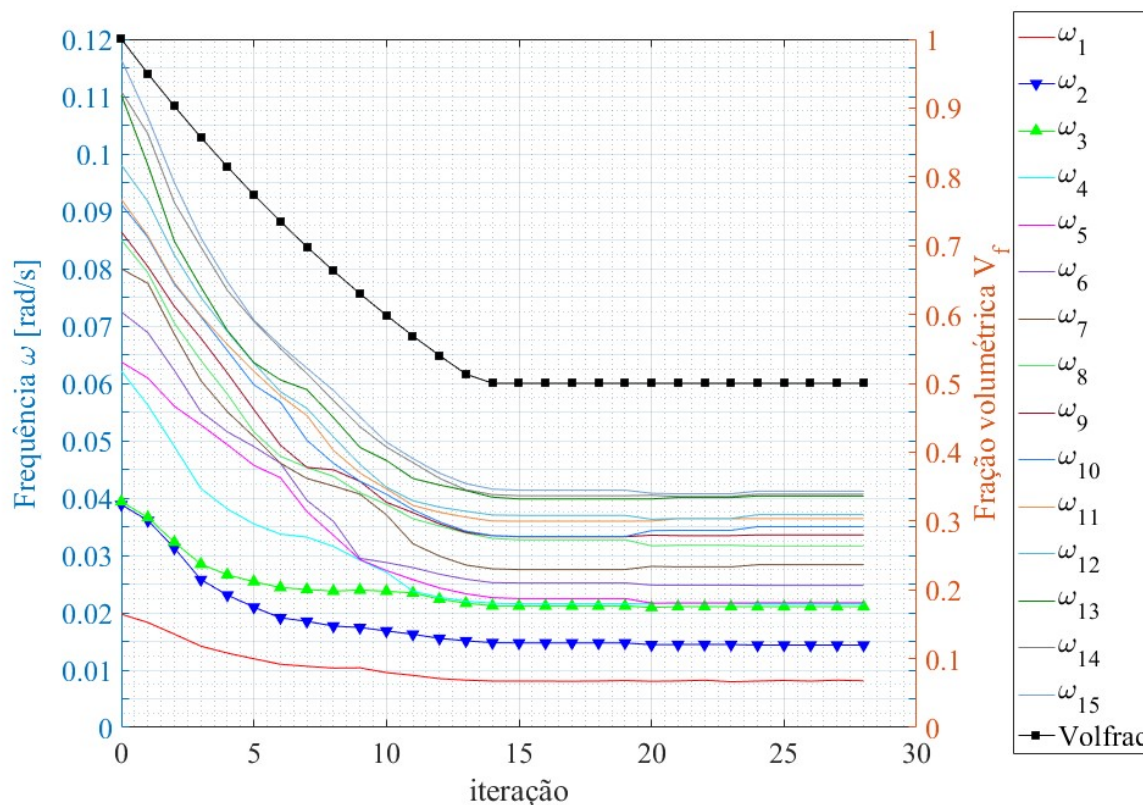


Figura 7.25 Histórico de otimização de $(\omega_3 - \omega_2)$ em estrutura multiescala acoplada.

Os resultados alcançados são mostrados na Tabela 7.7, que compara os valores de $(\omega_3 - \omega_2)$ para as condições de: (a) maximização da separação entre a terceira e a segunda frequências, e (b) maximização da frequência fundamental (visto na Tabela 5.16).

Tabela 7.7 Comparativo das frequências (rad/s) otimização efetuada.

Condição	$(\omega_3 - \omega_2)$	iterações
(a)	0,0066	28
(b)	0,0003	29

Na Figura 7.26 é destacada a evolução da função objetivo com o decaimento do volume, para um projeto ótimo multiescala acoplado, que proporciona a maximização da diferença entre os valores da terceira e segunda frequências naturais.

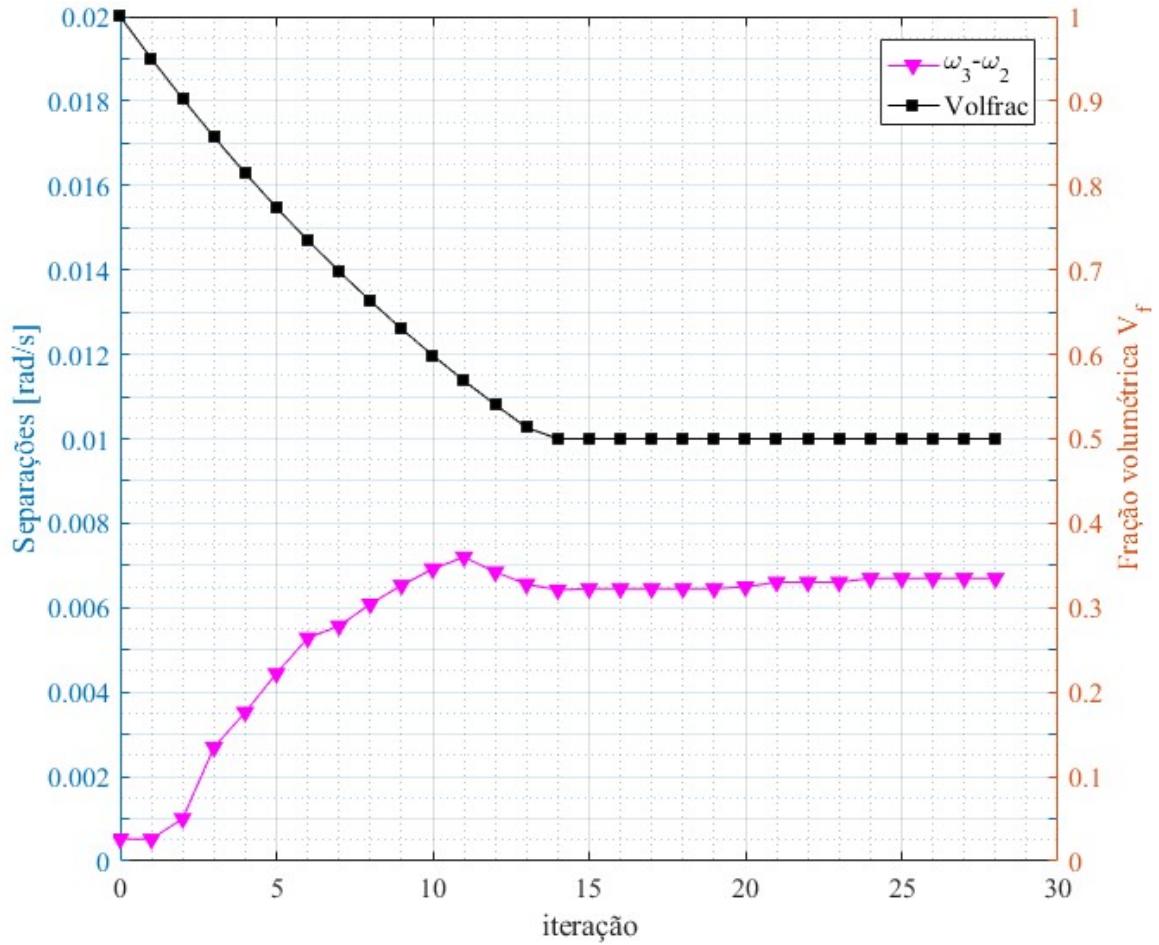


Figura 7.26 Evolução da função $(\omega_3 - \omega_2)$ com o decaimento do volume, para um projeto ótimo multiescala acoplado.

Na Equação (7.1) são apresentadas as matrizes homogeneizadas das microestruturas ótimas 1 e 2 alcançadas, que juntamente com a disposição ótimas delas no leiaute da macroestrutura, proporciona a maximização estrutural de $(\omega_3 - \omega_2)$, podendo ser comparada com as matrizes alcançadas para maximização de ω_1 (Equação (5.10)).

$$\mathbf{D}^{H,mic,1} = \begin{bmatrix} 0,6956 & 0,1522 & 0 \\ & 0,5072 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,1775 \end{bmatrix}, \text{ maximização de } (\omega_3 - \omega_2) \quad (7.2)$$

$$\mathbf{D}^{H,mic,2} = \begin{bmatrix} 0,1329 & 0,0264 & 0 \\ & 0,0879 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,0308 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D}^{\text{H},mic,1} = \begin{bmatrix} 0,5902 & 0,2011 & 0 \\ & 0,5702 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,2240 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}^{\text{H},mic,2} = \begin{bmatrix} 0,1077 & 0,0384 & 0 \\ & 0,01034 & 0 \\ \text{simétrica} & & 0,0421 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \text{maximização de } \omega_1$$

Conforme os dados apresentados, é percebido que a maximização efetuada entre a terceira e a segunda frequências naturais possibilita o afastamento de duas frequências outrora multimodais, visto na Figura 5.31.

