

ANÁLISE ESTÁTICA DE LAJES DE CONCRETO ARMADO  
INCLUINDO NÃO-LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA

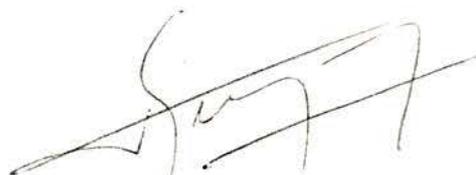
MAURO DE VASCONCELLOS REAL

Dissertação apresentada ao corpo docente do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA.

Porto Alegre  
Dezembro de 1990

ESCOLA DE ENGENHARIA  
BIBLIOTECA

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pelo Curso de Pós-Graduação.



---

Prof. Pablo Gaston Bignon  
Orientador



---

Prof. Ademar Gilberto Groehs  
Coordenador do Curso de Pós-graduação em Eng. Civil

BANCA EXAMINADORA

- Prof. Pablo Gaston Bignon (Orientador)  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ
- Prof. Américo Campos Filho  
D.Sc. pela EPUSP
- Prof. Francisco de P. S. L. Gastal  
Ph.D. pela N. C. State University
- Prof. Sérgio Roberto Maestrini  
Ph.D. pela N. C. State University

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Pablo Gaston Bignon, pela atenciosa e segura orientação.

Aos professores e funcionários do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pelos proveitosos estudos desenvolvidos nesta instituição.

À Universidade do Rio Grande, onde este trabalho foi elaborado, pelos recursos oferecidos, em especial ao Centro de Processamento de Dados.

Aos colegas professores e funcionários do Departamento de Materiais e Construção da Universidade do Rio Grande, por seu constante incentivo e colaboração; em particular ao Prof. Carlos Henrique Mello, pelo apoio recebido por ocasião da conclusão deste trabalho.

Esta dissertação se deve, em muito, à dedicação de três pessoas.

Ao colega, Carlos Alberto Casagrande, *in memoriam*, inesquecível amigo, com quem foram feitos os estudos que deram início a este trabalho.

Ao colega Prof. José Milton de Araújo, pela sincera amizade e valiosas sugestões durante o desenvolvimento desta formulação.

E, finalmente, a minha esposa Beatriz, sem cuja pacienciosa execução dos desenhos e inestimável apoio esta dissertação não teria sido concluída.

A meus pais.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE TABELAS.....	x
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xi
RESUMO.....	xvi
ABSTRACT.....	xvii
1 - INTRODUÇÃO.....	1
2 - FORMULAÇÃO DE PLACAS INCLUINDO A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA E A DEFORMAÇÃO POR CORTE.....	6
2.1 - Introdução.....	6
2.2 - Geometria e carregamento.....	6
2.3 - Hipóteses quanto ao campo de deformações.....	8
2.4 - Definição do campo de deslocamentos.....	10
2.5 - Cálculo das componentes do tensor de deformações	10
2.6 - Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.).....	11
3 - ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PLACAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	22
3.1 - Introdução.....	22
3.2 - Geometria do elemento.....	22
3.3 - O campo de deslocamentos.....	24
3.4 - O campo de deformações.....	26
3.4.1 - Componentes de deformação infinitesimais.....	27
3.4.2 - Componentes de deformação não-lineares..	29
3.5 - Ações nodais e carregamentos.....	30
3.6 - Componentes generalizadas de tensão.....	31
3.7 - Aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais...	32
3.8 - Caso particular: material elástico linear e regime de pequenas deformações.....	34
3.9 - Matriz de rigidez do elemento.....	37
3.10 - Integração numérica.....	38

4 - MODELO PARA O MATERIAL COMPOSTO CONCRETO ARMADO.....	40
4.1 - Introdução.....	40
4.2 - Modelo para o concreto.....	41
4.2.1 - Concreto em compressão.....	41
4.2.2 - Concreto em tração.....	42
4.2.3 - Cálculo das resultantes de tensões no concreto.....	44
4.3 - Modelo para a armadura.....	48
4.3.1 - Equação constitutiva para o aço.....	48
4.3.2 - Cálculo das resultantes de tensões na armadura.....	49
4.4 - Modelo para o concreto armado.....	53
4.5 - Critério de ruptura.....	53
5 - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES.....	55
5.1 - Introdução.....	55
5.2 - O método de Newton-Raphson.....	56
5.2.1 - O método de Newton-Raphson tradicional..	58
5.2.2 - O método de Newton-Raphson modificado...	59
5.2.3 - Critério de convergência.....	61
5.3 - Aceleração da convergência. O método Secante-Newton.....	62
5.3.1 - O incremento da Energia Potencial Total.	62
5.3.2 - Determinação dos aceleradores de convergência.....	65
5.3.3 - O método Secante-Newton.....	69
5.4 - Descrição do algoritmo implementado.....	70
6 - APLICAÇÃO DO MODELO.....	75
6.1 - Introdução.....	75
6.2 - Comprovação experimental.....	75
6.2.1 - Laje de McNEICE.....	75
6.2.2 - Laje S1 de TAYLOR.....	78
6.2.3 - Laje S6 de TAYLOR.....	81
6.3 - Estudos paramétricos.....	84
6.3.1 - Introdução.....	84
6.3.2 - Tipo de integração numérica.....	84
6.3.3 - Resistência à compressão do concreto....	86
6.3.4 - Resistência à tração do concreto.....	87

6.3.5 - Módulo de deformação longitudinal do concreto.....	89
6.3.6 - Algoritmo de solução do sistema de equações não-lineares.....	89
6.4 - Comparação com os critérios da NBR-6118.....	90
6.4.1 - Introdução.....	90
6.4.2 - Descrição dos exemplos.....	91
6.4.3 - Comparação dos resultados.....	92
6.4.4 - Curvas carga-deslocamento.....	95
7 - CONCLUSÕES.....	98
ANEXO A - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA LAJE-SNW / FORTRAN.....	102
A.1 - Introdução.....	102
A.2 - Descrição das subrotinas.....	102
A.3 - Fluxograma.....	104
BIBLIOGRAFIA.....	106

## LISTA DE FIGURAS

### Figura

1.1 - O "dome effect" em lajes de concreto armado.....	2
1.2 - Curva carga-deslocamento para lajes com confinamento lateral.....	3
2.1 - Geometria da formulação de placas.....	7
2.2 - Campo de deslocamentos na direção x.....	9
2.3 - Resultantes de tensões para placas.....	14
2.4 - Esforços normais no contorno.....	18
2.5 - Momentos fletores e torçores no contorno.....	18
2.6 - Esforços cortantes no contorno.....	19
2.7 - Sistemas de coordenadas no contorno.....	19
3.1 - Carregamento e aspectos geométricos da placa.....	23
3.2 - Geometria do elemento isoparamétrico quadrático.....	24
4.1 - Diagrama tensão-deformação para o concreto em compressão.....	41
4.2 - Diagrama tensão-deformação para o concreto em tração.....	43
4.3 - Fases do cálculo das tensões no concreto.....	47
4.4 - Diagrama tensão-deformação para o aço.....	49
4.5 - Cálculo das resultantes de tensões nas armaduras....	52
5.1 - O método de Newton-Raphson unidimensional.....	57
5.2 - O método de Newton-Raphson tradicional, aplicado à análise estrutural, no caso unidimensional.....	59
5.3 - O método de Newton-Raphson modificado, aplicado à análise estrutural, no caso unidimensional.....	60
5.4 - O método Secante-Newton: aproximação da matriz $\underline{K}_T$ ...	67
5.5 - Método Secante-Newton: relação secante.....	68
5.6 - O algoritmo incremental-iterativo.....	72
5.7 - Fluxograma do algoritmo incremental-iterativo.....	74
6.1 - Laje de McNEICE.....	76
6.2 - Curvas carga-deslocamento: laje de McNEICE.....	77

6.3 - Laje S1 de TAYLOR.....	78
6.4 - Curvas carga-deslocamento: laje S1 de TAYLOR.....	80
6.5 - Não-linearidade geométrica: laje S1 de TAYLOR.....	80
6.6 - Laje S6 de TAYLOR.....	81
6.7 - Curvas carga-deslocamento: laje S6 de TAYLOR.....	82
6.8 - Comparação das curvas carga-deslocamento.....	83
6.9 - Laje armada em uma só direção.....	85
6.10 - Efeito da integração numérica.....	86
6.11 - Influência da resistência à compressão do concreto.	87
6.12 - Influência da resistência à tração do concreto.....	88
6.13 - Influência do módulo de deformação do concreto.....	88
6.14 - Aspectos geométricos da laje L1.....	91
6.15 - Diagrama tensão-deformação para o aço do tipo B....	93
6.16 - Curvas carga-deslocamento para a laje L1.....	96
6.17 - Curvas carga-deslocamento para a laje L2.....	96
6.18 - Curvas carga-deslocamento para a laje L3.....	97
6.19 - Curvas carga-deslocamento para a laje L4.....	97
A.1 - Fluxograma do programa LAJE-SNW / FORTRAN.....	105

## LISTA DE TABELAS

### Tabela

6.1 - Propriedades dos materiais: laje de McNEICE.....	76
6.2 - Propriedades da laje S1 de TAYLOR.....	79
6.3 - Propriedades da laje S6 de TAYLOR.....	82
6.4 - Direções principais de deformação nas lajes S1 e S6.	83
6.5 - Propriedades dos materiais: estudos paramétricos....	85
6.6 - Comparação dos algoritmos de solução.....	90
6.7 - Propriedades dos materiais: lajes L1, L2, L3 e L4...	93
6.8 - Previsão da flecha $w$ : NBR-6118/82 x Modelo.....	95

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras romanas maiúsculas

$A$	- superfície indeformada da placa
$A^*$	- superfície deformada da placa
$A_e$	- área do elemento
$\tilde{A}_{NL}$	- vetor de ações nodais não-lineares da estrutura
$\tilde{A}_{NL}^e$	- vetor de ações nodais não-lineares do elemento
$A_r$	- acelerador de convergência
$A_s$	- área de aço
$\vec{B}$	- vetor de forças por unidade de volume indeformado
$\vec{B}^*$	- vetor de forças por unidade de volume deformado
$B_r$	- acelerador de convergência
$\tilde{B}$	- matriz de deformações completa da estrutura
$\tilde{B}_o$	- matriz de deformações infinitesimais
$\tilde{B}_G$	- matriz de deformações para deformações finitas
$\tilde{D}$	- matriz de constantes elásticas
$E$	- módulo de deformação longitudinal, energia de deformação
$E_{co}$	- módulo de deformação longitudinal do concreto, tangente à origem
$E_{cs}$	- módulo de deformação longitudinal do concreto, secante à curva $\sigma_c = f(\epsilon_c)$
$E_{s1}$	- módulo de deformação longitudinal do aço antes do escoamento
$E_{s2}$	- módulo de deformação longitudinal do aço após o escoamento.
$F$	- força nodal
$\tilde{F}^e$	- vetor de ações nodais do elemento
$\tilde{F}_{eq}^e$	- vetor de ações nodais equivalentes do elemento

$G$	- potencial das cargas externas
$G_{co}$	- módulo de deformação por cisalhamento do concreto, tangente à origem
$\underline{H}$	- matriz Hessiana
$\underline{I}$	- matriz identidade
$\underline{J}$	- matriz Jacobiana do elemento
$\underline{J}_o$	- matriz que contém as derivadas da função $f(\underline{x}_o)$
$\underline{K}^e$	- matriz de rigidez do elemento
$\underline{K}_o$	- matriz de rigidez da estrutura na origem
$\underline{K}_T$	- matriz de rigidez tangente da estrutura
$L$	- vão da laje
$M$	- momento fletor ou torçor por unidade de comprimento
$\bar{M}_v$	- momento fletor por unidade de comprimento atuante na direção normal ao contorno
$\bar{M}_{vs}$	- momento torçor por unidade de comprimento atuante na direção tangencial ao contorno
$N$	- esforço normal ou tangencial por unidade de comprimento
$\underline{N}$	- matriz de interpolação do elemento
$N_i$	- função de interpolação associada ao nó "i"
$\bar{N}_v$	- esforço atuante na direção normal ao contorno
$\bar{N}_{vs}$	- esforço atuante na direção tangencial ao contorno
$P_u$	- valor máximo atingido para a carga total sobre a laje
$P_j$	- carga máxima prevista pela teoria de JOHANSEN
$\underline{P}_{ext}$	- vetor de cargas externas
$Q$	- esforço cortante por unidade de comprimento
$\bar{Q}_v$	- esforço cortante por unidade de comprimento atuante no contorno
$R$	- valor limite para a relação $B_r / A_r$
$\frac{v}{T}$	- vetor de forças por unidade de superfície indeformada
$\frac{v}{T}^{(n)}$	- vetor de forças por unidade de superfície deformada que na geometria original orientava-se na direção $n$
$\underline{U}$	- vetor de deslocamentos nodais da estrutura
$\underline{U}^e$	- vetor de deslocamentos nodais do elemento

- V - volume indeformado da estrutura
- $V^*$  - volume deformado da estrutura
- W - trabalho

Letras romanas minúsculas

- c - associado ao concreto
- d - operador diferencial
- e - associado ao elemento
- $f_c$  - resistência à compressão do concreto
- $f_{cj}$  - resist. à compressão do concreto aos "j" dias
- $f_{ck}$  - resist. à compressão característica do concreto
- $f_t$  - resistência à tração do concreto
- g - vetor gradiente do potencial  $\Pi$
- h - espessura da placa
- i - índice
- j - índice
- k - índice, fator de forma para o cisalhamento
- o - relativo à origem, associado ao valor máximo
- p - força por unidade de superfície
- $\vec{p}$  - vetor de forças por unidade de superfície
- q - carga distribuída por unidade de superfície
- r - número da iteração
- s - direção tangencial ao contorno, associado ao aço
- $t_s$  - espessura equivalente da camada de armadura
- $\vec{u}$  - vetor de deslocamentos em um ponto qualquer
- $u_i$  - deslocamento na direção do eixo "i" no sist. global
- $u_n$  - deslocamento na direção normal ao contorno
- $u_s$  - deslocamento na direção tangencial ao contorno
- u - deslocamento na direção x
- v - deslocamento na direção y
- w - deslocamento na direção z
- $w_o$  - flecha correspondente ao máximo valor da carga P
- x - coordenada cartesiana local
- $x_t$  - coordenada cartesiana global na direção "i"
- y - coordenada cartesiana local
- z - coordenada cartesiana local
- $z_s$  - posição da camada de aço em relação ao plano médio

### Letras gregas maiúsculas

- $\Gamma$  - curva que delimita o contorno da placa
- $\Delta$  - incremento
- $\Pi$  - energia potencial total da estrutura
- $\Sigma$  - somatório

### Letras gregas minúsculas

- $\alpha$  - coeficiente de correção para o cisalhamento, fator de redução de  $f_t$
- $\beta$  - constante para os aços do tipo B
- $\gamma$  - distorção
- $\bar{\gamma}$  - distorção no nível do plano médio
- $\delta$  - operador delta (variação)
- $\delta_r$  - vetor de incremento de deslocamentos
- $\delta_r^*$  - vetor de incremento de deslocamentos para uma iteração do método Newton-Raphson modificado
- $\epsilon$  - deformação específica axial
- $\bar{\epsilon}$  - deformação específica axial no nível do plano médio
- $\epsilon_{ij}$  - tensor de deformações de Green
- $\underline{\epsilon}$  - vetor de deformações generalizadas
- $\underline{\epsilon}_o$  - vetor de componentes infinitesimais de deformação
- $\underline{\epsilon}_G$  - vetor de componentes não-lineares de deformação
- $\epsilon_{cm}$  - deformação que caracteriza a perda de rigidez do concreto entre fissuras
- $\epsilon_{cc}$  - deformação do concreto correspondente à tensão  $f_c$
- $\epsilon_{cr}$  - deformação de ruptura do concreto por tração
- $\epsilon_{cu}$  - deformação última do concreto em compressão
- $\epsilon_s$  - deformação na camada de aço (armadura)
- $\epsilon_1, \epsilon_2$  - deformações principais
- $\phi$  - distorção provocada pelo esforço cortante
- $\kappa$  - curvatura
- $\lambda$  - esbeltez da laje
- $\nu$  - coeficiente de Poisson, vetor normal
- $\nu_x, \nu_y$  - cossenos diretores da direção normal ao contorno

$\omega_{ij}$	- parâmetros de rotação
$\underline{\psi}$	- vetor de desequilíbrio
$\rho_{min}$	- taxa de armadura mínima
$\sigma$	- tensão normal
$\bar{\sigma}_{ij}$	- tensor de pseudo-tensões de Kirchhoff
$\underline{\sigma}$	- vetor de tensões generalizadas
$\tau$	- tensão tangencial
$\tau_{ij}$	- tensor de tensões de Cauchy
$\theta$	- rotação
$\xi$	- coordenada natural do elemento (perpendicular à $\eta$ )
$\eta$	- coordenada natural do elemento (perpendicular à $\xi$ )

## RESUMO

O objetivo desta dissertação é desenvolver uma formulação para análise não-linear de lajes de concreto armado, através do Método dos Elementos Finitos. O modelo inclui o comportamento mecânico não-linear dos materiais, a possibilidade de ocorrerem grandes deslocamentos e a influência das condições de contorno no plano. O carregamento deve ser monótono crescente e de curta duração.

Inicialmente é estabelecida uma formulação analítica para placas, considerando a deformação por corte e a ocorrência de deformações finitas. Na aplicação do Método dos Elementos Finitos para solução do problema é utilizado um elemento isoparamétrico quadrático, de oito nós da família Serendipity. Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, chega-se a um sistema de equações de equilíbrio não-lineares.

O comportamento mecânico da estrutura é avaliado através de um modelo laminar. O concreto é modelado como um material isotrópico, não-linear elástico. A fissuração é incluída através de um modelo distribuído, considerando-se a rigidez à tração do concreto entre fissuras ("tension stiffening"). A armadura é representada como uma camada de aço de espessura equivalente, que apenas resiste a esforços normais na direção das barras. O aço é idealizado como um material elástico bilinear, admitindo-se perfeita aderência entre a armadura e o concreto.

Na solução do sistema de equações não-lineares é empregado o Método de Newton-Raphson modificado. Como forma de acelerar a convergência é introduzido o Método Secante-Newton.

É feita a comprovação experimental do modelo, demonstrando-se a grande influência que a não-linearidade geométrica e as condições de contorno no plano exercem sobre a resposta estática de lajes de concreto armado.

## 1 - INTRODUÇÃO

A utilização do concreto armado na construção de pavimentos de edifícios data do começo deste século. Desde esta época, a análise de lajes de concreto armado tem sido feita com base nos princípios da Teoria da Elasticidade, através da Teoria de Placas de KIRCHHOFF<sup>3,4</sup>.

Após a Segunda Guerra Mundial, com a divulgação dos trabalhos de JOHANSEN<sup>23</sup>, baseados na Teoria da Plasticidade, passou a ser empregada em larga escala a Teoria das Linhas de Ruptura no projeto de lajes. Este processo permite prever com boa aproximação a carga de colapso de uma laje isolada, conforme foi comprovado experimentalmente em inúmeros ensaios desenvolvidos em laboratório.

Nas duas teorias supracitadas, o mecanismo de transmissão da carga aos apoios em uma laje se deve principalmente à atuação de momentos fletores e torçores.

Em 1955, OCKLESTON<sup>26</sup> publicou os resultados de ensaios realizados em três lajes de um pavimento de um edifício condenado à demolição em Johannesburgo. As cargas de ruptura encontradas foram da ordem de duas a três vezes a carga prevista pela teoria de JOHANSEN. OCKLESTON atribuiu este aumento da capacidade de carga ao desenvolvimento de esforços normais de compressão contidos no plano da laje.

Este fenômeno pode ser explicado a partir do mecanismo da fissuração. Quando as linhas de ruptura começam a se delinear sobre a laje, as fissuras já penetraram no interior da espessura para além do plano médio. Isto ocorre tanto nas linhas de ruptura positivas situadas no centro da laje, como também nas negativas formadas ao longo dos apoios contínuos. A tendência é que a superfície média, estando então tracionada, sofra uma expansão, dilatando-se na direção dos apoios.

Se no contorno da laje existirem vigas e lajes vizinhas tais que impeçam a sua livre dilatação, surgem no seu interior esforços normais de compressão na forma de uma abóboda ou casca abatida, que impedem a propagação das fissuras, aumentando a capacidade resistente da laje. A FIGURA 1.1 serve para a ilustrar este fenómeno, que é conhecido na literatura como "dome-effect".

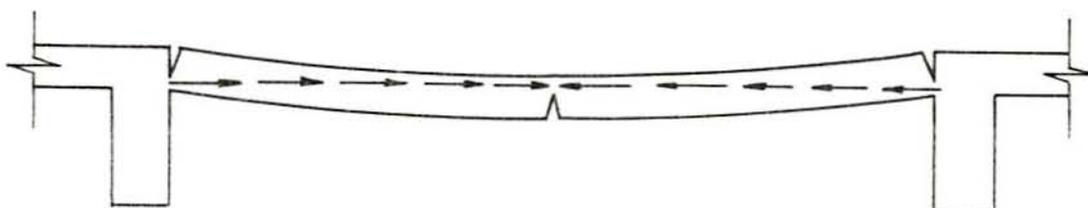


FIGURA 1.1 - O "dome-effect" em lajes de concreto armado.

Nos últimos 30 anos, várias pesquisas foram desenvolvidas, tanto no campo teórico como no experimental, no sentido de estabelecer um modelo matemático para o comportamento de lajes de concreto armado com a inclusão dos esforços normais. Sobre este assunto é interessante consultar os trabalhos de PARK<sup>20</sup>, TAYLOR<sup>9,9</sup>, JACOBSON<sup>21</sup>, RAMESH<sup>91</sup> e DATTA<sup>19</sup>, DESAYI e KULKARNI<sup>14,15</sup>, BRAESTRUP<sup>7,8</sup> e de CHRISTIANSEN<sup>10</sup>.

A maior parte destes trabalhos buscava encontrar um novo valor para a carga de ruptura das lajes a partir dos princípios da Análise Limite da Teoria da Plasticidade. Desta forma, as curvas carga-deslocamento obtidas correspondiam ao trecho ABC indicado na FIGURA 1.2, sendo necessário estabelecer-se antecipadamente o valor da flecha máxima  $w_0$  por ocasião do colapso.

