UM PROBLEMA EM ABERTO EM ÁLGEBRA

COLÓQUIO SBM/UFRGS

Miguel Ferrero

Série C3/MAI/88

Pode um idempotente ser soma de dois elementos nilpotentes ?

Miguel Ferrero

1. INTRODUÇÃO.

Lembremos que um anel R é um conjunto com duas operações $+$ e $.$ que satisfazem às seguintes propriedades.

S_1). A soma é associativa e comutativa.

S_2) Existe $0 \in R$ tal que $x+0 = x, \forall x \in R$

S_3) Para todo $x \in R$ existe $-x \in R$ tal que $x+(-x) = 0$

P_1) O produto é associativo.

D) O produto é distributivo com respeito à soma, tanto multiplicando a direita quanto à esquerda.

Se além disso, a seguinte propriedade

P_2) O produto é comutativo,

é verificada, então R é dito um anel comutativo.

Os exemplos mais conhecidos de anéis comutativos são os anéis numéricos, i.e, o conjunto de números inteiros (racionais, reais, complexos) com as operações usuais. Os anéis dos inteiros módulo p, sendo $p>0$, são também importantes. Eles podem ser definidos como sendo o conjunto

$$Z_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{p-1}\}$$ com as operações:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad (\text{mod. } p)$$

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{ab} \ (\text{mod. } p)$$

onde $o \leq a \leq p-1$, $0 \leq b \leq p-1$, e $\overline{a+b}$ (mod. p) ($\overline{a.b}$ (mod.p)) significa que deve calcular-se a soma $a+b$, depois o resto r da divisão de este número por p e finalmente pôr $\overline{a+b}$ (mod.p) = $\overline{r}$ ($\overline{ab}$ (mod.p) = $\bar{r}$).

Os exemplos mais conhecidos de anéis não comutativos são os anéis de matrizes: se R é um anel, $M_n(R)$ denota o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ sobre R onde a soma e o produto são definidos da mesma maneira que é usual fazê-lo para matrizes sobre o corpo dos números reais.

Um elemento x de um anel R é dito <u>nilpotente</u> se existir um inteiro positivo n tal que $x^n = 0$, onde $x^n = x \dots x$ (n vezes).

Um elemento $e \in R$ é dito <u>idempotente</u> se $e^2 = e$.

Por exemplo, se R é o anel M_n (R) então a matriz $A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = 0$ para $i \leq j$ é nilpotente pois $A^n = 0$.

Os elementos 0 e 1 (caso existir 1, i.e., o anel possuir unidade) são idempotentes chamados idempotentes triviais. Se o anel for um domínio de integridade $(a.b = 0 \longrightarrow a = 0$ ou $b = 0)$ então 0 e 1 são os únicos idempotentes. Pois se $e^2 = e$ então $e(e-1) = 0$ e segue que $e = 0$ ou $e-1 = 0$.

Mas em geral um anel pode possuir idempotentes não triviais. De fato, a matriz que tem todas as suas entradas nulas, sàlvo aquela que ocupa a posição (i,i) a qual vale 1, é idempotente no anel de matrizes sobre qualquer anel com unidade.

A questão que queremos considerar aqui é a seguinte. Seja R um anel e x e y dois elementos nilpotentes de R. Poder ser $e = x+y$ idempotente?

É claro que esta questão planteada assim tem algumas respostas triviais. Por exemplo, se $x \in R$ é nilpotente então $0 = x+(-x)$, onde 0 é idempotente e x e $-x$ são nilpotentes. Portanto, é necessário estabelecer a limitação $\neq 0$ para que ela tenha algum interesse.

Seja R um anel comutativo. Se x e y são nilpotentes de R podemos supor que $x^n = 0$ e $y^m = 0$. Como é fácil ver, a fórmula do binômio vale quando R é comutativo. Logo

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^i \ y^{n+m-i} = 0,$$

pois se $0 \leq i \leq n+m$ então $i \geq n$ ou $n+m-i \geq m$ e conseqüentemente $x^i = 0$ ou $y^{n+m-i} = 0$. Portanto, se $e = x+y$ é idempotente resulta $e=e^2 = e^3 =\ldots = e^{n+m} = 0$.

Logo, a questão proposta somente merece consideração para anéis não comutativos.

