

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

CONSTRUÇÃO DE MÉTODO DE SOLUÇÃO FUNCIONAL PARA PROBLEMAS DE  
FLUXO EM MEIOS POROSOS NÃO SATURADOS

por

Igor da Cunha Furtado

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Março de 2017

CONSTRUÇÃO DE MÉTODO DE SOLUÇÃO FUNCIONAL PARA PROBLEMAS DE  
FLUXO EM MEIOS POROSOS NÃO SATURADOS

por

Igor da Cunha Furtado

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Marco Tullio Menna Barreto de Vilhena

Co-Orientador: Prof. Dr. Bardo Ernst Josef Bodmann

Aprovada por:

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiro Vargas (PUC/POA)

Prof. Dr. Edson Cezar Wendland (EESC/USP)

Prof. Dr. Luiz Alberto Oliveira Rocha (PROMEC/UFRGS)

Prof. Dr. Jakson Manfredini Vassoler  
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 31 de Março de 2017

## AGRADECIMENTOS

Agradeço

A Universidade Federal do Rio Grande do Sul pela oportunidade e o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico;

A Todos que me auxiliaram neste crescimento, principalmente professores e orientadores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

E a minha mãe, Suzete Vargas da Cunha, por todo o apoio durante minha formação profissional.

## RESUMO

Neste estudo, consideramos um problema transiente de fluxo unidimensional vertical de água em meio poroso insaturado, modelado pela equação Richards não-linear. As relações constitutivas de Van Genuchten são empregadas para representar a capacidade hidráulica e a condutividade. A fórmula da solução é otimizada e avaliada usando a equação governante em um critério de autoconsistente. Os resultados são apresentados para alguns tipos de solo e seus parâmetros relacionados, que são mencionados em literatura.

Palavras-chave: Equação de Richards; Decomposição Adomian; Aproximantes Padé; Otimização não-linear.

## ABSTRACT

In this study, we consider a transient vertical one-dimensional flow problem of water in unsaturated porous media, modelled by the non-linear Richards equation. Constitutive relations of Van Genuchten are employed to represent the hydraulic capacity and conductivity. The solution formula is optimized and evaluated using the governing equation for a self-consistency criterion. The results are presented for some soil types and its related soil parameters, that are reported in the literature.

Keywords: Richards equation; Adomian decomposition; Padé approximants; Nonlinear optimization.

## ÍNDICE

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Condições de modelagem . . . . .                                      | 1         |
| 1.2      | Objetivos do trabalho . . . . .                                       | 2         |
| 1.3      | Estrutura da metodologia . . . . .                                    | 3         |
| <b>2</b> | <b>NOÇÕES BÁSICAS</b> . . . . .                                       | <b>4</b>  |
| 2.1      | Considerações Iniciais . . . . .                                      | 4         |
| 2.2      | Escala de observação . . . . .  | 5         |
| 2.3      | Grandezas físicas no escoamento através de meios permeáveis . . . . . | 6         |
| 2.4      | Equação de Darcy . . . . .  | 7         |
| <b>3</b> | <b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b> . . . . .                                | <b>10</b> |
| 3.1      | Equação de Darcy-Buckingham . . . . .                                 | 10        |
| 3.2      | Equação da Continuidade . . . . .                                     | 10        |
| 3.3      | Equação governante do fluxo não saturado . . . . .                    | 12        |
| 3.4      | Modelo de Van Genuchten . . . . .                                     | 14        |
| <b>4</b> | <b>APROXIMANTES FUNCIONAL PADÉ</b> . . . . .                          | <b>17</b> |
| <b>5</b> | <b>MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO ADOMIAN</b> . . . . .                       | <b>33</b> |
| <b>6</b> | <b>ESTRUTURA DA SOLUÇÃO</b> . . . . .                                 | <b>37</b> |
| 6.1      | Evolução temporal . . . . .   | 37        |
| 6.2      | Estrutura estacionária . . . . .                                      | 39        |
| <b>7</b> | <b>CONSTRUÇÃO DE SOLUÇÃO FUNCIONAL PARAMETRIZADA</b> .                | <b>47</b> |
| 7.1      | Resultados numéricos . . . . .  | 50        |
| <b>8</b> | <b>CONCLUSÕES</b> . . . . .   | <b>64</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .                           | <b>65</b> |

## LISTA DE SÍMBOLOS

### 1. Caracteres Arábicos

|                 |  |
|-----------------|--|
| $A_i$           | Polinômio de Adomian referente a $i$ -ésima contribuição |
| $C$             | Capacidade hídrica, $m^{-1}$                             |
| $D$             | Difusividade hidráulica, $m^2/s$                         |
| $dV$            | Elemento diferencial de volume, $m^3$                    |
| $K$             | Condutividade hidráulica, $m/s$                          |
| $K_s$           | Condutividade hidráulica saturada, $m/s$                 |
| $\mathcal{L}$   | Operador de transformada de Laplace                      |
| $m_f$           | Massa do fluido, $Kg$                                    |
| $m$             | Saturação efetiva  |
| $\vec{q}$       | Vazão específica, $m/s$                                  |
| $q_x, q_y, q_z$ | Vazão específica nas direções $x, y$ e $z$ , $m/s$       |
| $q$             | Parâmetro dependente do solo                             |
| $Re$            | Número de Reynolds                                       |
| $t$             | Variável temporal, $s$                                   |
| $\vec{v}$       | Velocidade média, $m/s$                                  |
| $x, y, z$       | Coordenadas cartesianas (variáveis espaciais), $m$       |

## 2. Caracteres Gregos

|              |   |
|--------------|---|
| $\alpha$     | Parâmetro dependente do solo, $m^{-1}$          |
| $\eta$       | Porosidade efetiva, $m^3/m^3$                   |
| $\theta$     | Umidade volumétrica, $m^3/m^3$                  |
| $\theta_s$   | Umidade volumétrica do solo saturado, $m^3/m^3$ |
| $\theta_r$   | Umidade volumétrica residual do solo, $m^3/m^3$ |
| $\rho$       | Densidade específica do fluido, $Kg/m^3$        |
| $\phi$       | Potencial hidráulico, $m$                       |
| $\nabla\phi$ | Gradiente hidráulico, $m$                       |
| $\nabla$     | Operador vetorial (gradiente, divergente)       |
| $\partial$   | Operador de derivada parcial                    |
| $\Omega$     | Operador de equação diferencial                 |
| $\Omega_D$   | Termos das derivadas                            |
| $\Omega_L$   | Termos lineares                                 |
| $\Omega_N$   | Termos não lineares                             |
| $\Omega_R$   | Operador diferencial da equação de Richards     |
| $\Omega_h$   | Operador diferencial da equação heurística      |

## LISTA DE FIGURAS

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figura 2.1  | Meio poroso característico. . . . .   | 4  |
| Figura 2.2  | Transição para escala de representação contínua. . . . .  | 5  |
| Figura 2.3  | Esboço esquemático do experimento de Darcy. . . . .   | 8  |
| Figura 3.1  | Elemento de volume de solo, através do qual a solução esta fluindo na direção $z$ . . . . .   | 11 |
| Figura 4.1  | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo arenoso . . . . .  | 21 |
| Figura 4.2  | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo areia barrenta . . . . .   | 22 |
| Figura 4.3  | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo barro arenoso . . . . .  | 23 |
| Figura 4.4  | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo barrento . . . . .   | 24 |
| Figura 4.5  | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo siltoso . . . . .  | 25 |
| Figura 4.6  | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo barro siltoso . . . . .  | 26 |
| Figura 4.7  | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo barro-argilo-arenoso . . . . .   | 27 |
| Figura 4.8  | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo barro argiloso . . . . .   | 28 |
| Figura 4.9  | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo barro-argilo-siltoso . . . . .   | 29 |
| Figura 4.10 | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo argilo arenoso . . . . .   | 30 |
| Figura 4.11 | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo argilo siltoso . . . . .   | 31 |
| Figura 4.12 | Padé funcional para $K(\psi)$ e $C(\psi)$ em um solo argiloso . . . . .   | 32 |
| Figura 6.1  | Isolinhas do potencial $\varphi$ . . . . .  | 38 |
| Figura 6.2  | Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para $\psi \leq -2m$ . Solo arenoso (esquerda) e solo areia barrenta (direita). . . . .              | 40 |
| Figura 6.3  | Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para $\psi \leq -2m$ . Solo barro arenoso (esquerda) e solo barrento (direita). . . . .              | 40 |
| Figura 6.4  | Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para $\psi \leq -2m$ . Solo siltoso (esquerda) e solo barro siltoso (direita). . . . .               | 40 |
| Figura 6.5  | Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para $\psi \leq -2m$ . Solo barro-argilo-arenoso (esquerda) e solo barro argiloso (direita). . . . . | 41 |

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figura 6.6  | Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para $\psi \leq -2m$ . Solo barro-argilo-siltoso (esquerda) e solo argilo arenoso (direita). . . . . | 41 |
| Figura 6.7  | Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para $\psi \leq -2m$ . Solo argilo siltoso (esquerda) e solo argiloso (direita). . . . .             | 42 |
| Figura 6.8  | Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo arenoso (esquerda)e um solo areia barrenta (direita) . . . . .                               | 44 |
| Figura 6.9  | Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo barro arenoso (esquerda)e um solo barrento (direita) . . . . .                               | 44 |
| Figura 6.10 | Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo siltoso (esquerda)e um solo barro siltoso (direita) . . . . .                                | 45 |
| Figura 6.11 | Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo barro-argilo-arenoso (esquerda)e um solo barro argiloso (direita) . . . . .                  | 45 |
| Figura 6.12 | Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo barro-argilo-siltoso (esquerda)e um solo argilo arenoso (direita) . . . . .                  | 45 |
| Figura 6.13 | Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo argilo siltoso(esquerda)e um solo argiloso (direita) . . . . .                               | 46 |
| Figura 7.1  | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo arenoso (1). . . . .  | 51 |
| Figura 7.2  | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo areia barrenta (2). . . . .   | 52 |
| Figura 7.3  | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barro arenoso (3). . . . .  | 53 |
| Figura 7.4  | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barrento (4). . . . .   | 54 |
| Figura 7.5  | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo siltoso (5). . . . .  | 55 |
| Figura 7.6  | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barro siltoso (6). . . . .  | 56 |
| Figura 7.7  | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barro-argilo-arenoso (7). . . . .   | 57 |

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Figura 7.8  | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barro argilos (8).        | 58 |
| Figura 7.9  | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barro-argilo-siltoso (9). | 59 |
| Figura 7.10 | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo argilo arenoso (10).      | 60 |
| Figura 7.11 | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo argilo siltoso (11).      | 61 |
| Figura 7.12 | Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo argiloso (12).            | 62 |

**LISTA DE TABELAS**

|            |   |    |
|------------|---|----|
| Tabela 4.1 | Aproximantes Padé para casos típicos de textura de solo . . . . .   | 19 |
| Tabela 4.2 | Aproximantes Padé para casos típicos de textura de solo . . . . .   | 20 |
| Tabela 7.1 | Valores médios dos parâmetros hidráulicos para o modelo de Van Genuchten para quatro tipos de grupos de textura de solos de acordo com Carsel e Parrish, 1988 . . . . . | 50 |

# 1 INTRODUÇÃO

O estudo do movimento da água em zonas saturadas e não saturadas é importante em diversos campos da ciência, como agricultura, hidrologia e vários ramos da engenharia. Simulações de infiltração e movimento da água no solo surgem como uma medida preventiva, tanto para o controle da ação destrutiva da água em fundações, barragens e pavimentos, como para prever o escoamento e transporte de poluentes. Também como objetivo proteger os lençóis d'água subterrâneos, que são importantes fontes de captação de água para consumo e irrigação de áreas produtivas.

Os modelos e simulações matemáticas são de suma importância nos estudos sobre o controle do movimento de águas subterrâneas, pois esses podem reduzir o tempo e os recursos exigidos pelos testes em campo ou em laboratórios. A necessidade desses modelos também se justifica pelo interesse de avaliar os efeitos de medidas de gestão de água, como a drenagem do solo, irrigação e subirrigação, planos para abastecimento de água e equilíbrio da produção agrícola. Na engenharia civil, a estimativa de infiltração através de barragens e perdas por infiltração pode também ser uma aplicação para essas simulações. A saturação do solo sob pavimentos de rolagem, a drenagem em regiões alagadas ou fundações, avaliação de perdas em reservatórios de acumulação por infiltração do solo, assim como, a contaminação de lençóis subterrâneos por utilização de defensivos agrícolas e reservatório de material tóxico também podem ser citados como exemplos dessas simulações.

## 1.1 Condições de modelagem

A modelagem matemática de fenômenos físicos geralmente conduz a equações diferenciais parciais não lineares. Em problemas de infiltração, os parâmetros solo-água são funções fortemente não lineares de várias variáveis dependentes. Com isso, soluções analíticas são extremamente difíceis de serem encontradas. Por consequência, modelos numéricos são os mais usados no tema. É importante, também, considerar as observações de campo, pois estas são necessárias para identificação de relações constitutivas que também regem o fenômeno. Basicamente, os modelos mais conhecidos que relacionam os parâmetros solo-água, são os modelos de: Gardner, 1958, Brooks e Corey, 1964 e o de Genuchten, 1980.

Em geral o movimento de um fluido em meio não saturado é determinado mediante

o uso de métodos numéricos devido a grande dificuldade na obtenção de soluções analíticas. Embora os modelos numéricos sejam ferramentas poderosas em problemas não lineares, soluções analíticas permitem identificar relações entre as variáveis, realizar aproximações e simplificações, e podem ser utilizadas também para avaliar a precisão de soluções numéricas. Infelizmente, soluções analíticas são obtidas apenas para casos especiais de correlações, por exemplo, na relação de Gardner em que a condutividade hidráulica varia exponencialmente com os efeitos da capilaridade  $K(\psi) = K_s e^{\alpha\psi}$  onde  $\alpha$  é um parâmetro do solo. Assumindo esta correlação, a linearização é feita através da transformada de Kirchhoff e a equação resultante pode ser resolvida por técnicas como transformada de Laplace, funções de Green ou separação de variáveis. Seguindo essa linha de resolução podemos citar Lomen e Warrick, 1978, Sander et al., 1988, Srivastava e Yeh, 1991, Basha, 1999, Chen et al., 2001 e Basha, 2002.

No entanto, a maioria dessas soluções é limitada a casos com condição inicial uniforme e domínio infinito. Além disso, estão fadadas a considerações restritas quanto a informações sobre a difusividade da água.

O modelo de Van Genuchten, que será visto em detalhes no capítulo 3, oferece resultados mais satisfatórios do que os outros quando comparados com dados experimentais [Nasseri et al., 2010]. Porém, devido a sua forma funcional, um grande número das soluções analíticas tem sua aplicabilidade limitada para este modelo. Assim, para uma análise mais geral é necessário recorrer aos modelos numéricos.

## 1.2 Objetivos do trabalho

O objetivo central deste trabalho, é oferecer uma solução para um problema de fluxo unidimensional e transiente de água em meio não saturado. São empregadas as relações constitutivas de Van Genuchten e inicialmente desenvolvido um método híbrido de aproximantes Padé e decomposição de Adomian. O método de Adomian busca obter soluções de representação analítica, para problemas de classe não linear sem necessidade de linearização, perturbação ou modelos de discretização.

A ideia por trás do procedimento de Adomian é decompor a solução em uma série que permite convergir em poucos passos recursivos. Exemplos de soluções por decomposição para problemas de fluxo não saturado podem ser encontrados na literatura. Em [Serrano,

1998] os autores utilizaram relações exponenciais entre os parâmetros solo-água para prover solução por decomposição para os casos unidimensionais vertical e horizontal, e destacam que estas relações não são válidas para o caso de solo muito seco. A difusividade como uma função potência foi usada por Pamuk, 2005, 2006 para determinar o fluxo horizontal usando decomposição: a solução obtida é requerida com apenas poucos termos. O modelo de Brooks-Corey, em forma de potência, foi implementado por Nasser et al., 2008 usando o método de decomposição e tomando como inicialização de recursão uma solução da forma Traveling Wave. No entanto, não são encontradas na literatura soluções por decomposição para o caso geral de relações de parâmetros solo-água ou com relações Van Genuchten.

Contudo, em específico é visto que o método de Adomian é limitado para uma situação generalizada e em virtude dessa limitação, é apresentada uma solução funcional parametrizada, onde o conjunto de parâmetros é ajustado via mínimos quadrados e método de Newton Raphson não linear. Para avaliar a universalidade da solução, são apresentados resultados para texturas típicas do solo encontradas na literatura, qualificados por um teste de auto consistência, e comparados com resultados numéricos.

### **1.3 Estrutura da metodologia**

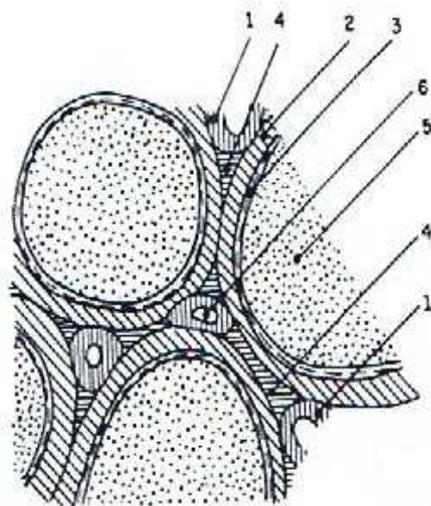
A estrutura do texto está configurada da forma: o capítulo 2 trata de considerações iniciais e grandezas físicas; a formulação matemática da equação governante está presente no capítulo 3; o capítulo 4 aborda os aproximantes Padé, suas definições e uma aplicação nos termos de condutividade hidráulica e capacidade hídrica, assim como uma comparação com as expressões originais; o capítulo 5 exhibe uma análise do modelo híbrido de decomposição Adomian e aproximantes Padé; já no capítulo 6 é abordado um estudo sobre o perfil da solução da equação de Richards e no capítulo 7 é apresentada a metodologia de construção da solução funcional aplicada a testes numéricos; por fim, são apresentadas algumas conclusões.

## 2 NOÇÕES BÁSICAS

### 2.1 Considerações Iniciais

Considera-se meio poroso, simplesmente, como um meio configurado por discontinuidades em seu interior, que podem ser distribuídas de maneiras diversas segundo sua frequência, forma e dimensão. Essas discontinuidades são genericamente denominadas por vazios ou poros. A região não ocupada pela parte sólida, consiste de poros interconectados e recebe o nome de espaço poroso.

Imaginemos a situação em que o espaço poroso esteja totalmente cheio de fluido, nesse caso é dito ser um meio saturado. Quando a fluido em um meio poroso é drenado, ar deve entrar para substituí-lo no espaço poroso, resultando em um meio não saturado. Portanto, um meio não saturado, é aquele cujo espaço poroso é parcialmente cheio de fluido e parcialmente cheio de ar. Um meio poroso ocupado por matérias em fase líquida e em fase gasosa, determina, assim, um sistema trifásico, com a coexistência dessas três fases, como pode ser visto na Figura 2.1 que mostra, de forma esquemática, como a água é retida no arranjo poroso após a drenagem. Basicamente, pode-se dizer que há dois tipos principais de forças que operam na matriz do meio para a retenção do fluido: as forças capilares e as forças de adsorção às quais, juntas, chamaremos de forças mátricas e que dão origem ao potencial mátrico.



- 1 - Água funicular (móvel)
- 2 - Película de umidade molecular
- 3 - Água higroscópica (adsorvida)
- 4 - Água pendular (angular)
- 5 - Partícula de solo
- 6 - Bolha de ar

Fonte: Franciss, F.O., 1980. *Hidráulica em meios permeáveis: escoamento em meios porosos*.

Figura 2.1 – Meio poroso característico.

O estado físico do meio está sujeito a modificações devido a variações, no tempo e/ou no espaço, das tensões atuantes no sistema. Além disso, o movimento da fase líquida no meio pode carregar algum material sólido, pertencente ou não ao meio poroso.

Um meio poroso é dito permeável quando permite o transporte de fluido formando canais que atravessam o meio geológico.

## 2.2 Escala de observação

Devido às irregularidades na distribuição dos vazios e das variações de dimensão e forma, formulações teóricas em microescala são desfavoráveis. Uma forma de contornar o problema é aplicar os princípios físicos e matemáticos em termos de análise em macroescala. A Figura (2.2) mostra a transição do meio em microescala para uma representação contínua em macroescala. Note que, se considerar um volume  $V$  com contorno  $\partial V$ , em análise microscópica, pode-se observar em detalhes a distribuição das fases, por exemplo: o volume de água  $V_w \subset V$  com contorno  $\partial V_w \subset \partial V$ . Em análise macroscópica, as fases são substituídas por superposições de campos contínuos.