7.2.4 Comparação entre os resultados do projeto ótimo para maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ em estrutura bimatierial

Os resultados obtidos na otimização da estrutura bimatierial para maximização da separação entre a terceira e segunda frequências naturais, estão compilados na Figura 7.27, sendo:

Caso (a) – Projeto microestrutural bimatierial, conforme Figura 7.20.

Caso (b) – Projeto macroestrutural bimatierial, conforme Figura 7.23.

Caso (c) – Projetos macro e microestrutural bimatierial, conforme Figura 7.26.

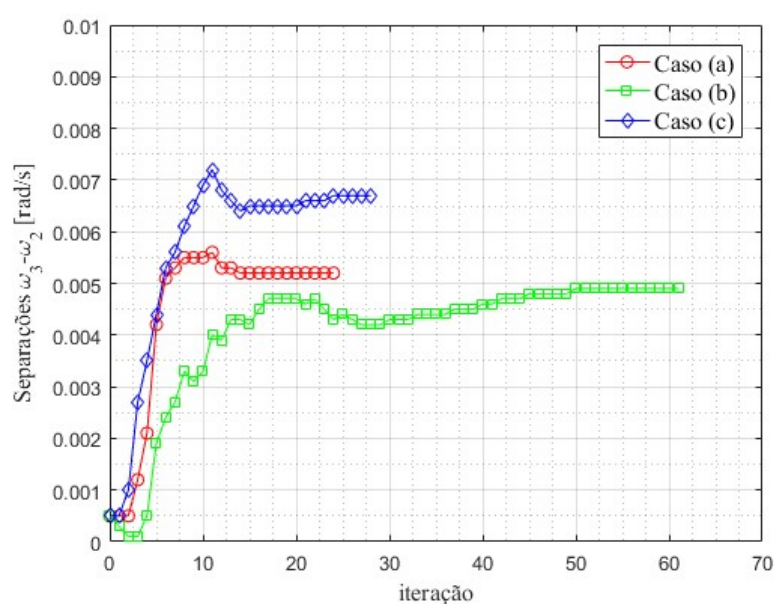


Figura 7.27 Gráfico compilado da maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ para o projeto ótimo da estrutura multiescala acoplada.

A partir dos dados apresentados, é possível se perceber que o Caso (b) alcança um maior valor de separação das frequências fundamentais ($\omega_3 - \omega_2$) para a estrutura, ao passo que o Caso (b) alcança o menor valor.

A diferença entre a separação executada no Caso (b) e no Caso (c) é de 37,7%, já entre o Caso (b) e o Caso (a), é de 6,1%.

8 OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Os processos de otimização podem ser classificados de acordo com o número de funções objetivo, podendo ser mono ou multiobjetivo. Apesar de otimizações do tipo monobjetivo serem mais pesquisadas, a otimização multiobjetivo está mais próxima de problemas reais.

A otimização multiobjetivo (multicritério ou vetorial) é aquela que trabalha as relações do tipo custo-benefício entre os objetivos conflitantes e as soluções satisfatórias do problema. Ela enfoca o problema de uma forma mais suave, oferecendo mais liberdade para a tomada de decisões de projeto e opções de solução. Isso evita tratar o problema de uma forma severa que prejudicaria o andamento de um projeto de engenharia de múltiplos critérios [Drehmer, 2017].

Problemas de otimização multiobjetivo, ao contrário de um único problema de otimização objetiva, não necessitam necessariamente de uma solução ótima que minimize todas as funções objetivo simultaneamente. Muitas vezes, diferentes objetivos podem entrar em conflito entre si e os parâmetros ótimos de alguns objetivos normalmente não levam à otimização de outros objetivos (às vezes se tornam pior) [Yang, 2010].

Muitos algoritmos de solução pretendem combinar todas as funções multiobjetivo em um objetivo escalar usando a soma ponderada.

A soma ponderada é uma aproximação para solução da otimização multiobjetivo que emprega uma combinação linear de diferentes objetivos conflitantes ou não, auxiliados por pesos que medem a importância de um objetivo em relação a outro. Conforme Messac e Mullur, 2007, a função multiobjetivo agregada (*Aggregate Objective Function* ou AOF) a ser minimizada combina diferentes índices de performance e agrega-se os objetivos conflitantes em uma única função. Pesos escalares (A e B) são prescritos conforme a preferência de cada objetivo do projeto, os quais devem ser maiores do que zero, sendo normalizados, ou seja, a sua soma deve ser igual a 1 ($A + B = 1$). Assume-se que as unidades das funções multiobjetivo sejam as mesmas.

8.1 Otimização topológica multiobjetivo de separação de frequências naturais em estruturas com material único

Após a investigação da separação de um par de frequências naturais em estruturas compostas por material único, ampliou-se a implementação para separação de dois pares de frequências naturais adjacentes em uma mesma estrutura.

Os resultados são apresentados a seguir, sendo todas as malhas discretizadas com elementos lineares quadrilaterais de tensão plana com quatro nós cada. Os ensaios numéricos se iniciam com a verificação da separação de frequências para estruturas compostas por um único tipo de material.

8.1.1 Placa retangular de alumínio, $(\omega_5 - \omega_4)$ e $(\omega_9 - \omega_8)$

Novamente o modelo da placa retangular de alumínio é utilizado. As propriedades do material são mostradas na Tabela 5.5, e o domínio conforme Figura 5.12 é discretizado com 60×45 elementos. Para um volume prescrito correspondente a 50% do inicial, objetiva-se um conjunto de soluções que mostre maximização das diferenças entre a quinta e a quarta $(\omega_5 - \omega_4)$, e entre a nona e a oitava $(\omega_9 - \omega_8)$ frequências naturais simultaneamente.

Os dados de entrada conforme a Equação (6.1) são: taxa evolucionária $ER = 0,05$, $x_{min} = 10^{-6}$, raio de filtragem $r_{min} = 3,0$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,001$, $\omega_0^A = 16.000$ Hz, $\omega_0^B = 25.000$ Hz e o fator de penalidade $p = 5,0$. A Figura 8.1, apresenta o conjunto de soluções obtidos.

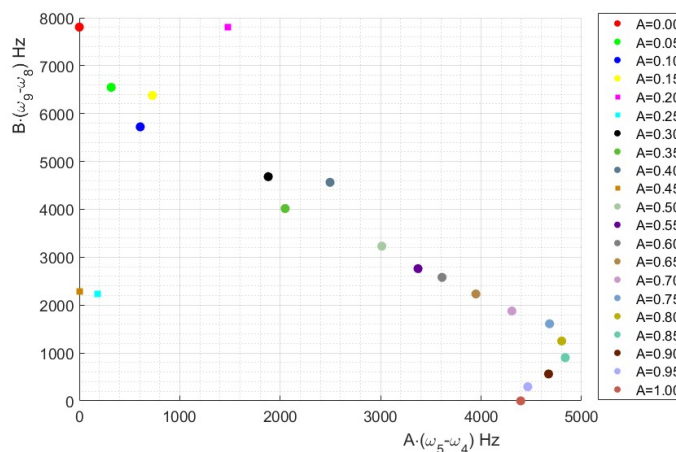


Figura 8.1 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_5 - \omega_4)$ e $(\omega_9 - \omega_8)$.

A partir das soluções alcançadas é possível se perceber alguns pontos distanciados dos demais, que não contribuem com a harmonia do conjunto de soluções, isso porque que não fazem parte do conjunto de soluções ótimas, é o caso dos pontos $A = 0,45$; $A = 0,25$; $A = 0,20$.

A Figura 8.2(a-c) apresenta as topologias para os pontos mencionados, onde é percebido a perda da integridade estrutural, por não ser possível alcançar ambos os objetivos, enquanto que (d-f) apresenta exemplos de topologias ótimas alcançadas dentro do conjunto de soluções ótimas. Todas foram plotadas sobre o domínio não otimizado Figura 5.12.