Seja agora $M_3(Z_2)$ o anel de matrizes 3×3 sobre o anel Z_2, dos inteiros módulo 2. Sendo que

$$\begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & 0 & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & \bar{1} \\ 0 & 0 & \bar{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ \bar{1} & \bar{1} & 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } \bar{1} \in Z_2 \text{, temos que:}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & \bar{1} \\ 0 & 0 & \bar{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ \bar{1} & \bar{1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{são}$$

nilpotentes e sua soma $\quad e = \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & 0 & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & 0 \end{bmatrix}$

verifica $e^2 = e$, como é fácil ver.

Logo a questão proposta tem uma resposta afirmativa no caso considerado. Análogo exemplo pode ser construído em $M_{(p+1)}(Z_p)$. Mas é claro que se $x \in M_{(p+1)}(Z_p)$ então $px = 0$. A pergunta natural é a seguinte:

<u>Questão</u>: Seja R um anel tal que para $n \neq 0$, $r \in R$, $nr = 0$ implica $r = 0$. Se x e y são nilpotentes de R e $e = x+y$ é idempotente então pode ser $e \neq 0$?

Veremos alguns resultados que parecem mostrar que a situação anterior não pode acontecer.

2. <u>Resultados</u>.

Primeiramente provaremos o seguinte:

<u>Teorema 1</u>. Seja R um anel e x e y elementos de R tais que $x^2 = 0$ e $y^n = 0$. Se $e = x+y$ é idempotente então $e = 0$.

<u>Prova.</u> Se $(x+y)^2 = x+y$, então $x^2+y^2+xy+yx = x+y$

Como $x^2 = 0$ temos a seguinte relação:

(1) $\qquad y^2+xy+yx = x+y$

Multiplicando a esquerda por y^{n-1} e a direita por y obtemos

$$y^{n-1} \times y^2 = y^{n-1} \times y$$

Portanto $\quad y^{n-1} \times y = y^{n-1} \times y^2 = y^{n-1} \times y^3 = \dots = y^{n-1} \times y^n = 0.$

Multiplicando ainda (1) por y^{n-1} a esquerda segue que:

$$0 = y^{n-1} \times y = y^{n-1} \times$$

Por outra parte $y^{n-1}\, y = y^n = 0$.

Segue que $y^{n-1}\, a = 0$ para a igual a x ou y.

Suponhamos, por indução, que para cada seqüência $a_1, \dots , a_{n-i}$, onde a_j é x ou y temos que $y^i\, a_1 \dots a_{n-i} = 0$. Provaremos que $y^{i-1} b_1\, b_{n-i+1} = 0$ se $b_j = x$ ou y.

Estabelecido isto, o resultado segue. De fato, pelo argumento provado tem-se que $c_1.c_2 \dots c_n = 0$ para qualquer seqüência $c_1, c_2, \dots, c_n$, onde $c_j = x$ ou y.

Logo $x+y = (x+y)^2 = (x+y)^3 = \dots = (x+y)^n = 0$, sendo que todos os somandos do desenvolvimento de $(x+y)^n$ são do tipo anterior e logo nulos.

Resta provar então que $y^{i-1} b_1 \dots b_{n-i+1} = 0$ se $b_j = x$ ou y, $1 \le j \le n-i+1$.

Multiplicando ainda (1) por y^{i-1} a esquerda tem-se

(2) $\quad y^{i+1} + y^{i-1} xy + y^i x = y^{i-1} x + y^i$

Agora multiplicando (2) a direita por y^{n-i} e utilizando a hipótese de indução resulta

$$y^{i-1}x\,y^{n-i+1} = y^{i-1}x\,y^{n-i}$$

Logo $\quad y^{i-1}x\,y^{n-i} = y^{i-1}x\,y^{n-i+1} = y^{i-1}x\,y^{n-i+2} = \dots = y^{i-1}x\,y^{n} = 0$

Ainda multiplicando (2) a direita por $y^{n-i-1}x$ segue que.

$0 = y^{i-1}x\,y^{n-i}x = y^{i-1}x\,y^{n-i-1}x$.

Ou seja $y^{i-1}x\,y^{n-i-1}a = 0$ para $a = x$ ou y.

