

## DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO EM ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE LIVRE DEVIDO À CURVATURA DAS LINHAS DE CORRENTE

*Leonardo Romero Monteiro<sup>1\*</sup> & Luísa Vieira Lucchese<sup>1</sup> & Edith Beatriz Camaño Schettini<sup>1</sup>*

**Resumo** – Sabe-se que, nas simulações hidrodinâmicas, a consideração da distribuição de pressões não-hidrostáticas em um escoamento é importante para diversos casos. É apresentada na literatura tradicional de hidráulica de canais uma equação que descreve a parcela não-hidrostática provocada por relevos curvos. O objetivo do presente trabalho é analisar a validade de aplicação desta expressão por comparação com os resultados obtidos pelo código tridimensional de superfície livre SuLi, que leva em consideração a parcela de pressão não-hidrostática. Foram realizadas simulações de escoamentos sobre batimetrias côncavas e convexas, variando-se os raios destas batimetrias e as velocidades do escoamento que incidem nestes relevos. Mostrou-se que existe maior conformidade entre os resultados da equação com os da simulação quanto maiores os raios de curvatura das batimetrias. Os casos simulados com relevo côncavo apresentaram resultados mais distanciados da equação do que os casos com relevo convexo.

**Palavras-Chave** – Distribuição de pressão, curvatura de fundo, escoamento com superfície livre.

## PRESSURE DISTRIBUTION IN FREE SURFACE FLOWS DUE TO STREAM LINES CURVATURE

**Abstract** – It is known that in hydrodynamics simulations non-hydrostatic pressure consideration in free-surface flows is important for many cases. An equation that considers this non-hydrostatic pressure over circular bathymetries is given on literature. The objective of this paper is to analyze some validity limits for this given expression by comparisons between the expression results, and the results given by the SuLi code, which is a tridimensional free-surface code that considers non-hydrostatic pressure. Flow simulations with concave and convex bottom were simulated, varying radius bottom and velocity flow incidence. In the range of analyzed parameters, higher conformity was achieved when the radius of bottom curvature was bigger. Concave bathymetries results have more similarity between proposed literature equation and SuLi code then the convex ones.

**Keywords** – Pressure distribution, bottom curvature, free surface flow.

## INTRODUÇÃO

Na modelagem hidrodinâmica de canais, tanto para modelos unidimensionais quanto para modelos bidimensionais, geralmente se assume que a pressão se comporta de forma unicamente hidrostática (O'BRIEN, 1993; HERVOUET, 2000; USACE-HEC, 2016; VAN DER KNIJFF, 2010) devido a que estes modelos são baseados nas equações de Saint-Venant ou de águas rasas. O trabalho de Monteiro e Schettini (2015) mostrou previamente a necessidade emergente da utilização de códigos que considerem a pressão total em modelos hidrodinâmicos de superfície livre. Na maioria dos casos, a parcela não-hidrostática é negligenciada, gerando erros, por vezes muito significativos, principalmente se existem deformações de fundo importantes.

<sup>1</sup> Afiliação: Núcleo de Estudos em Transição e Turbulência, Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
\* email: leonardo.monteiro@ufrgs.br

Algumas metodologias sugerem que a pressão em um determinado escoamento a superfície livre seja separada em duas parcelas: uma de pressão hidrostática e outra de pressão não-hidrostática. Na literatura de hidráulica básica e aplicada (CHOW, 1959; PORTO, 2006; BAPTISTA et al., 2001) propõe-se uma equação para representar a pressão no fundo de um canal com batimetria curva de raio constante, considerando que a pressão, ademais do termo hidrostático, possui uma componente não-hidrostática. O objetivo do presente artigo é verificar por resultados numéricos a equação proposta na literatura clássica, identificando seus limites de aplicação. Com isso, o presente trabalho avança um passo no intuito de avaliar situações em que a contabilização da pressão não-hidrostática é importante.

## DISTRIBUIÇÃO DE PRESSÃO

Em relação ao diagrama de pressões em uma determinada seção, o escoamento em canais pode ser classificado como *paralelo* ou *curvilíneo*. *Paralelo* é aquele no qual as linhas de correntes são retas paralelas, não apresentam curvaturas e o efeito de componentes de acelerações normais à direção do fluxo é desprezível. Então, *curvilíneo*, é quando o efeito centrífugo devido à curvatura das linhas de corrente não é negligenciável (Porto, 2006).