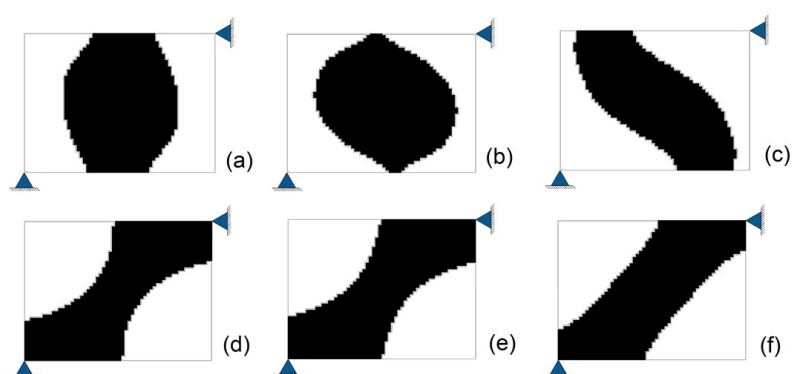


Figura 8.2 Estruturas alcançadas para a otimização multiobjetivo fora do conjunto de soluções ótimas: (a) $A = 0,20$ (b) $A = 0,25$ e (c) $A = 0,45$, e dentro do conjunto de soluções ótimas: (d) $A = 0,10$ (e) $A = 0,50$ e (f) $A = 0,95$.

Frente aos resultados encontrados, um novo conjunto de soluções foi buscado alterando o volume prescrito para 60%, o par de frequências superiores para $(\omega_9 - \omega_8)$ e o par de frequências inferiores para $(\omega_3 - \omega_2)$, enquanto os demais dados permaneceram inalterados.

O gráfico do conjunto de soluções alcançados é apresentado na Figura 8.3, onde é possível se perceber que todos os valores estão contidos no conjunto de soluções ótimas, isso se confirma por não haverem placas com perda da integridade estrutural.

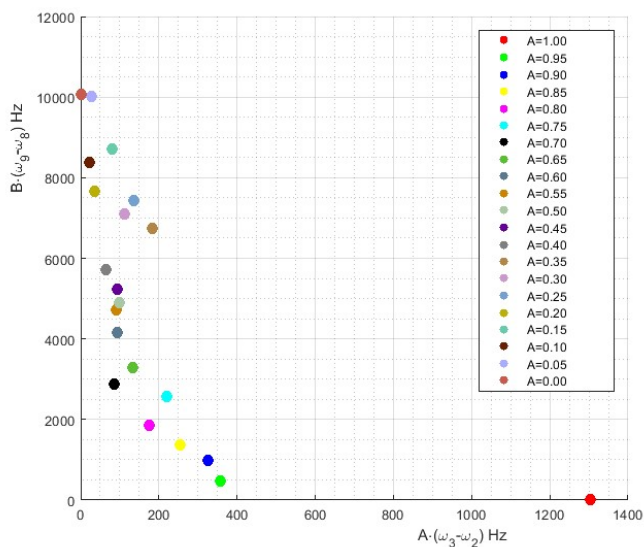


Figura 8.3 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo da maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_9 - \omega_8)$.

8.1.2 Viga biapoiada, $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_8 - \omega_7)$

Neste caso considera-se uma viga biapoiada em ambas as extremidades, conforme Figura 7.5, com domínio retangular e dimensões de $10 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, discretizado com 420×42 elementos. O objetivo é maximizar de forma concomitante a separação entre a terceira e a segunda, e entre a oitava e a sétima frequências naturais, com uma fração de volume de 60%. Na Tabela 7.2 são mostradas as propriedades do material empregado na estrutura.

Os dados de entrada do método BESO empregados neste trabalho foram: taxa evolucionária $ER = 10\%$, $x_{min} = 10^{-3}$, raio de filtragem $r_{min} = 3,5$ elementos, erro máximo admissível $\tau^* = 0,001$, $\omega_0^A = 80 \text{ Hz}$, $\omega_0^B = 300 \text{ Hz}$ e fator de penalização $p = 6,0$. A Figura 8.4, apresenta o conjunto de soluções obtidos.

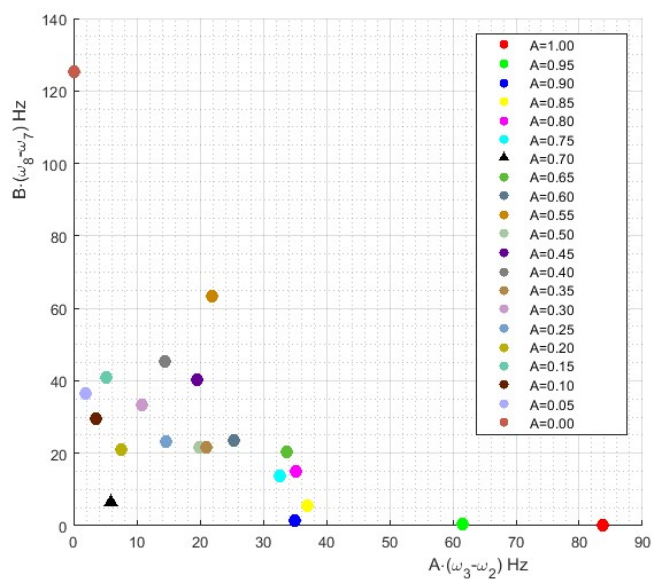


Figura 8.4 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo da maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_8 - \omega_7)$.

A partir dos dados alcançados e apresentados na A Figura 8.4 é possível se perceber uma desarmonia do ponto em $A = 0,70$, demonstrando estar fora do conjunto ótimo de soluções, sendo confirmado pela Figura 8.5(a), em que se percebe uma perda de integridade estrutural para a viga alusiva ao ponto, enquanto que (b-c) apresentam exemplos de topologias ótimas alcançadas dentro do conjunto de soluções ótimas. Foram plotados somente os contornos das figuras para se acentuar percepção.

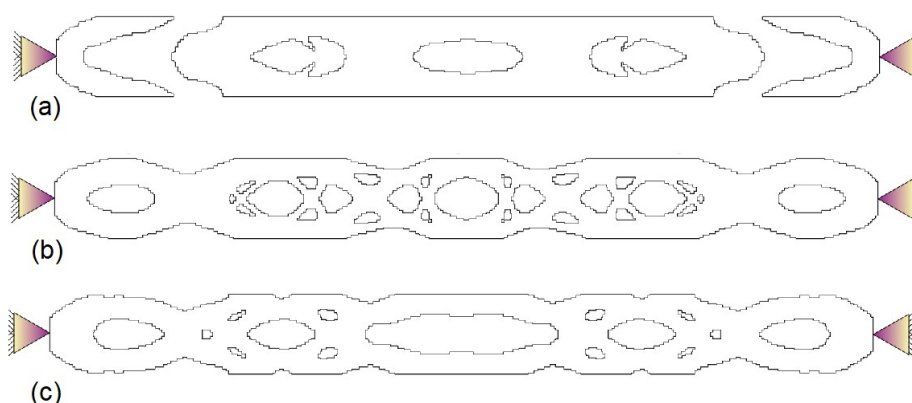


Figura 8.5 Estruturas alcançadas para a otimização multiobjetivo fora do conjunto de soluções ótimas: (a) $A = 0,70$ e dentro do conjunto de soluções ótimas: (b) $A = 0,75$ (c) $A = 0,25$.

8.2 Otimização topológica multiobjetivo de separação de frequências naturais em estrutura bimaterial

Este trabalho também alcançou estruturas compostas por vários materiais. A otimização é realizada em ambas as escalas, macro e micro, e de forma simultânea, ou seja, ao mesmo tempo em que se projeta a melhor microestrutura do material, a partir das condições de contorno impostas na macroestrutura, se verifica a melhor disposição dessa microestrutura na macroestrutura, definindo o leiaute ótimo.

Em todos os casos é utilizada uma viga biengastada conforme Figura 5.16, discretizada com 80×40 elementos na escala macro, e 40×40 elementos na microescala. O Coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ é atribuído em todos os casos.

8.2.1 Otimização microestrutural, conjunto ótimo de soluções para maximização simultânea de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$

A função multiobjetivo é de maximização da separação entre as frequências de número três e dois $(\omega_3 - \omega_2)$, e entre as frequências de número onze e dez $(\omega_{11} - \omega_{10})$, de forma simultânea, considerando um volume final correspondente a 50% do volume inicial, e sem a alteração da macroestrutura. A otimização é realizada na busca do melhor leiaute para uma microestrutura periódica única, composta por dois materiais, em que a fase 1 é considerada mais rígida e a fase 2 menos rígida. As propriedades dos materiais da microestrutura são mostradas na Tabela 5.9.

Os dados de entrada do método BESO são: taxa evolucionária $ER^{mic} = 5\%$, taxa de adição máxima $AR_{max}^{mic,1} = 5\%$, fração de volume prescrito $Volfrac^{mac} = 100\%$ e $Volfrac^{mic} = 50\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,0001$ e fator de penalidade $p = 3,0$. A Figura 8.6, apresenta o conjunto de soluções obtidos.