No entanto, quando se emprega no projeto de lajes de concreto armado métodos baseados na Análise Limite, é preciso determinar, posteriormente, o valor da flecha sob a carga de

serviço, visando a atender as exigências das normas técnicas. Para que isto possa ser feito é necessário conhecer-se o trecho ODB da curva carga-deslocamento da laje, mostrado na FIGURA 1.2.

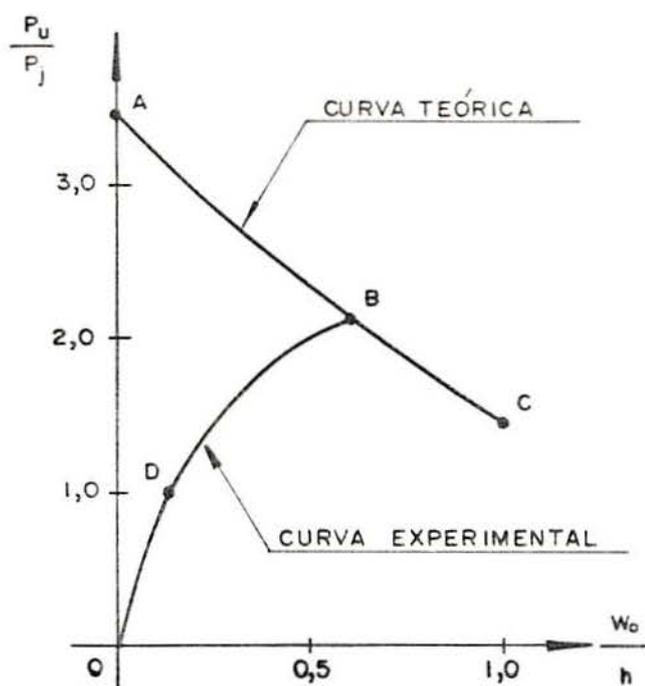


FIGURA 1.2 - Curva carga-deslocamento para lajes com confinamento lateral.

A partir de meados da década de 60, com o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos<sup>39</sup>, passou-se a dispor de uma ferramenta bastante poderosa para a análise estrutural.

Surgem então na década de 70, as pesquisas no campo da análise não-linear de estruturas de concreto. No que se refere ao estudo das lajes é conveniente observar os trabalhos de JOFRIET e MCNEICE<sup>22</sup>, HAND, PECKNOLD e SCHNOBRICH<sup>19</sup>, VEBO e GHALI<sup>36</sup>, BASHUR e DARWIN<sup>4</sup>, GILBERT e WARNER<sup>18</sup>, BIGNON<sup>5</sup> e de OWEN, FIGUEIRAS e DAMJANIC<sup>28</sup>. Assim, tornou-se possível traçar a resposta estática da estrutura desde o início do carregamento até a ruptura.

O objetivo deste trabalho é desenvolver um modelo para análise de lajes de concreto armado que inclua o comportamento mecânico não-linear dos materiais, a

possibilidade de ocorrerem grandes deformações e a influência das condições de contorno no plano.

Esta dissertação, além desta introdução, compõem-se de mais seis capítulos, que são resumidamente descritos a seguir.

No capítulo 2, é desenvolvida uma formulação analítica para placas incluindo a deformação por corte e a ocorrência de deformações finitas. A partir da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais são estabelecidas as equações de equilíbrio e as condições de contorno para o problema.

No capítulo 3, é desenvolvida uma formulação para análise não-linear de placas através do Método dos Elementos Finitos. Novamente utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, chega-se a um sistema de equações não-lineares de equilíbrio independente da equação constitutiva do material. Como caso particular são obtidas as equações de equilíbrio para um material elástico linear no regime de pequenas deformações.

No capítulo 4, é descrito o modelo adotado para o comportamento mecânico do material composto concreto armado. São abordadas as equações constitutivas empregadas para o concreto e para o aço, bem como a interação entre estes dois materiais no desenvolvimento de esforços resistentes.

No capítulo 5 é analisada a solução do sistema de equações não-lineares estabelecido no capítulo 3. Inicialmente são estudados os métodos de Newton-Raphson "standard" e modificado. Para acelerar a convergência é introduzido o método Secante-Newton.

O capítulo 6 trata da aplicação do modelo. Inicialmente é feita a comprovação experimental da formulação. A seguir são feitos uma série de testes para estudar a influência de certos parâmetros de entrada do programa nos resultados. Concluindo é feita uma comparação entre os critérios da norma brasileira NBR-6118, para projeto de lajes de concreto armado e os resultados obtidos pelo modelo.

No capítulo 7, são expostas as conclusões sobre o desempenho do modelo para o comportamento de lajes de concreto armado que foi desenvolvido nesta dissertação.

No anexo A é descrito de forma sucinta o programa LAJE-SNW elaborado na linguagem FORTRAN, no qual foi implementado o algoritmo do modelo.

## 2 - FORMULAÇÃO DE PLACAS INCLUINDO A DEFORMAÇÃO POR CORTE E A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA.

### 2.1 - Introdução

As placas são elementos estruturais planos nos quais duas dimensões, denominadas lados, são muito maiores que a terceira dimensão definida como espessura.

O objetivo de se desenvolver uma formulação específica para a análise de placas é reduzir um problema, inicialmente complexo e dependente das coordenadas no espaço, a um problema mais simples, função apenas das coordenadas contidas no plano médio da placa.

Assim sendo, partindo-se das equações fundamentais da Mecânica dos Sólidos e estabelecendo-se hipóteses a cerca do campo de deslocamentos, passa-se de um problema tridimensional a um problema plano. A partir da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais são deduzidas as equações de equilíbrio e deduzidas as condições de contorno.

Devido a inclusão da possibilidade de ocorrerem grandes deflexões, as equações de equilíbrio e as condições de contorno obtidas serão dependentes do próprio campo de deslocamentos, resultando daí a não-linearidade de origem geométrica.

### 2.2 - Geometria e carregamento

A FIGURA 2.1 descreve a geometria básica envolvida na formulação. Inicialmente estabelece-se um sistema global de coordenadas cartesianas ortogonais  $x_1, x_2, x_3$ , situado em um ponto qualquer do espaço. O deslocamento de um ponto qualquer referido a este sistema é descrito por três componentes, quais sejam  $u_1, u_2$  e  $u_3$  na direção dos eixos  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , respectivamente.

A seguir é fixado um sistema de referência local  $xyz$ , sendo que os eixos  $x$  e  $y$ , bem como a origem do sistema, encontram-se situados sobre a superfície média da placa. Deve-se observar ainda que os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  são paralelos aos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente e possuem os mesmos sentidos definidos como positivos.

Seja, então, a placa mostrada na FIGURA 2.1, cuja espessura é  $h$  e cujo contorno é descrito por uma curva regular  $\Gamma = \Gamma(x,y)$ . O carregamento externo é formado pela carga  $q(x,y)$ , que atua por unidade de superfície, na direção normal ao plano médio da placa. No contorno, podem atuar forças normais por unidade de comprimento  $\bar{N}_\nu$  e também forças tangenciais por unidade de comprimento  $\bar{N}_{\nu s}$ .

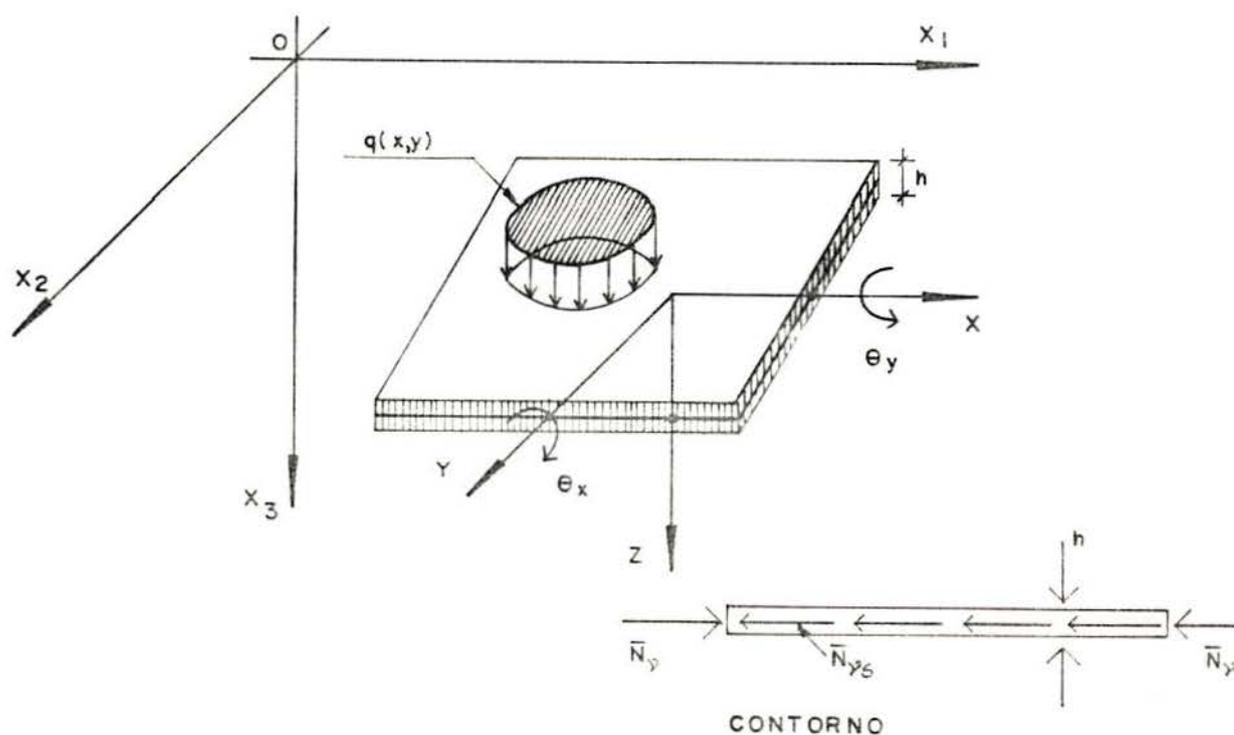


FIGURA 2.1 - Geometria da formulação de placas.

O campo de deslocamentos em relação ao sistema global será definido a partir das componentes de deslocamento do plano médio da placa  $u$ ,  $v$  e  $w$  nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ; bem como através das rotações da reta normal à superfície média nos planos  $xz$  e  $yz$ ,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , respectivamente.

### 2.3 - Hipóteses quanto ao campo de deformações

Antes de formular as hipóteses quanto ao campo de deformações, que se desenvolve na placa pela aplicação do carregamento externo, tratar-se-á de algumas definições fundamentais da Mecânica dos Sólidos.

Adotar-se-á, sempre que necessário, a notação tensorial, na qual os índices  $i$ ,  $j$  e  $k$  assumem sucessivamente os valores 1, 2 e 3, e os índices repetidos (mudos) indicam um somatório.

Considerando-se a possibilidade de ocorrerem deformações finitas, deve-se utilizar o tensor de deformações de Green  $\varepsilon_{ij}$  completo dado por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ( u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} ). \quad (2.1)$$

Os parâmetros de rotação  $\omega_{ij}$ , no caso de grandes deformações, não representam os ângulos de rotação propriamente ditos, porém são apenas proporcionais a estes, sendo definidos por

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} ( u_{i,j} - u_{j,i} ). \quad (2.2)$$

A partir destas definições, são estabelecidas as seguintes hipóteses:

I - As deformações  $\varepsilon_{ij}$  e os parâmetros de rotação  $\omega_{ij}$  são muito menores que a unidade, ou seja,

$$\varepsilon_{ij} \ll 1,0 \text{ e } \omega_{ij} \ll 1,0. \quad (2.3)$$

Esta afirmação traz como conseqüência, que os efeitos de alteração de geometria durante a deformação, podem ser desprezados na definição das componentes de tensão e nos limites de integração necessários para considerações de trabalho e energia.

II - Considera-se que as deformações sejam muito menores que as rotações, portanto

$$\varepsilon_{ij} \ll \omega_{ij} \ll 1,0. \quad (2.4)$$

É possível, então, demonstrar<sup>16</sup> que as componentes do tensor de deformações finitas podem ser dadas pela expressão

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} \omega_{ki} \omega_{kj}. \quad (2.5)$$

III - Linhas retas e normais ao plano médio da placa na geometria original, após a deformação permanecem retas, porém não necessariamente normais à superfície deformada. Esta não-ortogonalidade se deve a presença das distorções  $\phi_x$  e  $\phi_y$  nos planos  $xz$  e  $yz$ , respectivamente, devido a atuação do esforço cortante, conforme é mostrado na FIGURA 2.2. Esta hipótese é a base da teoria de placas de MINDLIN<sup>25</sup>.

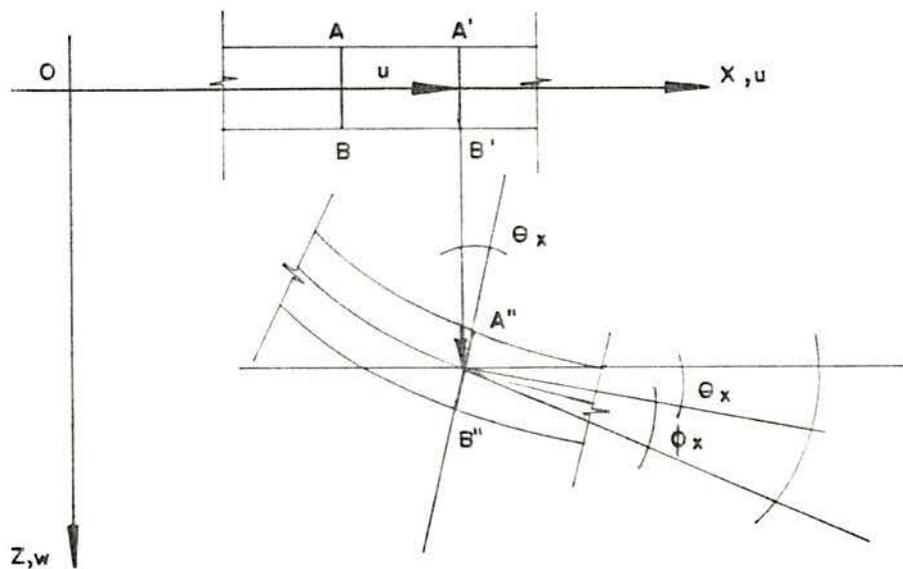


FIGURA 2.2 - Campo de deslocamentos na direção x.

Assim sendo, tem-se que

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \phi_x \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \phi_y. \quad (2.6)$$

## 2.4 - Definição do campo de deslocamentos

A partir das hipóteses formuladas no item anterior, pode-se estabelecer que o campo de deslocamentos seja fornecido através das equações

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u(x, y) - z \theta_x(x, y), \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= v(x, y) - z \theta_y(x, y), \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x, y). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Desta forma, o campo de deslocamentos no sistema global fica completamente definido em função das componentes de deslocamento do sistema local, situado sobre o plano médio da placa.

## 2.5 - Cálculo das componentes do tensor de deformações.

Antes de se proceder ao cálculo das componentes de deformação é necessário analisar os parâmetros de rotação  $\omega_{ij}$ .

O parâmetro de rotação  $\omega_{12}$  aproxima um ângulo de rotação em torno do eixo z, conforme pode ser mostrado para deformações infinitesimais, enquanto que  $\omega_{13}$  e  $\omega_{23}$  são proporcionais aos ângulos de rotação em torno dos eixos x e y, respectivamente.

Se a placa for suficientemente esbelta, pode-se afirmar que

$$\omega_{12} \ll \omega_{13} \quad \text{e} \quad \omega_{12} \ll \omega_{23}, \quad (2.8)$$

logo o parâmetro  $\omega_{12}$  pode ser desprezado em presença de  $\omega_{13}$  e de  $\omega_{23}$ .

Baseando-se nas considerações anteriores, utilizando-se as equações (2.7) para o campo de deslocamentos e empregando-se as relações deformação-deslocamento dadas por (2.5), chega-se as seguintes expressões para as componentes de deformações finitas

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\
\varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} z \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\
\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \right) \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
\varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right) \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

## 2.6 - Princípio dos Trabalhos Virtuais ( P.T.V. )

O emprego do Princípio dos Trabalhos Virtuais, daqui em diante P.T.V., é conveniente, pois permite a obtenção das equações de equilíbrio e das condições de contorno para o problema de forma independente da equação constitutiva do material. As equações obtidas através deste processo serão válidas, portanto, para um material como o concreto armado, que possui um acentuado comportamento não-linear.

A expressão geral para o P.T.V. com a consideração de deformações finitas é dada por (DYM & SHAMES<sup>16</sup>)

$$\iiint_{V^*} \vec{B}^* \cdot \vec{\delta u} \, dV^* + \iint_{A^*} \vec{T}^* \cdot (n^*) \vec{\delta u} \, dA^* = \iiint_V \bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \, dV, \tag{2.10}$$

onde:

$V^*$  = volume da placa após a deformação;

$A^*$  = superfície da placa após a deformação;

$V$  = volume original da placa;

$A$  = superfície original da placa;

$\vec{\delta u}$  = vetor de deslocamentos virtuais compatível e consistente com as condições de contorno do problema;

$\vec{B}^*$  = vetor de forças de volume referido ao volume deformado da placa;

$\frac{\nu}{T} \vec{T}^* (n')$  = vetor de forças de superfície, referido a superfície deformada da placa, que na geometria original possuía a orientação do eixo  $n$ ;

$\bar{\sigma}_{ij}$  = tensor de pseudo-tensões de Kirchhoff;

$\delta \varepsilon_{ij}$  = tensor de deformações virtuais compatível e consistente com as condições de contorno do problema.

Tendo-se em conta as hipóteses que foram feitas em relação ao campo de deformações, é possível adotar as seguintes simplificações:

I - O volume deformado da placa é muito próximo do volume indeformado, logo

$$V^* \cong V. \quad (2.11)$$

II - A superfície deformada da placa permanece praticamente igual a superfície na geometria original, portanto

$$A^* = A. \quad (2.12)$$

III - Como consequência das duas afirmações anteriores, as pseudo-tensões de Kirchhoff podem ser tomadas como iguais ao tensor de tensões referido de forma clássica ao sistema original indeformado, então

$$\bar{\sigma}_{ij} \cong \tau_{ij}; \quad (2.13)$$

e seguindo a mesma linha de raciocínio, as forças podem ser referenciadas também ao sistema indeformado, resultando

$$\frac{\nu}{T} * (\vec{n}') = \frac{\nu}{T} \quad (2.14)$$

$$e \quad \vec{B}^* \cong \vec{B} \quad (2.15)$$

onde

$\frac{\nu}{T}$  = vetor de forças por unidade de superfície indeformada, e  
 $\vec{B}$  = vetor de forças por unidade de volume indeformado.

O P.T.V. pode, então, ser escrito de forma simplificada

$$\iiint_V \vec{B} \cdot \vec{\delta u} dV + \iint_A \frac{\nu}{T} \cdot \vec{\delta u} dA = \iiint_V \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV. \quad (2.14)$$

Antes de se desenvolver o P.T.V., recuperar-se-á a hipótese da Teoria de Placas de Kirchhoff, a qual assegura que as tensões normais ao plano médio da placa,  $\tau_{33}$ , podem ser desprezadas em presença das demais componentes do tensor de tensões.

Assim sendo, o trabalho virtual realizado pelas forças internas será dado por

$$\delta W_{int} = \iiint_V \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} (\tau_{11} \delta \epsilon_{11} + 2 \tau_{12} \delta \epsilon_{12} + \tau_{22} \delta \epsilon_{22} + 2 \tau_{13} \delta \epsilon_{13} + 2 \tau_{23} \delta \epsilon_{23}) dz dA. \quad (2.15)$$

Substituindo-se as expressões para as componentes de deformação obtidas em (2.9)

$$\begin{aligned}
\delta W_{int} = & \iint_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left\{ \tau_{11} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - z \frac{\partial \delta \theta^x}{\partial x} \right] + \right. \\
& \tau_{12} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} - z \left( \frac{\partial \delta \theta^x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta^y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] + \\
& \tau_{22} \left[ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} - z \frac{\partial \delta \theta^y}{\partial y} \right] + \\
& \left. \tau_{13} \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \delta \theta^x \right] + \tau_{23} \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial y} - \delta \theta^y \right] \right\} dz dA . \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Introduzindo aqui as definições clássicas das resultantes de tensões para placas, conforme a FIGURA 2.3, e lembrando que as tensões referidas ao sistema global  $x_1 x_2 x_3$  são idênticas àquelas referidas ao sistema local  $xyz$ , tem-se que

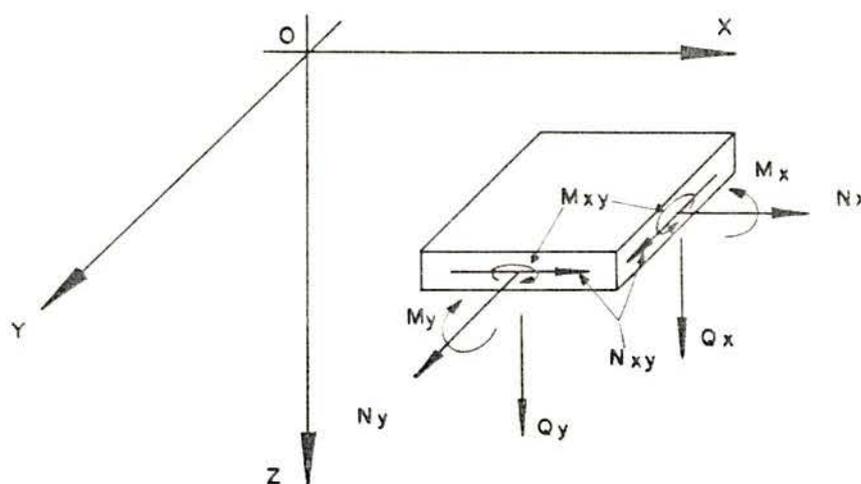


FIGURA 2.3 - Resultantes de tensões para placas.

