UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

DAFNE ATZ

A ANÁLISE COMBINATÓRIA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PORTO ALEGRE
2017

DAFNE ATZ

A ANÁLISE COMBINATÓRIA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana

PORTO ALEGRE

2017

DAFNE ATZ

A ANÁLISE COMBINATÓRIA NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Marilaine de Fraga Sant'Ana

Dissertação aprovada pela banca em 18/05/2017.

Banca Examinadora

____

Profª. Drª. Débora da Silva Soares (IME/DMPA/UFRGS)

____

Profª. Drª. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti (IME/DMPA/UFRGS)

____

Profª. Drª. Thaísa Jacintho Müller (PUC/RS)

PORTO ALEGRE

2017

AGRADECIMENTOS

À professora Marilaine de Fraga Sant'Ana, pelas maravilhosas aulas de Análise Combinatória que me instigaram a pensar nesse trabalho e pelas conversas de incentivo que nem sempre se restringiam à essa pesquisa.

Ao professor Rogério Ricardo Steffenon, que desde meu retorno ao Curso de Licenciatura em Matemática em 2010 me guiou e auxiliou, sempre me incentivando, inclusive a realizar esse aperfeiçoamento profissional.

À professora Camila Roberta Ferrão Rodrigues, por me permitir trabalhar ao seu lado em mais de uma ocasião, e ser uma das pessoas que sempre me inspirou a ser uma professora melhor.

Aos meus colegas de mestrado Platão, Kátia e Laís, pelo apoio e por tornarem minhas segundas-feiras de UFRGS mais divertidas.

Ao Colégio Sinodal, por permitir que eu realizasse a pesquisa dentro de sua unidade e proporcionar colegas de trabalho maravilhosos.

Às minhas amigas, que sempre estiveram ao meu lado, fosse com um "*xingão*" ou uma palavra de apoio.

To my boyfriend, who always encouraged me and made my days better despite the distance.

E, por fim, mas não menos importante, à minha família, em especial a minha mãe, que sempre lutou por mim e é meu exemplo.

“The most memorable people in life will be the friends who loved you when you weren't very lovable.”
Aidan Chambers

RESUMO

Esta dissertação apresenta o desenvolvimento de uma pesquisa referente ao ensino da Análise Combinatória, por meio da Resolução de Problemas, em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental. Para isso, elaborou-se uma sequência didática que buscava proporcionar aos educandos um contato com esse conteúdo antes do Ensino Médio. A partir dessa sequência analisou-se como a Resolução de Problemas, segundo Onuchic e Allevato, auxiliou os alunos a compreender os conceitos iniciais de Análise Combinatória, buscando também como referencial teórico o estudo referente ao Pensamento Matemático, de David Tall. Concluímos que a Resolução de Problemas auxiliou a expandir e modificar as Imagens dos Conceitos que os alunos possuíam com relação à Análise Combinatória.

Palavras-chave: Pensamento Matemático, Resolução de Problemas, Análise Combinatória, Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This dissertation shows the development of research related to teaching Combinatorics, through Problem Solving, at a 6th grade level. A lesson plan was prepared and aimed to confront students of middle school with problems involving Combinatorics, allowing them to work with such concepts before high school. Based on this lesson plan, our intent was to verify how Problem Solving, according to Onuchic e Allevato, helped the students to understand initial concepts of Combinatorics. Also, using David Tall's studies about Mathematical Thinking as reference. We could verify that the Problem Solving Theory helped the students to expand and modify their Concept Images related to Combinatorics.

Key-words: Mathematical Thinking, Problem Solving, Combinatorics, Middle School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Iniciei como professora de Matemática no Ensino Fundamental em 2011, ficando um ano afastada, devido estudos realizados no exterior, e retomei a profissão em 2014. Durante este percurso como docente, percebi que alguns alunos apresentavam dificuldade em compreender problemas que envolvessem os conceitos iniciais de Análise Combinatória. Além disso, muitos dos livros utilizados em pesquisa para elaboração de aulas, pareciam ter lacunas quando se falava em Combinatória, deixando o ensino deste conteúdo muito vago.

Os livros didáticos utilizados muitas vezes mostram a Análise Combinatória como uma parte da multiplicação, em que precisamos saber quantas combinações uma menina pode fazer dispondo de cinco blusas e três saias, por exemplo. Alguns problemas mais “sofisticados” diziam que as duas peças não poderiam ser de mesma cor, porém, a Análise Combinatória vai muito além de determinar combinações de saias e blusas. Ao meu ver, em alguns dos livros didáticos consultados de 7º, 8º, e 9º ano, Análise Combinatória é pouco abordada, sendo o conteúdo restringido aos livros do 6º ano, dentro da multiplicação, na parte de “Operações com os Números Naturais”, portanto, percebo que os livros didáticos parecem não ter se apropriado da abrangência que a Análise Combinatória proporciona.

Retomando a situação dada, de saias e blusas, as formas de abordar o problema são variadas, possibilitando na sala de aula pensamentos diferentes, linhas de raciocínio diversas e um diálogo enriquecedor para os alunos. Podemos abordar caso a caso (cor a cor) ou ainda subtrair as combinações que não queremos, mas ambas situações despertam nos alunos formas de enfrentar e resolver situações que lhe são propostas, buscando alternativas e saídas para os mais diversos problemas.

Uma vez que o conteúdo parece ser pouco trabalhado, por livros e/ou professores, o aluno chega no ensino médio tendo que assimilar todas essas ideias e conceitos, sem ter contato prévio nenhum, o que muitas vezes geram dúvidas e barreiras.

Morgado (1991) diz que “a Análise Combinatória tem sido frequentemente indicada por professores do 2º grau como sendo a parte da Matemática mais difícil de ensinar” (p. IX), o que acredito, pudesse ser evitado se fosse trabalhada mais cedo na educação básica.

Portanto, elaborou-se uma sequência didática que buscava atividades que expusessem o aluno aos conceitos da Análise Combinatória, possibilitando-os se familiarizar desde cedo com formas de abordar problemas deste formato, estimulando seu raciocínio através de situações problema, sem que se faça necessária a formalização de conceitos.

Todos os registros coletados foram organizados para que, a partir da análise desses, fosse discutida a questão norteadora deste trabalho: "*Como a Resolução de Problemas pode auxiliar alunos de 6º ano a compreender os conceitos de Análise Combinatória?"*. Os registros dos alunos tinham por objetivo nos auxiliar a compreender o raciocínio do educando, para que fosse possível averiguar como a resolução de problemas os auxiliou na compreensão da Análise Combinatória.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

O Pensamento Matemático é "formular, modificar, refinar, revisar problemas e soluções, se especializar em casos simples, generalizar através de uma especialização sistemática, procurar padrões, conjecturar, testar e justificar" (TALL, YUSOF; 1994; p.2, tradução própria[1]). É o que auxilia o aluno (e todos nós) a fazer as ligações necessárias para que ocorra a compreensão dos conceitos apresentados à nossa frente. David Tall (2013) em *Como os Humanos Aprendem a Pensar Matematicamente*[2] busca responder como podemos melhorar o ensino e aprendizagem em um mundo no qual para alguns a matemática é algo fascinante enquanto para outros é fonte de uma grande ansiedade.

Entender como os nossos alunos pensam é o passo inicial para que possamos auxiliá-los nas dificuldades e dúvidas que surgem. Tentamos sempre introduzir um novo conteúdo com questionamentos, exemplos, perguntas que instiguem nos alunos a curiosidade por compreender algo novo, para estimulá-los a ver a necessidade da matemática ao seu redor. Nem sempre temos como introduzir todos os conteúdos matemáticos dessa forma, uma vez que sua utilização é em um campo muito mais complexo do que o dia-a-dia de nossos educandos, mas não é por isso que deixamos de tentar mostrar aos nossos alunos o nosso próprio fascínio pela matemática.

Quando estimulamos os alunos a ler e interpretar uma situação, queremos que a partir de seus conhecimentos prévios, ele busque novos meios de trabalhar com essa nova situação que lhe é imposta. Nesse momento, o aluno pode buscar padrões, perceber semelhanças e diferenças no que já sabe e tirar suas próprias conclusões. É através de um trabalho em conjunto, de professores e alunos, que tentamos atingir esse objetivo.

---

[1] "[…] formulating, modifying, refining, reviewing problems and their solutions, specialising to simple cases, generalizing through systematic specialisation, seeking patterns, conjecturing, testing and justifying."

[2] How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics, David Tall, 2013

1.1 O Pensamento Matemático

A *Imagem do Conceito* consiste em associações feitas em nossa mente quando entramos em contato com estímulos e novos conceitos, cada indivíduo cria o seu, é o produto da experiência e atividade mental.

> Usaremos o termo *imagem do conceito* para descrever a estrutura cognitiva total associada a este conceito, que inclui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL; VINNER, 1981, pg. 152, tradução de Giraldo[3])

A Imagem do Conceito é trazida com profundidade por Shlomo Vinner (2002) em um dos capítulos de *Pensamento Matemático Avançado*[4], editado por David Tall (2002). Somos constantemente expostos a esses novos estímulos e conceitos e o autor destaca alguns pontos importantes que podem auxiliar o aluno, tal como dizer o *Nome do Conceito.* Evocar esse nome, traz em cada indivíduo uma imagem, impressão ou memória diferente, é um estímulo para a nossa memória, uma vez que essa Imagem não é algo verbal, e sim uma figura mental, impressão ou experiência.

Quando apresentados um novo conteúdo, podemos concluir equivocadamente alguns conceitos, o que futuramente pode se tornar um problema para o aprendizado pois pode gerar obstáculos cognitivos.

Além da Imagem do Conceito, que é uma forma de pensar a respeito de determinado conceito, temos também a *Definição do Conceito*, que é a definição formal do mesmo.

Esses são dois aspectos importantes no ensino de matemática. Enquanto um se refere à impressão que temos de um conceito, o como o compreendemos, o outro é a definição aceita pela comunidade matemática, a que queremos que nosso aluno compreenda.

Ainda no livro *Pensamento Matemático Avançado*, David Tall (2002) reuniu a contribuição de diversos autores, que nos permitem ver essa preocupação com o

---

[3] "We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures." GIRALDO, V. Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada. Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

[4] Advanced Mathematical Thinking, David Tall, 2002.

Conceito. Deyfrus (2002) traz que diversas representações mentais de um mesmo conceito, quando conectadas podem se complementar, e eventualmente se integrar em uma única representação. Esse processo permite que o indivíduo possa acessar esse conceito, variando a representação, compreendendo o mesmo através de diferentes interpretações. “Apesar de ser importante ter várias representações de um mesmo conceito, a existência deles sozinha não é suficiente para permitir seu uso flexível na resolução de problemas” (DEYFRUS, 2002, p. 32, tradução própria[5]). Um indivíduo não tem como usar todas essas representações se elas não estivem conectadas de forma coerente.

A *Formação do Conceito* ocorre a partir de experiências vividas pelo indivíduo, adquirir um conceito significa formar uma Imagem do Conceito. Definições podem auxiliar a construir uma Imagem do Conceito, mas depois que essa imagem está formada, as definições se tornam desnecessárias, essa definição fica inativa na memória do indivíduo até que seja evocada.

Vinner (2002) considera que a *Imagem do Conceito* e *Definição do Conceito* são dois grupos na estrutura cognitiva de um indivíduo. Esses dois grupos podem ter interação, mas também podem ser formados independente um do outro, e é nesse momento que surgem conflitos no aprendizado. Quando Imagem e Definição são construídas juntas elas vão se conectando, e normalmente o que acontece em nossas salas de aula é que os professores esperam que a Imagem seja adquirida a partir da Definição, quando na verdade deveria ser um processo simultâneo.

Perguntas diretas, como “O que é uma possibilidade?” servem para que possamos verificar a Definição de Conceito que a pessoa possui, porém para sabermos a Imagem do Conceito, uma pergunta indireta é mais aconselhada. Isso ocorre, pois, a Definição é algo verbal e explícito, enquanto a Imagem pode ser o oposto.

Definições e teoremas que levaram anos para serem formalizados, com a contribuição de diversos matemáticos e físicos, são repassados aos alunos em poucas aulas, enquanto na verdade, o professor poderia elaborar uma sequência didática que auxiliasse o aluno a construir e compreender tais conceitos. As vezes quando se começa com a lógica matemática, e o conteúdo se torna difícil para o aluno,

---

[5] Although it is important to have many representations of a concept, their existence by itself is not sufficient to allow flexible use of the concept in problem solving.

o professor pensa que tais dificuldades podem ser devido à falta de conteúdos prévios ou falta de interesse do educando.

Currículos fixos, nos quais o professor segue um roteiro do que deve ser ensinado, funcionam muito bem para “vencer o conteúdo proposto”, porém não permitem que alunos que não possuem a “atitude matemática” aprendam. Essa atitude matemática que Deyfrus (2002) traz em seu capítulo dentro de *Pensamento Matemático Avançado*, se refere aos alunos que tem uma natureza investigativa, que gostam de matemática sem o professor fazer esforço. Ervynck (2002) coloca que muitos matemáticos não compartilham a criatividade envolvida na resolução de problemas e teoremas, e na matemática, a criatividade é um fator muito importante, o que vai ao encontro do que Deyfrus (2002) defende, que as atividades para os alunos devem ser elaboradas de forma a proporcionar a descoberta, o trabalho com a intuição, a conferência de resultados.

Criatividade é o como as ideias mais sutis são criadas na mente do pesquisador, enquanto a prova matemática é o como essas ideias são organizadas, para que elas possam ser verificadas e aprovadas pela comunidade matemática.

> Entretanto, existe uma enorme diferença entre a maneira como as ideias são construídas cognitivamente e a forma como elas são organizadas e apresentadas em uma ordem dedutiva. Isso nos alerta que simplesmente apresentar a teoria matemática como uma sequência de definições, teoremas e provas (como normalmente acontece em cursos universitários) pode mostrar a lógica da estrutura matemática, mas falha em permitir o desenvolvimento psicológico da mente humana. (TALL, 2002, p. xiv, tradução própria[6])

Deyfrus (2002) ainda traz que a maioria dos alunos decora o processo para reproduzir em problemas parecidos; o mesmo que um computador faz, porém de forma mais lenta. É a arte de reproduzir o que foi feito pelo professor na frente da turma, sem se preocupar em compreender o porquê. E utilizando como exemplo o cálculo de integral o autor ainda ressalta que:

> A discrepância entre a expectativa do professor e a performance do aluno em tais tarefas ocorre porque nós, enquanto professores, normalmente não

[6] However, there is a huge gulf between the way in which ideas are built cognitively and the way in which they are arranged and presented in a deductive order. This warns us that simply presenting a mathematical theory as a sequence of definitions, theorems and proofs (as happens in a typical university course) may show the logical structure of the mathematics, but it fails to allow for the psychological growth of the developing human mind.

> percebemos o quanto da nossa experiência com conceitos e processos matemáticos nós utilizamos. (DEYFRUS, 2002, p. 28, tradução própria[7]).

A ideia dita anteriormente, de propor aulas que possibilitem a interação dos alunos, permite que, se o conceito não for muito complicado, possamos abrir para que os alunos criem suas próprias definições. Com essa ideia não buscamos fugir do rigor matemático, das provas e definições aceitas pela comunidade matemática, mas proporcionar ao aluno a exposição de suas ideias e de sua forma de compreender um conceito novo.

Em *Pensamento Matemático Avançado*, Vinner (2002) diz não acreditar na “matemática para todos”, e com isso defende que o ensino de uma definição formal apenas se faz necessário quando o aluno tem a habilidade necessária para compreender e usá-lo, e normalmente esses são os alunos que buscam um ensino avançado em matemática. Concordamos com o pensamento de Vinner no sentido de que a matemática deve ser ensinada para todos, mas aprofundada por aqueles que demonstram interesse. Impor aos alunos a formalização da matemática não os faria gostar mais da disciplina, poderia até gerar “desgosto”, uma vez que muitos alunos memorizariam definições e teoremas, reproduzindo-os sem realmente aprendê-los.

O maior problema acontece quando os alunos operam em um ritmo de memorização:

> Nós também percebemos que é possível que alunos com dificuldade operem em uma terceira, e subsequentemente desastrosa, maneira que simplesmente envolve relembrar as novas ideias como uma nova coleção de informações a serem memorizadas e adicionadas ao conhecimento já existente sem nem mesmo tentar integrar ao conhecimento antigo. (TALL, 2013, p. 13, tradução própria[8])

Nessa situação, não ocorre uma reconstrução dos conceitos que o aluno possui e novos conceitos vão sendo apenas memorizados, e com isso, conceitos que deveriam ser aprimorados agora são sobrepostos causando conflito.

Tall (2013) traz que as pessoas constroem as ideias através de *percepção* (parte visual), *operação* (a contagem por exemplo) e o *raciocínio* (parte mais

---

[7] The discrepancy between teacher expectations and student performance on such tasks occurs because we, as teachers, often do not realize how much of our experience with mathematical processes and concepts we use.

[8] We also note that it is possible for students in difficulties to operate in a third, subsequently disastrous, way which simply involves remembering the new ideas as an additional collection of information to be learned by rote and added to current knowledge without any attempt at integration with the old ideas.

sofisticada do pensamento), e ainda que existem três diferentes meios nos quais o pensamento matemático se desenvolve:

> - **Corporificação Conceitual**: se constrói em percepções humanas e ações desenvolvendo imagens que são verbalizadas de forma cada vez mais sofisticada e se transforma em entidades mentais perfeitas em nossa imaginação.
> - **Simbolismo Operacional**: são as ações físicas que se tornam procedimentos matemáticos. Enquanto alguns alunos permanecem em um nível de processamento das informações, outros veem os símbolos de forma flexível como operações a serem executadas e também operadas através de manipulação e cálculos.
> - **Formalismo Axiomático**: constrói o conhecimento formal em sistemas axiomáticos especificados pelas definições de teoria de conjuntos, nos quais as propriedades são deduzidas através de provas matemáticas. (2013, p.16-17, tradução própria[9])

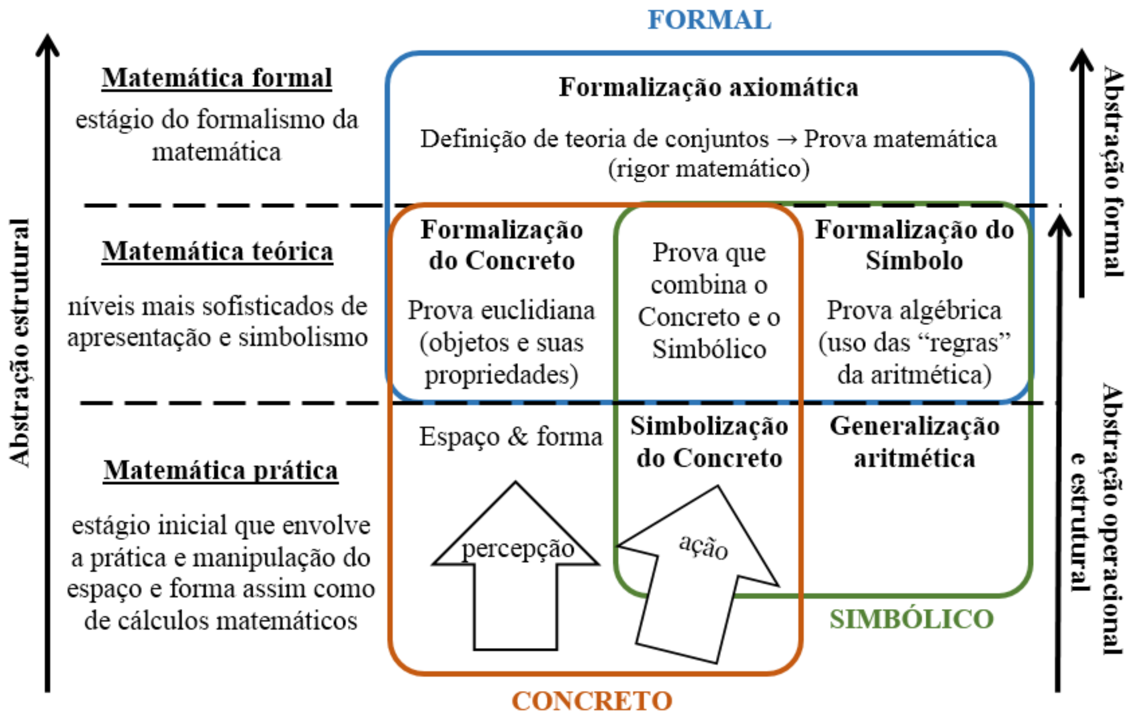
No livro *Como os Humanos Aprendem a Pensar Matematicamente*, vemos o desenvolvimento do pensamento matemático exposto em três estágios, nos quais não podemos ir para o próximo sem ter passado pelo anterior:

- Matemática prática: estágio inicial que envolve a prática e manipulação;
- Matemática teórica: níveis mais sofisticados de apresentação e simbolismo;
- Matemática formal: estágio do formalismo da matemática, do rigor da prova.

Todos estes estágios e formas de pensar juntos estão dispostos no quadro adaptado do original de Tall (2013):

---

[9] *Conceptual <u>Embodiment</u>*: build on human perceptions and actions developing mental images that are verbalized in increasingly sophisticated ways and become perfect mental entities un our imagination.
Operational <u>Symbolism</u>: grows out of physical actions into mathematical procedures. Whereas some learners may remain at a procedural level, others may conceive the symbols flexibly as operations to perform and also to be operated on through calculation and manipulation.
Axiomatic <u>Formalism</u>: builds formal knowledge in axiomatic systems specified by set-theoretic definition, whose properties are deduced by mathematical proof.



Quadro 1: Quadro relacionando os diferentes estágios do desenvolvimento do pensamento matemático, adaptado do quadro original de Tall (2013)

A partir deste quadro percebemos todos os estágios que passamos até chegarmos na formalização da matemática. A Matemática prática, se refere a fase incial da vida de cada indivíduo, na qual a manipulação de objetos é necessária para perceber padrões e compreender o mundo ao seu redor. Já a Matemática formal é um estágio mais abstrato, que se refere a prova matemática, baseada na utilização de definições e teoremas. A maioria das pessoas fica em um estágio intermediário, que é o início da Matemática teórica, no qual a manipulação deixa de ser necessária, e passamos a utilizar símbolos e operações.

Com o tempo, quanto mais estimulada a mente do indivíduo é, mais rapidamente ela consegue raciocinar. Respostas que antes precisavam ser calculadas, como por exemplo $3 + 4$, em que o indivíduo precisava contar para descobrir que a soma é 7, agora se torna um conhecimento adquirido, no qual ele *sabe* que $3 + 4 = 7$, sem passar pelo processo de contagem. Essa troca entre a "necessidade de contar" e o "saber quanto é" é chamada por David Tall (2013) de *Conceitos Imediatos*; e ele ainda ressalta que o desenvolvimento das habilidades matemáticas de um indivíduo a longo prazo não são apenas substituições de conceitos aprendidos, mas sim uma constante reconstrução das conexões mentais.

A partir disso, busca-se uma estratégia que se encaixe com a forma de pensar do aluno, sem forçá-lo a compreender fórmulas e definiçoes pré-estabelecidas, mas o guiando e auxiliando a criar estes novos conceitos e definições, tentando evitar possíveis formas de se referir à matemática que possam gerar conceitos conflitantes com informações futuras.

As habilidades necessárias para o pensamento matemático avançado, ou simplesmente a matemática, não são exclusivos dessa área, “a *abstração* é utilizada em física, *representações* na psicologia, *análise* na economia e *visualizações* em artes” (DEYFRUS, 2002, p. 26, tradução própria[10]).

O pensamento matemático avançado trazido por Tall (2002) tem inúmeros aspectos parecidos com o pensamento matemático básico. A transição entre os dois estágios fica mais clara quando olhamos para os aspectos esperados em cada nível. O pensamento matemático básico envolve *descrever, convencer* e *coerência,* enquanto o pensamento matemático avançado, respectivamente precisa *definir, provar* e compreender as *consequências.*

Pensamento Matemático Básico	Pensamento Matemático Avançado	O que é esperado do aluno em determinado nível de compreensão
Descrever	Definir	Inicialmente é esperado que o aluno saiba descrever os objetos vistos, fazendo comparações e criando conceitos a partir da intereção com o meio ao seu redor. Já no pensamento avançado, espera-se que o aluno já saiba definir os objetos analisados utilizando nomenclaturas próprias da matemática.

[10] Abstractions are made in physics, representations are used in psychology, analysis is used in economics and visualization in art.

Convencer	Provar	Em um primeiro momento da vida do invidíduo, ele se convence que determinados objetos possuem as mesmas características, que a contagem de objetos é uma soma, etc. enquanto mais a frente ele já deve ser capaz de provar se baseando em definições e lógica matemática.
Coerência	Consequências	O indivíduo, no seu estágio inicial de aprendizagem busca apenas coerência nos fatos que lhe são apresentados. No pensamento matemático avançado, o indivíduo precisa enxergar as consequências que que ele apresenta, baseando-se em abstrações feitas através da deduções da matemática formal.

Quadro 2: Comparação realizada pela autora entre Pensamento Matemático Básico e Avançado

1.1.1 “*Set-before*” e “*Met-before*”

Os conceitos adquiridos e formados na mente de um indivíduo, como dito antes, influenciam nos próximos passos de sua educação. Isso não ocorre apenas na matemática, mas em todas as áreas de conhecimento. O desenvolvimento de nosso pensamento depende de nossa capacidade sensorial para reconhecer padrões, semelhanças e diferenças nos objetos; nossa capacidade motora para manipular tais objetos e através de repetições compreender como funcionam; e nossa habilidade para a linguagem, que é o que nos diferencia das outras espécies. Nossa habilidade para a linguagem na matemática inclui símbolos, que nos permitem nomear, falar a respeito e fazer conexões mentais criando uma estrutura de conhecimento.

Em *Como os Humanos Aprendem a Pensar Matematicamente*, David Tall (2013) faz um jogo com as palavras *set* (relacionada ao verbo estabelecer), *met* (relacionada a verbo encontrar) e *before* (antes/anteriormente). O autor traz que nossas estruturas mentais e nossa capacidade de aprender estão ligadas ao que ele chama de *Set-Before* e *Met-Before*, o primeiro diz respeito à estrutura mental que nasce conosco e amadurece ao longo da vida, é algo pré-estabelecido, e o segundo é a estrutura mental que temos em nosso cérebro em determinado momento, é o resultado de experiências prévias, é o que encontramos no decorrer de nossa vida. As vezes um *Met-Before* existente pode causar conflito com um novo conhecimento encontrado, causando o sentimento de “algo não está certo”, o que pode ser extremamente válido se trabalhado, pois poderia gerar assim uma expansão do conhecimento existente.

Um exemplo simples de que podemos ter esse conflito ao qual nos referimos é no aprendizado da multiplicação com os números naturais, em que o resultado sempre é um número maior que os iniciais; porém, quando o aluno é confrontado com a multiplicação de números racionais por exemplo, começam a existir situações em que a multiplicação de dois números resulta em um produto menor que os fatores iniciais, gerando conflito com a informação que antes era tão clara para os alunos: multiplicar dois números resulta em um outro maior.

Todo animal possui a capacidade de reconhecer e repetir, que são *Set-Before*’s, porém a linguagem é o *Set-Before* específico do ser humano; é o que nos permite ter um pensamento mais sofisticado.

1.2 A Resolução de Problemas

Conforme Onuchic e Leal Junior (2016), a Resolução de Problemas pode ser vista de três maneiras distintas:

- Ensinar a resolver problemas;
- Teorizar sobre a resolução de problemas;
- Ensinar através da resolução de problemas.

Onuchic (2013) ressalta que o ensino de matemática através da Resolução de Problemas ganhou força no Brasil a partir de 1980, devido a uma obra do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, dos E.U.A.), que trazia artigos de diversos especialistas falando sobre o assunto. Pelo mundo todo, como Onuchic e Zuffi (2007) relatam, o estudo da matemática através da Resolução de Problemas já ganhava importância. Mesmo 20 anos depois, diversos países ainda discutiam o ensino através da Resolução de Problemas, o que acontece até hoje.

O objetivo era o mesmo ressaltado no trabalho de Onuchic e Zuffi (2007), ele não consistia em ensinar a resolver problemas, e sim, através da Resolução de Problemas, mostrar novos conteúdos e fazer descobertas junto aos alunos:

> Encaramos nossa proposta como uma metodologia, porque ela não deve ser confundida com a mera introdução de problemas de aplicação, geralmente encontrados nos finais dos capítulos dos livros-textos de Matemática. Ela consiste em apresentar aos alunos, já no início do tratamento de um dado conteúdo, uma ou mais situações-problemas que possam levá-los a raciocinar sobre a necessidade de construir novos conceitos e processos, bem como a de associar outros periféricos, que venham a se conectar numa rede de significados (MACHADO, 1996, apud ONUCHIC e LEAL JUNIOR, 2007, p.83)

Utilizando a Resolução de Problemas podemos expor os alunos ao novo, fazê-los pensar sobre a necessidade de expandir seus conhecimentos e compreender como este conhecimento é construído. Conforme Onuchic e Allevato reforçam, problema é “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas se está interessado em resolver” (2011, p. 81). Nesse mesmo trabalho as autoras expõem alguns passos[11] para se trabalhar com a resolução de problemas.

1. Preparação do Problema
2. Leitura Individual
3. Leitura em Conjunto
4. Resolução do Problema
5. Observar e Incentivar
6. Registro da Resolução na Lousa
7. Plenária
8. Busca do Consenso
9. Formalização do Conteúdo

Esses passos para o ensino através da Resolução de Problemas nos servem como guia para elaborar aulas que despertem o interesse e vontade de participar do aluno, permitindo uma interação maior de nossos educandos. Apesar dos pontos positivos que vemos, o uso dessa metodologia pode desmotivar o professor que tenta utilizá-la sem nunca ter feito algo parecido.

De acordo com o que Onuchic e Leal Junior (2016) e ainda Onuchic e Zuffi (2007) relatam, muitas vezes precisamos preparar nossos educandos para uma

[11] Sempre que nos referirmos aos passos de Onuchic e Allevato (2011) será utilizado letra maiúscula.

dinâmica de aula que irá permitir uma autonomia maior da parte deles. Todos os processos de Leitura Individual e em Conjunto, anotações das informações do problema, as discussões geradas entre os grupos, as Plenárias com a turma, são momentos que dependem não apenas do professor fazer seu papel de mediador entre educando e conhecimento, tendo esse já encontrado um problema que possa interessar a turma, mas também da vontade dos alunos em estarem dispostos a participar de tais discussões.

Com esse intuito, queremos instigar os alunos, deixá-los curiosos a participar e contribuir em um diálogo com colegas e professor:

> As interrelações entre alunos e a professora mudaram, porque os primeiros tiveram que aceitá-la, agora, como mediadora na busca pelo saber, e não mais como repositório de informações e respostas prontas, e passaram a explorar mais seus processos de “aprender a aprender”. (ONUCHIC e ZUFFI, 2007, p.95)

A Leitura Individual é importante pois é o momento em que o aluno começa a relembrar e buscar a Imagem do Conceito que pode lhe auxiliar a compreender o novo problema proposto. A Leitura em Conjunto permite que todos contribuam e compartilhem suas Imagens do Conceito, buscando assim, em grupo, uma abordagem para resolver o ‘novo’. As Imagens evocadas por cada um, quando discutidas, podem fazer com que possíveis conflitos sejam esclarecidos, permitindo que os alunos compreendam a Definição do Conceito.

Em sua escrita, Onuchic e Leal Junior (2016), trazem a ideia de Conceito, expressa de uma forma diferente à de Tall, mas ainda mantendo o mesmo foco. Eles relacionam Conceito com a produção de sentidos e a busca de significados. O significado é algo mais objetivo, um “sistema de relações”, enquanto o sentido varia de acordo com o contexto em que determinada palavra está sendo utilizada. Apesar da diferença na utilização dos termos, as ideias de Imagem do Conceito (sentido) e Definição do Conceito (significado) são praticamente as mesmas.

Sendo assim, as ideias de Onuchic e Tall se encontram de forma muito evidente, apesar do foco em níveis diferentes, Educação Básica e Ensino Superior, respectivamente. Podemos observar com facilidade que ambas nos auxiliam a compreender melhor como o nosso aluno pensa, e de que formas podemos elaborar propostas didáticas que instiguem o educando a participar ativamente das aulas, focando no seu próprio processo de aprendizagem.

1.3 O Ponto de Encontro

Os passos apresentados por Onuchic e Allevato (2011) vêm ao encontro do que Tall e Yusof (1994) trazem referente os aspectos do pensamento matemático. Conseguimos perceber as semelhanças entre os processos propostos pelos quatro autores apesar de Tall e Yusof (1994) darem mais ênfase ao raciocínio do aluno, mostrando os passos pelos quais esse passa para concluir o desenvolvimento do problema envolvido; enquanto Onuchic e Allevato (2011) englobam também os passos do professor.

No Quadro 3 podemos visualizar uma comparação feita entre ambos pensamentos. Yusof e Tall (1994) deixam claro em seu texto que esses aspectos são trabalhados em pequenos grupos (de 3-4 alunos), proporcionando discussões constantes e promovendo o aprendizado, da mesma forma que Onuchic e Allevato (2011).

<table>
<tr><th>YUSOF/TALL</th><th>ONUCHIC/ALLEVATO</th><th>O que representam</th></tr>
<tr><td></td><td>Preparação do Problema</td><td>O professor é responsável por preparar um “problema gerador” que visa construir e mostrar a necessidade de um novo conhecimento matemático que ainda não foi trabalhado.</td></tr>
<tr><td></td><td>Leitura Individual</td><td>Cada aluno faz a sua leitura.</td></tr>
<tr><td></td><td>Leitura em Conjunto</td><td>É um momento para que a leitura seja feita em grupos visando esclarecer possíveis dúvidas.</td></tr>
<tr><td>Formulação de respostas</td><td rowspan="3">Resolução do Problema</td><td rowspan="3">É um trabalho em grupo, que apenas acontece após os alunos terem total compreensão do problema proposto. Busca conduzir os alunos a construção do conteúdo planejado pelo professor.</td></tr>
<tr><td>Modificação dos resultados</td></tr>
<tr><td>Refinação das respostas/resultados</td></tr>
</table>

	Observar e Incentivar	Se refere ao professor, que deixa de ser transmissor do conhecimento e passa a ser um incentivador, estimulando o trabalho em conjunto.
Revisar problemas e soluções	Registro das Resoluções na Lousa	Os trabalhos dos grupos são socializados, independente de certos ou errados, para que em conjunto possa ser feita a análise das respostas (Plenária).
Especialização em casos mais simples	Plenária	Momento no qual os alunos analisam as suas respostas e defendem seus pontos de vista.
Procurar padrões		
Conjecturar		
Generalização	Busca do Consenso	Professor e alunos, após analisarem as respostas, concluem o resultado para o problema.
Testar		
Justificar		
	Formalização do Conteúdo	É a apresentação formal do conteúdo estruturado dentro da linguagem matemática. É o momento de trazer para os alunos a Definição do Conceito.