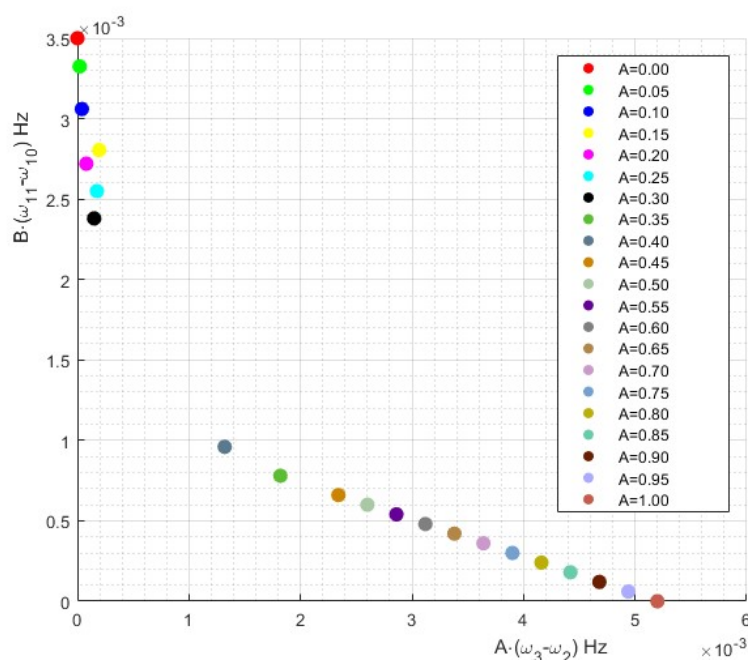


Figura 8.6 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo de maximização da separação $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$, simultaneamente.

8.2.2 Otimização macroestrutural, conjunto ótimo de soluções para maximização simultânea de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$

Diferente da seção anterior, neste caso a otimização é realizada na macroestrutura, enquanto as microestruturas permanecem inalteradas. A função multiobjetivo é de maximização da separação entre a terceira e a segunda $(\omega_3 - \omega_2)$, e entre a décima primeira e a décima frequências naturais $(\omega_{11} - \omega_{10})$, de forma concomitante, considerando um volume final correspondente a 50% do volume inicial da macroestrutura.

A otimização busca alcançar o leiaute macroestrutural, ou seja, a melhor distribuição de material na macroestrutura, onde as microestruturas 1 e 2 são consideradas a fase mais rígida e menos rígida na macroestrutura, respectivamente. As propriedades dos materiais das microestruturas são mostradas na Tabela 5.11.

Os dados de entrada do método BESO são: taxa evolucionária $ER^{mac} = 2\%$, taxa de adição máxima $AR_{max}^{mac} = 2\%$, fração de volume prescrito $Volfrac^{mac} = 50\%$ e $Volfrac^{mic,1} = Volfrac^{mic,2} = 100\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$, erro máximo admissível $\tau^* = 0,0001$ e fator de penalidade $p = 3,0$. A Figura 8.7 apresenta o conjunto de soluções obtidos.

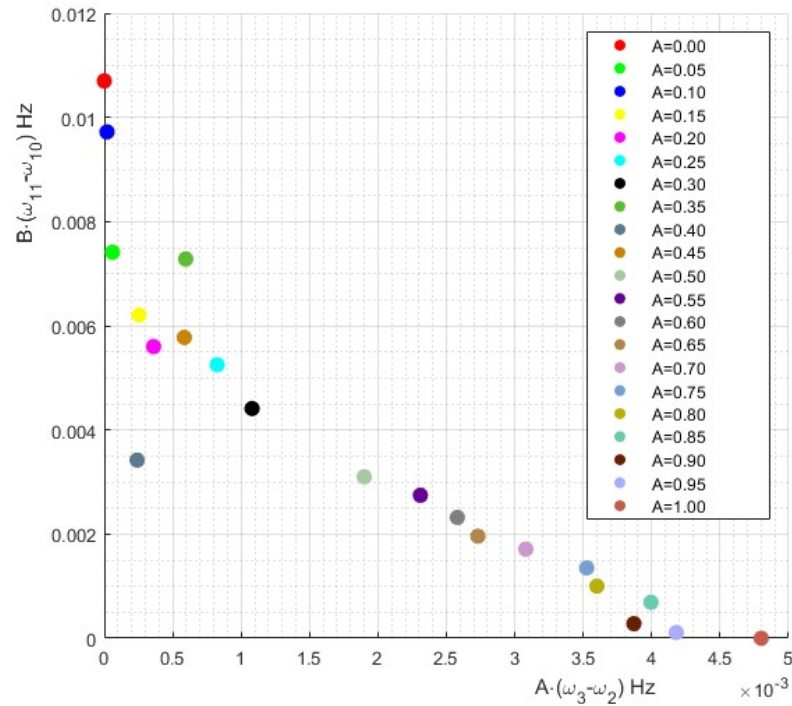


Figura 8.7 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$, simultaneamente.

8.2.3 Otimização multiescala acoplado, conjunto ótimo de soluções para maximização simultânea de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$

Para este caso são abordados os dois casos anteriores de forma acoplada, uma vez que o processo de otimização é realizado tanto na macroestrutura quanto em ambas microestruturas. A função multiobjetivo é de separação entre a terceira e a segunda $(\omega_3 - \omega_2)$, e entre a décima primeira e a décima frequências naturais $(\omega_{11} - \omega_{10})$, de forma conjunta, considerando um volume final correspondente a 50% do volume inicial.

A otimização da macroestrutura busca o melhor leiaute para a distribuição das fases mais rígida (micro 1) e menos rígida (micro 2). Enquanto que as microestruturas, composta por duas fases cada, busca a melhor distribuição de cada fase dentro de cada microestrutura. Na Tabela 5.15 são mostradas as propriedades dos materiais das microestruturas empregadas.

Os dados de entrada do método BESO são: taxas evolucionárias $ER^{mac} = ER^{mic,1} = ER^{mic,2} = 5\%$, taxas de adição máxima $AR_{max}^{mac} = AR_{max}^{mic,1} = AR_{max}^{mic,2} = 5\%$, fração de volume prescrito $Volfrac^{mac} = Volfrac^{mic,1} = Volfrac^{mic,2} = 50\%$, $x_{min} = 10^{-5}$, raio de filtragem $r_{min} = 4$,

erro máximo admissível $\tau^* = 0,0001$ e fator de penalidade $p = 3,0$. A Figura 8.8, apresenta o conjunto de soluções obtidos.

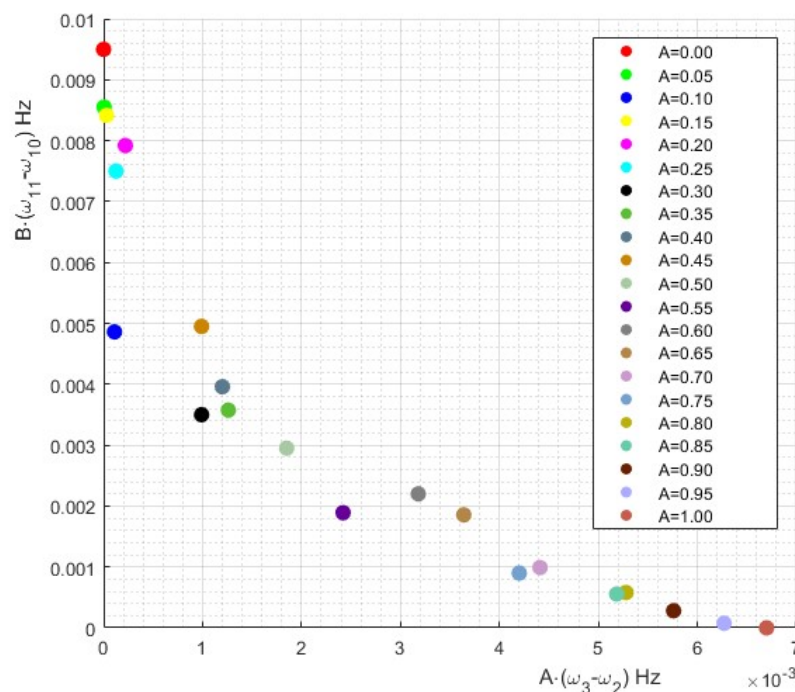


Figura 8.8 Conjunto de soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$, simultaneamente.

8.2.4 Integração dos resultados do conjunto de soluções ótimas

Os conjuntos de soluções do processo de otimização para a estrutura bimaterial, estão compilados na Figura 8.9, sendo:

Caso (a) – Projeto microestrutural bimaterial, conforme Figura 8.6.

Caso (b) – Projeto macroestrutural bimaterial, conforme Figura 8.7.