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xx} dz, & N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz, & N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yy} dz, \\
M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xx} z dz, & M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz, & M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yy} z dz, \\
Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz & \text{e} & Q_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Determina-se então a seguinte expressão para o trabalho virtual interno

$$\begin{aligned}
\delta W_{int} &= \iint_A \left\{ N_x \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] - M_x \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} + \right. \\
&N_{xy} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] + M_{xy} \left[ \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} \right] + \\
&N_y \left[ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] + M_y \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} + \\
&Q_x \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \delta \theta_x \right] + Q_y \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial y} - \delta \theta_y \right] \left. \right\} dA. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

O trabalho virtual realizado pelas forças externas será calculado através da equação

$$\delta W_{\text{ext}} = \iint_A q(x,y) \delta w \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \bar{N}_{\nu} \delta u_{\nu} \, ds + \oint_{\Gamma} \bar{N}_{\nu s} \delta u_s \, ds, \quad (2.19)$$

onde,

$ds$  é um elemento de comprimento ao longo da curva  $\Gamma$ ,

$u_{\nu}$  é a componente de deslocamento na direção normal à curva  $\Gamma$ ,

$u_s$  é a componente de deslocamento na direção tangencial à curva  $\Gamma$ .

A expressão final para o P.T.V. será, então,

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0. \quad (2.20)$$

Substituindo-se as definições de  $\delta W_{\text{int}}$  e  $\delta W_{\text{ext}}$  segundo as equações (2.18) e (2.19), chega-se a

$$\begin{aligned} & \iint_A \left\{ N_x \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] - M_x \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + \right. \\ & N_{xy} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] + M_{xy} \left[ \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right] + \\ & N_y \left[ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right] + M_y \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} + \\ & \left. Q_x \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \delta \theta_x \right] + Q_y \left[ \frac{\partial \delta w}{\partial y} - \delta \theta_y \right] \right\} dx \, dy \\ & - \iint_A q(x,y) \delta w \, dx \, dy - \oint_{\Gamma} \bar{N}_{\nu} \delta u_{\nu} \, ds - \oint_{\Gamma} \bar{N}_{\nu s} \delta u_s \, ds = 0. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Através da aplicação sucessiva do Teorema de Green de forma a eliminar os deslocamentos virtuais  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \theta_x$  e  $\delta \theta_y$  das expressões que envolvem derivadas parciais e reagrupando os termos em função destes, resulta que

$$\begin{aligned}
& - \iint_A \left\{ \left[ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right] \delta u + \left[ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right] \delta v + \left[ \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\
& \left. \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x,y) \right] \delta w - \\
& \left. \left[ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right] \delta \theta_x - \left[ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y \right] \delta \theta_y \right\} dx dy + \\
& \oint_{\Gamma} \left\{ \left[ N_x \nu_x + N_{xy} \nu_y \right] \delta u + \left[ N_{xy} \nu_x + N_y \nu_y \right] \delta v + \right. \\
& \left. \left[ N_x \nu_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \nu_y \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \nu_x \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \nu_y \frac{\partial w}{\partial y} \right] \delta w + \right. \\
& \left. \left[ Q_x \nu_x + Q_y \nu_y \right] \delta w + \right. \\
& \left. \left[ M_x \nu_x + M_{xy} \nu_y \right] \delta \theta_x + \left[ M_{xy} \nu_x + M_y \nu_y \right] \delta \theta_y \right\} ds - \\
& \oint_{\Gamma} \bar{N}_\nu \delta u_\nu ds - \oint_{\Gamma} \bar{N}_{\nu_s} \delta u_s ds = 0. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

No contorno  $\Gamma$ , pode-se demonstrar<sup>16</sup> a validade das seguintes expressões, que são ilustradas através das FIGURAS 2.4, 2.5 e 2.6.

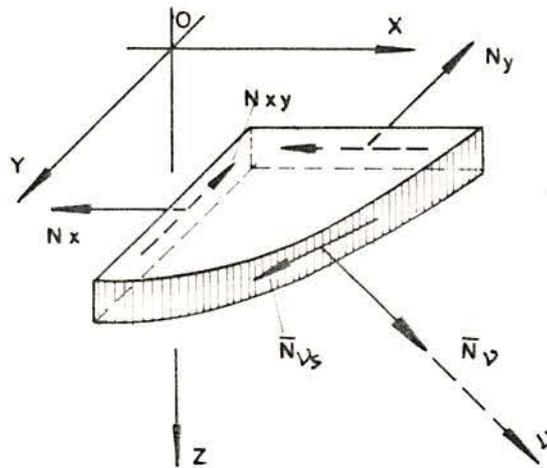


FIGURA 2.4 - Esforços normais no contorno.

$$\bar{N}_v = N_x v_x^2 + 2 N_{xy} v_x v_y + N_y v_y^2 \quad (2.22)$$

$$\bar{N}_{vs} = (N_y - N_x) v_x v_y + N_{xy} (v_x^2 - v_y^2)$$

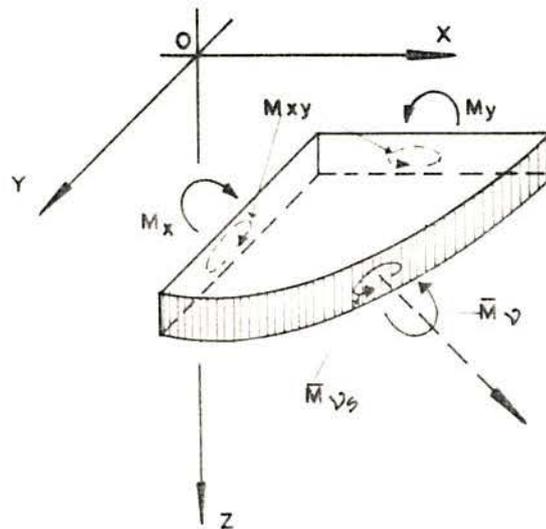


FIGURA 2.5 - Momentos fletores e torções no contorno.

$$\bar{M}_v = M_x v_x^2 + 2 M_{xy} v_x v_y + M_y v_y^2 \quad (2.23)$$

$$\bar{M}_{vs} = (M_y - M_x) v_x v_y + M_{xy} (v_x^2 - v_y^2)$$

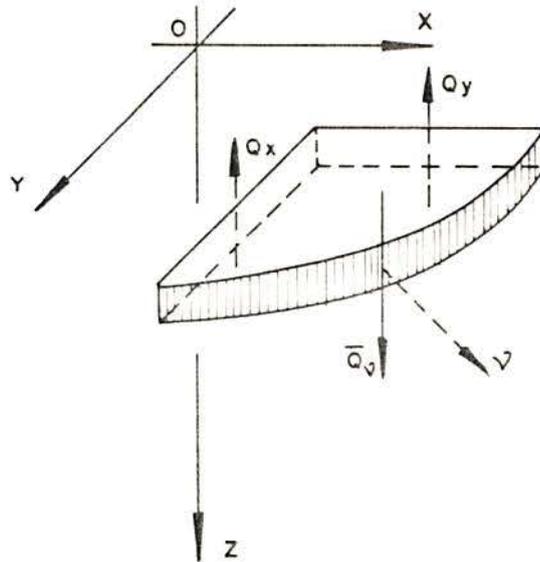


FIGURA 2.6 - Esforços cortantes no contorno.

$$\bar{Q}_v = Q_x \nu_x + Q_y \nu_y \quad (2.24)$$

No que diz respeito ao campo de deslocamentos, no contorno é possível estabelecer-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} u &= u_\nu \nu_x - u_s \nu_y, \\ v &= u_\nu \nu_y + u_s \nu_x, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\theta_x = \theta_\nu \nu_x - \theta_s \nu_y,$$

e

$$\theta_y = \theta_\nu \nu_y + \theta_s \nu_x.$$

Além disso, examinando uma pequena extensão do contorno  $\Gamma = \Gamma(x, y)$ , pode-se fixar as seguintes expressões em função dos sistemas de coordenadas mostrados na FIGURA 2.7:

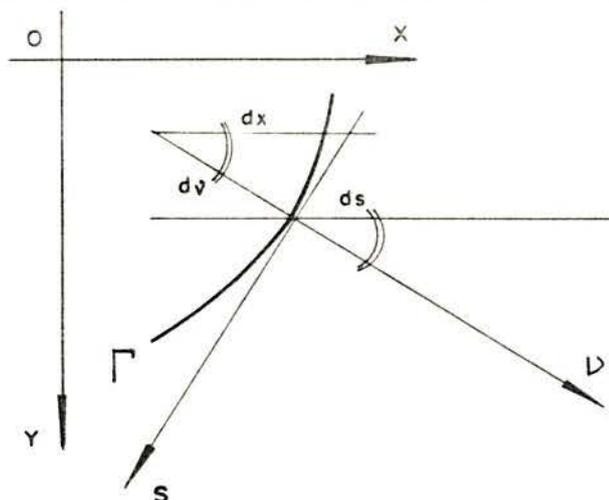


FIGURA 2.7 - Sistemas de coordenadas no contorno.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \nu_x \frac{\partial}{\partial \nu} - \nu_y \frac{\partial}{\partial s} \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \nu_y \frac{\partial}{\partial \nu} + \nu_x \frac{\partial}{\partial s}$$

As equações de (2.22) a (2.26) podem ser substituídas nas integrais de linha da equação (2.21) como artifício para se chegar a uma expressão final mais simples para o P.T.V. na forma

$$\begin{aligned} & - \iint_A \left\{ \left[ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right] \delta u + \left[ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right] \delta v + \left[ \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x,y) \right] \delta w - \right. \\ & \left. \left[ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right] \delta \theta_x - \left[ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y \right] \delta \theta_y \right\} dx dy + \\ & \oint_{\Gamma} \left\{ \left[ N_{\nu} - \bar{N}_{\nu} \right] \delta u_{\nu} + \left[ N_{\nu s} - \bar{N}_{\nu s} \right] \delta u_s + \right. \\ & \left. \left[ N_{\nu} \frac{\partial w}{\partial \nu} + N_{\nu s} \frac{\partial w}{\partial s} + Q_{\nu} \right] \delta w - M_{\nu} \delta \theta_s - M_{\nu s} \delta \theta_s \right\} ds = 0 . \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como o campo de deslocamentos pode ser arbitrário, é possível fazer-se sucessivamente um dos deslocamentos virtuais igual a unidade e considerar simultaneamente os demais como sendo nulos; resultando deste processo as equações de equilíbrio e as condições de contorno que regem o problema.

Desta forma, tem-se que no interior da superfície delimitada pela curva regular  $\Gamma = \Gamma(x,y)$ , são válidas as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q(x,y) = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

Ao longo da curva  $\Gamma = \Gamma(x,y)$ , que delimita a placa, valem as seguintes condições mecânicas ou cinemáticas de contorno:

Condições Mecânicas:

$$N_\nu = \bar{N}_\nu \quad \text{ou}$$

$$N_{\nu s} = \bar{N}_{\nu s} \quad \text{ou}$$

$$N_\nu \frac{\partial w}{\partial \nu} + N_{\nu s} \frac{\partial w}{\partial s} + Q_\nu = 0 \quad \text{ou}$$

$$M_\nu = 0 \quad \text{ou}$$

$$M_{\nu s} = 0 \quad \text{ou}$$

Condições Cinemáticas:

$$u_\nu = \bar{u}_\nu$$

$$u_s = \bar{u}_s$$

$$w = \bar{w} \quad (2.28)$$

$$\theta_\nu = \bar{\theta}_\nu$$

$$\theta_s = \bar{\theta}_s$$

Como se pode observar, as equações de equilíbrio (2.27) e as condições de contorno (2.28) resultam dependentes do campo de deslocamentos, que é justamente a principal incógnita do problema, tratando-se portanto, desde o princípio, de uma formulação não-linear de origem geométrica.

### 3 - ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PLACAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

#### 3.1 - Introdução

O objetivo deste capítulo é estabelecer uma formulação para análise não-linear de placas através do Método dos Elementos Finitos, daqui em diante M.E.F., com solução em deslocamentos.

Inicialmente é feita a descrição do elemento finito utilizado e de suas funções de interpolação. A partir das relações entre as componentes de deformação generalizadas e os deslocamentos, obtém-se a matriz de deformações do elemento. A seguir é definido o vetor de componentes generalizadas de tensões. Finalmente aplica-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais, deduzindo-se então o sistema de equações não-lineares de equilíbrio que governa o problema.

Encerrando o capítulo, apresenta-se como caso particular a solução do problema quando se trata de um material elástico linear, dentro do regime de pequenas deformações. Aborda-se então o cálculo da matriz de rigidez do elemento e a questão da integração numérica. Deve-se salientar que esta formulação linear apenas servirá para o ajuste incremental-iterativo do sistema de equações não-lineares, através do algoritmo desenvolvido no capítulo 5.

#### 3.2 - Geometria do elemento

Seja a placa representada na FIGURA 3.1 através de seu plano médio, que se encontra submetida a um carregamento formado pelas forças por unidade de superfície  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  atuando respectivamente nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

O M.E.F. consiste em dividir o plano médio da placa em elementos de superfície ( elementos finitos ), que estão conectados entre si por meio de pontos nodais. Na solução em deslocamentos, as incógnitas do problema são os deslocamentos dos pontos nodais; sendo as tensões no interior do elemento e as reações de apoio calculadas a partir destes.

Na FIGURA 3.1 é mostrada uma possível discretização da placa em elementos finitos de oito nós.

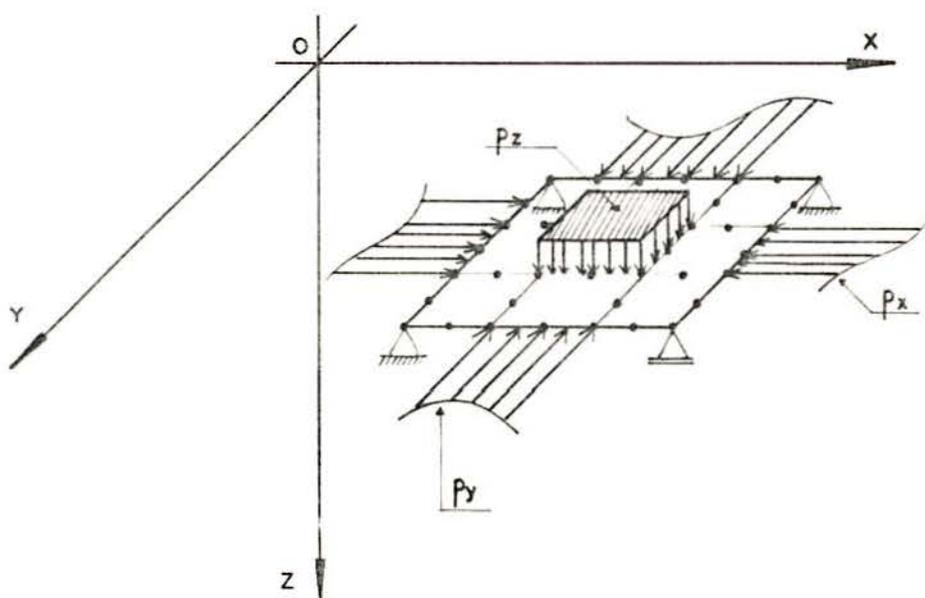


FIGURA 3.1 - Carregamento e aspectos geométricos da placa.

Neste trabalho serão empregados elementos isoparamétricos quadráticos, de oito nós, da família Serendipity, cuja geometria se encontra descrita na FIGURA 3.2. Como sistema de referência local do elemento é adotado um sistema de coordenadas curvilíneas  $\xi$  e  $\eta$ . Os pontos nodais se encontram numerados de 1 a 8.

Os elementos isoparamétricos quadráticos são muito versáteis, pois permitem discretizar placas com contornos curvilíneos, além de sua excelente performance estar comprovada em diversos estudos<sup>9, 20, 37, 98, 99</sup>.

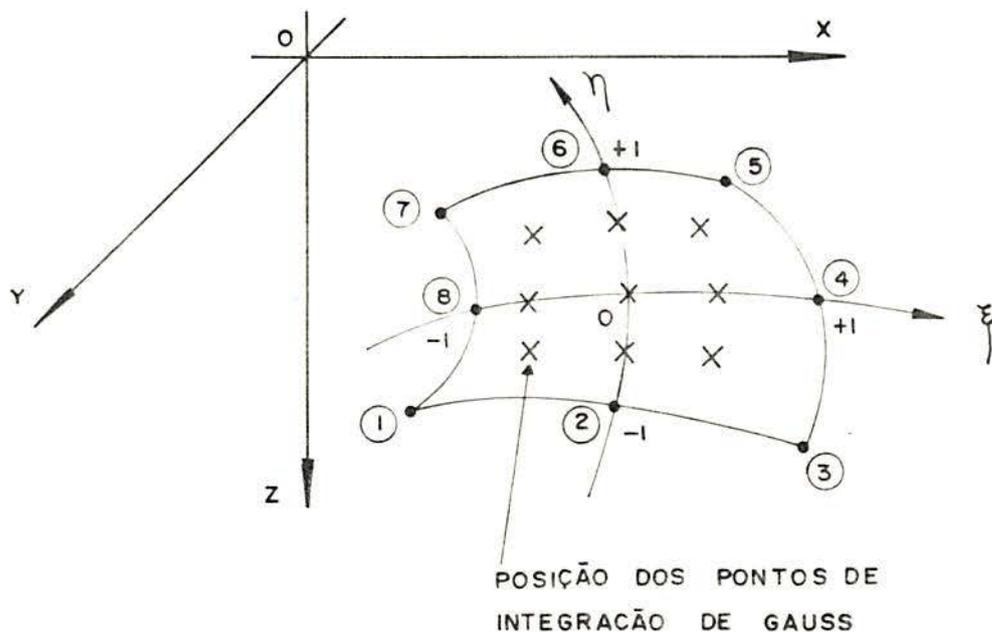


FIGURA 3.2 - Geometria do elemento isoparamétrico quadrático.

### 3.3 - O campo de deslocamentos.

O primeiro passo em uma análise de placas através do M.E.F. em deslocamentos é descrever de forma única o campo de deslocamentos no interior do elemento como função dos deslocamentos dos pontos nodais. Isto é feito mediante o emprego de funções de interpolação.

Assim sendo, o vetor de deslocamentos  $\underline{u}$  em um ponto qualquer no interior do elemento é calculado por

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{U}^e, \quad (3.1)$$

onde  $\underline{u} = \langle u, v, w, \theta_x, \theta_y \rangle^T$ .

A matriz  $\underline{N}$ , denominada matriz de interpolação do elemento, é da ordem de  $5 \times 40$ , sendo definida por

$$\underline{N} = [ \underline{N}_1, \underline{N}_2, \dots, \underline{N}_i, \dots, \underline{N}_8 ],$$

onde  $\underline{N}_i$  é uma submatriz  $5 \times 5$ , dada pelo produto  $N_i(\xi, \eta) \underline{I}_5$ , no qual  $N_i(\xi, \eta)$  é a função de interpolação correspondente ao nó "i" e  $\underline{I}_5$  é uma matriz identidade  $5 \times 5$ .

O vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\tilde{U}^e$  é definido por

$$\tilde{U}^e = \langle \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_i, \dots, \tilde{U}_8 \rangle^T,$$

onde  $\tilde{U}_i$  é o vetor de deslocamentos do nó "i", dado por

$$\tilde{U}_i = \langle u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi} \rangle^T.$$

O elemento isoparamétrico é aquele no qual são empregadas as mesmas funções tanto para interpolar a geometria, como para interpolar os deslocamentos. Desta forma, adotando-se o sistema de coordenadas naturais  $(\xi, \eta)$  no elemento, as coordenadas cartesianas  $x(\xi, \eta)$  e  $y(\xi, \eta)$  em um ponto dentro do elemento são fornecidas pelas expressões

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas cartesianas do nó "i".

As funções de interpolação quadráticas bidimensionais da família Serendipity  $N_i(\xi, \eta)$ , são as seguintes

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \xi + \eta),$$

$$N_2(\xi, \eta) = +\frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta),$$

$$N_3(\xi, \eta) = +\frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (\xi - \eta - 1),$$

$$N_4(\xi, \eta) = +\frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2),$$

$$N_5(\xi, \eta) = +\frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1),$$

$$N_6(\xi, \eta) = +\frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta),$$

$$N_7(\xi, \eta) = +\frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (-\xi + \eta - 1),$$

e 
$$N_8(\xi, \eta) = +\frac{1}{2} (1 - \xi) (1 - \eta^2),$$

sendo que a numeração dos nós corresponde a da FIGURA 3.2.

Cada função de interpolação deve assumir o valor unitário, quando são fornecidas as coordenadas do nó que lhe corresponde e deve anular-se, quando forem dadas as coordenadas de outro nó. Em um ponto qualquer no interior do elemento, a soma dos valores das funções de interpolação para as coordenadas deste ponto deve ser igual à unidade.

### 3.4 - O campo de deformações.

No estudo de placas através do M.E.F. é vantajoso trabalhar-se com componentes generalizadas de deformação, que são função apenas das coordenadas contidas no plano médio da placa. Deste modo, o vetor de deformações generalizadas  $\underline{\varepsilon}$  pode ser expresso por

$$\underline{\varepsilon} = \langle \underline{\varepsilon}_P, \underline{\varepsilon}_F, \underline{\varepsilon}_C \rangle^T; \quad (3.3)$$

onde  $\underline{\varepsilon}_P$  é um vetor contendo as componentes de deformação correspondentes a um estado plano de tensões, dado por

$$\underline{\varepsilon}_P = \langle \bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\gamma}_{xy} \rangle^T;$$

$\underline{\varepsilon}_F$  é um vetor que contém as curvaturas da placa com o sinal trocado, definido por

$$\underline{\varepsilon}_F = \langle \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy} \rangle^T;$$

e  $\underline{\varepsilon}_C$  é um vetor composto pelas componentes de deformação por corte na forma

$$\underline{\varepsilon}_C = \langle \phi_x, \phi_y \rangle^T.$$

Deve-se observar que neste trabalho considera-se que a distorção por corte no nível do plano médio da placa se mantém constante ao longo de toda espessura  $h$ . Com base nesta hipótese, tem-se que

$$\phi_x = \gamma_{xz}, \quad (3.4)$$

$$\phi_y = \gamma_{yz}.$$

Esta afirmação permite recuperar a hipótese das seções planas, que é de grande valia neste estudo.

Posteriormente será introduzido um fator de correção para esta simplificação, no que se refere à distribuição das tensões.