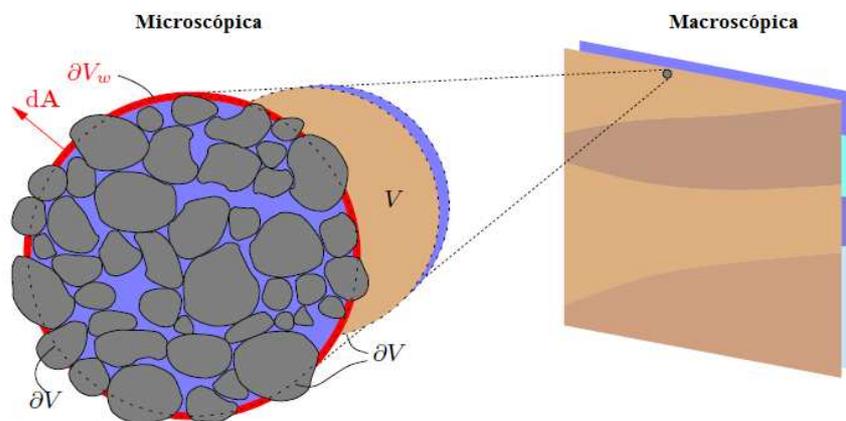


Figura 2.2 – Transição para escala de representação contínua.

Consequências: as grandezas físicas constituem médias de seus valores em microescala; é utilizado um meio fictício contínuo com propriedades e grandezas físicas expressas por termos médios sujeita a uma variação contínua para representar um meio permeável descontínuo.

### 2.3 Grandezas físicas no escoamento através de meios permeáveis

A relação entre o volume de vazios e o volume total do sólido determina a porosidade do meio, isto é, um índice que quantifica a fração do volume do meio ocupada pelos poros. Pode-se dizer que a porosidade esta inversamente relacionada com a densidade do meio. ou seja, quanto maior a densidade, menor a sua porosidade.

Tal fator contribui de forma direta para as grandezas que descrevem a transmissividade do fluido, como exemplo, a quantidade de fluido existente nos poros, que pode ser dado pela umidade volumétrica  $\theta$ , índice que quantifica quanto do volume de uma amostra do meio é volume do fluido. O conteúdo de fluido numa amostra muito seca de um meio poroso é denominado umidade residual  $\theta_r$ . Com base nisso, define-se a umidade saturada  $\theta_s$  como o conteúdo de fluido em um meio em estado de saturação. Conseqüentemente, define-se a saturação relativa efetiva  $S_e$  como a razão entre o conteúdo de fluido efetivo e o conteúdo de fluido de saturação efetiva, matematicamente

$$S_e(\theta) = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.1)$$

A taxa de transporte do fluido, definida pela vazão específica  $\vec{q}$  e a quantidade de energia acumulada por qualquer partícula fluida, seja em estado de repouso ou em movimento, recebe a denominação de potencial hidráulico ( $\phi$ ). Essa energia acumulada é resultante de dois tipos de energia: a energia cinética referente ao campo de velocidade e a energia potencial referente aos trabalhos realizados quanto a levar um volume ou massa infinitesimal a um estado considerado no solo.

A energia cinética pode facilmente ser desprezada quando comparada com a energia potencial em escoamentos lentos, como o movimento de um fluido em meio poroso. A partir daqui vamos nos referir a fluido e meio simplesmente por água e solo, respectivamente.

Nos problemas de fluxo de água no solo, o potencial da água é geralmente denotado por cinco componentes. E o potencial total é dado pelo somatório dos seguintes potenciais:

- *Térmico*: ocorre em processos não isotérmicos. A variação do potencial químico da solução é devido apenas à diferença entre a temperatura da fase sólidos-solução-ar considerada e a temperatura da fase padrão.
- *Pressão*: devido apenas à diferença entre a pressão externa que atua no sistema sólido-

solução-ar, em fase considerada, e a pressão externa que atua na fase padrão;

- *Osmótico*: surge devido aos gradientes de concentração de solutos na água do solo;
- *Gravitacional*: está associado ao campo gravitacional, pode ser entendida como o trabalho para elevar uma partícula de uma cota arbitrária para uma cota qualquer;
- *Matricial*: devido a outros trabalhos referentes a interação água e matriz sólida do solo, por exemplo, forças coloidais, além de forças associadas com a absorção e capilaridade, responsáveis pela retenção da água no solo.

Vamos assumir que, neste estudo, os processos que ocorrem no solo são de caráter isotérmico, logo o potencial térmico é desprezado. Com relação ao potencial osmótico, os sais que se movem até atingirem o estado de equilíbrio não causam movimento significativo na água, principalmente quando o teor de água no solo não for muito baixo, portanto este potencial também é negligenciado neste trabalho. No caso de meios não saturados e não expansivos o potencial de pressão é nulo.

O potencial gravitacional pode ser expresso pela posição vertical  $z$ . Assim o potencial total  $\phi$  é representado apenas pela soma dos potenciais matricial e gravitacional, [Biassusi, 2001], ou seja,

$$\phi = \psi + z, \quad (2.2)$$

na qual o potencial matricial será denotado, a partir daqui, por apenas  $\psi$ .

## 2.4 Equação de Darcy

Durante um trabalho experimental, em 1856, o engenheiro francês Henry Darcy investigava o fluxo vertical de água em um filtro de areia homogêneo. A Figura(2.3) mostra uma ilustração do experimento.

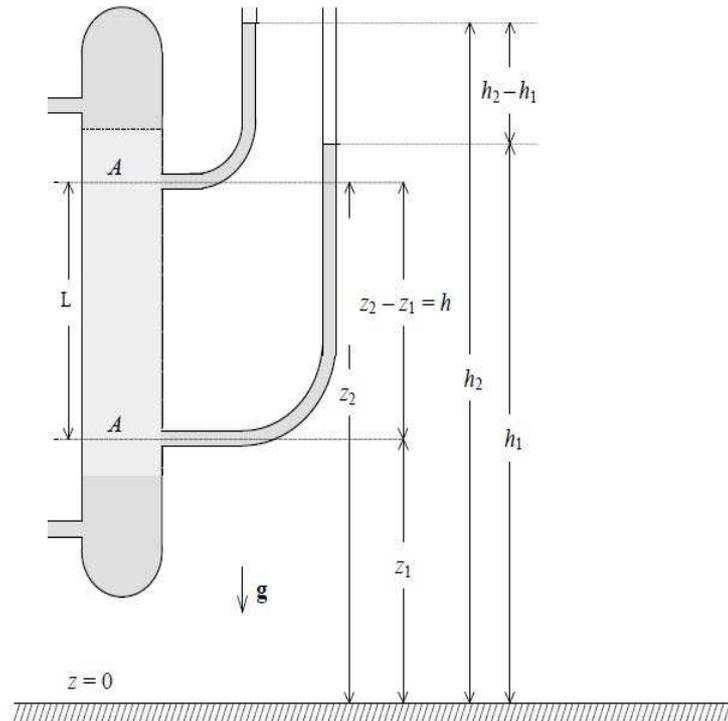


Figura 2.3 – Esboço esquemático do experimento de Darcy.

Deste experimento, Darcy percebeu a existência de uma dependência praticamente linear entre a vazão  $Q$ , a área da secção transversal  $A$ , a diferença piezométrica  $(h_1 - h_2)$  e inversamente proporcional ao comprimento do filtro  $L$ .

$$Q = KA(h_1 - h_2)/L. \quad (2.3)$$

Esta é a famosa fórmula de Darcy, onde  $K$  é uma constante de proporcionalidade, originalmente conhecido por coeficiente de permeabilidade, referindo-se à facilidade oferecida pelo meio permeável para o escoamento. Suponha dois filtros idênticos, mas um com areia fina e outro com areia grossa, a condutividade hidráulica do filtro de areia fina deve ser bem maior do que o filtro de areia grossa, isto é, sob condição de saturação, a areia grossa deve conduzir mais facilmente o líquido do que a fina.

A lei de Darcy foi derivada experimentalmente para um fluxo unidimensional. Para uma situação tridimensional, considerando que a carga piezométrica é igual ao potencial

total da solução  $\phi$ , a lei é formulada pela seguinte generalização formal

$$\vec{q} = -K\nabla\phi, \quad (2.4)$$

onde  $\vec{q}$  ( $= Q/A$ ) é o vetor de fluxo específico com componentes  $q_x, q_y, q_z$  nas direções das componentes cartesianas  $x, z, y$  e  $\nabla\phi$  é o gradiente hidráulico. Fisicamente, este gradiente representa a força que atua na unidade de massa (ou volume) de solução fazendo-a mover. Note que, o sinal negativo da Equação (2.4) refere que o fluxo se dá em direção a um decréscimo do potencial hidráulico.

Para escoamentos lentos, a lei de Darcy prevalece satisfatoriamente. Segundo Harr, 1964, esta lei pode ser aplicável para a maioria dos casos em condições de escoamentos existentes no solo pois, em meios porosos as forças viscosas dominam sobre as forças de inércia,  $Re < 1$  (escoamento laminar).

### 3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A descrição matemática do fluxo em um meio não saturado é estabelecida a partir da equação de Darcy-Buckingham e a equação da continuidade.

#### 3.1 Equação de Darcy-Buckingham

A lei de Darcy foi originalmente estabelecida para solos saturados, ou seja, um líquido que satura um meio poroso. Porém para um meio em situação de não saturação, foi apresentado por Buckingham apenas em 1907. Mesmo o trabalho de Buckingham sendo contestado na época, segundo Libardi, 2005, Richards, 1928 redefiniu alguns termos e chegou na seguinte expressão

$$\vec{q} = -K(\theta)\nabla\phi \quad (3.1)$$

esta relação hoje é conhecida como a equação de Darcy-Buckingham. Nessa situação, a condutividade hidráulica torna-se uma função do fator de umidade. Quanto maior  $\theta$ , maior  $K$ . Assim, quando o volume de água ocupa toda a região porosa, o valor de  $K$  atinge seu máximo, um valor constante é simbolizado por  $K_s$ .

Note que a Equação (2.4) é um caso particular da Equação (3.1) para a condição de solo saturado. Além disso, a Equação de Darcy-Buckingham implica isotropia do solo não saturado com relação a  $K(\theta)$ , esta equação ainda assim possui grande complexidade matemática devido a não linearidade presente na condutividade hidráulica.

#### 3.2 Equação da Continuidade

Como observado, a Equação de Darcy-Buckingham é estabelecida para condição de regime estacionário ou equilíbrio dinâmico. No entanto, a maioria das situações na natureza estão em regime transiente e para descrevê-las anexamos a equação da continuidade, a qual é formulada a partir do princípio de conservação de massa. Matematicamente, o princípio de conservação de massa, estabelece que não pode haver nem criação nem destruição de massa.

Considera-se o balanço de massa no seguinte volume de controle, conforme a Figura 3.1.

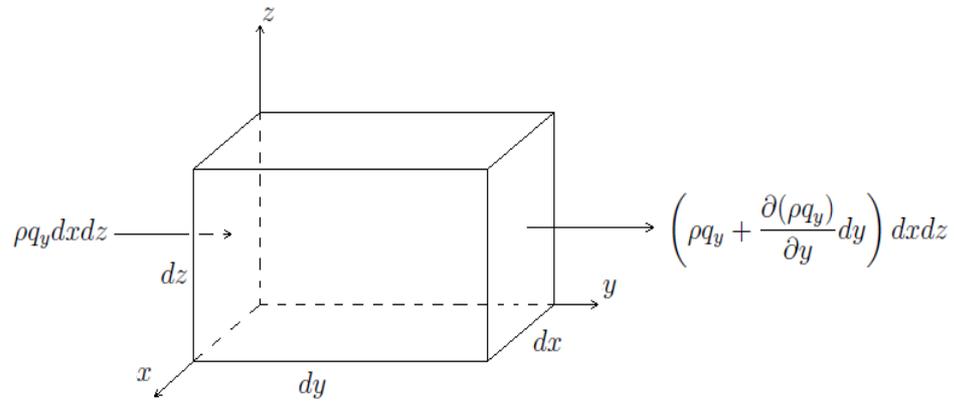


Figura 3.1 – Elemento de volume de solo, através do qual a solução esta fluindo na direção  $z$ .

Para a direção  $y$ , o fluxo de massa que entra no volume de controle é dado por

$$\rho q_y dx dz, \quad (3.2)$$

e o fluxo de massa que sai do elemento através da face oposta é descrito por

$$\left( \rho q_y + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} dy \right) dx dz, \quad (3.3)$$

o ganho de fluido ao longo do tempo na direção  $y$  resulta em

$$\rho q_y dx dz dt - \left( \rho q_y + \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} dy \right) dx dz dt = - \frac{\partial(\rho q_y)}{\partial y} dV dt. \quad (3.4)$$

De forma análoga, os ganhos para as outras direções são

$$- \frac{\partial(\rho q_x)}{\partial x} dV dt \quad (3.5)$$

$$- \frac{\partial(\rho q_z)}{\partial z} dV dt, \quad (3.6)$$

o ganho total da solução no elemento de volume é dado por

$$\frac{\partial m_f}{\partial t} dt = -\vec{\nabla}(\rho \vec{q}) dV dt. \quad (3.7)$$

Como, a massa do fluido em solo não saturado é dado por

$$m_f = \rho \theta dV, \quad (3.8)$$

na qual  $\theta$  é o fator de umidade, então substituindo a Equação (3.8) na Equação (3.7) resulta em

$$\frac{\partial(\rho \theta dV)}{\partial t} = -\vec{\nabla}(\rho \vec{q}) dV. \quad (3.9)$$

Logo, para escoamentos de fluido incompressível em meio não expansivo, segue que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\vec{\nabla} \vec{q} \quad (3.10)$$

que é chamada de equação da continuidade para a solução no solo.

### 3.3 Equação governante do fluxo não saturado

Combinando a Equação de Darcy-Buckingham (3.1) com a Equação da continuidade (3.10) resulta em

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \vec{\nabla} [K(\theta) \nabla \phi]. \quad (3.11)$$

O potencial hidráulico ( $= \psi + z$ ), pode ser substituído na equação acima obtendo

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \vec{\nabla} [K(\theta) \nabla (\psi + z)] \quad (3.12)$$

ou

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \vec{\nabla} [K(\theta) \nabla \psi] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}. \quad (3.13)$$

A relação entre  $\psi$  e  $\theta$ , entretanto, não é única, pois, a curva oriunda do processo de drenagem pode ser diferente daquela resultante do processo de umedecimento. Ao fenômeno que origina a obtenção de distintas curvas características desses processos, não superpostas,

dá-se o nome de histerese. Nesta formulação é desprezada a existência deste fenômeno, logo os parâmetros  $K$  e  $\theta$  podem ser expressos por função do potencial matricial, [Wendland, 1991]. Assim, a Equação (3.13) pode ser escrita como

$$\frac{d\theta}{d\psi} \frac{\partial\psi}{\partial t} = \vec{\nabla}[K(\psi)\nabla\psi] + \frac{dK(\psi)}{d\psi} \frac{\partial\psi}{\partial z}. \quad (3.14)$$

Definindo a capacidade hidráulica como

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (3.15)$$

tem-se

$$C(\psi) \frac{\partial\psi}{\partial t} = \vec{\nabla}[K(\psi)\nabla\psi] + \frac{dK(\psi)}{d\psi} \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad (3.16)$$

na qual, a Equação (3.16) é conhecida como a Equação de Richards (em base de  $\psi$ ) e é a equação diferencial geral que descreve matematicamente o movimento da solução em meios isotrópicos com relação a  $K(\theta)$ .

Definindo o coeficiente de difusão ou difusividade hidráulica como

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (3.17)$$

e inserindo-o na Equação (3.13), segue a equação na base  $\theta$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \vec{\nabla}[D(\theta)\nabla\theta] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z}. \quad (3.18)$$

Também é conhecido em literatura a equação na forma mista

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \vec{\nabla}[K(\psi)\nabla\psi] + \frac{dK(\psi)}{d\psi} \frac{\partial\psi}{\partial z}. \quad (3.19)$$

As equações acima regem o movimento da água em solo não saturado e embora todas demonstrem semelhança, a equação de Richards na base- $\psi$  pode ser aplicada em todo o domínio, até mesmo para zonas saturadas e não saturadas distintas.

### 3.4 Modelo de Van Genuchten

A equação de Richards necessita de relações adicionais tal que o sistema possa ser resolvido com solução única para  $\psi$ . As descrições paramétricas de  $\theta(\psi)$  e  $K(\psi$  ou  $\theta)$  são usadas para estimar as propriedades hidráulicas da iteração solo-água e sem estas relações os resultados numéricos não seriam possíveis. Mualem, 1976 derivou um modelo de condutividade hidráulica funcional a partir da curva de retenção do solo. A utilidade deste modelo atribui ao fato de que a condutividade é extremamente difícil de ser medida. Por consequência este modelo foi usado em parametrizações como de Van Genuchten e de Brooks-Corey.

O modelo de Brooks-Corey segue um modelo de potência que introduz um valor definido de entrada de ar, que é associado com a dimensão dos maiores poros, acima desse valor o solo é saturado. O modelo clássico de Van Genuchten descreve uma função sem o valor de entrada de ar. No entanto, a validade do modelo clássico de Van Genuchten foi discutida por Fuertes et al., 1992. Eles mostraram que as curvas podem ser sensíveis aos parâmetros de ajuste com consequências desfavoráveis para o desempenho de soluções numéricas. Em [Vogel et al., 2001] foi apresentado um modelo modificado de Van Genuchten que incorpora um valor de entrada de ar. Isto resultou em melhores previsões em contraste com a clássica versão do modelo para solos de textura fina. O modelo modificado de Van Genuchten, hoje, é um dos modelos mais utilizados para estimar os parâmetros hidráulicos.

No modelo de Mualem (1976) é assumido que os poros são interligados com um comprimento proporcional ao raio. Cada poro cumpre a Lei de Poiseuille, o fator de tortuosidade é um fator que representa a correlação parcial de poros com diferentes raios a uma umidade de água que pode ser representada por uma função potência da saturação efetiva. A permeabilidade relativa é dada pela seguinte fórmula:

$$K(S_e) = S_e^\tau \left[ \frac{\int_0^{S_e} \frac{1}{\psi(S)} dS}{\int_0^1 \frac{1}{\psi(S)} dS} \right]^2. \quad (3.20)$$

onde  $S_e(\theta) = (\theta - \theta_r)/(\theta_s - \theta_r)$ . A dificuldade deste modelo é calcular a integral

$$\int_0^{S_e} \frac{1}{\psi(S)} dS = - \int_{\psi(S_e)}^\infty \frac{1}{\psi(S)} \frac{dS}{d\psi} d\psi \quad (3.21)$$

A Equação (3.20) foi derivada da lei de Poiseuille e resulta que a condutividade

relativa é dominada pelos poros maiores. Portanto, a parametrização da curva de retenção deve tomar cuidado para que os poros arbitrariamente grandes não representem o solo real. Se o valor de entrada de ar não for introduzido no modelo, deve então garantir que  $dS/d\psi$  decresce mais rápido do que o aumento de  $1/\psi$  para  $\psi \rightarrow 0$ .

O modelo clássico de Van Genuchten pode resolver analiticamente o modelo de Mualem. Na literatura o modelo de Van Genuchten é muitas vezes citado como Genuchten-Mualem. A saturação efetiva é descrita na forma:

$$S_e = [1 + (\alpha\psi)^n]^{-m} \quad (3.22)$$

$n, m$  e  $\alpha$  são parâmetros que serão ajustados. Inserindo a inversão da Equação(3.22) na Equação (3.21) a integral pode ser resolvida adotando  $m = 1 - 1/n$  com resultado

$$\int_0^{S_e} \frac{1}{\psi(S)} dS = 1 - (1 - S_e^{1/m})^m \quad (3.23)$$

A condutividade é dada por

$$K(S_e) = S_e^\tau [1 - (1 - S_e^{1/m})^m]^2 \quad (3.24)$$

Como este modelo não introduz o valor de entrada de ar, para

$$\frac{dS}{d\psi} = -\alpha mn (\alpha\psi)^{n-1} [1 + (\alpha\psi)^n]^{-(m+1)} \quad (3.25)$$

decrecer mais rápido do que o aumento de  $1/\psi$  quando  $\psi \rightarrow 0$  deve se considerar como critério  $n > 2$ . Então conclui-se que o valor de entrada de ar é obrigatório para  $n < 2$ .

Um modelo modificado de Van Genuchten incluindo o valor de entrada de ar foi derivado por Vogel et al., 2001; Marcel e Van Genuchten, 2005. Os autores introduziram uma capilaridade pequena  $\psi_s$  e um parâmetro  $\theta_m > \theta_s$  sem significado físico. O modelo modificado para a curva de retenção é dado como:

$$\begin{cases} \theta(\psi) = \theta_r + \frac{\theta_m - \theta_r}{(1 + |\alpha\psi|^n)^m} & \psi < \psi_s \\ \theta_s & \psi \geq \psi_s \end{cases} \quad (3.26)$$

onde  $\theta_m = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)(1 + |\alpha\psi_s|^n)^m$ . Combinando a Equação (3.26) com a Equação (3.24),

logo a condutividade do modelo modificado é escrita como

$$\begin{cases} K(S_e) = K_s S_e^r \left[ \frac{1-F(S_e)}{1-F(1)} \right]^2 & \psi < \psi_s \\ K_s & \psi \geq \psi_s \end{cases} \quad (3.27)$$

onde  $F(S_e) = [1 - (S_e)^{1/m}]^m$  e  $K_s$  é a medida da condutividade ( $m/s$ ) em estado saturado. Vogel et al.(2001) sugeriram usar  $\psi_s$  aproximadamente  $-1\text{cm}$  ou  $-2\text{cm}$  e Marcel e Van Genuchten(2005) otimizaram o valor para  $-4\text{cm}$ , os autores também concluíram que  $\psi_s$  também pode ser usado como um parâmetro de ajuste adicional. Para uma revisão detalhada do discutido acima ver [Ippisch et al., 2006].