Na literatura de hidráulica de canais (CHOW, 1959; PORTO, 2006; BAPTISTA et al., 2001), é apresentada uma formulação para representar a pressão no fundo do canal, levando-se em conta a superfície livre (figura 1). A equação é dada

$$p_f = p_h + \Delta p = \rho g z + \rho \frac{V^2}{R} h, \quad (1)$$

em que  $p_f$  é a pressão no fundo,  $\rho$  é a massa específica da água,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $z$  é a profundidade do escoamento,  $V$  é a velocidade,  $r$  é o raio de curvatura do fundo e  $h$  é a altura da superfície livre,  $p_h$  é a pressão hidrostática, e  $\Delta p$  é a parcela adicional de pressão devido à curvatura do fundo, em que neste trabalho será chamada de pressão não hidrostática ( $p_{nh}$ ). Esta equação avalia então o acréscimo de pressão devido à curvatura das linhas de correntes.

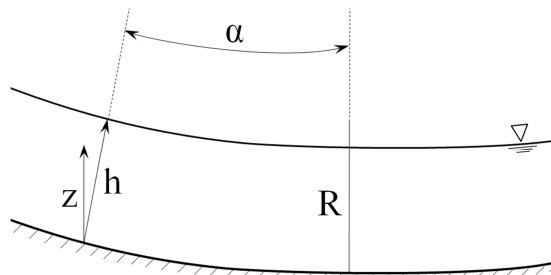


Figura 1 – Escoamento sobre um canal côncavo (adaptado de Porto, 2006).

## METODOLOGIA MATEMÁTICA E NUMÉRICA

Para avaliar a distribuição não linear da pressão ao longo da profundidade, será utilizado um código tridimensional que calcula a equação de quantidade de movimento considerando a pressão total do escoamento, e não apenas a parcela hidrostática. O código SuLi (Superfície Livre), apresentado por Monteiro e Schettini (2015), é baseado nas equações de Navier-Stokes, dadas em notação indicial por

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2)$$

em que  $u_i$  é a velocidade,  $t$  é o tempo,  $x_i$  é a coordenada longitudinal,  $g_i$  é aceleração da gravidade  $(0, 0, g)$  e  $\nu$  é a viscosidade cinemática. A pressão é dividida em duas parcelas, da forma

$$p = \rho g[\eta - z] + \rho q, \quad (3)$$

em que  $\eta$  é o desnível da superfície livre e  $q$  é a parcela não hidrostática da pressão. A equação da continuidade na superfície livre é adquirida considerando a condição cinemática

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{-h}^{\eta} u dz \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_{-h}^{\eta} v dz \right] = 0. \quad (4)$$

Para o resto do domínio, a equação da continuidade é

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5)$$

A resolução numérica deste código está baseada na proposta de trabalho de Casulli (1999). A malha utilizada é cartesiana deslocada, em que as velocidades são avaliadas no centro da face da célula normal a direção da velocidade, e a pressão é considerada no centro da célula. O esquema numérico para os termos convectivos é o *one-step backward Euler* (Cheng *et al.*, 1984), centrado de segunda ordem para os termos difusivos e para a pressão. O método da Projeção (Chorin, 1968) é aplicado para calcular as equações de Navier-Stokes em dois passos (preditor -corretor), sendo que, para resolver a equação de Poisson, é utilizado o método do Gradiente Conjugado Pré-condicionado (Shewchuk, 1994). Para calcular o desnível, o termo difusivo vertical é calculado implicitamente. Mais detalhes sobre o procedimento de cálculo do código SuLi podem ser encontrados em Monteiro (2014) e Monteiro e Schettini (2015).

### Condições iniciais, de contorno e geometria dos domínios de integração

O domínio de cálculo possui  $20 \text{ m}$  de comprimento,  $5 \text{ m}$  de altura e  $0,6 \text{ m}$  de largura, sendo discretizado em células cúbicas com arestas de  $0,05 \text{ m}$ . A duração dos eventos simulados é de  $20 \text{ s}$  com intervalo de tempo de  $0,01 \text{ s}$ .