Havendo a possibilidade de ocorrerem grandes deformações, o vetor de deformações generalizadas deve ser composto por duas parcelas na forma

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_o + \underline{\varepsilon}_g . \quad (3.5)$$

Na equação (3.5),  $\underline{\varepsilon}_o$  é um vetor que contém as componentes de deformações infinitesimais (lineares) e  $\underline{\varepsilon}_g$  é um vetor contendo os termos não-lineares correspondentes a deformações finitas. Estes vetores serão descritos a seguir.

#### 3.4.1 - Componentes de deformação infinitesimais.

Levando-se em consideração apenas as parcelas lineares das relações deformação-deslocamento estabelecidas no capítulo 2, o vetor correspondente às componentes de deformações generalizadas infinitesimais é dado por

$$\underline{\varepsilon}_o = \{ \underline{\varepsilon}_o^P, \underline{\varepsilon}_o^F, \underline{\varepsilon}_o^C \}^T, \quad (3.6)$$

onde

$$\underline{\varepsilon}_o^P = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T,$$

$$\underline{\varepsilon}_o^F = \left\{ -\frac{\partial \theta}{\partial x}, -\frac{\partial \theta}{\partial y}, -\left[ \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \right\}^T, \quad (3.7)$$

e

$$\underline{\varepsilon}_o^C = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x, \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right\}^T.$$

Empregando-se para o campo de deslocamentos, segundo o M.E.F., a equação (3.1), chega-se a

$$\underline{\varepsilon}_o = \underline{B}_o \underline{U}^e, \quad (3.8)$$

onde

$$\tilde{B}_o = [ \tilde{B}_{o1}, \tilde{B}_{o2}, \dots, \tilde{B}_{oi}, \dots, \tilde{B}_{o8} ],$$

é uma matriz  $8 \times 40$ , chamada matriz de deformações do elemento, sendo  $\tilde{B}_{oi}$  uma submatriz nodal  $8 \times 5$ , que contém derivadas das funções de interpolação  $N_i(\xi, \eta)$ .

A submatriz nodal de deformações do nó "i" apresenta a seguinte composição

$$\tilde{B}_{oi} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{oi}^P & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{B}_{oi}^F \\ \tilde{0} & \tilde{B}_{oi}^C \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$(3 \times 2) \quad (3 \times 3)$   
 $(3 \times 2) \quad (3 \times 3)$   
 $(2 \times 2) \quad (2 \times 3)$

onde

$$\tilde{B}_{oi}^P = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

é a submatriz de deformações para um estado plano de tensões;

$$\tilde{B}_{oi}^F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

é a submatriz de deformações para flexão e torção de placas;

$$\underline{B}_{oi}^c = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

é a submatriz de deformações para o cisalhamento.

Assim as componentes de deformação generalizadas para deformações infinitesimais podem ser calculadas, em qualquer ponto no interior do elemento, a partir do vetor de deslocamentos nodais.

Deve ainda observar que a primeira variação do vetor  $\underline{\varepsilon}_o$ , definido na equação (3.8), é dada por

$$\delta \underline{\varepsilon}_o = \underline{B}_o \delta \underline{U}^e, \quad (3.14)$$

sendo este resultado utilizado mais adiante.

### 3.4.2 - Componentes de deformação não-lineares.

O vetor  $\underline{\varepsilon}_G$ , que contém as componentes não-lineares das deformações generalizadas é definido a partir das equações (2.9), como sendo

$$\underline{\varepsilon}_G = \langle \underline{\varepsilon}_G^P, \underline{0}, \underline{0} \rangle^T, \quad (3.15)$$

onde

$$\underline{\varepsilon}_G^P = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]^2, \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \right]^2, \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T. \quad (3.16)$$

Calculando-se a primeira variação do vetor  $\underline{\varepsilon}_G$ , definido segundo as equações (3.15) e (3.16), e tendo-se em conta a definição do campo de deslocamentos segundo o M.E.F, chega-se a

$$\delta \underline{\varepsilon}_G = \underline{B}_G(\underline{U}^e) \delta \underline{U}^e, \quad (3.17)$$

onde  $\underline{B}_G(\underline{U}^e)$  é a matriz de deformações não-linear do elemento, assim designada por ser função do vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\underline{U}^e$ .

A matriz  $\underline{B}_G$ , cuja ordem é  $8 \times 40$ , compõem-se da seguinte forma

$$\underline{B}_G = [ \underline{B}_{G1}, \underline{B}_{G2}, \dots, \underline{B}_{Gi}, \dots, \underline{B}_{G8} ] , \quad (3.18)$$

onde  $\underline{B}_{Gi}$  é uma submatriz nodal definida por

$$\underline{B}_{Gi} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{B}_{Gi}^P \\ (3 \times 2) & (3 \times 3) \\ \underline{0} & \underline{0} \\ (3 \times 2) & (3 \times 3) \\ \underline{0} & \underline{0} \\ (2 \times 2) & (2 \times 3) \end{bmatrix} , \quad (3.19)$$

sendo

$$\underline{B}_{Gi}^P = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (3.20)$$

Em resumo, a primeira variação do vetor de componentes generalizadas de deformações  $\underline{\epsilon}$ , dado pela equação (3.5), pode ser calculada a partir da expressão

$$\delta \underline{\epsilon} = \underline{\bar{B}} \delta \underline{U}^e , \quad (3.21)$$

onde  $\underline{\bar{B}}$  é a matriz de deformações completa do elemento, definida por

$$\underline{\bar{B}} = \underline{B}_0 + \underline{B}_G(\underline{U}^e) . \quad (3.22)$$

### 3.5 - Ações nodais e carregamentos.

A cada elemento se encontra associado um vetor de ações nodais  $\underline{F}^e$ , dado por

$$\tilde{F}^e = \langle \tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_i, \dots, \tilde{F}_n \rangle^T,$$

onde  $\tilde{F}_i$  é o vetor de ações nodais do nó "i" composto na forma

$$\tilde{F}_i = \langle F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, M_{xi}, M_{yi} \rangle^T,$$

sendo  $F_{xi}$ ,  $F_{yi}$  e  $F_{zi}$  as forças nodais atuantes nas direções x, y e z, respectivamente,  $M_{xi}$  o momento fletor na direção x e  $M_{yi}$  o momento fletor na direção y. As componentes do vetor de ações nodais  $\tilde{F}_i$  correspondem às componentes do vetor de deslocamentos nodais  $\tilde{U}_i$ .

O carregamento externo no interior do elemento é definido através do vetor de cargas por unidade de superfície  $p$ , dado por

$$p = \langle p_x, p_y, p_z \rangle^T,$$

formado pelas forças por unidade de superfície  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  atuando respectivamente nas direções x, y e z.

### 3.6 - Componentes generalizadas de tensão.

Define-se aqui o vetor de componentes generalizadas de tensão  $\tilde{\sigma}$ , referido às coordenadas do plano médio da placa, tendo por base as equações (2.17), na forma

$$\tilde{\sigma} = \langle \tilde{\sigma}_P, \tilde{\sigma}_F, \tilde{\sigma}_C \rangle^T, \quad (3.23)$$

onde

$$\tilde{\sigma}_P = \langle N_x, N_y, N_{xy} \rangle^T,$$

$$\tilde{\sigma}_F = \langle M_x, M_y, M_{xy} \rangle^T, \quad (3.24)$$

e

$$\tilde{\sigma}_C = \langle Q_x, Q_y \rangle^T,$$

são respectivamente os vetores de componentes generalizadas de tensão para estado plano de tensões, flexão e torção de placas, e cisalhamento.

Note-se que não foi estabelecida até este momento nenhuma equação constitutiva, relacionando as componentes generalizadas de tensão com as de deformação. Este fato indica que as equações de equilíbrio obtidas a seguir são independentes do material que constitui a placa.

### 3.7 - Aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Seja um único elemento sujeito à atuação de cargas nodais  $\underline{F}^e$  e a forças de superfície  $p$ , que causam o surgimento de uma distribuição de tensões equilibrantes  $\underline{\sigma}$ .

Considerando que este elemento seja submetido a uma variação arbitrária dos deslocamentos nodais  $\delta \underline{U}^e$ , que resulta em um campo de deslocamentos compatível no interior do elemento  $\delta \underline{u}$  e em um campo de deformações também compatível  $\delta \underline{\epsilon}$ .

Lembrando as hipóteses formuladas quanto ao campo de deformações no capítulo 2, as tensões podem ser referidas ao sistema indeformado e as integrais podem ser efetuadas dentro dos limites da geometria original do elemento, logo o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.) estabelece que

$$\delta \underline{U}^{e,T} \underline{F}^e + \iint_{A_e} \delta \underline{u}^T p \, dA = \iint_{A_e} \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} \, dA . \quad (3.25)$$

Substituindo-se as expressões obtidas para os deslocamentos e as deformações no interior do elemento segundo as equações (3.1) e (3.21), respectivamente, resulta

$$\delta \underline{U}^{e,T} \underline{F}^e + \delta \underline{U}^{e,T} \iint_{A_e} \underline{N}^T p \, dA = \delta \underline{U}^{e,T} \iint_{A_e} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dA . \quad (3.26)$$

Como a variação dos deslocamentos nodais  $\delta \underline{U}^e$  é arbitrária pode ser eliminada da equação (3.26), logo

$$\underline{F}^e + \iint_{A_e} \underline{N}^T p \, dA = \iint_{A_e} \underline{B}^T \underline{\sigma} \, dA . \quad (3.27)$$

Fazendo-se

$$\tilde{F}_{\sim eq}^e = \iint_{A_e} \tilde{N}^T \tilde{P} dA, \quad (3.28)$$

onde  $\tilde{F}_{\sim eq}^e$  é o vetor de ações nodais equivalentes do elemento;

$$\tilde{P}_{\sim ext}^e = \tilde{F}^e + \tilde{F}_{\sim eq}^e \quad (3.29)$$

onde  $\tilde{P}_{\sim ext}^e$  o vetor de cargas nodais externas a nível de elemento e introduzindo-se a definição

$$\tilde{A}_{\sim NL}^e(\tilde{U}^e) = \iint_{A_e} \tilde{B}^T \tilde{\sigma} dA \quad (3.30)$$

onde  $\tilde{A}_{\sim NL}^e$  é o vetor de ações nodais não-lineares do elemento, a equação (3.27) assume o seguinte aspecto

$$\tilde{P}_{\sim ext}^e = \tilde{A}_{\sim NL}^e(\tilde{U}^e) \quad (3.31)$$

Observe-se que o vetor  $\tilde{A}_{\sim NL}^e$  é uma função não-linear do vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\tilde{U}^e$ . Esta não-linearidade pode ter fundamentalmente duas origens:

I) Não-linearidade geométrica que se deve a ocorrência de deformações finitas, conforme já foi mostrado no capítulo 2;

II) Não-linearidade física que é causada pelo comportamento não-linear mecânico do material, que será abordada no capítulo 4.

Estes efeitos na verdade atuam conjuntamente, determinando uma resposta estática que se afasta daquela prevista pela Teoria da Elasticidade Linear.

Realizando-se a soma sobre cada grau de liberdade nodal da placa, das contribuições dos elementos que a ele concorrem, chega-se a

$$\tilde{P}_{\sim ext} = \tilde{A}_{\sim NL}(\tilde{U}) \quad (3.32)$$

onde  $\tilde{P}_{ext}$  é vetor de cargas nodais completo da estrutura, e  $\tilde{A}_{NL}$  é o vetor de ações nodais não-lineares completo da estrutura.

A equação (3.32) pode ser reescrita na forma

$$\tilde{P}_{ext} - \tilde{A}_{NL}(\tilde{U}) = \tilde{0}. \quad (3.33)$$

A equação (3.33) representa um sistema de equações não-lineares de equilíbrio nodal entre as cargas nodais externas e as ações nodais nos elementos, trocadas de sinal por ser agora necessário considerá-las como ações sobre os nós.

Se o vetor de deslocamentos nodais da placa  $\tilde{U}$ , não for a solução exata para a equação (3.33), existirá um vetor de forças residuais não equilibradas  $\tilde{\psi}$ , dado por

$$\tilde{\psi}(\tilde{U}) = \tilde{P}_{ext} - \tilde{A}_{NL}(\tilde{U}). \quad (3.34)$$

O problema trata-se, então, de se determinar o vetor de deslocamentos  $\tilde{U}$ , que verifique o sistema de "n" equações não-lineares a "n" incógnitas estabelecido na seguinte forma

$$\tilde{\psi}(\tilde{U}) = \tilde{0}. \quad (3.35)$$

O sistema de equações (3.35) é resolvido numericamente, através do algoritmo apresentado no capítulo 5.

### 3.8 - Caso particular: material elástico linear e regime de pequenas deformações.

Para que se possa desenvolver o algoritmo de solução da equação (3.35), é necessário estabelecer-se a equação de equilíbrio da placa, para um material homogêneo elástico linear, dentro do regime de pequenas deformações.

A contribuição da armadura para a rigidez elástica do elemento é desprezada. Esta aproximação é válida, porque o algoritmo apenas necessita de uma estimativa da matriz de rigidez inicial do elemento, que será obtida a seguir.

Considerando-se que a placa seja formada por um material que obedeça a Lei de Hooke, cujo módulo de deformação longitudinal é  $E$  e cujo coeficiente de Poisson é  $\nu$ , a equação constitutiva para o problema pode ser estabelecida matricialmente da forma que se segue

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{D}}' \underline{\underline{\varepsilon}}' , \quad (3.36)$$

onde

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \langle \tau_{xx} , \tau_{yy} , \tau_{xy} , \tau_{xz} , \tau_{yz} \rangle^T ,$$

$$\underline{\underline{D}}' = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} ,$$

e

$$\underline{\underline{\varepsilon}}' = \langle \varepsilon_{xx} , \varepsilon_{yy} , \gamma_{xy} , \gamma_{xz} , \gamma_{yz} \rangle^T .$$

Utilizando-se a equação (3.36), as definições de resultantes de tensões dadas no conjunto de equações (2.17), bem como os termos lineares das relações deformação-deslocamento das equações (2.9), chega-se a

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}_0 , \quad (3.37)$$

onde  $\underline{\underline{\sigma}}$  é o vetor de tensões generalizadas definido por (3.23) e  $\underline{\underline{\varepsilon}}_0$  é o vetor de deformações generalizadas infinitesimais dado por (3.15).

A matriz  $\underline{\underline{D}}$  da ordem de  $8 \times 8$ , é denominada matriz de constantes elásticas do problema sendo constituída na forma

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{D}}_P & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ (3 \times 3) & (3 \times 3) & (3 \times 2) \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}_F & \underline{\underline{0}} \\ (3 \times 3) & (3 \times 3) & (3 \times 2) \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}_C \\ (2 \times 3) & (2 \times 3) & (2 \times 2) \end{bmatrix} , \quad (3.38)$$

onde  $\underline{D}_P$  é a submatriz para estado plano de tensões dada por

$$\underline{D}_P = \frac{E h}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}; \quad (3.39)$$

$\underline{D}_F$  é a submatriz para flexão e torção de placas definida na forma

$$\underline{D}_F = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}; \quad (3.40)$$

e  $\underline{D}_C$  é a submatriz para o cisalhamento, dada por

$$\underline{D}_C = \frac{E h}{\alpha 2 (1 + \nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

O fator  $\alpha$  na expressão (3.41) vem a corrigir o fato de que as tensões tangenciais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  não são constantes ao longo da espessura da placa, como o campo de deslocamentos assumido poderia sugerir. Neste trabalho adota-se para  $\alpha$  o valor 5/6, conforme HINTON E OWEN<sup>20</sup>.

Substituindo-se a equação (3.37) na equação (3.27), vem

$$\underline{F}^e + \iint_{Ae} \underline{N}^T \underline{p} \, dA = \iint_{Ae} \underline{B}_o^T \underline{D} \underline{B}_o \, dA \underline{U}^e, \quad (3.42)$$

ou ainda,

$$\underline{P}_{ext}^e = \underline{K}_o^e \underline{U}^e. \quad (3.43)$$

A matriz  $K_{\sim o}^e$  (40x40) é denominada matriz de rigidez do elemento sendo definida pela expressão

$$K_{\sim o}^e = \iint_{Ae} B_{\sim o}^T D B_{\sim o} dA. \quad (3.44)$$

Efetuando-se o somatório em cada grau de liberdade nodal da placa das contribuições de todos os elementos que concorrem no mesmo nó, segundo a equação (3.43), chega-se a

$$P_{\sim ext} = K_{\sim o} U, \quad (3.45)$$

onde  $K_{\sim o}$  é a matriz de rigidez global da estrutura,  $P_{\sim ext}$  é o vetor de cargas nodais completo da estrutura, e  $U$  é o vetor de deslocamentos nodais completo.

Resulta, então, um sistema de equações lineares de equilíbrio  $n \times n$ , onde  $n$  é o número de graus de liberdade da estrutura; que uma vez resolvido fornece os deslocamentos nodais para o carregamento aplicado. A partir dos deslocamentos nodais pode-se calcular as deformações através de (3.8), e as tensões por meio da equação (3.37).

### 3.9 - Matriz de rigidez do elemento.

A matriz de rigidez do elemento  $K_{\sim o}^e$  resulta 40x40, pois existem oito nós cada um com cinco graus de liberdade. Esta matriz é obtida através do cálculo da integral da equação (3.44), utilizando-se o sistema de coordenadas naturais do elemento, ou seja,

$$K_{\sim o}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B_{\sim o}^T D B_{\sim o} |J| d\xi d\eta \quad (3.46)$$

onde  $|J|$  é o determinante da matriz Jacobiana do elemento.

Uma submatriz genérica de  $K_{\sim o}^e$ , relacionando o nó "i" com o nó "j" é calculada através da expressão

$$\left[ \underset{\sim}{K}_o \right]_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}_{oi}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{B}_{oj} |\underset{\sim}{J}| d\xi d\eta \quad (3.47)$$

Dentro do regime de pequenas deformações e sendo o material homogêneo elástico linear, observa-se que a submatriz de rigidez para um estado plano de tensões resulta desacoplada das submatrizes de flexão e de cisalhamento. Este fato pode ser explorado com vantagem na obtenção da matriz de rigidez do elemento, evitando-se perda de tempo no cálculo de termos que evidentemente serão nulos.

Assim sendo a equação (3.47) pode ser expressa da seguinte forma

$$\left[ \underset{\sim}{K}_o \right]_{ij} = \begin{bmatrix} \left[ \underset{\sim}{K}_o^P \right]_{ij} & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \left[ \underset{\sim}{K}_o^{F+C} \right]_{ij} \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

$\begin{matrix} (2 \times 2) & (2 \times 3) \\ (3 \times 2) & (3 \times 3) \end{matrix}$

onde

$$\left[ \underset{\sim}{K}_o^P \right]_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underset{\sim}{B}_{oi}^{T,P} \underset{\sim}{D}^P \underset{\sim}{B}_{oj}^P |\underset{\sim}{J}| d\xi d\eta, \quad (3.49)$$

e

$$\left[ \underset{\sim}{K}_o^{F+C} \right]_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[ \underset{\sim}{B}_{oi}^{T,F} \underset{\sim}{D}^F \underset{\sim}{B}_{oj}^F + \underset{\sim}{B}_{oi}^{T,C} \underset{\sim}{D}^C \underset{\sim}{B}_{oj}^C \right] |\underset{\sim}{J}| d\xi d\eta. \quad (3.50)$$

### 3.10 - Integração numérica

As integrais de superfície que surgem na determinação da matriz de rigidez do elemento, do vetor de ações nodais não-lineares e do vetor de ações nodais equivalentes são calculadas numericamente. O processo de integração numérica adotado neste trabalho é o da Quadratura de Gauss-Legendre.

A regra com "n" pontos de Gauss integra de forma exata um polinômio de grau " $(2n - 1)$ ". Na formulação aqui desenvolvida, as funções de interpolação  $N_i(\xi, \eta)$  são polinômios do segundo grau. No cálculo da matriz de rigidez do elemento surgirão polinômios do quarto grau. Conclui-se, então, que é necessário o emprego da regra com 3x3 pontos de Gauss para que a matriz de rigidez do elemento seja calculada de forma exata.

A integração com 3x3 pontos de Gauss produz bons resultados para placas espessas, com uma relação  $L/h \leq 10$ . Porém a medida em que esbeltez da placa aumenta, o que se observa é que o elemento se afasta da solução exata prevista para placas finas pela Teoria de KIRCHHOFF, sendo que para uma relação  $L/h \geq 100$ , os resultados são inconsistentes<sup>37</sup>.

Este problema pode ser explicado pela presença de tensões de cisalhamento que atuam de forma parasitária, mesmo quando a espessura é pequena, tornando a placa rígida demais. A solução encontrada para esta dificuldade, foi reduzir a ordem de integração dos termos relativos ao corte da matriz de rigidez e do vetor de ações nodais não-lineares. Este processo elimina este enrijecimento espúrio, sem que se perca a boa convergência do elemento<sup>37</sup>.

Neste trabalho será adotada a integração seletiva com 3x3 pontos de Gauss para os termos relativos ao estado plano de tensões e flexo-torção de placas e com 2x2 pontos para os termos relacionados com o cisalhamento.

## 4 - MODELO PARA O MATERIAL COMPOSTO CONCRETO ARMADO.

### 4.1 - Introdução

Neste capítulo é desenvolvido o modelo para o comportamento mecânico do material composto concreto armado. Tanto o concreto como o aço são idealizados sob o ponto de vista elástico não-linear. Esta abordagem, apesar de sua simplicidade matemática, tem fornecido bons resultados para a análise de estruturas de concreto armado sob carregamento monotônico crescente de curta duração.<sup>22,36,12,4</sup>

Embora em uma laje o concreto esteja solicitado biaxialmente, as tensões serão calculadas de forma independente nas direções de deformações principais, através de uma relação tensão-deformação uniaxial.

A equação constitutiva adotada para o concreto em compressão é a parábola de Madrid. O concreto tracionado é considerado como um material elástico linear. A fissuração é abordada segundo uma distribuição contínua, sendo levada em conta a contribuição do concreto tracionado entre fissuras para o enrijecimento da laje ( tension stiffening ).

As barras da armadura são consideradas como uma camada de aço de espessura equivalente, resistindo somente a esforços axiais na direção das mesmas. Considera-se aderência perfeita entre a camada de aço e o concreto que a envolve. A equação tensão-deformação utilizada para o aço segue um modelo bilinear, tanto em tração como em compressão.