Caso (c) – Projetos macro e microestrutural multimaterial, conforme Figura 8.8.

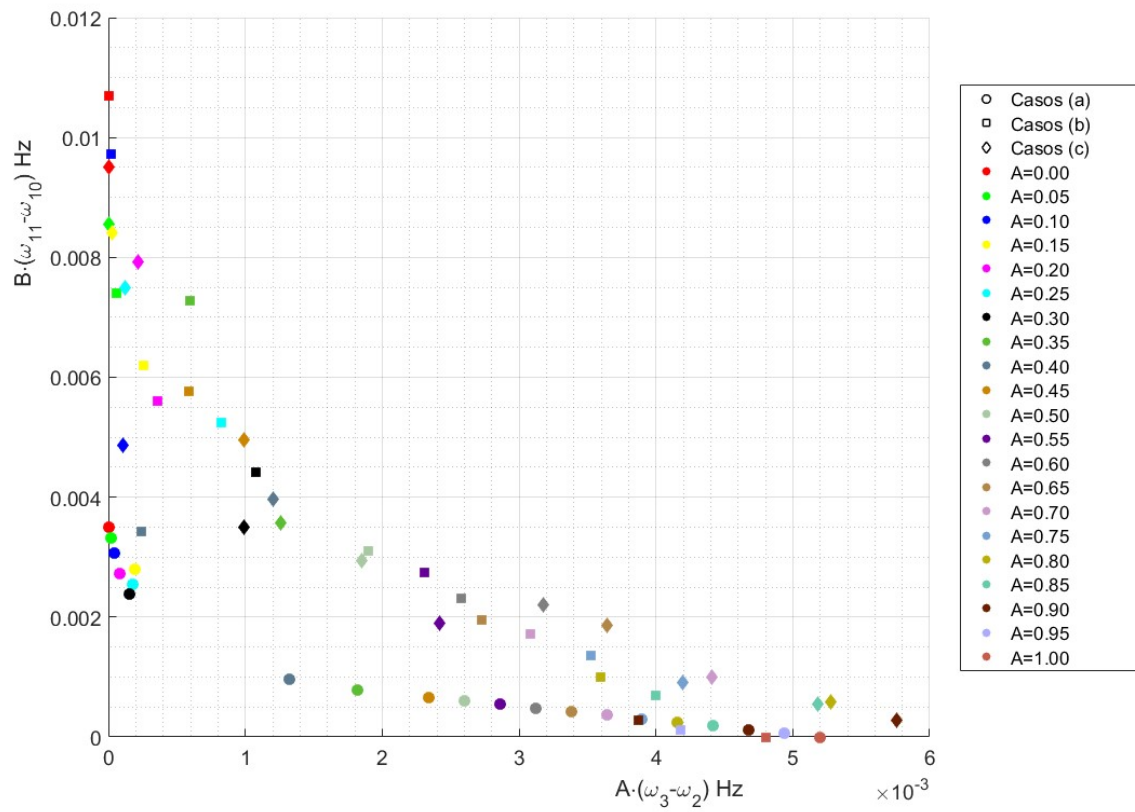


Figura 8.9 Compilação das soluções para otimização multiobjetivo de maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ e $(\omega_{11} - \omega_{10})$, simultaneamente.

9 CONCLUSÕES

O método evolucionário implementado em uma escala foi verificado na maximização da frequência fundamental de três estruturas. No caso de uma viga biapoiada, a topologia ótima encontrada se assemelha com os resultados da literatura, inclusive no que diz respeito à proximidade das duas primeiras frequências caracterizando a condição bimodal. Os valores da frequência fundamental obtidos são próximos das referências, 1,6% para o trabalho de Du e Olhoff, 2007 e 3,4% para o trabalho de Huang et al., 2010a. Todavia, o número de iterações foi reduzido em 65% e 49%, respectivamente, com a consequente economia computacional.

Para o caso de uma viga biengastada com massa concentrada, embora a topologia alcançada possua algumas diferenças quando comparada com a de Yaghoobi e Hassani, 2017, os valores das frequências fundamentais após otimização se mostram idênticos até a primeira casa decimal, observando-se ainda que a diferença para o valor da frequência fundamental não otimizada é de 0,78%.

Quanto a placa retangular de alumínio, o valor alcançado para a frequência fundamental após otimização se situou 2,2% acima do valor apresentado no trabalho de Steven e Xie, 1996, e 38,7% acima do valor inicial não otimizado da placa. Além disso, as topologias se assemelham e houve uma redução de 74,1% no número de iterações.

O modelo multiescala foi aplicado em uma viga engastada com diferentes condições microestruturais. No caso da otimização da microestrutura periódica com material único, ainda que a topologia da microestrutura alcançada apresenta diferenças com relação à topologia encontrada por Zuo et al., 2013, os valores para as frequências fundamentais são idênticos com uma redução de 29,27% no número de iterações.

Para o caso de microestrutura periódica composta por dois materiais, a topologia encontrada se assemelha com o da referência, com valores idênticos até a segunda casa decimal na frequência fundamental e uma redução de 46,67% no número de iterações.

Quando a macroestrutura é composta por duas microestruturas distintas, as topologias, encontrada e da referência, se assemelham, bem como as frequências fundamentais otimizadas são idênticas até a terceira casa decimal.

Em se tratando do modelo sólido-vazio em ambas microestruturas, enquanto a topologia da macroestrutura se mostrou semelhante à encontrada no trabalho de Zuo et al., 2013, a topologia da microestrutura menos rígida ficou idêntica. Além desta, também a frequência fundamental após o processo de otimização alcançou valores idênticos.

Para a condição de microestruturas distintas com dois materiais cada, após o processo de otimização, tanto a macro quanto ambas as microestruturas chegaram em topologias semelhantes às da referência. Já as iterações tiveram seu valor reduzido em 34,09%.

O método evolucionário para separação de frequência foi testado em estrutura com material único. Para o caso de uma viga biapoiada de Du e Olhoff, 2007, a maximização da separação das frequências de número dois e um forneceu uma estrutura topológica com periodicidade múltipla, além disso constatou-se a possibilidade de um projeto onde as frequências mencionadas não se caracterizam como bimodais. Já na maximização do intervalo das frequências de números três e dois, o resultado alcançou um valor de 158,99% maior quando comparado ao mesmo intervalo para a estrutura não otimizada.

Em relação a viga biapoiada apresentada por Lopes et al., 2017, a maximização do intervalo entre a terceira e a segunda frequências naturais apresentou um intervalo maior em 8,97% associada a uma diminuição de 52,63% no número de iterações.

Para o caso da placa retangular de alumínio, o valor alcançado com a maximização do intervalo da frequência de número três e dois superou o mesmo intervalo para a placa não otimizada em 1980%.

A separação de frequências naturais adjacentes, considerando as escalas micro e macro, empregando o método evolucionário de otimização topológica foi avaliado em uma estrutura com três projetos microestruturais diferentes.

Em relação à otimização utilizando microestrutura única com duas fases, a maximização do intervalo entre a terceira e a segunda frequências naturais supera em 333% a diferença entre as mesmas frequências, quando da maximização somente da frequência fundamental, com um mesmo número de iterações.

Quanto ao projeto para maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$ de uma estrutura bimatéria onde a otimização é realizada na macroestrutura, enquanto as microestruturas permanecem inalteradas, verificou-se ser possível realizar uma separação das frequências outrora bimodais na condição não otimizada, fato esse também evidenciado para o caso do projeto ótimo multiescala acoplado para maximização de $(\omega_3 - \omega_2)$, em que ambas microestruturas são compostas de duas fases cada.

Na otimização multiobjetivo de uma estrutura de material único, no caso de uma placa retangular, a separação simultânea das frequências de números cinco e quatro e números nove e oito, é percebido que os pontos que não fazem parte do conjunto de soluções ótimas, denunciam uma perda de integridade estrutural, enquanto que os demais pontos revelam soluções factíveis. O mesmo aspecto de perda de integridade estrutural é percebido para o

caso de uma viga biapoada com separação simultânea das frequências de números três e dois e números oito e sete.

Em se tratando da otimização multiobjetivo de uma estrutura multiescala hierárquica, com a separação simultânea das frequências de números três e dois e de números onze e dez, cujos três casos verificados foram: otimização microestrutural, otimização macroestrutural e otimização multiescala acoplado, em todos os casos se evidenciou que não há perda da integridade estrutural da viga, por se tratarem de modelos em que a macroestrutura é composta por microestrutura periódica, sendo tratada como contínua, e de igual modo as próprias microestruturas são elementos contínuos.