Quadro 3: Comparação, elaborada pela autora, entre os passos da Resolução de Problemas propostos por Onuchic e Allevato (2011) e dos passos propostos por Tall e Yusof (1994)

Uma vez que Yusof e Tall (1994) focam mais na capacidade do aluno em compreender enunciados e na resolução dos problemas propostos, aspectos como Formalização do Conteúdo não recebem tanta ênfase. Além disso, o item Generalização acaba ficando “fora de ordem”, se comparado com o que Onuchic e Allevato (2011) trazem, que propõem esse foco dentro da Busca do Consenso. Sendo assim, podemos estruturar caminhos para auxiliar nossos alunos, tentando compreender seu raciocínio e onde a dúvida surge.

Apesar de Tall e Onuchic focarem em níveis de ensino diferente, a ideia de ambos autores é a mesma “ensinar a pensar traz mais resultados”, porém é mais demorado.

2 ANÁLISE COMBINATÓRIA

O texto a seguir foi retirado de meu Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática, realizado em 2014. Ele tem por objetivo guiar o leitor através de uma breve história da Análise Combinatória, que há muitos anos é foco de estudo de diversos matemáticos.

2.1 Uma breve contextualização histórica da Análise Combinatória

O Cálculo Combinatório, como também é conhecida a Análise Combinatória, teria surgido devido à necessidade do homem de calcular maneiras seguras de vencer em jogos de azar, tais como dados e baralhos.

A primeira aparição na história parece ser o Problema 79 do Papiro de Rhind, que data de 1650 a.C.: "*Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat*[12] *de grãos; quantos itens têm ao todo?"*. Mas não há garantias quanto a resposta do problema.

Biggs, em seu artigo de 1979, relata que há uma charada datada de pelo menos 1730, e para resolvê-la há um truque:

> *Quando eu estava indo para St. Ives,*
> *Eu encontrei um homem com sete mulheres,*
> *Cada mulher tinha sete sacos,*
> *Cada saco tinha sete gatos,*
> *Cada gato tinha sete caixas,*
> *Caixas, gatos, sacos e mulheres,*
> *Quantos estavam indo para St. Ives?*

Resolução: uma vez que o narrador estava indo para St. Ives, ele encontrou no caminho o homem, as mulheres, gatos e caixas, que supostamente estariam indo para o lado oposto, o que nos possibilita duas respostas: se o narrador pergunta quem estava indo para St. Ives a resposta seria ninguém, porém se contarmos o narrador a resposta seria uma pessoa.

[12] Hekat é uma unidade de medida egípcia para grãos, que representa 4,8 litros.

Há também um problema no *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (Fibonacci), que data de 1202: "*Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?"*. Este problema poderia ou não ter gerado a charada anterior, mas não há confirmações.

De acordo com Vazquez e Noguti:

> A teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718). (VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI F.C.H.. *Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica.* Anais do VIII ENEM)

Uma das grandes contribuições de Pascal foi o "Triângulo de Pascal". Apesar de os chineses já conhecerem este triângulo muitos anos antes, foi Pascal que mostrou a maioria de suas propriedades.

2.2 Definições Importantes

As definições a seguir, retiradas em parte de Atz (2014), foram trabalhadas no decorrer dessa pesquisa e consistem nos conceitos iniciais de Análise Combinatória. Este resumo foi utilizado como base teórica para a elaboração de problemas envolvendo o raciocínio combinatório.

Definição 2.2.1. *Dizemos que o* fatorial *de um número* $n \in \mathbb{N}$ *é o produto de todos os números inteiros positivos desde 1 até* n*, ou seja,* $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ ... \cdot 1$*. Comumente colocamos estes fatores em ordem para facilitar os cálculos. Define-se, por conveniência,* $0! = 1$*.*

Definição 2.2.2. *(*Princípio da Adição*): Dados* n *conjuntos dois a dois disjuntos* $A_1, A_2, \dots, A_n$*, com* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *elementos, respectivamente, então* $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ *possui* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ *elementos.*

Exemplo 2.2.1. *Uma turma contém 15 meninas e 17 meninos. Quantos alunos há no total?*

O total de alunos é dado pela quantidade de meninas e meninos junta, logo: $15 + 17 = 31$ alunos.

Definição 2.2.3. *(*Princípio Fundamental da Multiplicação*): Se uma decisão d_1 pode ser feita de x maneiras, e para cada decisão x uma decisão d_2 pode ser feita de y maneiras, então $x \cdot y$ é o número de maneiras que podemos tomar as decisões d_1 e d_2.*

Exemplo 2.2.2. *Sabendo que, no Brasil, os automóveis possuem placas contendo 3 letras (alfabeto com 26 letras) seguidas de 4 dígitos (0, 1, 2, 3, …, 8, 9), determine quantas são as combinações possíveis sem termos o conflito de placas iguais.*

Como temos 26 opções para cada uma das três letras da placa, segue que:

$$\underbrace{26}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 1^a\ letra}} \cdot \underbrace{26}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 2^a\ letra}} \cdot \underbrace{26}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 3^a\ letra}} = 26^3 = 17\,576$$

Além disso, temos 10 algarismos possíveis para o número, que deve ser formado por 4 algarismos, logo:

$$\underbrace{10}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 1^o\ alg.}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 1^o\ alg.}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 1^o\ alg.}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 1^o\ alg.}} = 10^4 = 10\,000$$

Porém a placa com a numeração 0000 não é utilizada, o que nos tira uma das $10\,000$ opções para o número e ficamos com $10^4 - 1 = 10\,000 - 1 = 9\,999$ combinações possíveis de números com 4 algarismos.

Com isso podemos concluir que há $26^3 \cdot (10^4 - 1) = 175\,742\,424$ possíveis placas de carro no Brasil.

Exemplo 2.2.3. *Em um torneio internacional de natação participaram cinco atletas europeus, dois americanos e um brasileiro. De quantos modos distintos poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?*

Como são 3 colocações distintas e 8 atletas, temos:

$$\underbrace{8}_{\substack{atletas\\ para\ a\\ medalha\\ de\ ouro}} \cdot \underbrace{7}_{\substack{atletas\\ para\ a\\ medalha\\ de\ prata}} \cdot \underbrace{6}_{\substack{atletas\\ para\ a\\ medalha\\ de\ bronze}} = 336$$

Logo, 336 maneiras de termos as 3 colocações finais.

Exemplo 2.2.4. *Quantos anagramas de 3 letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 23 letras?*

Temos 23 opções de letras para a primeira escolha, 22 para a segunda escolha e 21 para a terceira, logo:

$$23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626$$

Portanto há $10\,626$ anagramas.

Definição 2.2.4. *(*Permutações Simples*): Dados n objetos distintos, com $n > 1$, podemos ordená-los em $n!$ modos diferentes, pois temos: n opções para na primeira seleção, $(n-1)$ para escolher o segundo objeto, $(n-2)$ opções para a terceira seleção, e assim sucessivamente, até termos apenas 1 opção e um objeto restante. Representamos a permutação simples por: $P_n = n!$.*

Um exemplo muito comum da utilização das permutações simples é quando trabalhamos com anagramas (veja exemplo 2.2.5). Anagrama é uma reorganização das letras de uma palavra ou frase, visando produzir outras palavras, utilizando todas as letras iniciais uma única vez.

Exemplo 2.2.5. *Quantos são os anagramas que podemos formar com as letras da palavra LIVRO?*

Temos cinco alternativas de letras distintas entre si, logo $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

Analisando através do Princípio Fundamental da Multiplicação, podemos dizer que:

$$\underbrace{5}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 1^a letra}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 2^a letra}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 3^a letra}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 4^a letra}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 5^a letra}} = 5! = 120$$

Exemplo 2.2.6. *Considerando a palavra CAPÍTULO, quantos anagramas podemos formar considerando que as vogais devem permanecer juntas?*

Temos 4 vogais e 4 consoantes. Queremos que as 4 vogais fiquem sempre juntas, porém, sua ordem não nos importa. Sendo assim, podemos analisar as 4 vogais como um único elemento, totalizando 5 que devemos permutar: $P_5 = 5! = 120$.

$$\underbrace{4\ vogais}_{elem.1} \cdot \underbrace{consoante\ 1}_{elem.2} \cdot \underbrace{consoante\ 2}_{elem.3} \cdot \underbrace{consoante\ 3}_{elem.4} \cdot \underbrace{consoante\ 4}_{elem.5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

Uma vez que a ordem das 4 vogais não importa, temos que considerar as diferentes ordens que elas podem assumir, pois poderíamos ter AÍOU, OUAÍ, UÍOA, etc. Sendo assim: $P_4 = 4! = 24$.

$$\underbrace{4}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 1^a\ vogal}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 2^a\ vogal}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 3^a\ vogal}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 4^a\ vogal}} = 4!$$

Como para cada uma das 120 maneiras de organizar os nossos 5 elementos, teríamos ainda 24 maneiras de organizar o elemento das 4 vogais, ficamos com

$$120 \cdot 24 = 2\,880$$

ou seja, $2\,880$ maneiras de formar esses anagramas.

Definição 2.2.5. *(*Combinações Simples*): Dados n elementos distintos, uma combinação simples é quando queremos encontrar quantos subconjuntos podemos formar com p elementos dos n iniciais ($n > p$), sem preocuparmo-nos com a ordem. Além disso, podemos enxergar a combinação simples como a forma de selecionar p elementos dos n iniciais sem que a ordem desta seleção interfira. Esta combinação é dada através da fórmula: $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (lê-se: combinação de n p a p).*

Dedução da fórmula.

Queremos escolher p elementos de n elementos disponíveis e a ordem da escolha dos p elementos não interfere nosso resultado final.

Como não estamos usando todos os n elementos, precisamos eliminar aqueles que não são utilizados, que são $n - p$. Segue que temos $\frac{n!}{(n-p)!}$ maneiras de escolher esses elementos. Além disso, a ordem dos p elementos selecionados não importa e também deve ser eliminada, ou seja, as $p!$ maneiras de ordenar esses p elementos.

Então, dividindo o número total de maneiras que podemos escolher o p dos n elementos pelo número de possíveis repetições que teríamos destes p elementos, obtemos: $C_n^p = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} . \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Logo, $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. ■

As combinações simples também são representadas em diversos livros através das seguintes notações: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ e ainda $C(p,n) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemplo 2.2.7. *Dado o conjunto* $A = \{1,2,3,4,5\}$, *quantos são os subconjuntos que podemos formar contendo 2 elementos?*

Através da fórmula:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ subconjuntos.}$$

Através de raciocínio combinatório:

Temos $5 \cdot 4 = 20$ maneiras de formar grupos com dois elementos, porém a ordem dos elementos não altera o grupo formado, eliminamos então as repetições, que são as permutações de 2 elementos:

$$2 \cdot 1 = 2$$

Logo,

$$\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10 \text{ subconjuntos.}$$

Exemplo 2.2.8. *Há 15 estações num ramal de estrada de ferro. Quantos tipos de bilhetes de passagem são necessários para permitir a viagem entre 2 estações quaisquer?*

Através da fórmula:

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15.14.13!}{2!13!} = 15.7 = 105 \text{ tipos de bilhetes.}$$

Através de raciocínio combinatório:

Como temos 15 estações e queremos conectar duas, há $15 \cdot 14 = 210$ trechos que podem ser realizados entre essas estações.

Porém, estamos preocupados com quantidade de trechos diferentes, logo não importa se estamos indo da estação ‘A’ para a estação ‘B’ ou vice-versa, então precisamos eliminar as 2 repetições de cada trecho, e com isso temos $\frac{15 \cdot 14}{2} = \frac{210}{2} = 105$ tipos de bilhetes.

Exemplo 2.2.9. *Em uma turma há 28 alunos. De quantas maneiras podemos escolher uma comissão de 4 alunos para representar a turma em uma atividade da escola?*
Através da fórmula:

$$C_{28}^{4} = \frac{28!}{4!(28-4)!} = \frac{28!}{4!24!} = \frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24!}{4!24!} = \frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{4!} = \frac{491\ 400}{24} = 20\ 475 \text{ maneiras.}$$

Utilizando um raciocínio combinatório:

Temos 28 alunos para escolher 1 primeiro a participar da comissão, 27 opções para o segundo, 26 opções para o terceiro e 25 opções para o quarto aluno:

$$28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = 491\ 400$$

Porém, a ordem dos alunos escolhidos não faz diferença, pois não há colocações nem cargos diferentes a serem preenchidos, portanto, nessas 491.400 maneiras há repetições de grupos. Devemos eliminar então as $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de organizar os 4 alunos escolhidos e teremos:

$$\frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{491\ 400}{24} = 20\ 475 \text{ maneiras.}$$

Definição 2.2.6. *(*Permutações com repetição*): Dados n objetos não distintos, com $n > 1$, seja $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ representam a quantidade de elementos repetidos, ou não, de parte destes n objetos. Então a permutação com elementos repetidos é dada através da fórmula: $P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}$.*

Dedução da fórmula.

Se fossemos utilizar combinações simples para definirmos o número de maneiras possíveis de ordenar estes n elementos, teríamos: $C_n^{\alpha_1}$ maneiras de ordenar os α_1 elementos, $C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2}$ maneiras para os α_2 elementos, …, $C_{n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k-1}}^{\alpha_k}$ para os α_k elementos restantes, ou seja:

$$P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = C_n^{\alpha_1} \cdot C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k-1}}^{\alpha_k}$$

$$= \frac{n!}{\alpha_1!\,(n-\alpha_1)!} \cdot \frac{(\,n-\alpha_1)!}{\alpha_2!\,(n-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k-1})!}{\alpha_k!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k-1}-\alpha_k)!}$$

$$= \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{k-1}!\,\alpha_k!\,0!} = \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_{k-1}!\,\alpha_k!}$$

Então $P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_{k-1}!\alpha_k!}$. ■

Exemplo 2.2.10. *Quantos são os anagramas da palavra PARALELEPIPEDO?*

Temos um total de 14 letras, porém algumas letras se repetem:

*A → 2 vezes

*P → 3 vezes

*E → 3 vezes

*L → 2 vezes

Através da fórmula temos:

$$P_{14}^{2,2,3,3} = \frac{14!}{2!2!3!3!} = 605\ 404\ 800 \text{ anagramas possíveis.}$$

Utilizando raciocínio combinatório:

Temos 14 letras, das quais algumas possuem repetições como indicado acima.

Há $14!$ maneiras de formarmos anagramas diferentes, porém precisamos eliminar as repetições das letras iguais.

A letra ‘A’ se repete 2 vezes, logo, devemos eliminar as $2!$ maneiras de troca-las de lugar.

A letra ‘P’ se repete 3 vezes, logo são $3!$ maneiras que devemos eliminar.

A letra ‘E’ se repete 3 vezes, então da mesma forma que a letra ‘P’, eliminamos $3!$ maneiras de trocar esses ‘E’s’ de lugar.

E por fim, a letra ‘L’ também se repete 2 vezes, ou seja, $2!$ maneiras a serem eliminadas.

Resultando em $\frac{14!}{2!3!3!2!} = 605\ 404\ 800$ anagramas.

3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA E ANÁLISE

3.1 Metodologia de pesquisa e ação docente

A pesquisa desenvolvida é um estudo de caso, que conforme Fiorentini e Lorenzato (2006), "busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra" (p.110). Este método de pesquisa pode utilizar vários instrumentos de coleta de dados, entre eles: entrevistas, filmagens, registros feitos pelo pesquisador ou pelos sujeitos da pesquisa.

Ponte (2006), relata que um estudo de caso pode analisar algo tanto positivo como negativo e que "o seu objectivo[13] é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador" (p.2). O autor ainda traz que estudo de caso não é um experimento, mas sim uma análise de uma situação como ela é.

O presente estudo de caso possui uma perspectiva interpretativa:

> Um estudo de caso pode seguir uma de duas perspectivas essenciais: (a) uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes e (b) uma perspectiva pragmática, cuja intenção fundamental é proporcionar uma perspectiva global do objecto de estudo, do ponto de vista do investigador, tanto quanto possível completa e coerente. (PONTE, 2006, p.12)

De acordo com Ponte (2006), estudos de caso "podem ser *analíticos,* procurando problematizar o seu objecto[14], construir ou desenvolver uma nova teoria ou confrontá-la com a teoria já existente" (p.6), ou seja, com esse estudo de caso, buscávamos criar uma sequência didática que pudesse guiar o aluno, e professores interessados, a compreender os conceitos de Análise Combinatória, investigando como ocorre esse processo, analisando juntamente do que é exposto por David Tall e Onuchic, em diversos de seus trabalhos.

O estudo envolveu alunos de uma escola particular, de classe média e média-alta do município de São Leopoldo – RS, na qual eu leciono nas turmas de 6º ano. O

---

[13] Objectivo: grafia utilizada por Ponte (2006), refere-se a objetivo.
[14] Objecto: grafia utilizada por Ponte (2006), refere-se a objeto.

grupo analisado foi uma dessas turmas, composta por 32 alunos de 10 a 12 anos de idade.

Uma sequência didática foi aplicada no segundo semestre letivo de 2016 em horário regular de aula nos períodos da disciplina de matemática. A escolha da turma foi feita devido à conveniência de horários e a pesquisa toda correu com devida autorização da Direção e da Coordenação de Ensino da escola.

Com a sequência didática elaborada, tínhamos por objetivo verificar como o aluno se apropria dos conceitos de Análise Combinatória e como a Resolução de Problemas poderia auxiliar no ensino desse conteúdo no Ensino Fundamental. O roteiro de atividades elaborado para a turma envolvia conceitos de Análise Combinatória que exigiam crescente habilidade de interpretação e análise dos problemas propostos, colocando os alunos em contato com situações problema em que o uso do raciocínio combinatório fosse necessário.

Gradativamente os problemas propostos se tornavam mais complexos, buscando possibilitar a compreensão do conteúdo proposto através da Resolução de Problemas, seguindo os passos e ideias de Onuchic e Allevato (2011), que iam ao encontro das ideias de David Tall (2013), referente ao como aprendemos matemática, e como aprendemos e criamos conceitos a partir de estímulos e situações de aprendizagem.

Todas as aulas tiveram seu áudio gravado, e o registro de resolução de problemas por parte dos alunos foi feito à mão. Essa produção escrita, junto das gravações das aulas, foi utilizada como instrumento de captação de dados para a pesquisa.

Os objetivos propostos para os alunos, ao final da aplicação da sequência didática proposta eram:

- Compreender o significado do termo “possibilidade”.
- Compreender o que são acontecimentos prováveis ou acontecimentos não prováveis.
- Compreender evento possível e evento não possível.
- Organizar as informações dadas em um problema.
- Organizar o raciocínio da contagem.
- Determinar o número de possibilidades de ocorrência de determinado evento listando as opções.

- Determinar o número de possibilidades de ocorrência de determinado evento através da multiplicação.
- Resolver situações problema que envolvam o raciocínio combinatório:
    - O conceito de fatorial de um número;
    - O Princípio da Adição;
    - O Princípio Fundamental da Multiplicação;
    - Permutações Simples;
    - Permutações com Repetição;
    - Combinação Simples.
- Diferenciar quando há necessidade de “eliminar” determinada quantidade de combinações.

3.2 Planejamento

A seguir apresentamos a sequência didática elaborada para a turma de 6º ano do Ensino Fundamental, envolvendo a Análise Combinatória. A aplicação dessa sequência ocorreu no mês de outubro de 2016, sendo que cada aula possuía 50 minutos de duração.

A partir dessa sequência, elaborou-se o Produto Final da dissertação. Contudo, destacamos que a ordem dos problemas propostos para a turma sofreu alteração ao serem colocados no Produto. Essas alterações tinham por objetivo melhorar a utilização da sequência didática.

3.2.1 Aulas 01 e 02

Nesta aula será trabalhado com os alunos o que a palavra *possibilidade* representa, assim como o que são *acontecimentos favoráveis* ou *não favoráveis*.

Iniciaremos a aula entregando a cada aluno uma folha com a pergunta: *“O que é uma possibilidade? O que significa algo ser possível?”*. A resposta dos alunos será recolhida.

Em seguida, serão realizados alguns questionamentos à turma e serão propostas três atividades, buscando exemplificar algumas ideias envolvendo a Análise Combinatória.

Questionamentos iniciais:

- Temos como saber como será o clima amanhã olhando para como foi o clima no mesmo dia do ano passado? Não!
    - Por que não? Pois não estão relacionados. Um ano não interfere no próximo.
- Em um jogo de dados, no qual o vencedor é quem tirar o número mais alto, conseguimos saber quem ganha antes das jogadas? Não!
    - Por que não? Pois não temos como prever quem tirará o número mais alto.

<u>Atividade 1</u>:

Mostrando a turma uma caixa preta e 3 bolas de cores diferentes (amarelo, verde, vermelho) colocar essas bolas dentro da caixa e questionar aos alunos:

- Temos como retirar uma bola de cor amarela da caixa? Sim!
- Temos como retirar uma bola de cor verde da caixa? Sim!
- Temos como retirar uma bola de cor azul da caixa? Não!
    - Com essa pergunta questionar aos alunos o porquê não podemos.
    - A principal resposta esperada é: “Pois não foi colocada nenhuma bola azul dentro da caixa.” Porém é esperado que algum aluno diga que não é possível.
    - Caso nenhum aluno diga que não é possível, questionar: “Era possível que retirássemos uma bola azul? Ou ainda, é possível retirarmos uma bola roxa?” Não!
- Existe a possibilidade de retirarmos uma bola vermelha? Sim!
- E de retirarmos uma bola cinza? Não!

Após essa primeira atividade será entregue uma nova folha com a mesma pergunta inicial: *“O que é uma possibilidade? O que significa algo ser possível?”*, que também será recolhida. Buscamos aqui verificar o que mudou na percepção dos alunos antes e depois da atividade.

<u>Atividade 2</u>:

Para a próxima atividade necessitaremos de uma moeda, cada aluno deverá trazer uma, independentemente do valor (ou país de origem), para que ela possa ser analisada e observada.

Questionamentos para a turma:

- Todos vocês sabem que uma moeda possui dois lados, certo? Como chamamos esses dois lados? Cara e Coroa!
    - espera-se que os alunos saibam o que é cara e o que é coroa
        - pedir que eles examinem a moeda que trouxeram e localizem onde é cara e onde é coroa
    - História:
        - antigas moedas portuguesas: ***Cara*** (rosto + valor) e ***Coroa*** (brasão ou as armas da coroa)
        - Roma antiga: "*navia aut caput*" (navio ou cabeça): navio e face do imperador
        - espanhol: "*cara e cruz*"
        - EUA: "*heads or tails*" (cabeça ou caudas)
- Se eu jogar essa moeda para cima e deixar ela cair no chão, quais são as possibilidades? Cair cara ou Coroa.
- É mais provável que caia cara ou coroa?
    - espera-se que os alunos fiquem intrigados com a pergunta, sem saber o que responder.
    - questionar por que não temos como saber. Espera-se que eles digam que "pode ser uma coisa ou pode ser outra", "a possibilidade é a mesma", "as chances são as mesmas"

Chamar um aluno para auxiliar na próxima etapa. Será lançada uma moeda e, após cair no chão, esse aluno deverá conferir se é a face voltada para cima é cara ou coroa. Antes de cada jogada pedir que os alunos digam o que acham que vai acontecer: cara ou coroa. Construir uma tabela no quadro, no qual serão marcados os palpites dos alunos assim como o "resultado" da moeda. O intuito da atividade é reforçar o que são possibilidades, eventos prováveis ou não, assim como introduzir um pouco da História da Análise Combinatória com os alunos, mostrando que ela surgiu devido à necessidade/vontade de prever e estimar o que estaria por acontecer.

<u>Atividade 3</u>:

Como já foi trabalhado com os alunos que frações também representam uma comparação de informações que relaciona o todo com uma parte, a atividade a seguir retomará esse conceito.

Com as bolas coloridas exploraremos duas situações: possibilidades e ordenação.

Primeiramente, com todas as bolas dentro da urna, os alunos serão questionados:

- Qual a possibilidade de eu retirar, sem olhar para dentro da urna, uma bola de cor amarela?
    - Como há apenas uma bola, espera-se que os alunos digam que a resposta é uma. Então perguntar: "Mas uma de quantas possibilidades?".
        - Com esses questionamentos, queremos retomar com os alunos a representação através de frações para comparações: ⅓.
- Qual a possibilidade de eu retirar, sem olhar, uma bola de cor azul? Zero!

Devolvendo a bola anterior, questionar:

- Qual a possibilidade de eu retirar, sem olhar, uma bola de cor vermelha? ⅓.

Retirar uma bola da urna, e sem devolvê-la, questionar com relação as cores que ficaram dentro da urna:

- Qual a chance de retirar uma bola verde? ½.
    - Espera-se que os alunos percebam que agora não temos mais as três possibilidades que tínhamos antes, pois uma bola está fora da urna.

Agora, após retirar todas as bolas da urna, trabalharemos com as maneiras de ordenar essas bolas em uma fila.

- De quantas formas posso colocar duas dessas bolas em ordem?
    - "uma do lado da outra"
    - "de duas maneiras"
- De quantas maneiras posso colocar três dessas bolas em ordem?
    - é esperado que alguns dos alunos saibam dizer 6, e que digam que é devido a multiplicação, porém, com as bolas coloridas e o auxílio do quadro, desenharemos as possibilidades/maneiras de dispor essas bolas em uma linha reta.

3.2.2 Aula 03

Retomaremos a aula a partir das observações dos alunos referentes as atividades 1, 2 e 3. Em seguida serão propostos os questionamentos abaixo:

- Quantos sanduíches podemos fazer dispondo de dois tipos de pão (branco e integral), três tipos de queijo (*mussarela*, lanche e *cheddar*) e 2 tipos de presunto (*prosciutto* e *jamón*)?
  - Listar as opções de montagem dos sanduíches.
  - Mostrar que para cada tipo de pão, temos 3 opções de queijo, e que para cada uma dessas opções de pão e queijo temos 2 tipos de presunto, totalizando 12 sanduíches diferentes.
- A professora Dafne fez uma questão de verdadeiro ou falso na prova. Há 4 frases verdadeiras e 6 frases falsas. Quantas respostas diferentes os alunos podem dar?
  - $2^{10} = 1024$ respostas diferentes
- Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?
  - $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagramas

Para finalizar a aula, entregar um problema que será recolhido após resolvido. Ressaltar que o problema pode ser resolvido através de cálculos, desenhos, ou até mesmo, esquemas (“da forma que eles quiserem, sem ter certo e errado”). A questão não será corrigida nessa aula, e sim na aula seguinte, quando os alunos receberem a folha com seu desenvolvimento de volta.

1. Manuela vai encomendar um bolo de aniversário para sua mãe. A padaria faz bolos de chocolate e de cenoura. Cada sabor pode vir com cobertura verde, amarela, rosa ou marrom. De quantas formas diferentes Manuela pode escolher o bolo de sua mãe?

   Resposta: $2 \times 4 = 8$ formas diferentes

3.2.3 Aula 04

Dispor os alunos em grupos de 3 a 6 alunos e continuar com a resolução de problemas.

2. O *Ristorante Pasta Nostra* deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser *fettuccine*, macarrão, espaguete, *penne* ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, *pesto* e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa?

   Resposta: $5 \times 3 = 15$ maneiras
3. Há 4 bolas de cores diferentes dispostas em cima de uma mesa (laranja, roxa, vermelha e azul). De quantas maneiras diferentes podemos reorganizá-las uma ao lado da outra?

   Resposta: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras
4. João está pedindo o café da manhã para a recepcionista do hotel. Ele pode comer ovos fritos ou mexidos. Como acompanhamento ele pode pedir uma torrada, panquecas ou bisnaguinhas. Além disso, ele ainda pode escolher um tipo de fruta. As frutas disponíveis são laranja, banana, mamão. De quantas maneiras diferentes João pode pedir esse café da manhã?

   Resposta: $2 \times 3 \times 3 = 18$ maneiras
5. Laura adora o esporte e a arte! Sua escola oferece times de basquete, futebol e vôlei; assim como clubes de teatro, música e desenho. Porém devido ao tempo ela só pode escolher um esporte e um clube para participar esse ano. De quantas maneiras Laura pode fazer essa escolha?

   Resposta: $3 \times 3 = 9$ maneiras
6. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ESTUDO?

   Resposta: $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ anagramas

Caso algum grupo/aluno não saiba como “sair do lugar” fazer questionamentos, sugerir desenhos e formas de os fazer pensar sobre o problema, sem dar resposta ou dizer como se faz. Além disso, os problemas com permutações envolvendo um número maior de objetos busca, na correção, introduzir o que significa **fatorial**.

Os problemas acima envolvem **permutações**, nessas situações será sempre enfatizado a frase “para cada”, além da utilização de desenhos em algumas das situações que envolvem um número menor de possibilidades/maneiras.

3.2.4 Aula 05

Iniciar a aula corrigindo os seis problemas iniciais trabalhados com a turma.

Em seguida continuar com as atividades, agora em duplas. Novamente os problemas serão recolhidos e devolvidos na próxima aula.

7. A professora de Teatro está fazendo uma encomenda para o novo uniforme do grupo. Ela pode escolher entre camisetas, moletons canguru ou moletons com zíper. Cada um desses pode ser vermelho ou laranja. O logo que vai nas costas pode ser impresso ou bordado. Considerando essas escolhas a serem feitas, de quantas maneiras diferentes a professora pode escolher esse novo uniforme?

   Resposta: $3\times2\times2 = 12$ maneiras

3.2.5 Aula 06 e 07

Iniciar a aula corrigindo o problema da aula anterior.

Em seguida, serão entregues outros três problemas, para serem resolvidos individualmente. Os mesmos serão recolhidos, porém devolvidos na mesma aula para correção.

8. Quantas maneiras podemos distribuir uma família de 5 pessoas em um banco para tirar uma foto?

   Resposta: $5\times4\times3\times2\times1 = 120$ maneiras

9. Marília está escolhendo um novo *skate*. O *skate* pode ser preto, branco ou marrom; as rodas podem ser rosas ou roxas. Os adesivos podem ser em formato de estrela, lobo, diamante ou raio. Quantos modelos diferentes de *skate* ela pode montar?

   Resposta: $3\times2\times4 = 24$ modelos diferentes

10. Marta irá pedir sua janta em seu restaurante favorito. Ela vai pedir uma bebida, um aperitivo, um prato principal, dois acompanhamentos diferentes e uma sobremesa. Se há 10 escolhas para bebida, cinco aperitivos, 6 pratos principais, 8 acompanhamentos e cinco sobremesas, de quantas formas diferentes ela pode solicitar sua refeição?

    Resposta: $10\times5\times6\times(8\times7)\times5 = 84\ 000$ formas

Problemas reserva:

11. De quantas maneiras 3 americanos, 4 brasileiros e 3 franceses podem sentar em fila, de modo que os de mesma nacionalidade sentem juntos?

    Resposta: $3!\times3!\times4!\times3! = 5\,184$ modos de dispor essas pessoas

12. Em uma sorveteira há 20 sabores. Quando compramos uma casquinha, só podemos colocar um sabor. De quantas maneiras 3 amigos podem fazer seus pedidos?

    Resposta: $20^3 = 8\,000$ maneiras

13. Quantos anagramas podemos formar com a palavra PERNAMBUCO?

    Resposta: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ anagramas

14. Em um grupo de CTG[15] há 8 moças e 8 rapazes. De quantas maneiras podemos formar pares para uma dança?

    Resposta: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$ maneiras

15. Quantos são os anagramas da palavra JULGAMENTOS?

    Resposta: $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11!$ anagramas

Após a correção (problemas 8, 9 e 10), será proposto o seguinte questionamento:

- Considere os algarismos 3, 5, 6 e 8.

a) Quantos números de algarismos diferentes podemos formar com os algarismos 3, 5, 6 e 8?
   - Espera-se que os alunos já tenham compreendido a multiplicação: $4\times3\times2\times1$
   - Se necessário mostrar "esquema" de como listar esses números: fixa o 3 como primeiro e daí tem tantas opções, fixa o 5 como primeiro e…

Em seguida questionar a turma:

- O que mais podemos perguntar sobre esses números?
- Que outras perguntas podemos adicionar a essa? Suponhamos que a que a professora fez é o item 'a', o que mais podemos questionar? Quem sugere o item 'b'?

---

[15] CTG: Centro de Tradições Gaúchas.

- Anotar as sugestões dos alunos no quadro e dizer que os grupos devem responder a esses novos questionamentos.

Espera-se que dentro das sugestões dos alunos surjam situações como as que seguem:

- Quantos desses números começam com o algarismo 3?
    - $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números
- Quantos desses números são maiores que 8 mil?
    - $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ números
- Quantos desses números são pares?
    - $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ números
- Quantos desses números são ímpares?
    - $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ números
- O que acontece se somarmos a quantidade de números pares e ímpares?
    - total de números
- E se, usando esses algarismos, eu quiser escrever números de apenas 2 algarismos?
    - $4 \cdot 3 = 12$ números
- Idem anterior com 3 algarismos?
    - $4 \times 3 \times 2 = 24$ números

- Sabendo que a placa dos veículos contém 3 letras seguidas de 4 algarismos, responda:

a) Quantas placas podemos formar, sendo que não podemos utilizar a 4 algarismos 0 juntos?
    - $(26 \cdot 26 \cdot 26) \times (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 1) = 175\ 742\ 424$ placas

b) Em quantas placas o zero não aparece na primeira posição?
    - $(26 \cdot 26 \cdot 26) \times (9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) = 158\ 184\ 000$ placas

c) Quantas placas podemos formar sem repetir letras ou dígitos?
    - $(26 \cdot 25 \cdot 24) \times (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) = 78\ 624\ 000$ placas

Essas perguntas visam introduzir situações nas quais nem todos os objetos são utilizados, diferente das situações trabalhadas nas aulas anteriores.

Alguns livros trazem as situações em que todos objetos são utilizados como *Permutações* enquanto situações nas quais apenas parte dos objetos é utilizada, levando em conta a ordem que são dispostos, são chamadas de *Arranjos*. Ao trabalhar com a intuição e lógica, não há necessidade do termo Arranjo, uma vez que a ideia de possibilidades para cada etapa do acontecimento é suficiente para raciocinarmos de forma coerente. As situações a seguir, que novamente serão entregues e recolhidas depois de resolvidas, trabalharão com a ideia de “organizar parte dos objetos”, quando a ordem faz diferença.

Exemplos extras:

- Para a camiseta de turma ficou combinado que cada aluno pode escolher um número de 1 a 100 para colocar nas costas de sua camiseta, porém dois alunos não podem ter o mesmo número! Sabendo que a turma possui 36 alunos, de quantas maneiras diferentes eles poderão fazer essas camisetas?
    - $100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 66 \cdot 65$

3.2.6 Aula 08

O foco da aula anterior era introduzir problemas que envolvessem permutações sem a utilização de todos os objetos, e nos quais a ordem importa.