O comportamento mecânico dos materiais é avaliado nos pontos amostrais utilizados na integração numérica de Gauss-Legendre, descrita no capítulo anterior. As resultantes de tensões são calculadas a partir de um modelo laminar, empregando-se a regra da ordenada média.

## 4.2 - Modelo para o concreto

### 4.2.1 - Concreto em compressão

A equação tensão-deformação empregada para o concreto em compressão é a parábola de Madrid definida pela expressão

$$\sigma_c = E_{co} \left[ \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2 \varepsilon_{co}} \right], \quad -0,0035 \leq \varepsilon \leq 0,00, \quad (4.1)$$

onde  $E_{co}$  é o módulo de deformação longitudinal do concreto tangente à origem e  $\varepsilon_{co}$  é a deformação correspondente à máxima tensão de compressão  $f_c$ . Segundo OWEN *et alii*<sup>28</sup>, para os concretos usuais  $\varepsilon_{co}$  pode ser calculado através da fórmula

$$\varepsilon_{co} = \frac{2 f_c}{E_{co}}. \quad (4.2)$$

Na FIGURA 4.1 é mostrado o aspecto geométrico desta curva.

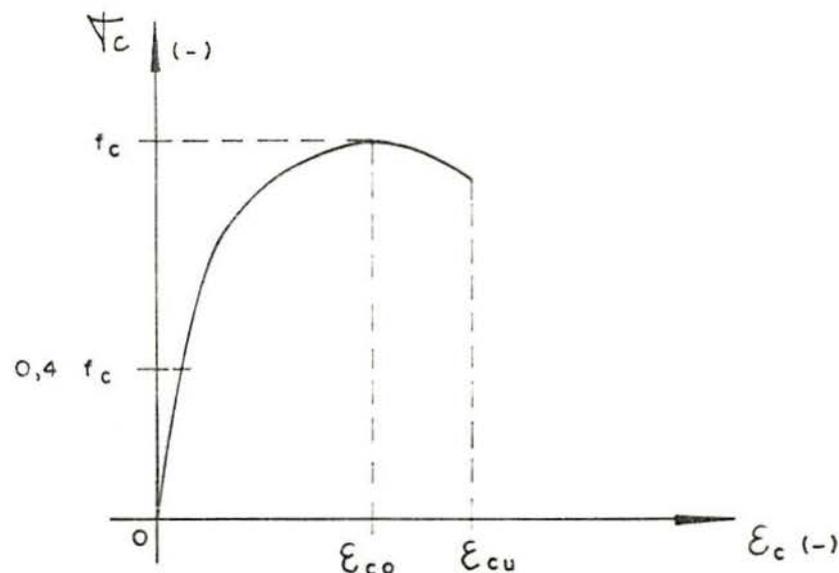


FIGURA 4.1 - Diagrama tensão-deformação para o concreto em compressão.

A deformação última de compressão  $\epsilon_{cu}$  é tomada como igual a -0,0035.

#### 4.2.2 - Concreto em tração

Uma das principais características do concreto é a de que, embora seja um material bastante resistente sob tensões de compressão, comporta-se de modo frágil quando solicitado por tensões de tração. A resistência do concreto à tração é da ordem de apenas 10% de sua resistência a compressão.

Este fato explica o aparecimento de fissuras, ou seja, rupturas localizadas por tração, em lajes de concreto armado, mesmo quando ainda submetidas a cargas de serviço. A fissura ao penetrar na espessura da laje reduz a seção resistente de concreto, diminuindo a rigidez e, conseqüentemente, provoca um aumento dos deslocamentos. Este fenômeno acentua ainda mais o comportamento não-linear do material.

Contudo, é necessário considerar que as fissuras surgem em uma laje sempre com um certo espaçamento entre elas. O concreto situado entre duas fissuras mantém suas propriedades de aderência às barras da armadura, absorvendo uma parte dos esforços de tração. Esta contribuição do concreto entre fissuras para a rigidez da estrutura é conhecida na literatura como "tension stiffening", devendo ser levada em conta ao se analisar a resposta estática de lajes de concreto armado<sup>18</sup>.

Nesta dissertação, o concreto tracionado é idealizado como um material elástico linear frágil até atingir a tensão limite de resistência a tração  $f_t$ . A partir deste ponto há uma queda brusca de rigidez, seguindo-se uma reta descendente até ser atingida a deformação  $\epsilon_{cm}$ .

Este comportamento pode ser descrito matematicamente através das equações

$$\sigma_c = E_{co} \varepsilon, \text{ se } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cr},$$

(4.3)

$$\text{e } \sigma_c = \alpha f_t \left[ 1,0 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cm}} \right], \text{ se } \varepsilon_{cr} < \varepsilon \leq \varepsilon_{cm}.$$

A FIGURA 4.2 ilustra o modelo adotado para o concreto em tração.

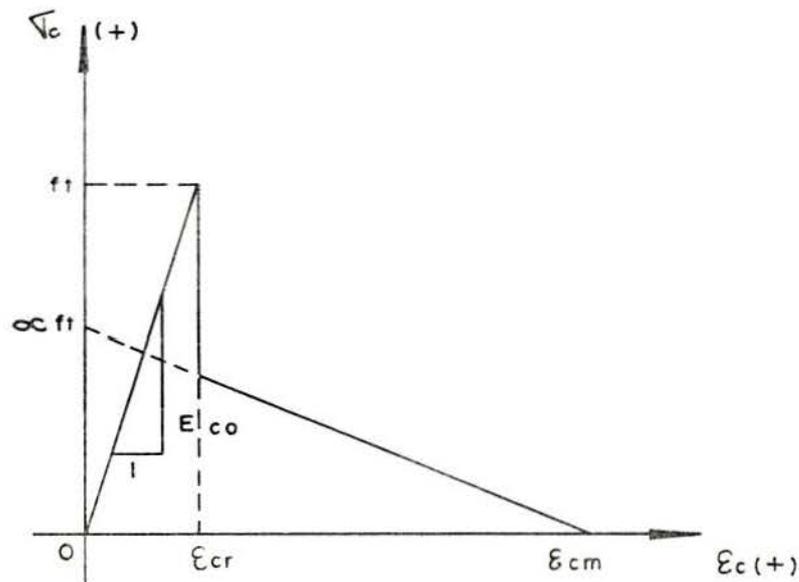


FIGURA 4.2 - Diagrama tensão-deformação para o concreto em tração.

Nas expressões anteriores,  $\varepsilon_{cr}$  é a deformação que corresponde a ruptura do concreto por tração na flexão, dada por

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_t}{E_{co}}. \quad (4.4)$$

A deformação  $\varepsilon_{cm}$  corresponde a perda completa de rigidez do concreto entre fissuras. Tal situação ocorre quando

a armadura tracionada atinge o escoamento, por este motivo é conveniente adotar-se para  $\epsilon_{cm}$  um valor próximo ao da deformação de escoamento do aço utilizado. Neste trabalho emprega-se  $\epsilon_{cm}$  igual a 0,002.

O coeficiente  $\alpha$ , que normalmente varia entre 0,50 e 0,70 (OWEN *et alii*<sup>28</sup>), foi tomado igual a 0,50 e mantido constante em todos os exemplos por fornecer os melhores resultados no estudo de lajes.

#### 4.2.3 - Cálculo das resultantes de tensões no concreto.

As resultantes de tensões no concreto e no aço são avaliadas nos pontos amostrais utilizados na integração numérica de Gauss-Legendre. Admite-se que o comportamento mecânico do material neste ponto seja representativo da região que o envolve.

Uma vez determinado o vetor de deslocamentos nodais da laje  $\underline{U}$ , é possível organizar o vetor de deslocamentos nodais do elemento  $\underline{U}^e$ . As deformações generalizadas  $\underline{\epsilon}$ , em um ponto de integração, são calculadas pelas relações deformação-deslocamento definidas no capítulo 3.

A espessura  $h$  da laje é dividida em faixas e as deformações específicas no ponto médio de cada camada podem ser determinadas pelas expressões

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \bar{\epsilon}_x - z_l \kappa_{xx}, \\ \epsilon_{yy} &= \bar{\epsilon}_y - z_l \kappa_{yy},\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$e \quad \gamma_{xy} = \bar{\gamma}_{xy} - z_l \kappa_{xy},$$

onde  $z_l$  é a ordenada média de cada faixa.

Conhecidas as componentes de deformação específica  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  e  $\gamma_{xy}$  pode-se obter as deformações principais  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ , por meio das equações

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \sqrt{\left[ \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right]^2 + \left[ \frac{\gamma_{xy}}{2} \right]^2}, \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \sqrt{\left[ \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \right]^2 + \left[ \frac{\gamma_{xy}}{2} \right]^2}.$$

Com as deformações principais são calculadas as tensões nas direções principais de deformação 1 e 2,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente. Isto é feito de forma independente, utilizando-se as relações tensão-deformação de (4.1) e (4.3).

Aplicando-se uma rotação às tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  é feita a determinação das tensões  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  e  $\tau_{xy}$ , segundo o sistema de referência local da placa. Os cossenos diretores dos eixos de deformações principais são estabelecidos através das fórmulas ( FUNG<sup>17</sup> )

$$\begin{aligned} \cos(1,x) &= + \frac{\gamma_{xy}}{2 \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_1)^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2}}, \\ \cos(1,y) &= - \frac{(\varepsilon_x - \varepsilon_1)}{\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_1)^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2}}, \\ \cos(2,x) &= - \frac{(\varepsilon_y - \varepsilon_2)}{\sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_2)^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2}}, \\ \cos(2,y) &= + \frac{\gamma_{xy}}{2 \sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_2)^2 + \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Assim, resulta que

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \sigma_1 \cos(1,x)^2 + \sigma_2 \cos(2,x)^2, \\ \tau_{yy} &= \sigma_1 \cos(1,y)^2 + \sigma_2 \cos(2,y)^2, \quad (4.8)\end{aligned}$$

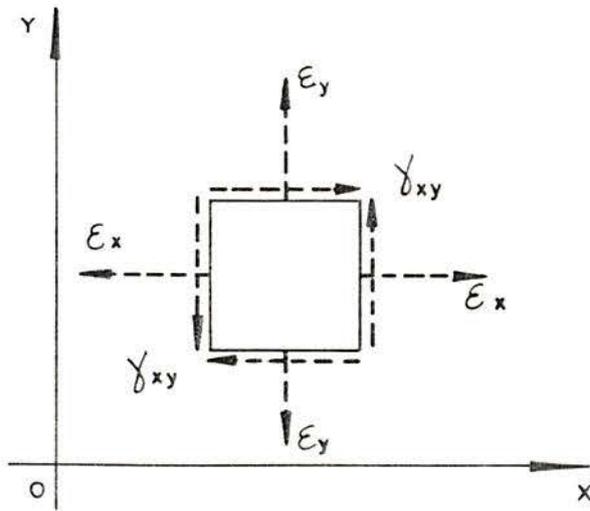
$$\tau_{xy} = \sigma_1 \cos(1,x) \cos(1,y) + \sigma_2 \cos(2,x) \cos(2,y).$$

As resultantes de tensões ou tensões generalizadas são calculadas integrando-se as tensões dadas por (4.8) ao longo da espessura, aplicando-se a regra da ordenada média a cada faixa, ou seja,

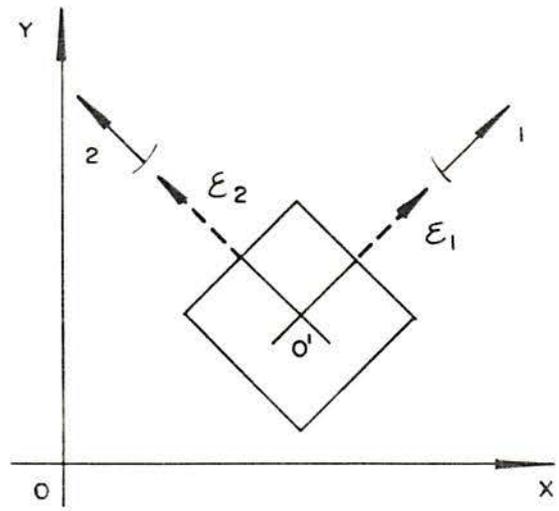
$$\begin{aligned}N_{xc} &= \sum_{i=1}^{NC} \tau_{xxi} \Delta h_i, \\ N_{yc} &= \sum_{i=1}^{NC} \tau_{yyi} \Delta h_i, \\ N_{xyc} &= \sum_{i=1}^{NC} \tau_{xyi} \Delta h_i, \\ M_{xc} &= \sum_{i=1}^{NC} \tau_{xxi} \Delta h_i z_i, \\ M_{yc} &= \sum_{i=1}^{NC} \tau_{yyi} \Delta h_i z_i, \\ M_{xyc} &= \sum_{i=1}^{NC} \tau_{xyi} \Delta h_i z_i,\end{aligned} \quad (4.9)$$

onde  $\Delta h_i$  é a espessura de cada camada e  $NC$  é o número de faixas em que foi dividida a espessura da laje.

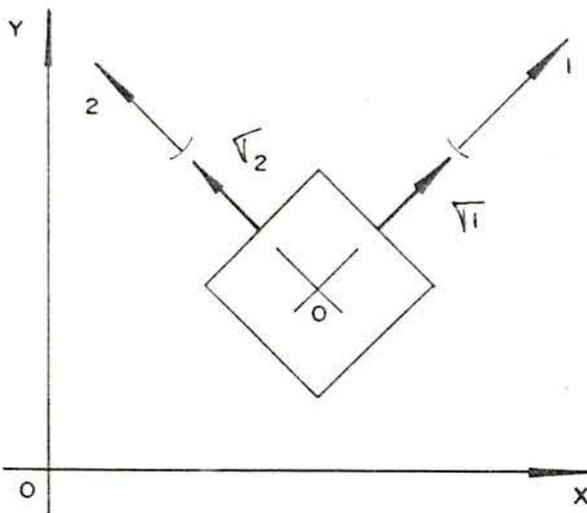
A FIGURA 4.3 ilustra as diversas fases do cálculo das tensões no concreto.



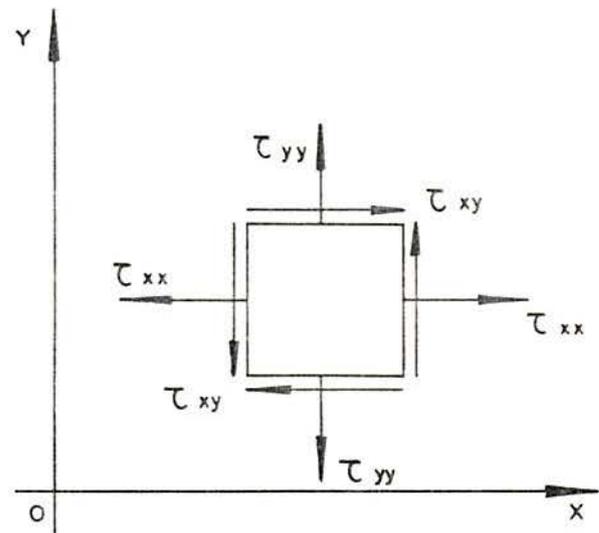
(a) Cálculo das deformações específicas  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$



(b) Cálculo das deformações principais  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ .



(c) Cálculo das tensões  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ .



(d) Cálculo das tensões  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  e  $\tau_{xy}$

FIGURA 4.3 - Fases do cálculo das tensões no concreto.

Os esforços cortantes são obtidos a partir de uma relação tensão generalizada - deformação generalizada linear, na forma

$$Q_{xc} = k G_{co} h \phi_x , \quad (4.10)$$

e

$$Q_{yc} = k G_{co} h \phi_y ,$$

onde  $k$  é o fator de forma da seção transversal relativo ao corte, tomado igual a  $6/5$ , e  $G_{co}$  é o módulo de deformação ao cisalhamento do concreto tangente à origem, dado por

$$G_{co} = \frac{E_{co}}{2(1 + \nu)} . \quad (4.11)$$

#### 4.3 - Modelo para a armadura.

##### 4.3.1 - Equação constitutiva para o aço.

O aço é modelado segundo um esquema elástico bilinear. Até ser atingida a tensão de escoamento  $f_y$ , o módulo de deformação longitudinal é  $E_{s1}$ . A partir deste ponto considera-se ainda um certo enrijecimento do material através do módulo  $E_{s2}$ , até ser alcançada a deformação de ruptura  $\epsilon_{su}$ . O comportamento do material em compressão é simulado, por simplicidade, da mesma maneira que quando tracionado. A FIGURA 4.4 serve para ilustrar este modelo.

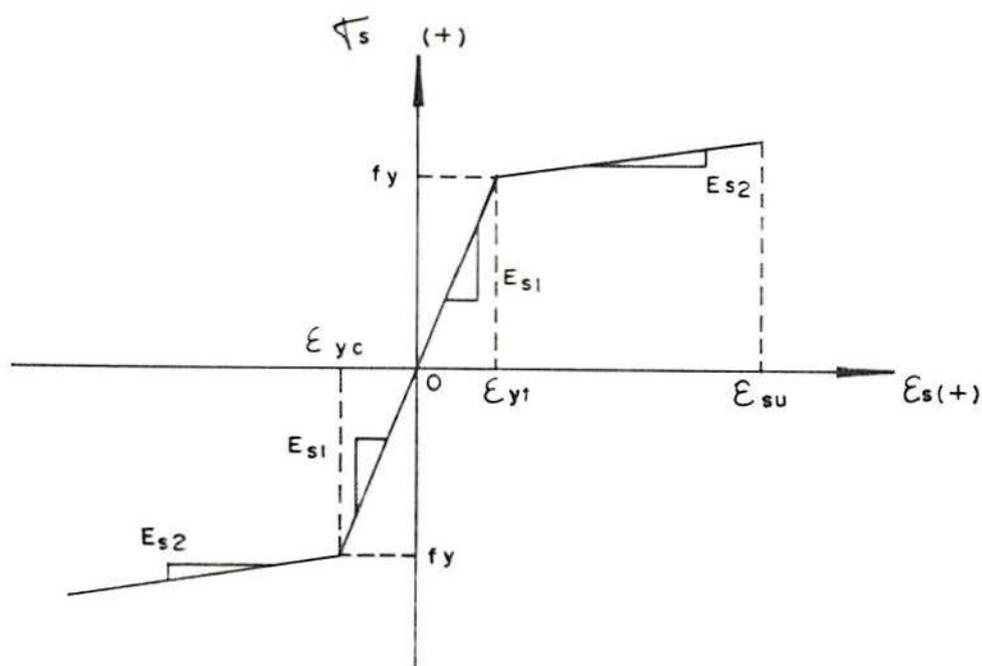


FIGURA 4.4 - Diagrama tensão-deformação para o aço.

O diagrama da FIGURA 4.4 é expresso analiticamente através das equações

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_{s2} (\epsilon_s - \epsilon_{yc}) - f_y, \text{ se } \epsilon_s < \epsilon_{yc}, \\ \sigma_s &= E_{s1} \epsilon_s, \text{ se } \epsilon_{yc} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{yt}, \\ \sigma_s &= E_{s2} (\epsilon_s - \epsilon_{yc}) + f_y, \text{ se } \epsilon_s > \epsilon_{yt}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde  $\epsilon_{yt}$  e  $\epsilon_{yc}$  são respectivamente as deformações de escoamento em tração e em compressão, dadas por

$$\epsilon_{yt} = \frac{f_y}{E_{s1}} \text{ e } \epsilon_{yc} = -\frac{f_y}{E_{s1}}. \quad (4.13)$$

#### 4.3.2 - Cálculo das resultantes de tensões na armadura.

A armadura é considerada como uma camada de aço com espessura equivalente a sua área de seção transversal por metro linear. Assume-se que existe perfeita aderência entre

esta camada de aço e as camadas de concreto que lhe são adjacentes. Fica estabelecido, por hipótese que a armadura somente resiste a tensões normais na direção do eixo das barras que a compõem. A resistência das barras da armadura ao cisalhamento não é levada em conta.

Cada armadura é caracterizada por sua espessura equivalente  $t_s$ , por sua posição em relação ao plano médio da placa  $z_s$ , e pela inclinação de suas barras em relação ao eixo de referência "x", dada pelo ângulo  $\theta_s$ .