Mais uma vez admitimos, por indução, que

(3) $\quad y^{i-1}x\,y^{n-s}b_1 \dots b_t = 0$, $t = s-i$, para cada seqüência $b_1, \dots b_t$ com $b_j = x$ ou y.

Consideremos

$z = y^{i-1}x\,y^{n-s-1}b_1\,b_2 \dots b_{t+1}$

Se $b_1 = y$ então $z = 0$ por (3). Se $b_1 = x$, multiplicando (2) por $y^{n-s-1}xb_2 \dots b_{t+1}$ a direita segue

$y^{i-1}xy^{n-s}xb_2 \dots b_{t+1} + y^{i}xy^{n-s-1}xb_2 \dots b_{t+1} = y^{i-1}xy^{n-s-1}xb_2 \dots b_{t+1}$
$+ y^{n+i-s-1}xb_2 \dots b_{t+1}$

Então, por (3),

$y^{i-1}x\,y^{n-s-1}x\,b_2 \dots b_{t-1} = -y^{n+i-s-1}x\,b_2 \dots b_{t+1} = 0$, sendo que $n+i-s-1 = (n-s)+i-1 \geq i$.

Logo $z = 0$ também neste caso . Conseqüentemente $y^{i-1}x\,a_1 \dots a_{n-i} = 0$, para $a_j = x$ ou y. Também $y^{i-1}ya_1 \dots a_{n-i} = 0$ e segue que $y^{i-1}c_1 \dots c_{n-i+1} = 0$ para $c_j = x$ ou y, como queríamos provar.

O segundo resultado não trivial que conhecemos é o seguinte.

Teorema 2. Seja R um anel tal que $2a = 0$, $a \in R$, implica $a = 0$. Se $e = x+y$ é idempotente e $x^3 = y^3 = 0$ então $e = 0$.

Prova. De $(x+y)^2 = x+y$ temos que

(1) $x^2+y^2+xy+yx = x+y$

Computando o que resulta de multiplicar (1) a esquerda por x^2 (resp. x^2y, x^2, $x^2 y^2$) e a direita por y^2 (resp. y^2, x^2y^2, y^2) temos

(2) $x^2 y x y^2 = 0$

(3) $x^2 y x^2 y^2 + x^2 y^2 x y^2 = x^2 y xy^2 = 0$

(4) $x^2 y^2 x^2 y^2 = x^2 y x^2 y^2$

(5) $x^2 y^2 x^2 y^2 = x^2 y^2 x y^2$

Pondo agora (4) e (5) em (3) resulta $2 x^2 y^2 x^2 y^2 = 0$ e então, por hipóteses,

(6) $x^2 y^2 x^2 y^2 = 0$

Portanto temos

(7) $x^2 y x y^2 = x^2 y^2 x^2 y^2 = x^2 y x^2 y^2 = x^2 y^2 x y^2 = 0$

A simetria da equação (1) e da hipótese mostra que também temos

(8) $y^2 x y x^2 = y^2 x^2 y^2 x^2 = y^2 x y^2 x^2 = y^2 x^2 y x^2 = 0$

Agora, usando (1), (7) e (8), resulta

$x^2 y x^2 = x^2 (x^2 + y^2 + xy + yx - x) x^2 = x^2 y^2 x^2 =$

$x^2 y (x^2 + y^2 + xy + yx - x) x^2 = x^2 yx\, yx^2 =$

$x^2 y (x^2 + y^2 + xy + yx - y) y x^2 =$

$x^2 y x^2 y x^2 + x^2 y x y^2 x^2 + x^2 y^2 x y x^2 = x^2 y x^2 y x^2 =$

$x^2 (x^2 + y^2 + xy + yx - x) x^2 y x^2 = 0$

Ou seja,

$x^2 y x^2 = x^2 y^2 x^2 = 0$ e, simetricamente, $y^2 x y^2 = y^2 x^2 y^2 = 0$

Portanto,

$$\begin{aligned} x^2 yx &= x^2 (x^2 + y^2 + xy + yx - x)\, x = x^2 y^2 x = \\ &= x^2 y^2 (x^2 + y^2 + xy + yx - y) = x^2 y^2 xy = \\ &= x^2 y^2 (x^2 + y^2 + xy + yx - y)\, y = 0 \end{aligned}$$

Então

$$x^2 y^2 = x^2 (x^2 + y^2 + xy + yx - x)\, y = 0$$

$$\text{e } x^2 y = x^2 (x^2 + y^2 + xy + yx - x) = 0$$

Simetricamente podemos obter

$$y^2 x = x y^2 = y x^2 = 0$$

e finalmente

$x y x = x (x^2 + y^2 + xy + yx - x)\, x = 0$ e simetricamente $y x y = 0$

Assim,

(9). $a_1 a_2 a_3 = 0$, para toda seqüência a_1, a_2, a_3 onde $a_i = x$ ou y.