Na entrada é imposto um perfil de velocidades uniforme e constante pela condição de Dirichlet, e na saída é considerada a condição de saída livre. As condições de contorno nas faces laterais são de deslizamento-livre. Na fronteira superior, a condição é de superfície livre, e na fronteira inferior de não-deslizamento. Batimetrias côncavas e convexas de diferentes curvaturas foram consideradas numericamente dentro do domínio de cálculo utilizando o Método de Fronteiras Imersas (PESKIN, 2002) por força direta da condição de não-deslizamento nos contornos sólidos (figura 2). As batimetrias adotadas não variam com a direção transversal  $y$ . Como condição inicial, foi imposta a mesma velocidade que a estabelecida para a condição de entrada.

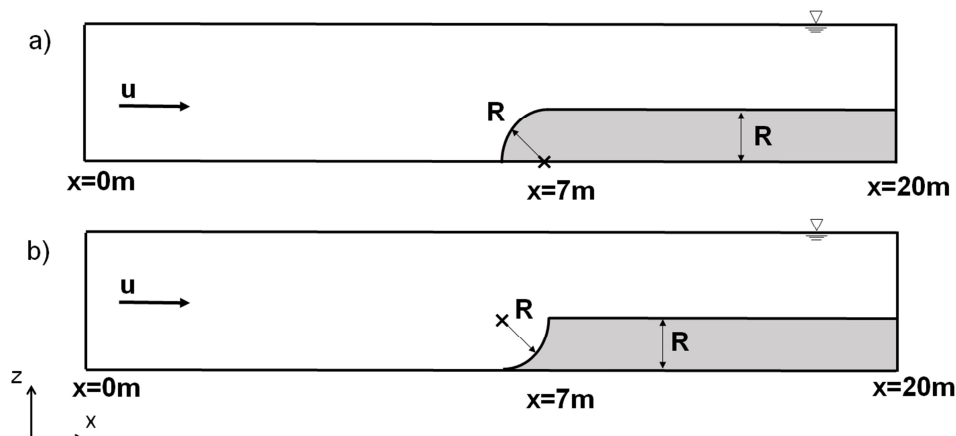


Figura 2 – Representação esquemática dos domínios com batimetria a) convexa, b) côncava.

## RESULTADOS

Foram realizadas simulações com o código SuLi, considerando-se diferentes raios para as geometrias de fundo côncavas e convexas, para três velocidades incidentes ( $0,05 \text{ m/s}$ ;  $0,25 \text{ m/s}$ ;  $1,00 \text{ m/s}$ ). Para identificar a proximidade entre os resultados da simulação numérica com a equação (1), adota-se uma estimativa de erro

$$\varepsilon = \frac{P_{NH, SuLi} - P_{NH, Lit.}}{P_{NH, SuLi}}, \quad (6)$$

em que  $P_{NH, SuLi}$  é a pressão não hidrostática média no tempo, obtida no ponto em que ocorre o valor de pressão extrema (negativa para convexo e positiva para côncavo) e  $P_{NH, Lit.} = \Delta P$ , proposta na literatura.

Os resultados e posterior discussão são apresentados a seguir, para ambas as batimetrias analisadas.

### Relevo Convexo (figura 2a)

Observaram-se as magnitudes e localizações das pressões máximas e mínimas no domínio; a figura 3 apresenta os quatro relevos convexas, com a mesma velocidade de entrada, porém quatro  $R$  diferentes, que variam de  $0,5$  a  $2,5 \text{ m}$ .

Na região próxima a  $x = 7 - R$ , ocorre um valor máximo de pressão para raios menores e ao longo da superfície do obstáculo, a pressão decai até um valor mínimo (ponto A). Tem-se estes valores máximos porque o relevo, mesmo sendo convexo em relação à curvatura, comporta-se em  $x = 7 - R$  como um degrau ascendente devido ao seu início abrupto.

Com o aumento do raio, observa-se que a pressão positiva é reduzida e a pressão negativa se dá em uma parte maior do obstáculo (figura 3c). Para o maior raio, desdobra-se a pressão negativa sobre a superfície inteira do obstáculo (figura 3d). Para todos os casos apresentados na figura 3, as maiores pressões estão localizadas nas proximidades do topo do arco da circunferência, pois no início deste arco, existem pressões positivas, que coíbem a ocorrência de pressões negativas.