Uma vez conhecidas as deformações generalizadas na superfície média da laje, as deformações específicas no nível  $z_s$  da armadura referidas ao sistema xoy, são calculadas através das expressões

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xs} &= \bar{\varepsilon}_x - z_s \kappa_{xx}, \\ \varepsilon_{ys} &= \bar{\varepsilon}_y - z_s \kappa_{yy},\end{aligned}\tag{4.14}$$

e

$$\gamma_{xys} = \bar{\gamma}_{xy} - z_s \kappa_{xy}.$$

A deformação específica axial  $\varepsilon_s$ , na direção de orientação das barras da armadura  $\theta_s$ , é dada por (POPOV<sup>30</sup>)

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{xs} \cos^2 \theta_s + \varepsilon_{ys} \sin^2 \theta_s + \gamma_{xys} \sin \theta_s \cos \theta_s.\tag{4.15}$$

A tensão na armadura é obtida através da relação tensão-deformação adotada para o aço, dada pela equação (4.12). A partir da tensão, são determinados o esforço normal  $N_s$  e o momento fletor  $M_s$ , que atuam na direção da armadura, sendo

$$N_s = \sigma(\varepsilon_s) t_s,\tag{4.16}$$

e

$$M_s = \sigma(\varepsilon_s) t_s z_s.$$

As resultantes de tensões no aço segundo o sistema xoy, são calculadas mediante uma rotação aplicada a  $N_s$  e  $M_s$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 N_{xs} &= N_s \cos^2 \theta_s, \\
 N_{ys} &= N_s \sin^2 \theta_s, \\
 N_{xys} &= N_s \sin \theta_s \cos \theta_s,
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

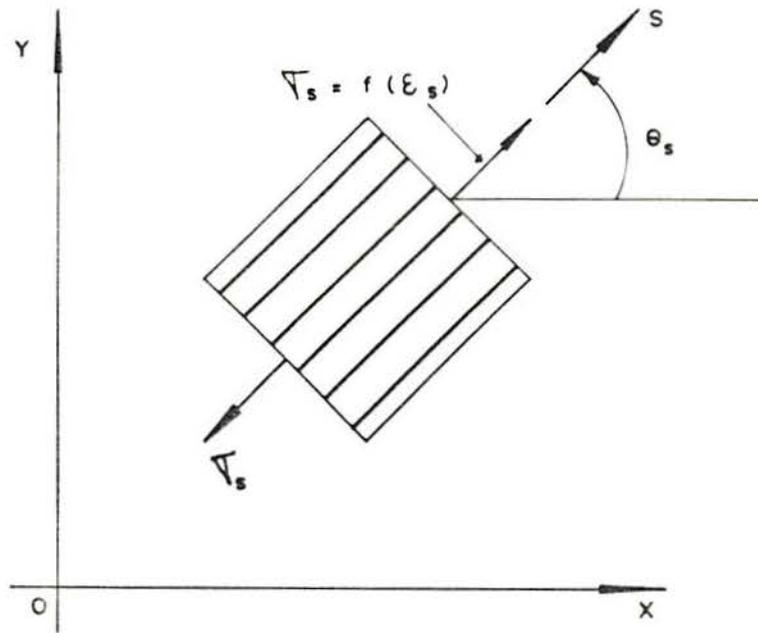
$$M_{xc} = M_s \cos^2 \theta_s,$$

$$M_{yc} = M_s \sin^2 \theta_s,$$

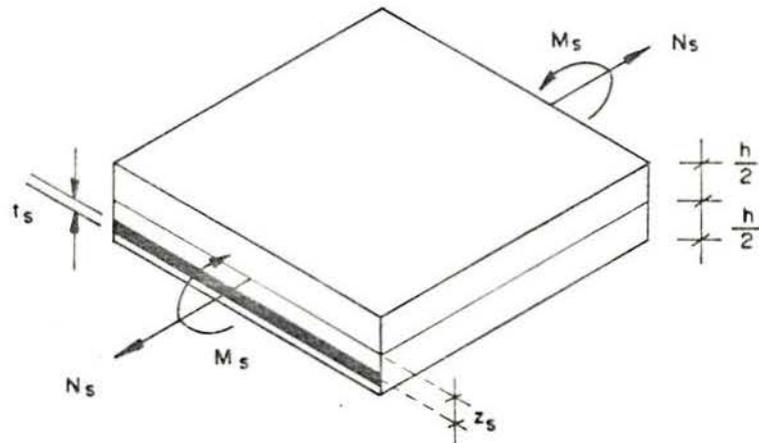
e

$$M_{xys} = M_s \sin \theta_s \cos \theta_s.$$

Estes valores são acumulados para cada diferente tipo de armadura que existir na laje. A FIGURA 4.5 serve para ilustrar o cálculo das resultantes de tensões nas armaduras.



(a) Cálculo da tensão normal na armadura.



(b) Cálculo das resultantes de tensões da armadura.

FIGURA 4.5 - Cálculo das resultantes de tensões das armaduras.

#### 4.4 - Modelo para o concreto armado.

O modelo para o material composto concreto armado é formado pela superposição dos modelos desenvolvidos para o concreto e para o aço das armaduras. Assim sendo, o vetor de tensões generalizadas para o concreto armado  $\underline{\sigma}$ , é calculado pela expressão

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_c + \underline{\sigma}_s, \quad (4.18)$$

onde  $\underline{\sigma}_c$  é o vetor de tensões generalizadas no concreto, dado por

$$\underline{\sigma}_c = \langle N_{xc}, N_{yc}, N_{xyc}, M_{xc}, M_{yc}, M_{xyc}, Q_{xc}, Q_{yc} \rangle,$$

e  $\underline{\sigma}_s$  é o vetor de tensões generalizadas no aço, composto na forma

$$\underline{\sigma}_s = \langle N_{xs}, N_{ys}, N_{xys}, M_{xs}, M_{ys}, M_{xys}, 0, 0 \rangle.$$

O vetor  $\underline{\sigma}$  é utilizado no cálculo das ações nodais não-lineares do elemento, segundo a equação (3.30); sendo de fundamental importância no estabelecimento do equilíbrio na laje.

#### 4.5 - Critério de ruptura.

Para que a laje permaneça em equilíbrio, é necessário que o material concreto armado seja capaz de desenvolver esforços internos que venham a contrabalançar o carregamento externo. Assim sendo, a ruptura da laje ocorre em um estágio de deformação tal que a capacidade do material de fornecer esforços resistentes a solicitação externa é esgotada.

Em uma estrutura de concreto armado o processo de ruptura é controlado a partir do nível de deformação que a mesma apresenta. A norma brasileira NBR-6118<sup>2</sup>, por exemplo, fixa em seu item 4.1 os critérios de ruptura de uma peça submetida a solicitações normais (esforço normal e/ou momento fletor), quando a deformação específica axial do concreto ou do aço atinge um determinado valor limite.

No caso das lajes, devido ao estado de tensões ser na realidade bidimensional e atuarem além das solicitações normais também solicitações tangenciais ( esforço cortante e momento torçor ), torna-se difícil a aplicação de um critério de ruptura explícito como o descrito acima.

Nesta formulação considera-se que tenha ocorrido a ruptura do material, quando em uma certa etapa de aplicação do carregamento, o vetor de deslocamentos nodais, e conseqüentemente o campo de deformações ao longo da laje, atinge uma configuração tal que não se torna mais possível satisfazer o sistema de equações de equilíbrio dado pela equação (3.33).

## 5 - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES.

### 5.1 - Introdução

Conforme o que foi visto nos capítulos 3 e 4, uma análise mais rigorosa de lajes de concreto armado exige a consideração do comportamento mecânico não-linear dos materiais concreto e aço, além da possibilidade de ocorrerem grandes deslocamentos para estágios mais avançados de carregamento.

Através da aplicação do P.T.V., com a inclusão dos fatores supracitados, chega-se a um sistema de equações de equilíbrio não-lineares na forma

$$\psi(\underline{U}) = \underline{P}_{\text{ext}} - \underline{A}_{\text{NL}}(\underline{U}) = \underline{0} . \quad (5.1)$$

O objetivo deste capítulo é desenvolver um algoritmo numérico para buscar a solução do sistema de equações (5.1), ou seja, encontrar o vetor de deslocamentos nodais  $\underline{U}$  para o qual o equilíbrio se verifique.

Inicialmente descreve-se o método de Newton-Raphson "standard", para solução de sistemas de equações não-lineares. Com o objetivo de se reduzir o custo computacional do processo, é introduzido o método de Newton-Raphson modificado, com matriz de rigidez na origem mantida constante durante toda a análise.

Como forma de acelerar a convergência do método de Newton-Raphson modificado, sem contudo alterar a sua essência, adota-se o método Secante-Newton desenvolvido por CRISFIELD<sup>11</sup>. Os resultados obtidos com a aplicação deste processo, em termos de economia de tempo de computação, são significativos.

## 5.2 - O método de Newton-Raphson.

O método de Newton-Raphson, em sua forma unidimensional, destina-se ao cálculo de modo iterativo da raiz aproximada de uma equação não-linear que pode ser definida genericamente por

$$f(x) = 0 \quad (5.2)$$

Expandindo-se a equação (5.2) em uma série de Taylor e considerando-se apenas os dois primeiros termos, obtém-se

$$f(x)_{r+1} = f(x)_r + f'(x)_r \Delta x_r, \quad (5.3)$$

onde  $r$  e  $r+1$ , indicam o número da iteração. O método consiste em, partindo-se de uma solução inicial  $x_0$  e sendo possível o cálculo da derivada da função neste ponto, determinar-se uma nova solução mais próxima da exata a partir do algoritmo de recorrência dado por

$$\Delta x_r = - \frac{f(x)_r}{f'(x)_r} \quad (5.4)$$

e

$$x_{r+1} = x_r + \Delta x_r.$$

A FIGURA 5.1 serve para mostrar geometricamente este processo numérico.

Este procedimento também pode ser estendido a um sistema de equações não-lineares na forma

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}, \quad (5.5)$$

em que

$$\underline{f} = \langle f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \dots, f_n(\underline{x}) \rangle^T,$$

e

$$\underline{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle^T.$$

Aplicando o desenvolvimento em série de Taylor

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}_0 + \Delta \underline{x}) = \underline{f}(\underline{x}_0) + \underline{J}_0 (\underline{x} - \underline{x}_0), \quad (5.6)$$

onde  $J_{\tilde{x}_0}$  é uma matriz dada por

$$J_{\tilde{x}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\tilde{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\tilde{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\tilde{x}_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\tilde{x}_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

A fórmula de recorrência para um sistema de "n" equações não-lineares a "n" incógnitas pode, então, ser expressa por

$$\tilde{x}_{r+1} = \tilde{x}_r - J_{\tilde{x}_r}^{-1} f(\tilde{x}_r) \quad (5.8)$$

Para evitar o cálculo e a inversão da matriz  $J$  em cada iteração se pode fazer

$$\tilde{x}_{r+1} = \tilde{x}_r - J_{\tilde{x}_0}^{-1} f(\tilde{x}_r) \quad (5.9)$$

sendo esta fórmula a base do método de Newton-Raphson modificado.

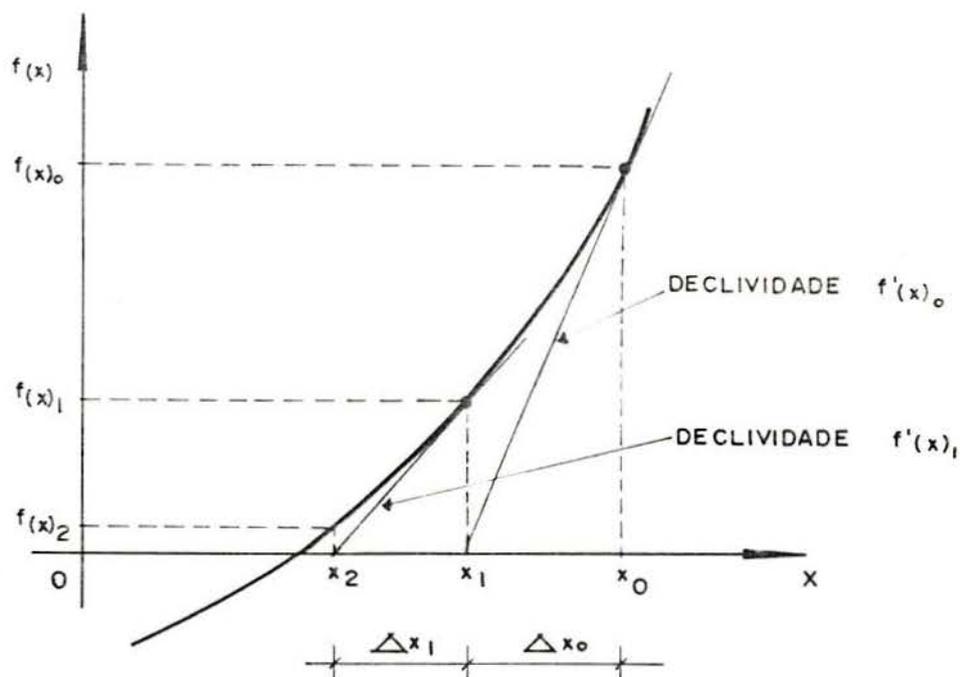


FIGURA 5.1 - O método de Newton-Raphson unidimensional.

### 5.2.1 - O método Newton-Raphson tradicional.

O método de Newton-Raphson pode ser utilizado na resolução do sistema de equações não-lineares de equilíbrio, que surge da aplicação do M.E.F. na análise de lajes de concreto armado<sup>6, 27, 32, 39</sup>.

A equação (5.1), pode ser reescrita, através de suas componentes, na seguinte forma

$$(\psi_i)_{r+1} \cong (\psi_i)_r + \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial U_j} \right]_r (\Delta U_j)_r \quad (5.10)$$

Observando-se a equação (5.1), a expressão para a derivada contida no segundo membro da equação (5.10) será

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial U_j} = - \frac{\partial (A_{NL})_i}{\partial U_j} = - K_{ij} \quad (5.11)$$

em que  $K_{ij}$  representa um termo genérico da matriz de rigidez tangente da placa  $\tilde{K}_T$ .

Agora, torna-se possível expressar matricialmente a fórmula (5.10), ou seja,

$$\tilde{\psi}_{r+1} \cong \tilde{\psi}_r - (\tilde{K}_T)_r \Delta \tilde{U}_r = 0 \quad (5.12)$$

Portanto, a equação de recorrência do método de Newton-Raphson aplicado a problemas de análise estrutural fica

$$\Delta \tilde{U}_r = (\tilde{K}_T^{-1})_r (P_{ext} - A_{NL}(\tilde{U})_r) \quad (5.13)$$

e

$$\tilde{U}_{r+1} = \tilde{U}_r + \Delta \tilde{U}_r$$

Conhecido o vetor de deslocamentos da iteração anterior  $\tilde{U}_r$ , é possível calcular o vetor de ações não-lineares  $A_{NL}(\tilde{U})_r$  e a matriz de rigidez tangente da estrutura  $\tilde{K}_T(\tilde{U})_r$ . Através das equações (5.13), determina-se a solução  $\tilde{U}_{r+1}$ , mais próxima da solução exata do sistema de equações (5.1). Proceder-se assim, iterativamente, até ser satisfeito o critério de convergência adotado. A FIGURA (5.2) ilustra este procedimento, para o caso unidimensional.

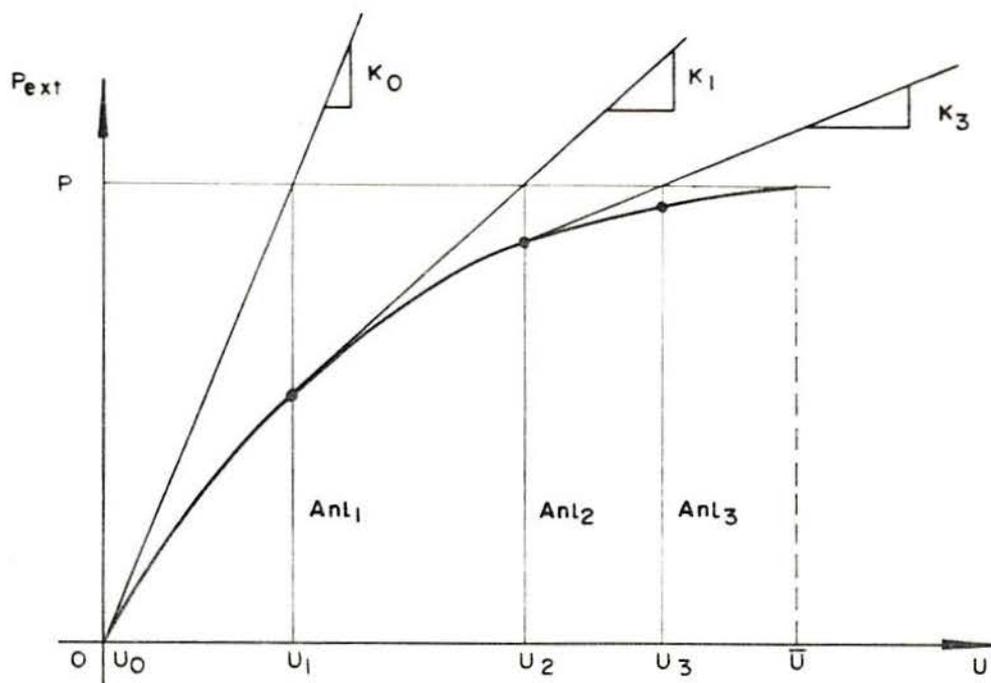


FIGURA 5.2 - O método de Newton-Raphson tradicional, aplicado à análise estrutural, no caso unidimensional.

A convergência deste método é de segunda ordem, porque envolve a função  $\psi$ , e sua derivada primeira  $K_T$ . O cálculo e a inversão da matriz de rigidez tangente em cada iteração tornam este processo computacionalmente oneroso, e em problemas com muitos graus de liberdade, podem inviabilizar a sua utilização.

Esta dificuldade pode ser superada com o emprego do método de Newton-Raphson modificado, embora com a sua adoção, se perca a propriedade da convergência quadrática.

### 5.2.2 - O método de Newton-Raphson modificado.

O método de Newton-Raphson modificado, daqui em diante N-R m., consiste em se realizar o cálculo e a inversão da matriz de rigidez apenas uma vez no início do processo, trabalhando-se com a matriz de rigidez inicial  $K_0$  em todas as iterações. O algoritmo de recorrência fica sendo, então,

$$\Delta \tilde{U}_r = (\tilde{K}_o^{-1})_r (P_{\text{ext}} - A_{\text{NL}}(\tilde{U}_r)) , \quad (5.14)$$

e

$$\tilde{U}_{r+1} = \tilde{U}_r + \Delta \tilde{U}_r .$$

A utilização de uma matriz de rigidez inicial constante  $\tilde{K}_o$  traz uma grande economia computacional em relação a solução do sistema em (5.13), pois apenas torna-se necessário realizar retrosubstituições sobre o vetor de forças desequilibradas  $\psi$ . Todavia, deve-se considerar o fato de que devido a matriz de rigidez não ser atualizada o número de iterações deverá ser maior. A FIGURA 5.3 mostra o desenvolvimento deste processo para o caso unidimensional.

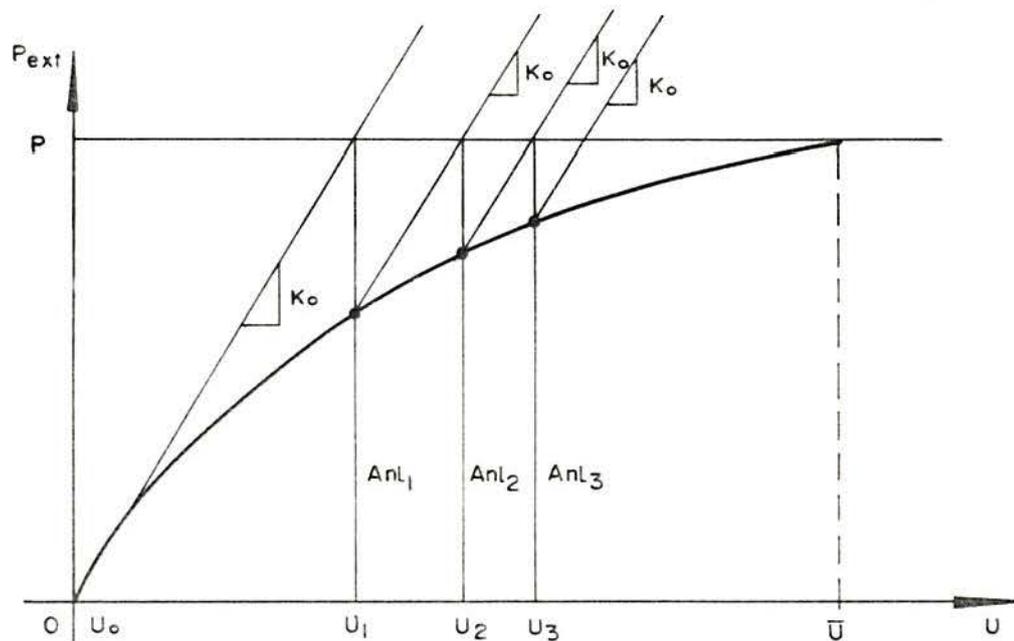


FIGURA 5.3 - O método de Newton-Raphson modificado aplicado à análise estrutural, em sua forma unidimensional.

A convergência do método é de primeira ordem, porque apenas se redefine o vetor de forças desequilibradas  $\psi$ . A presença de patamares pronunciados dentro da resposta estática da laje pode gerar uma convergência muito lenta com um número indefinido de iterações.

Atualmente encontram-se à disposição vários algoritmos, que visam a acelerar a convergência do método de N-R m., sem contudo alterar sua estrutura fundamental. Dentre estes se destaca o método Secante-Newton, desenvolvido por CRISFIELD<sup>11</sup>, que será abordado mais adiante.

### 5.2.3 - Critério de convergência.

Em uma dada etapa de carregamento da laje, considera-se que o método de N-R m. tenha atingido a convergência, quando forem satisfeitas simultaneamente as duas condições abaixo em uma dada iteração "r"

$$\frac{\|\psi_r\|}{\|\Delta P_r\|} \leq 0,01, \quad (5.15)$$

e

$$\frac{\|\Delta U_r\|}{\|U_r\|} \leq 0,01.$$

onde:

$\|\psi_r\|$  é a norma euclidiana do vetor de desequilíbrio;

$\|\Delta P_r\|$  é a norma euclidiana do vetor de incremento de cargas;

$\|\Delta U_r\|$  é a norma euclidiana do vetor de incremento de deslocamentos;

e  $\|U_r\|$  é a norma euclidiana do vetor de deslocamentos.

Quando o material chega ao esgotamento de sua capacidade de oferecer esforços resistentes que equilibrem o carregamento externo, é sinal de que a laje atingiu a ruptura.

Este fato é detectado pelo algoritmo, quando não é mais possível satisfazer o primeiro critério de convergência de (5.15), pois o vetor de desequilíbrio  $\psi$  não pode ser reduzido a valores próximos de zero, por maior que seja o número de iterações.

Estudos numéricos realizados com o modelo aqui desenvolvido indicam que, quando o número de iterações alcança um valor maior ou igual a 300, sem convergir, significa que a capacidade de resistência do material foi esgotada.

### 5.3 - Aceleração da convergência. O método Secante-Newton.

#### 5.3.1 - O incremento da Energia Potencial Total.

Antes de abordar o método de Secante-Newton propriamente dito, é necessário tecer algumas considerações a respeito da variação da Energia Potencial Total de um sistema estrutural elástico não-linear<sup>95</sup>.

Seja  $\Pi$  a Energia Potencial Total de um sistema estrutural elástico não-linear, discretizado em uma série de elementos finitos, conectados entre si através de seus pontos nodais. Considere-se que todas as cargas externas estejam incluídas sob a forma de ações nodais equivalentes no vetor de cargas externas da estrutura  $\tilde{P}_{ext}$ . A Energia Potencial Total do sistema pode, então, ser calculada pela expressão

$$\Pi = E + G, \quad (5.16)$$

onde  $E$  é a energia de deformação do sistema dada por

$$E = \iiint_V \tilde{e}^T \tilde{\sigma} dV, \quad (5.17)$$

e  $G$  é o potencial das cargas externas dado por

$$G = - \tilde{U}^T \tilde{P}_{ext}. \quad (5.18)$$

Seguindo-se a formulação do M.E.F., as grandezas escalares  $\Pi$  e  $E$  são funções do vetor de deslocamentos nodais  $\tilde{U}$ , logo

$$\Pi(\tilde{U}) = E(\tilde{U}) - \tilde{U}^T \tilde{P}_{ext}. \quad (5.19)$$

É possível, agora, analisar-se o incremento de  $\Pi$ , quando o vetor de deslocamentos  $\tilde{U}$  passa da configuração  $\tilde{U}_r$  para a configuração  $\tilde{U}_{r+1}$  através da expressão

$$\underline{U}_{r+1} = \underline{U}_r + A_r \underline{\delta}_r, \quad (5.20)$$

onde  $\underline{\delta}_r$  é o vetor que define a direção de incremento dos deslocamentos, e  $A_r$  é um escalar que controla a magnitude do passo dado na direção  $\underline{\delta}_r$ .