Em seguida realizaremos problemas que envolvem essa ideia e que serão recolhidos e devolvidos apenas na próxima aula para correção.

1. Todo começo de ano cada turma escolhe um líder e um vice-líder. Sabendo que uma turma tem 30 alunos, de quantas formas diferentes podemos fazer essa escolha?

    Resposta: $30 \times 29 = 870$ formas diferentes

2. Quantos anagramas de 2 letras diferentes podemos fazer com as 26 letras do alfabeto?

    Resposta: $26 \times 25 = 650$ anagramas

3. Em uma competição de judô há 10 lutadores que podem terminar em primeiro, segundo ou terceiro lugar. De quantas maneiras diferentes podemos ter o resultado final?

    Resposta: $10 \times 9 \times 8 = 720$ maneiras

3.2.7 Aula 09

Retomar aula anterior devolvendo os problemas para que juntamente da turma eles possam ser corrigidos.

Em seguida serão entregues novos problemas envolvendo a ideia de permutação de parte dos objetos (nos quais a ordem faz diferença). Esses problemas serão devolvidos na mesma aula para a correção.

4. A professora Dafne precisa criar uma senha de 4 dígitos. Como ela é supersticiosa, ela não gosta que nenhum dos algarismos se repita. De quantas maneiras distintas ela pode criar essa senha?

   Resposta: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$ maneiras

5. Considerando as letras A, B, C, D e E de quantas maneiras diferentes podemos:

   a) ordenar 2 dessas letras?

      Resposta: $5 \times 4 = 20$ maneiras

   b) ordenar 3 dessas letras?

      Resposta: $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneiras

   c) colocar em ordem 4 letras, sendo que a primeira será sempre a letra A?

      Resposta: $(\mathrm{A})\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras

   d) colocar em ordem 3 letras, onde a primeira sempre será a letra B?

      Resposta: $(\mathrm{B})\ 4 \times 3 = 12$ maneiras

3.2.8 Aula 10

Iniciaremos a aula corrigindo problemas da aula anterior.

Após a correção será proposto no quadro o problema a seguir, que visa dar continuidade às permutações, porém dando oportunidade para gerar perguntas que levem a introduzir o conceito de combinações.

- Em uma turma há 10 alunos (6 meninas e 4 meninos). Responda:

  a. De quantas formas podemos colocar eles em fila?

  $$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

  b. De quantas formas podemos colocar apenas as gurias em fila?

  $$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$$

c. De quantas formas podemos colocar apenas os guris em fila?

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$$

Em seguida questionar a turma:

- O que mais podemos perguntar?
- Que outras perguntas podemos adicionar a essa? Já temos os itens a, b e c…quem sugere a próxima pergunta?
- Anotar as sugestões dos alunos no quadro e dizer que as duplas nas quais eles estão sentados devem responder a esses novos questionamentos.

Espera-se que dentro das sugestões dos alunos surjam situações como as que seguem:

- Quantas maneiras podemos formar um grupo de 3 pessoas?
- Quantas maneiras podemos formar um grupo de 5 pessoas?
- Quantas maneiras podemos formar um grupo com 2 meninos e 2 meninas?

Em **combinações** temos como fazer parecido ao ensino de permutações, enfatizando o "para cada", porém é necessário destacar que cada uma das combinações pode ter sido contada mais de uma vez. Por exemplo, se tenho 10 alunos e quero formar um grupo com 4, temos $10\times9\times8\times7$ maneiras de fazer isso, porém, se eu escolher Ana, Bruno, Carla e Daniel ou Carla, Ana, Daniel e Bruno, o grupo continua sendo o mesmo. Então precisamos eliminar o número de maneiras que podemos formar esse grupo $(4\times3\times2\times1)$, já que a ordem da seleção dos integrantes do grupo não altera o grupo final. E com isso temos $\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}$.

Exemplos extras que pode ser discutidos com a turma:

- Dona Cláudia comprou 5 potes de sorvete de sabores diferentes para a sobremesa do almoço em família no domingo. De quantas maneiras Jéssica, sua filha, pode escolher:
  - dois sabores diferentes? $\frac{5\times4}{2} = \frac{20}{2} = 10$ maneiras
  - três sabores diferentes? $\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = \frac{60}{6} = 10$ maneiras
- Se eu quero escolher 2 meninos e duas meninas da turma (16 meninas + 18 meninos) para uma atividade da gincana, de quantas maneiras posso fazer isso?
  - $\frac{16\cdot15}{2}\times\frac{18\cdot17}{2} = 120\times153 = 18\,360$ maneiras

3.2.9 Aula 11

Nessas aulas os alunos receberão problemas envolvendo combinação. Parte dos problemas serão recolhidos, porém devolvidos na mesma aula para correção.

1. Para participar do *Spelling Bee*[16] serão escolhidos 3 alunos de uma turma de 10 alunos. De quantas maneiras diferentes podemos formar esse time?

   Resposta: $\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$ maneiras

2. Sabe a *MegaSena*? É um jogo no qual escolhemos 6 números de 60 opções. Quantas combinações diferentes podemos criar?

   Resposta: $\frac{60\times59\times58\times57\times56\times55}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 50\ 063\ 860$ combinações

3. Devemos escolher 3 pessoas para formar o time de vôlei para o jogo das *Interséries*[17]. Como temos 32 alunos na turma, de quantas maneiras podemos escolher esse trio?

   Resposta: $\frac{32\times31\times30}{3\times2\times1} = 4\ 960$ maneiras

3.2.10 Aula 12

Após retomar os problemas da aula anterior os alunos resolverão os novos a seguir:

4. Para uma competição será necessário escolher 4 alunos de uma turma com 20 alunos. De quantas formas diferentes a escolha dos participantes dos times pode ser feita?

   Resposta: $\frac{20\times19\times18\times17}{4\times3\times2\times1} = 4\ 845$ formas diferentes

5. Em um grupo de 15 pessoas queremos selecionar uma dupla. De quantas maneiras diferentes podemos fazer essa seleção?

   Resposta: $\frac{15\times14}{2} = 105$ maneiras

---

[16] *Spelling Bee*: nome dado, na escola, à competição na qual os alunos soletram palavras.
[17] Atividade esportiva; envolve jogos em que os times são formados misturando, por nível, as turmas da escola.

Problemas extra:

6. Em um baralho de carta com 52 cartas, de quantas maneiras podemos separar 7 cartas diferentes?

   Resposta: $\frac{52\times51\times50\times49\times48\times47\times46}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 133\ 784\ 560$ maneiras

7. Há 7 meninos e 9 meninas em uma turma de inglês. Para participar da etapa final do *Spelling Bee* será escolhido dois meninos e duas meninas. De quantas maneiras diferentes podemos formar essa dupla?

   Resposta: $\frac{7\times6}{2}\times\frac{9\times8}{2} = 21\times36 = 756$ maneiras

8. Há 12 meninos e 14 meninas em uma sala de aula. Para uma tarefa da gincana serão escolhidos 3 meninos e 3 meninas. De quantas maneiras podemos formar esse grupo?

   Resposta: $\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{14\cdot13\cdot12}{3\cdot2\cdot1} = 220 \times 364 = 80\ 080$ maneiras

9. Na aula de Educação Física vamos jogar basquete. Sabendo que a turma tem 16 meninas e 18 meninos, responda:

   a) De quantas maneiras podemos escolher 2 times mistos com 5 jogadores em cada um?

      Resposta: $\left(\frac{32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\times\frac{27\cdot26\cdot25\cdot24\cdot23}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\right) : 2 = 8\ 128\ 542\ 240$ maneiras

3.2.11 Aula 13

Na última aula serão corrigidos os problemas restantes e em seguida os alunos deverão resolver a primeira questão da 2a fase da OBMEP[18] - Nível 1.

[18] OBMEP, sigla para Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

NÍVEL 1 *Respostas sem justificativa não serão consideradas*

12ª OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
OBMEP 2016
Somando novos talentos para o Brasil

1. Sem usar o algarismo 0, Carolina escreveu todos os números de três algarismos diferentes nos quais o algarismo do meio é maior do que os outros dois. Por exemplo, Carolina escreveu 241, mas não escreveu 570, nem 464, nem 123.

a) Quais são os números que Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 3?

Correção Regional | Correção Nacional

b) Quantos números Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 7?

Correção Regional | Correção Nacional

c) Quantos números Carolina escreveu ao todo?

Correção Regional | Correção Nacional

TOTAL Correção Regional | Correção Nacional

2

Figura 1: Questão 1 da 2ª fase da OBMEP (2016)

3.3 Relato e Reflexão

Separados por dia de aplicação, abaixo temos o relato das aulas, assim como a reflexão e análise dos eventos. Para manter o anonimato dos alunos envolvidos, optou-se por utilizar a primeira letra de seu nome, utilizando letras alternativas em caso de repetição. As produções destacadas dos alunos, imagens de seus trabalhos, e transcrições de suas respostas foram escolhidas baseando-se em seus erros ou acertos ou o quão diferente suas respostas foram das anteriores.

3.3.1 Aulas 01 e 02

Iniciei a aula entregando para os alunos o questionamento "*O que é uma possibilidade? O que significa algo ser possível?*". Quando os alunos foram avisados que a primeira tarefa consistia em responder uma pergunta por escrito, eles mostraram um pouco de receio, sem mesmo saber o que seriam perguntados a respeito. As primeiras manifestações foram: "Ah, não!"; "É sobre o que, *sora*?", "É de matemática?" ao que foi respondido: "É praticamente uma pergunta de português! ". Para tranquilizar os alunos, foi reforçado que não havia resposta certa ou errada, que eles deveriam responder o que eles pensavam dando sua opinião.

Após alguns minutos as respostas foram recolhidas e a turma informada que essa pergunta era relacionada com a aula do dia. Além disso, foram avisados que não iríamos ler as respostas em voz alta e que essas respostas só seriam lidas posteriormente. A partir desse momento, conversamos referente aos questionamentos iniciais (clima e jogo de dados[19]). Quando questionados referente ao clima e as possíveis previsões, os alunos disseram que temos como "ter uma ideia, mas não certeza", já com relação ao jogo de dados, quando questionados referente quem ganharia, surgiram respostas envolvendo as palavras: chances e porcentagem, porém todos concordaram que o jogo de dados era uma questão de sorte, não sendo possível prever quem ganharia o jogo.

---

[19] Clima: "Temos como saber como será o clima amanhã olhando para como foi o clima no mesmo dia do ano passado?"
Dados: "Em um jogo de dados, no qual o vencedor é quem tirar o número mais alto, conseguimos saber quem ganha antes das jogadas?" Atividade completa pode ser localizada no planejamento na pg. 38.

Percebe-se que alguns alunos já possuem determinada Imagem do Conceito formada para os termos Chances e Porcentagens. Falar em porcentagens está ligado diretamente ao ato de calcular e, apesar de os alunos demonstrarem não saber como realizar esse cálculo, o fato de terem trazido os termos para a turma nos indicam que eles são capazes de associar situações com os termos em questão. São evidências do conceito de probabilidade que já estão presentes em alguns alunos.

A próxima atividade[20] envolvia as bolinhas coloridas e uma caixa/urna. Foi mostrado aos alunos que dentro da caixa não havia nenhuma outra bolinha e que as únicas que iriam ali dentro eram: 1 amarela, 1 rosa e 1 verde. Depois de colocadas dentro da caixa os alunos foram questionados quais cores poderíamos retirar da caixa e após questionados algumas cores que não estavam ali foi perguntado o porquê, e eles responderam: “pois não tem nenhuma dessas cores ali dentro”. Tivemos uma rápida conversa dizendo que só havia a possibilidade de tirar ou não uma bolinha de determinada cor se essa cor tivesse sido colocada na caixa em primeiro lugar. E então foi entregue a mesma pergunta: “*O que é uma possibilidade? O que significa algo ser possível?*”.

Com essa atividade, era esperado que os alunos compreendessem melhor o sentido da palavra possibilidade dentro da matemática. Ao analisar as respostas dos alunos, comparando a primeira e a segunda, percebemos algumas mudanças na sua fala. Apesar de alguns alunos manterem sua visão da palavra possibilidade relacionada com algo “ser possível de fazer” e “atingir um objetivo”, percebemos algumas falas que mudaram do “poder fazer” para “chances de acontecer” ou ainda “probabilidade de acontecer”.

A aluna J havia dito na sua resposta inicial que era algo “que pode ser feito”, e na sua segunda resposta disse que “possibilidade é uma parte sorte e lógica” e completou sua resposta com um exemplo envolvendo as bolinhas coloridas e a caixa. E 6 alunos, na segunda resposta, utilizaram o exemplo das bolinhas para responder como eles viam a possibilidade agora.

A palavra *possibilidade*[21], de acordo com o Dicionário Priberam da Língua Portuguesa, significa:

“Qualidade do que pode acontecer, do que é possível”

---

[20] Atividade completa pode ser localizada no planejamento na pg. 38.
[21] “possibilidade” em *Dicionário Priberam da Língua Portuguesa*, 2008-2013, https://www.priberam.pt/dlpo/posibilidade [consultado em 02/04/2017].

Já a palavra *possível*[22] significa:

"Que se pode ser, que pode existir, que pode acontecer."

"Que se pode fazer, praticável."

Conforme dito anteriormente, a intenção com a pergunta direta era verificar qual a Definição do Conceito que os alunos possuíam. Podemos perceber através de suas respostas que alguns alunos possuíam a Definição do Conceito, enquanto outros possuíam apenas a Imagem do Conceito, uma vez que tentaram explicar o que possibilidade significava para eles através de exemplos.

Observando o trabalho dos alunos, vemos que seis utilizaram o exemplo trabalhado em aula para responder a pergunta novamente. E suas respostas primeiramente haviam sido: "é algo possível', "é ter uma chance", "querer e ter condições de fazer acontecer", "ter uma dúvida com possíveis respostas". Percebemos aqui que a Imagem do Conceito se formou na mente do aluno. Desses 6, dois já possuíam uma ideia da Definição do Conceito, e disseram que possibilidade era "algo ser possível". Apesar dos outros 4 alunos não terem a Definição do Conceito formada, sua escrita indica que ouve uma expansão do conhecimento prévio. Relembramos aqui Tall e Vinner (1981) que dizem que a Imagem do Conceito se forma a partir das experiências vividas pelo indivíduo, sendo essa experiência o dia-a-dia ou a atividade realizada.

A maioria dos alunos, na sua primeira resposta, demonstravam ter uma Imagem do Conceito formada, porém limitada a pensar que algo possível era necessariamente algo que teria que ter um resultado bom. De acordo com o aluno A, "possibilidade é algo que *poça*[23] acontecer/ser possível. Ser possível é algo que conseguimos fazer mesmo com os nossos medos". Posteriormente ele respondeu que "É algo possível. Que tem como fazer". Percebe-se que sua Imagem do Conceito se expandiu, mas ainda está limitada.

Iniciei com a turma a atividade da moeda[24], que consistia em analisar as diferentes moedas e as possibilidades de, quando jogada, cair Cara ou Coroa. Inicialmente os alunos analisaram suas moedas, olharam os dois lados e foi brevemente conversado sobre a história da "cara e coroa". Foi então feita uma tabela

---

[22] "possível" em Dicionário Priberam da Língua Portuguesa, 2008-2013, https://www.priberam.pt/dlpo/possivel [consultado em 02/04/2017].

[23] Grafia utilizada pelo aluno significando "possa".

[24] Atividade completa pode ser localizada no planejamento na pg. 39.

no quadro a começamos a jogar uma moeda, registrando se caia cara ou coroa. A cada lançamento os alunos davam um “chute”, tentando adivinhar o resultado. Falamos sobre uma moeda ser justa ou não (ser viciada). Ao final de 10 lançamentos vimos que a frequência de cada resultado, cara ou coroa, estava próximo (Coroa 6, Cara 4 – posteriormente, trocando de moeda obtivemos 3 caras e 3 coroas em 6 jogadas).

Em seguida foi retomada a atividade com a bolinhas, dessa vez pegando duas amarelas, duas verdes e uma rosa. Nesse momento, antes mesmo de questionar algo, a aluna S rapidamente disse que “se tu colocar todas essas bolinhas ali a probabilidade/possibilidade de tirar a amarela é maior, porque tem mais” e, em seguida diversos alunos disseram juntos “a verde também”. Iniciou-se então questionamentos referente qual era mais provável de sair da caixa, mostrando as bolinhas que seriam colocadas ali. Quando pegas as 5 bolinhas (duas verdes, duas amarelas e uma rosa) um aluno disse que havia 40% de tirar a amarela, a 40% de tirar a verde e 20% de tirar a rosa. Conversamos então sobre o porquê desses números.

Em seguida, pegando três bolinhas, uma de cada cor, seguiu o seguinte diálogo:

Professora: “Agora sem falar em percentual, quantas chances tenho de tirar uma bolinha amarela?”

Turma: “Uma!”

Professora: “Tá certo, mas uma de quantas?”

Turma: “Uma de três!”

E a partir disso conversamos sobre outras situações, com mais bolinhas de mesma cor, tirando bolinhas com ou sem reposição.

Aproveitando as bolinhas, começamos a conversar sobre a ordem em que elas poderiam ser colocadas em cima da mesa, dispondo-as em uma linha. Pegando três bolinhas, listamos no quadro todas as ordens possíveis para dispô-las. Quando listamos todas as seis maneiras, eles foram questionados se eram só essas mesmo, e a aluna I disse que achava ser, pois se fixássemos uma, teríamos outras duas maneiras para as outras, e isso seria 3×2, conforme ela disse: “é porque a bolinha rosa pode ter três posições, e daí as outras duas podem ficar em qualquer lugar”. Prosseguimos com uma conversa sobre opções e formas de escolher tais opções.

Além disso, foi conversado com a turma sobre estruturar, de forma organizada, a listagem das cores: primeiro fixamos a rosa e trocamos as outras duas, em seguida fixamos a verde, e por fim, a amarela, destacando sempre que há uma diferença entre questionar “quantas” e “quais”.

Queria-se com essa estruturação, auxiliar os alunos a perceber a necessidade da organização do pensamento, para que eles posteriormente pudessem usar a “organização das informações” na resolução de problemas, conforme os passos de Onuchic (2011). Estávamos preparando os alunos para a dinâmica que a Resolução de Problemas envolve, pois de acordo com Onuchic (2007, 2016) esse preparo da turma é importante.

Agora, foram pegas 5 bolinhas de cores diferentes, e feito o mesmo questionamento referente quantas maneiras tenho para colocar essas bolinhas em ordem. Rapidamente os alunos começaram a gritar respostas ansiosos, a maioria das respostas foi 20 (5×4 – percebemos facilmente que o erro deles foi em comparar com a situação anterior na qual o resultado das três bolinhas foi encontrado após fazer 3×2 e esquecendo do $\times1$). Começamos então a estruturar no quadro a resposta, anotando quantas opções teríamos para a escolha da primeira bolinha, ressaltei na fala que “*para cada uma* dessas escolhas temos 4 para escolher a próxima” e nesse momento os alunos demonstraram compreender o que acontecia respondendo rapidamente que agora deveríamos multiplicar por 3 e depois por 2, até termos apenas mais uma opção.

$$5\times4\times3\times2\times1 = 120$$

Foi chamada a atenção dos alunos que com três bolinhas tínhamos 6 opções, e por aumentar 2 bolinhas, agora tínhamos 120 opções! Fizemos para 6 bolinhas (720 maneiras) e pode-se perceber que a Imagem do Conceito que a maioria dos alunos tinha da situação proposta foi aos poucos se expandindo, eles perceberam como os números aumentavam rápido e questionaram como faríamos para organizar 120 bolinhas, impressionados com os resultados. Os alunos começaram a calcular nas suas calculadoras (solicitadas para essas aulas) $120\times119\times118\times117\times116\times\dots$ e começaram a dizer que não seria possível. Nesse momento surgiu a necessidade de introduzir o conceito de fatorial.

$$120\times119\times118\times117\times116\times\dots\times3\times2\times1 = 120!$$

Relembramos, em conjunto, quais os símbolos que conhecemos na matemática: $+$, $-$, $\times$, $\div$, ^2, $\sqrt{}$ e em seguida foi dito que o ponto de exclamação também representa uma operação, chamada fatorial.

Buscamos aqui o que Deyfrus (2002) traz sobre as diversas representações mentais que um indivíduo pode ter do mesmo conceito, e quando essas representações são conectadas, elas se complementam gerando uma única Imagem do Conceito, o que lhe permite um uso flexível da mesma. Já vimos a importância que a expansão do conhecimento possui, uma vez que agregar novos conhecimentos sem conectá-los, pode gerar conflitos.

De acordo com Tall (2002), “Skemp (1979) traz ideias similares, mas de forma variada, diferenciando entre o caso em que o processo de aprendizagem causa uma simples *expansão* da estrutura cognitiva do indivíduo e o caso em que existe um conflito cognitivo, exigindo uma *reconstrução* mental” (p.9, tradução própria[25]).

Ao término dessa aula, a impressão era de que os alunos haviam ampliado sua forma de pensar muito mais rápido do que eu esperava, mantendo a vontade que eles têm de participar e contribuir igual às aulas anteriores. Chegando ao final da aula, a aluna M demonstrou a preocupação de “como a gente vai anotar isso no caderno?!?!”, deixei claro com eles que por enquanto não nos preocuparíamos com isso, mas sim com compreender o que estamos fazendo.

O processo de Formalização do Conteúdo é o último passo apresentado por Onuchic e Allevato (2011) e a aluna já antecipava o momento do registro, porém a ideia deste roteiro, não era definir conceitos com os alunos de forma “matematicamente formal”, mas sim de ajudá-los a analisar padrões, buscar semelhanças e compreender o processo e a lógica envolvida nos problemas propostos, sem a formalização final.

3.3.2 Aula 03

Retomamos a aula com o exemplo do fatorial, para que pudéssemos conversar mais a respeito. Os alunos ficaram intrigados com o como um ponto de exclamação

[25] Skemp (1979) puts similar ideias in a different way by distinguishing between the case where the learning process causes a simple *expansion* of the individual’s cognitive structure and the case where there is cognitive conflict, requiring a mental *reconstruction.*

poderia ser a resposta. Eles ficavam se perguntando “qual é a resposta das 120 bolinhas?”. Utilizando exemplos menores, eles perceberam que para o 120! não temos como responder através de um número, como o $7! = 5040$. Ainda foi utilizado exemplos como: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$ apenas para ressaltar que a resposta e a representação matemática de determinada conta são diferentes.

Finalizados os questionamentos sobre fatorial, foi introduzido aos alunos o exemplo dos sanduiches[26]. Após esclarecer que um sanduíche é feito com um tipo de pão, um de queijo e um tipo de presunto, rapidamente os alunos disseram que teríamos 12 sanduiches diferentes. Foi enfatizado que *para cada* tipo de pão, temos três tipos de queijo, e por fim, para cada um desses pães com queijo temos dois tipos de presunto. Além da multiplicação e fala das opções, foi feita também a árvore de possibilidades no quadro, deixando mais visual para alguns as combinações possíveis de sanduiches.

A visualização é de grande importância para matemáticos e varia de pessoa para pessoa, “enquanto um vê vetores no espaço outro vê números ou símbolos abstratos que satisfazem os axiomas” (DREYFUS, 2002, p.31), ou seja, enquanto alguns alunos compreendem a multiplicação como ferramenta para resolver esse problema, outros ainda precisam da visualização do que é proposto, para compreender o que acontece.

Percebe-se que alguns alunos possuíam diferentes Imagens do Conceito referente a multiplicação conectadas, o que lhes permitia uma análise muito mais ampla da operação na situação proposta. Enquanto alguns ainda precisavam da imagem visual do problema para compreendê-lo, outros já haviam expandido sua Imagem, fazendo com que a visualização fosse desnecessária.

Alguns alunos demonstraram dificuldade em assimilar a ideia de quantas opções, pois estavam presos ao pensamento de montar o sanduiche escolhendo 1 pão, e não pensando nas opções que possuíam. Porém, quando compreenderam que queríamos calcular quantas opções de sanduiche *poderíamos* fazer ficou mais claro.

Partimos então para o exemplo da prova[27], no qual temos uma questão de verdadeiro ou falso. A resposta inicial foi 4×6, e então questionei “Por que multiplicar

---

[26] Quantos sanduíches podemos fazer dispondo de dois tipos de pão (branco e integral), três tipos de queijo (*mussarela*, lanche e *cheddar*) e 2 tipos de presunto (*prosciutto* e *jamón*)?
[27] A professora Dafne fez uma questão de verdadeiro ou falso na prova. Há 4 frases verdadeiras e 6 frases falsas. Quantas respostas diferentes os alunos podem dar?

o número de questões verdadeiras pelas falsas?”. Outro aluno disse que não era para multiplicar, que deveríamos somar; e quando disse a resposta 10, foi em um tom de quem rapidamente percebeu que sua resposta não fazia sentido. Comecei então a listar letras de ‘a’ a ‘j’ e questionei: “quantas opções temos para a resposta da letra ‘a’?” e responderam imediatamente duas, e assim responderam para as outras letras também.

Eles ainda estavam tentando colocar a informação de que havia 4 falsas e 6 verdadeiras em algum lugar. Muitas vezes percebemos em nossa sala de aula a necessidade que o aluno tem de usar as informações dadas, sem se preocupar se elas são realmente necessárias. Através dos passos de Onuchic e Allevato (2011), podemos auxiliar o aluno a estruturar/organizar o problema para extrair as informações necessárias. O passo aqui envolvido é a Resolução do Problema, que de acordo com Yusof e Tall (1994) consiste em formulação de respostas, modificação dos resultados, refinação das respostas/resultados. É o momento em que o aluno deve organizar as informações apresentadas no problema analisando o que é relevante para chegar a uma solução ou não. O aluno não conseguirá chegar a uma resposta se não possui total compreensão do que está sendo solicitado.

Fomos discutindo o que o problema pedia, o que queríamos fazer com essas questões. Reduzi o problema para apenas 3 afirmações de V ou F, e com os alunos anotei quantas opções tínhamos para a letra ‘a’, para a letra ‘b’ e para a letra ‘c’, sempre destacando em minha fala que: tínhamos duas opções (V ou F) para a letra ‘a’ e, *para cada* uma dessas, tínhamos duas outras opções na letra ‘b’, e *para cada* uma dessas que formamos tínhamos duas opções na letra ‘c’: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$. E então ampliamos para o problema inicial das 10 questões, concluindo que: $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^{10} = 1024$.

Ao término dessa aula, retomamos os exemplos discutidos e analisamos as diferenças entre eles, ressaltando sempre a frase “para cada”. Em seguida partimos para o último exemplo evolvendo permutações, o do anagrama com a palavra AMOR[28]. A primeira pergunta foi “o que é um anagrama?”, e após explicar o que era os alunos começaram a dizer anagramas possíveis. Ressaltei que não queremos saber *quais* e sim *quantos*, e as alunas T e E disseram “tá, mas precisamos saber quais pra dizer quantos!” e o aluno A disse que não, que bastava fazer $4\times3\times2\times1$, e

[28] Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?

quando questionado o porquê dessa resposta ele disse “porque temos quatro letras pra escolher, depois três, e dois e daí uma”.

Novamente percebe-se que alguns alunos ainda precisavam listar as formações possíveis para então poder contar quantas. Ressaltei que podemos analisar essas letras como opções e quatro lugares para preencher com essas opções.

Para terminar a aula os alunos receberam um problema (bolos possíveis[29]). Eles ficaram bem ansiosos com o tempo, dizendo que não teria como terminar, sem mesmo ler o que era proposto. A aluna H estava demorando muito para responder, e quando fiz questionamentos para tentar auxiliá-la ela se recusava a responder, dizendo apenas “não sei” (se mostrou mais participativa e confiante ao longo das aulas seguintes).

Analisando a manhã e a participação dos alunos, penso que a aula foi muito produtiva e eles não se mostraram cansados, mesmo tendo três períodos de matemática. Observando as respostas dos alunos nesse primeiro problema dos bolos, vemos que alguns utilizaram a listagem dos possíveis bolos, outros utilizaram a árvore de possibilidades e, o restante, cálculos. Dentre as formas de dar a resposta, 11 calcularam 4!, 8 desenharam de alguma forma (há respostas certas e erradas), e os outros 12 utilizaram a multiplicação (há respostas certas e erradas).

A Imagem do Conceito referente a multiplicação dos alunos era bem variada na turma. Muitos ainda estavam em um estágio inicial em que a visualização é importante enquanto outros já tinham a Imagem do Conceito formada de forma clara a ponto de utilizá-la em diversos contextos. Além disso, a Definição do Conceito desses alunos, apesar de não estar sendo verbalizada aparecia de forma clara, o que se reflete na Imagem do Conceito que eles apresentavam.

O que ainda faltava para alguns era expandir a Imagem do Conceito que eles possuíam da multiplicação, era saber distinguir e analisar as diferentes aplicações da dessa operação.

[29] Manuela vai encomendar um bolo de aniversário para sua mãe. A padaria faz bolos de chocolate e de cenoura. Cada sabor pode vir com cobertura verde, amarela, rosa ou marrom. De quantas formas diferentes Manuela pode escolher o bolo de sua mãe?

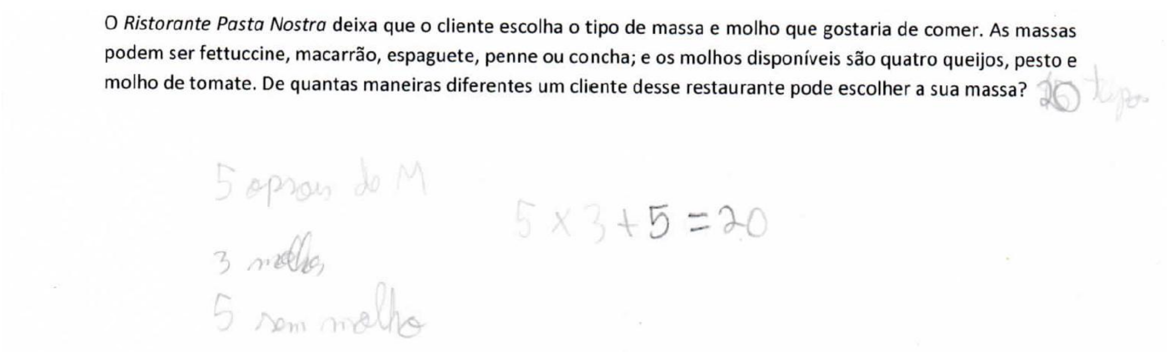
3.3.3 Aula 4

Os alunos foram dispostos em grupos de 3 a 6 alunos, para que pudessem trabalhar nos problemas propostos para o dia. Foi ressaltado que apesar de estarem em grupos, cada aluno deveria ter o desenvolvimento na sua folha, e que todos deveriam devolver a folha assim que pronto.

No primeiro problema[30] houve um grupo (Grupo 3: B, C, H, J, L, T) que pensou na possibilidade de massa sem molho, uma vez que uma das meninas disse não comer nenhum tipo de molho, então, após fazer 5x3 eles somaram 5 massas puras.

$$5{\times}3+5=20 \text{ opções de massas}$$

Apesar de estarem no mesmo grupo os alunos resolveram o problema de formas diferentes, os alunos B, JP e T resolveram através da multiplicação (figuras 2, 3 e 4), somando 5 massas ao final, os alunos C e L listaram todas as opções (figuras 5 e 6), enquanto a aluna H (aluna que havia se recusado a realizar o problema do final da aula anterior) listou os cinco tipos de massas colocando três setas saindo de cada um (figura 7), para representar os tipos de molho, somando no final as 5 opções de massa sem molho.

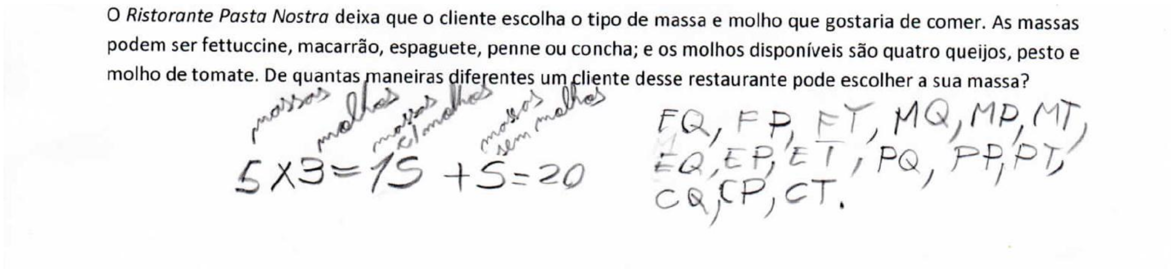

O *Ristorante Pasta Nostra* deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser fettuccine, macarrão, espaguete, penne ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, pesto e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa? 20 tipos

5 opções de M
3 molhos
5 sem molho

5 x 3 + 5 = 20

Figura 2: Problema resolvido pelo aluno B

[30] O *Ristorante Pasta Nostra* deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser *fettuccine*, macarrão, espaguete, *penne* ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, *pesto* e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa?



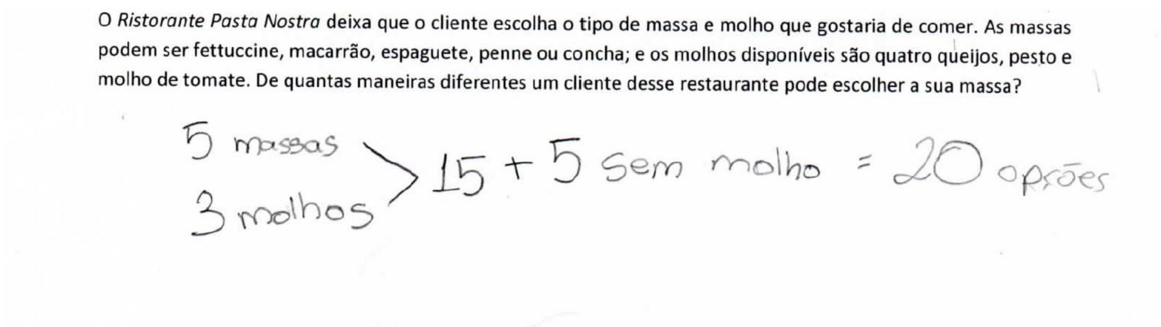
O *Ristorante Pasta Nostra* deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser fettuccine, macarrão, espaguete, penne ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, pesto e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa?

massas molhos massas c/ molhos massas sem molhos

5 x 3 = 15 + 5 = 20

FQ, FP, FT, MQ, MP, MT, EQ, EP, ET, PQ, PP, PT, CQ, CP, CT.