Para comparar o valor de pressão do código SuLi ( $P_{NH, SuLi}$ ) com a pressão dada pela equação (1) ( $P_{NH, Lit.}$ ), utiliza-se a altura de escoamento ( $H_{A, SuLi}$ ) obtida no mesmo ponto em que  $P_{NH, SuLi}$  foi adquirida, para ser considerada na equação (1) (tabela 1). Observa-se que somente para raios maiores que 2 metros, os erros são menores. Para o caso específico com  $R = 2 \text{ m}$ , apenas o caso com velocidade de  $0,05 \text{ m/s}$  obteve erro menor que 10%. Diferente da relação inversamente proporcional com o raio apresentada pela equação (1), os valores de  $P_{NH, SuLi}$  aumentaram com o acréscimo do raio, até um limite de  $2 \text{ m}$ . Após este limite, a pressão passou a reduzir para  $R = 2,5 \text{ m}$ , em relação a  $R = 2,0 \text{ m}$ , para o caso de  $0,05 \text{ m/s}$ , o que representa a mesma tendência proposta na equação (1).

Quando maior é  $R$ , nos casos convexas estudados, mais o resultado da simulação numérica se assemelhou aos resultados propostos na literatura. Levando-se em consideração as linhas de corrente para  $R = 2 \text{ m}$  (figura 4), nota-se que quando menor é a velocidade, mais as linhas de corrente acompanham a batimetria, o que leva a uma diferença menor entre a simulação e a equação (1) (tabela 1). Provavelmente, esta é a razão pela qual os raios maiores obtêm maior concordância com a equação estudada.