Segue que $e = e^2 = e^3 = 0$ pois $(x+y)^3$ é uma soma de produtos do tipo (9), o que completa a prova.

Finalmente queremos fazer algumas observações.

<u>Observação 1</u>. Face aos resultados obtidos, e considerando que não são conhecidos resultados mais gerais, achamos de interesse propor a seguinte:

<u>Questão</u>. Seja R um anel comutativo tal que $ra = 0$, $a \in R$, implica $a = 0$ e sejam x e y dois elementos nilpotentes de R. Se $e = x+y$ é idempotente então $e = 0$?

Acreditamos que ainda seria interessante saber se o resultado vale para $x^3 = 0$ e $y^n = 0$.

Observação 2. Seja $e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(Q)$

Então $e^3 = e$ e $e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

com $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = 0$

Este exemplo mostra que na consideração da questão anterior a condição $(x+y)^3 = x+y$ não pode substituir com vantagem a condição $(x+y)^2 = x+y$.

Observação 3. Dado um anel R, existe um idempotente não nulo e, e quatro elementos x_1, x_2, x_3, x_4 tais que $e = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ e tal que $x_i^2 = 0$ para $1 \leq i \leq 4$? Eu não conheço resposta desta questão tampouco.

Observação 4. Poderia se provar que a resposta à questão central seria $e = 0$ se conseguimos provar que o Q- espaço vetorial com base $\{a_1 a_2 \dots a_t$: para $a_i = x$ ou y, t arbitrário$\}$ é de dimensão finita. Isto é, existe um número finito de tais produtos tal que qualquer outro é combinação linear destes. Esta afirmação é possível de provar, mas não acredito conveniente prolongar mais esta nota.

Reconhecimento. Gostaria de esclarecer que os resultados desta nota foram obtidos em colaboração com Edmund Puczylowski. Gostaria também de agradecer ao colega Jaime Ripoll o qual convidou-me a proferir esta palestra.

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

1. Marcos Sebastiani - Palestra Inaugural - MAR/88.
2. José Francisco Porto da Silveira - A Fatorial no Infinito - MAR/88.
3. Miguel A. Ferrero - Um Problema em Aberto em Álgebra - MAI/88.
4. Willy G. Engel - Problemas da História da Matemática Antiga - JUN/88.
5. Cydara C. Ripoll - A Série $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ converge!!!. - JUL/88.
6. Vera Clotilde G.Carneiro - O Caos na Natureza: Uma Interpretacão a Luz dos Sistemas Dinâmicos - SET/88.
7. Ada Maria de S. Doering - A Conjectura de Fermat - SET/88.
8. Elsa Mundstock - Microinformática Aplicada as Áreas de Matemática e Estatística - SET/88.
9. Léa Fagundes - Psicologia Cognitiva e Educação Matemática - OUT/88..
10. Maria Luisa Souza - Breve Relato Sobre o Ensino de Matemática - OUT/ 88.
11. João Luis Becker - Teoria Axiomática da Utilidade Esperada - NOV/88.
12. Ary Tietböhl - Criacão do Instituto de Matemática da UFRGS ,- MAR/89.
13. Alvino A. Sant'Ana - Construcão por Meio de Régua e Compasso,- ABR/89.
14. Oclide José Dotto - A Regra dos Sinais de Descartes - ABR/89.

Série C: Colóquio de Matemática SBM/UFRGS

01. Marcos Sebastiani - Palestra Inaugural - MAR/88.

02. José Francisco Porto da Silveira - A Fatorial no Infinito - MAR/88

03. Miguel A. Ferrero - Um Problema em Aberto em Algebra - MAI/88