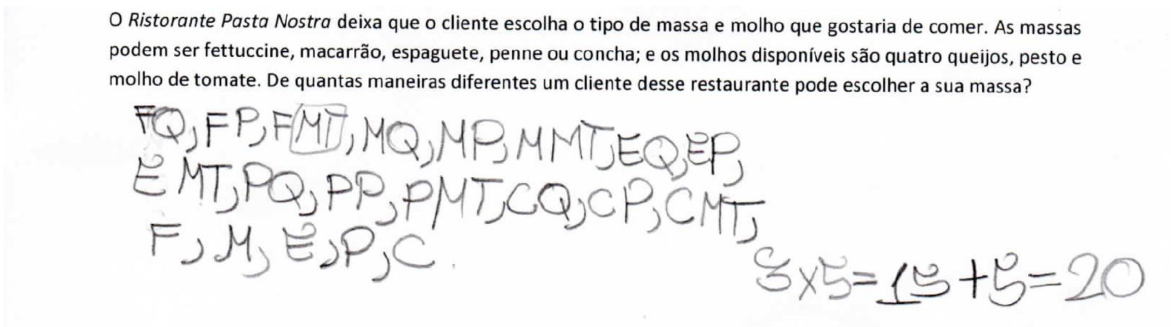
Figura 3: Problema resolvido pelo aluno JP



O *Ristorante Pasta Nostra* deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser fettuccine, macarrão, espaguete, penne ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, pesto e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa?

5 massas
3 molhos > 15 + 5 sem molho = 20 opções

Figura 4: Problema resolvido pela aluna T

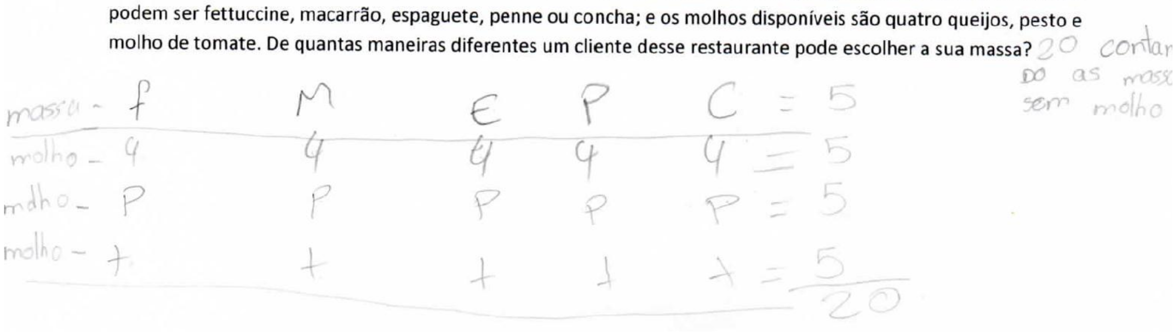


O *Ristorante Pasta Nostra* deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser fettuccine, macarrão, espaguete, penne ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, pesto e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa?

FQ, FP, FMT, MQ, MP, MMT, EQ, EP, EMT, PQ, PP, PMT, CQ, CP, CMT, F, M, E, P, C

3 x 5 = 15 + 5 = 20

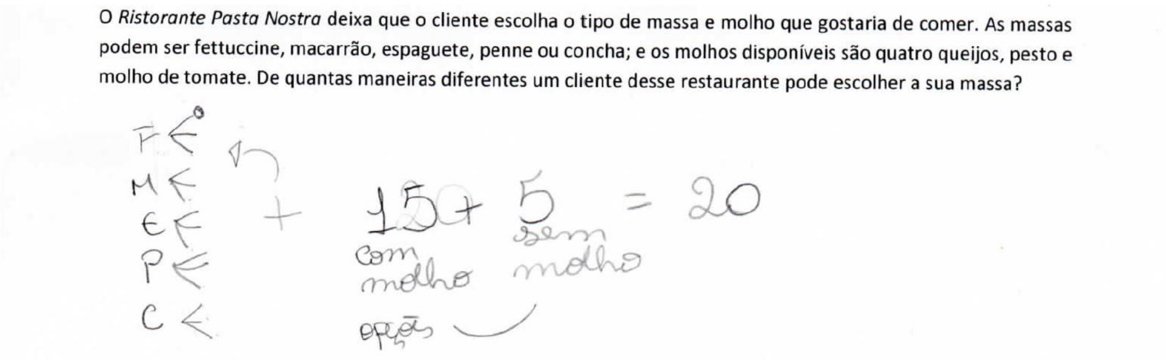
Figura 5: Problema resolvido pela aluna C



O *Ristorante Pasta Nostra* deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser fettuccine, macarrão, espaguete, penne ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, pesto e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa? 20 contando as massas sem molho

massa -	f	M	E	P	C	= 5
molho -	q	q	q	q	q	= 5
molho -	P	P	P	P	P	= 5
molho -	t	t	t	t	t	= 5
						20

Figura 6: Problema resolvido pelo aluno L


O *Ristorante Pasta Nostra* deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser fettuccine, macarrão, espaguete, penne ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, pesto e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa?

F
M
E
P
C

15 + 5 = 20
com molho
sem molho
opções

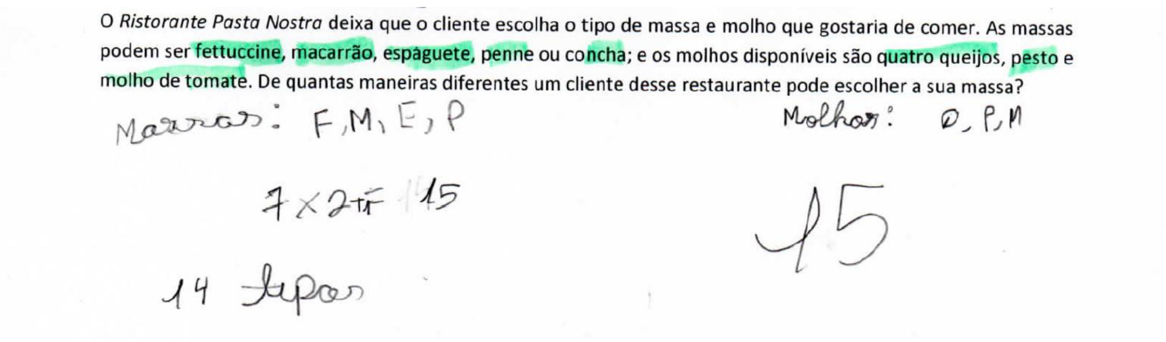
Figura 7: Problema resolvido pela aluna H

O trabalho em grupo diversificou as respostas e podia-se perceber que os alunos compartilhavam suas respostas e diferentes formas de analisar o problema.

Mais de um grupo estava se prendendo ao $5\times4\times3\times2\times1$, sem analisar o problema, apenas reproduzindo o que havíamos feito em outra aula. Então foi conversado com esses grupos que para cada massa, havia três molhos, na tentativa de fazer com que eles retomassem o significado da expressão “para cada”.

Para esses alunos, a Imagem do Conceito não havia sido expandida, eles ainda estavam tentando reproduzir conteúdos e métodos de resolução sem fazer as conexões necessárias entre eles, ou sem se preocupar em compreender o que era solicitado no problema.

Em outros grupos percebeu-se que o diálogo não ocorria, estavam “cada um por si”. No grupo 2 (D, G, K, N, O, X) houve 6 formas diferentes de resolver o problema, sendo que 5 dessas estavam corretas. O aluno N (figura 8) foi o único que não conseguiu chegar na resposta.


O *Ristorante Pasta Nostra* deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser fettuccine, macarrão, espaguete, penne ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, pesto e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa?

Massas: F, M, E, P
Molhos: Q, P, M

7×2 15

14 tipos

15

Figura 8: Problema resolvido pelo aluno N

Podemos perceber que ele não compreendeu o eu estava acontecendo no problema, e ao perceber seus colegas fazendo multiplicações ele também multiplicou algo (a soma de apenas 4 massas com 3 molhos), por 2. Ele ainda escreve que foram 14 tipos, e possivelmente vendo seus colegas colocar 15, ele colocou o 15 ao lado.

Já o aluno D, iniciou listando os tipos de massas que tinham 3 molhos cada e parou no meio, ao perceber que sempre ocorreria o mesmo, sendo então necessário fazer 5x3 (Figura 9).

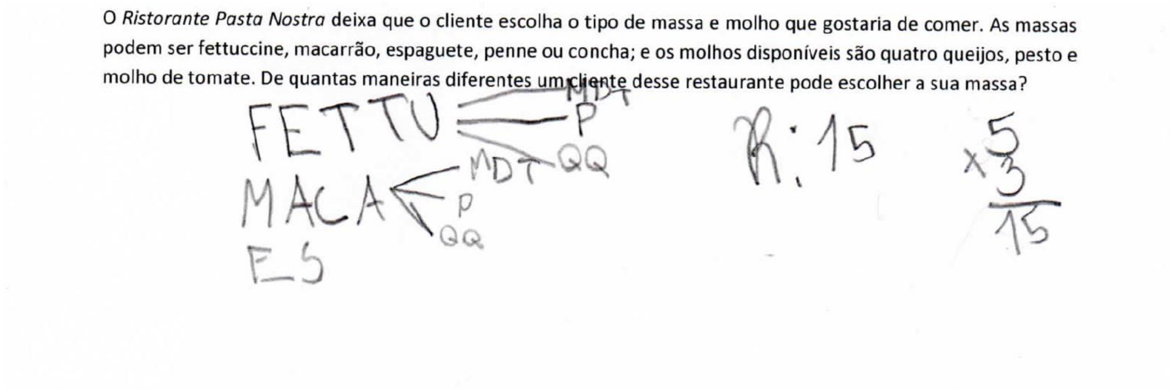


Figura 9: Problema resolvido pelo aluno D

Assim que todos os grupos devolveram o primeiro problema do dia, foi entregue o segundo, e assim fizemos com os 5 problemas realizados nesse dia. Os alunos foram informados que toda a conversa e contribuições que eles estavam fazendo em grupo seria retomada na próxima aula, e por isso deveriam registrar na folha o máximo possível.

A partir dessa aula, o trabalho em grupos se intensificou, sendo solicitado sempre que os alunos fizessem primeiro a Leitura Individual e posteriormente a Leitura em Grupo, conforme passos de Onuchic e Allevato (2011). A aula toda foi feita dessa maneira, eu passava pelos grupos verificando o trabalho e, quando necessário, fazia questionamentos que pudessem auxiliar os alunos a compreender seus cálculos, o que remete ao 5º passo de Onuchic e Allevato (2011), que diz respeito ao professor que deve Observar e Incentivar.

Alguns grupos tiveram dificuldade de interpretação, e assim que compreendiam o que era pedido, sabiam resolver. Novamente aqui aparece a importância do 4º passo de Onuchic e Allevato (2011), que é a Resolução do Problema, que só acontece após “os alunos terem total compreensão do problema proposto” (ver Quadro 3, p.25-26).

Alguns dos problemas poderiam ser mais presos e mais específicos, evitando confusões como a da massa. A principal dúvida, na leitura dos problemas, era com relação às formas de escolher e opções que tínhamos. “Por que não posso escolher o café sem o ovo?”; “Ah, mas eu quero sem frutas!”; “Pode massa sem molho?”.

Ao término da aula, a aluna S disse “Agora está muito mais legal!”. A atitude dela com relação aos problemas mudou depois que ela começou a compreender como resolvê-los. E a partir do momento que ela conseguiu raciocinar a respeito deles, os problemas passaram a ser divertidos.

3.3.4 Aula 05

A aula iniciou com meninos de outra turma fazendo uma pesquisa para um trabalho de ciências. Após sua saída, iniciamos a correção dos 6 problemas feitos pelos alunos nas aulas anteriores, que corresponde ao 6º, 7º e 8º passos de Onuchic e Allevato (2011), Registro das Resoluções na Lousa, Plenária e Busca do Consenso, respectivamente.

A cada problema conversávamos sobre formas de resolver e o porquê dessas respostas. Durante a correção, novamente foi dado ênfase para a expressão “para cada”. Um dos principais problemas dos alunos era extrair do problema as informações que eram necessárias para resolvê-lo, então a cada problema corrigido no quadro, eu listava as informações que o problema dava, estruturando os dados, possibilitando uma melhor visualização.

No segundo problema[31] trabalhado com a turma, um dos grupos havia considerado bolo sem cobertura, o que gerava 10 opções e não apenas 8, que foi o mesmo que aconteceu com o problema das massas com molho[32], no qual alguns alunos disseram não gostar de molho. Em ambos os problemas, foi conversado com a turma as formas de chegar nessa resposta e de que maneira poderíamos interpretar os problemas:

- 5 massas x 3 molhos = 15 opções + 5 massas sem molho = 20 possibilidades
- 5 massas x 4 “molhos” = 20 possibilidades

---

[31] Manuela vai encomendar um bolo de aniversário para sua mãe. A padaria faz bolos de chocolate e de cenoura. Cada sabor pode vir com cobertura verde, amarela, rosa ou marrom. De quantas formas diferentes Manuela pode escolher o bolo de sua mãe?

[32] O *Ristorante Pasta Nostra* deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser *fettuccine*, macarrão, espaguete, *penne* ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, *pesto* e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa?

- 2 bolos x 4 coberturas = 8 bolos + 2 sem cobertura = 10 opções
- 2 bolos x 5 “coberturas” = 10 opções

No problema 3[33], ficou claro que, para a maioria da turma, a permutação de todos os elementos havia sido um conceito fácil de compreender.

No problema 4[34], surgiram questionamentos como: ”E se eu quiser mais de um pão? Ou mais de uma fruta?”, além disso, percebe-se que os alunos estavam muito preocupados com o “jeito certo de fazer”. Ao compartilhar suas respostas durante o momento da Plenária, eles começaram a discutir dizendo que o seu jeito ser mais fácil e isso gerou uma certa tensão entre os alunos. Conversamos que há diversas maneiras de chegar na mesma resposta, e todas podem estar corretas, dependendo apenas da forma que estamos analisando o problema, o que ocorre bastante na Análise Combinatória.

Como dito na introdução desse trabalho, esse momento de compartilhamento de soluções é muito rico para os alunos pois os faz socializar as diferentes formas de pensar e raciocinar, mostrando que a matemática, apesar de ser considerada uma ciência exata, nos permite diferentes resoluções.

As diferentes formas de pensar expostas pelos alunos durante a Plenária, 7º passo de Onuchic e Allevato (2011), são um momento importante para que cada aluno possa ampliar a sua Imagens do Conceito. Conversando e discutindo as diferentes formas de analisar um problema, permitimos que o aluno perceba a variedade de análises possíveis, possibilitando uma reconstrução das Imagens do Conceito já formadas.

A partir do problema 5[35], os alunos começaram a perceber que era sempre multiplicação, e perceber padrões que aconteciam, momento no qual entramos no 8º passo de Onuchic e Allevato (2011), a Busca do Consenso. Novamente foi reforçada a ideia de que era multiplicação pois para cada um dos acontecimentos anteriores, tínhamos n acontecimentos a seguir, por isso a multiplicação.

---

[33] Há 4 bolas de cores diferentes dispostas em cima de uma mesa (laranja, roxa, vermelha e azul). De quantas maneiras diferentes podemos reorganizá-las uma ao lado da outra?

[34] João está pedindo o café da manhã para a recepcionista do hotel. Ele pode comer ovos fritos ou mexidos. Como acompanhamento ele pode pedir uma torrada, panquecas ou bisnaguinhas. Além disso, ele ainda pode escolher um tipo de fruta. As frutas disponíveis são laranja, banana, mamão. De quantas maneiras diferentes João pode pedir esse café da manhã?

[35] Laura adora o esporte e a arte! Sua escola oferece times de basquete, futebol e vôlei; assim como clubes de teatro, música e desenho. Porém devido ao tempo ela só pode escolher um esporte e um clube para participar esse ano. De quantas maneiras Laura pode fazer essa escolha?

E por fim, no problema 6[36], conversamos novamente que tínhamos 6 opções para escolher a primeira letra, 5 opções para escolher a segunda e para as seguintes 4, 3, 2 e até que por fim 1 opção. A aluna I percebendo que todas as letras eram diferentes, questionou o que faríamos se as letras fossem iguais. Como a ideia ainda não era trabalhar com permutações com elementos repedidos, utilizamos a palavra CASA para exemplificar, por ser um exemplo menor. Iniciei listando alguns anagramas “trocando os A’s de lugar” para que os alunos pudessem enxergar que essa troca não fazia diferença. Listei com a turma as 12 opções no quadro. Primeiro os alunos pensaram que apenas haviam excluído uma opção, começamos a conversar então que se fossem letras diferentes teríamos $4\times3\times2\times1$, porém como o A se repetia, e isso fazia sempre ter dois anagramas iguais, concluímos que precisávamos dividir por 2, que eram as formas de organizar esses dois A’s (caso fossem diferentes). Não dei continuidade a esse problema para que pudesse retomá-lo mais tarde no momento proposto para permutações com repetições.

Para terminar a aula os alunos receberam mais um problema[37] que foi recolhido para ser corrigido na aula seguinte.

Nessa aula fechei um ciclo dos passos de Onuchic e Allevato (2011) com os alunos. O 9º passo trazido pelas autoras é referente a Formalização do Conteúdo, é o momento em que é realizado o fechamento do que estava sendo trabalhado, em outras palavras, é a Definição do Conceito. Essa formalização não foi realizada com essa turma, e mais uma vez ressaltamos que a ideia não era formalizar o conceito de Permutações, mas sim analisar o que problemas envolvendo Permutação necessitam para serem resolvidos, expandindo assim a Imagem do Conceito de multiplicação que os alunos possuem, ampliando as aplicações dessa operação. Optando por não enfatizar a Definição do Conceito com alunos não estamos dizendo que ela não é importante, nosso intuito era que os alunos soubessem interpretar as situações envolvendo o conceito trabalhado, sem se prender a nomes e sim ao raciocínio combinatório envolvido.

[36] Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ESTUDO?
[37] A professora de Teatro está fazendo uma encomenda para o novo uniforme do grupo. Ela pode escolher entre camisetas, moletons canguru ou moletons com zíper. Cada um desses pode ser vermelho ou laranja. O logo que vai nas costas pode ser impresso ou bordado. Considerando essas escolhas a serem feitas, de quantas maneiras diferentes a professora pode escolher esse novo uniforme?

3.3.5 Aulas 06 e 07

Iniciei a aula devolvendo o problema da aula anterior, referente ao uniforme da aula de Teatro, para que pudesse ser corrigido. Listamos no quadro: 3 “roupas”, 2 cores, 2 bordados. Um erro que apareceu no trabalho de pelo menos 3 alunos foi: $4\times2\times2$, e pode-se perceber que isso foi um erro na leitura e compreensão do problema, o que acabou prejudicando a solução do mesmo.

Após a correção retomamos a resolução de problemas, porém nessa aula, eu havia levado o *scanner*, para que os problemas pudessem ser devolvidos no mesmo dia. Enquanto a turma resolvia um, o anterior era digitalizado. Esse processo tornou a aula mais devagar do que o previsto, acredito que sem a preocupação de registrar o material produzido pelos alunos teria sido mais rápido e produtivo.

No problema 9[38], alguns alunos estavam sem saber por onde começar então foram instruídos a anotar quantas opções de rodinhas, cores e formas haviam, para em seguida compreender o que estava acontecendo, o que os auxiliou na resolução.

Ao analisar o trabalho feito pelos alunos, percebemos que neste problema dos 32 alunos da turma, 25 alunos utilizaram apenas a multiplicação (24 acertaram, 1 errou), 3 utilizaram desenhos (2 acertaram, 1 errou) e os outros 4 utilizaram alguma representação visual seguida da multiplicação. Percebe-se que nesse ponto, muitos alunos já haviam expandido sua Imagem do Conceito referente a multiplicação, sabendo utilizá-la em contextos diferentes.

A aluna F também demonstrava dificuldade no problema 10[39], e foi instruída que fizesse o mesmo que antes: anotar todas as opções que o problema apresentava. Com isso, ela compreendeu que deveria multiplicar 10 bebidas x 5 aperitivos x 6 pratos principais x 8 acompanhamentos x 5 sobremesas, porém deixou passar que deveriam ser dois acompanhamentos.

Após a correção foi proposto no quadro o problema referente aos algarismos 3, 5, 6 e 8[40]. Os alunos disseram várias respostas (3x5x6x8; 16, 20, ...), e conversando

---

[38] Marília está escolhendo um novo *skate*. O *skate* pode ser preto, branco ou marrom; as rodas podem ser rosas ou roxas. Os adesivos podem ser em formato de estrela, lobo, diamante ou raio. Quantos modelos diferentes de *skate* ela pode montar?

[39] Marta irá pedir sua janta em seu restaurante favorito. Ela vai pedir uma bebida, um aperitivo, um prato principal, dois acompanhamentos diferentes e uma sobremesa. Se há 10 escolhas para bebida, cinco aperitivos, 6 pratos principais, 8 acompanhamentos e cinco sobremesas, de quantas formas diferentes ela pode solicitar sua refeição?

[40] Atividade completa pode ser localizada no planejamento na pg. 44

sobre o problema, rapidamente os alunos disseram “É igual ao das bolinhas!”, e começaram a analisar esses 4 algarismos como as 4 opções que querermos dispor em “fila”.

A Leitura em Conjunto, 3º passo de Onuchic e Allevato (2011), nesse problema foi essencial para que a turma pudesse compreender o que estava sendo solicitado e assim pudessem Resolver o Problema. Comparando com situações anteriores, *experiências vividas* como Vinner (2002) coloca, os alunos conseguiram fazer conexões entre os exemplos/situações, buscando semelhanças entre os mesmos. A Imagem do Conceito dos alunos sofreu alteração, e novamente, relembramos o que Deyfrus (2002) coloca que diversas representações mentais de um mesmo conceito, quando conectadas podem se complementar.

A partir da primeira pergunta “Quantos números de algarismos diferentes podemos formar com os algarismos 3, 5, 6 e 8?” os alunos foram estimulados a contribuir com novas perguntas:

“Considere os algarismos 3, 5, 6 e 8.”

b) Quantos números de três algarismos podemos formar?

$4 \times 3 \times 2 = 24$ números

c) Quantos números de dois algarismos podemos formar?

$4 \times 3 = 12$ números

d) Quantos números de quatro algarismos podemos formar que comecem com o 3? E com o 6?

$3 \times 2 \times 1 = 6$ números em ambos os casos

$1 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$ números

e) Quantos números de dois algarismos podemos formar que comecem com o 8?

3 números: 83, 85, 86

f) Quantos números de dois algarismos podemos formar que terminem em 5?

3 números: 35, 65, 85

g) Quantos números de três algarismos podemos formar com o 8 no fim?

$3 \times 2 = 6$ números

$3 \times 2 \times 1 = 6$ números (pois o 1 e a opção do 8)

h) Quantos números de três algarismos podemos formar com o 6 no meio?

$3 \times 2 \times 1 = 6$ números

$3 \times 2 = 6$ números

Solicitei aos alunos que respondessem essas perguntas, registrando seus resultados, para posterior compartilhamento com a turma. Apesar de escrever as perguntas sem dizer que os algarismos deveriam ser diferentes, os alunos fizeram considerando algarismos distintos. No fim, o aluno L disse que ele havia feito com algarismos iguais, porém demonstrou saber a diferença. Quando trabalhamos com exemplos criados na hora, precisamos ter atenção redobrada para evitar que situações como essa aconteçam. Pode ser que para alguns alunos não tenha feito diferença, pois estavam em um ritmo de fazer tudo com elementos distintos, porém para outros, pode ter causado conflitos entre Imagens do Conceito existentes e novos conhecimentos que estavam sendo adquiridos, impedindo a expansão da Imagem do Conceito.

Na questão ‘b’ os alunos ficaram intrigados como a resposta podia ser a mesma. Discutimos que era a mesma pois o último algarismo que escolheríamos era apenas uma opção, e sendo assim era a mesma quantidade que se fosse três algarismos, pois não mudava a quantidade de números colocando um a mais no final.

Nas questões nas quais fixávamos um algarismo, os alunos fizeram de duas formas: fixando os algarismos e analisando as opções para o restante e também considerando o algarismo a ser fixado como uma opção. As diferentes formas de analisar dos alunos contribuíram para que a Plenária, 7º passo de Onuchic e Allevato (2011), fosse mais enriquecedora, permitindo novamente que a turma percebesse maneiras diferentes de analisar o mesmo problema.

Resolvido esse exemplo no quadro, os alunos foram perguntados qual a diferença desse exemplo para os problemas anteriores. A resposta inicial foi: antes não definíamos o lugar e agora dissemos o lugar. Reformulei a pergunta: “No exemplo das bolinhas eu queria organizar parte das bolinhas ou todas? E nesse eu organizava todos os algarismos ou não? A ordem desses algarismos fazia diferença?”. A pergunta foi modificada pois a expectativa era que os alunos percebessem que agora não estávamos usando necessariamente todos os algarismos. Retomamos os exemplos e suas respostas dando ênfase nessas diferenças e daí analisamos “E se eu pudesse repetir os algarismos?” teríamos $4\times4\times4\times4=256$.

Partimos para o exemplo das placas de carro[41]. Quando perguntados quantas placas podemos ter, alguns alunos disseram “infinitas” e daí relembramos da situação

[41] Atividade completa pode ser localizada no planejamento na pg. 45

dos telefones celulares, nas quais alguns estados precisaram colocar o 9 extra na frente pois estão faltando números possíveis; além do DDD na frente, que permite ainda mais opções. Conversamos a respeito de como funcionam as placas de carro e que há apenas uma sequência de números não permitida: 0000, sendo que as letras podem repetir.

Discutimos referente a essa uma combinação que não pode, explicando aos alunos que se fizéssemos algo como $10\times10\times10\times9$ estávamos tirando muitas opções, até que a aluna I e o aluno A disseram quase que ao mesmo tempo $10\times10\times10\times10-1=9\,999$. Fomos então para as letras $26\times26\times26=17\,576$. Finalizando isso, surgiu a questão “O que eu faço com esses dois resultados?” e a resposta inicial da turma foi “Soma!”.

Foi ressaltado então que para cada uma das $17\,576$ opções de letras, eu tenho todas aquelas opções de números, com isso os alunos perceberam que deveríamos multiplicar os resultados, e daí o aluno J questionou se “preciso tirar o 1 antes ou depois de multiplicar?”:

$$26\times26\times26 \quad \times \quad (10\times10\times10\times10-1)$$

ou

$$(26\times26\times26 \quad \times \quad 10\times10\times10\times10)-1$$

Concluímos que precisaria ser a primeira opção, pois conforme a aluna T disse, se deixássemos para tirar 1 depois, não seria suficiente, pois temos 0000 *para cada* três letras escolhidas.

3.3.6 Aula 08

Iniciamos a aula corrigindo o problema da Marta (que envolvia a refeição no restaurante com opções de entrada, acompanhamentos, etc), que havia faltado no período anterior, pois não havia tido tempo de *scannear*.

Professora: “Alguém colocou alguma resposta diferente de 12 mil ou 2 400?”

Turma: “Não”

Professora: “Está todo mundo errado!”

Turma: “O que?!?! Como assim, *sora*?”

Professora: “Vamos reler o problema!”

E nesse momento eles releram e disseram: “*Aaaahhh*, são dois acompanhamentos!!”. Dito isso, alguns alunos disseram “pois é, pensei em fazer 16 acompanhamentos!” e conversamos que não são 16 acompanhamentos, e sim 8.

Percebemos nesse problema que nem todos leram com atenção ao enunciado, 2º e 3º passo de Onuchic e Allevato (2011) referente a leitura do problema, o que impediu o desenvolvimento do 4º passo referente a Resolução do Problema.

Com isso, começamos a estruturar no quadro o desenvolvimento para o problema:

10 bebidas x 5 aperit x 6 principal x ___ acomp x ____ acomp x 5 sobremesas

Professora: “Agora pensando apenas nos acompanhamentos, quantas opções temos para a primeira escolha de acompanhamento?”

Turma: “Oito!”

Professora: “E para a segunda? Sendo que ela precisa ser diferente da primeira?”

Turma: “Sete!” que foi imediatamente seguido de um “*Aaahhhh*!” sinalizado que a maioria havia percebido o que deveria ser feito.

10 bebidas x 5 aperit x 6 principal x 8 acomp x 7 acomp x 5 sobremesas = 84 000

Um dos comentários da turma foi: “Imagina quanto tempo ela levaria pra comer isso tudo!” e então analisamos a situação exposta pelo aluno. Considerando duas idas ao restaurante por dia, todos os dias do ano, calculamos juntos quantos anos Marta levaria para comer todas essas diferentes opções que ela tinha à sua disposição.

$$2 \cdot 365 = 730 \text{ refeições no ano}$$

$$84\,000 \div 730 = 115{,}0684932\ldots$$

Ou seja, Marta levaria um pouco mais que 115 anos para comer todas as opções.

O comentário com relação ao tempo que Marta levaria para comer todas as opções mostra que a Imagem do Conceito que diz respeito ao conhecimento de números maiores e menores que outros foi evocada. As conexões entre os conteúdos aconteceram de forma natural, partindo dos questionamentos da turma.

Feita a correção partimos para alguns problemas que seriam realizados nesta aula, recolhidos e corrigidos com a turma apenas na aula seguinte, porém durante o 5º passo de Onuchic e Allevato (2011), Observar e Incentivar, percebi erros na resolução do primeiro problema[42], muitos alunos estavam colocando 30! como

[42] Todo começo de ano cada turma escolhe um líder e um vice-líder. Sabendo que uma turma tem 30 alunos, de quantas formas diferentes podemos fazer essa escolha?

resposta. Então enquanto eles resolviam o problema seguinte[43], fiz cópia do primeiro para que pudesse ser devolvido e corrigido na mesma aula.

Percebemos que os alunos estavam reproduzindo o que havia sido feito em aulas anteriores, conforme citamos anteriormente, Deyfrus (2002) coloca que a maioria dos alunos decora o processo para reproduzir em problemas parecidos. As novas situações trabalhadas ainda não estavam bem claras para a turma, o que impedia a compreensão do problema proposto.

Após recolhido o segundo problema, juntamente dos alunos conversamos sobre o primeiro e sobre quantas opções tínhamos para escolher o líder, e quantas opções tínhamos para escolher o vice-líder, ressaltando/questionando se “a ordem que eu escolho essas pessoas faz diferença? A posição deles altera algo?”; para podermos concluir que havia 30 opções para escolher o líder e para cada uma dessas havia 29 opções para o vice-líder, totalizando 30 x 29 = 870 maneiras de fazer essa escolha.

Sem devolver para os alunos conversamos sobre a resolução do segundo e alguns alunos se acusaram dizendo ter feito a mesma coisa que na anterior, percebendo agora a semelhança com o problema corrigido e em qual parte haviam cometido o erro.

Após entregue o último problema[44] que teríamos tempo de fazer em aula, recolhemos tudo e os dois últimos ficaram por ser devolvidos e corrigidos na aula seguinte.

3.3.7 Aula 9

Iniciamos com alguns avisos importantes, recados e combinações de acontecimentos na escola. Foi recolhido um trabalho, não relacionado à Análise Combinatória, e então começamos a correção dos problemas da aula anterior.

Apesar de já termos discutido na aula 08 a respeito dos anagramas de duas letras, retomamos agora, uma vez que os alunos tinham suas respostas em mãos. E em seguida corrigimos o problema da competição, em ambos os casos reforçamos

---

[43] Quantos anagramas de 2 letras diferentes podemos fazer com as 26 letras do alfabeto?
[44] Em uma competição de judô há 10 lutadores que podem terminar em primeiro, segundo ou terceiro lugar. De quantas maneiras diferentes podemos ter o resultado final?

novamente que a ordem em que dispomos os ganhadores/letras/líderes/cargo faz diferença.

Foi entregue para os alunos o problema da senha[45] que, após recolhido, foi feito cópia para que pudesse ser devolvido ainda em aula.

No problema das senhas os alunos não estavam familiarizados com o termo *supersticiosa* e no seguinte, das letras[46], a palavra *ordenar* os deixou inicialmente confusos, mas foi esclarecido que era colocar em ordem, colocar em uma sequência.

As primeiras respostas foram: 24, 5040 e 10.

Anotamos no quadro 4 espaços, e a turma foi questionada: quantas opções de algarismos temos para escolher o primeiro algarismo? E para escolher o segundo? E ficou registrado:

$$10\times9\times8\times7 = 5\,040$$

Muitos alunos haviam feito $4\times3\times2\times1$, pensando nos 4 algarismos, e não nas opções que tínhamos para esses quatro algarismos.

O último problema, que envolvia as letras A, B, C, D e E; apesar de não ser devolvido para a turma no mesmo dia, foi corrigido no quadro. Já nesse problema, os alunos pareciam ter em mente a ideia de “ordenar 2 letras = temos 2 lugares”. No fim, os alunos ainda foram estimulados a fazer novas perguntas referente essas letras.

Podemos perceber que alguns alunos ainda estão reproduzindo desenvolvimentos, tentando encontrar semelhanças nos problemas trabalhados nas aulas anteriores. Porém, mesmo percebendo que há uma diferença eles não a utilizam na interpretação do problema.

Conforme Quadro 3 desse trabalho (quadro comparativo, pg. 25 e 26), temos que o 4º passo de Onuchic e Allevato (2011) corresponde ao que Tall e Yusof (1994) trazem como: Formulação de Respostas, Modificação dos Resultados e Refinação das respostas/resultados. Dentro desses três passos, percebemos que a Modificação dos Resultados não aconteceu. Apesar dos alunos, talvez por intuição, acreditarem que suas respostas estavam incorretas, nada foi feito a respeito para modificar e refinar essa resolução.

---

[45] A professora Dafne precisa criar uma senha de 4 dígitos. Como ela é supersticiosa, ela não gosta que nenhum dos algarismos se repita. De quantas maneiras distintas ela pode criar essa senha?

[46] Considerando as letras A, B, C, D e de quantas maneiras diferentes podemos:
ordenar 2 dessas letras?
ordenar 3 dessas letras?
colocar em ordem 4 letras, sendo que a primeira será sempre a letra A?
colocar em ordem 3 letras, onde a primeira sempre será a letra B?

Tall (2002) ressalta que “intuição é o produto da Imagem do Conceito do indivíduo” (p.14, tradução própria[47]), e coloca que quanto mais trabalhado o pensamento lógico de uma pessoa, as Imagens do Conceito serão mais facilmente fomentadas possibilitando uma melhor resposta lógica. Além disso, Tall ainda diz que estimular a Intuição Lógica deveria ser visto como algo extremamente importante.