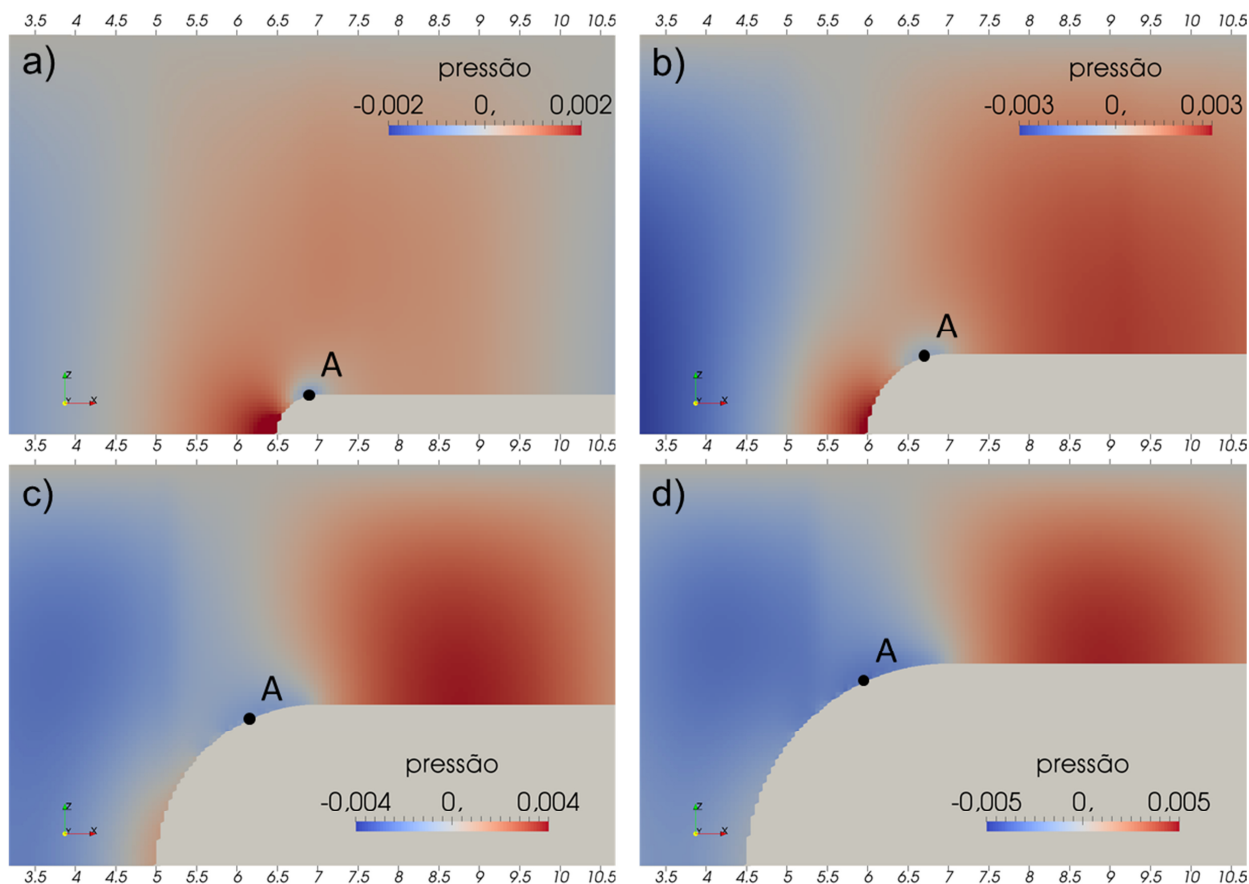


Figura 3 – Campo instantâneo de pressão para velocidade inicial de 0,05 m/s e raio convexo de a) 0,5 m, b) 1,0 m, c) 2,0 m e d) 2,5 m.

Tabela 1. Comparação entre pressão não hidrostática do código e da literatura para casos convexos.

Raio (m)	$V_0$ (m/s)	$\langle P_{NH,SuLi} \rangle$ (N/m <sup>2</sup> )	$H_{A,SuLi}$ (m)	$P_{NH,Lit.}$ (N/m <sup>2</sup> )	$\epsilon$
0,25	0,05	-1,5	4,76	-47,5	-30,73
	0,25	-29,6	4,75	-1185,1	-38,98
	1,00	-344,3	4,74	-18922,1	-53,96
0,50	0,05	-2,0	4,47	-22,3	-10,18
	0,25	-36,4	4,47	-557,6	-14,31
	1,00	-556,4	4,48	-8942,1	-15,07
1,00	0,05	-2,3	4,00	-10,0	-3,37
	0,25	-44,3	4,04	-252,0	-4,69
	1,00	-683,0	4,14	-4131,7	-5,05
2,00	0,05	-3,5	3,02	-3,8	-0,07
	0,25	-60,5	3,06	-95,4	-0,58
	1,00	-915,5	3,19	-1591,8	-0,74
2,50	0,05	-2,8	2,64	-2,6	0,06
	0,25	-61,1	2,66	-66,4	-0,09
	1,00	-1107,8	2,98	-1189,6	-0,07

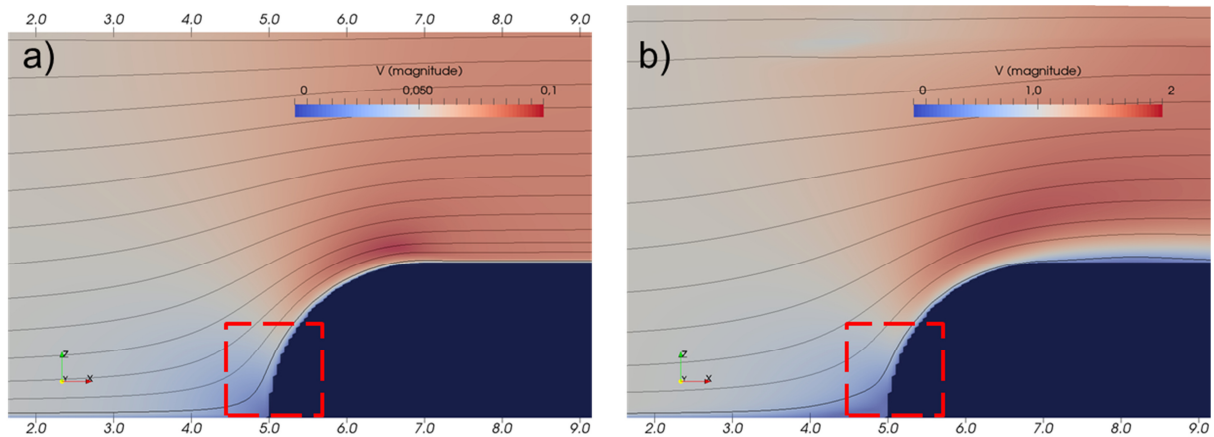


Figura 4 – Campo instantâneo de velocidade e linhas de corrente com espaçamento igual para raio convexo e velocidade inicial de a)  $0,05 \text{ m/s}$  e d)  $1,0 \text{ m/s}$ .