É importante destacar que os parâmetros da iteração solo-água são os termos que definem a não linearidade da equação de Richards e é visto pela Equação 3.26 e Equação 3.27 que a não linearidade é o ponto principal desta formulação. Com isso, embora o modelo de Van Genuchten seja muito utilizado em simulações numéricas, devido a sua complexidade na forma funcional os procedimentos algébricos são dificultados tornando assim raras as soluções analíticas. No próximo capítulo, os termos  $C(\psi)$  e  $K(\psi)$  são aproximados via aproximantes Padé. Originalmente estes aproximantes são conhecidos como aceleradores de convergência e neste trabalho também são usados como uma ferramenta para tornar o modelo, do ponto de vista algébrico, mais tratável. É importante destacar que os parâmetros, são relações fenomenológicas, então a representação por aproximantes Padé pode ser utilizada sem perdas de generalidade no problema.

#### 4 APROXIMANTES FUNCIONAL PADÉ

O estudo de aproximantes Padé é, simultaneamente, um tópico em teoria de aproximação matemática e teoria de função analítica, o qual possui grande aplicabilidade em problemas de modelagem matemática sendo muito utilizado também em abordagens na engenharia.

Um aproximante Padé é a razão entre dois polinômios construídos a partir dos coeficientes de uma expansão em séries de potências, como por exemplo a série de Taylor, de uma dada função, ou seja, é um caso particular de aproximação racional. No ponto de vista matemático, o aproximante Padé  $[m/n]_{f(x)}$  de uma função  $f(x)$  é definido da seguinte forma:

$$[m/n]_{f(x)} = p_m(x)/q_n(x), \quad (4.1)$$

onde  $p_m(x)$  é um polinômio de grau máximo  $m$  e  $q_n(x)$  é um polinômio de grau máximo  $n$ .

Considere  $f(x)$  em sua representação formal em série de potências:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k. \quad (4.2)$$

Os coeficientes de  $p_m(x)$  e  $q_n(x)$  são determinados a partir da condição

$$f(x) - p_m(x)/q_n(x) = O(x^{m+n+1}). \quad (4.3)$$

Essa equação equivale a

$$p_m(0)/q_n(0) = f(0), \quad \left. \frac{d^k}{dx^k} (p_m(x)/q_n(x)) \right|_{x=0} = \left. \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right|_{x=0} \quad k = 1, 2, \dots, m+n. \quad (4.4)$$

Estas condições garantem que a função  $f(x)$  e o aproximante Padé  $[m/n]_{f(x)}$  diferem apenas para termos de ordem  $x^{m+n+1}$ . Se escrever os polinômios  $p_m(x)$  e  $q_n(x)$  na forma:

$$\begin{aligned} p_m(x) &= p_0 + p_1 x + \dots + p_m x^m \\ q_n(x) &= q_0 + q_1 x + \dots + q_n x^n \end{aligned} \quad (4.5)$$

e considerar, sem perda de generalidade,  $q_0 = 1$ , então pode-se multiplicar a Equação (4.3)

pelo polinômio  $q_n(x)$ . Escrevendo a Equação (4.3) na forma de um sistema de equações, para determinar os coeficientes do aproximante Padé, tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n q_j f_{m-j+k} &= 0 & k = 1, \dots, n \\ \sum_{j=0}^k q_j f_{k-j} &= p_k & k = 0, \dots, m \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde define-se

$$f_k \equiv 0 \quad \text{se} \quad k < 0 \quad \text{e} \quad q_j \equiv 0 \quad \text{se} \quad j > n. \quad (4.7)$$

Dessa forma, se o sistema obtido admitir solução única, o aproximante Padé existe e é único [Baker, 1975]. Se  $x$  é uma função do tempo,  $x(t)$ , então a aproximação  $[m/n]_{f(x(t))}$  é dita como aproximante funcional de Padé.

Frequentemente, as séries de Taylor podem apresentar algumas dificuldades. Muitas vezes, a convergência é extremamente lenta, ou então, o seu raio de convergência não engloba regiões de interesse particular do problema que está sendo estudado. Pode-se, até mesmo, afirmar que o método de aproximantes Padé é, em muitos sentidos, superior ao método clássico de aproximação por séries de Taylor, pois, sendo uma função racional é muito mais rica analiticamente do que as funções polinomiais resultantes de truncamentos sucessivos das séries de Taylor. Além disso, as aproximações por Taylor são casos particulares dos aproximantes de Padé. Note que, os aproximantes  $[m/n]_{f(x)}$  com  $n = 0$  coincidem com as somas parciais da série de Taylor até o termo  $f_m x^m$ .

Neste ponto, os aproximantes funcionais de Padé aplicados aos termos de correlação são usados como aceleradores de convergência além de simplificar os procedimentos algébricos. Assume-se, então, a condutividade hidráulica e a capacidade hídrica, como funções racionais via técnica Padé. Cabe salientar que para esse caso, as aproximações Padé são de classe funcional, uma vez que o potencial  $\psi$  é uma grandeza que varia no espaço e no tempo. Assim, o domínio de interesse refere-se à imagem de  $\psi$ .

A confiabilidade do uso Padé aproximado aos parâmetros funcionais  $C(\psi)$  e  $K(\psi)$  é testada graficamente para um domínio  $\psi$  sobre o intervalo de  $[-10m, 0m]$ . Devido ao comportamento assintótico das relações assume-se que os aproximantes funcionais de Padé

| Aproximantes Padé   |  |
|---------------------|--|
| solo arenoso        |  |
| $[2/4]_C(\psi) =$   | $\frac{0.000952717(\psi+3.9)^2 - 0.0107297(\psi+3.9) + 0.0261488}{0.000652222(\psi+3.9)^4 - 0.00465977(\psi+3.9)^3 + 0.0542063(\psi+3.9)^2 - 0.178923(\psi+3.9) + 1}$  |
| $[1/4]_K(\psi) =$   | $\frac{0.00771076 - 0.00203877(\psi+0.9)}{0.00432321(\psi+0.9)^4 - 0.0205561(\psi+0.9)^3 + 0.0961195(\psi+0.9)^2 - 0.393598(\psi+0.9) + 1}$  |
| solo areia barrenta |  |
| $[2/4]_C(\psi) =$   | $\frac{0.000523127(\psi+3.9)^2 - 0.00650832(\psi+3.9) + 0.0170635}{0.000230777(\psi+3.9)^4 - 0.0031826(\psi+3.9)^3 + 0.0376573(\psi+3.9)^2 - 0.201749(\psi+3.9) + 1}$  |
| $[1/4]_K(\psi) =$   | $\frac{0.00356859 - 0.00174099(\psi+0.9)}{0.00427702(\psi+0.9)^4 - 0.0291442(\psi+0.9)^3 + 0.146919(\psi+0.9)^2 - 0.675553(\psi+0.9) + 1}$   |
| solo barro arenoso  |  |
| $[m/n]_C(\psi) =$   | $\frac{0.000801266(\psi+1.7)^2 - 0.00345719(\psi+1.7) + 0.00357504}{0.000136824(\psi+1.7)^4 - 0.00324243(\psi+1.7)^3 + 0.0320935(\psi+1.7)^2 - 0.476186(\psi+1.7) + 1}$  |
| $[m/n]_K(\psi) =$   | $\frac{0.00101425 - 0.000773792(\psi+0.9)}{0.0016769(\psi+0.9)^4 - 0.0173917(\psi+0.9)^3 + 0.168579(\psi+0.9)^2 - 0.961621(\psi+0.9) + 1}$   |
| solo barrento       |  |
| $[2/4]_C(\psi) =$   | $\frac{2.3489121073268633 \times 10^{-6}(\psi+20)^2 - 0.000196266(\psi+20) + 0.00311967}{1.170778583384 \times 10^{-7}(\psi+20)^4 - 0.0000314713(\psi+20)^3 + 0.00223392(\psi+20)^2 - 0.0746217(\psi+20) + 1}$     |
| $[1/4]_K(\psi) =$   | $\frac{0.000180679 - 0.0000752638(\psi+1.7)}{0.000192533(\psi+1.7)^4 - 0.00249343(\psi+1.7)^3 + 0.0712967(\psi+1.7)^2 - 0.589744(\psi+1.7) + 1}$   |
| solo siltoso        |  |
| $[2/4]_C(\psi) =$   | $\frac{1.5579750235590666 \times 10^{-6}(\psi+20)^2 - 0.0000937536(\psi+20) + 0.00129876}{3.413798909350167 \times 10^{-8}(\psi+20)^4 - 0.0000137408(\psi+20)^3 + 0.00147198(\psi+20)^2 - 0.0687814(\psi+20) + 1}$ |
| $[1/4]_K(\psi) =$   | $\frac{0.0000376839 - 0.0000159835(\psi+1.7)}{0.000178271(\psi+1.7)^4 + 0.000386719(\psi+1.7)^3 + 0.0546464(\psi+1.7)^2 - 0.57915(\psi+1.7) + 1}$  |

Tabela 4.1 – Aproximantes Padé para casos típicos de textura de solo

devem conter o polinômio de maior grau no denominador e para minimizar a ordem dos polinômios pode-se deslocar o ponto de expansão, originalmente expandido no ponto zero. Com isso, a mais simples representação obtida para os parâmetros funcionais, para doze formas típicas de textura do solo representado na Tabela 7.1 pode ser dado por  $[1/3]$  e  $[2/4]$ . Tabelas 4.1 - 4.2

Comparação com os perfis originais de condutividade hidráulica e capacidade hídrica obtidos a partir dos modelos da Equação (3.26) e Equação (3.27) com as aproximações Padé são apresentadas nas Figuras 4.1 - 4.12 para doze formas típicas de textura.

As Figuras 4.1 a 4.12, mostram que as funções de Padé representam fielmente as curvas de perfil do parâmetros funcionais de condutividade hidráulica e capacidade hídrica. Também salienta novamente que, em vista de serem resultados de considerações fenomenológicas, a representação Padé pode ser utilizada sem nenhuma perda de generalidade no problema.

| Aproximantes Padé         |   |
|---------------------------|---|
| solo barro siltoso        |   |
| $[2/4]_C(\psi) =$         | $\frac{1.8575066122271601 \times 10^{-6} (\psi+20)^2 - 0.000113178(\psi+20) + 0.00157683}{5.1913101680950193 \times 10^{-8} (\psi+20)^4 - 0.0000183955(\psi+20)^3 + 0.00167921(\psi+20)^2 - 0.0708878(\psi+20) + 1}$  |
| $[1/4]_K(\psi) =$         | $\frac{0.0000703448 - 0.0000297192(\psi+1.7)}{0.000170468(\psi+1.7)^4 - 0.000132795(\psi+1.7)^3 + 0.0584841(\psi+1.7)^2 - 0.582386(\psi+1.7) + 1}$  |
| solo barro argilo arenoso |   |
| $[2/4]_C(\psi) =$         | $\frac{4.298719 \times 10^{-7} (\psi+32)^2 - 0.0000751808(\psi+32) + 0.00207225}{1.87292384 \times 10^{-8} (\psi+32)^4 - 0.0000130394(\psi+32)^3 + 0.00151554(\psi+32)^2 - 0.0653316(\psi+32) + 1}$   |
| $[1/3]_K(\psi) =$         | $\frac{0.000150968 - 0.0000365673(\psi+2)}{-0.00553862(\psi+2)^3 + 0.0738525(\psi+2)^2 - 0.499146(\psi+2) + 1}$   |
| solo barro argiloso       |   |
| $[2/4]_C(\psi) =$         | $\frac{3.253728170278607 \times 10^{-7} (\psi+32)^2 - 0.0000382882(\psi+32) + 0.000946619}{6.718108317012353 \times 10^{-9} (\psi+32)^4 - 5.565202769914616 \times 10^{-6} (\psi+32)^3 + 0.000796428(\psi+32)^2 - 0.0481028(\psi+32) + 1}$                        |
| $[1/3]_K(\psi) =$         | $\frac{0.0000293794 - 9.63564229561432 \times 10^{-6} (\psi+2)}{-0.000528738(\psi+2)^3 + 0.0491036(\psi+2)^2 - 0.502288(\psi+2) + 1}$   |
| solo barro argilo siltoso |   |
| $[2/4]_C(\psi) =$         | $\frac{1.9595162262281196 \times 10^{-7} (\psi+32)^2 - 0.00002007(\psi+32) + 0.000464723}{2.8841930424610443 \times 10^{-9} (\psi+32)^4 - 3.1439369257138816 \times 10^{-6} (\psi+32)^3 + 0.000612694(\psi+32)^2 - 0.0450141(\psi+32) + 1}$                       |
| $[1/3]_K(\psi) =$         | $\frac{0.0000293794 - 9.63564229561432 \times 10^{-6} (\psi+2)}{-0.000528738(\psi+2)^3 + 0.0491036(\psi+2)^2 - 0.502288(\psi+2) + 1}$   |
| solo argilo arenoso       |   |
| $[2/4]_C(\psi) =$         | $\frac{2.2952668689497738 \times 10^{-7} (\psi+32)^2 - 0.0000310358(\psi+32) + 0.000817697}{4.598927676259186 \times 10^{-9} (\psi+32)^4 - 5.875211436819801 \times 10^{-6} (\psi+32)^3 + 0.000893589(\psi+32)^2 - 0.0515348(\psi+32) + 1}$                       |
| $[1/3]_K(\psi) =$         | $\frac{8.033886424290697 \times 10^{-6} - 2.6488281232614177 \times 10^{-6} (\psi+2)}{-0.00155961(\psi+2)^3 + 0.0706368(\psi+2)^2 - 0.562761(\psi+2) + 1}$  |
| solo argilo siltoso       |   |
| $[2/4]_C(\psi) =$         | $\frac{1.0241845652644266 \times 10^{-7} (\psi+20)^2 - 6.638418591900108 \times 10^{-6} (\psi+20) + 0.0000974695}{3.433839175445241 \times 10^{-9} (\psi+20)^4 - 3.7302671731649587 \times 10^{-6} (\psi+20)^3 + 0.00115976(\psi+20)^2 - 0.0680428(\psi+20) + 1}$ |
| $[1/3]_K(\psi) =$         | $\frac{4.46383528 \times 10^{-7} - 5.9415004 \times 10^{-8} (\psi+5)}{9.04376603 \times 10^{-6} (\psi+5)^3 + 0.00960054(\psi+5)^2 - 0.222614(\psi+5) + 1}$  |
| solo argiloso             |   |
| $[2/4]_C(\psi) =$         | $\frac{5.135387890 \times 10^{-8} (\psi+35)^2 - 6.012368059408522 \times 10^{-6} (\psi+35) + 0.000157375}{6.297415850971161 \times 10^{-10} (\psi+35)^4 - 1.996071602097677 \times 10^{-6} (\psi+35)^3 + 0.000518536(\psi+35)^2 - 0.0423688(\psi+35) + 1}$        |
| $[2/4]_K(\psi) =$         | $\frac{2.9562798696206264 \times 10^{-8} (\psi+6)^2 - 6.601190379906734 \times 10^{-7} (\psi+6) + 3.2320630508535436 \times 10^{-6}}{5.43705837773786 \times 10^{-6} (\psi+6)^4 - 0.000789338(\psi+6)^3 + 0.0267971(\psi+6)^2 - 0.295469(\psi+6) + 1}$            |