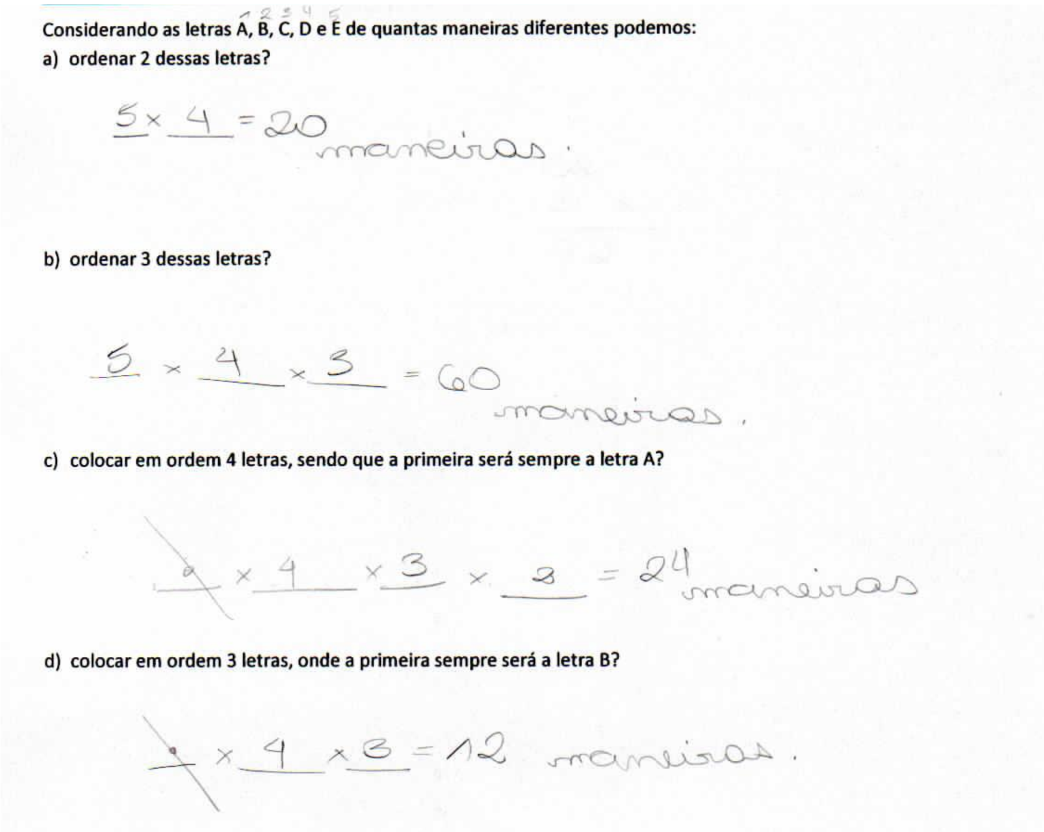
3.3.8 Aula 10

Retomamos o problema das letras da aula anterior. Após entregue a folha resolvida pelos alunos, foram feitos comentários novamente sobre ele.

Alguns alunos haviam feito 2x4 na letra ‘a’, pensando em ter “dois espaços” e quatro letras, então foi questionado ao aluno Y, que foi um dos alunos que colocou 2x4, “quantas opções tu tens para esse primeiro espaço? E para o segundo?”. Retomamos ainda as formas diferentes de analisar/raciocinar sobre o problema.

Analisando posteriormente o trabalho feito pelos alunos, percebemos que o diálogo estava presente para muitos. Na Figura 10 e na Figura 11 temos o registro dos alunos I e W, nos quais vemos a mudança do raciocínio do aluno W, que registrou de forma similar a aluna I, possivelmente após conversar sobre o resultado e perceber que não era necessário multiplicar por 3. Essa situação apenas ressalta a importância do 4º passo de Onuchic e Allevato (2011), a Resolução do Problema, e reforça David Tall (2013), que coloca que o diálogo e a troca de ideias em grupos auxiliam o aluno.

[47] Intuiton is the product of the concept images of the individual.



Considerando as letras A, B, C, D e E de quantas maneiras diferentes podemos:

a) ordenar 2 dessas letras?

$5 \times 4 = 20$ maneiras.

b) ordenar 3 dessas letras?

$5 \times 4 \times 3 = 60$ maneiras.

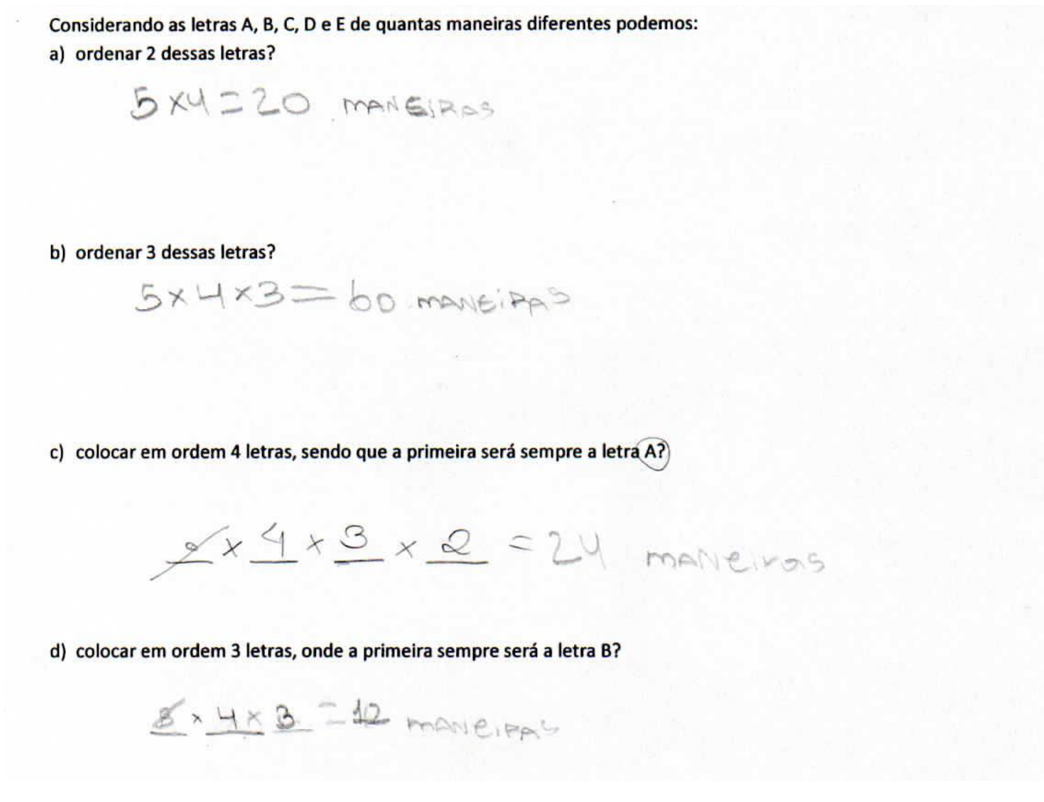
c) colocar em ordem 4 letras, sendo que a primeira será sempre a letra A?

$\cancel{1} \times 4 \times 3 \times 2 = 24$ maneiras

d) colocar em ordem 3 letras, onde a primeira sempre será a letra B?

$\cancel{1} \times 4 \times 3 = 12$ maneiras.

Figura 10: Problema resolvido pela aluna I



Considerando as letras A, B, C, D e E de quantas maneiras diferentes podemos:

a) ordenar 2 dessas letras?

$5 \times 4 = 20$ MANEIRAS

b) ordenar 3 dessas letras?

$5 \times 4 \times 3 = 60$ MANEIRAS

c) colocar em ordem 4 letras, sendo que a primeira será sempre a letra A?

$\cancel{1} \times 4 \times 3 \times 2 = 24$ MANEIRAS

d) colocar em ordem 3 letras, onde a primeira sempre será a letra B?

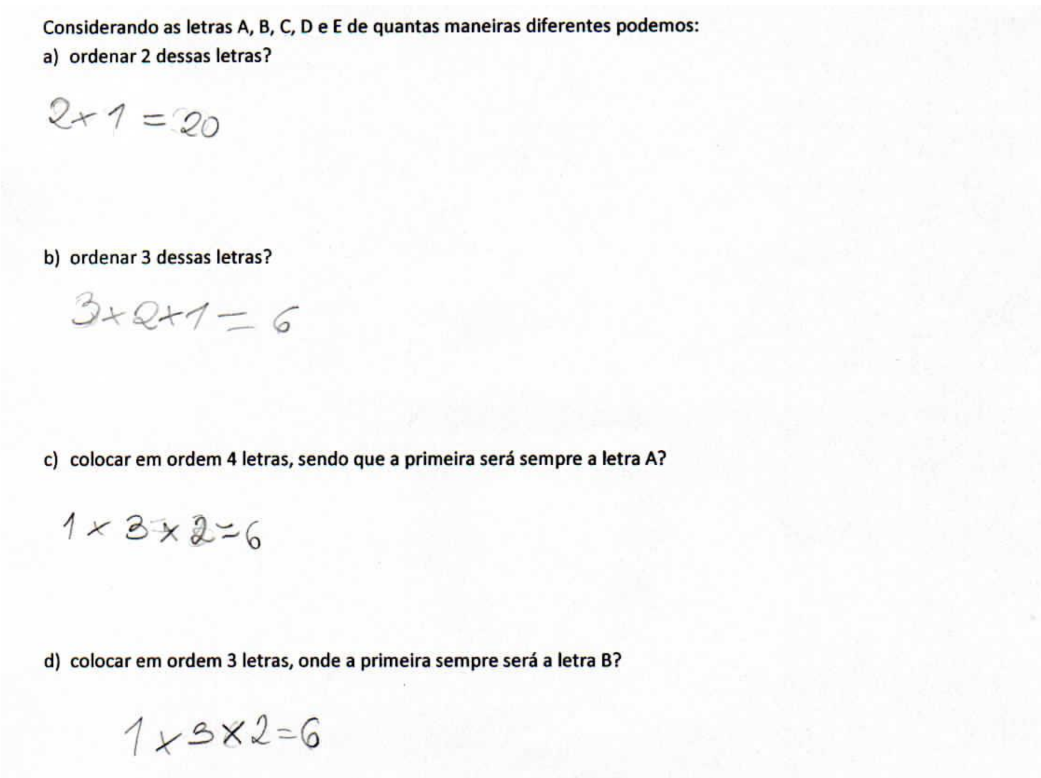
$\cancel{1} \times 4 \times 3 = 12$ MANEIRAS

Figura 11: Problema resolvido pelo aluno W

Já no trabalho do aluno Y, percebemos que ele apresentava dificuldade em analisar o que estava sendo proposto (Figura 12). A primeira resposta indica que ele ainda estava analisando o problema como se fosse a permutação de dois lugares, mas percebia seus colegas ao redor colocando 20 como resposta. O mesmo acontece com o item ‘b’, no qual vemos ele “permutando” os 3 lugares, e não as letras nesses lugares.

E apesar de analisar corretamente o começo dos itens ‘c’ e ‘d’, dizendo que havia apenas uma opção para a primeira letra, os números restantes mostram que ele ainda pensava nos lugares, e não nas opções para os lugares.

Percebemos que o diálogo com os colegas durante a Resolução de Problemas, 4º passo de Onuchic e Allevato (2011), não estava acontecendo. Além disso, percebia-se que o aluno já estava criando uma resistência com o conteúdo, por não conseguir encontrar as respostas com a facilidade que ele normalmente tinha para a matemática. A Imagem do Conceito desse aluno com relação às diferentes interpretações para a multiplicação ainda não havia se expandido.



Considerando as letras A, B, C, D e E de quantas maneiras diferentes podemos:

a) ordenar 2 dessas letras?

$2 \times 1 = 20$

b) ordenar 3 dessas letras?

$3 \times 2 \times 1 = 6$

c) colocar em ordem 4 letras, sendo que a primeira será sempre a letra A?

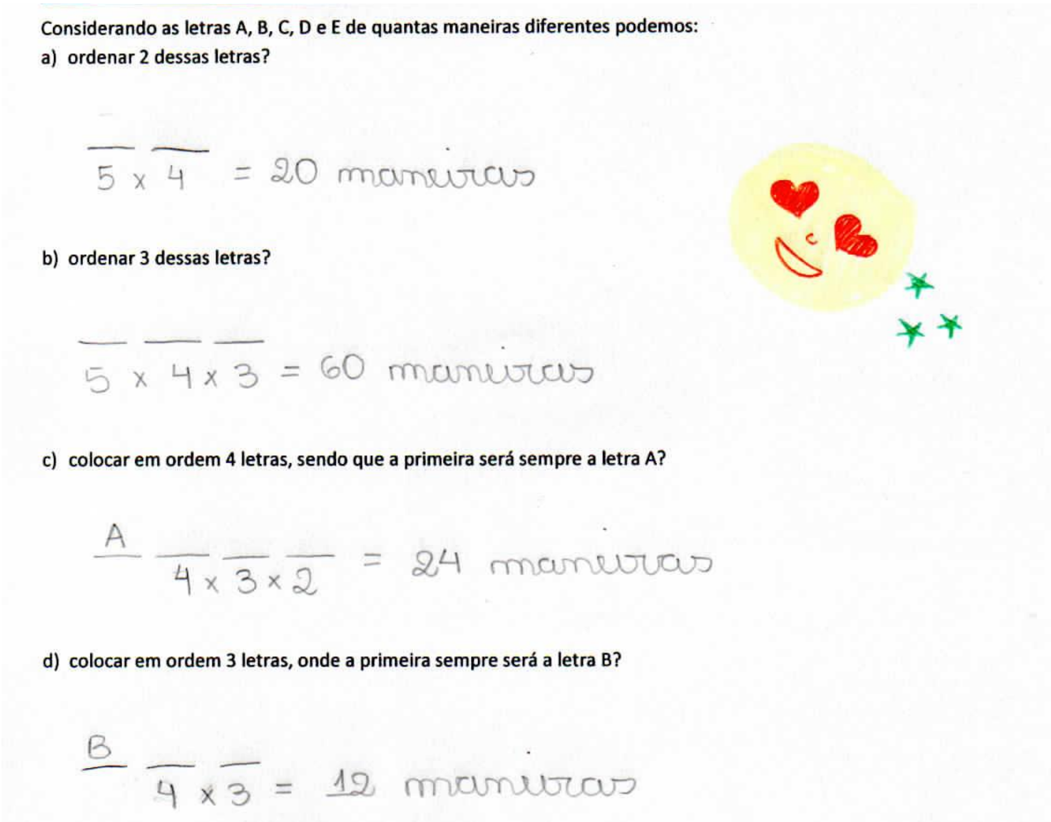
$1 \times 3 \times 2 = 6$

d) colocar em ordem 3 letras, onde a primeira sempre será a letra B?

$1 \times 3 \times 2 = 6$

Figura 12: Problema resolvido pelo aluno Y

Dentre os alunos que conseguiram encontrar a resposta para o problema proposto, a maioria analisou de forma similar à aluna Q (Figura 13), pensando sempre nas opções que havia para cada espaço a ser preenchido. A maioria dos erros aconteceu nos itens ‘c’ e ‘d’, no qual muitos não souberam o que fazer com a informação referente a primeira letra, e acabaram por realizar $5{\times}4{\times}3{\times}2$, em invés de $4{\times}3{\times}2$; e ainda $4{\times}3{\times}2$ em invés de $4{\times}3$.



Considerando as letras A, B, C, D e E de quantas maneiras diferentes podemos:

a) ordenar 2 dessas letras?

5 x 4 = 20 maneiras

b) ordenar 3 dessas letras?

5 x 4 x 3 = 60 maneiras

c) colocar em ordem 4 letras, sendo que a primeira será sempre a letra A?

A 4 x 3 x 2 = 24 maneiras

d) colocar em ordem 3 letras, onde a primeira sempre será a letra B?

B 4 x 3 = 12 maneiras

Figura 13: Problema resolvido pela aluna Q

Seguimos para o exemplo da turma de 10 alunos[48]. A primeira pergunta eles responderam com facilidade e demonstraram perceber a permutação que ocorria com os 10 alunos. Na pergunta ‘b’ e ‘c’ a turma também não demonstrou dificuldade, porém quando questionados sobre quais novas perguntas poderíamos fazer, não surgiram as perguntas esperadas, e considerei necessário intervir, pelo menos nas primeiras perguntas, para estimular os alunos no caminho que queríamos seguir.

[48] Em uma turma há 10 alunos (6 meninas e 4 meninos). Responda:
De quantas formas podemos colocar eles em fila?
De quantas formas podemos colocar apenas as gurias em fila?
De quantas formas podemos colocar apenas os guris em fila?

Perguntas inicialmente sugeridas:

- Organizar uma fileira intercalando meninas e meninos
- Organizar uma fileira: 2 meninas / 2 meninos / 2 meninas / 2 meninos / 1 menina / 1 menino
- Fazer uma fila com os meninos na frente

Como essas perguntas necessitavam de mais conteúdo ou ainda não eram possíveis com o grupo de alunos sugerido para a questão. Então intervi e sugeri:

- De quantas formas podemos fazer uma dupla que vai representar essa turma?

Ao que a aluna K sugeriu:

- De quantas formas podemos organizar dois grupos de cinco pessoas, no qual cada um precisa ter 3 meninas e 2 meninos? (deixamos essa pergunta para ser retomada no final da aula).

Eles estavam muito preocupados em responder a primeira pergunta e não em propor novas. Então coloquei mais 2 questionamentos no quadro, utilizando parte do que os alunos haviam dito:

- De quantas formas podemos formar uma dupla?
- De quantas formas podemos selecionar um grupo de 3 meninos?
- De quantas formas podemos formar um grupo com 3 meninas e 2 meninos?

Na primeira, a aluna S disse que seria apenas 10x9, ao que questionei: “Fazer a dupla Dafne e Valentina, Valentina e Dafne é a mesma coisa?” A turma ficou dividida entre *sim* e *não*, mas logo perceberam que a dupla seria a mesma. Então através de nomes como exemplos (Ana e Roberto) problematizamos no quadro a situação de escolher primeiro a Ana e depois Roberto e vice-versa. A aluna S quis dizer que a ordem da escolha faria diferença, pois tem cargo de distintos, mas a aluna T interferiu dizendo que dessa vez não havia cargo para diferenciar e que a dupla em questão estava sendo contata duas vezes. “O que podemos fazer para corrigir isso se estou contando duas vezes?” a aluna S prontamente respondeu: “Dividir por dois!”. Concluímos que podemos fazer 10x9, mas no final teríamos que dividir por 2. Em seguida, analisamos de outra forma, no qual agora após escolher essas duas pessoas “o que aconteceria se eu quisesse ordenar essas duas pessoas” e então foi introduzida a análise da “ordem desnecessária”, em que estávamos descontando/eliminando o que estava em dobro, realizando a conta $\frac{10\times9}{2\times1}$ ao invés de fazer apenas o dividido por 2.

A Resolução do Problema, 4º passo de Onuchic e Allevato (2011), realizada através dos questionamentos da professora auxiliou a turma a ver novas possibilidades na resolução do problema. Até o momento, a única ideia de “descontar” que a turma já tinha tido contato era através da subtração, em que tiramos/descontamos o que não queremos de um problema. Trabalhando com a Análise Combinatória, o ideal é que não usemos a mesma palavra para não confundir a Imagem do Conceito que os alunos têm da subtração, sendo assim, um termo mais apropriado seria eliminar. Com essa aula, tínhamos por objetivo expandir a Imagem do Conceito referente a eliminar algo que não queremos, que nesse caso se daria através do processo de divisão.

No próximo exemplo, rapidamente, a turma disse: $\frac{4\times3\times2}{3}$. Os questionei: “temos 3 pessoas, mas quantas maneiras temos de ordenar essas pessoas?”. Analisamos separadamente:

Escolher meninos: $4\times3\times2 = 24$

Ordem desses meninos que não importa: $3\times2\times1 = 6$

E por fim: $\frac{24}{6} = 4$

Alguns logo perceberam que quando a ordem faz diferença não dividimos e quando essa ordem não influencia dividimos.

A representação no quadro foi feita como $\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1} = \frac{24}{6} = 4$.

Aproveitando que eram poucos grupos, listamos as 4 opções, listando também algumas das ordens diferentes possíveis para A, B, C mostrando que o grupo é sempre o mesmo.

Percebemos que muitos alunos tentaram reproduzir a divisão por 2 do exemplo anterior, sem considerar que essa divisão era pela quantidade de formas que poderíamos reorganizar as pessoas do grupo. A Imagem do Conceito dos alunos estava em processo de expansão, tentando ainda assimilar as diferentes abordagens e maneiras de analisar o problema para resolvê-lo.

No último exemplo, iniciamos escolhendo as 3 meninas, verificando que a ordem que as escolhemos não influencia no grupo escolhido; em seguida escolhemos os 2 meninos, e novamente a ordem da escolha feita não influencia.

Meninas: $\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = \frac{120}{6} = 20$

Meninos: $\frac{4\times3}{2\times1} = \frac{12}{6} = 6$

E então conversamos que para cada uma das 20 formações de meninas, temos 6 formações possíveis de meninos, ou seja $20\times6=120$ maneiras.

Retomamos então a análise do tipo de problema que estava sedo proposto: ordem importa ou não, discutindo com os alunos o que devemos analisar nos problemas propostos para saber se devemos eliminar algo ou não. Os exemplos extras, que estavam previstos para essa aula, não foram discutidos com a turma.

3.3.9 Aula 11

Iniciamos retomando cada um dos casos que havíamos trabalhado nas aulas anteriores, analisando a quantidade de "opções para cada lugar", "formas de selecionar pessoas", "diferença entre colocados/lugares/posições":

- Anagramas da palavra DAFNE:

$$5\times4\times3\times2\times1=120$$

- De quantas maneiras podemos colocar 4 pessoas em fila?

$$4\times3\times2\times1=24$$

- De quantas maneiras podemos ter 1º e 2º lugares em uma competição com 15 pessoas?

$$15\times14=210$$

- De quantas maneiras podemos formar uma dupla dispondo de 15 pessoas?

$$\frac{15\times14}{2\times1}=\frac{210}{2}=105$$

- De quantas maneiras podemos selecionar uma dupla de representantes dispondo de 12 pessoas?

$$\frac{duplas}{repetidos}=\frac{12\times11}{2\times1}=66$$

OBS.: $repetidos = \ forma\ de\ ordenar\ que\ não\ importa$

- De quantas maneiras podemos formar um trio dispondo de 9 pessoas? (pedido/criação dos alunos)

$$\frac{trios}{repetidos}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=\frac{504}{6}=84$$

OBS.: $repetidos = \ forma\ de\ ordenar\ que\ não\ importa$

- De quantas maneiras podemos formar uma comissão de 5 pessoas dispondo de 30 alunos? (pedido/criação dos alunos com números maiores)

$$\frac{30\times29\times28\times27\times26}{5\times4\times3\times2\times1}=\frac{17\ 100\ 720}{120}=142\ 506$$

Com todos os exemplos no quadro, começamos a analisar o que faz diferença, o que não faz, se usamos todos os termos ou não. “Dividir é eliminar o que está repetindo.”. Ao longo da aula também analisamos o eliminar como: “se tenho coisas que se repetem, tenho que ter menos opções”.

De acordo com Deyfrus (2002) “uma pessoa pode criar uma ou diversas representações mentais que competem entre si para o mesmo conceito matemático” (p.31, tradução própria[49]), ou seja, se essas Imagens do Conceito trabalhadas nas aulas não estivessem claras para os alunos, elas poderiam entrar em conflito e, ao invés de amadurecê-las, os alunos estariam sobrepondo-as possivelmente fazendo uma generalização desconjunta.

Esse momento de Busca do Consenso, 8º passo de Onuchic e Allevato (2011), permitiu que os alunos, junto ao professor, analisassem os resultados para problemas anteriores, comparando e buscando semelhanças.

Após feita essa revisão foram entregues novos problemas que a turma realizou conversando e trocando ideias com os colegas próximos, a turma foi instruída que não seria necessário resolver a conta, que eles poderiam apenas indicar a mesma, uma vez que queríamos analisar se os alunos haviam compreendido o processo a ser desenvolvido, o raciocínio envolvido, sem se preocupar em respostas concretas e longos cálculo.

Alguns alunos vinham individualmente quando estavam na dúvida se a ordem das escolhas fazia diferença ou não, e eu os respondia com perguntas, que os estimulassem a raciocinar a respeito do problema.

O exemplo da *MegaSena*[50] gerou bastante polêmica com a história de ordem importar ou não. Conversamos que se eu marcar 1, 2, 3 e eles sortearem 3, 1, 2 eu continuo ganhando, ou seja, a ordem não faz diferença, logo tenho que dividir para eliminar a ordem desnecessária.

---

[49] A person may thus create a single or several competing mental representations for the same mathematical concept

[50] Sabe a *MegaSena*? É um jogo no qual escolhemos 6 números de 60 opções. Quantas combinações diferentes podemos criar?

Todos os alunos apresentaram o desenvolvimento nesse problema, com exceção do aluno D, que iniciou registrando 60x e parou aí, para então dizer que era 60!. Entre as respostas dos alunos tivemos:

Resolução apresentada	Quantidade de alunos
Resposta correta	14
$\frac{60\times59\times58\times57\times56\times55}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=\frac{60!}{6!}$	4
$\underbrace{60\times59\times58\times57\times56\times55}_{60!}$	6
$60\times59\times58\times57\times56\times55$	8

Quadro 4: Quadro analisando respostas dos alunos no problema da *MegaSena*

Percebemos que a Imagem do Conceito criada referente Fatorial para alguns alunos ficou confusa, possivelmente sendo associada a contas com números maiores, nos quais eles percebem que é inviável calcular a resposta. Apesar de terem colocado o desenvolvimento certo, interpretaram o conceito de Fatorial de forma incorreta.

Já no problema seguinte, que envolvia escolher 3 pessoas de um grupo de 32 alunos para participar do time nas *Interséries*[51], tivemos as seguintes respostas:

Resolução apresentada	Quantidade de alunos
Resposta correta	22
$\frac{32\times31\times30}{3\times2\times1}=\frac{32!}{3!}$	2
$32\times31\times30$	3
32×3	1
$\frac{32\times31\times29}{1\times3\times2}$	1
$\frac{32\times31\times30}{1\times3\times2}$	1
$3\times2\times1$	1
Em branco	1

Quadro 5: Quadro analisando respostas dos alunos do problema das *Interséries*

[51] Devemos escolher 3 pessoas para formar o time de vôlei para o jogo das *Interséries*. Como temos 32 alunos na turma, de quantas maneiras podemos escolher esse trio?

Dos 32 alunos, 22 tiveram um raciocínio que os permitiria chegar na resposta correta. Apenas duas (V e O) cometeram o mesmo erro referente ao Fatorial, mostrando que a Imagem do Conceito do mesmo não foi compreendida.

O aluno U iniciou escrevendo 32x31, porém riscou a multiplicação e escreveu apenas $3\times2\times1$. Já o aluno Y, deixou a questão em branco, enquanto no problema anterior ele havia respondido $60\times59\times58\times57\times56\times55$. Já as alunas E e R, apresentaram uma multiplicação parecida com a que deveria ser a resposta, porém trocando números de lugar. A aluna E havia respondido no problema anterior $60\times59\times58\times57\times56\times55$, e a aluna R havia utilizado o fatorial: $60\times59\times58\times57\times56\times55 = 60!$.

Podemos perceber que a Imagem do Conceito que envolve a necessidade de eliminar acontecimentos repetidos ainda não estava clara para alguns desses alunos, que possivelmente ainda precisavam da visualização das repetições para compreender que eram as mesmas.

Para esses alunos, o momento da Plenária, 7º passo de Onuchic e Allevato (2011), se torna mais importante pois suas Imagens conflitantes poderão ser amadurecidas através do diálogo com professora e colegas, uma vez que isso não ocorreu durante o 4º passo, que era a Resolução do Problema.

3.3.10 Aula 12

Os três problemas da aula anterior foram devolvidos para os alunos para que pudéssemos corrigir. A partir de Combinações alguns alunos começaram a apresentar dificuldade em lidar com o raciocínio envolvido nos problemas. Em todas as aulas estávamos reforçando a situação de “ordem importar versus ordem não importar”, verificando sempre quando essa ordem faria diferença.

Um dos passos trazidos por Tall e Yusof (1994) é a Generalização, que está inserido dentro da Busca do Consenso, 8º passo de Onuchic e Allevato (2011). Generalizar é “derivar ou induzir de casos particulares, identificar semelhanças, expandir o conhecimento” (DEYFRUS, 2002, p.35, tradução própria[52]). Na mesma obra, Tall (2002) ainda coloca que há três formas de generalização:

---

[52] To generalize is to derive or induce from particulars, to identify commonalities, to expand domains of validity.

- Generalização expansiva: o aluno agrega informação, expandindo estruturas cognitivas já existentes, mas sem modificar ideias prévias;
- Generalização reconstrutiva: o aluno reformula/reconstrói os conhecimentos já adquiridos;
- Generalização desconjunta: é um tipo desastroso, uma vez que o aluno apenas decora novas informações, sem uni-las ao conhecimento antigo.

Algumas Imagens do Conceito estavam se sobrepondo, causando conflito nas Imagens adquiridas anteriormente pelos alunos. O conceito de Permutação com parte dos elementos, que envolve apenas multiplicação e antes parecia claro para os alunos, estava agora se misturando com a necessidade de dividir para eliminar situações que foram contadas mais de uma vez.

Nem sempre conseguimos identificar em nossos alunos qual das três generalizações está acontecendo, porém percebemos que essa sobreposição das Imagens se enquadra dentro a *Generalização desconjunta*.

Após a correção os alunos receberam novos problemas. Os problemas previstos para essa aula foram alterados no decorrer dela, quando o aluno Y entregou o primeiro[53] e disse “É fácil, é tudo a mesma coisa!”. A troca dos problemas propostos ocorreu para evitar que acontecesse o que Deyfrus (2002) coloca sobre reproduzir em problemas semelhantes. Ao invés de continuarmos com problemas envolvendo apenas a Combinação, foi entregue para a turma um que exigia um pensamento diferente, o problema da sorveteria[54], que era reserva de outra aula anterior. Em seguida, eles receberam outro[55] envolvendo combinação. A ideia não era confundir o aluno, mas tentar identificar se ele estava conseguindo diferenciar as situações propostas.

3.3.11 Aula 13

Foram devolvidos os problemas da aula anterior para realizar a correção com os alunos.

---

[53] Para uma competição será necessário escolher 4 alunos de uma turma com 20 alunos. De quantas formas diferentes a escolha dos participantes dos times pode ser feita?
[54] Em uma sorveteira há 20 sabores. Quando compramos uma casquinha, só podemos colocar um sabor. De quantas maneiras 3 amigos podem fazer seus pedidos?
[55] Em um grupo de 15 pessoas queremos selecionar uma dupla. De quantas maneiras diferentes podemos fazer essa seleção?

No primeiro problema, ainda houveram alguns alunos que demonstraram dificuldade em analisar o fato de “ordem influenciar ou não”, e não demonstravam compreender a necessidade de dividir.

Resolução apresentada	Quantidade de alunos
Resposta correta	20
$\frac{20\times19\times18\times17\times16\times15}{4\times3\times2\times1}$	2
$20\times19\times18\times17$	7

Quadro 6: Análise das respostas do problema referente escolha de 4 alunos para a competição

Resolução apresentada	Quantidade de alunos
Resposta correta	8
$\frac{20\times19\times18\times17\times16\times15}{3\times2\times1}$	1
$20\times19\times18$	4
$\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}$	16

Quadro 7: Análise das respostas do problema referente a sorveteria

Resolução apresentada	Quantidade de alunos
Resposta correta	23
15×2	1
15×14	5

Quadro 8: Análise das respostas do problema referente formar dupla dispondo de 15 alunos

Analisando as respostas dos alunos nos quadros 6, 7 e 8, percebemos que a reprodução que Deyfrus (2002) ressalta ainda aparece no problema da sorveteria, no qual os alunos realizaram o mesmo que nos problemas anteriores, sem analisar o que era solicitado. Outros alunos ainda demonstravam dificuldade com a eliminação das repetições, mostrando que ainda precisavam de mais tempo para desenvolver essa

Imagem do Conceito ou até mesmo, exemplos que os permitissem uma visualização do que estava acontecendo.

Esses alunos estavam com dificuldade em abstrair e tirar conclusões a respeito das situações propostas. Deyfrus (2002) diz que a abstração está muito ligada à generalização e que essa "[...] normalmente envolve uma expansão da estrutura do conhecimento de um indivíduo, enquanto abstração geralmente envolverá uma reconstrução mental[56]" (tradução própria - p.36).

Nesse momento da Plenária, 7º passo de Onuchic e Allevato (2011), conversamos que essa ordem não importa, por isso dividimos. Essa divisão, na verdade, é *se* a ordem importasse, seria $4\times3\times2\times1 = 24$, como não faz diferença, dividimos para "eliminar a ordem que não importa".

O exemplo da sorveteria, gerou mais discussão durante a aula anterior, na resolução; os alunos não estavam esperando a mudança do "tipo de problema". E o último, de selecionar as duplas, não parece ter gerado dúvidas entre os alunos, conforme percebemos no Quadro 8.

Após a correção, foi proposto mais um problema: Há 12 meninos e 14 meninas em uma sala de aula. Para uma tarefa da gincana serão escolhidos 3 meninos e 3 meninas. De quantas maneiras podemos formar esse grupo?

Após a resolução, enquanto eu *scanneava* o problema, a turma teve tempo para se organizar para uma atividade da gincana da escola. Logo em seguida foi feita a correção. Sempre conversando em:

1º) escolher meninos -> tanto faz a ordem -> divide

2º) escolher meninas -> tanto faz a ordem -> divide

3º) multiplica resultados no fim pois para cada maneira de escolher os meninos temos tantas para escolher as meninas.

Realizada a correção do problema, foi proposto para a turma resolver a primeira questão da OBMEP – 2ª fase - 2016. O problema deveria ser resolvido de forma individual e sem consulta, o que deixou vários alunos ansiosos, mas foi explicado que a ideia era que eles primeiramente pensassem sozinhos para que depois conversássemos a respeito. Durante a resolução eu circulava entre as classes, verificando o raciocínio dos alunos e auxiliando, fazendo questionamentos, caso algum demonstrasse "não sair do lugar", o 5º passo de Onuchic e Allevato, Observar

[56] […] generalization usually involves an expansion of the individual's knowledge structure whilst abstraction is likely to involve a mental re-construction.

e Incentivar, nessa aula foi de grande importância para tranquilizar os alunos, uma vez que eles deveriam realizar os problemas propostos sozinhos, sem conversar com os colegas pela primeira vez.

Um dos principais problemas foi a leitura do enunciado. Antes, na Leitura em Grupo, 3º passo de Onuchic e Allevato (2011), os alunos tinham auxílio um dos outros para compreender o que estava sendo solicitado. Mesmo que a leitura não fosse feita com atenção, ao conversar sobre o problema, cada aluno compartilhava suas percepções, dizendo o que era solicitado. Porém agora, que só tinham a sua disposição a Leitura Individual, 2º passo de Onuchic e Allevato (2011), percebe-se que a ansiedade aumentou e a leitura não foi realizada com toda a atenção necessária. Foi necessário fazer a leitura do enunciado com a turma, explicando o que estava acontecendo; foi sugerido que os alunos listassem parte dos números para entender o que o problema solicitava, pois, a pergunta era quantos e não quais.