### Relevo Côncavo (figura 2b)

Observaram-se as magnitudes e localizações das pressões máximas e mínimas no domínio; a figura 5 apresenta os quatro relevos côncavos, com a mesma velocidade de entrada.

No início da variação do relevo (ponto A), para o menor raio (figura 5a), decorre o valor máximo de pressão, e com o aumento do raio este ponto migra para a parte superior do arco de circunferência que forma a batimetria (figura 5d). Na posição  $x = 7$  ocorre o valor mínimo de pressão, cujo módulo é maior que o da pressão máxima positiva. Com o aumento do raio, a pressão negativa, a jusante do relevo côncavo ( $x > 7 \text{ m}$ ), aumenta em magnitude.

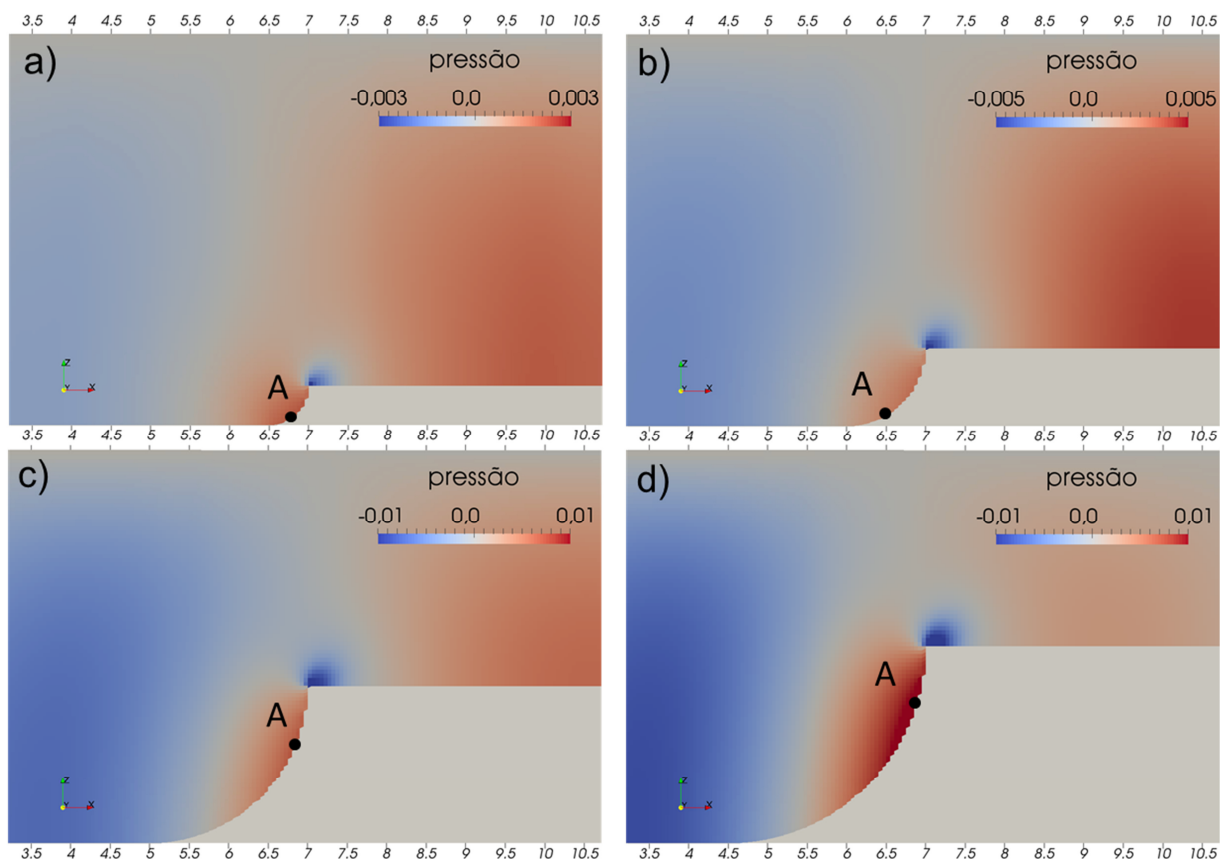


Figura 5 – Campo instantâneo de pressão para velocidade inicial de  $0,05 \text{ m/s}$  e raio côncavo de a)  $0,5 \text{ m}$ , b)  $1,0 \text{ m}$ , c)  $2,0 \text{ m}$  e d)  $2,5 \text{ m}$ .