Expandindo  $\Pi(\underline{U}_r + A_r \underline{\delta}_r)$  na forma de uma série de Taylor, chega-se a

$$\Pi(\underline{U}_r + A_r \underline{\delta}_r) = \Pi(\underline{U}_r) + A_r \underline{g}_r^T \underline{\delta}_r + \frac{1}{2} A_r^2 \underline{\delta}_r^T \underline{H}_r \underline{\delta}_r + \dots \quad (5.21)$$

sendo  $\underline{g}_r$  o vetor gradiente, cujo elemento genérico é

$$(g_i)_r = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial U_i} \right]_r, \quad (5.22)$$

e  $\underline{H}_r$  é a chamada matriz Hessiana, cujo elemento genérico é

$$(H_{ij})_r = \left[ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_i \partial U_j} \right]_r. \quad (5.23)$$

Porém, recordando a equação (5.19), tem-se que

$$(g_i)_r = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial U_i} \right]_r = \frac{\partial E}{\partial U_i} - (P_{\text{ext}})_i. \quad (5.24)$$

O primeiro teorema de Castigliano afirma que a derivada da energia de deformação  $E$  em relação a componente de deslocamento  $U_i$  fornece a força interna resistente associada a direção "i", ou seja,

$$(A_{NLi})_r = \left[ \frac{\partial E}{\partial U_i} \right]_r. \quad (5.25)$$

Assim, resulta que

$$\underline{g}_r = (A_{NL})_r - \underline{P}_{ext} = - \underline{\psi}_r, \quad (5.26)$$

o que significa que o vetor gradiente de  $\Pi$  é igual ao vetor de forças desequilibradas  $\underline{\psi}_r$ , na posição "r", porém com o sinal trocado.

A matriz Hessiana é dada por

$$(H_{ij})_r = \left[ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_i \partial U_j} \right]_r = \left[ \frac{\partial^2 E}{\partial U_i \partial U_j} \right]_r. \quad (5.27)$$

Contudo, substituindo-se a equação (5.25) em (5.27), tem-se que

$$(H_{ij})_r = \left[ \frac{\partial (A_{NL})_i}{\partial U_j} \right]_r. \quad (5.28)$$

Escrevendo o incremento da força resistente na direção "j",  $d(A_{NL})_j$  para um incremento no vetor  $\underline{U}$ ,  $d\underline{U}$ , resulta que

$$d(A_{NL})_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial (A_{NL})_j}{\partial U_i} dU_i. \quad (5.29)$$

Para um vetor  $d\underline{U}$  onde todos os incrementos são nulos, exceto para  $dU_i$ , tem-se

$$d(A_{NL})_j = \frac{\partial (A_{NL})_j}{\partial U_i} dU_i. \quad (5.30)$$

Observando-se a equação (5.30) e considerando o teorema da Reciprocidade de Maxwell, chega-se a

$$(K_T)_{ij} = \frac{\partial (A_{NL})_i}{\partial U_j}, \quad (5.31)$$

onde  $(K_T)_{ij}$  é o elemento "ij" da matriz de rigidez tangente da estrutura.

Assim, conclui-se que a matriz Hessiana é igual a matriz tangente da estrutura analisada, ou seja, simbolicamente tem-se que

$$H_{\tilde{r}} = (K_{\tilde{T}})_{\tilde{r}} = \left[ \frac{\partial^2 E}{\partial \tilde{U} \partial \tilde{U}} \right]_{\tilde{r}} \quad (5.32)$$

### 5.3.2 - Determinação dos aceleradores de convergência.

O método Secante-Newton permite acelerar a convergência do método de N-R m., podendo ser derivado de forma simples através do conceito de Energia Potencial Total e do estabelecimento de uma relação geométrica secante de uma forma generalizada.

Considere-se inicialmente o método de N-R m. expresso na forma

$$\Delta U_{\tilde{r}} = A_r \delta_{\tilde{r}}^* = -A_r K_{\tilde{o}}^{-1} g_r, \quad (5.33)$$

e

$$U_{\tilde{r+1}} = U_{\tilde{r}} + \Delta U_{\tilde{r}}.$$

O escalar  $A_r$  é normalmente tomado como igual a unidade em todas as iterações. Contudo, em alguns problemas que envolvem a fissuração do concreto pode ser vantajoso realizar-se um processo de procura de um valor ótimo para o escalar  $A_r$ .

O Princípio da Mínima Energia Potencial Total estabelece que em um sistema estrutural elástico não-linear, sob a ação de um carregamento externo conservativo, a configuração de deslocamentos correspondente ao equilíbrio deve ser tal que minimize a Energia Potencial Total.

Assim sendo, na iteração  $(r-1)$  o valor ótimo para o escalar  $A_{r-1}$  pode ser encontrado a partir da aplicação do Princípio da Mínima Energia Potencial Total na busca do vetor de deslocamentos nodais  $U_{\tilde{r}}$ , que forneça a configuração de equilíbrio para o sistema.

Seguindo-se a forma da equação (5.33), o vetor  $U_{\tilde{r}}$  é dado por

$$U_{\tilde{r}} = U_{\tilde{r-1}} + A_{\tilde{r-1}} \delta_{\tilde{r-1}}, \quad (5.34)$$

e a Energia Potencial Total na posição "r" pode ser obita através da seguinte expansão em série de Taylor

$$\Pi(U_{\tilde{r}}) = \Pi(U_{\tilde{r-1}}) + A_{\tilde{r-1}} g_{\tilde{r-1}}^T \delta_{\tilde{r-1}} + \frac{1}{2} A_{\tilde{r-1}}^2 \delta_{\tilde{r-1}}^T (K_{\tilde{T} \tilde{r-1}}) \delta_{\tilde{r-1}}. \quad (5.35)$$

O valor de  $A_{\tilde{r-1}}$  que torna  $\Pi(U_{\tilde{r}})$  um mínimo é calculado através da expressão

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{\tilde{r-1}}} = g_{\tilde{r-1}}^T \delta_{\tilde{r-1}} + A_{\tilde{r-1}} \delta_{\tilde{r-1}}^T (K_{\tilde{T} \tilde{r-1}}) \delta_{\tilde{r-1}} = 0, \quad (5.36)$$

donde provém

$$A_{\tilde{r-1}} = - \frac{g_{\tilde{r-1}}^T \delta_{\tilde{r-1}}}{\delta_{\tilde{r-1}}^T (K_{\tilde{T} \tilde{r-1}}) \delta_{\tilde{r-1}}}. \quad (5.37)$$

Para se evitar o cálculo e a montagem da matriz de rigidez tangente  $K_{\tilde{T}}$  nesta iteração, é possível fazer a seguinte aproximação

$$(K_{\tilde{T} \tilde{r-1}}) \delta_{\tilde{r-1}} \cong g_{\tilde{r}} - g_{\tilde{r-1}} = \zeta_{\tilde{r}}, \quad (5.38)$$

conforme está ilustrado na FIGURA (5.4), para o caso unidimensional.

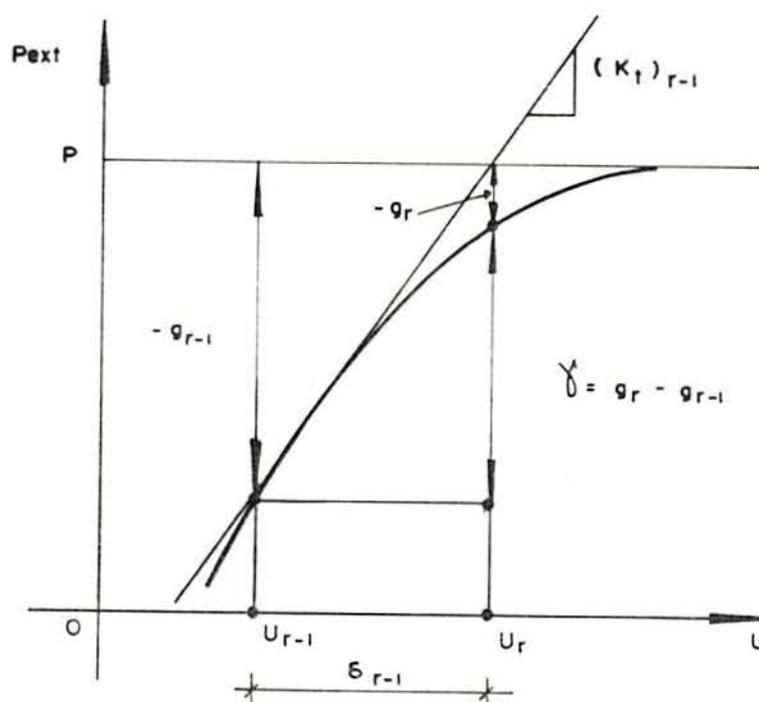


FIGURA 5.4 - Método Secante-Newton: aproximação da matriz  $K_T$ .

Substituindo-se a aproximação da equação (5.38) na equação (5.37), chega-se a

$$A_{r-1} = - \frac{\tilde{g}_{r-1}^T \tilde{\delta}_{r-1}}{\tilde{\delta}_{r-1}^T \tilde{\gamma}_r} \quad (5.39)$$

Existe uma certa continuidade no escalar  $A_r$ , que controla o tamanho do passo na direção  $\tilde{\delta}_r$ , tendo-se  $A_r < 1,0$  para uma resposta estática com rigidez crescente e  $A_r > 1,0$  quando a rigidez vai diminuindo.

Conseqüentemente, ao invés de calcular um novo escalar  $A_r$  para a iteração "r", que exigiria o cálculo de um novo vetor de forças desequilibradas  $\tilde{g}_{r+1}$ , o escalar  $A_{r-1}$  pode ser utilizado para acelerar a próxima iteração, fazendo-se

$$A_r \cong - \frac{\tilde{g}_{r-1}^T \tilde{\delta}_{r-1}}{\tilde{\delta}_{r-1}^T \tilde{\gamma}_r} \quad (5.40)$$

Segundo CRISFIELD<sup>11</sup>, esta aceleração de primeira ordem não é muito estável. Um esquema de segunda ordem envolveria

$$\delta_{\sim r} = A_r \delta_{\sim r}^* + B_r \delta_{\sim r-1}, \quad (5.41)$$

onde  $A_r$  é calculado segundo (5.40),  $\delta_{\sim r}^*$  é o vetor de incremento de deslocamentos resultante de uma iteração do método de N-R m. em sua forma usual.

O escalar  $B_r$  é determinado considerando-se a generalização da relação secante mostrada na FIGURA (5.5).

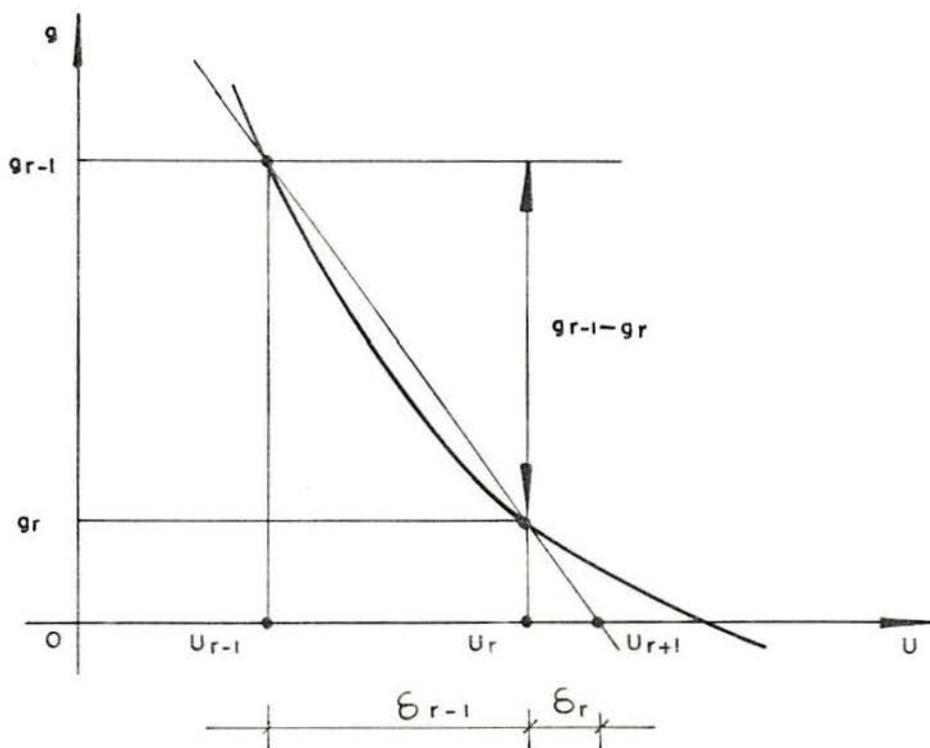


FIGURA 5.5 - Método Secante-Newton: relação secante.

Por semelhança de triângulos, segundo a FIGURA (5.5), tem-se que

$$\frac{\delta_r}{\delta_{r-1}} = - \frac{g_r}{g_r - g_{r-1}}. \quad (5.42)$$

Uma relação vetorial generalizada seria dada por

$$\delta_{\sim r}^T (g_{\sim r} - g_{\sim r-1}) = \delta_{\sim r}^T \chi_r = - \delta_{\sim r-1}^T g_{\sim r} \quad (5.43)$$

Substituindo a equação (5.41) em (5.43), tem-se que

$$(A_r \delta_{\sim r}^* + B_r \delta_{\sim r-1})^T \chi_r = - \delta_{\sim r-1}^T g_{\sim r} \quad (5.44)$$

logo

$$B_r = - \frac{\delta_{\sim r-1}^T g_{\sim r}}{\delta_{\sim r-1}^T \chi_r} - A_r \frac{\delta_{\sim r}^{*,T} \chi_r}{\delta_{\sim r-1}^T \chi_r} \quad (5.45)$$

Considerando que

$$g_{\sim r} = g_{\sim r-1} + \chi_r \quad (5.46)$$

e lembrando a definição de  $A_r$  em (5.40), chega-se a

$$B_r = A_r \left[ 1 - \frac{\delta_{\sim r}^{*,T} \chi_r}{\delta_{\sim r-1}^T \chi_r} \right] - 1 \quad (5.47)$$

### 5.3.3 - O método Secante-Newton

O método Secante-Newton consiste, então, na aplicação em cada iteração do seguinte conjunto de fórmulas

$$\delta_{\sim r} = A_r \delta_{\sim r}^* + B_r \delta_{\sim r-1} \quad (5.48)$$

$$e \quad U_{\sim r} = U_{\sim r+1} + \delta_{\sim r} ,$$

onde  $A_r$  e  $B_r$  são fatores de aceleração da convergência calculados por (5.45) e (5.47), respectivamente, e

$$\delta_{\sim r}^* = - K_{\sim o}^{-1} g_{\sim r} \quad (5.49)$$

sendo  $g_{\sim r} = (A_{\sim NL})_r - P_{\sim ext}$ .

Este método possui as seguintes propriedades:

(1) - Sem empregar diretamente um processo de extremização de  $\Pi_r$  na iteração "r", é introduzida uma amplificação do passo na direção  $\hat{\delta}_r^*$  com base na minimização de  $\Pi_{r-1}$ , economizando-se assim o cálculo do vetor de desequilíbrio  $g_{r+1}$ ;

(2) - O método satisfaz a relação secante generalizada (5.43), sendo que para problemas unidimensionais coincide com o método da secante em sua forma usual.

Comparando-se com o método de N-R m. surge a necessidade de se armazenar dois vetores extras, quais sejam  $g_{r-1}$  e  $\hat{\delta}_{r-1}$ . Os cálculos adicionais envolvem apenas uns poucos produtos internos de vetores para a determinação de  $A_r$  e  $B_r$ , cujo custo computacional é desprezível.

Devido a estas características o método revela-se significativamente mais rápido que o método N-R m.. Contudo, a experiência numérica tem mostrado que, em algumas circunstâncias extremas, a iteração acelerada de (5.48) torna-se menos eficiente que o método N-R m. comum ( com  $A_r = 1,0$  e  $B_r = 0,0$  ).

Estas circunstâncias ocorrem quando o escalar  $B_r$  torna-se grande se comparado com  $A_r$ . Neste caso, é necessário interromper o processo de aceleração, adotando-se a iteração N-R m. usual, sempre que

$$\frac{B_r}{A_r} > R \quad \text{ou} \quad \frac{B_r}{A_r} < -\frac{1}{2} R, \quad (5.50)$$

onde o limite R é estabelecido como igual a 0,40.

No capítulo seguinte é feito um estudo comparativo entre os resultados obtidos pelo método N-R m. e pelo método Secante-Newton.

#### 5.4 - Descrição do algoritmo implementado.

O algoritmo utilizado neste trabalho consiste na combinação de um processo incremental com um método iterativo

de ajuste de equilíbrio em cada etapa de carga.

A carga total a ser aplicada sobre a estrutura é dividida em um certo número de partes iguais, obtendo-se assim o vetor de incremento de carga  $\Delta \tilde{P}$ , ou seja,

$$\Delta \tilde{P} = \frac{\tilde{P}_{\text{ext}}}{N_{\text{etap}}}, \quad (5.51)$$

onde  $\tilde{P}_{\text{ext}}$  é o vetor de cargas externas total e  $N_{\text{etap}}$  é o número de etapas de carga que serão aplicadas à estrutura.

O vetor de cargas no final de cada etapa  $\tilde{P}_i$ , é obtido adicionando-se o vetor de incremento de carga  $\Delta \tilde{P}$  ao vetor de cargas da etapa anterior  $\tilde{P}_{i-1}$ , isto é,

$$\tilde{P}_i = \tilde{P}_{i-1} + \Delta \tilde{P}. \quad (5.52)$$

Cada etapa do processo de carregamento inicia com um desequilíbrio  $\Delta \tilde{P}$  entre o vetor  $\tilde{P}_i$  e o vetor de ações nodais não-lineares  $(A_{NL})_i$ . Portanto, deve ser empregado um processo iterativo que permita determinar o vetor de deslocamentos nodais  $\tilde{U}$ , para o qual seja estabelecido o equilíbrio entre cargas externas e esforços internos. No algoritmo implementado, pode-se escolher entre o método de Newton-Raphson modificado e o método Secante-Newton, para se chegar a configuração de equilíbrio dentro de uma precisão pré-fixada.

Assim, torna-se possível obter diversos pontos pertencentes à história de carga da estrutura, e com eles traçar uma curva carga-deslocamento, que se aproxima da resposta estática real da laje.

Incrementando-se o vetor de cargas sucessivamente, atinge-se uma etapa na qual se esgotará a capacidade do material de equilibrar com as ações internas o carregamento aplicado, ocorrendo, então, a ruptura. Desta forma, pode-se estabelecer uma estimativa para a carga limite da laje, que deve situar-se entre o último valor para o qual houve convergência e aquele no qual não foi mais possível

alcançar-se uma configuração de equilíbrio. Quanto menor for o incremento de carga  $\Delta P$ , melhor será a estimativa da carga de ruptura.

A FIGURA 5.6 ilustra, para o caso unidimensional, o procedimento acima descrito.