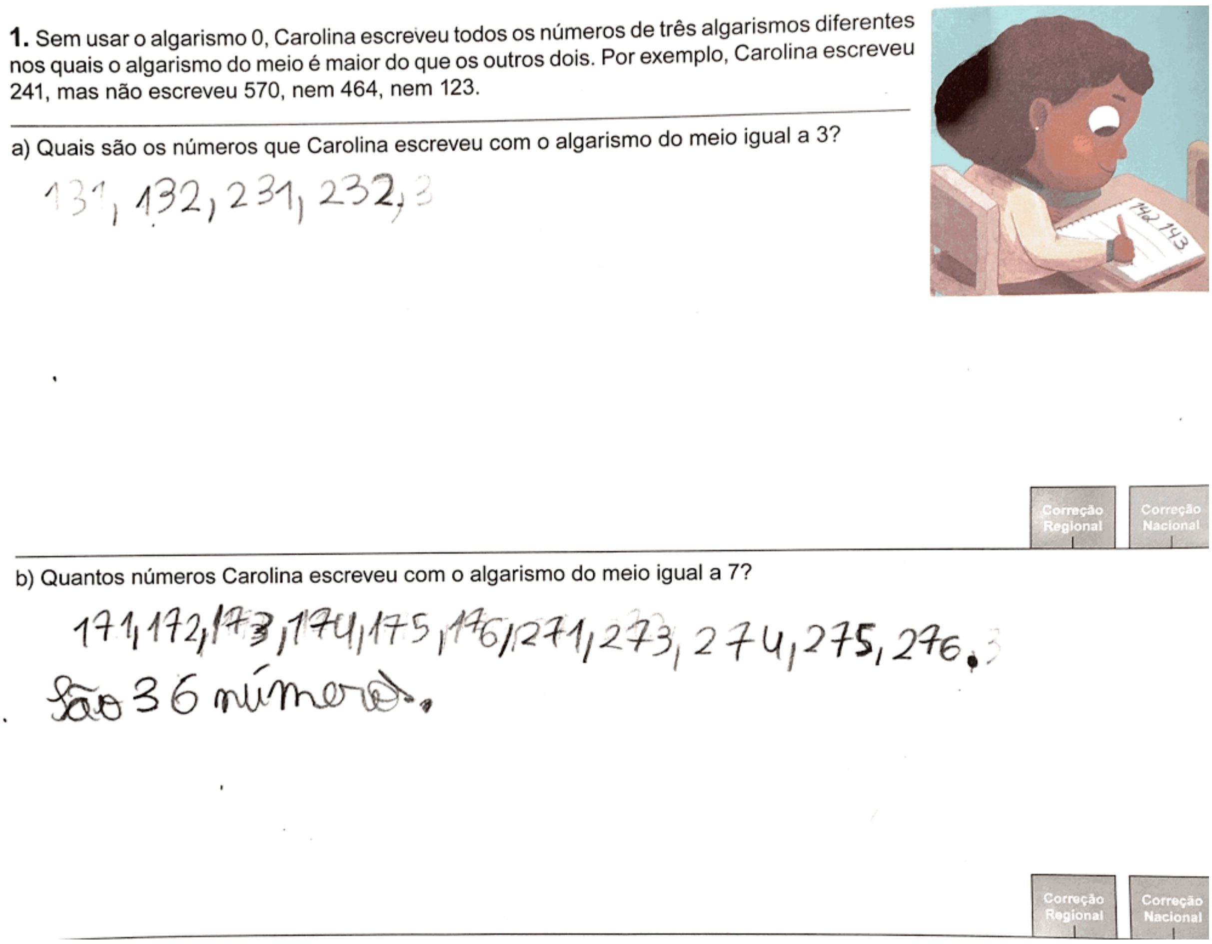
Percebemos aqui que a Leitura em Grupo é um grande aliado na Resolução do Problema, e que quando a turma foi confrontada apenas com a Leitura Individual se sentiram inseguros.

Com relação à questão da OBMEP, as respostas dos alunos ficaram distribuídas conforme segue:

- Item a:
  - 6 não apresentaram a resposta correta (alunos: P, Z, E, H, G e T)
- Item b:
  - 7 utilizaram a multiplicação, analisando opções para os três espaços 6 x 1 x 5, por exemplo
  - 4 listaram todas as possíveis combinações de números
  - 6 iniciaram listando os números possíveis, porém perceberam que sempre se repetiam em grupos de 5 (5 que começavam com 1, 5 que começavam com 2, 5 que começavam com 3, ...)
- Item c:
  - Nenhum aluno respondeu corretamente ao item c, sendo que o aluno Z deixou em branco.

No item ‘a’, o erro que 4 alunos cometeram ocorreu por falta de atenção na Leitura Individual. A não compreensão do problema impediu que ele fosse resolvido. Podemos ver que os alunos P e Z, ao responder o item ‘a’, listaram 4 números (131, 132, 231, 232) o que indica falta de atenção na Leitura Individual, pois não levaram em consideração que os algarismos deveriam ser diferentes.

Estes mesmos alunos, no item ‘b’, iniciaram listando todos os números que teriam o algarismo 7 no meio, e perceberam o padrão que acontecia, pois sempre teria a mesma quantidade de números começando com 1, com 2, com 3, etc. porém, como não estavam utilizando a informação de algarismos diferentes, o primeiro listado foi o 171, sendo que posteriormente eles contaram o 272, 373, 474, 575, 676 (Figura 14).


1. Sem usar o algarismo 0, Carolina escreveu todos os números de três algarismos diferentes nos quais o algarismo do meio é maior do que os outros dois. Por exemplo, Carolina escreveu 241, mas não escreveu 570, nem 464, nem 123.

a) Quais são os números que Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 3?

131, 132, 231, 232, 3

Correção Regional | Correção Nacional

b) Quantos números Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 7?

171, 172, 173, 174, 175, 176, 271, 273, 274, 275, 276.

São 36 números.

Correção Regional | Correção Nacional

Figura 14: Itens 'a' e 'b' da questão da OBMEP do aluno P

Já o aluno G (Figura 15), demonstrou, assim como os alunos P e Z, não ter lido o enunciado com atenção, pois apesar de ter compreendido que deveriam ser algarismos diferentes, a informação de que o algarismo do meio era sempre o maior foi deixada de lado.

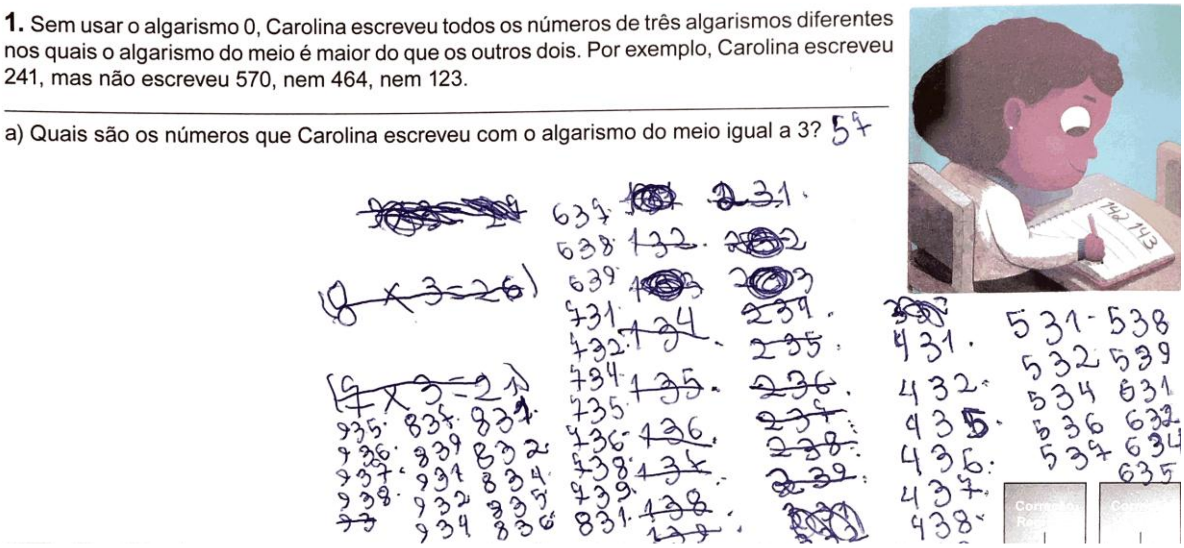


Figura 15: Resolução do aluno G

Na Figura 16 podemos ver a resolução do item ‘a’ da aluna H. A dificuldade em compreender o enunciado também a impediu de resolver o problema. A Imagem evocada pela aluna no momento de resolução foi com relação a “quantos números de três algarismos distintos podemos formar”. Entretanto, não se pode afirmar se a aluna H considerou apenas 9 algarismos (excluindo o 0 como indicado no problema), ou se considerar apenas 9 algarismos também foi um erro por não ter lembrado do algarismo zero.

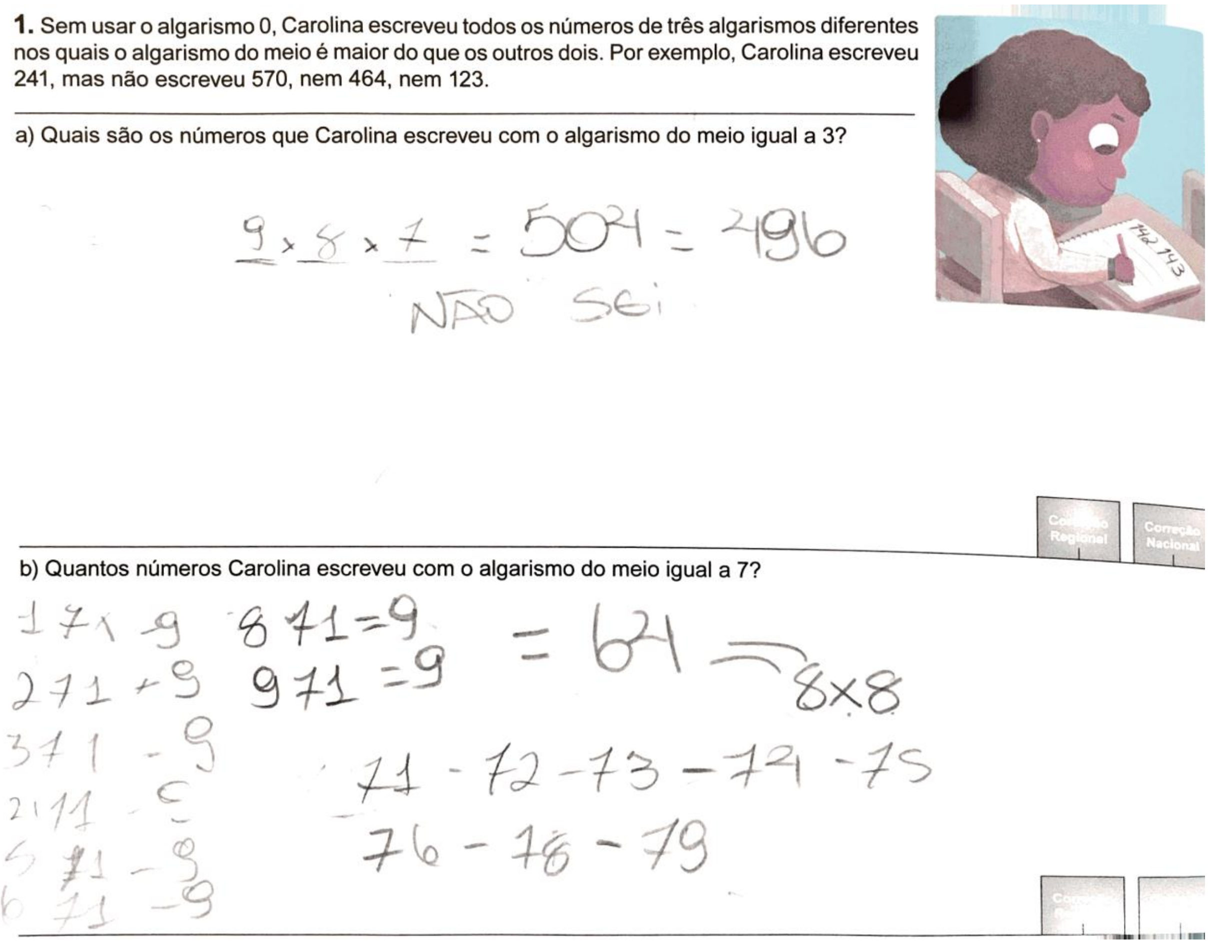
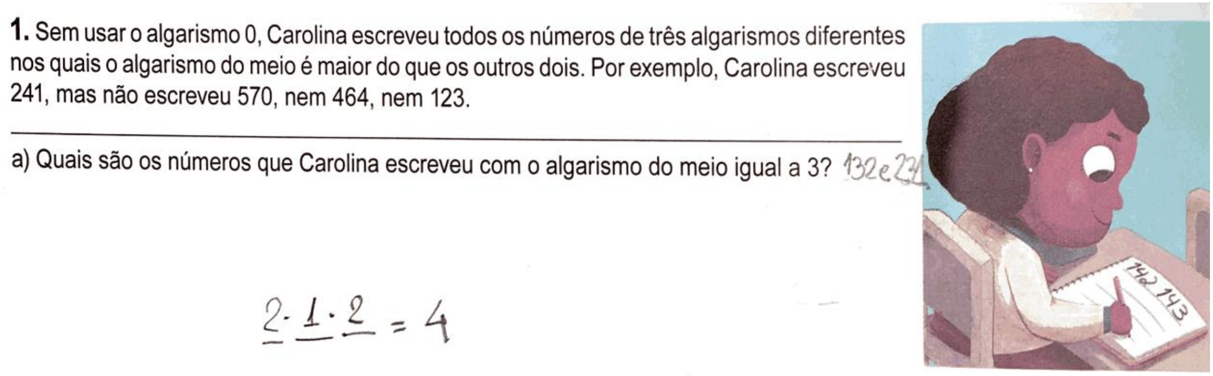


Figura 16: Resolução da aluna H

Ao responder o item ‘b’, a aluna H disse que haviam 9 números que começavam com 17_, 9 números que iniciavam com 27_, 9 números que iniciavam com 37_, etc posteriormente podemos ver que ela listou os possíveis finais do número e percebeu que havia apenas 8 finais possíveis, pois 77 não é uma opção (por repetir algarismos), e com isso disse que havia 64 números. Desconsiderando o fato que o algarismo do meio deveria ser o maior.

As Figuras 17 e 18, trazem os trabalhos das alunas T e E, que parecem ter compreendido o que o problema solicitava, porém cometeram erros que remetem aos passos de David Tall na Resolução do Problema, em que o processo de Refinação da Resposta não aconteceu. A aluna E disse *quais* eram os números, porém coloca que haviam duas opções para a escolha do primeiro algarismo e duas opções para a escolha do terceiro algarismo. Já a aluna T demostrou ter compreendido que havia duas opções para o primeiro algarismo e apenas uma para o terceiro, além de fazer referência ao algarismo do meio, mostrando que havia apenas uma opção, porém não respondeu a pergunta “*Quais são...?*”.

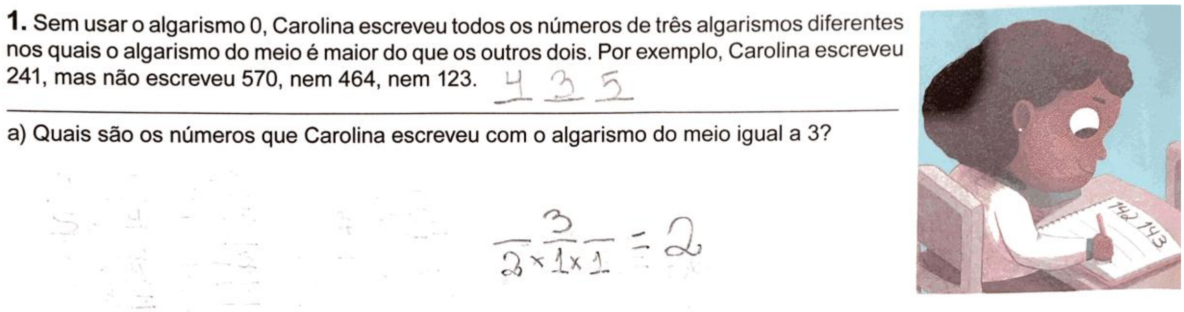


1. Sem usar o algarismo 0, Carolina escreveu todos os números de três algarismos diferentes nos quais o algarismo do meio é maior do que os outros dois. Por exemplo, Carolina escreveu 241, mas não escreveu 570, nem 464, nem 123.

a) Quais são os números que Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 3? 132e23

$\underline{2}\cdot\underline{1}\cdot\underline{2} = 4$

Figura 17: Resolução da aluna E



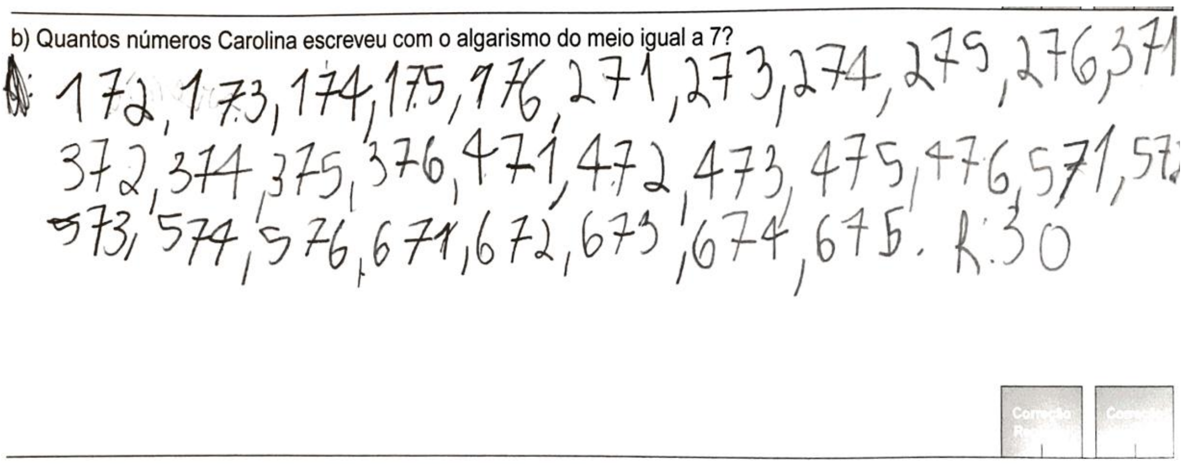
1. Sem usar o algarismo 0, Carolina escreveu todos os números de três algarismos diferentes nos quais o algarismo do meio é maior do que os outros dois. Por exemplo, Carolina escreveu 241, mas não escreveu 570, nem 464, nem 123. 4 3 5

a) Quais são os números que Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 3?

$\frac{3}{2\times 1\times 1} = 2$

Figura 18: Resolução da aluna T

As Figuras 19, 20 e 21, mostram os três meios que possibilitaram os alunos a resolver o item ‘b’. Dentre os alunos que erraram essa pergunta, os erros mais comuns foram listar e contar errado, ou então colocar 7!.



b) Quantos números Carolina escreveu com o algarismo do meio igual a 7?

A: 172, 173, 174, 175, 176, 271, 273, 274, 275, 276, 371, 372, 374, 375, 376, 471, 472, 473, 475, 476, 571, 572, 573, 574, 576, 671, 672, 673, 674, 675. R: 30

Figura 19: Desenvolvimento aluno X

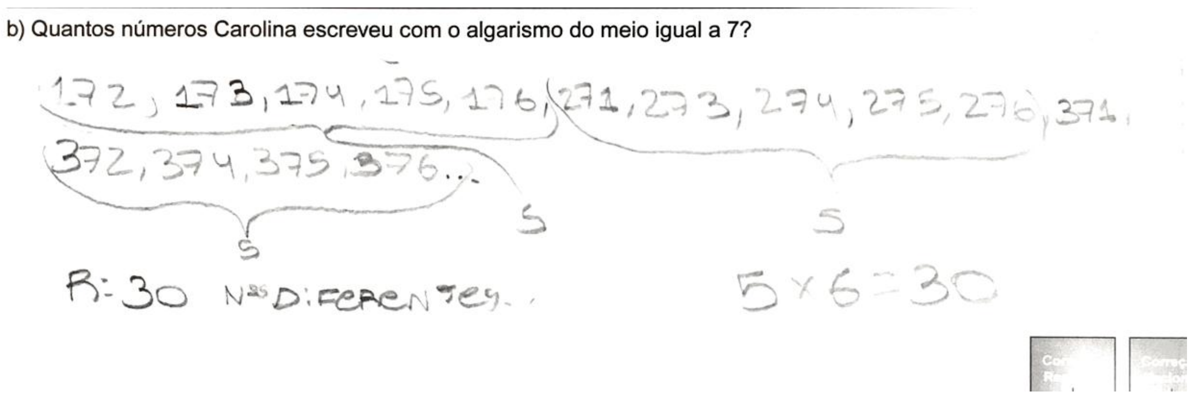


Figura 20: Desenvolvimento aluno W

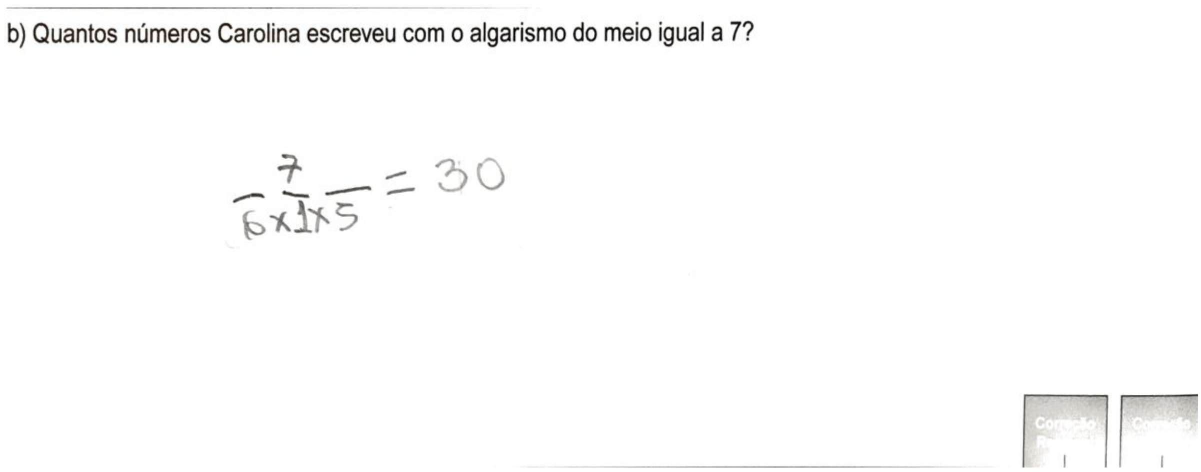
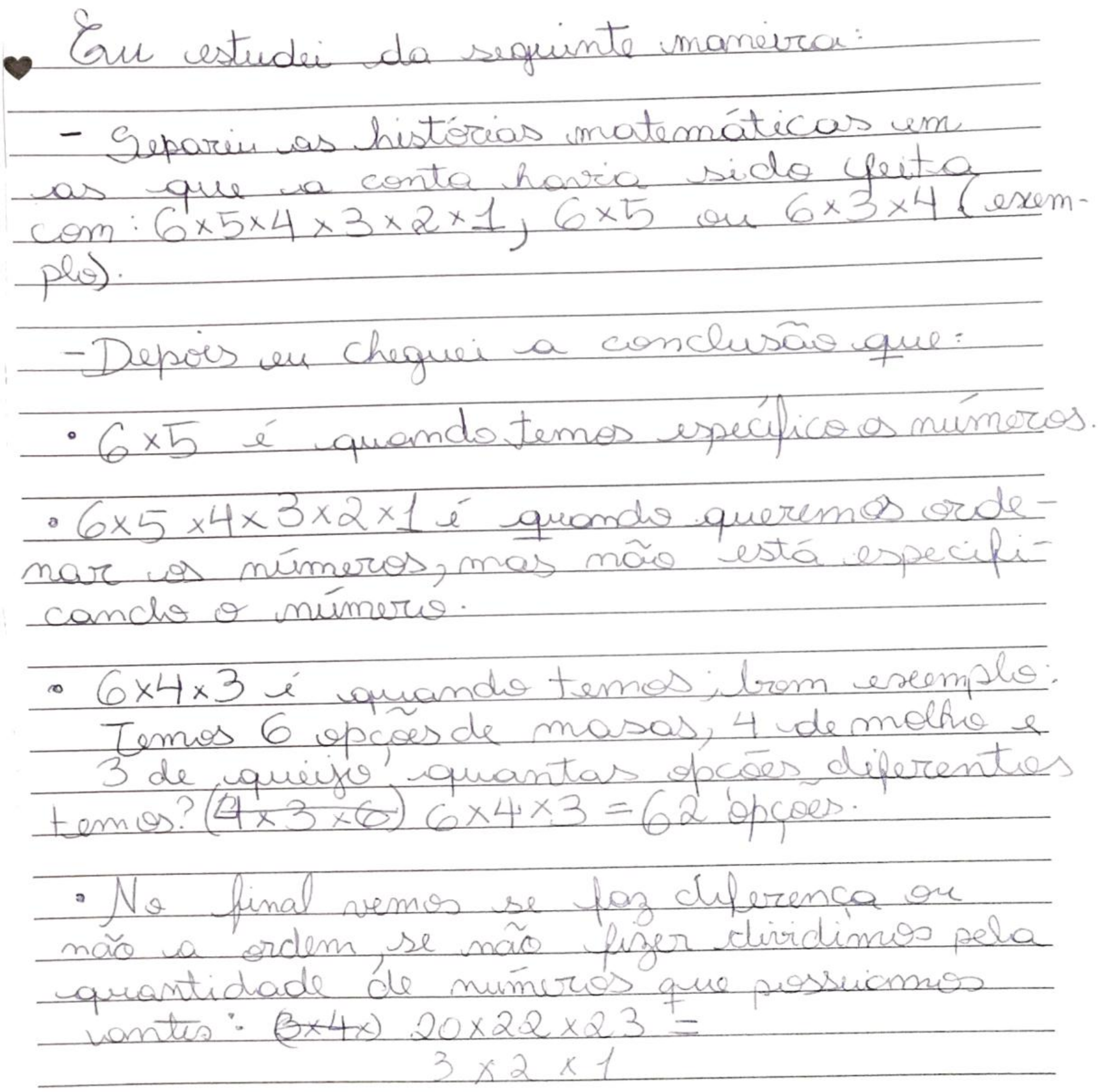


Figura 21: Desenvolvimento aluna T

E por fim, no item ‘c’, três respostas apareceram com maior frequência:

- $10{\times}9{\times}8 = 720$ números, o que mostra a Imagem do Conceito que os alunos tem com relação a frase “...escreveu ao **todo**”, ou seja, os alunos evocaram o total de números de três algarismos distintos.
- $9{\times}8{\times}7 = 504$ números, demonstrando que pensaram em todos os números de três algarismos diferentes, porém, como na situação anterior da aluna H, não há como afirmar se eles pensaram em 9 algarismos ou se utilizaram a informação de que o zero não podia ser utilizado.
- 32 números, em que percebe-se que os alunos somaram os 2 números do item ‘a’ e os 30 números do item ‘b’, sem se preocupar com as outras combinações de algarismos.



Eu estudei da seguinte maneira:

- Separei as histórias matemáticas em as que a conta havia sido feita com: 6x5x4x3x2x1, 6x5 ou 6x3x4 (exemplo).

- Depois eu cheguei a conclusão que:

• 6x5 é quando temos específico os números.

• 6x5x4x3x2x1 é quando queremos ordenar os números, mas não está especificando o número.

• 6x4x3 é quando temos, bem exemplo: Temos 6 opções de masas, 4 de molho e 3 de queijo, quantas opções diferentes temos? (~~4x3x6~~) 6x4x3 = 62 opções.

• No final vemos se faz diferença ou não a ordem, se não fizer dividimos pela quantidade de números que possuímos antes: (~~3x4x~~) $\frac{20 \times 22 \times 23}{3 \times 2 \times 1} =$

Figura 22: Resumo elaborado pela aluna M

Finalizando a análise das aulas, trazemos o resumo elaborado pela aluna M (Figura 22), que já na primeira aula demonstrava a preocupação com o registro e a Formalização do Conteúdo. Sua vontade de registrar o que havia sido trabalhado lhe estimulou a analisar todos os problemas propostos, separando-os por *tipo*[57], e anotando exemplos que lhe auxiliassem a perceber as diferenças nas situações trabalhadas, ou seja, ela analisou padrões que posteriormente a permitissem resolver novos problemas.

Reforçamos que não tinha como objetivo introduzir a Definição do Conceito com os alunos, pois buscávamos trabalhar as Imagens dos Conceitos, explorando o

[57] Forma que a aluna se referiu às diferentes situações propostas.

raciocínio dos educandos, através da Resolução de Problemas. Vinner (2002) ressalta que dizer o Nome do Conceito pode auxiliar o aluno, porém, apesar de não formalizarmos os conceitos trabalhados, estávamos constantemente conversando e relembrando as diferentes situações envolvidas na análise do problema proposto.

A participação dos alunos em todas as aulas foi extremamente importante para o bom andamento da sequência didática planejada. O engajamento da turma em colaborar com os registros e contribuir durante as Plenárias, possibilitaram discussões que promoveram a expansão das Imagens dos Conceitos dos alunos.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para responder à questão norteadora, nos apoiamos na Resolução de Problemas, de Onuchic e Allevato, seguindo passos propostos pelas autoras, na elaboração da sequência didática e na dinâmica em sala de aula. Além da Resolução de Problemas, utilizamos a teoria de David Tall, analisando as Imagens dos Conceitos dos alunos, relacionando os passos que Tall e Yusof (1994) trazem para o pensamento matemático durante a resolução de um problema, tentando compreender de que forma esses educandos evocavam e expandiam seu conhecimento referente à Análise Combinatória.

Temos evidências a partir dos dados coletados que a Resolução de Problemas auxiliou os alunos a expandir as Imagens do Conceito referente à multiplicação, permitindo que fosse possível analisar e interpretar os diversos problemas propostos envolvendo Análise Combinatória. Estávamos constantemente tentando provocar os alunos a participar e se interessar por esses novos conceitos que estavam sendo abordados em aula e percebemos, ao finalizar a leitura do material produzido pelos alunos, assim como as anotações e assistir as gravações, que atingimos o nosso objetivo.

Tall (2002) acredita que um novo conhecimento pode conflitar com um conhecimento antigo e que um conhecimento pode ser reconstruído, se aperfeiçoando e amadurecendo. Durante a análise da sequência didática aplicada, podíamos perceber, em diversos momentos, através das contribuições dos alunos, que eles estavam em constante aprendizado, aperfeiçoando sua maneira de pensar, amadurecendo suas ideias e fazendo conexões entre conteúdos anteriores e o que era proposto agora.

Através da estrutura da Resolução de Problemas de Onuchic e Allevato, aliada à Teoria de David Tall, pudemos estruturar a sequência didática e a dinâmica de sala de aula passando por 8 dos 9 passos. Desde a Preparação dos Problemas até a Busca do Consenso, deixando apenas o último passo, Formalização do Conteúdo de fora, percebemos que a turma se engajava cada vez mais com a sua própria aprendizagem, mostrando interesse e querendo participar e contribuir sempre que possível.

Analisando cada um dos passos propostos na Teoria da Resolução de Problemas, percebemos que todos foram contemplados no decorrer da aplicação da sequência didática. As Leituras Individuais e em Conjunto possibilitavam aos alunos conversar sobre o que o problema solicitava, permitindo que a Resolução do Problema ocorresse, conforme Onuchic e Allevato (2011) colocam, após os alunos terem a compreensão do problema proposto. Ressaltamos novamente que a Leitura em Grupo é um grande aliado na Resolução do Problema, já que quando confrontados apenas com a Leitura Individual, diversos alunos se sentiram inseguros.

O momento de Observar e Incentivar auxiliava alunos que não conseguiam avançar no problema a pensar de outra forma, através dos questionamentos do professor, e ainda, permitia que os grupos com diferentes visões sobre o mesmo problema pudessem compreender que há diferentes formas de chegar a mesma reposta.

E por fim, as Plenárias, nas quais os alunos defendiam o seu ponto de vista, mostrando aos colegas os diferentes raciocínios envolvidos no problema, para que pudessem juntos concluir resultados e Buscar o Consenso. Para alguns alunos os momentos da Plenárias eram ainda mais importantes, pois além das discussões e diversos pontos de vista sendo expostos, os eventuais desenhos/esquemas no quadro, possibilitavam a visualização do problema.

Houve momentos em que parte da turma demonstrava tédio com relação a algum desenho ou esquema feito no quadro, enquanto outros alunos ainda tinham um olhar apreensivo de quem ainda não tem suas dúvidas esclarecidas. Situações como essa só reforçam que precisamos constantemente nos lembrar que o óbvio nem sempre é tão óbvio assim. Deyfrus (2002) coloca que quanto mais sabemos, mais difícil fica de lembrarmos o como aprendemos.

Muitas vezes temos dificuldade em compreender qual é a dificuldade de nossos alunos, pois a nossa Imagem do Conceito já sofreu inúmeras expansões, que as vezes nos impedem de voltar ao início quando ela ainda estava em formação. Devemos sempre refletir a respeito do caminho no qual estamos guiando nossos alunos, buscando promover a possibilidade da descoberta e de momentos de criatividade, em que nossos educandos estarão engajados na sua própria aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ATZ, Dafne. **Análise Combinatória: Noções Básicas e Um Estudo das Funções Geradoras**. Trabalho de Conclusão (Licenciatura em Matemática). Universidade do Vale do Rio dos Sinos. São Leopoldo, 2014.

BIGGS, N. L. **The roots of combinatorics.** Revista Historia Mathematica, vol. 6, p.109-136, 1979. Disponível em: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086079900740. Acesso em 30 out. 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática 6 (2.ed.)**. São Paulo: Ática, 2015.

DEYFRUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Process. In: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, p. 25-41, 2002.

ERVYNCK, Gontran. Mathematical Creativity. In: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, p. 42-53, 2002.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática.** Campinas, SP: Autores associados, 2006.

GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada.** Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

MORGADO, Augusto César; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João Bosco; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9 ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1991.

ONUCHIC, L. R.. **A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? para onde iremos?**. Espaço Pedagógico, v. 01, p. 88-104, 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

ONUCHIC, L. R.; LEAL JR, L. C. . **A Influência da Leitura na Resolução de Problemas: Questões de sentidos, significados, interesses e motivações**. REMATEC. Revista de Matemática, Ensino e Cultura (UFRN), v. 1, p. 24-46, 2016.

PONTE, J. P. **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema, 25, 105-132. (2006)

SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C.. **Introdução à Análise Combinatória***.* 2 ed. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 1998.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática: compreensão e prática 6 (2.ed.)**. São Paulo: Moderna, 2013.