Verifica-se o mesmo comportamento que no obstáculo convexo: quanto maior  $R$ , mais a pressão positiva (negativa para o convexo) se aproxima da registrada pela equação (1) (tabela 2). Neste caso, há uma variação maior dos valores máximos médios de pressão no domínio em relação ao relevo convexo. Diferente do caso anterior, para raios a partir de  $1\text{ m}$ , os erros relativos entre o código e a equação proposta na literatura são progressivamente menores para velocidades maiores.

Levando-se em consideração as linhas de corrente para um raio de  $2\text{ m}$  (figura 6), quando maior a velocidade, maior a conformidade destas linhas ao longo da batimetria. Isso acontece porque existe uma região de recirculação a jusante da descontinuidade da batimetria, que faz com que as linhas de corrente variem mais suavemente. Portanto, o escoamento difere significativamente do que ocorre nos casos convexos, onde não se observa uma região de recirculação clara. Nesta região de recirculação, como esperado, ocorrem grandes subpressões.

Tabela 2. Comparação entre pressão não hidrostática do código e da literatura para casos côncavos.

Raio (m)	$V_0$ (m/s)	$\langle P_{NH,SuLi} \rangle$ (N/m <sup>2</sup> )	$H_{A,SuLi}$ (m)	$P_{NH,Lit.}$ (N/m <sup>2</sup> )	$\epsilon$
0,25	0,05	1,0	4,93	49,2	-47,03
	0,25	23,7	4,93	1230,0	-50,87
	1,00	285,4	4,93	19680,6	-67,95
0,50	0,05	1,1	4,94	24,7	-21,87
	0,25	28,8	4,94	616,3	-20,37
	1,00	379,2	4,91	9800,4	-24,84
1,00	0,05	1,0	4,48	11,2	-9,98
	0,25	35,5	4,50	280,7	-6,90
	1,00	898,2	4,53	4520,9	-4,03
2,00	0,05	2,1	3,74	4,7	-1,23
	0,25	61,6	3,78	117,9	-0,91
	1,00	1317,4	3,91	1951,1	-0,48
2,50	0,05	4,6	3,22	3,2	0,31
	0,25	92,6	3,28	81,8	0,12
	1,00	1427,1	3,66	1461,1	-0,02