9.1 Sugestões para trabalhos futuros

Na sequência são apresentadas algumas sugestões para continuidade de certos aspectos observados ao longo desta pesquisa em sistemas multiescala acoplados com ferramentas de otimização topológica, não tendo sido abordados aqui, mas que podem ser estudados em trabalhos futuros.

Investigar sobre novos tipos de filtros e novas formas de aplicações, que aderem ao método evolucionário de otimização topológica, bem como suas interrelações com a topologia final alcançada pela estrutura.

Avaliar a robustez da otimização multiobjetivo para outros intervalos de separação de frequências, no intuito de criar superfícies de respostas.

Comparar os resultados encontrados de separação de frequências no sistema estrutural com relação a minimização da resposta em frequência.

Implementar um código para modelagem de estruturas multiescala tridimensionais, tanto na macroescala, quanto na microescala.

Confeccionar protótipos das topologias finais obtidas de alguns modelos apresentados no trabalho, por exemplo: placa retangular de alumínio, viga biengastada com massa concentrada. Realizar ensaios mecânicos nos protótipos comparando os resultados com os obtidos pela análise de elementos finitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allaire, G. **Shape optimization by the homogenization method**. New York: Springer-Verlag, 2002, 456p.

Almeida, V. S.; Simonetti, H. L.; de Assis das Neves, F. Seleção de topologias ótimas de estruturas elásticas 2D com restrição de tensão – via smooth evolutionary structural optimization, **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, vol. 30 (2), p. 69 – 76, 2014.

Andreassen, E.; Andreassen, C. S. How to determine composite material properties using numerical homogenization, **Computational Materials Science**, vol. 83, p. 488–495, 2014.

Askes, H.; Morata, I.; Aifantis, E. C. Finite element analysis with staggered gradient elasticity, **Computers & Structures**, vol. 86 (11), p. 1266 – 1279, 2008.

Bendsøe, M. P.; Kikuchi, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol.71, p.197-224, 1988.

Bendsøe, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem, **Structural Optimization**, vol.1, p.193-202, 1989.

Bendsøe, M. P.; Sigmund, O. **Topology optimization: theory, methods, and applications**. Berlin: Springer-Verlag, 2003, 370 p.

Bogomolny, M. Topology optimization for free vibrations using combined approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 82 (5), p. 617–636, 2010.

Bourgat, J. Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients, In: Dold, A.; Eckmann, B. (eds): **Lecture Notes in Mathematics**, p. 330–356. Heidelberg: Springer, 1977, 704p.

Calixto, T. K. L. **Otimização Topológica Evolucionária Multiescala Aplicada a Problemas de Elasticidade Linear**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2015, 124 p.

Calixto, T. K. L.; Pavanello, R. Structural efficiency of multiscale topology optimization of cellular materials using bi-directional evolutionary structural optimization, **1st PanAmerican Congress on Computational Mechanics - PANACM 2015**, Buenos Aires, Argentina, 2015.

Cazacu, R.; Grama, L. Overview of structural topology optimization methods for plane and solid structures, **Annals of the University of Oradea Fascicle of Management**

and Technological Engineering, vol. 28 (3), p. 17–22, 2014. Disponível em <https://imtuoradea.ro/auo.fmte/>. (acessado em 25/12/2017).

Challis, V. A discrete level-set topology optimization code written in Matlab, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 41, p. 453 - 464, 2011.

Chiandussi, G.; Codegone, M.; Ferrero, S. Topology optimization with optimality criteria and transmissible loads, **Computers and Mathematics with Applications**, vol. 57, p. 772 – 788, 2009.

Chu, D. N.; Xie, Y. M.; Hira, A.; Steven, G. P. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints, **Finite Element Analysis**, vol. 21, p. 239–251, 1996.

Coutinho, K. D. **Método de Otimização Topológica em Estruturas Tridimensionais**, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2006, 96 p.

Da, D.; Xia, L.; Li, G. Evolutionary topology optimization of continuum structures with smooth boundary representation, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, online, p. 1-17, 2017a.

Da, D. C.; Cui, X. Y.; Long, K.; Li, G. Y. Concurrent topological design of composite structures and the underlying multi-phase materials, **Computers and Structures**, vol. 179, p. 1–14, 2017b.

Deaton, J. D.; Grandhi, R. V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000, **Structural Multidisciplinary Optimization**, vol. 49, p. 1–38, 2014.

De Leon, D. M.; Souza, C. E.; Fonseca, J. S. O.; Silva, R. G. A. Aeroelastic tailoring using fiber orientation and topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 46, p. 663-677, 2012.

Diaz, A.; Kikuchi, N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method, **International Journal for Numerical Methods Engineering**, vol. 35, p. 1487 - 1502, 1992.

Drehmer, L. R. C. **Otimização Robusta Multiobjetivo por Análise de Intervalo não Probabilística: uma Aplicação em Conforto e Segurança Veicular sob Dinâmica Lateral e Vertical Acoplada**, Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017, 183 p.

Du, J.; Olhoff, J. Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 34, p. 91–110, 2007.

Eschenauer, H. A.; Olhoff, N. Topology optimization of continuum structures: A review*, **Applied Mechanics Reviews**, vol. 54, p. 331 – 390, 2001.

Ghabraie, K.; Xie, Y. M.; Huang, X.; Ren, G. Shape and reinforcement optimization of underground tunnels, **Journal of Computational Science and Technology**, vol. 4 (1), p. 51–63, 2010.

Guan, H.; Chen, Y. J.; Loo, Y. C.; Xie, Y. M.; Steven, G. P. Bridge topology optimisation with stress, displacement and frequency constraints, **Computers and Structures**, vol. 81, p. 131–145, 2003.

Neves, M. M.; Rodrigues, H.; Guedes, J. M. Optimal design of periodic linear elastic microstructures, **Computers & Structures**, v. 76, p. 421-429, 2000.

Hassani, B.; Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization I - homogenization theory for media with periodic structure, **Computers & Structures**, vol. 69, p. 707–717, 1998a.

Hassani, B.; Hinton, E. A review of homogenization and topology optimization II - analytical and numerical solution of homogenization, **Computers & Structures**, vol. 69, p.719–738, 1998b.

Hassani, B.; Hinton, E. **Homogenization and Structural Topology Optimization**. London: Springer-Verlag, 1999, 268p.

Hollister, S. J.; Kikuchi, N. A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites, **Computational Mechanics**, v. 10, p. 73-95, 1992.

Hollister, S. J.; Kikuchi, N. Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue, **Biotechnology and Bioengineering**, v. 43, n. 7, p. 586–596, 1994.

Huang, X.; Xie, Y. M. Convergent and mesh-independent solutions for the bidirectional evolutionary structural optimization method, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 43, p. 1039–1049, 2007.

Huang, X.; Xie, Y. M. **Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications**, Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2010. 237p.

Huang, X.; Zuo, Z. H.; Xie, Y. M. Evolutionary topological optimization of vibrating continuum structures for natural frequencies, **Computers and Structures**, vol. 88, p. 357–64, 2010a.

Huang, X.; Xie, Y. M. A further review of ESO type methods for topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 41, p. 671-683, 2010b.

Huang, X.; Zhou, S.; Sun, G.; Li, G.; Xie, Y. M. Topology optimization for microstructures of viscoelastic composite materials, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 283, p. 503–516, 2015.

Jog, C. S.; Haber, R. B. Stability of finite element models for distributed parameter optimization and topology design, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 130, p. 203–226, 1996.

Lazarov, B. S.; Sigmund, O. Filters in topology optimization based on helmholtz-type differential equations, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, vol. 86, (6), p. 765–781, 2011.

Link, F. B.; Cesconeto, E. M.; Lisboa, E. S.; Moreira, J. B. D.; Casas, W. J. P. Otimização topológica estrutural com malha não estruturada. **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE 2017**, Florianópolis, Brazil, 2017.

Lisboa, E. S.; Cesconeto, E. M.; Moreira, J. B. D.; Ribeiro, T. S.; De Medeiros, J. E. G.; Pinheiro, W. W. F.; Casas, W. J. P. Análise e otimização de um sistema fluido-estrutura discretizado com malha não estruturada, **Fifth Innovation and Technology Seminar IFSul INOVTEC - 2016**, Sapucaia do Sul, Brasil, 2016.

Lisboa, E. S.; Moreira, J. B. D.; Cesconeto, E. M.; Medeiros, J. E. G., Ribeiro, T. S.; Casas, W. J. P., Optimization of dynamic parameters with bidirectional evolutionary structural method of continuum structures, **Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics DINAME-2017**, São Sebastião, Brazil, 2017.