STACEY, Kaye. **What is Mathematical Thinking and Why is Important**. (2013).

TALL, D.; VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity**. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169, (1981).

TALL, D.; YUSOF, Y.B.M. **Changing Attitudes do Mathematics through Problem Solving.** Proceedings of the Eighteenth Conference for the Psychology of Mathematics Education. Lisboa, Portugal, IV, p. 401-408, 1994.

TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

TALL, David. **Changing Attitudes to Mathematics through Problem Solving** (1994).

TALL, David. **How Humans Learn to Think Mathematically**. New York, NY – USA: Cambridge University Press, 2013.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI F. C. H.. **Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica***.* In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife: ANAIS – VIII ENEM, 2004.

VINNER, Shlomo. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, p. 65-81, 2002.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. R. **O Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores**. Unión (San Cristobal de La Laguna), v. 11, p. 79-97, 2007.

ANEXO A – TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

Eu, ____, R.G. ________________, responsável pelo(a) aluno(a) ______________________________________, da turma ___________, declaro, por meio deste termo, que concordei em que o(a) aluno(a) participe da pesquisa intitulada **O Estudo da Análise Combinatória no Ensino Fundamental Anos Finais**, desenvolvida pela pesquisadora Dafne Atz. Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada por Marilaine de Fraga Sant'Ana, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail marilaine@mat.ufrgs.br.

Tenho ciência de que a participação do(a) aluno(a) não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que, em linhas gerais, são:

- Elaborar uma proposta didática em que os alunos possam explorar conceitos de análise combinatória através de atividades envolvendo a resolução de problemas
- Identificar nos trabalhos elaborados pelos alunos sua forma de raciocinar em matemática
- Identificar possíveis contribuições do uso da resolução de problemas para a aprendizagem de conceitos de análise combinatória

Fui também esclarecido(a) de que os usos das informações oferecidas pelo(a) aluno(a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), identificadas apenas pela inicial de seu nome e pela idade.

A colaboração do(a) aluno(a) se fará por meio de entrevista/questionário escrito etc, bem como da participação em oficina/aula/encontro/palestra, em que ele(ela) será observado(a) e sua produção analisada, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito às tarefas desenvolvidas. No caso de fotos, obtidas durante a participação do(a) aluno(a), autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do(a) aluno(a) se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que, caso eu tenha dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o(a) pesquisador(a) responsável via e-mail dafneatz@gmail.com.

Fui ainda informado(a) de que o(a) aluno(a) pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

São Leopoldo, _____ de ________________ de _______.

Assinatura do Responsável:

Assinatura do(a) pesquisador(a):

Assinatura do Orientador da pesquisa:

ANEXO B – PRODUTO FINAL

Disponibilizamos o Produto Final elaborado após a aplicação da sequência didática elaborada para essa dissertação. Ressaltamos desde já que o Planejamento original sofreu pequenas alterações referente a ordem de problemas propostos ao ser compilado no roteiro apresentado a seguir.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL - UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

DAFNE ATZ

CONCEITOS INICIAIS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA
PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS UTILIZANDO A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PRODUTO FINAL

PORTO ALEGRE
2017

SUMÁRIO

1 PRODUTO FINAL

A seguir apresentamos um roteiro didático para professores que contém uma introdução aos conceitos básicos de Análise Combinatória e, em seguida, um plano de aula para o 6º ano do Ensino Fundamental.

O plano de aula visa trabalhar, através da resolução de problemas, situações que, ao nosso ver, instigam o aluno a pensar como a Análise Combinatória funciona, sem se prender a fórmulas e formalização de conceitos. Ressaltamos ainda que algumas questões sofreram alterações se comparadas à sequência didática aplica na pesquisa visando uma melhor aplicação.

Esperamos que o aluno, ao final deste roteiro, seja capaz de interpretar e resolver situações envolvendo:

- O conceito de fatorial de um número;
- O Princípio da Adição;
- O Princípio Fundamental da Multiplicação;
- Permutações Simples;
- Permutações com Repetição;
- Combinação Simples.

O resumo para o professor e as atividades a seguir pretendem contemplar esses tópicos.

2 RESUMO DO PROFESSOR

O texto a seguir foi retirado do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática de Dafne Atz, realizado em 2014. Ele tem por objetivo guiar o leitor através de uma breve história da Análise Combinatória, que há muitos anos é foco de estudo de diversos matemáticos.

Em seguida, adaptando o Trabalho referido, trazemos alguns dos conceitos básicos da Análise Combinatória, que posteriormente são trabalhados no Planejamento proposto.

2.1 Uma breve contextualização histórica da Análise Combinatória

De acordo com Atz (2014):

O Cálculo Combinatório, como também é conhecida a Análise Combinatória, teria surgido devido à necessidade do homem de calcular maneiras seguras de vencer em jogos de azar, tais como dados e baralhos.

A primeira aparição na história parece ser o Problema 79 do Papiro de Rhind, que data de 1650 a.C.: "*Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat*[1] *de grãos; quantos itens têm ao todo?"*. Mas não há garantias quanto a resposta do problema.

Biggs, em seu artigo de 1979, relata que há uma charada datada de pelo menos 1730, e para resolvê-la há um truque:

> *Quando eu estava indo para St. Ives,*
> *Eu encontrei um homem com sete mulheres,*
> *Cada mulher tinha sete sacos,*
> *Cada saco tinha sete gatos,*
> *Cada gato tinha sete caixas,*
> *Caixas, gatos, sacos e mulheres,*
> *Quantos estavam indo para St. Ives?*

[1] Hekat é uma unidade de medida egípcia para grãos, que representa 4,8 litros.

Resolução: uma vez que o narrador estava indo para St. Ives, ele encontrou no caminho o homem, as mulheres, gatos e caixas, que supostamente estariam indo para o lado oposto, o que nos possibilita duas respostas: se o narrador pergunta quem estava indo para St. Ives a resposta seria ninguém, porém se contarmos o narrador a resposta seria uma pessoa.

Há também um problema no *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (Fibonacci), que data de 1202: "*Sete mulheres velhas estão indo para Roma; cada uma delas têm sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; e cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?"*. Este problema poderia ou não ter gerado a charada anterior, mas não há confirmações.

De acordo com Vazquez e Noguti:

> A teoria combinatória apareceu como um capítulo novo da Matemática em fins do século XVII e dentro de poucos anos três notáveis livros surgiram: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665) de Pascal, *Dissertatio de arte combinatória* (1666) de Leibniz e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher e também em trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre (1718). (VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI F.C.H.. *Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica.* Anais do VIII ENEM)

Uma das grandes contribuições de Pascal foi o "Triângulo de Pascal". Apesar de os chineses já conhecerem este triângulo muitos anos antes, foi Pascal que mostrou a maioria de suas propriedades.

2.2 Definições Importantes

Com estas definições, retiradas de Atz (2014), buscamos guiar o leitor nos principais conceitos trabalhados ao longo da pesquisa, proporcionando exemplos, em sua maioria adaptados de Atz (2014), e base teórica para a realização do Planejamento.

Definição 2.2.1. *Dizemos que o* fatorial *de um número* $n \in \mathbb{N}$ *é o produto de todos os números inteiros positivos desde 1 até* n*, ou seja,* $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$*. Comumente colocamos estes fatores em ordem para facilitar os cálculos. Define-se, por conveniência,* $0! = 1$*.*

Definição 2.2.2. *(*Princípio da Adição*): Dados n conjuntos dois a dois disjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$, com $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementos, respectivamente, então $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ possui $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ elementos.*

Exemplo 2.2.1. Uma turma contém 15 meninas e 17 meninos. Quantos alunos há no total?O total de alunos é dado pela quantidade de meninas e meninos junta, logo: $15 + 17 = 31$ alunos.

Definição 2.2.3. *(*Princípio Fundamental da Multiplicação*): Se uma decisão d_1 pode ser feita de x maneiras, e para cada decisão x uma decisão d_2 pode ser feita de y maneiras, então $x \cdot y$ é o número de maneiras que podemos tomar as decisões d_1 e d_2.*

Exemplo 2.2.2. *Sabendo que, no Brasil, os automóveis possuem placas contendo 3 letras (alfabeto com 26 letras) seguidas de 4 dígitos (0, 1, 2, 3, …, 8, 9), determine quantas são as combinações possíveis sem termos o conflito de placas iguais.*

Como temos 26 opções para cada uma das três letras da placa, segue que:

$$\underbrace{26}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 1^a\ letra}} \cdot \underbrace{26}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 2^a\ letra}} \cdot \underbrace{26}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 3^a\ letra}} = 26^3 = 17\,576$$

Além disso, temos 10 algarismos possíveis para o número, que deve ser formado por 4 algarismos, logo:

$$\underbrace{10}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 1^o\ alg.}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 1^o\ alg.}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 1^o\ alg.}} \cdot \underbrace{10}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 1^o\ alg.}} = 10^4 = 10\,000$$

Porém a placa com a numeração 0000 não é utilizada, o que nos tira uma das $10\,000$ opções para o número e ficamos com $10^4 - 1 = 10\,000 - 1 = 9\,999$ combinações possíveis de números com 4 algarismos.

Com isso podemos concluir que há $26^3 \cdot (10^4 - 1) = 175\,742\,424$ possíveis placas de carro no Brasil.

Exemplo 2.2.3. *Em um torneio internacional de natação participaram cinco atletas europeus, dois americanos e um brasileiro. De quantos modos distintos poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?*

Como são 3 colocações distintas e 8 atletas, temos:

$$\underbrace{8}_{\substack{atletas\\ para\ a\\ medalha\\ de\ ouro}} \cdot \underbrace{7}_{\substack{atletas\\ para\ a\\ medalha\\ de\ prata}} \cdot \underbrace{6}_{\substack{atletas\\ para\ a\\ medalha\\ de\ bronze}} = 336$$

Logo, 336 maneiras de termos as 3 colocações finais.

Exemplo 2.2.4. *Quantos anagramas de 3 letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 23 letras?*

Temos 23 opções de letras para a primeira escolha, 22 para a segunda escolha e 21 para a terceira, logo:

$$23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\ 626$$

Portanto há $10\ 626$ anagramas.

Definição 2.2.4. *(*Permutações Simples*): Dados n objetos distintos, com $n > 1$, podemos ordená-los em $n!$ modos diferentes, pois temos: n opções para na primeira seleção, $(n-1)$ para escolher o segundo objeto, $(n-2)$ opções para a terceira seleção, e assim sucessivamente, até termos apenas 1 opção e um objeto restante. Representamos a permutação simples por: $P_n = n!$.*

Um exemplo muito comum da utilização das permutações simples é quando trabalhamos com anagramas (veja exemplo 2.2.5). Anagrama é uma reorganização das letras de uma palavra ou frase, visando produzir outras palavras, utilizando todas as letras iniciais uma única vez.

Exemplo 2.2.5. *Quantos são os anagramas que podemos formar com as letras da palavra LIVRO?*

Temos cinco alternativas de letras distintas entre si, logo $P_5 = 5! = 120$ anagramas.

Analisando através do Princípio Fundamental da Multiplicação, podemos dizer que:

$$\underbrace{5}_{\substack{opções\\para\ a\\1^a letra}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{opções\\para\ a\\2^a letra}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{opções\\para\ a\\3^a letra}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\ a\\4^a letra}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{opções\\para\ a\\5^a letra}} = 5! = 120$$

Exemplo 2.2.6. *Considerando a palavra CAPÍTULO, quantos anagramas podemos formar considerando que as vogais devem permanecer juntas?*

Temos 4 vogais e 4 consoantes. Queremos que as 4 vogais fiquem sempre juntas, porém, sua ordem não nos importa. Sendo assim, podemos analisar as 4 vogais como um único elemento, totalizando 5 que devemos permutar: $P_5 = 5! = 120$.

$$\underbrace{4\ vogais}_{elem.1} \cdot \underbrace{consoante\ 1}_{elem.2} \cdot \underbrace{consoante\ 2}_{elem.3} \cdot \underbrace{consoante\ 3}_{elem.4} \cdot \underbrace{consoante\ 4}_{elem.5} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$$

Uma vez que a ordem das 4 vogais não importa, temos que considerar as diferentes ordens que elas podem assumir, pois poderíamos ter AÍOU, OUAÍ, UÍOA, etc. Sendo assim: $P_4 = 4! = 24$.

$$\underbrace{4}_{\substack{opções\\para\ a\\1^a\ vogal}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{opções\\para\ a\\2^a\ vogal}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\ a\\3^a\ vogal}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{opções\\para\ a\\4^a\ vogal}} = 4!$$

Como para cada uma das 120 maneiras de organizar os nossos 5 elementos, teríamos ainda 24 maneiras de organizar o elemento das 4 vogais, ficamos com

$$120 \cdot 24 = 2\,880$$

ou seja, $2\,880$ maneiras de formar esses anagramas.

Definição 2.2.5. *(*Combinações Simples*): Dados n elementos distintos, uma combinação simples é quando queremos encontrar quantos subconjuntos podemos formar com p elementos dos n iniciais ($n > p$), sem preocuparmo-nos com a ordem. Além disso, podemos enxergar a combinação simples como a forma de selecionar p elementos dos n iniciais sem que a ordem desta seleção interfira. Esta combinação é dada através da fórmula: $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (lê-se: combinação de n p a p).*

Dedução da fórmula.

Queremos escolher p elementos de n elementos disponíveis e a ordem da escolha dos p elementos não interfere nosso resultado final.

Como não estamos usando todos os n elementos, precisamos eliminar aqueles que não são utilizados, que são $n - p$. Segue que temos $\frac{n!}{(n-p)!}$ maneiras de escolher esses elementos. Além disso, a ordem dos p elementos selecionados não importa e também deve ser eliminada, ou seja, as $p!$ maneiras de ordenar esses p elementos.

Então, dividindo o número total de maneiras que podemos escolher o p dos n elementos pelo número de possíveis repetições que teríamos destes p elementos, obtemos: $C_n^p = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Logo, $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. ■

As combinações simples também são representadas em diversos livros através das seguintes notações: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ e ainda $C(p,n) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemplo 2.2.7. *Dado o conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$, quantos são os subconjuntos que podemos formar contendo 2 elementos?*

Através da fórmula:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \text{ subconjuntos.}$$

Através de raciocínio combinatório:

Temos $5 \cdot 4 = 20$ maneiras de formar grupos com dois elementos, porém a ordem dos elementos não altera o grupo formado, eliminamos então as repetições, que são as permutações de 2 elementos:

$$2 \cdot 1 = 2$$

Logo,

$$\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10 \text{ subconjuntos.}$$

Exemplo 2.2.8. *Há 15 estações num ramal de estrada de ferro. Quantos tipos de bilhetes de passagem são necessários para permitir a viagem entre 2 estações quaisquer?*

Através da fórmula:

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15.14.13!}{2!13!} = 15.7 = 105 \text{ tipos de bilhetes.}$$

Através de raciocínio combinatório:

Como temos 15 estações e queremos conectar duas, há $15 \cdot 14 = 210$ trechos que podem ser realizados entre essas estações.

Porém, estamos preocupados com quantidade de trechos diferentes, logo não importa se estamos indo da estação ‘A’ para a estação ‘B’ ou vice-versa, então precisamos eliminar as 2 repetições de cada trecho, e com isso temos $\frac{15\cdot 14}{2} = \frac{210}{2} = 105$ tipos de bilhetes.

Exemplo 2.2.9. *Em uma turma há 28 alunos. De quantas maneiras podemos escolher uma comissão de 4 alunos para representar a turma em uma atividade da escola?*

Através da fórmula:

$$C_{28}^{4} = \frac{28!}{4!(28-4)!} = \frac{28!}{4!24!} = \frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24!}{4!24!} = \frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{4!} = \frac{491\,400}{24} = 20\,475 \text{ maneiras.}$$

Utilizando um raciocínio combinatório:

Temos 28 alunos para escolher 1 primeiro a participar da comissão, 27 opções para o segundo, 26 opções para o terceiro e 25 opções para o quarto aluno:

$$28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 = 491\,400$$

Porém, a ordem dos alunos escolhidos não faz diferença, pois não há colocações nem cargos diferentes a serem preenchidos, portanto, nessas 491.400 maneiras há repetições de grupos. Devemos eliminar então as $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de organizar os 4 alunos escolhidos e teremos:

$$\frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{491\,400}{24} = 20\,475 \text{ maneiras.}$$

Definição 2.2.6. *(*Permutações com repetição*): Dados n objetos não distintos, com $n > 1$, seja $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ representam a quantidade de elementos repetidos, ou não, de parte destes n objetos. Então a permutação com elementos repetidos é dada através da fórmula: $P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_k!}$.*

Dedução da fórmula.

Se fossemos utilizar combinações simples para definirmos o número de maneiras possíveis de ordenar estes n elementos, teríamos: $C_n^{\alpha_1}$ maneiras de ordenar os α_1 elementos, $C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2}$ maneiras para os α_2 elementos, …, $C_{n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k-1}}^{\alpha_k}$ para os α_k elementos restantes, ou seja:

$$P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k} = C_n^{\alpha_1} \cdot C_{n-\alpha_1}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot C_{n-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_{k-1}}^{\alpha_k}$$
$$= \frac{n!}{\alpha_1!\,(n-\alpha_1)!} \cdot \frac{(\,n-\alpha_1)!}{\alpha_2!\,(n-\alpha_1-\alpha_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k-1})!}{\alpha_k!\,(n-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{k-1}-\alpha_k)!}$$
$$= \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_{k-1}!\,\alpha_k!\,0!} = \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_{k-1}!\,\alpha_k!}$$

Então $P_n^{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\dots\alpha_{k-1}!\alpha_k!}$.

Exemplo 2.2.10. *Quantos são os anagramas da palavra PARALELEPIPEDO?*

Temos um total de 14 letras, porém algumas letras se repetem:

*A → 2 vezes

*P → 3 vezes

*E → 3 vezes

*L → 2 vezes

Através da fórmula temos:

$$P_{14}^{2,2,3,3} = \frac{14!}{2!2!3!3!} = 605\ 404\ 800 \text{ anagramas possíveis.}$$

Utilizando raciocínio combinatório:

Temos 14 letras, das quais algumas possuem repetições como indicado acima.

Há $14!$ maneiras de formarmos anagramas diferentes, porém precisamos eliminar as repetições das letras iguais.

A letra ‘A’ se repete 2 vezes, logo, devemos eliminar as $2!$ maneiras de troca-las de lugar.

A letra ‘P’ se repete 3 vezes, logo são $3!$ maneiras que devemos eliminar.

A letra ‘E’ se repete 3 vezes, então da mesma forma que a letra ‘P’, eliminamos $3!$ maneiras de trocar esses ‘E’s’ de lugar.

E por fim, a letra ‘L’ também se repete 2 vezes, ou seja, $2!$ maneiras a serem eliminadas.

Resultando em $\frac{14!}{2!3!3!2!} = 605\ 404\ 800$ anagramas.

3 PLANEJAMENTO

A seguir apresentamos a proposta de Planejamento, elaborado a partir da aplicação de seu original na pesquisa. Todos os problemas propostos possuem respostas e/ou explicação.

3.1 Informações Gerais

O tempo sugerido de aplicação para o planejamento proposto é de 10 horas/aula, podendo variar de acordo com conhecimentos prévios da turma, velocidade de compreensão, disponibilidade de tempo, dentre outros fatores. O roteiro foi elaborado para o 6º ano do Ensino Fundamental, podendo ser aplicado em diferentes anos do EF – Anos Finais e/ou no Ensino Médio.

3.2 Conteúdo previsto

Os conteúdos da Análise Combinatória abordados nesse planejamento foram:

- Fatorial
- Princípio da Adição
- Princípio Fundamental da Multiplicação
- Permutação Simples
- Permutação com Repetição
- Combinação Simples

3.3 Objetivos Específicos

Espera-se que os alunos, após as 10 horas/aula, consigam:

- Compreender o significado do termo “possibilidade”;
- Compreender o que são acontecimentos prováveis/não prováveis;
- Compreender favorável/não favorável;
- Organizar as informações dadas em um problema;
- Organizar o raciocínio da contagem;

- Determinar o número de possibilidades de ocorrência de determinado evento listando as opções;
- Determinar o número de possibilidades de ocorrência de determinado evento através da multiplicação;
- Resolver situações problema que envolvam o raciocínio combinatório;
- Diferenciar quando há necessidade de "eliminar" determinada quantidade de combinações.

3.4 Sequência Didática

O planejamento a seguir não está dividido em aulas. Conforme dito anteriormente, sugerimos 10 horas/aula, porém deixamos a critério do leitor a divisão conforme lhe convir.

3.4.1 O Planejamento proposto

Trabalhar inicialmente com os alunos o que a palavra *possibilidade* representa, assim como o que são *acontecimentos favoráveis* ou *não favoráveis*.

Para isso, sugerimos as atividades a seguir, que buscam promover a discussão referente à "O que é uma possibilidade? O que significa algo ser possível?".

Questionamentos iniciais:

- Temos como saber como será o clima amanhã olhando para como foi o clima no mesmo dia do ano passado?
  - Resposta esperada: Não!
  - Questionamento: Por que não?
  - Resposta esperada: Pois não estão relacionados. Um ano não interfere no próximo.
- Em um jogo de dados, onde o vencedor é quem tirar o número mais alto, conseguimos saber quem ganha antes das jogadas?
  - Resposta esperada: Não!
  - Questionamento: Por que não?
  - Resposta esperada: Pois não temos como prever quem tirará o maior nº.

Atividade 1:

Mostrando a turma uma caixa preta e 3 bolas de cores diferentes (amarelo, verde, vermelho) colocar essas bolas dentro da caixa e questionar aos alunos:

- Temos como retirar uma bola de cor amarela da caixa?
    - Resposta esperada: Sim!
- Temos como retirar uma bola de cor verde da caixa?
    - Resposta esperada: Sim!
- Temos como retirar uma bola de cor azul da caixa?
    - Resposta esperada: Não!
    - Questionamento: Por que não podemos?
    - Respostas esperadas:
        - "Pois não foi colocada nenhuma bola azul dentro da caixa"
        - "Porque não é possível!"
    - Caso nenhum aluno diga que não é possível, questionar: "Era possível que retirássemos uma bola azul? Ou ainda, é possível retirarmos uma bola roxa?"
        - Resposta esperada: Não!
- Existe a possibilidade de retirarmos uma bola vermelha?
    - Resposta esperada: Sim!
- E de retirarmos uma bola cinza?
    - Resposta esperada: Não!

Atividade 2:

Para a próxima atividade será necessária uma moeda. Sugerimos que seja solicitado aos alunos que cada um traga a sua, independente do valor (ou país de origem). As vezes os alunos trazem moedas diferentes que podem gerar uma discussão mais enriquecedora.

Sugerimos que seja dado tempo para os alunos observarem as moedas trazidas para então iniciar os questionamentos para a turma:

- Todos vocês sabem que uma moeda possui dois lados, certo? Como chamamos esses dois lados?
    - Resposta esperada: Cara e Coroa.
        - É esperado que os alunos saibam o que é Cara e o que é Coroa
        - Solicitar que na moeda que trouxeram examinem cada lado.

- História:
  - Antigas moedas portuguesas: Cara (rosto + valor) e Coroa (brasão ou as armas da coroa).
  - Roma antiga: “navia aut caput” (navio ou cabeça): navio e face do imperador.
  - Moedas espanholas: “cara e cruz”.
  - EUA: “heads or tails” (cabeça ou caudas).

- Se eu jogar essa moeda para cima e deixar ela cair no chão, quais são as possibilidades?
  - Resposta esperada: Cair cara **ou** Coroa.
    - Espera-se que os alunos digam que as duas opções existem.
- É mais provável que caia cara ou coroa?
  - Espera-se que os alunos fiquem intrigados com a pergunta, sem saber o que responder.
  - Questionar por que não temos como saber.
    - Espera-se que eles digam que “pode ser uma coisa ou pode ser outra”, “a possibilidade é a mesma”, “as chances são as mesmas”. Dependendo dos alunos, alguns trazem a questão de ser “50% de chance de cada coisa”.

Sugerimos que um aluno seja chamado para auxiliar na próxima etapa, na qual será lançada uma moeda e, após cair no chão, esse aluno deverá conferir se é a face voltada para cima é cara ou coroa. Antes de cada jogada pedir que os alunos digam o que acham que vai acontecer: cara ou coroa. Construir uma tabela no quadro, na qual serão marcados os palpites dos alunos assim como o “resultado” da moeda. O intuito da atividade é reforçar o que são possibilidades, eventos prováveis ou não, assim como introduzir um pouco da História da Análise Combinatória com os alunos, mostrando que ela surgiu devido a necessidade/vontade de prever e estimar o que estaria por acontecer. Além disso, pode gerar a discussão que quanto mais vezes jogarmos a moeda, mas parelho fica a quantidade entre os resultados Cara e Coroa.

O ideal é que o conteúdo Frações já tenha sido trabalhado com a turma. Pois é interessante utilizar as frações como a representação de comparação de informações, que relacionam o todo com uma parte; o que é o intuito da próxima atividade.

Atividade 3:

Com as bolas coloridas explorar duas situações: possibilidades e ordenação.

Primeiramente, com todas as bolas dentro de uma urna/caixa, os alunos devem ser questionados:

- Qual a possibilidade de eu retirar, sem olhar para dentro da urna, uma bola de cor amarela?
    - Como há apenas uma bola, espera-se que os alunos digam que a resposta é uma.
    - Questionamento: Mas uma de quantas possibilidades?
        - Com esses questionamentos, queremos retomar com os alunos a representação através de frações para comparações: $\frac{1}{3}$.
- Qual a possibilidade de eu retirar, sem olhar, uma bola de cor azul?
    - Resposta esperada: Nenhuma ou zero.

Devolvendo a bola anterior, questionar:

- Qual a possibilidade de eu retirar, sem olhar, uma bola de cor vermelha?
    - Resposta esperada: $\frac{1}{3}$.

Retirar uma bola da urna, e sem devolvê-la, questionar com relação as cores que ficaram dentro da urna:

- Qual a chance de retirar uma bola verde?
    - Resposta esperada: $\frac{1}{2}$.
        - Espera-se que os alunos percebam que agora não temos mais as três possibilidades que tínhamos antes, pois uma bola está fora da urna.

Agora, após retirar todas as bolas da urna, trabalharemos com as maneiras de ordenar essas bolas em uma fila.

- De quantas formas posso colocar duas dessas bolas em ordem?
    - Respostas esperadas:
        - “uma do lado da outra”
        - “de duas maneiras”
- De quantas maneiras posso colocar três dessas bolas em ordem?
    - É esperado que alguns dos alunos saibam dizer 6, e que digam que é devido a multiplicação, porém, com as bolas coloridas e o auxílio do quadro, desenharemos as possibilidades/maneiras de dispor essas bolas em uma linha reta.

Similar a essa última atividade, propor aos alunos os problemas a seguir:

<u>Situação 1:</u> Quantos números diferentes podemos formar com algarismos 1, 2 e 3?

- Resposta esperada: 6 números.
- Listar as opções.
- Começar a analisar que “para cada” número escolhido, restam *tantas* opções para escolhermos a seguir.

<u>Situação 2:</u> Quantos sanduíches podemos fazer dispondo de dois tipos de pão (branco e integral), três tipos de queijo (*mussarela*, lanche e *cheddar*) e 2 tipos de presunto (presunto e mortadela)?

- Resposta esperada: 12 sanduíches.
- Listar as opções de montagem dos sanduíches.
- Mostrar que “para cada” tipo de pão, temos 3 opções de queijo, e que “para cada” uma dessas opções de pão e queijo temos 2 tipos de presunto, totalizando 12 sanduíches diferentes.

<u>Situação 3:</u> A professora Dafne fez uma questão de verdadeiro ou falso na prova. Há 4 frases verdadeiras e 6 frases falsas. Quantas respostas diferentes os alunos podem dar?

- Raciocínio esperado: tenho duas opções (V ou F), e são 10 questões, logo:

$$\underbrace{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}_{\substack{2\ opções\ para\ a\ primeira\ questão,\\ 2\ opções\ para\ a\ segunda\ questão,\\ 2\ opções\ldots}} = 2^{10} = 1024$$

- É natural os alunos pensarem que “alguma conta” deva ser feita com o 4 e 6, e na aplicação desse plano, não foi o 4+6=10 questões.

<u>Situação 4:</u> Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?

- A primeira dúvida que surge é: O que é um anagrama?
- Após a explicação do que é um anagrama, espera-se que os alunos relacionem com o exemplo inicial dos números com os algarismos 1, 2 e 3.
- Resposta esperada: 24 anagramas.

$$4\times3\times2\times1 = 24$$

Após as atividades iniciais, sugerimos que os problemas a seguir sejam propostos para os alunos. Para promover a discussão, os problemas devem ser propostos em grupos e quando todos, ou a maioria, tiver finalizado, o professor poderá partir para a socialização dos resultados no quadro.

Os problemas podem ser feitos e corrigidos logo em seguida, ou ainda entregar mais de um problema, corrigindo todos depois. Ressaltar que os problemas podem ser resolvidos através de cálculos, desenhos, ou até mesmo, esquemas (“da forma que eles quiserem, sem ter certo e errado”).

Caso algum grupo/aluno não saiba como “sair do lugar” fazer questionamentos, sugerir desenhos e formas de os fazer pensar sobre o problema, sem dar resposta ou dizer como se faz. Além disso, os problemas com permutações envolvendo um número maior de objetos buscam, na correção, introduzir o que significa **fatorial**.

Os problemas abaixo envolvem **permutações**, nestas situações será sempre enfatizado a frase “para cada”, além da utilização de desenhos em algumas das situações que envolvem um número menor de possibilidades/maneiras.

Problemas sugeridos:

1. Manuela vai encomendar um bolo de aniversário para sua mãe. A padaria faz bolos de chocolate e de cenoura. Cada sabor pode vir com cobertura verde, amarela, rosa ou marrom. De quantas formas diferentes Manuela pode escolher o bolo de sua mãe?

<u>Resolução:</u>

Temos 2 tipos de bolos e 4 tipos de cobertura, logo: $2 \times 4 = 8$ bolos possíveis.

<u>Observação:</u>

Pode surgir turmas nas quais os alunos questionem se “eu não posso escolher sem cobertura?” o que geraria 5 tipos de cobertura e teríamos: $2 \times 5 = 10$ bolos.

Além disso, podem ser feitos esquemas no quadro, que permitam ao aluno visualizar o que está sendo pedido (Figura 1).

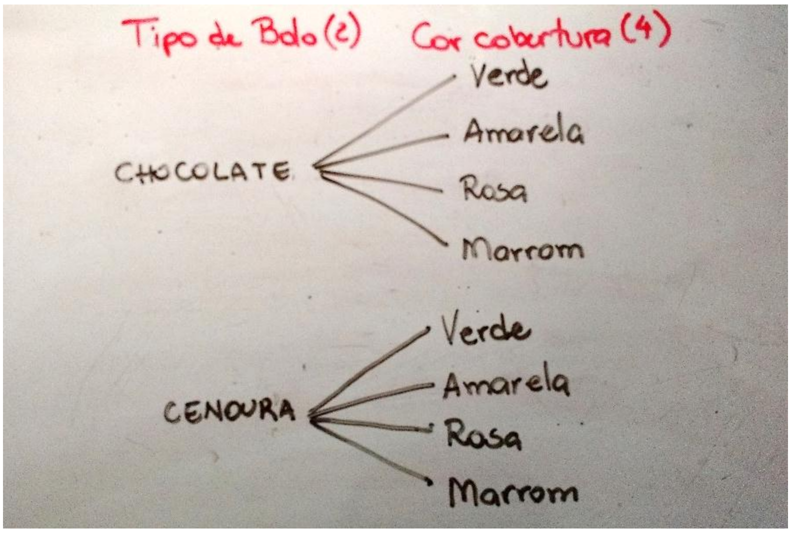


Figura 1: Esquema com tipos de bolo e cores de cobertura

2. O *Ristorante* Pasta Nostra deixa que o cliente escolha o tipo de massa e molho que gostaria de comer. As massas podem ser fettuccine, macarrão, espaguete, penne ou concha; e os molhos disponíveis são quatro queijos, pesto e molho de tomate. De quantas maneiras diferentes um cliente desse restaurante pode escolher a sua massa?

Resolução:

Como há 5 tipos de massa e 3 tipos de molho temos: $5 \times 3 = 15$ maneiras para escolher uma massa e um molho.

Observação:

Da mesma forma que os alunos podem questionar o bolo sem cobertura, pode haver questionamentos referente a massa sem molho. Nessa situação teríamos 5 tipos de massa e 4 opções para o molho, logo: $5 \times 4 = 20$ maneiras de escolher a sua massa.

3. Há 4 bolas de cores diferentes dispostas em cima de uma mesa (laranja, roxa, vermelha e azul). De quantas maneiras diferentes podemos reorganizá-las uma ao lado da outra?

Resolução:

Como queremos organizar todas as bolas disponíveis temos:

$$\underbrace{4}_{\substack{opções\\para\\escolher\ a\\primeira\\bola}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{opções\\para\\escolher\ a\\segunda\\bola}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\\escolher\ a\\terceira\\bola}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{opções\\para\\escolher\ a\\quarta\\bola}} = 24$$

Portanto há 24 maneiras de organizar essas bolas em cima da mesa.

4. João está pedindo o café da manhã para a recepcionista do hotel. Ele pode comer ovos fritos ou mexidos. Como acompanhamento ele pode pedir uma torrada, panquecas ou bisnaguinhas. Além disso, ele ainda pode escolher um tipo de fruta. As frutas disponíveis são laranja, banana, mamão. Sabendo que João não pode pedir mais de um item de cada grupo, de quantas maneiras diferentes ele pode pedir esse café da manhã?

Resolução:

Temos 3 categorias:

- 2 opções de ovos
- 3 opções de “pães”
- 3 opções de frutas

Portanto segue que: para cada opção de ovo, temos 3 opções de “pães”, o que gera $2\times3=6$ opções até o momento. Porém, para cada uma dessas 6 opções ainda temos 3 opções de frutas, logo: $6\times3=18$ possíveis cafés da manhã.

Pode-se ainda expor para os alunos da seguinte forma:

$$\underbrace{2}_{ovos} \times \underbrace{3}_{"pães"} \times \underbrace{3}_{frutas} = 18$$

totalizando 18 maneiras de montar esse café da manhã.

Observação:

Podem surgir questionamentos como “E se eu não quiser algo?”, nesse caso, acrescentamos uma opção em cada categoria:

$\underbrace{3}_{ovos} \times \underbrace{4}_{"pães"} \times \underbrace{4}_{frutas} = 48$ cafés da manhã possíveis.

5. Laura adora o esporte e a arte! Sua escola oferece times de basquete, futebol e vôlei; assim como clubes de teatro, música e desenho. Porém devido ao tempo ela só pode escolher um esporte e um clube para participar esse ano. De quantas maneiras Laura pode fazer essa escolha?