Tabela 4.2 – Aproximantes Padé para casos típicos de textura de solo

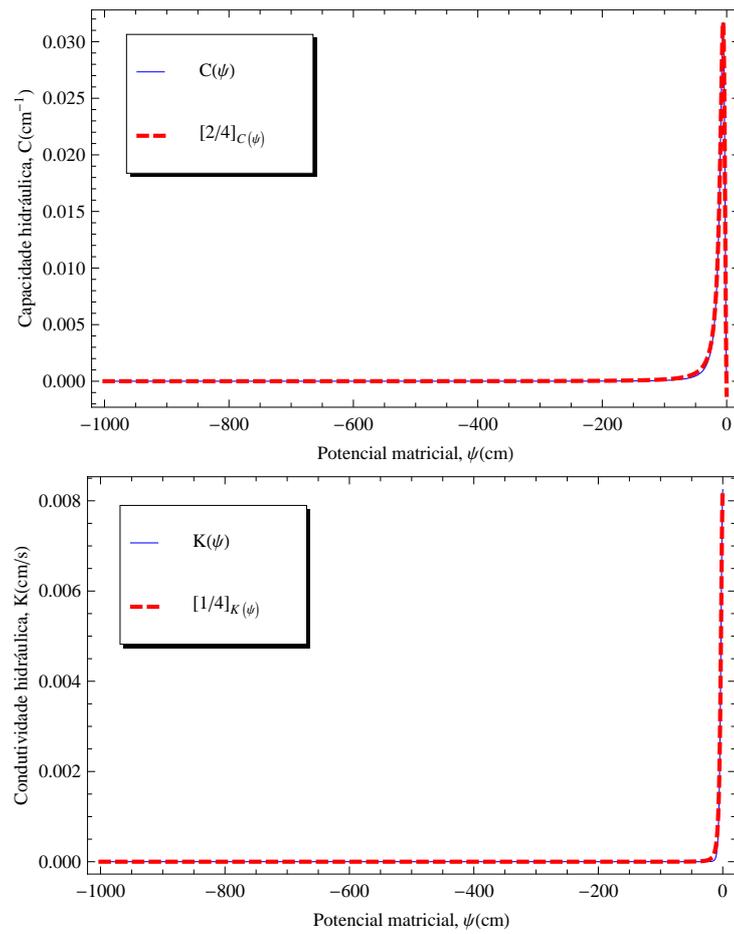


Figura 4.1 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo arenoso

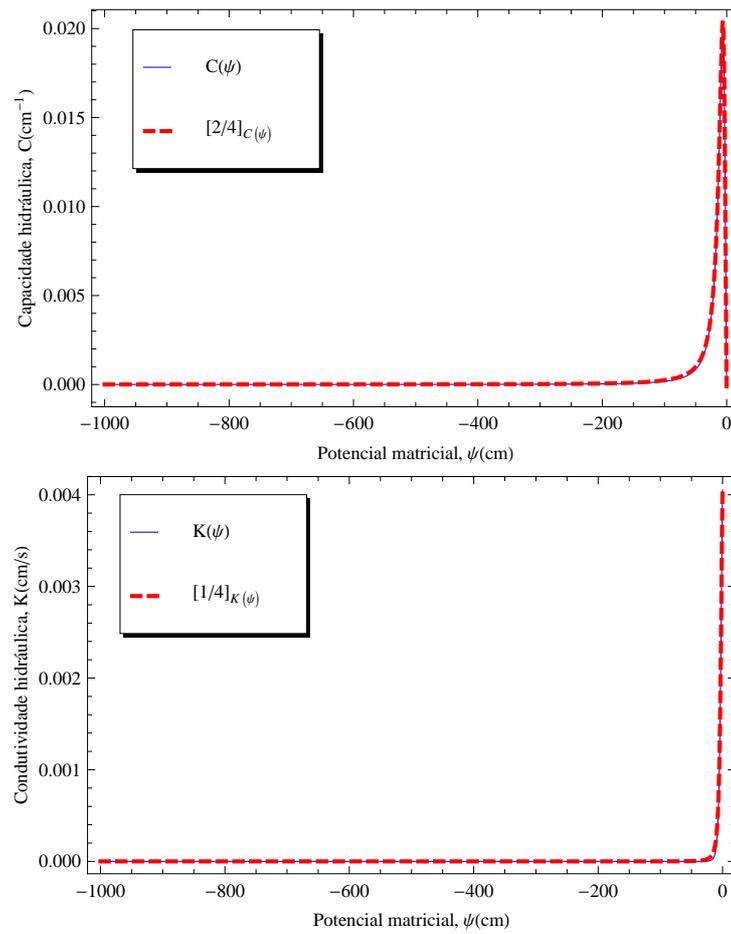


Figura 4.2 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo areia barrenta

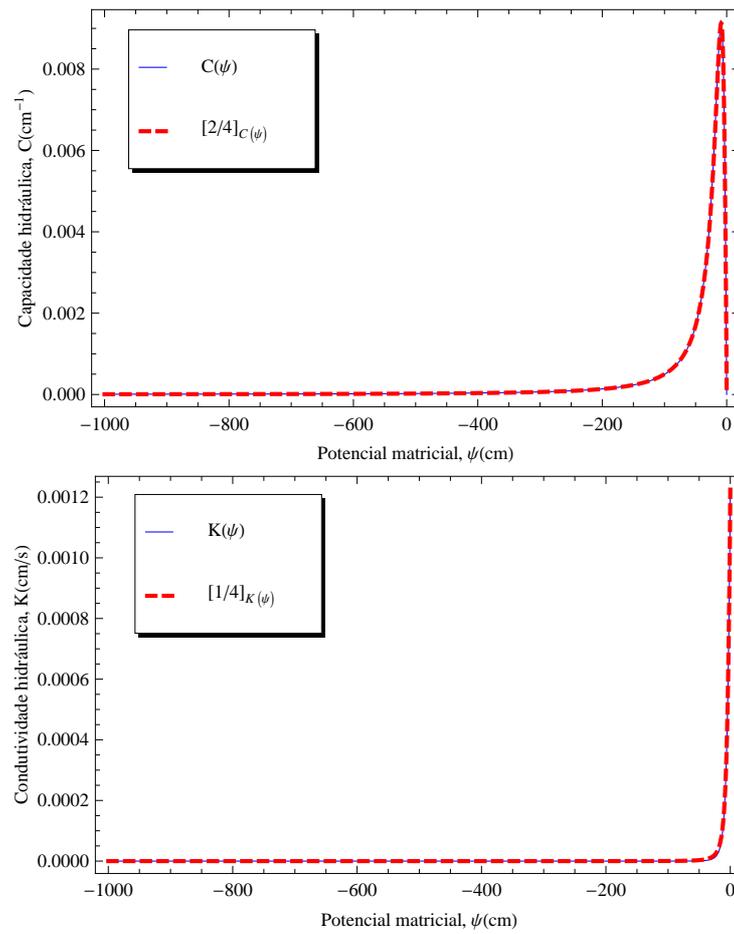


Figura 4.3 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo barro arenoso

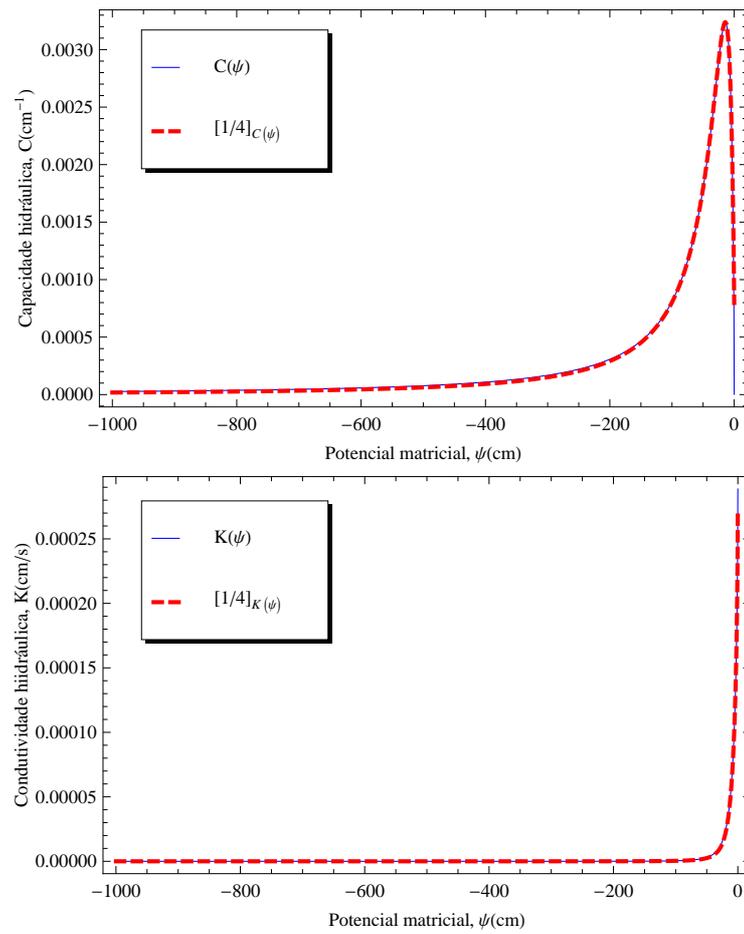


Figura 4.4 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo barrento

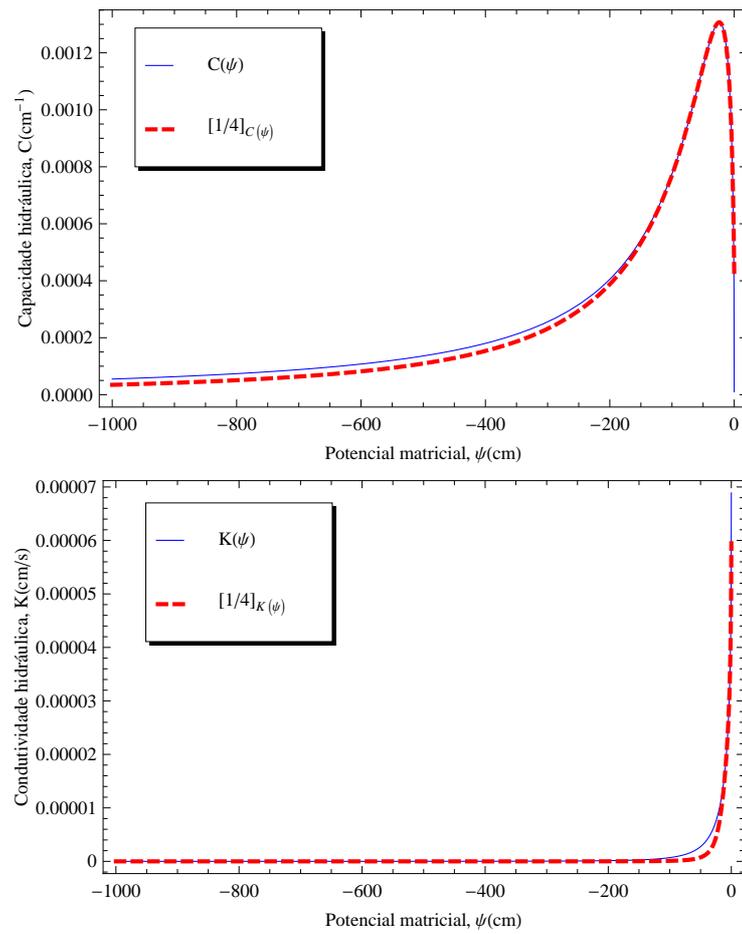


Figura 4.5 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo siltoso

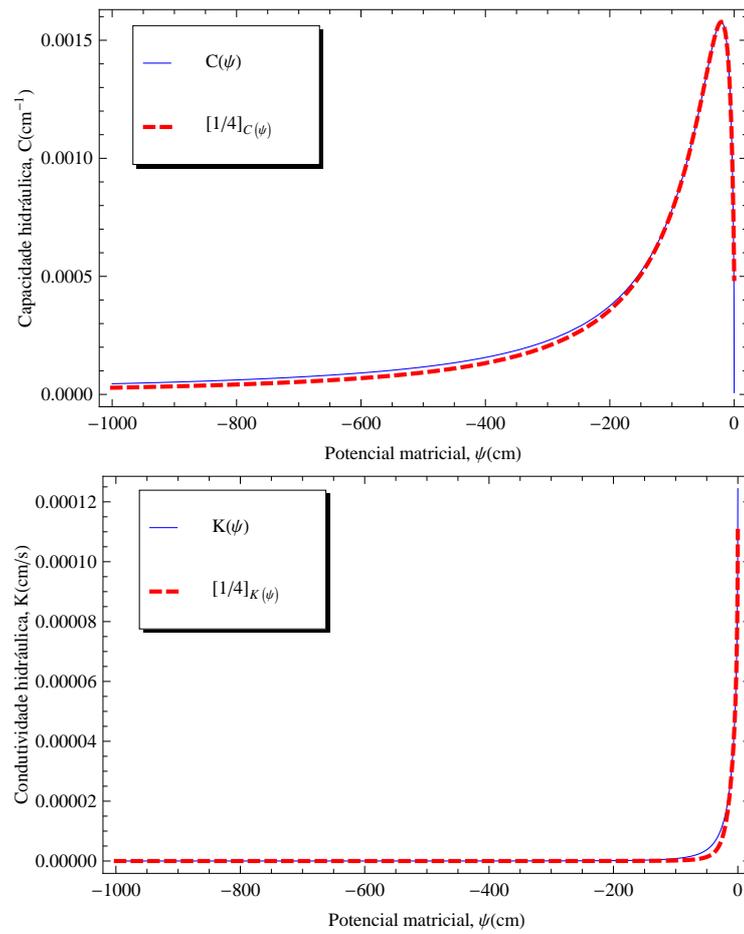


Figura 4.6 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo barro siltoso

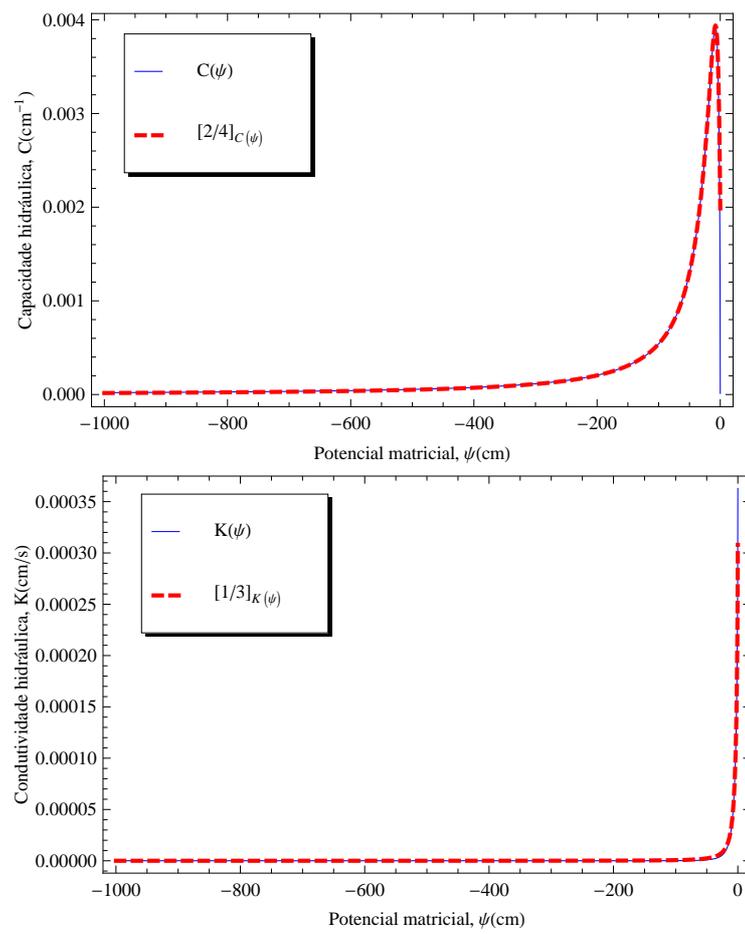


Figura 4.7 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo barro-argilo-arenoso

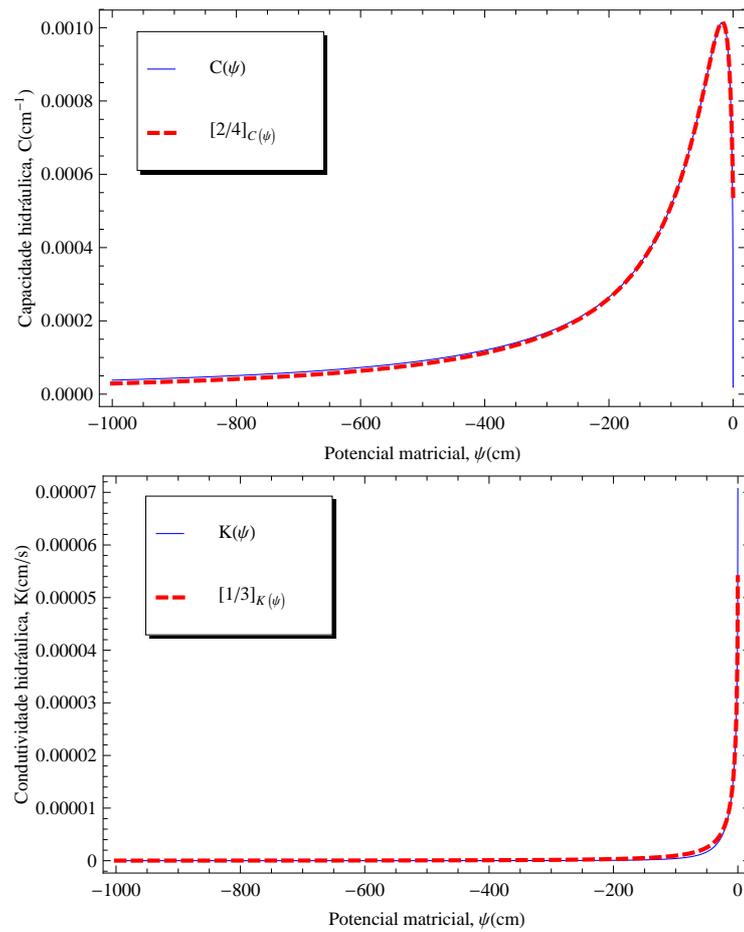


Figura 4.8 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo barro argiloso

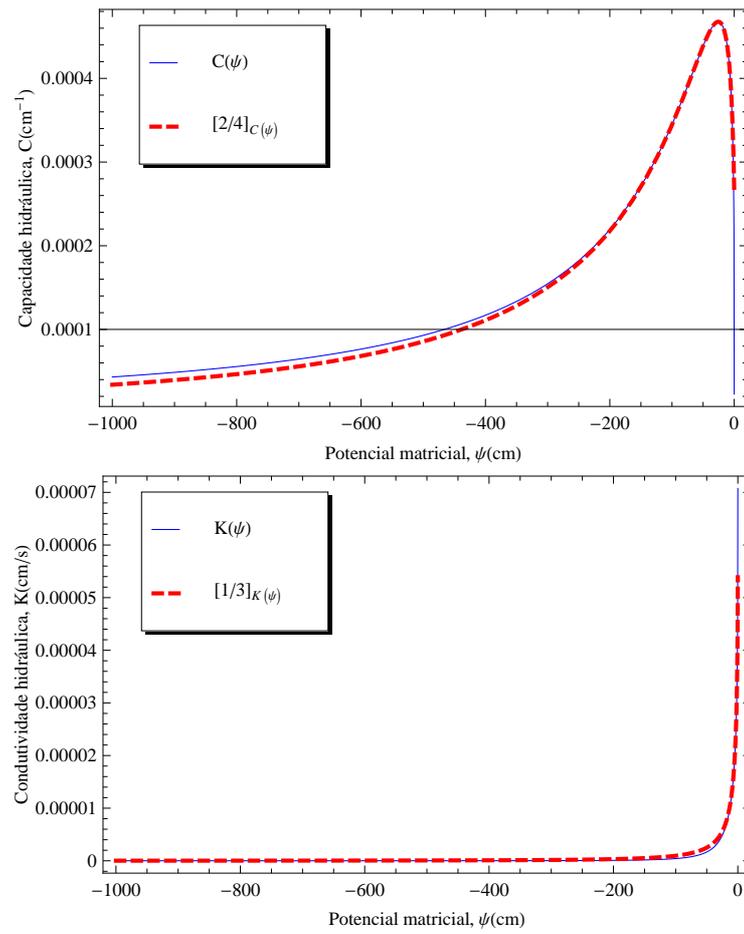


Figura 4.9 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo barro-argilo-siltoso

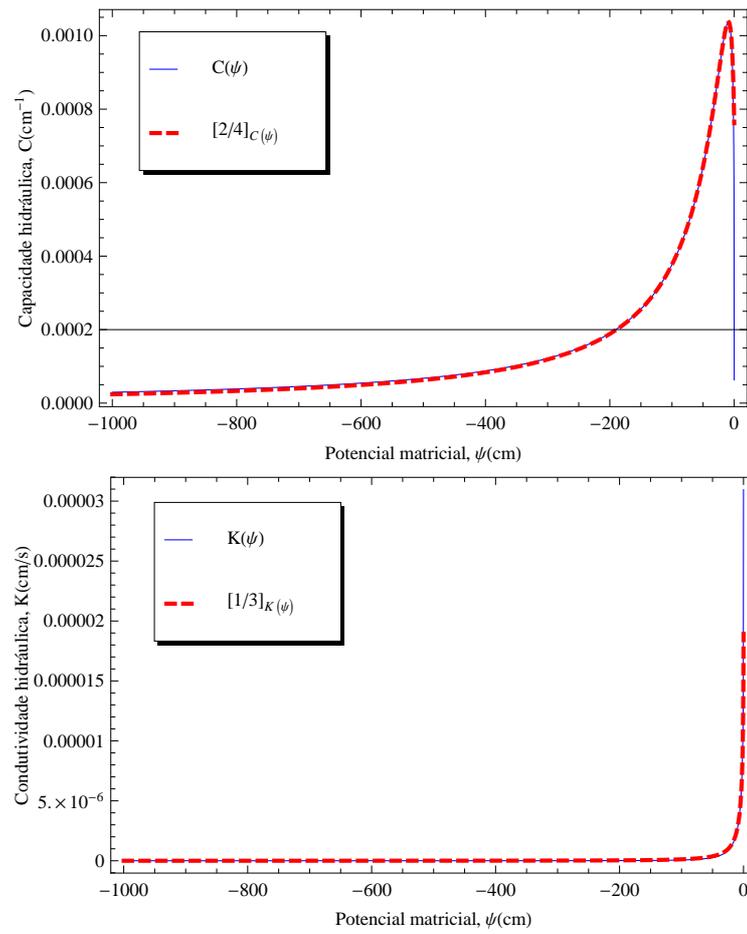


Figura 4.10 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo argilo arenoso

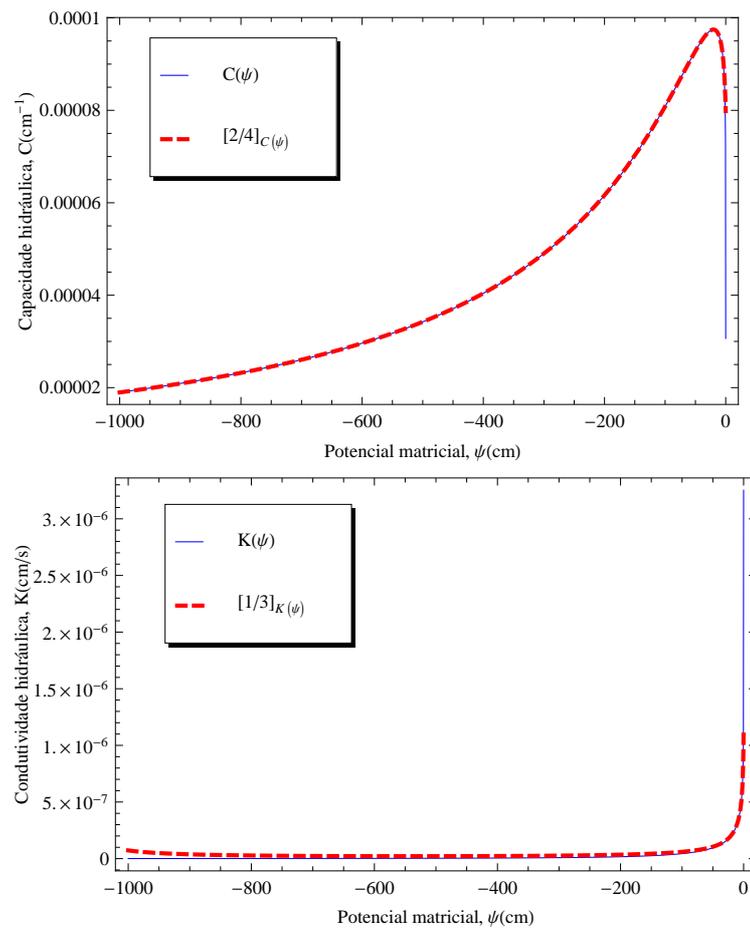


Figura 4.11 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo argilo siltoso

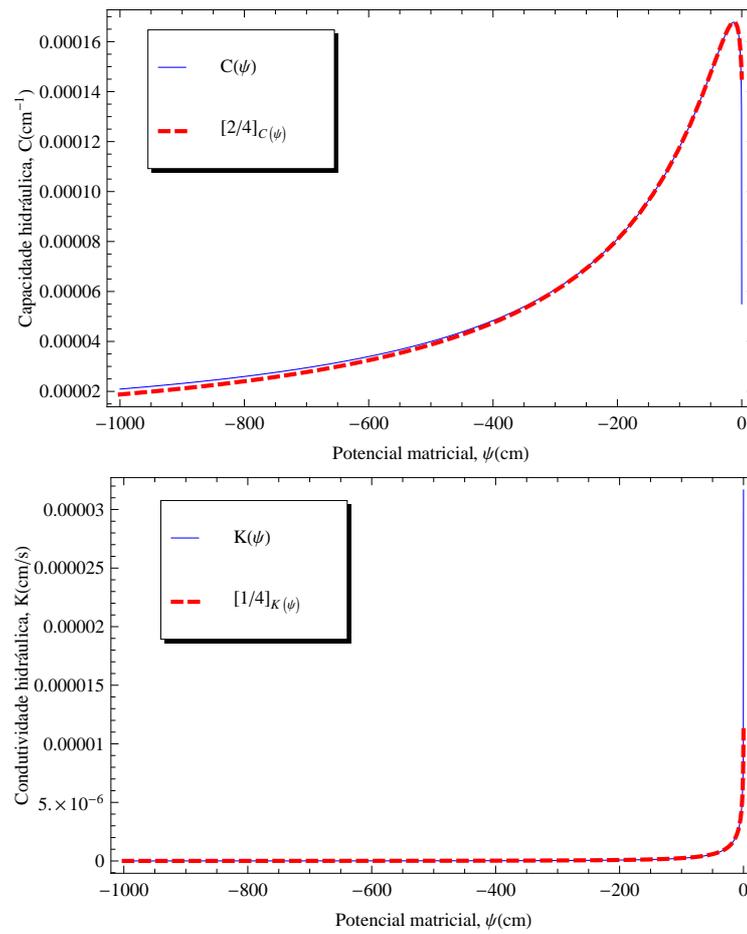


Figura 4.12 – Padé funcional para  $K(\psi)$  e  $C(\psi)$  em um solo argiloso

## 5 MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO ADOMIAN

O método de decomposição de Adomian, 1988 permite obter soluções de representação analítica para problemas de classe não linear, sem necessidade de aproximações, como por exemplo, linearização, perturbação ou métodos de discretização. Pois, tais aproximações podem conduzir a soluções fisicamente não realistas, e do ponto de vista matemático, um problema simplificado pode não ser uma boa representação do problema real.