Liu, X.; Yi, W.; Li, Q. S.; Shen, P. Genetic evolutionary structural optimization, **Journal of Constructional Steel Research**, vol. 64, p. 305–311, 2008.

Liu, Q.; Chan, R.; Huang, X. Concurrent topology optimization of macrostructures and material microstructures for natural frequency, **Materials and Design**, vol. 106 p. 380–390, 2016.

Lopes, H. N.; Pavanello, R.; Mahfoud, J. Topology Optimization for the Maximization of Frequency Separation Margin, **VI International Symposium on Solid Mechanics - MecSol 2017**, Joinville, Brazil, 2017.

Kim, H.; Querin, O. M.; Steven, N, G. P. On the development of structural optimisation and its relevance in engineering design, **Design Studies**, vol. 23, p. 85–102, 2002.

Kim, W. Y.; Grandhi, R. V. Multiobjective evolutionary structural optimization using combined static/ dynamic control parameters, **AIAA Journal**, vol. 44 (4), p. 794-802, 2006.

Ma, Z-D.; Cheng, H-C.; Kikuchi, N. Structural design for obtaining desired eigenfrequencies by using the topology and shape optimization method, **Computing System in Engineering**, vol. 5 (1) p. 77 – 89, 1994.

Mahalingan, S.; Bishop, R. E. D. The response of a system with repeted natural frequencies to force and displacement excitation, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 36 (2), p. 285-295, 1974.

Manafi, I.; Shojaei, S. Solving multi constraints structural topology optimization problem with reformulation of level set method, **International Journal of Optimization in Civil Engineering**, vol. 8(2), p. 255-274, 2018.

Messac, A.; Mullur, A. A. Multiobjective optimization: concepts and methods, **Optimization of Structural and Mechanical Systems**. p. 121 - 147, 2007

Michell, A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures, **Philosophical Magazine**, vol. 8, p. 589–597, 1904.

Molter, A.; Silveira, O. A. A.; Bottega, V.; Fonseca, J. S. O. Integrated topology optimization and optimal control for vibration suppression in structural design, **Structural Multidisciplinary Optimization**, vol. 47, p. 389–397, 2013.

Moreira, J. B. D.; Lisboa, E. S.; Candido, L. M.; Casas, W. J. P. Sensibilidade de la microestrutura en un Sistema multi-escala, **Mecánica Computacional**, vol. 35, p. 1269 – 1280, 2017a.

Moreira, J. B. D.; Cesconteto, E. M.; Lisboa, E. S.; Link, F. B.; Casas, W. J. P. Structural topology optimization of a fluid-structure system with unstructured mesh. **24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2017**, Curitiba, Brazil, 2017b.

Munk, D. J.; Vio, G. A.; Steven, G. P. A simple alternative formulation for structural optimization with dynamic and buckling objectives, **Structural Multidisciplinary Optimization**, vol. 55, p. 969–986, 2017.

Olhoff, O.; Parbery, R. Designing vibrating beams and rotating shafts for maximum difference between adjacent natural frequencies, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 20 (1), p. 63-75, 1984.

Olhoff, N.; Multicriterion structural optimization via bound formulation and mathematical programming, **Structural Optimization**, vol. 1, p.11-17, 1989.

Olhoff, N.; Lund, E.; Seyranian, A. P. Sensitivity analysis and optimization of multiple eigenvalues in structural design problems, In: **Proceedings of the 5th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization**, Panama City, USA, 1994.

Olhoff, N.; Niu, B.; Cheng, G. Optimum design of band-gap beam structures, **International Journal of Solids and Structures**, vol. 49, p. 3158 - 3169, 2012.

Pereira, J. T.; Fancello E. A.; Barcellos C. S. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints, **Structural Multidisciplinary Optimization**, vol. 26, p. 55 - 66, 2004.

Paulino, G. H. 10th Where are we in topology optimization? World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization 2013. Disponível em: <http://www2.mae.ufl.edu/mdo/Papers/Panel1.pdf> acesso em 25/12/2016.

Petroski, H. **Design Paradigms Case Histories of Error and Judgment in Engineering**. New York: Cambridge University Press, 1994, 209p.

Petyt, M., **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**, (2nd Edition), New York: Cambridge University Press, 2015. 557 p.

Picelli, R. **Otimização Estrutural Evolucionária usando malhas hexagonais**, Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2011, 121 p.

Picelli, R.; Vicente, W. M.; Pavanello, R.; Xie, Y. M. Evolutionary topology optimization for natural frequency maximization problems considering acoustic–structure interaction, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 106, p. 56–64, 2015.

Proos, K. A.; Steven, G. P.; Querin, O. M.; Xie, Y. M. Stiffness and inertia multicriteria evolutionary structural optimisation, **Engineering Computations**, vol. 18 (7), p. 1031-1054, 2001.

Querin, O. M.; Steven, G. P.; Xie Y. M. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm, **Engineering Computations**, vol. 15, p. 1031–1048, 1998.

Radman, A.; Huang, X.; Xie, Y. M. Topological optimization for the design of microstructures of isotropic cellular materials, **Engineering Optimization**, vol. 45 (11), p. 1331–1348, 2013.

Rodrigues, H.; Guedes, J. M.; Bendsøe, M. P. Hierarchical optimization of material and structure, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 24, p. 1-10, 2002.

Rodriguez, S. Q.; Pavanello, R. Thermo-mechanical multi-objective bidirectional evolutionary structural optimization using weighted sum method for mean compliance and heat conduction problem, **1st Pan-American Congress on Computational Mechanics – PANACM 2015**, Buenos Aires, Argentina, 2015.

Romero, J. S.; Silva E. C. N. A topology optimization approach applied to laminar flow machine rotor design, **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, vol. 279, p. 268–300, 2014.

Rong, J. H.; Xie, Y. M.; Yang, X. Y.; Liang, Q. Q. Topology optimization of structures under dynamic response constraints, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 234 (2), p. 177-189, 2000.

Ruiz, D.; Bellido, J. C.; Donoso, A. Eigenvector sensitivity when tracking modes with repeated eigenvalues, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 326, p. 338-357, 2017.

Sepulveda, A. E. Integrated optimization of intelligent structures, In: Herskovitz, J. (ed): **Advances in Structural Optimization**, p. 263-315. Dordrecht: Springer, 1995, 496p.

Seyranian, A. P.; Lund, E.; Olhoff, N, **Multiple eigenvalues in structural optimization problems**, *Structural optimization*, vol. 8 (4), p. 207–27, 1994.

Sigmund O. Tailoring materials with prescribed elastic properties, **Mechanics of Materials**, vol. 20, p. 351–368, 1995.

Sigmund O.; Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima, **Structural Optimization**, vol. 16, p. 68–75, 1998.

Sigmund O. Mechanics of solids and fluids topology optimization: A tool for the tailoring of structures and materials, **Philosophical Transactions Mathematical Physical and Engineering Sciences**, vol. 358, p. 211–228, 2000.

Sigmund, O. A 99 lines topology optimization code written in Matlab, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 21, p. 120–127, 2001.

Sigmund, O.; Gersborg-Hansen, A.; Habe, R. B. A topology optimization for multiphysics problems: A future FEMLAB application? **Nordic Matlab Conference (NMC2003)**, p. 237–242, 2003.

Sigmund, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 33(4), p. 401–424, 2007.

Sigmund, O.; Maute, K. Sensitivity filtering from a continuum mechanics perspective, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 46 (4), p. 471–475, 2012.

Tanskanen, P. A multiobjective and fixed elements based modification of the evolutionary structural optimization method, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 196, p. 76–90, 2006.

Venkayya, V. B. Introduction: Historical perspective and future direction, **Structural Optimization: Status and Promise**, vol. 150, p. 1–10, 1993.

Vicente, W. M. **Otimização Topológica Evolucionária Aplicada a Sistemas Elasto-Acústicos**, Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2013, 179 p.

Vicente, W. M.; Picelli, R.; Pavanello, R.; Xie, Y. M. Topology optimization of frequency responses of fluid–structure interaction systems, **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 98, p. 1–13, 2015.

Vicente, W. M.; Zuo, Z. H.; Pavanello, R.; Calixto, T. K. L.; Picelli, R.; Xie, Y. M. Concurrent topology optimization for minimizing frequency responses of two-level hierarchical structures, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 201, p. 116–136, 2016.

Xia, L.; Breitkopf, P. Design of materials using topology optimization and energy-based homogenization approach in Matlab, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 52, p. 1229–1241, 2015.

Xie, Y. M.; Steven, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization, **Computer & Structures**, v, 49. p. 885–896, 1993.