Resolução:

Laura possui 3 opções para escolher o esporte, e, para cada uma dessas 3, há outras 3 opções para escolher um dos clubes, logo: $3 \times 3 = 9$ maneiras de escolher suas atividades extraclasse.

6. Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra ESTUDO?

Resolução:

Temos 6 letras diferentes uma das outras, logo serão 720 anagramas:

$$\underbrace{6}_{\substack{opções\\para\ a\\primeira\\letra}} \cdot \underbrace{5}_{\substack{opções\\para\ a\\primeira\\letra}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{opções\\para\ a\\primeira\\letra}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{opções\\para\ a\\primeira\\letra}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\ a\\primeira\\letra}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{opções\\para\ a\\primeira\\letra}} = 720$$

7. Quantos anagramas podemos formar com a palavra PERNAMBUCO?

Resolução:

Dispomos de 10 letras distintas, portanto há $3\,628\,800$ anagramas que podemos formar:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$$

Observação:

Este é um bom exemplo de situação em que podemos introduzir o que é o fatorial de um número. É interessante ressaltar com os alunos que, da mesma forma que podemos simplificar expressões como $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$, dizendo que isso é 7×3, na matemática também podemos simplificar multiplicações nas quais os fatores vão em ordem decrescente até o 1. O símbolo utilizado é um ponto de exclamação:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

Dizendo que isso simplifica a escrita de problemas com números muito grandes, retomar problema anterior como exemplo e mostrar que:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Os alunos normalmente questionam: “Tá, mas qual é a resposta desse ponto de exclamação?”, e nessa hora é necessário explicar que é um símbolo como outro qualquer na matemática, e que ele representa uma operação a ser feita.

Pode-se ainda questionar os alunos “Se eu quiser saber quantas maneiras eu tenho de colocar 120 alunos em fila, que conta eu faria?”, eles então começam a fazer na calculadora: $120 \cdot 119 \cdot 118 \cdot 117 \cdot 116 \cdot ...$ e logo percebem que a calculadora apresenta a mensagem de erro, e então percebem que não temos como chegar de um jeito simples no resultado, e que a utilização da representação de fatorial simplifica o que queremos apresentar como resultado.

8. A professora de Teatro está fazendo uma encomenda para o novo uniforme do grupo. Ela pode escolher entre camisetas, moletons canguru ou moletons com zíper. Cada um desses pode ser vermelho ou laranja. O logo que vai nas costas pode ser impresso ou bordado. Considerando essas escolhas a serem feitas, de quantas maneiras diferentes a professora pode escolher esse novo uniforme?

Resolução:

A professora de Teatro possui 3 opções para a roupa, para cada uma dessas “roupas” há 2 opções de cores e para cada roupa com cor escolhida há 2 opções de logo, então segue que:

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

totalizando 12 possíveis uniformes.

9. Quantas maneiras podemos distribuir uma família de 5 pessoas em um banco para tirar uma foto?

Resolução:

Segue que temos 120 maneiras de dispor essa família no banco:

$$\underbrace{5}_{\substack{pessoas\\para\\escolher}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{pessoas\\para\\escolher}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{pessoas\\para\\escolher}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{pessoas\\para\\escolher}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{pessoas\\para\\escolher}} = 120$$

10. Marília está escolhendo um novo *skate*. O *skate* pode ser preto, branco ou marrom; as rodas podem ser rosas ou roxas. Os adesivos podem ser em formato de estrela, lobo, diamante ou raio. Quantos modelos diferentes de *skate* ela pode montar?

Resolução:

Marília tem 3 cores para o *skate*, para cada uma dessas 3 cores há 2 possíveis cores para as rodas, e para cada uma dessas combinações há 4 adesivos diferentes que ela pode escolher, o que totaliza 24 *skates* diferentes que ela pode montar.

$$\underbrace{3}_{\substack{cor\\skate}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{cor\\rodas}} \cdot \underbrace{4}_{adesivos} = 24$$

11. Marta irá pedir sua janta em seu restaurante favorito. Ela vai pedir uma bebida, um aperitivo, um prato principal, dois acompanhamentos diferentes e uma sobremesa. Se há 10 escolhas para bebida, cinco aperitivos, 6 pratos principais, 8 acompanhamentos e cinco sobremesas, de quantas formas diferentes ela pode solicitar sua refeição?

<u>Resolução:</u>

Segue que:

$$\underbrace{10}_{bebidas} \times \underbrace{5}_{aperitivos} \times \underbrace{6}_{\substack{prato \\ principal}} \times \underbrace{\underbrace{8}_{\substack{acomp. \\ 1}} \times \underbrace{7}_{\substack{acomp. \\ 2}}}_{\substack{\text{já escolheu um} \\ acompanhamento \\ \text{sobram 7 para} \\ \text{escolher o segundo}}} \times \underbrace{5}_{sobremesas} = 84\,000$$

portanto há $84\,000$ opções de refeições diferentes.

<u>Observação:</u>

As vezes, os alunos se impressionam com a quantidade de opções que Marta tem, e podem surgir comentários como "ela vai comer a vida toda", "quanto tempo será que ela levaria pra comer isso tudo?", etc. Acreditamos que seja interessante aproveitar a situação e calcular com a turma quanto tempo ela levaria para comer todas essas possíveis refeições. Sugestão: Se Marta comesse todo o dia nesse restaurante, almoço e janta, pedindo sempre como foi descrito acima, quantos anos ela levaria para esgotar suas opções?

$$84\,000 \div \underbrace{2}_{\substack{refeições \\ por\ dia}} = \underbrace{42\,000}_{\substack{dias\ com \\ refeições \\ diferentes}}$$

$$42\,000 \div \underbrace{365}_{\substack{dias\ no \\ ano}} \cong \underbrace{115}_{anos}$$

Ou seja, Marta teria que comer a sua vida toda ali, desde o seu nascimento, para ter chances de conseguir chegar aos 115 anos. Logo os alunos percebem que isso dificilmente seria possível!

Problemas reserva:

12. Em uma sorveteira há 20 sabores. Quando compramos uma casquinha, só podemos colocar um sabor. De quantas maneiras 3 amigos podem fazer seus pedidos?

Resolução:

São 20 sabores e nada impede que os três amigos escolham o mesmo, temos então 8000 maneiras.

$$\underbrace{20}_{\substack{sabores\\primeiro\\amigo}} \times \underbrace{20}_{\substack{sabores\\segundo\\amigo}} \times \underbrace{20}_{\substack{sabores\\terceiro\\amigo}} = 8\,000$$

13. Em um grupo de CTG[2] há 8 moças e 8 rapazes. De quantas maneiras podemos formar pares para uma dança?

Resolução:

Segue que:

$$\underbrace{8}_{\substack{rapazes\\possíveis\\para\ a\\1a\ moça}} \times \underbrace{7}_{\substack{rapazes\\possíveis\\para\ a\\2a\ moça}} \times \underbrace{6}_{\substack{rapazes\\possíveis\\para\ a\\3a\ moça}} \times \underbrace{5}_{\substack{rapazes\\possíveis\\para\ a\\4a\ moça}} \times \underbrace{4}_{\substack{rapazes\\possíveis\\para\ a\\5a\ moça}} \times \underbrace{3}_{\substack{rapazes\\possíveis\\para\ a\\6a\ moça}} \times \underbrace{2}_{\substack{rapazes\\possíveis\\para\ a\\7a\ moça}} \times \underbrace{1}_{\substack{rapazes\\possíveis\\para\ a\\8a\ moça}} = 8!$$

14. Quantos são os anagramas da palavra JULGAMENTOS?

Resolução:

São 11 letras distintas, logo temos 11! Anagramas:

$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 11!$$

15. De quantas maneiras 3 americanos, 4 brasileiros e 3 franceses podem sentar em fila, de modo que os de mesma nacionalidade sentem juntos?

Resolução:

Neste problema há alguns pontos importantes que devem ser levados em consideração. Faremos cada passo separadamente:

- Americanos sentando juntos: $\underbrace{3}_{\substack{opções\\para\\escolher\ o\\primeiro}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\\escolher\ o\\segundo}} \times \underbrace{1}_{\substack{opção\\para\\escolher\ o\\terceiro}} = 3!$

[2] CTG: Centro de Tradição Gaúcha

- Brasileiros sentando juntos: $\underbrace{4}_{\substack{opções\\para\\escolher\ o\\primeiro}} \times \underbrace{3}_{\substack{opções\\para\\escolher\ o\\segundo}} \times \underbrace{2}_{\substack{opção\\para\\escolher\ o\\terceiro}} \times \underbrace{1}_{\substack{opção\\para\\escolher\ o\\quarto}} = 4!$

- Franceses sentando juntos: $\underbrace{3}_{\substack{opções\\para\\escolher\ o\\primeiro}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\\escolher\ o\\segundo}} \times \underbrace{1}_{\substack{opção\\para\\escolher\ o\\terceiro}} = 3!$

Como para cada uma das $3!$ maneiras de dispor os americanos, temos $4!$ Maneiras de dispor os brasileiros, e para cada uma dessas, temos ainda $3!$ Maneiras de dispor os franceses, logo: $\underbrace{3!}_{\substack{americanos\\sentando\\juntos}} \times \underbrace{4!}_{\substack{brasileiros\\sentando\\juntos}} \times \underbrace{3!}_{\substack{franceses\\sentando\\juntos}} = 864$ maneiras.

Porém, não precisa ser necessariamente americanos, brasileiros e franceses nessa ordem, poderá ser franceses, americanos e brasileiros, então precisamos levar em conta que há $\underbrace{3}_{nacionalidades} \times \underbrace{2}_{nacionalidades} \times \underbrace{1}_{nacionalidade} = 3!$ maneiras de trocar as nacionalidades do lugar, o que totaliza no problema em questão:

$$\underbrace{3!}_{\substack{americanos\\sentando\\juntos}} \times \underbrace{4!}_{\substack{brasileiros\\sentando\\juntos}} \times \underbrace{3!}_{\substack{franceses\\sentando\\juntos}} \times \underbrace{3!}_{\substack{trocar\\nacionalidades\\de\ lugar}} = 5\,184$$

resultando em 5184 maneiras de dispor essas pessoas.

Os problemas propostos anteriormente visavam trabalhar com os alunos conceitos referente ao princípio da adição, princípio fundamental da multiplicação, permutações simples.

Permutações simples, como dito anteriormente, são situações em que utilizamos todos os objetos envolvidos no problema, nos preocupando com a ordem final dos objetos. A partir de agora, buscaremos introduzir situações nas quais nem todos os objetos são utilizados, mas ainda levando em consideração a ordem final que eles estarão dispostos. Alguns livros didáticos trazem situações dessa forma como *Arranjos*. Porém, ao trabalhar com a intuição e lógica, não vemos a necessidade do termo Arranjo, uma vez que a ideia de possibilidades para cada etapa do acontecimento é suficiente para raciocinarmos de forma correta. As situações a seguir trabalharão com a ideia de “organizar parte dos objetos”, nas quais a ordem faz diferença.

Propor alguns questionamentos para a turma:

<u>Situação 1:</u> Considere os algarismos 3, 5, 6 e 8.

a) Quantos números de algarismos diferentes podemos formar com os algarismos 3, 5, 6 e 8?
    - Espera-se que os alunos já tenham compreendido a multiplicação:

$$\underbrace{4}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 1°\ alg.}} \times \underbrace{3}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 2°\ alg.}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 3°\ alg.}} \times \underbrace{1}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 4°\ alg.}} = 24 \text{ números possíveis}$$

    - Se necessário mostrar “esquema” de como listar esses números: fixa o 3 como primeiro e daí tem tantas opções, fixa o 5 como primeiro e…

      Em seguida questionar a turma:

- O que mais podemos perguntar sobre esses números?
- Que outras perguntas podemos adicionar a essa? Suponhamos que a que a professora fez é o item ‘a’, o que mais podemos questionar? Quem sugere o item ‘b’?
- Anotar as sugestões dos alunos no quadro e dizer que os grupos devem responder a esses novos questionamentos.

Espera-se que dentro das sugestões dos alunos surjam situações como as que seguem:

- Quantos desses números começam com o algarismo 3?
    - Como o primeiro algarismo já está definido, restam:

$$\underbrace{3}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 2°\ alg.}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 3°\ alg.}} \times \underbrace{1}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 4°\ alg.}} = 6 \text{ números}$$

- Quantos desses números são maiores que 8 mil?
    - Mesmo raciocínio que questão anterior, uma vez que o algarismo inicial já está escolhido precisamos decidir apenas as possibilidades para os outros 3: $\underbrace{3}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 2°\ alg.}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 3°\ alg.}} \times \underbrace{1}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 4°\ alg.}} = 6$ números
- Quantos desses números são pares?
    - Neste caso estamos definindo que o último algarismo deve ser par, ou seja, temos duas opções. Porém, depois de escolhido esse último algarismo, voltamos a ter 3 algarismos para dispor nos outros 3 lugares, uma vez que um dos algarismos pares não foi utilizado:

$$\underbrace{3}_{\substack{opções\\para\ o\\1°\ alg.}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\ o\\2°\ alg.}} \times \underbrace{1}_{\substack{opções\\para\ o\\3°\ alg.}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\ o\\n°\ ser\\par}} = 12 \text{ números}$$

- Quantos desses números são ímpares?
  - Idem ao item anterior, temos duas opções que fazem o número ser ímpar, e posteriormente restam 3 algarismos para distribuir:

$$\underbrace{3}_{\substack{opções\\para\ o\\1°\ alg.}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\ o\\2°\ alg.}} \times \underbrace{1}_{\substack{opções\\para\ o\\3°\ alg.}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\ o\\n°\ ser\\ímpar}} = 12 \text{ números}$$

- O que acontece se somarmos a quantidade de números pares e ímpares?
  - Encontraremos a quantidade total de números que podemos formar.
- E se, usando esses algarismos, eu quiser escrever números de apenas 2 algarismos distintos?
  - Temos então 4 opções para escolher o primeiro algarismo e, para cada uma dessas, temos 3 opções para escolher o segundo algarismo, resultando em $4{\times}3 = 12$ números possíveis
- Idem anterior com 3 algarismos distintos?
  - Para formar números de três algarismos teremos:

$$\underbrace{4}_{\substack{opções\\para\ o\\1°\ alg.}} \times \underbrace{3}_{\substack{opções\\para\ o\\2°\ alg.}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\para\ o\\3°\ alg.}} = 24 \text{ números}$$

<u>Situação 2:</u> Sabendo que as placas dos veículos contém 3 letras seguidas de 4 algarismos, responda:

a) Quantas placas podemos formar, sendo que não podemos utilizar 4 algarismos zero juntos?

Como as letras e os algarismos podem ser repetidos, e a única situação que não é permitida é a combinação de 4 zeros nas placas, segue que:

- para as 3 letras há:

$$\underbrace{26}_{\substack{opções\\para\ a\\1^a\ letra}} \times \underbrace{26}_{\substack{opções\\para\ a\\2^a\ letra}} \times \underbrace{26}_{\substack{opções\\para\ a\\3^a\ letra}} = 26^3 = 17\,576 \text{ combinações possíveis}$$

- para os algarismos há:

$$\underbrace{10}_{\substack{opções\\para\ o\\1°\ alg}} \times \underbrace{10}_{\substack{opções\\para\ o\\2°\ alg}} \times \underbrace{10}_{\substack{opções\\para\ o\\3°\ alg}} \times \underbrace{10}_{\substack{opções\\para\ o\\4°\ alg}} - \underbrace{1}_{\substack{combinação\\0000\ que\ não\\pode\ ser\ usada}} = 10^4 - 1 = 10\,000 - 1 = 9\,999$$

Como para cada uma das 17 576 combinações de letras possíveis há 9 999 combinações de algarismos possíveis, temos um total de:

$$26^3 \times (10^4 - 1) = 17\,576 \times 9\,999 = 175\,742\,424 \text{ placas possíveis}$$

b) Em quantas placas o zero não aparece na primeira posição?

Continuamos com as combinações possíveis para as letras, porém temos restrições nos algarismos. Uma vez que já estamos excluindo uma posição para o zero, não precisamos mais nos preocupar com a possibilidade de 0000:

$$\underbrace{9}_{\substack{algarismos \\ na\ 1^a\ posição}} \times \underbrace{10}_{\substack{algarismos \\ na\ 2^a\ posição}} \times \underbrace{10}_{\substack{algarismos \\ na\ 3^a\ posição}} \times \underbrace{10}_{\substack{algarismos \\ na\ 4^a\ posição}} = 9\,000$$

Sendo assim: $26^3 \times (9 \times 10 \times 10 \times 10) = 17\,576 \times 9\,000 = 158\,184\,000$ placas nas quais os números formados não começam com o algarismo 0.

c) Quantas placas podemos formar sem repetir letras ou dígitos?

Sem repetir letras ou dígitos temos 78.624.000 placas possíveis:

$$\underbrace{\underbrace{26}_{1^a\ posição} \times \underbrace{25}_{2^a\ posição} \times \underbrace{24}_{3^a\ posição}}_{opções\ de\ letras} \times \underbrace{\underbrace{10}_{1^a\ posição} \times \underbrace{9}_{2^a\ posição} \times \underbrace{8}_{3^a\ posição} \times \underbrace{7}_{4^a\ posição}}_{opções\ de\ algarismos} = 78\,624\,000$$

Problemas sugeridos:

1.Todo começo de ano cada turma escolhe um líder e um vice-líder. Sabendo que uma turma tem 30 alunos, de quantas formas diferentes podemos fazer essa escolha?

<u>Resolução:</u>

Temos 30 opções de alunos para a escolha do primeiro aluno e, para cada uma dessas escolhas, temos 29 opções de alunos para escolher o segundo. Como temos cargos/posições diferentes, a ordem que realizamos essa escolha faz diferença, então temos: $30 \times 29 = 870$ possíveis maneiras de escolher a dupla de representantes da turma.

2.Quantos anagramas de 2 letras diferentes podemos fazer com as 26 letras do alfabeto?

<u>Resolução:</u>

Como a ordem das letras forma anagramas diferentes, temos:

$$\underbrace{26}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 1^{a}\ letra}} \times \underbrace{25}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 2^{a}\ letra}} = 650 \text{ anagramas diferentes.}$$

3.Em uma competição de judô há 10 lutadores que podem terminar em primeiro, segundo ou terceiro lugar. De quantas maneiras diferentes podemos ter o resultado final?

Resolução:

A posição que cada lutador chegar à final fará diferença, portanto:

$$\underbrace{10}_{\substack{para\ a\ 1^{a}\\ colocação}} \times \underbrace{9}_{\substack{para\ a\ 1^{a}\\ colocação}} \times \underbrace{8}_{\substack{para\ a\ 1^{a}\\ colocação}} = 720 \text{ classificações finais possíveis}$$

4.A professora Dafne precisa criar uma senha de 4 dígitos. Como ela é supersticiosa, ela não gosta que nenhum dos algarismos se repita. De quantas maneiras distintas ela pode criar essa senha?

Resolução:

Já que os algarismos não podem se repetir:

$$\underbrace{10}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 1^{\circ}\ alg}} \times \underbrace{9}_{\substack{opções\\ para\ 0\\ 2^{\circ}\ alg}} \times \underbrace{8}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 3^{\circ}\ alg}} \times \underbrace{7}_{\substack{opções\\ para\ o\\ 4^{\circ}\ alg}} = 5\,040 \text{ senhas de 4 dígitos distintos}$$

5.Considerando as letras A, B, C, D e E de quantas maneiras diferentes podemos:

a) ordenar 2 dessas letras?

Resolução:

São 5 letras no total e a ordem que as dispomos faz diferença no anagrama formado, então temos 5 opções para escolher a primeira letra e, para cada uma dessas, temos 4 opções para a escolha da segunda letra, totalizando $5\times4 = 20$ maneiras diferentes.

b) ordenar 3 dessas letras?

Resolução:

Similar ao item anterior temos:

$$\underbrace{5}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 1^{a}\ letra}} \times \underbrace{4}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 2^{a}\ letra}} \times \underbrace{3}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 3^{a}\ letra}} = 60 \text{ maneiras distintas}$$

c) colocar em ordem 4 letras, sendo que a primeira será sempre a letra A?

Resolução:

Uma vez que a primeira letra foi fixada temos:

$$\underbrace{4}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 2^{a}\ letra}} \times \underbrace{3}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 3^{a}\ letra}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 4^{a}\ letra}} = 24 \text{ maneiras diferentes.}$$

Observação:

Podemos analisar o A fixado como uma opção para a primeira letra:

$$\underbrace{1}_{\substack{opção\\ para\ a\\ 1^{a}\ letra}} \times \underbrace{4}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 2^{a}\ letra}} \times \underbrace{3}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 3^{a}\ letra}} \times \underbrace{2}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 4^{a}\ letra}} = 24 \text{ maneiras distintas}$$

d) colocar em ordem 3 letras, onde a primeira sempre será a letra B?

Resolução:

Após fixada a letra B restam 2 espaços para serem preenchidos, sendo que temos 4 letras para o primeiro deles e 3 letras para o segundo, ou seja, $4\times3 = 12$ maneiras diferentes.

Observação:

A letra B também pode ser analisada como uma escolha para a primeira letra, deixando 4 opções para a segunda e 3 opções para a terceira: $1\times4\times3 = 12$ maneiras diferentes.

Após a correção propor novo problema para a turma no quadro, que visa dar continuidade às permutações, porém dando oportunidade para gerar perguntas que levem a introduzir o conceito de combinações.

Situação 1: Em uma turma há 10 alunos (6 meninas e 4 meninos). Responda:

a) De quantas formas podemos colocar eles em fila?

Resolução:

Como não está sendo especificado nada, apenas para que os 10 alunos sejam colocados em fila temos: $10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 10!$ maneiras.

b) De quantas formas podemos colocar apenas as gurias em fila?

Resolução:

Como são 6 meninas, segue que há $6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$ maneiras de coloca-las em fila.

c) De quantas formas podemos colocar apenas os guris em fila?

Resolução:

Para colocar os meninos em fila temos $4\times3\times2\times1 = 24$ maneiras distintas.

Em seguida questionar a turma:

- O que mais podemos perguntar?
- Que outras perguntas podemos adicionar a essa? "Já temos os itens a, b e c…" quem sugere a próxima pergunta?
- Anotar as sugestões dos alunos no quadro e dizer que as duplas nas quais eles estão sentados devem responder a esses novos questionamentos.

Espera-se que dentro das sugestões dos alunos surjam situações como as que seguem:

- Quantas maneiras podemos formar um grupo de 3 pessoas?

Resolução:

Como temos 10 pessoas e queremos apenas 3, segue que há:

$$\underbrace{10}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 1^a\ pessoa}} \times \underbrace{9}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 2^a\ pessoa}} \times \underbrace{8}_{\substack{opções\\ para\ a\\ 3^a\ pessoa}} = 720 \text{ maneiras}$$

Porém, a ordem que essas pessoas foram escolhidas não importa. Se escolhermos ABC ou BCA ou ACB, etc. o grupo formado continua o mesmo.

Nesse caso, precisamos eliminar esses grupos repetidos que se formam, que é na verdade a quantidade de formas que temos de ordenar essas três pessoas escolhidas. Temos $3\times2\times1 = 6$ maneiras de ordenar as três pessoas do grupo, ou seja, cada trio formado está sendo contado 6 vezes.

Então segue que:

$$\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = \frac{720}{6} = 120 \text{ maneiras de formarmos esse trio.}$$

- Quantas maneiras podemos formar um grupo de 5 pessoas?

Parecido com o item anterior, também formamos grupos nos quais a ordem das pessoas escolhidas não faz diferença, precisamos então eliminar essas repetições.

Nesse exemplo temos $10\times9\times8\times7\times6 = 30\ 240$ maneiras de selecionar 5 pessoas (10 possibilidades para escolher a primeira e, para cada uma dessas há 9 possibilidades para escolher a segunda, ...).

Porém, precisamos eliminar as $5\times4\times3\times2\times1 = 120$ maneiras que podemos reorganizar essas 5 pessoas escolhidas, uma vez que a ordem não faz diferença, o que resulta em:

$\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1} = \frac{30\ 240}{120} = 252$ maneiras diferentes de formar o grupo com três alunos.

- Quantas maneiras podemos formar um grupo com 2 meninos e 2 meninas?

<u>Resolução:</u>

Aqui já precisamos ter um cuidado extra, estamos dizendo quantos meninos e quantas meninas queremos.

Escolhendo primeiro as meninas temos $6\times5 = 30$ maneiras, das quais precisamos eliminar a ordem da dupla de meninas escolhida:

$\frac{6\times5}{2} = \frac{30}{2} = 15$ maneiras de escolher as meninas

Escolhendo agora os meninos temos $4\times3 = 12$ maneiras de escolher os meninos. Porém novamente precisamos eliminar a ordem na qual eles podem ser escolhidos, já que ela não faz diferença. Temos então:

$\frac{4\times3}{2} = \frac{12}{2} = 6$ maneiras de escolher os meninos

Para cada uma das 15 maneiras que podemos escolher as meninas, há 6 maneiras que podemos escolher os meninos, ou seja, $15\times6 = 90$ maneiras de escolher esse quarteto.

Em <u>**combinações**</u> temos como fazer parecido ao ensino de permutações, enfatizando o “para cada”, porém é necessário destacar que cada uma das combinações pode ter sido contada mais de uma vez. Por exemplo, se tenho 10 alunos e quero formar um grupo com 4, temos $10\times9\times8\times7$ maneiras de fazer isso, porém, se eu escolher Ana, Bruno, Carla e Daniel ou Carla, Ana, Daniel e Bruno, o grupo continua sendo o mesmo. Então precisamos eliminar o número de maneiras que podemos formar esse grupo $(4\times3\times2\times1)$, já que a ordem da seleção dos integrantes do grupo não altera o grupo final. E com isso temos $\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}$.

Exemplos extras a serem discutidos com a turma:

- Dona Cláudia comprou 5 potes de sorvete de sabores diferentes para a sobremesa do almoço em família no domingo. De quantas maneiras Jéssica, sua filha, pode escolher:
    - dois sabores diferentes?

Resolução:

Como são 5 sabores e a ordem que escolhermos eles não interferem no que será colocado no pote temos $\frac{5\times4}{2}=\frac{20}{2}=10$ maneiras de escolher os dois sabores já eliminando a ordem da escolha.

-
    - três sabores diferentes?

Resolução:

Novamente a ordem que escolhermos não irá interferir nos três sabores colocados no pote, portanto há $\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=\frac{60}{6}=10$ maneiras de escolher esses três sabores.

- Se eu quero escolher três meninos e duas meninas da turma (16 meninas + 18 meninos) para uma atividade da gincana, de quantas maneiras posso fazer isso?

Resolução:

Escolhendo as meninas temos: $\frac{16\times15}{2}=\frac{240}{2}=120$

Escolhendo os meninos temos: $\frac{18\times17\times16}{3\times2\times1}=\frac{4\,896}{6}=816$

Totalizando $120\times816=97\,920$ maneiras de escolher essas 5 pessoas.

Problemas sugeridos:

1. Em um grupo de 15 pessoas queremos selecionar uma dupla. De quantas maneiras diferentes podemos fazer essa seleção?

Resolução:

Para escolher duas pessoas temos $15\times14=210$ maneiras. Como a ordem de escolha dos integrantes da dupla não faz diferença, quer dizer que estamos contando dobrado, já que há $2\times1=2$ maneiras de organizar as pessoas da dupla.

Sendo assim temos $\frac{15\times14}{2}=\frac{210}{2}=105$ maneiras de selecionar essa dupla.

2. Devemos escolher 3 pessoas para formar o time de vôlei para o jogo das *Interséries*[3]. Como temos 32 alunos na turma, de quantas maneiras podemos escolher esse trio?

<u>Resolução:</u>

Temos $32 \times 31 \times 30 = 29\ 760$ maneiras de escolhermos 3 pessoas, porém, como a ordem dessas três pessoas não importa, devemos eliminar as $3 \times 2 \times 1 = 6$ formas de organizar elas resultando em $\frac{32 \times 31 \times 30}{3 \times 2 \times 1} = \frac{29\ 760}{6} = 4\ 960$ maneiras de escolher esse trio.

3. Para uma competição será necessário escolher 4 alunos de uma turma com 20 alunos. De quantas formas diferentes a escolha dos participantes dos times pode ser feita?

<u>Resolução:</u>

Selecionando 4 dos 20 alunos temos $20 \times 19 \times 18 \times 17 = 116\ 280$.

Como a ordem dos grupos que não importa, devemos eliminar as formas que temos de reorganizar esses 4 alunos dentro do grupo: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Temos por fim $\frac{116\ 280}{24} = 4\ 845$ maneiras de escolher os 4 alunos.

4. Para participar do *Spelling Bee*[4] serão escolhidos 3 alunos de uma turma de 10 alunos. De quantas maneiras diferentes podemos formar esse time?

<u>Resolução:</u>

Devemos escolher os 3 dos 10 alunos, e eliminar a ordem que eles podem ser rearranjados. Temos que há $\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$ maneiras diferentes para formar esse time.

5. Sabe a *MegaSena*? É um jogo no qual escolhemos 6 números de 60 opções. Quantas combinações diferentes podemos criar?

<u>Resolução:</u>

Primeiramente selecionamos os 6 números: $60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55$.

---

[3] Atividade esportiva; envolve jogos em que os times são formados misturando, por nível, as turmas da escola.

[4] *Spelling Bee*: nome dado, na escola, à competição na qual os alunos soletram palavras.

Em seguida, como a ordem que os números são escolhidos não altera os seis números marcados, precisamos calcular quantas combinações devem ser eliminadas: $6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$, pois se escolhermos, por exemplo, 1, 10, 33 ou 10, 33 e 1, não há diferença no ganhador).

No total temos: $\frac{60\times59\times58\times57\times56\times55}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = \frac{36\ 045\ 979\ 200}{720} = 50\ 063\ 860$ maneiras de escolher os 6 números a serem marcados na cartela da MegaSena.

6. Em um baralho de carta com 52 cartas, de quantas maneiras podemos separar 7 cartas diferentes?

Resolução:

Para escolhermos as 7 cartas distintas temos:

$$\underbrace{52}_{\substack{retirar \\ a\ 1^{a}}} \times \underbrace{51}_{\substack{retirar \\ a\ 2^{a}}} \times \underbrace{50}_{\substack{retirar \\ a\ 3^{a}}} \times \underbrace{49}_{\substack{retirar \\ a\ 4^{a}}} \times \underbrace{48}_{\substack{retirar \\ a\ 5^{a}}} \times \underbrace{47}_{\substack{retirar \\ a\ 6^{a}}} \times \underbrace{46}_{\substack{retirar \\ a\ 7^{a}}} = 674\ 274\ 182\ 400$$

Porém a ordem que as cartas estão sendo selecionadas não importa, com isso, precisamos eliminar as $7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5\ 040$ formas de organizar essas sete cartas escolhidas.

Sendo assim teremos $\frac{674\ 274\ 182\ 400}{5\ 040} = 133\ 784\ 560$ maneiras de separar 7 cartas diferentes.

7. Há 7 meninos e 9 meninas em uma turma de inglês. Para participar da etapa final do *Spelling Bee* serão escolhidos dois meninos e duas meninas. De quantas maneiras diferentes podemos formar essa equipe?

Resolução:

Escolhendo primeiramente as meninas temos $9\times8 = 72$ maneiras, das quais precisamos eliminar as maneiras de coloca-las em ordem, que não importa, que são $2\times1 = 2$. São então: $\frac{9\times8}{2\times1} = \frac{72}{2} = 36$ maneiras de escolher as meninas.

Para escolher os meninos temos o mesmo problema, dentre as $7\times6 = 42$ maneiras de escolhê-los, estamos contando $2\times1 = 2$ vezes a mesma dupla, o que nos deixa com $\frac{7\times6}{2\times1} = \frac{42}{2} = 21$ maneiras de escolher a dupla de meninos.

Para cada uma das 36 maneiras que podemos escolher as meninas, temos 21 maneiras de escolher os meninos, totalizando $36\times21 = 756$ maneiras de escolher essa equipe de 4 alunos.

8. Há 12 meninos e 14 meninas em uma sala de aula. Para uma tarefa da gincana serão escolhidos 3 meninos e 3 meninas. De quantas maneiras podemos formar um grupo?

Resolução:

Parecida com a questão anterior, precisamos primeiramente escolher os 3 meninos ou 3 meninas, eliminando as possíveis formas de organiza-los em fila, já que o grupo formado não muda se a ordem dos alunos escolhidos mudar. Segue que há 80.080 maneiras de escolher esse grupo:

$$\underbrace{\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}}_{\substack{formas\ de\\ escolher\ os\\ meninos}}\times\underbrace{\frac{14\times13\times12}{3\times2\times1}}_{\substack{formas\ de\\ escolher\ as\\ meninas}}=\frac{1\ 320}{6}\times\frac{2\ 184}{6}=220\times364=80\ 080$$

9. Na aula de Educação Física vamos jogar basquete. Sabendo que a turma tem 16 meninas e 18 meninos, de quantas maneiras podemos escolher 2 times mistos com 5 jogadores em cada um?

Resolução:

A informação de que há 16 meninas e 18 meninas só nos auxilia a descobrir quantos alunos há nessa turma, pois como os times as mistos, não há a necessidade de calcular meninos e meninas separadamente.

Para formar o primeiro time temos $\frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times}=\frac{24\ 165\ 120}{120}=201\ 376$ maneiras.

Para formar o segundo time, como temos 5 alunos a menos, temos 27 alunos para escolher os 5 do próximo time: $\frac{27\times26\times25\times24\times23}{5\times4\times3\times2\times1}=\frac{9\ 687\ 600}{120}=80\ 730$ maneiras.

Para cada uma das 201 376 maneiras de escolher o primeiro time, temos 80 730 maneiras de escolher o segundo, totalizando $201\ 376\times80\ 730=16\ 257\ 084\ 480$ maneiras.

Porém, a ordem que escolhemos esses dois times não importa, e como temos 2 maneiras de ordenar esses times, segue que há $\frac{16\ 257\ 084\ 480}{2}=8\ 128\ 542\ 240$ maneiras de escolher esse time.

REFERÊNCIAS

ATZ, Dafne. **Análise Combinatória: Noções Básicas e Um Estudo das Funções Geradoras**. Trabalho de Conclusão (Licenciatura em Matemática). Universidade do Vale do Rio dos Sinos. São Leopoldo, 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: Matemática 6 (2.ed.)**. São Paulo: Ática, 2015.

MORGADO, Augusto César; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João Bosco; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9 ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1991.

SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C.. **Introdução à Análise Combinatória**. 2 ed. Campinas, SP: Editora UNICAMP, 1998.

SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. **Matemática: compreensão e prática 6 (2.ed.)**. São Paulo: Moderna, 2013.

VAZQUEZ, C. M. R.; NOGUTI F. C. H.. **Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife: ANAIS – VIII ENEM, 2004.