Em geral, a solução é decomposta em uma série infinita de funções. O termo não linear é aproximado por um esquema recursivo, definido de acordo com a forma da não linearidade. Estando a solução aproximada por uma série infinita, surge a necessidade do truncamento da série, em um número finito de termos, como solução prática. Com isso, a validade do método fica restrita ao raio de convergência da série. Salienta-se, ainda, que, uma vez estabelecida a convergência, a solução obtida é exata [Adomian, 1994]. Por conseguinte, a grande dificuldade reside na maneira de estabelecer a aproximação do termo não linear e provar a convergência da série.

Considere uma equação diferencial não linear

$$\Omega[\psi] = 0. \quad (5.1)$$

Seguindo o procedimento de Adomian da maneira clássica, a Equação (5.1) pode ser reescrita como uma equação diferencial, separando todos os termos dependentes de  $\psi$  como

$$\Omega[\psi] = \Omega_D[\psi] + \Omega_L[\psi] + \Omega_N[\psi], \quad (5.2)$$

na qual  $\Omega_L[\psi]$  refere-se aos termos lineares,  $\Omega_N[\psi]$  aos termos não lineares e  $\Omega_D[\psi]$  a derivada de maior ordem.

Aplicando o operador inverso  $\Omega_D^{-1}$  na Equação (5.2), tendo que a inversão de  $\Omega_D[\psi]$  é simplesmente a integração do operador sobre um intervalo finito, a Equação (5.2) é reescrita como

$$\psi = -\Omega_D^{-1}\Omega_L[\psi] - \Omega_D^{-1}\Omega_N[\psi]. \quad (5.3)$$

Decompondo a solução  $\psi$  a ser determinada por uma série de funções

$$\psi = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \quad (5.4)$$

e o termo não-linear é expresso em uma soma dos chamados polinômios funcionais de Adomian

$$\Omega_N[\psi] = \sum_{i=0}^{\infty} A_i. \quad (5.5)$$

Há diversas maneiras de obter esta solução aproximada em representação analítica, pois essas estão condicionadas pelo modo de montar o esquema recursivo que é truncado em  $n$  termos em  $A_n$  e  $n + 1$  termos em  $\psi_n$ . A inicialização é dada pela solução de um problema linear com condições de contorno e o esquema recursivo é dado pelas soluções particulares com termo fonte obtido pelos termos não lineares, conhecidos, dos passos anteriores.

Se a iteração definir uma sequência convergente para  $\psi$  em todo seu domínio, então a solução é exata e é definida por

$$\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \psi_i. \quad (5.6)$$

Os termos  $A_n$  e  $\psi_n$  estão relacionados de tal maneira que a solução é dada por um processo iterativo bem definido. Assim, reescreve-se os termos não-lineares como uma expansão de um operador normal convergente

$$\begin{aligned} \Omega_N[\psi] &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\frac{\partial^n (\Omega_N[\psi])}{\partial \psi^n} \Big|_{\psi=\psi_0}}_{F_0^{(n)}} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \right)^n \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F_0^{(n)} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ \Sigma k_i = n}} \left( \binom{n}{\{k_i\}_1^r} \prod_{m=1}^r \psi_m^{k_m} \right) \\ &= F_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( F_0^{(1)} \psi_n + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j!} F_0^{(j)} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{n-1} \\ \Sigma k_i = j}} \left( \binom{j}{\{k_i\}_1^{n-1}} \prod_{m=1}^{n-1} \psi_m^{k_m} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Abreviando as notações para os termos derivados  $F_0^{(n)}$ , refletindo a influência do termo fonte na solução  $\psi = \psi_0$  e os coeficientes multinomiais  $\binom{n}{\{k_i\}_1^r} = \binom{n}{k_1, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$ ,

com  $\sum_{i=1}^r k_i = n$ . Os polinômios funcionais de Adomian são associados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
A_0 &= F_0^{(0)} \\
A_1 &= F_0^{(1)} \psi_1 \\
A_2 &= F_0^{(1)} \psi_2 + \frac{1}{2} F_0^{(2)} \psi_1^2 \\
&\vdots \\
A_n &= F_0^{(1)} \psi_n + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j!} F_0^{(j)} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_{n-1} \\ \Sigma k_i = j}} \left( \binom{j}{\{k_i\}_1^{n-1}} \prod_{m=1}^{n-1} \psi_m^{k_m} \right). \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Uma vez que as expressões analíticas para  $\psi_i$  e  $A_n$  são determinadas, o esquema acima permite resolver problemas não lineares sem a necessidade de aproximação ou linearização.

Para o escoamento unidimensional vertical em solo não saturado:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ K(\psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) \right] \tag{5.9}$$

a inicialização da recursão pode ser obtida separando uma contribuição constante do termo funcional complementar, ou seja, fazendo  $C(\psi) = \bar{C} + \mathcal{C}(\psi)$  e  $K(\psi) = \bar{K} + \mathcal{K}(\psi)$  na qual  $\bar{C}$  e  $\bar{K}$  são médias constantes e  $\mathcal{C}(\psi)$  e  $\mathcal{K}(\psi)$  funções que descrevem informações referentes à evolução do potencial mátrico. Logo, substituindo estas relações na Equação (5.9) e agrupando os termos lineares e não lineares

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\bar{C}}{\bar{K}} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\bar{K}} \left[ \mathcal{C}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mathcal{K}(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial \mathcal{K}(\psi)}{\partial z} \right]. \tag{5.10}$$

Dessa forma, o lado esquerdo da Equação (5.10) representa os termos lineares, que são utilizados para encontrar o primeiro termo para a inicialização da recursividade que constitui a decomposição. Já, o lado direito representa a não linearidade e, é utilizada como correção no esquema recursivo de Adomian. Na Equação (5.10), destaca-se a forte não linearidade presente no fenômeno que fica visível no momento que é separada da parte linear. Em frente ao termo de correção, existe um fator de amplificação  $1/\bar{K}$ , se  $\bar{K}$  é pequeno, então  $1/\bar{K}$  torna-se um fator problemático pois, atinge valores altos e compromete a correção

independentemente do esquema específico adotado para a determinação dos polinômios de Adomian.

Assim, no presente caso, o método de Adomian não é eficaz para corrigir uma solução inicial de uma equação diferencial linear, devido a uma não-linearidade dominante e divergência resultante. A partir desses achados, os autores sugerem uma nova formulação para a obtenção de uma solução, construído nos seguintes passos: a) determinação uma solução de inicialização aproximada parametrizada. b) otimização desta solução pela equação de Richards. c) avaliação por um teste de auto-consistência.

## 6 ESTRUTURA DA SOLUÇÃO

### 6.1 Evolução temporal

Nesta seção é feito um estudo sobre o comportamento da solução ao longo do tempo. Para esta análise podemos considerar algumas aproximações.

As Figuras 4.1 - 4.12 mostram que embora tenhamos uma grande diferença de escala entre os parâmetros envolvidos no fenômeno, estes possuem comportamento consideravelmente monótono se tomarmos a região restringida  $\psi \in [-10m, -2m]$ , então assumimos este intervalo como domínio de referência e com isso aproximamos os parâmetros  $K(\psi) \approx K$ , onde  $K$  é a constante média do intervalo que pode ser calculada a partir da integral média e  $C(\psi)$  por um modelo quadrático parametrizado tal que  $C(\psi) \approx a(\psi + b)^2$  onde  $a$  e  $b$  são obtidos por ajuste de curva.

Então a equação de Richards é simplificada pelas considerações acima tal que

$$a(\psi + b)^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad (6.1)$$

se considerarmos  $\varphi = \psi + b$  então a equação acima resulta que

$$a\varphi^2 \frac{\partial(\varphi - b)}{\partial t} = K \frac{\partial^2(\varphi - b)}{\partial z^2}, \quad (6.2)$$

logo

$$a\varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (6.3)$$

A equação acima admite solução Traveling Wave  $\varphi = (\beta z + \alpha t)$ ; tal que, para  $\beta = 0$  corresponde à solução homogênea dependente apenas de  $t$  e para  $\alpha = 0$  uma solução estacionária dependente apenas da profundidade.

A solução da Equação (6.3) é apresentada por Polyanin e Zaitsev, 2003 pela forma implícita da solução Traveling Wave.

$$\lambda^2 \int \frac{d\varphi}{F(\varphi) + C_1} = t + \lambda z + C_2, \quad (6.4)$$

onde  $F(\varphi) = \int \frac{a\varphi^2}{K} d\varphi$  e  $\lambda, C_1$  e  $C_2$  são constantes que devem ser determinadas pelas condições

do problema.

Para determinar as constantes,  $\lambda, C_1$  e  $C_2$ , vamos utilizar as condições de contorno e inicial, mas devemos levar em consideração que estamos resolvendo a equação para  $\varphi$ .

E desta maneira, as constantes são determinadas resolvendo o seguinte sistema implícito

$$\begin{aligned} \lambda^2 \left( \int \frac{d\varphi}{F(\varphi) + C_1} \right)_{\varphi=0} &= \lambda z + C_2 \\ \lambda^2 \left( \int \frac{d\varphi}{F(\varphi) + C_1} \right)_{\varphi=9,25} &= t + C_2 \\ \lambda^2 \left( \int \frac{d\varphi}{F(\varphi) + C_1} \right)_{\varphi=0} &= t - \lambda + C_2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Devido ao caráter implícito das equações é necessário utilizar de procedimentos iterativos para determinar as constantes. A Figura 6.1 mostra o gráfico em isolinhas do potencial matricial agora  $\phi$  em função do tempo e da profundidade ( $z$ ).

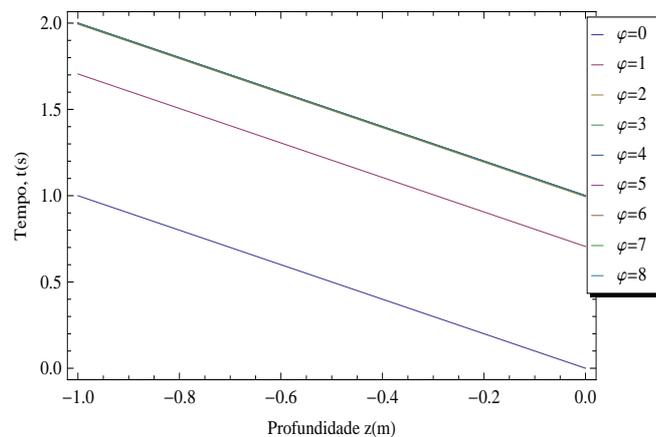


Figura 6.1 – Isolinhas do potencial  $\varphi$ .

A Figura 6.1 mostra a saturação em isolinhas de  $\varphi$ . Podemos notar que a partir de  $\varphi = 3m$  não há alteração significativa em  $\varphi$ . Neste momento ocorre a transição do processo transiente para o estacionário, podemos dizer que  $\varphi = 3m$  é o limite do regime transiente.

A solução da forma Traveling Wave é comum em problemas de infiltração. Em Zlotnik et al., 2007 os autores assumiram que a solução é da forma  $\theta(x, t) = u(\xi)$  com  $\xi = x + ct$  que define uma relação linear entre as variáveis do problema. Isto tem como resultado principal que a EDP original agora resulta em uma EDO baseada em  $u(\xi)$ . Zlotnik

et al(2007) resolveram a EDO por integração numérica com o intuito de ajudar na verificação de soluções numéricas do problema. Nasser et al., 2010, 2012 supôs que a solução da EDO resultante seria uma série de funções de tangentes hiperbólicas e encontrou soluções em representação analítica.

Em todas as referências citadas, a metodologia por Traveling Wave foi usada sempre como uma hipótese que tem por consequência transformar um problema de forte não linearidade e uma equação diferencial linear. No presente trabalho, a Traveling Wave é apenas uma ferramenta para um problema auxiliar.

## 6.2 Estrutura estacionária

Vamos considerar agora apenas a parte estacionária da equação de Richards. Logo

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial z} \left( K(\psi) \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right] \right) \\
 &= \frac{\partial K(\psi)}{\partial z} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right] + K(\psi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\
 &= \frac{\partial \ln K(\psi)}{\partial z} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Neste momento vamos aproximar o termo de condutividade hidráulica a uma função exponencial da forma:

$$K(\psi) = e^{a(\psi-b)^2-c} \tag{6.7}$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os parâmetros que devem ser otimizados de maneira a aproximar a função exponencial à expressão original.

Podemos notar pelas Figuras 6.2 - 6.7 que o modelo quadrático possui pouca diferença quando comparado ao modelo real. Esta diferença pode ser desconsiderada, pois o objetivo aqui é explorar apenas o comportamento da solução. Logo, substituindo  $K(\psi)$  pela aproximação exponencial

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} (a(\psi - b)^2 - c) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{6.8}$$

$$0 = a \frac{\partial}{\partial z} (\psi - b)^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1 \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{6.9}$$

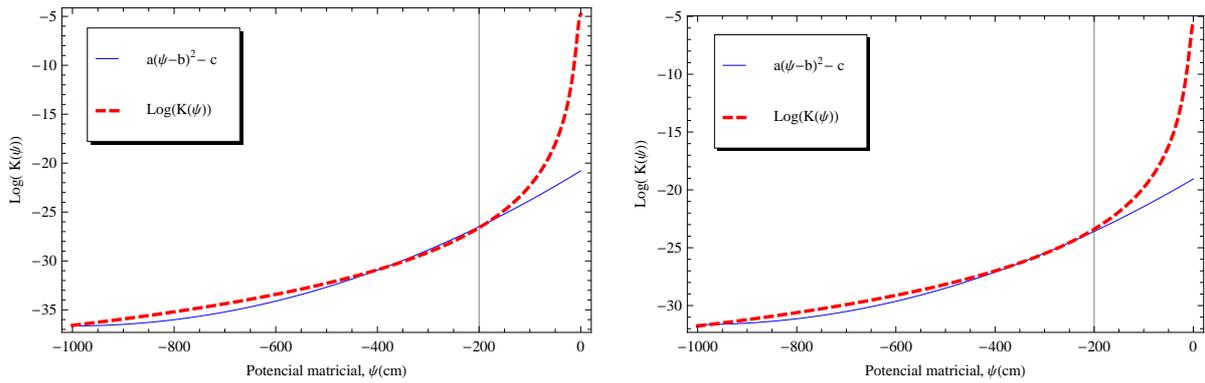


Figura 6.2 – Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para  $\psi \leq -2\text{m}$ . Solo arenoso (esquerda) e solo areia barrenta (direita).

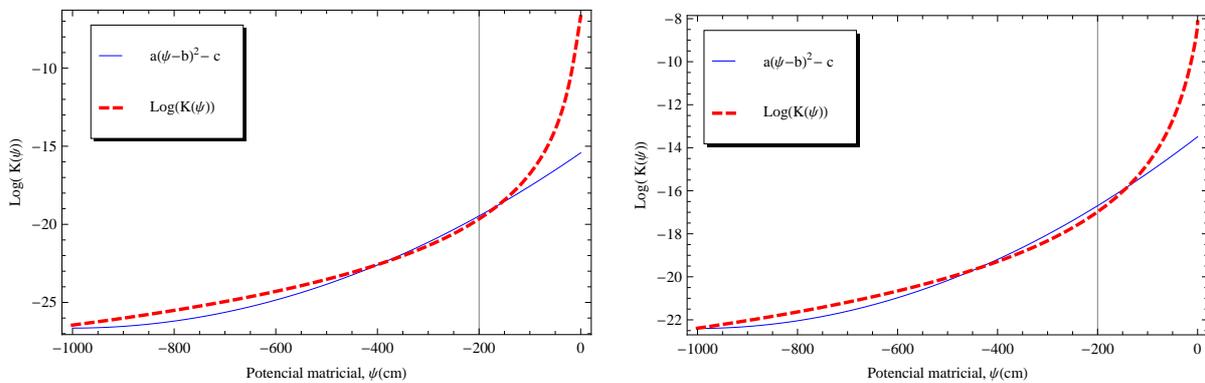


Figura 6.3 – Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para  $\psi \leq -2\text{m}$ . Solo barro arenoso (esquerda) e solo barroto (direita).

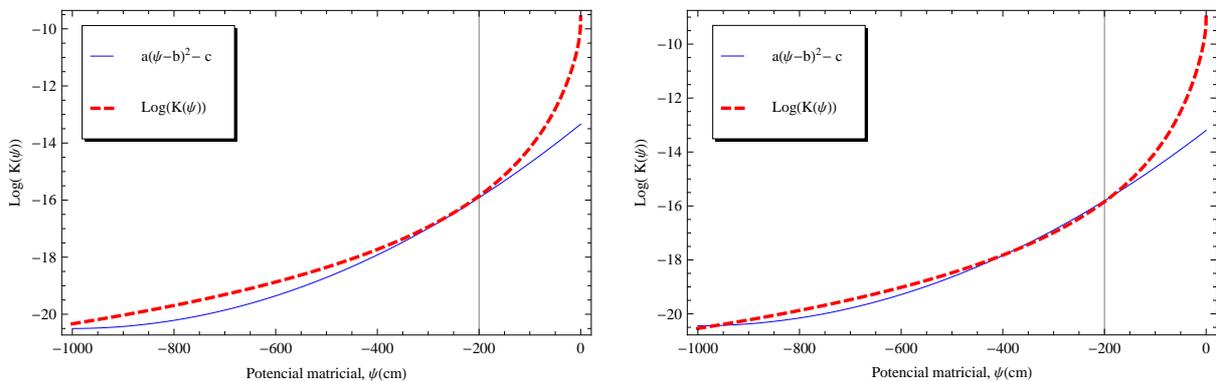


Figura 6.4 – Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para  $\psi \leq -2\text{m}$ . Solo siltoso (esquerda) e solo barro siltoso (direita).

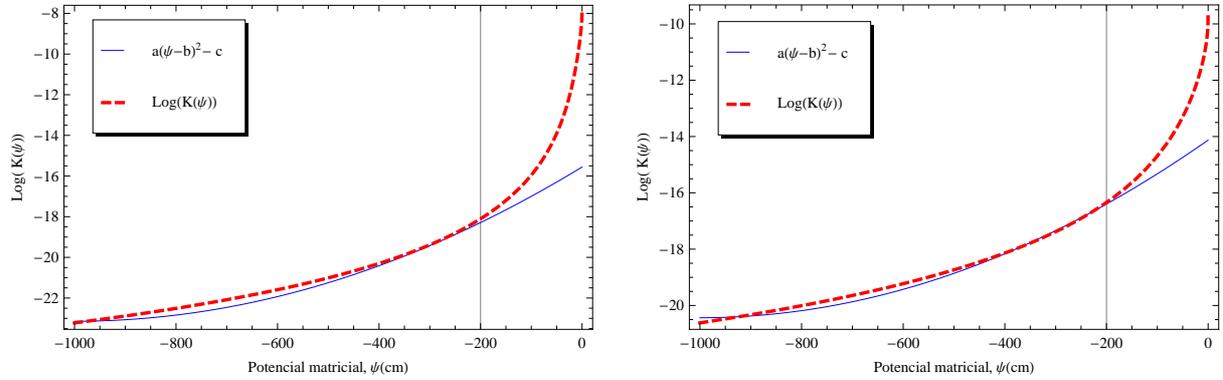


Figura 6.5 – Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para  $\psi \leq -2\text{m}$ . Solo barro-argilo-arenoso (esquerda) e solo barro argiloso (direita).