Xie, Y. M.; Steven, G. P. A simple approach to structural frequency optimization, **Computer & Structures**, v, 53 (6). p. 1487-1491, 1994.

Xie, Y. M.; Steven, G. P. Evolutionary structural optimization for dynamics problems, **Computer & Structures**, v, 58. p. 1067–1073, 1996.

Xu, B.; Xie, Y. M. Concurrent design of composite macrostructure and cellular microstructure under random excitations, **Composite Structures**, vol. 123, p. 65–77, 2015.

Xu, B.; Huang, X; Xie, Y. M. Two-scale dynamic optimal design of composite structures in the time domain using equivalent static loads, **Composite Structures**, vol. 142 p. 335–345, 2016.

Yaghoobi, N.; Hassani, B. Topological optimization of vibrating continuum structures for optimal natural eigenfrequency, **International Journal of Optimization in Civil Engineering**, vol. 7(1), p. 1-12, 2017.

Yan, X.; Huang, X.; Zha, Y.; Xie, Y. M. Concurrent topology optimization of structures and their composite microstructures, **Computers and Structures**, vol. 133, p. 103–110, 2014.

Yang, X. Y.; Xie, Y. M.; Steven, G. P.; Querin, O. M. Topology optimization for frequencies using an evolutionary method, **Journal of Structural Engineering**, vol. 125 (12), p. 1432–1438, 1999.

Yang, X. H. **Engineering Optimization - An Introduction with Metaheuristic Applications**, New Jersey: John Wiley & Sons, 2010.

Zargham, S.; Ward, T. A.; Ramli, R.; Badruddin, I. A. Topology optimization: a review for structural designs under vibration problems, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 16 (6), p. 1157–1177, 2016.

Zhang, W.; Sun, S. Scale-related topology optimization of cellular materials and structures, **International Journal for Numerical Methods and Engineering**, vol. 68, p. 993–1011, 2006.

Zhao, C.; Steven, G. P.; Xie, Y. M. Evolutionary natural frequency optimization of thin plate bending vibration problems, **Structural Optimization**, vol. 11, p. 244-251, 1996.

Zhao, C.; Steven, G. P.; Xie, Y. M. Evolutionary natural frequency optimization of two-dimensional structures with additional non-structural lumped masses, **Engineering Computations**, v, 14. p. 233–251, 1997.

Zhou, M.; Rozvany, G. I. N. The COC algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v, 89. p. 309-336, 1991.

Zuo, Z. X.; Xie, Y. M.; Huang, X. Combining genetic algorithms with BESO for topology optimization, **Structural and Multidisciplinary Optimization**, vol. 38, p. 511–523, 2009.

Zuo, Z. X.; Xie, Y. M.; Huang, X. An improved bi-directional evolutionary topology optimization method for frequencies, **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, vol. 10 (1), p. 55 – 75, 2010.

Zuo, Z. X.; Xie, Y. M.; Huang, X. Optimal topological design of periodic structures for natural frequencies, **Journal of Structural Engineering**, vol. 137 (10), p. 1229-1240, 2011.

Zuo, Z. X.; Xie, Y. M.; Huang, X. Evolutionary topology optimization of structures with multiple displacement and frequency constraints. **Advances in Structural Engineering**, vol. 15, vol. 2, p. 359 – 372, 2012.

Zuo, Z. H.; Huang, X.; Rong, J. H.; Xie, Y. M. Multi-scale design of composite materials and structures for maximum natural frequencies, **Materials and Design**, vol. 51, p. 1023-1034, 2013.

APÊNDICE A APRESENTAÇÃO GRÁFICA DO ESTADO DA ARTE



APÊNDICE B DESENVOLVIMENTOS MATEMÁTICOS

Regra de derivação indireta

Se $\Phi = \Phi(x, y)$,

e y depende de x ,

então:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x},$$

e como $y = x/\delta$,

tem-se:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Derivada da matriz de rigidez

Matriz de rigidez elementar, i.e., derivada da matriz de rigidez global \mathbf{K} com relação a variável de projeto x_i . Partindo da Equação (4.12) para se obter a Equação (4.14). Para o caso apresentado $\mathbf{K}_{e_i}^0$ representa a matriz de rigidez elementar para um material com módulo de Young unitário. E^0 representa o módulo de Young do material, onde $\mathbf{K}_{e_i}^*$ representa a matriz de rigidez elementar associada a um elemento com módulo de Young com um valor qualquer entre $E(x_{min})$ e E^0 , para a variável de projeto x_i entre x_{min} ou 1, respectivamente. Por sua vez \mathbf{K}_{e_i} , representa a matriz de rigidez elementar associada a um material com módulo de Young E^0 .

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{K}_{e_i}^* = \sum_i E(x_i) \mathbf{K}_{e_i}^0$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_{e_i}^*}{\partial x_i} = \frac{\partial E(x_i)}{\partial x_i} \mathbf{K}_{e_i}^0$$

$$\text{como: } E(x_i) = \left[\frac{x_{min} - x_{min}^p}{1 - x_{min}^p} (1 - x_i^p) + x_i^p \right] E^0$$

então:

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[\frac{x_{min} - x_{min}^p}{1 - x_{min}^p} (1 - x_i^p) + x_i^p \right] E^0 \right\}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = \left[-px_i^{p-1} \frac{x_{min} - x_{min}^p}{1 - x_{min}^p} + px_i^{p-1} \right] E^0$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = \left[\frac{px_i^{p-1} - px_i^{p-1} x_{min} - \overbrace{px_i^{p-1} x_{min}^p}^{=0} + px_i^{p-1} x_{min}^p}{1 - x_{min}^p} \right] E^0$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = \left[\frac{px_i^{p-1} - px_i^{p-1} x_{min}}{1 - x_{min}^p} \right] E^0$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = px_i^{p-1} \frac{1 - x_{min}}{1 - x_{min}^p} E^0 \therefore$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{K}_{e_i}^*}{\partial x_i} = px_i^{p-1} \frac{1 - x_{min}}{1 - x_{min}^p} E^0 \mathbf{K}_{e_i}^0$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = px_i^{p-1} \frac{1 - x_{min}}{1 - x_{min}^p} E^0 \underbrace{\mathbf{K}_{e_i}^0}_{\mathbf{K}_{e_i}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = px_i^{p-1} \frac{1 - x_{min}}{1 - x_{min}^p} \mathbf{K}_{e_i}$$

Derivada de ω

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial x} = 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{2\omega} \frac{\partial \omega^2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{2\omega \underbrace{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}_{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u} = 1}} \left\{ \left[2 \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial x} \overbrace{(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})}^{(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0} \mathbf{u} \right] + \left[\mathbf{u}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \omega_k^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i^{mac}} \right) \mathbf{u} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{2\omega} \mathbf{u}^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i^{mac}} \right] \mathbf{u}$$

APÊNDICE C DERIVADA DE AUTOVALORES REPETIDOS

Este apêndice mostra a forma de se resolver problemas de autovalores repetidos em estruturas sujeitas a vibrações livres não amortecidas, baseado nos trabalhos de Mahalingan e Bishop, 1974; Olhoff et al., 1994 e Seyranian et al., 1994.

Dado um autovalor λ que possui dois autovetores distintos ϕ_1 e ϕ_2 , onde $\phi = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$ e $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, que respeitam as condições de normalização $\phi^T \mathbf{M} \phi = 1$ e $\phi^T \mathbf{K} \phi = \lambda$.

Substituindo $\phi = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2$ na equação $(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{u} = \mathbf{0}$, e multiplicando por ϕ^T , é obtida a expressão: $(\alpha\phi_1^T + \beta\phi_2^T)(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \mathbf{0}$.

Derivando a expressão encontrada em relação à variável de projeto x_i , e observando a condição de singularidade do autovetor, chega-se a equação:

$$(\alpha\phi_1^T + \beta\phi_2^T) \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \mathbf{M} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \mathbf{0}.$$

Considerando $g_{mn} = \phi_n^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \right) \phi_m$, onde m e n varia de 1 até o número de autovalores repetidos, a equação anterior pode ser reescrita no formato:

$$\alpha^2 g_{11} + \beta^2 g_{22} + 2\beta g_{12} = (\alpha^2 \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 + \beta^2 \phi_2^T \mathbf{M} \phi_2) \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}.$$

Uma vez que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ e $\phi^T \mathbf{M} \phi = 1$, a equação anterior passa a ser escrita da forma $\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = \alpha^2 g_{11} + \beta^2 g_{22} + 2\beta g_{12}$, que ao ser derivada em função de α e β , pode ser apresentada no

formato matricial $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, sendo que os autovalores da matriz passam a ser os

autovalores do problema.