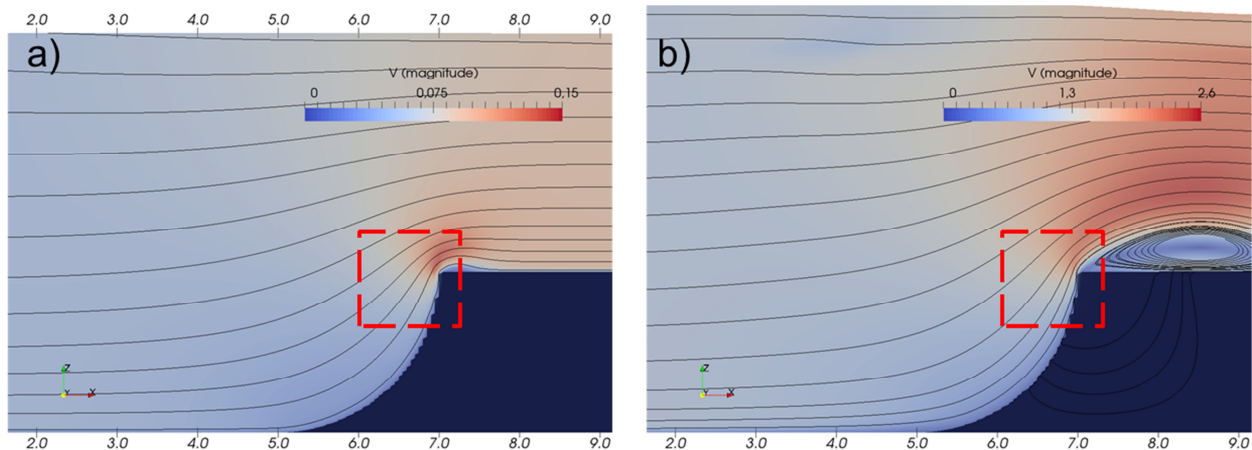


Figura 6 – Campo instantâneo de velocidade com linhas de corrente com espaçamento igual para raio côncavo e velocidade inicial de a)  $0,05\text{ m/s}$  e d)  $1,0\text{ m/s}$ .

## CONCLUSÃO

Comparou-se os resultados do cálculo de pressão proveniente da curvatura de fundos para o código SuLi (Monteiro e Schettini, 2015) com a equação (1) para pressão não-hidrostática sobre superfícies curvilíneas de raio constante, utilizada na literatura. O intuito foi identificar os limites de aplicação da equação (1) para os casos convexos e côncavos especificados neste estudo. Para relevos pequenos (menores do que 2 metros) os resultados são incompatíveis, enquanto que, para raios maiores, os resultados possuem boa aproximação (erro menor do que 10%). Ainda, os resultados variaram de acordo com as velocidades, tendo uma melhor aproximação para velocidades mais baixas nos casos convexos e para velocidades mais altas nos casos côncavos. Portanto, as aproximações por meio da equação proposta por Chow (1959) não são válidas para quaisquer configurações de escoamento, fornecendo especialmente uma aproximação melhor o quanto mais suaves são as variações da batimetria.

## AGRADECIMENTOS

O presente artigo foi desenvolvido pelo Núcleo de Transição e Turbulência (NETT) do Instituto de Pesquisas Hidráulicas (IPH/UFRGS). Os autores agradecem ao CNPq pelas bolsas de Mestrado/Doutorado e de Produtividade em Pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- BAPTISTA, M. B.; COELHO, M. M. L. P.; CIRILO, J. A. F. C. (2001). Hidráulica aplicada. *Coleção ABRH*, 8, 619 p.
- CASULLI, V. (1999). Semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 27(4), pp. 99 – 112.
- CHENG, R. T.; CASULLI, V.; MILFORD, S. N. (1984). Eulerian-Lagrangian Solution of the Convection-Dispersion Equation in Natural Coordinates. *Water Resources Research*, 20(7), pp. 944 – 952.
- CHORIN, A. J. (1968). Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of computation*, 22(104), pp. 745 – 762.
- CHOW, V. T. (1959). Open channel hydraulics. McGraw-Hill Book Company, Inc; New York.
- HERVOUET, J. M. (2000), TELEMAC modelling system: an overview. *Hydrol. Process.*, 14: 2209–2210.
- MONTEIRO, L. R. (2014). *Simulação numérica de escoamentos com superfície livre com aproximação não-hidrostática*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental da UFRGS, 94 p.
- MONTEIRO, L. R.; SCHETTINI, E. B. C. (2015). Comparação entre a aproximação hidrostática e não-hidrostática na simulação numérica de escoamentos com superfície livre. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos* 20(4), pp. 1051 – 1062.
- O'BRIEN, J.S.; JULIEN, P.Y.; FULLERTON, W.T. (1993). Two-dimensional water flood and mudflow simulation. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, v.119, n.2, p. 244 – 259.
- PESKIN, C. S. (2002). The immersed boundary method. *Acta numerica*, 11, 479-517.
- PORTO, R.M. (2006). *Hidráulica Básica*. EESC/USP São Carlos- SP, 519 p.
- SHEWCHUK, J. R. (1994). An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. School of computer science Carnegie Mellon University, 64p.
- USACE-HEC (2016). *HEC-RAS, River Analysis System Hydraulic Reference Manual, Version 5.0*. Brummer, G. W.: U.S. Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center.
- VAN DER KNIJFF, J. M.; YOUNIS, J.; DE ROO, A. P. J. (2010). LISFLOOD: a GIS-based distributed model for river basin scale water balance and flood simulation. *International Journal of Geographical Information Science*, 24(2), 189-212.