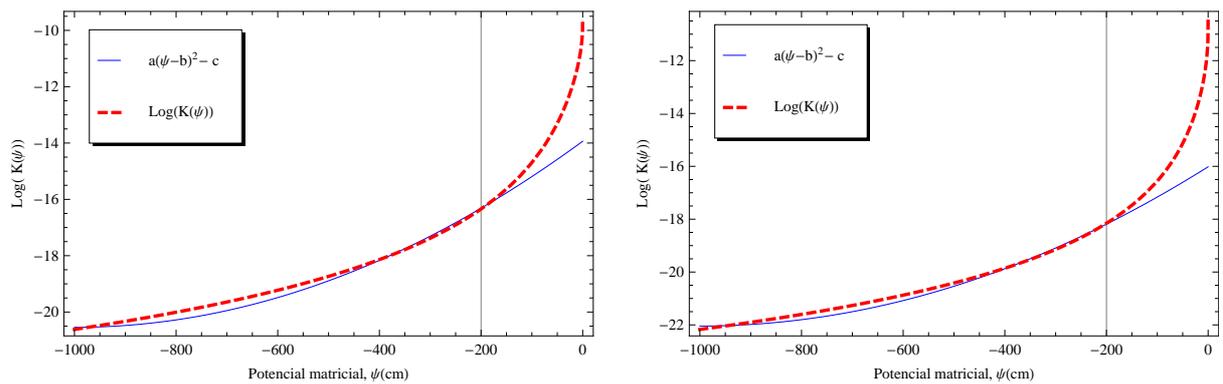


Figura 6.6 – Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para  $\psi \leq -2\text{m}$ . Solo barro-argilo-siltoso (esquerda) e solo argilo arenoso (direita).

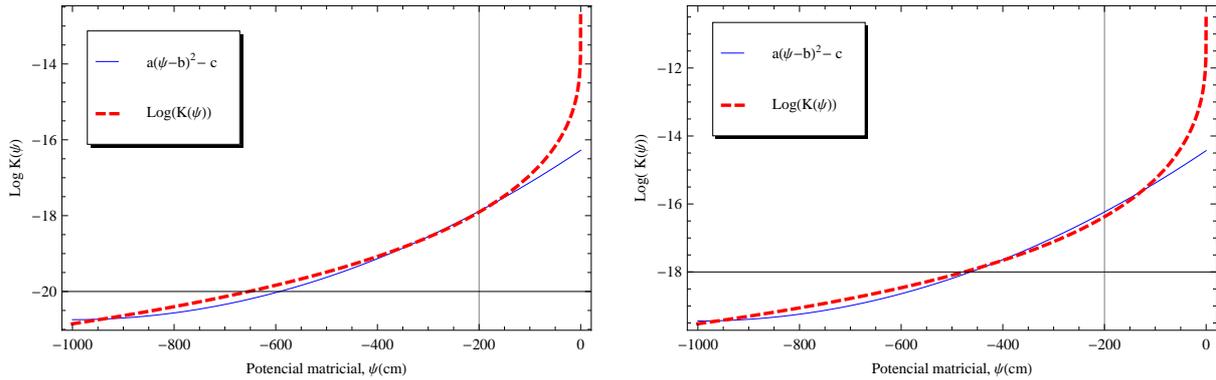


Figura 6.7 – Aproximação ao termo de condutividade hidráulica para  $\psi \leq -2\text{m}$ . Solo argilo siltoso (esquerda) e solo argiloso (direita).

e, considerando o potencial matricial modificado como  $\varphi = \psi - b$ , temos que

$$\begin{aligned}
 0 &= a \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \left( \frac{\partial(\varphi + b)}{\partial z} + 1 \right) + \frac{\partial^2(\varphi + b)}{\partial z^2} \\
 0 &= a \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 1 \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\
 &= \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + a \frac{\partial \varphi^2}{\partial z}}_A + \underbrace{a \frac{\partial \varphi^2}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}}_B
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

A Equação (6.10) pode ser resolvida usando método recursivo, onde os termos de A são utilizados para determinar a inicialização da recursão e os termos de B são considerados como correção para as recursões seguintes. Logo, se supormos que  $\phi_0$  é o primeiro termo da recursividade então  $\phi_0$  é solução da seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + a \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial z} = 0 \tag{6.11}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + a \varphi_0^2 &= \underbrace{\text{constante}}_{c_1} \\
 \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} &= c_1 - a \varphi_0^2 \rightarrow - \int \frac{d\varphi}{c_1 - a \varphi^2} = - \int dz
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{arctanh}\left(-\varphi_0\sqrt{\frac{a}{c_1}}\right)}{\sqrt{ac_1}} &= -z + c_2 \\ \operatorname{arctanh}\left(-\varphi_0\sqrt{\frac{a}{c_1}}\right) &= (-z + c_2)(\sqrt{ac_1}) \end{aligned} \quad (6.13)$$

então a primeira contribuição para o processo recursivo é

$$\varphi_0(z) = -\sqrt{\frac{c_1}{a}} \tanh(\sqrt{ac_1}(-z + c_2)) \quad (6.14)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são determinados a partir das condições de contorno. Para determinar  $\varphi_1$  o termo  $B$  inicialmente negligenciado agora é considerado como fonte e assim  $\varphi_1$  é solução da seguinte equação.

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + a \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial z} = -a \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial z} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}. \quad (6.15)$$

Sabemos que  $\varphi_0$  é a solução homogênea da Equação (6.15) logo a solução particular é da forma  $\varphi_p = v(z)\varphi_0$  e  $v(z)$  é determinado como segue

$$\begin{aligned} v'(z)\varphi_0(z) &= -a \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial z} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \\ v(z) &= \int_0^z \frac{1}{\varphi_0(z')} \left( -a \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial z'} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z'} \right) dz' \end{aligned} \quad (6.16)$$

e, portanto,

$$\varphi_1(z) = \varphi_0 \underbrace{c_3}_{=0} + \varphi_0(z) \int_0^z \frac{1}{\varphi_0(z')} \left( -a \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial z'} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z'} \right) dz'. \quad (6.17)$$

Neste caso,  $c_3 = 0$  pois as condições de contornos já foram consideradas na inicialização.

Então

$$\varphi_1(z) = \varphi_0(z) \int_0^z \frac{1}{\varphi_0(z')} \left( -a \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial z'} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z'} \right) dz' \quad (6.18)$$

$$(6.19)$$

Para os demais termos temos o procedimento similar, em que cada contribuição deve ser menor do que a anterior. Podemos dizer que o primeiro termo do processo recursivo é o

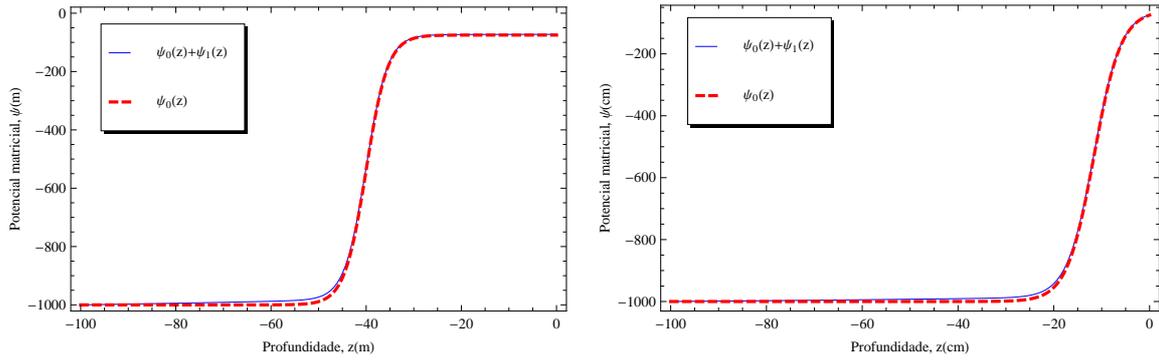


Figura 6.8 – Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo arenoso (esquerda) e um solo areia barrenta (direita)

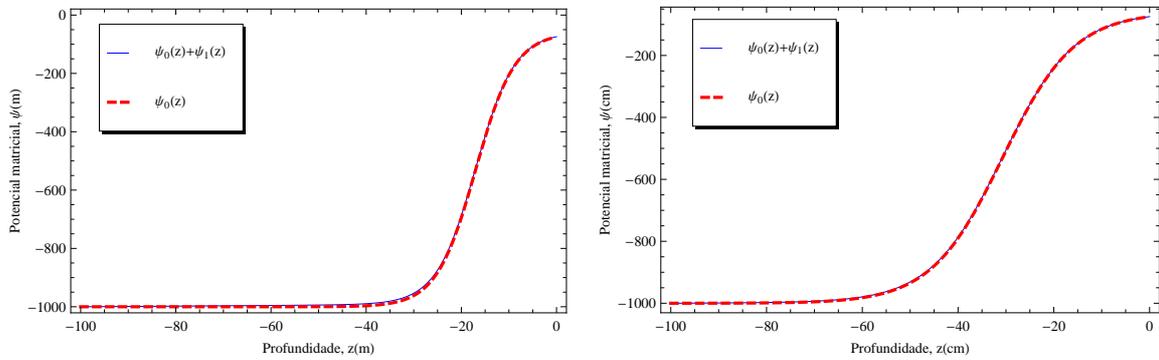


Figura 6.9 – Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo barro arenoso (esquerda) e um solo barrento (direita)

termo dominante e os demais termos são pequenas correções. As Figuras 6.8 - 6.13 exibem  $\psi_0(z)$  e  $\psi_1(z) + \psi_0(z)$ . Podemos observar que nesse caso, apenas  $\psi_0(z)$  já é suficiente pois os demais passos recursivos não representam significativas alterações.

Embora esta metodologia não seja válida como solução geral devido às simplificações e aproximações feitas anteriormente, podemos abstrair a informação de que a solução geral pode ser escrita em forma paramétrica como

$$\psi(z) = -a_1 \tanh(a_2(-z + a_3)) + S(z) \quad (6.20)$$

onde  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são constantes. Estes parâmetros devem ser otimizados de modo a satisfazer a equação de Richards e caso esta solução seja distante da solução geral então será necessário

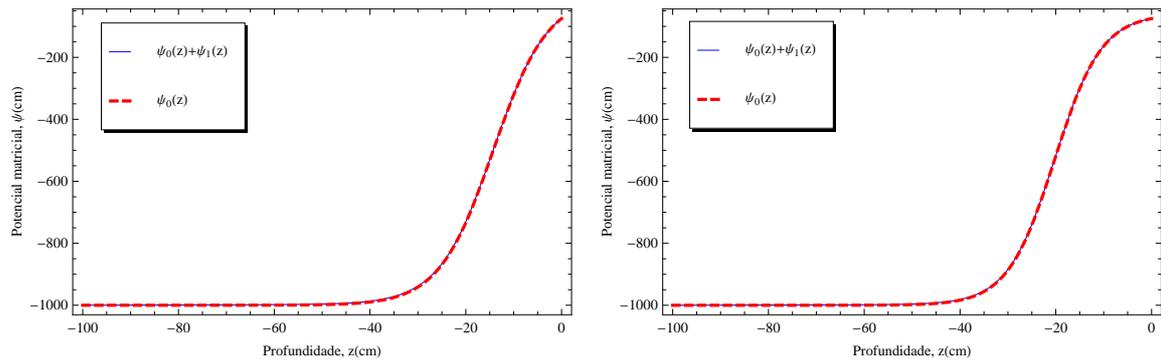


Figura 6.10 – Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo siltoso (esquerda) e um solo barro siltoso (direita)

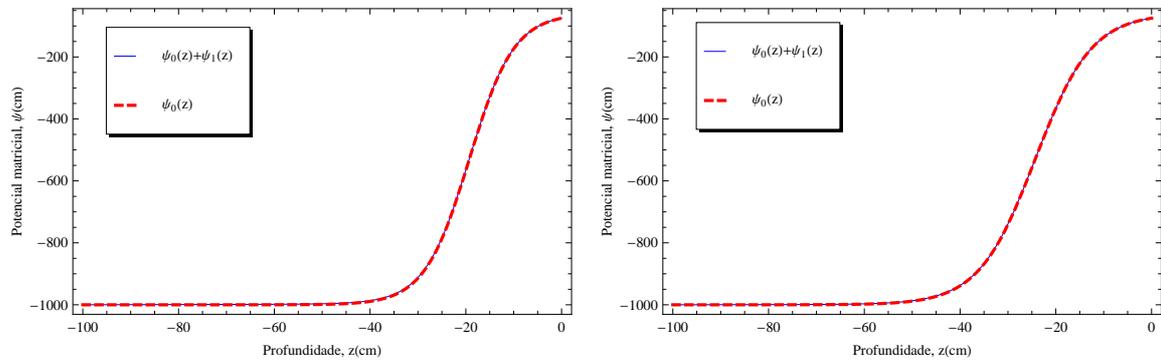


Figura 6.11 – Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo barro-argilo-arenoso (esquerda) e um solo barro argiloso (direita)

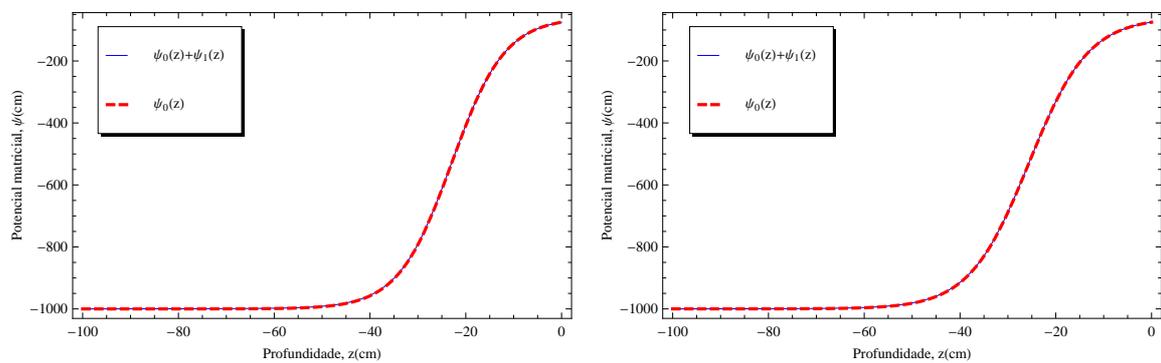


Figura 6.12 – Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo barro-argilo-siltoso (esquerda) e um solo argilo arenoso (direita)

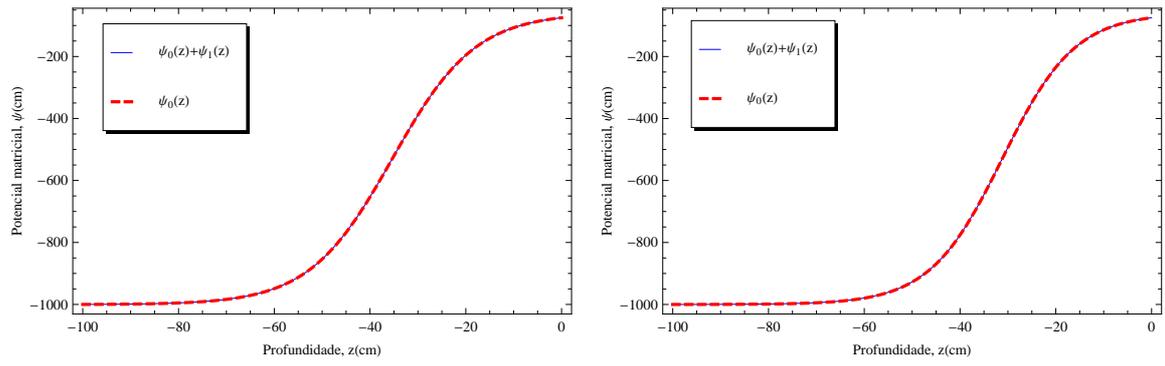


Figura 6.13 – Solução parcial e estacionária para uma textura de: solo argilo siltoso(esquerda) e um solo argiloso (direita)

o uso do termo de correção  $S(z)$ . Isto será discutido na próxima seção.

## 7 CONSTRUÇÃO DE SOLUÇÃO FUNCIONAL PARAMETRIZADA

Da análise do fenômeno físico, uma das expectativas é que o processo de infiltração estabeleça um regime estacionário, tal que se possa definir a zero a parte da derivada temporal e obter uma aproximação para o perfil estacionário considerando a expansão funcional de Taylor para  $K$  em torno de  $\psi = 0$ , que resulta em apenas um termo quadrático. Inserindo este termo na equação estacionária de Richards resulta em uma equação que pode ser resolvida por métodos recursivos e revela o perfil de uma função de tangente hiperbólica, como visto na seção anterior. Fazendo uso desta expressão numérica para encontrar uma parametrização vamos ter a seguinte forma  $\psi(z, t) = -a_1 \tanh(a_2(-z + a_3)) + a_5$ . Inicialmente vamos considerar o termo de correção  $S(z)$  como uma constante. Argumentos fenomenológicos agora permitem estender a solução estacionária incluindo a dependência temporal. Com o aumento da infiltração a frente de umidificação de saturação é deslocada ao longo da profundidade. A saturação está presente no comportamento assintótico da função de tangente hiperbólica e devido a condição inicial o argumento de  $\tanh$  deve ser singular, o caminho mais fácil para isso é introduzir um deslocamento e adicionando o termo  $a_4/t$  para  $z$  no argumento. Por último, observamos que existe uma assimetria entre as partes côncava e convexa do perfil, isto pode ser resolvido pela multiplicação do argumento pelo fator exponencial  $1 + \exp(a_2(z + a_3 + \frac{a_4}{t}))$ . Então chegamos a seguinte forma para a solução parametrizada, que pode ser otimizada diretamente pela equação original de Richards.

$$\psi(z, t) = -a_1 \tanh\left(\left(1 + e^{(-a_3z + a_4 + \frac{a_5}{t})}\right)\left(-a_3z + a_4 + \frac{a_5}{t}\right)\right) + a_2 \quad (7.1)$$

As relações constitutivas entre os parâmetros  $\theta$ ,  $\psi$  e  $K$  são das relações de Van Genuchten. Os parâmetros do solo juntamente com as condições de contorno ( $\psi(0, t) = -0.75m$  e  $\psi(-L, t) = -10m$  para  $t > 0$ ), inicial ( $\psi(z, 0) = -10m, -L \leq z \leq 0$ ) são as mesmas aplicadas em Celia et al., 1990.

Agora, o potencial matricial  $\psi$  é uma função paramétrica  $\psi = \psi(z, t; \{a_i\})$ , onde  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Para ajustar o conjunto de parâmetros, inserimos a solução ( $\psi$ ) dada pela Equação (7.1) na Equação de Richards, Equação (3.16), que por conveniência vamos escrever na forma em que todos os termos estão no lado esquerdo e consequentemente o lado direito é igual a zero. Seja  $\Omega_R$  o operador diferencial que representa a equação de Richards com

todos os termos no lado esquerdo, então para a solução verdadeira  $\Omega_R[\psi] = 0$ . Como nossa solução é uma aproximação, o lado direito difere de zero por um termo residual

$$|\Omega_R[\psi]| = \mathcal{R}(z, t). \quad (7.2)$$

Então, a solução apresentada na Equação 7.1 é otimizada minimizando  $\mathcal{R}$  usando o método de otimização dos mínimos quadrados e acelerando pelo método de Newton-Raphson. Algumas constantes podem ser determinadas de imediato. Podemos fixar as constantes  $a_1$  e  $a_2$  diretamente usando as condições de contorno onde:

$$a_1 = (\psi_p(0, t) - \psi_p(L, t))/2 \quad \text{e} \quad a_2 = \psi_p(0, t) - a_1 \quad (7.3)$$

O restante dos parâmetros são determinados usando o método já mencionado para minimizar  $\mathcal{R}$

$$|\Omega_R[\psi]| \rightarrow \min. \quad (7.4)$$

Como o comportamento assintótico da solução foi fixado usando as condições de contorno, usamos um conjunto discreto de pontos no intervalo que contém a máxima curvatura e o ponto de inflexão para otimizar  $\{a_3, a_4, a_5\}$ . A otimização pode ser simplificada usando uma expansão da função tangente hiperbólica em torno do ponto de inflexão (em  $z_0$ ), ou seja, onde o argumento da função é zero, isto é,  $a_3 z_0 + a_4 + \frac{a_5}{t} = 0$ , Que permite resolver o problema de minimização de uma forma direta.

O problema de mínimos quadrados é encontrar  $a$  que minimize a expressão

$$G(a) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (r_k(a))^2 = \frac{1}{2} \|r(a)\|^2 \quad (7.5)$$

onde  $a = [a_1, a_2, \dots, a_5]^T$ .  $m$  é o número de pontos a ser ajustado pela curva. Para resolver o problema de mínimos quadrados foi implementado o método de Newton. Desde que  $r(a)$  é continuamente diferenciável três vezes

$$A(a) \in \mathbb{R}^5 \quad \text{with} \quad A(a)_{kj} = \frac{\partial r_k(a)}{\partial a_j}. \quad (7.6)$$

A primeira derivada de  $G(a)$  é da forma

$$\nabla G(a) = \sum_{k=1}^m r_k(a) \nabla r_k(a) = A(a)^T r(a); \quad (7.7)$$

onde  $\nabla r_k(a)$  representa o vetor da primeira derivada com os respectivos parâmetros. Em relação a segunda derivada

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(a) &= \sum_{k=1}^m \nabla r_k(a) \nabla r_k(a)^T + r_k(a) \nabla^2 r_k(a) \\ &- A(a)^T A(a) + \sum_{k=1}^m r_k(a) \nabla^2 r_k(a), \end{aligned} \quad (7.8)$$

onde  $\nabla^2 r_k(a)$  é a matriz Hessiana da segunda derivada  $r_k(a)$ .

Considere  $a_i$  uma aproximação para a solução da Equação (7.5). Segundo as Equação (7.7) e Equação (7.8) serem uma aproximação quadrática para  $G(a)$  centrado em  $a_i$

$$\begin{aligned} Q_i(a) &= G(a_i) + \nabla G(a_i)^T (a - a_i) + \frac{1}{2} (a - a_i)^T \nabla^2 G(a_i) (a - a_i) \\ &= \frac{1}{2} r(a_i)^T r(a_i) + r(a_i)^T A(a_i) (a - a_i) \\ &+ \frac{1}{2} (a - a_i)^T \left( A(a_i)^T A(a_i) + \sum_{k=1}^m r_k(a_i) \nabla^2 r_k(a_i) \right) (a - a_i). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Substituindo  $G(a)$  por  $Q(a)$  e tomando  $\nabla Q_i(a) = 0$

$$a_{i+1} = a_i - \left( A(a_i)^T A(a_i) + \sum_{k=1}^m r_k(a_i) \nabla^2 r_k(a_i) \right)^{-1} A(a_i)^T r(a_i). \quad (7.10)$$

O ponto  $a_i$  não é necessariamente uma solução da Equação (7.5), devido  $G(a_i)$  ser aproximado por um modelo quadrático, mas isto é dado como uma boa aproximação. O modelo quadrático deveria ser repetido agora centrado em  $a_{i+1}$ . Este processo iterativo é o método de Newton. As equações iterativas são

$$a_{i+1} = a_i + \Delta_i, \quad i = 0, 1, \dots \quad (7.11)$$

com  $\Delta_i$  devendo satisfazer a equação

$$\left( A_i^T A_i + \sum_{k=1}^m r_k(a_i) \nabla^2 r_k(a_i) \right) \Delta_i = -A_i^T r_k. \quad (7.12)$$

Tabela 7.1 – Valores médios dos parâmetros hidráulicos para o modelo de Van Genuchten para quatro tipos de grupos de textura de solos de acordo com Carsel e Parrish, 1988

| Solo                     | $\theta_r(m^3/m^3)$ | $\theta_s(m^3/m^3)$ | $\alpha(1/cm)$      | $n$                 | $K_s(cm/s)$              |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--------------------------|
| (1) arenoso              | 0.045               | 0.430               | 0.145               | 2.68                | $8.25 \times 10^{-2}$    |
| (2) areia barrenta       | 0.057               | 0.410               | 0.124               | 2.28                | $4.05324 \times 10^{-3}$ |
| (3) barro arenoso        | 0.065               | 0.410               | 0.075               | 1.89                | $1.22801 \times 10^{-3}$ |
| (4) barro                | 0.078               | 0.430               | 0.036               | 1.56                | $2.88 \times 10^{-4}$    |
| (5) siltoso              | 0.034               | 0.460               | 0.016               | 1.37                | $6.94444 \times 10^{-5}$ |
| (6) barro siltoso        | 0.067               | 0.450               | 0.020               | 1.41                | $1.25 \times 10^{-4}$    |
| (7) barro-argilo-arenoso | 0.100               | 0.390               | 0.059               | 1.48                | $3.63889 \times 10^{-4}$ |
| (8) barro argiloso       | 0.095               | 0.410               | 0.019               | 1.31                | $7.22 \times 10^{-5}$    |
| (9) barro-argilo-siltoso | 0.089               | 0.430               | 0.010               | 1.23                | $1.94444 \times 10^{-5}$ |
| (10) argilo arenoso      | 0.100               | 0.380               | 0.027               | 1.23                | $3.33333 \times 10^{-5}$ |
| (11) argilo siltoso      | 0.070               | 0.360               | 0.005               | 1.09                | $5.55556 \times 10^{-6}$ |
| (12) argiloso            | 0.068               | 0.380               | 0.008               | 1.09                | $5.55 \times 10^{-5}$    |
| Variação                 | $\mathcal{O}(10^1)$ | $\mathcal{O}(0)$    | $\mathcal{O}(10^1)$ | $\mathcal{O}(10^0)$ | $\mathcal{O}(10^3)$      |

No método de Newton a convergência é local, então a aproximação inicial para o processo iterativo deve ser perto o suficiente da solução para garantir a convergência para um ponto estacionário. Além disso, o vetor  $\Delta_i$  pode não apontar no sentido em que a função  $G$  decresce, não havendo garantia de convergência para o mínimo de  $G$ . Apesar disso, o método de Newton é considerado eficiente e robusto.

## 7.1 Resultados numéricos

Os conjuntos de parâmetros que foram utilizados para validar a “universalidade” da fórmula de solução aproximada referem-se aos doze tipos de solos apresentados na Tabela (7.1) para situações que consideram o fluxo de água numa coluna de solos inicialmente secos e homogêneo. Consideramos como faixa de profundidade no solo  $[0, L = 1m]$  e as condições iniciais e de contorno  $\psi(z, 0) = -10m$ ,  $-L \leq z \leq 0$ ;  $\psi(0, t) = -0,75m$  e  $\psi(-L, t) = -10m$  para  $t > 0$ .

As Figuras 7.1 - 7.12 mostram o potencial matricial estacionário calculado e o teste de auto-consistência ao longo da coordenada vertical para a solução parametrizada. As Figuras 7.1 - 7.12 (esquerda) mostram o potencial matricio com a profundidade do solo para

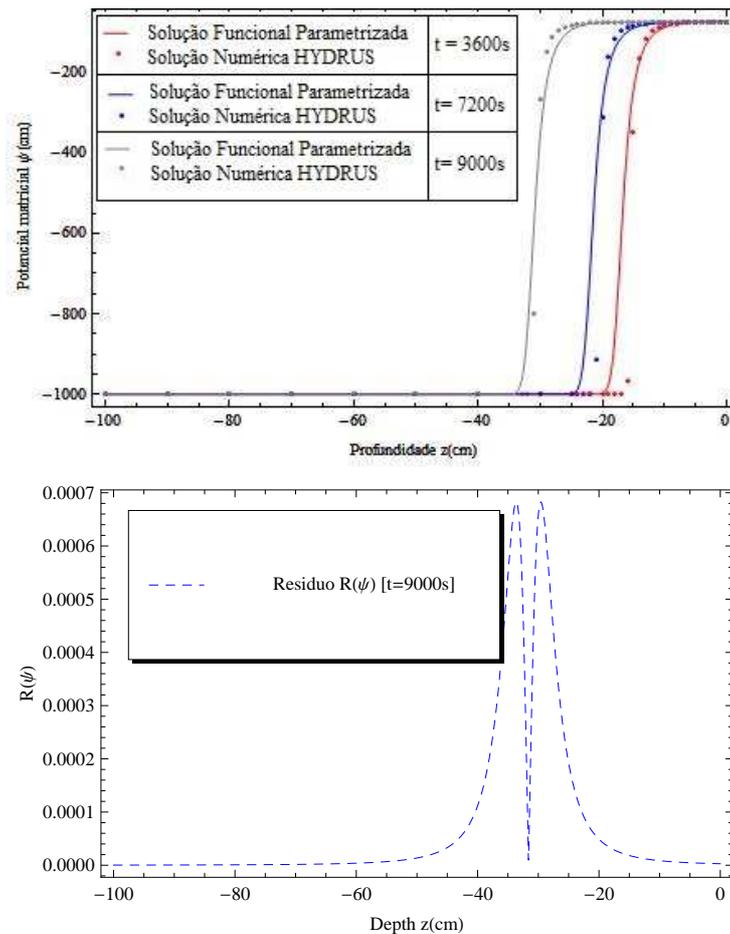


Figura 7.1 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo arenoso (1).

o tipo de solo considerado. Como esperado, os solos de areia mostram a drenagem mais intensa em comparação com os outros solos considerados. Pode-se também observar que o potencial para o solo argiloso tem uma região bastante estendida onde ocorre a transição de solo não saturado para saturado. Também são mostradas nas figuras comparações com resultados de benchmark usando o software HYDRUS, um pacote de programas de simulação de água, calor e movimento de solutos em duas ou três dimensões e meios variavelmente saturados.

Para analisar a qualidade da solução encontrada, o resíduo definido na Equação (7.2) é mostrado nas Figuras 7.1 - 7.12. As curvas que mostram a auto-consistência da solução na profundidade indicam, por seus valores numéricos, que o resíduo está entre  $10^{-2} - 10^{-3}$  e no caso do solo de areia tão pequeno quanto  $10^{-6}$  para que se possa concluir que a solução

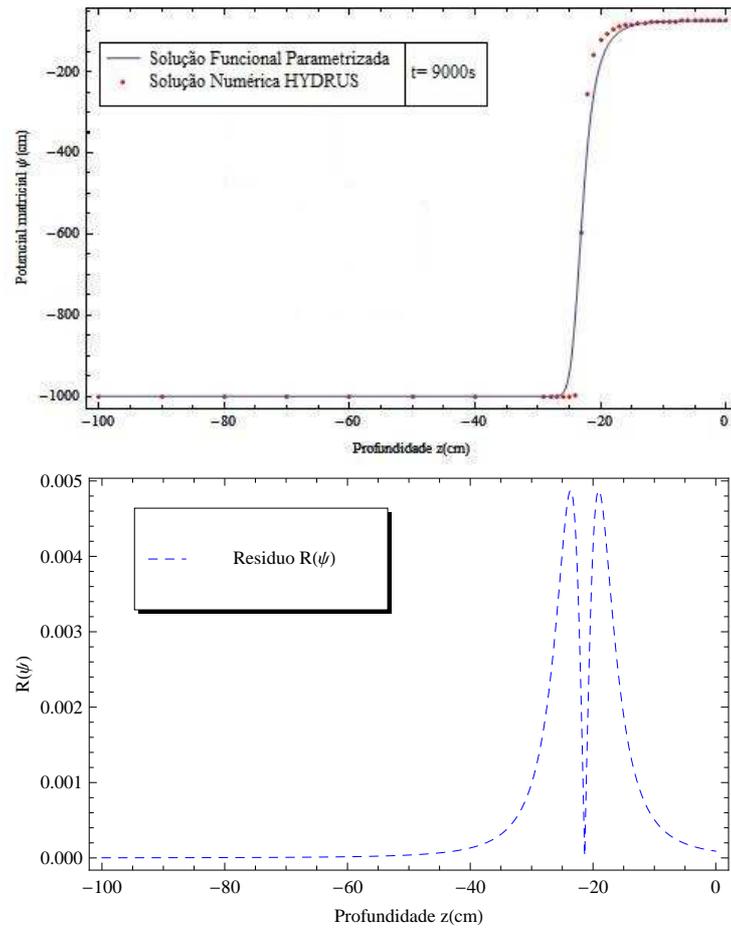


Figura 7.2 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo areia barrenta (2).

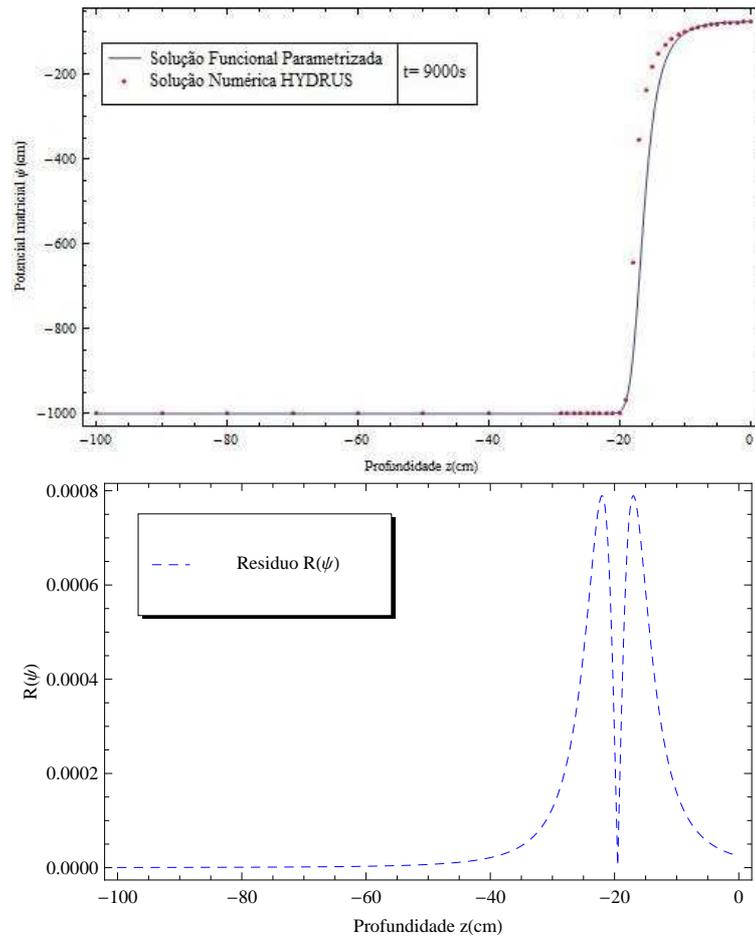


Figura 7.3 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barro arenoso (3).

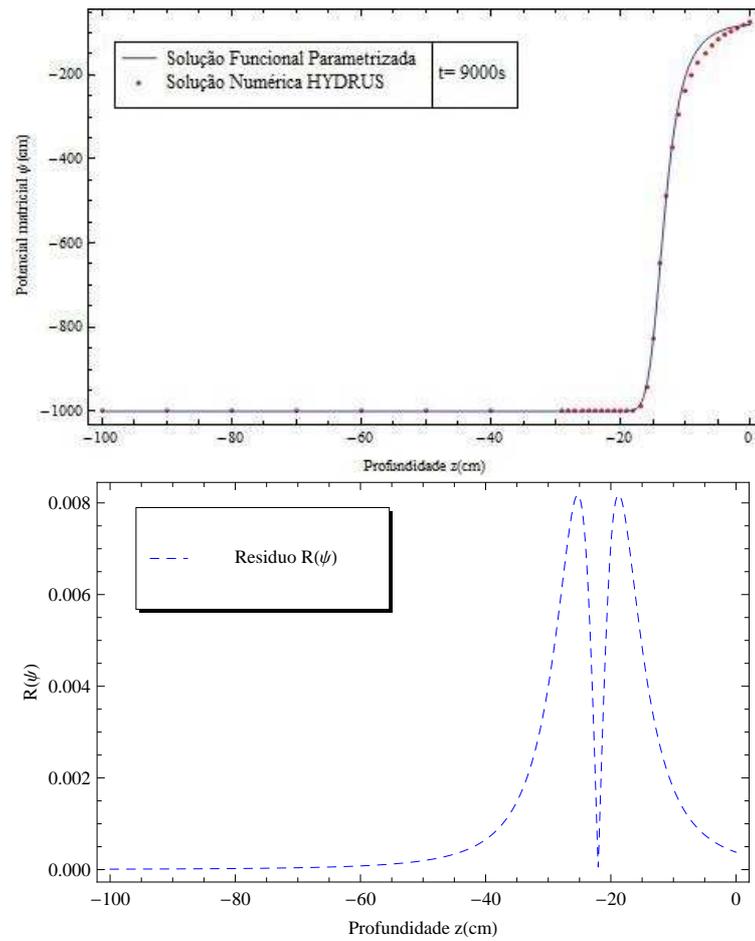


Figura 7.4 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barrento (4).

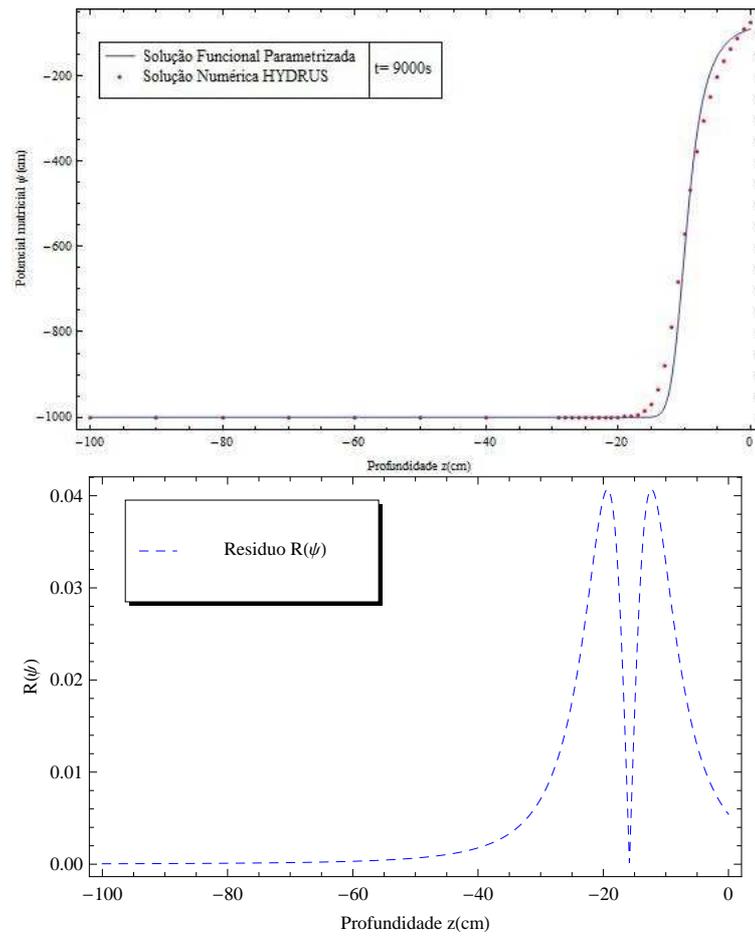


Figura 7.5 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo siltoso (5).

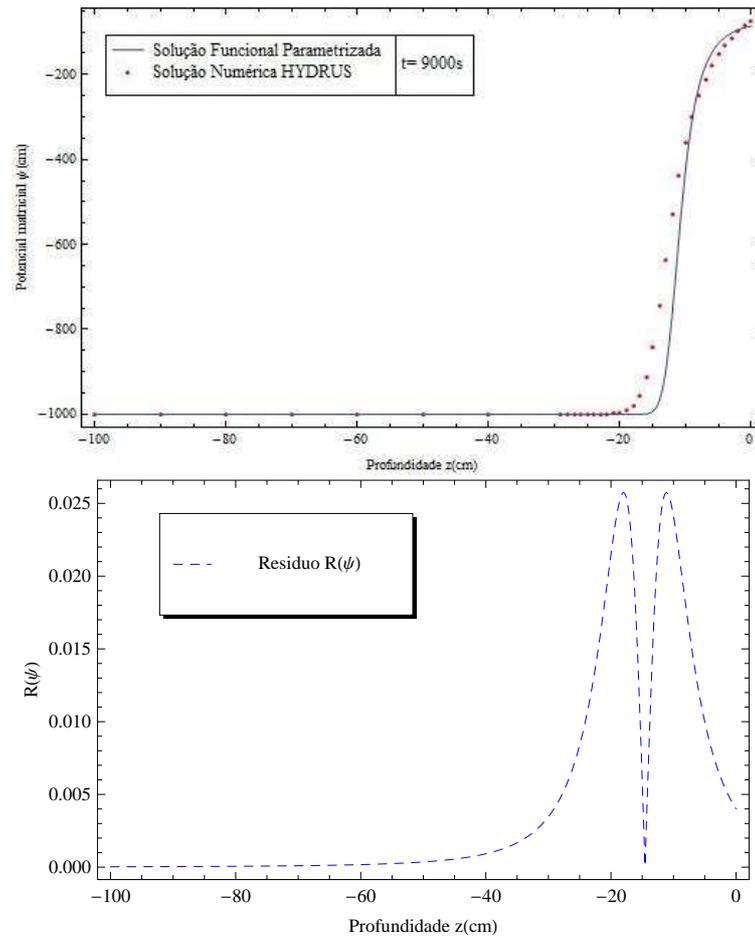


Figura 7.6 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barro siltoso (6).

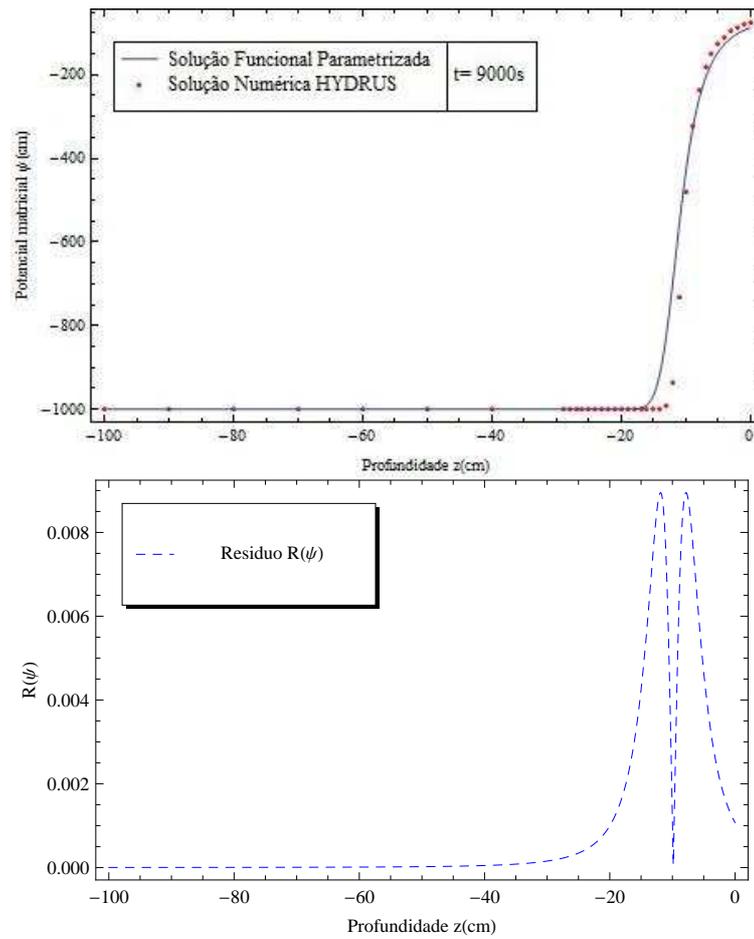


Figura 7.7 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barro-argilo-arenoso (7).

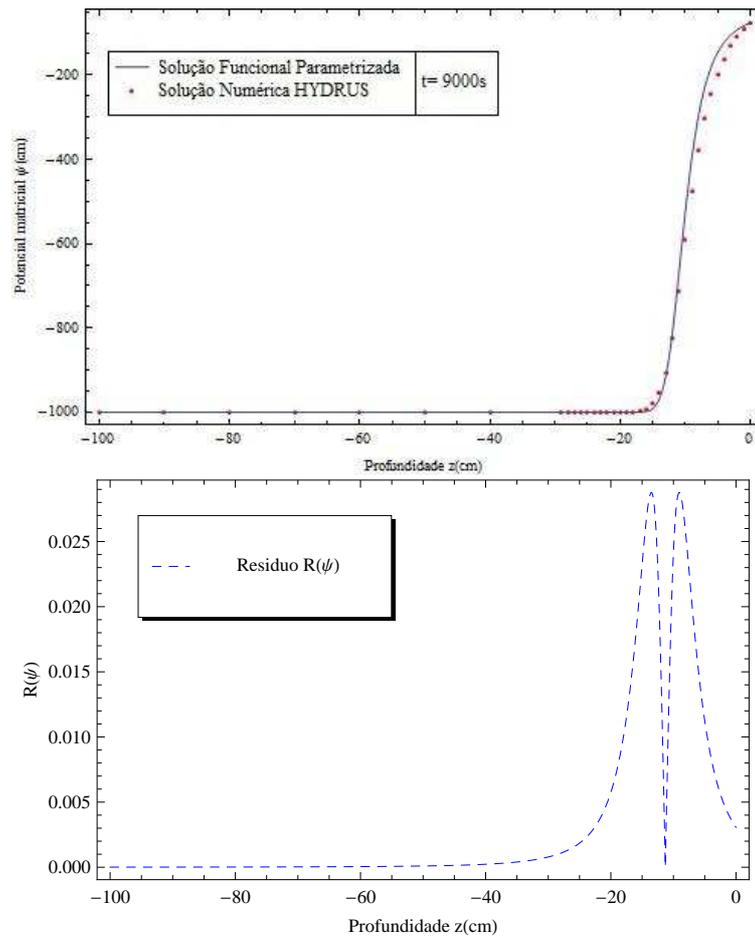


Figura 7.8 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barro argilos (8).

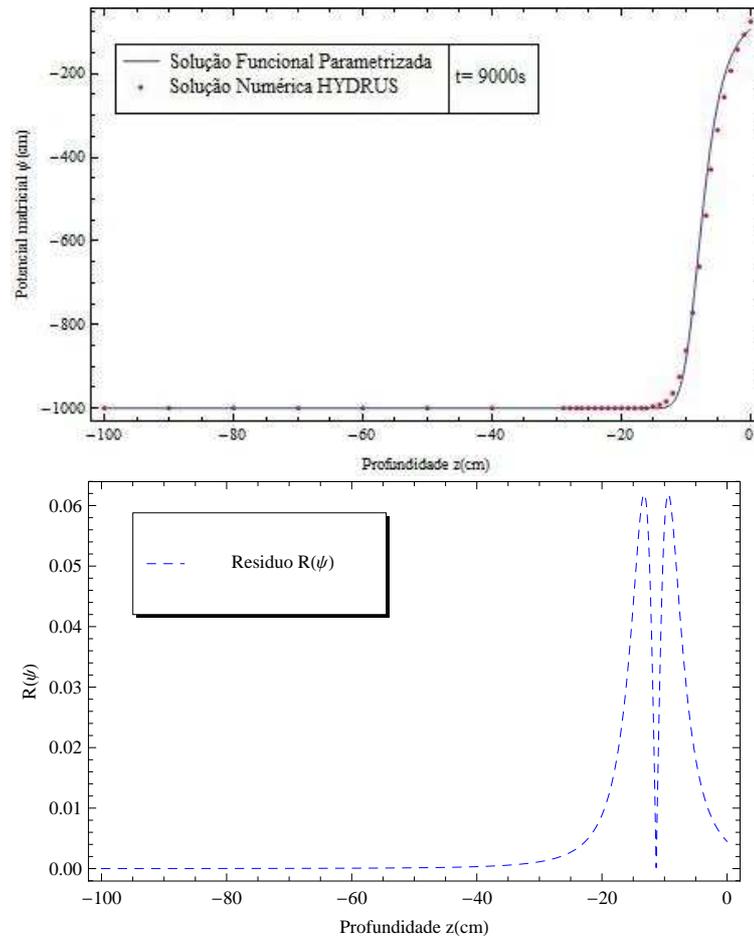


Figura 7.9 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo barro-argilo-siltoso (9).

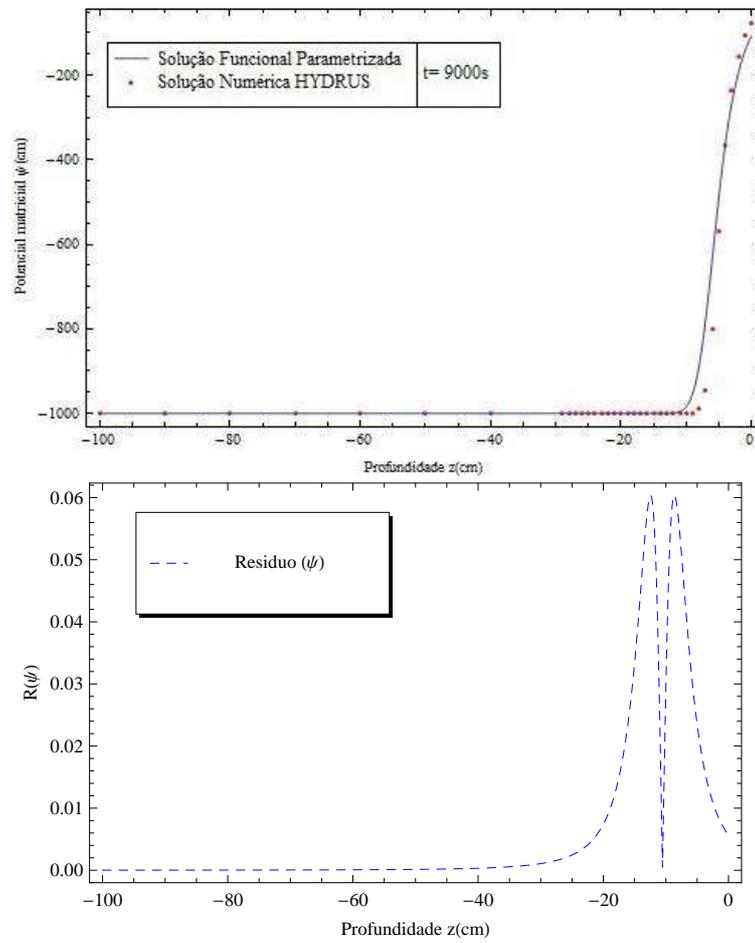


Figura 7.10 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo argilo arenoso (10).

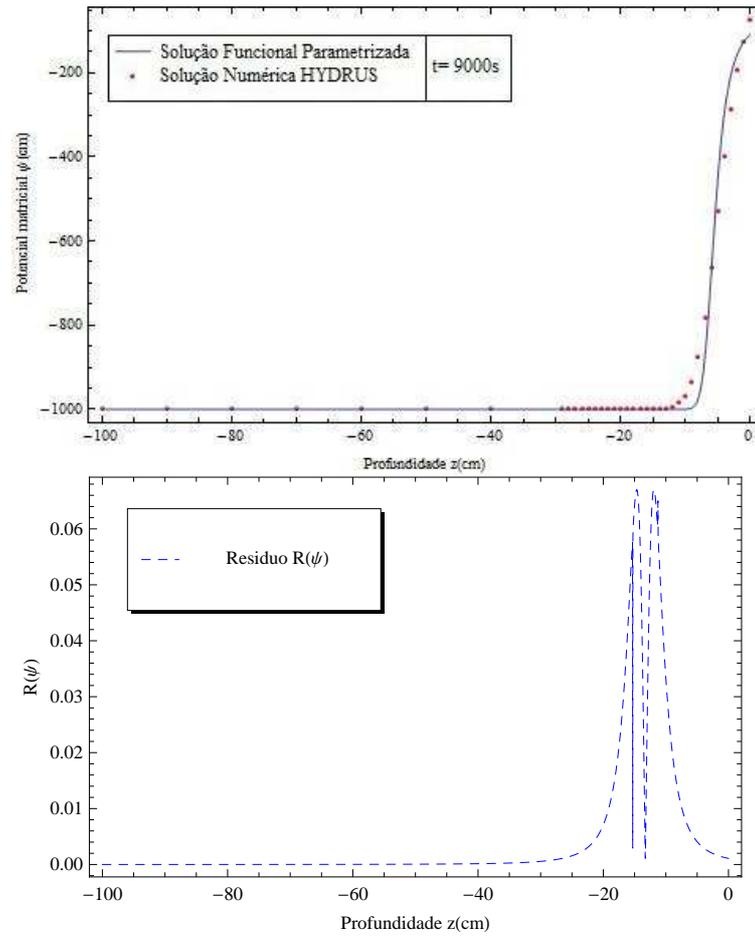


Figura 7.11 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo argilo siltoso (11).

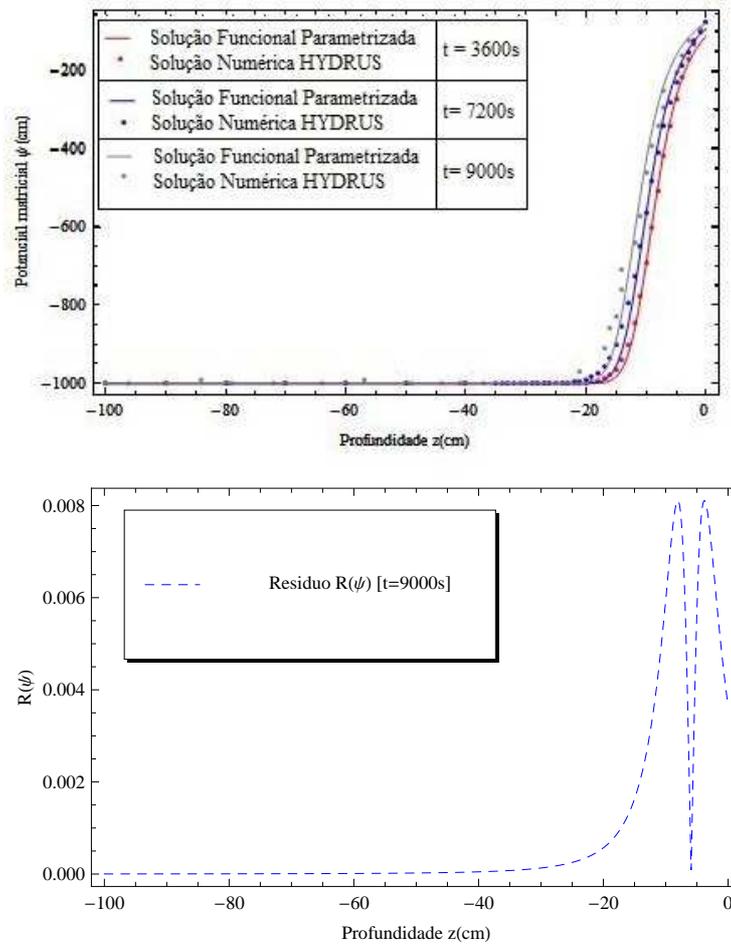


Figura 7.12 – Perfil de potencial matricial e teste de auto-consistência em um solo argiloso (12).

parametrizada já reproduz com justa fidelidade a solução exata. Além disso, em virtude de o modelo ser uma idealização com seu erro de modelo inerente, nenhum refinamento adicional é necessário.

## 8 CONCLUSÕES

Analisamos um problema de fluxo transiente de água em meio não saturado, representado matematicamente pela equação de Richards. Utilizamos um método de solução funcional otimizada e avaliamos sua precisão usando um critério de auto-consistência. Um outro teste foi realizado, comparando os resultados do potencial matricial por nossa fórmula otimizada contra o perfil de simulação de *benchmarks* para doze tipos de texturas de solo. É notável que, embora a equação de Richards seja altamente não-linear e a condição inicial singular, embora a fórmula da solução seja compacta fornece resultados razoavelmente bons em todos os casos de solo considerados. Assim, pode-se dizer que para parâmetros de solo fisicamente relevantes e para fins práticos, pode-se reivindicar "universalidade" da nossa fórmula de solução para a equação de Richards. Isto é ainda mais surpreendente, uma vez que alguns dos parâmetros do solo variam consideravelmente de um tipo de solo para outro. Assim, a umidade residual  $\theta_r$  varia em uma ordem de magnitude, o parâmetro  $\alpha$ , Tabela 7.1, na saturação efetiva varia em uma ordem de magnitude, o coeficiente exponencial  $n$  varia em um fator de três e a condutividade hidráulica de saturação varia em três ordens de magnitude e não parece haver necessidade de refinar a fórmula da solução por um termo de recursão adicional. Dentro do erro do modelo resultante de idealizações que levam à equação de Richards, podemos dizer com segurança que nossa fórmula compacta é capaz de simular eficientemente um fluxo unidimensional de água em meios porosos não saturados.

Estas conclusões são corroboradas pelas observações de que a solução parametrizada, que foi apresentada na Equação (7.1), quando otimizada pelo método dos mínimos quadrados e pelo método de Newton-Raphson, deu bons resultados para o perfil de potencial matricial em todos os doze casos, como indicado pelo teste de auto-consistência que acusou apenas pequenas diferenças entre a solução verdadeira e parametrizada. Além disso, mesmo para outras composições de solo e seus conjuntos de parâmetros associados não mostrados nesta contribuição, a fórmula de função hiperbólica foi provada uma aproximação bastante boa. Enquanto não houver novas hipóteses nos problemas de fluxo em meios porosos que poderiam alterar a estrutura das funções de condutividade hidráulica e capacidade, a solução fornecida pode ser considerada simples e, dentro de incertezas existentes, descrição suficientemente precisa do fenômeno.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adomian, G., 1988. **"Nonlinear stochastic systems theory and applications to physics"**. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Adomian, G., 1994. **"Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method"**. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Baker, G. A., 1975. **"Essentials of Padé Approximants"**. Academic Press, New York, 1 edition.
- Basha, H. A., 1999. "Multidimensional linearized nonsteady infiltration with prescribed boundary conditions at the soil surface", **Water Resources Research**, vol. 35(1), pp. 75–83.
- Basha, H. A., 2002. "Burgers equation: A general nonlinear solution of infiltration and redistribution", **Water Resources Research**, vol. 38(11), pp. 29.1–29.9.
- Biassusi, M., 2001. **"Simulação do Movimento da água no solo utilizando modelo numérico"**, Tese de doutorado, Programa de Pós Graduação em Ciência do Solo, UFRGS.
- Brooks, R. H. and Corey, A. T., 1964. **"Hydraulic Properties of Porous Media"**. Hydrol. paper 3., Colorado State University.
- Carsel, R. F. and Parrish, R. S., 1988. "Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics.", **Water Resources Research**, vol. 5, pp. 755–69.
- Celia, M. A., Bouloutas, E. T., and Zarba, R. L., 1990. "A general mass conservative numerical solution for the unsaturated flow equation", **Water Resources Research**, vol. 26(30), pp. 1483–1496.
- Chen, J. M., Tan, Y. C., Chen, C. H., and Parlange, J. Y., 2001. "Analytical solutions for linearized Richards equation with arbitrary time-dependent surface fluxes", **Water Resources Research**, vol. 37(4), pp. 1091–2001.
- Fuertes, C., Haverkamp, R., and Parlange, J., 1992. "Parameter constraints on soil water characteristics. In: Van Genuchten MT, Leiji FJ, Lund LJ, editors. Indirect methods for

- estimating the hydraulic propeirts of unsaturated soils, US Salinity Laboratory.”, **Univarsity of California, Riverside, CA 82521, USA**, pages 161–167.
- Gardner, W. R., 1958. ”Some Steady State Solution of Unsaturated Moisture Flow Equations with Application Evaporation from a Water Table”, **Soil Science**, vol. 85, pp. 228–232.
- Genuchten, M. T., 1980. ”A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conduitivity of Unsaturated Soils”, **Soil Science Society of America Journal**, vol. 44, pp. 892–898.
- Harr, M. E., 1964. ”**Groundwater and Seepage**”. Hydrol Paper 3, Fort Collins, Colorado State University.
- Ippisch, I., Vogel, H. J., and Bastian, P., 2006. ”Validity limits for the van genuchten-mualen model and implications for parameter estimation and numerical simulation”, **advances in water resources**, vol. 29, pp. 1780–1789.
- Libardi, P. L., 2005. ”**Dinâmica da água no solo**”. Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Lomen, D. O. and Warrick, A. W., 1978. ”Time-dependent solutions to the one-dimensional linearized moisture flow equation with water extraction.”, **Journal of Hydrology**, vol. 39, pp. 59–67.
- Marcel, G. S. and Van Genuchten, M., 2005. ”A modified mualen-van genuchten formulation for improved description of the hydraulic conduitivity near saturation”, **Vadose zone journal**, vol. 5, pp. 27–34.
- Mualen, Y. A., 1976. ”A new model for predicting the hydrolic conductivity of unsaturated porous media.”, **Water Resources Research**, vol. 12, pp. 513–522.
- Nasser, M., Daneshbod, Y., Pirouz, D. M., Rakhshandehroo, G. R., and Shirzad, A., 2012. ”New analytical solution to water content simulation in porous media”, **Journal of irrigation and drainage engineering**, vol. 138(4), pp. 328–335.
- Nasser, M., Pirooz, M. D., and Shirzad, A., 2010. ”Investigation of water content simulation in porous media: applocation of traveling wave solution”, **Proceeding of the first international conference on mathematics and statistics**, vol. Sharjah, U. A. E, pp. 18–21.

- Nasserri, M., Shaghaghian, M. R., Daneshbod, Y., and Seyyedean, H., 2008. "An Analytic Solution of Water Transport in Unsaturated Porous Media", **Journal of Porous Media**, vol. 11(6), pp. 591–601.
- Pamuk, N., 2006. "Series solution for porous medium euqation with a source term by Adomian's decomposition method", **Applied mathematics and computation**, vol. 178, pp. 480–485.
- Pamuk, S., 2005. "Solution of the Porous Media Equation by Adomian Decomposition Method", **Physical Letters A**, vol. 344, pp. 184–188.
- Polyanin, A. D. and Zaitsev, V. F., 2003. "**Handobook of Nonlinear Partial Diferential Equations.**". Chapman and Hall/CRC.
- Richards, L. A., 1928. "The usefulness of capillary potential to soil moisture and plant investigators", **Journal Agricultural Research**, vol. 37, pp. 719–742.
- Sander, G. C., Parlange, J. Y., Kuhnel, V., Hogarth, W. L., Lockington, D., and O'Kane, J. P. K., 1988. "Exact nonlinear solution for constant flux infiltration", **Journal of Hydrology**, vol. 97, pp. 341–346.
- Serrano, S. E., 1998. "Analytical decomposition of the nonlinear unsaturated flow", **Water resources research**, vol. 34 (3), pp. 397–407.
- Srivastava, R. and Yeh, T. C. J., 1991. "Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils", **Water Resources Research**, vol. 27(5), pp. 753–762.
- Vogel, T., Van Genuchten, M. T., and Cislserova, M., 2001. "Effect of the shape of the soil hydraulic functions ner saturation on variably-saturated flow predictions.", **Advances in water resources**, vol. 24, pp. 133–144.
- Wendland, E. C., 1991. "**Simulação de Infiltração em Meios Porosos por Diferença Finita**", Dissertação de mestrado, Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, UFRGS.

Zlotnik, V., Wang, T., Nieber, J. L., and Simunek, J., 2007. "Verification of numerical solutions of the Richards equation using a traveling wave solution", **Advances in water resources**, vol. 30, pp. 1973–1980.