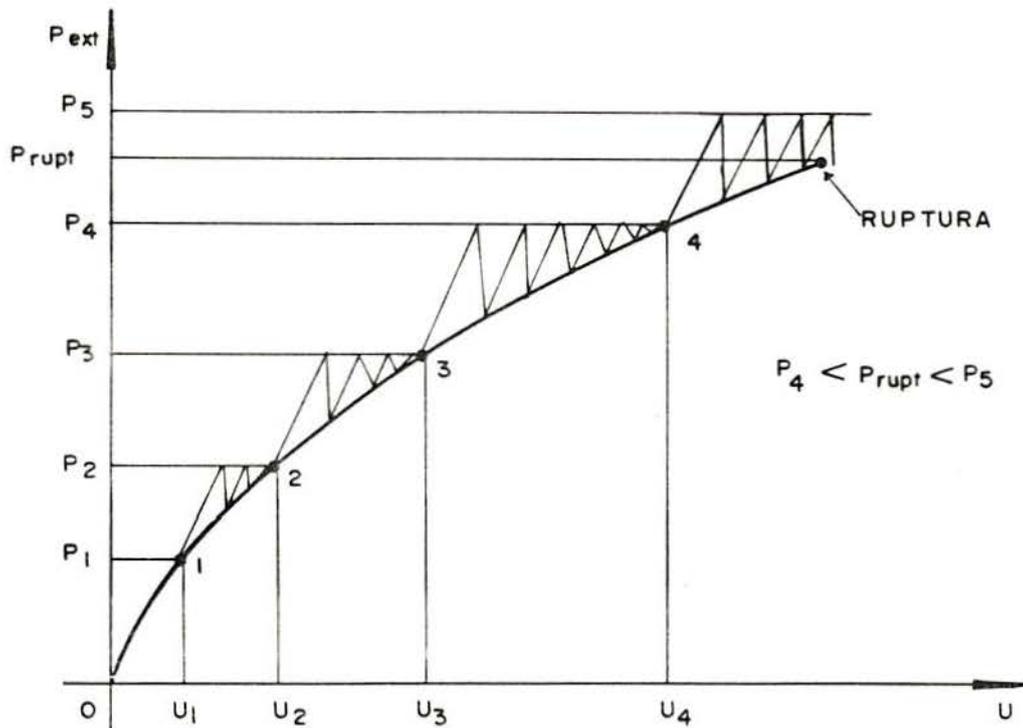
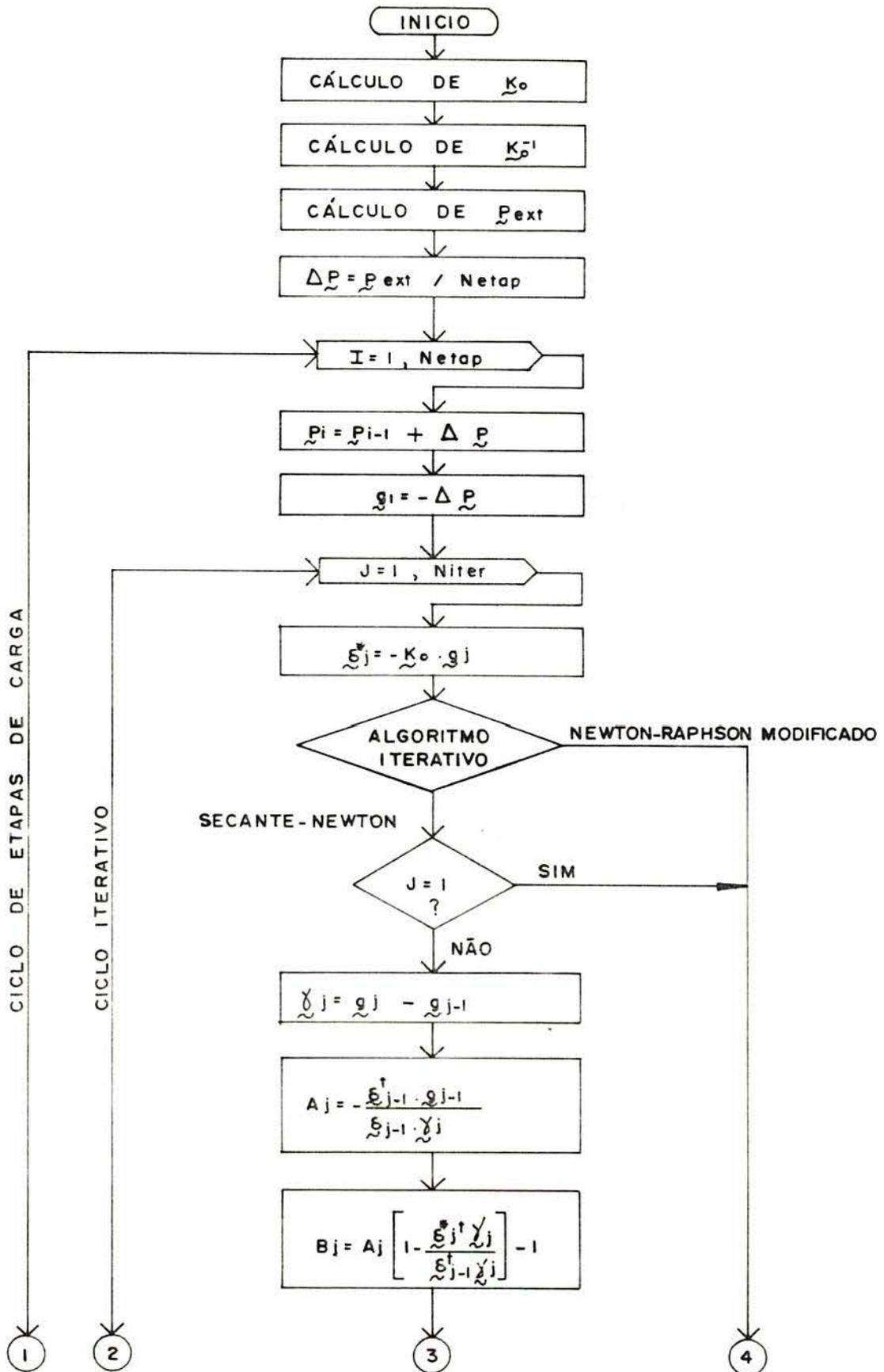


FIGURA 5.6 - O algoritmo incremental-iterativo.

A seguir, na FIGURA (5.7), é mostrado o fluxograma do algoritmo incremental iterativo, que é empregado para a análise não-linear estática de lajes de concreto armado.



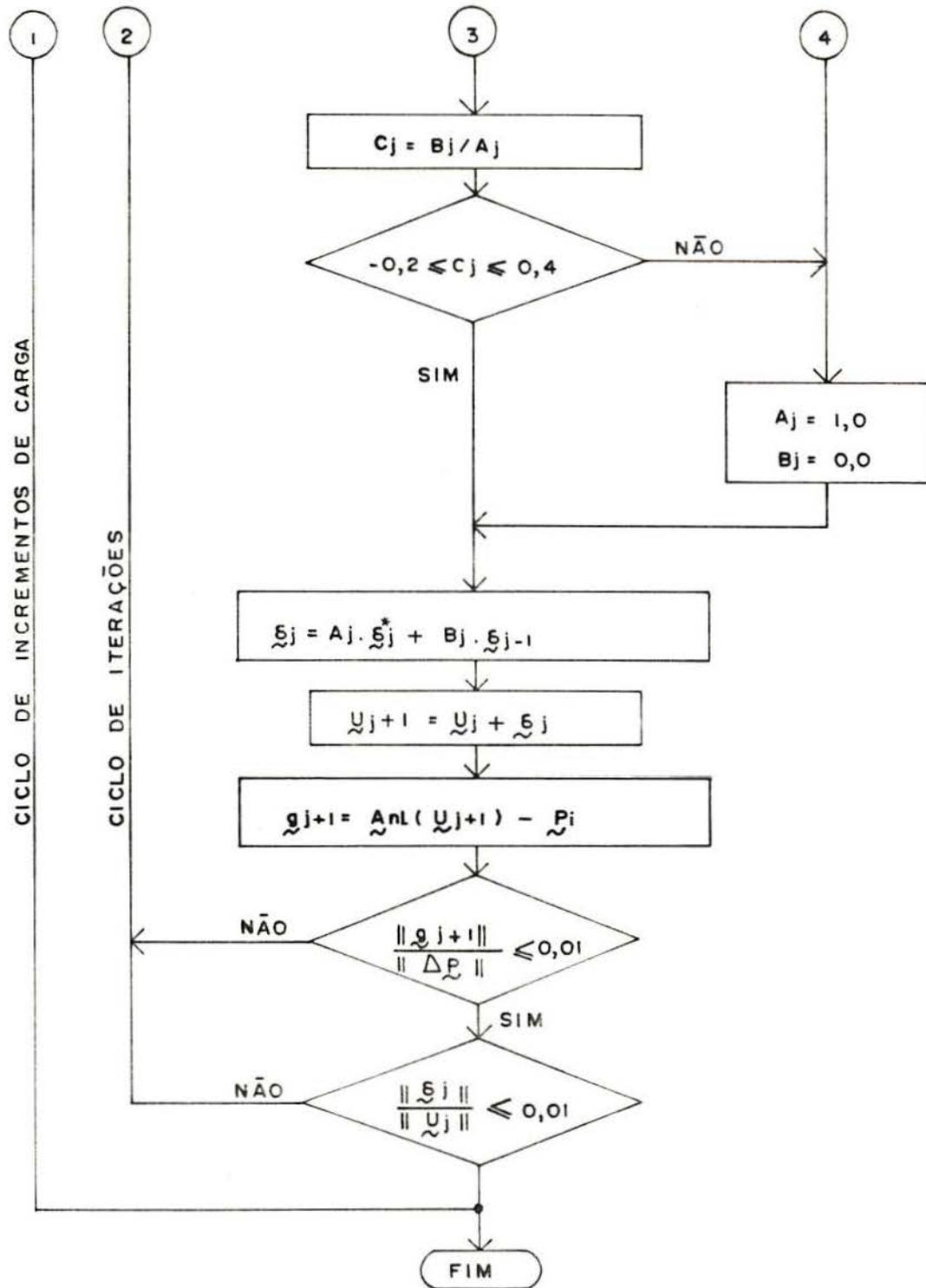


FIGURA 5.7 - Fluxograma do algoritmo incremental-iterativo.

## 6 - APLICAÇÃO DO MODELO

### 6.1 - Introdução

Os exemplos apresentados neste capítulo servem para comprovar experimentalmente a validade do modelo teórico desenvolvido até aqui, bem como para ilustrar as diversas possibilidades de sua aplicação.

Inicialmente são realizados estudos comparativos entre os resultados numéricos gerados pelo programa e o comportamento experimental de três lajes ensaiadas por outros autores.

A seguir é feita uma análise sobre os efeitos produzidos por diversos parâmetros de entrada do programa nas respostas fornecidas pelo modelo.

Finalmente procede-se a uma avaliação das relações carga-deslocamento obtidas para quatro lajes projetadas segundo os critérios da NBR-6118<sup>2</sup>, estudando-se a influência da esbeltez e das condições de contorno.

### 6.2 - Comprovação experimental

#### 6.2.1 - Laje de McNEICE

Uma laje quadrada, apoiada apenas em seus quatro cantos e submetida a uma carga concentrada no centro foi ensaiada por JOFRIET e McNEICE<sup>22</sup>. Este experimento tem sido utilizado por diversos pesquisadores, para testar modelos numéricos para o comportamento de lajes de concreto armado.

A geometria da laje, a disposição das armaduras e a malha de elementos finitos empregada na análise são mostradas na FIGURA 6.1. As propriedades mecânicas dos materiais que foram adotadas se encontram na TABELA 6.1.

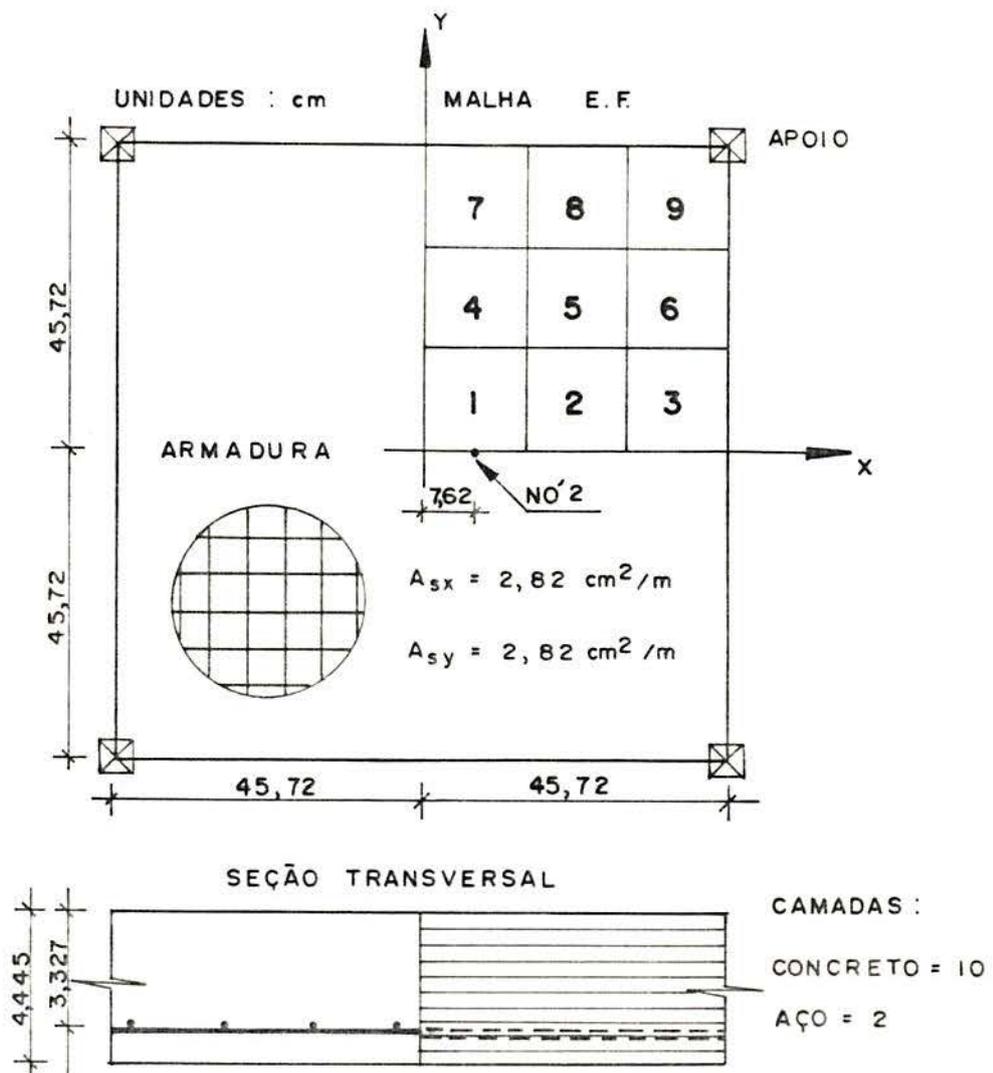


FIGURA 6.1 - Laje de McNEICE

Propriedades dos Materiais	
Concreto	Aço
$E_{co} = 2.860,00 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 20.000,00 \text{ kN/cm}^2$
$\nu = 0,15$	$E_{s2} = 0,00$
$f_c = 3,80 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 41,34 \text{ kN/cm}^2$
$f_t = 0,38 \text{ kN/cm}^2$	

TABELA 6.1 - Propriedades dos materiais: laje de McNEICE

A FIGURA 6.2 permite comparar a curva experimental carga-deslocamento para o ponto  $x = 7,62$  cm e  $y = 0,00$  (nó 2), com os resultados obtidos para os diversos tipos de abordagem do problema.

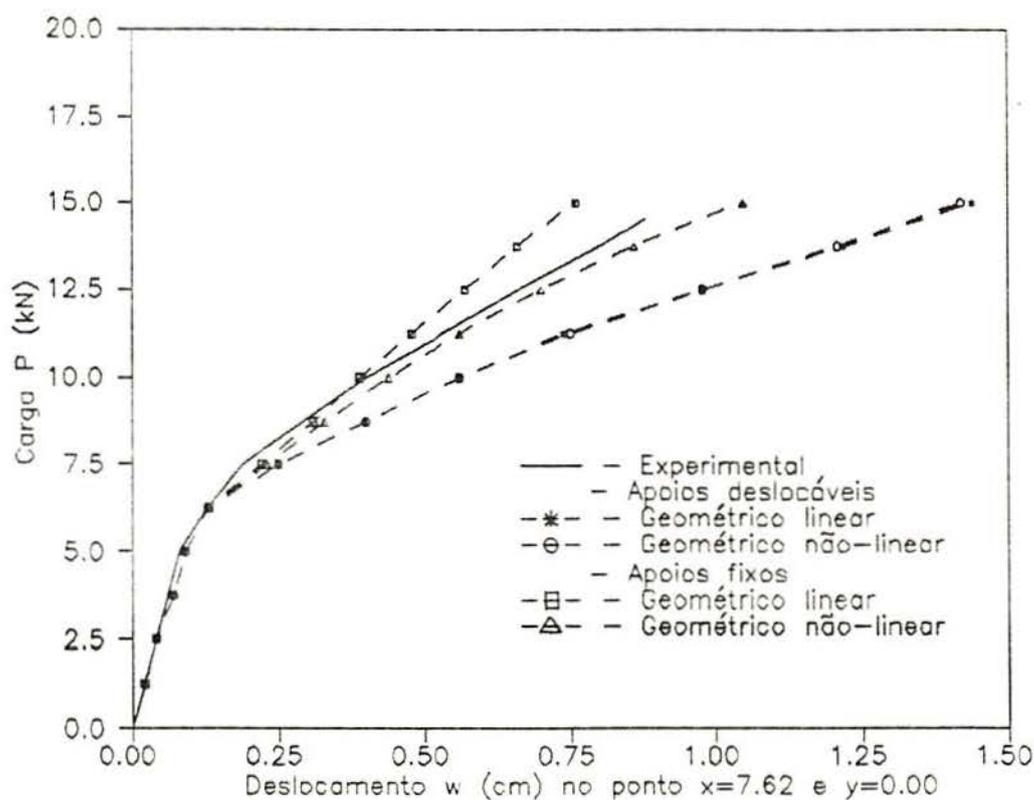


FIGURA 6.2 - Curvas carga-deslocamento: laje de MCNEICE

Após a fissuração a superfície neutra da laje desloca-se para cima, então o plano médio passa a ser tracionado, sofrendo uma expansão e empurrando os apoios nos cantos para fora.

Se os apoios forem fixos, impedindo a laje de dilatar-se, surgem esforços normais de compressão que restringem a fissuração da laje e acabam por tornar a sua resposta estática mais rígida. Quando a não-linearidade geométrica não é considerada, este efeito enrijecedor fica superestimado.

Estes resultados estão de acordo com aqueles obtidos por OWEN<sup>28</sup> e também por MEHLHORN<sup>24</sup>.

### 6.2.2 - Laje S1 de TAYLOR

Com o objetivo de estudar a influência da orientação das armaduras no comportamento de lajes de concreto armado, TAYLOR *et alii*<sup>33</sup> ensaiaram duas lajes quadradas, simplesmente apoiadas em todo o contorno e sob carga uniforme. A laje designada por S1 possuía armadura nas direções paralelas aos lados e na laje S6 a ferragem formava um ângulo de 45° com as laterais.

A geometria da laje S1, a disposição das armaduras e a malha de elementos finitos utilizada na análise são indicadas na FIGURA 6.3. As propriedades mecânicas dos materiais que foram utilizadas aparecem na TABELA 6.2.

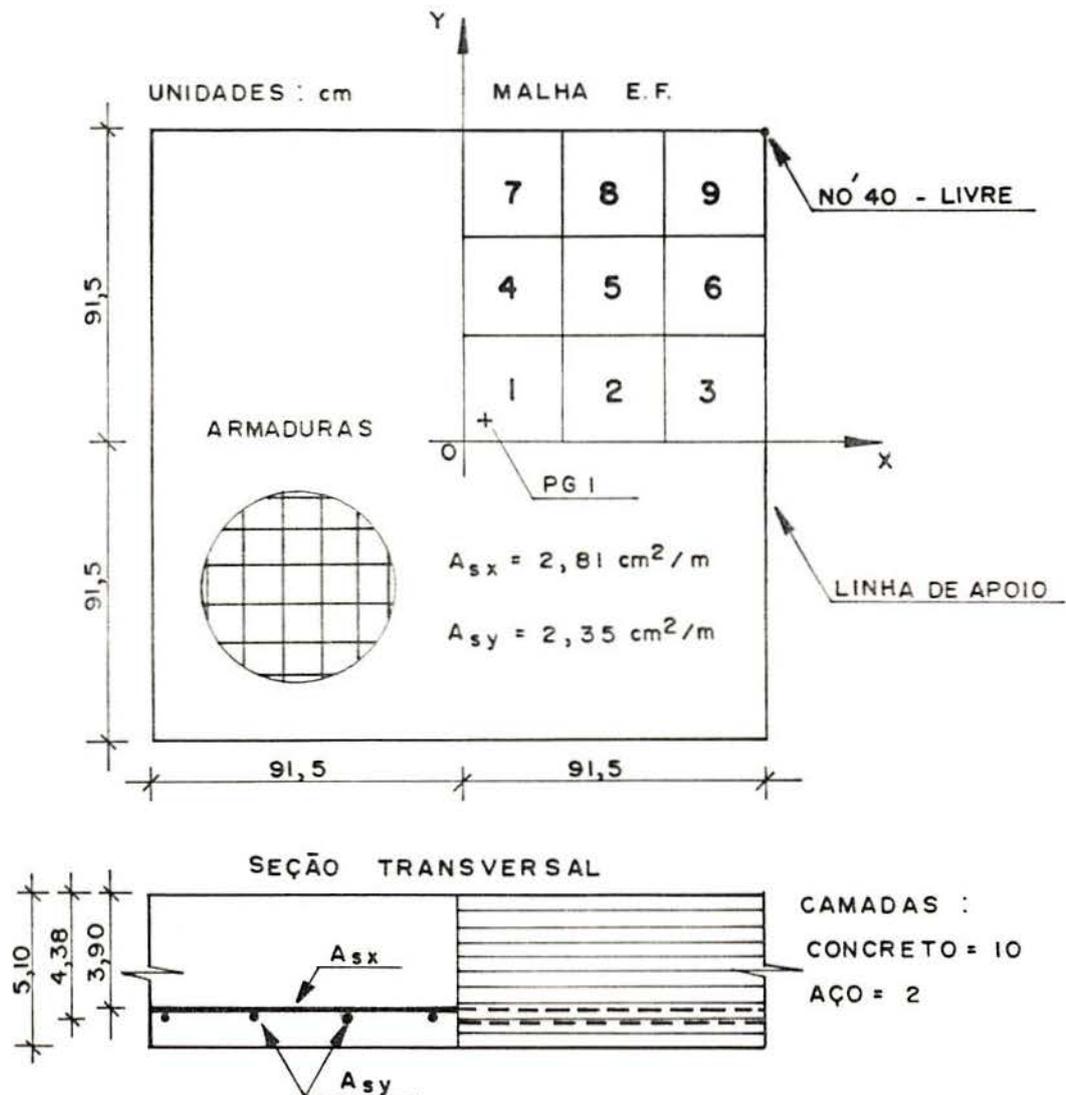


FIGURA 6.3 - Laje S1 de TAYLOR

Propriedades dos Materiais	
Concreto	Aço
$E_{co} = 3.242,00 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 20.691,00 \text{ kN/cm}^2$
$\nu = 0,18$	$E_{s2} = 3.000,00 \text{ kN/cm}^2$
$f_c = 3,50 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 37,59 \text{ kN/cm}^2$
$f_t = 0,38 \text{ kN/cm}^2$	

TABELA 6.2 - Propriedades da laje S1 de TAYLOR

Estes experimentos foram conduzidos com a possibilidade dos cantos da laje se levantarem. A laje foi apoiada sobre roletes com movimento livre no plano xy.

O gráfico da FIGURA 6.4 mostra a relação entre a carga total aplicada sobre a laje em kN e o deslocamento vertical  $w$  no ponto central em cm. A comparação das curvas obtidas pelo modelo permite avaliar a importância do comportamento não-linear geométrico mesmo quando a laje não está horizontalmente restringida.

O efeito da não-linearidade geométrica pode ser observado claramente na FIGURA 6.5, onde se encontra a evolução do deslocamento na direção x, de um ponto situado no meio do bordo lateral da laje a medida em que a carga vertical sobre a laje aumenta.

Devido a propagação das fissuras o deslocamento  $u$  inicialmente cresce para fora da laje, porém o efeito não-linear geométrico faz com que este ponto seja "puxado" novamente para dentro. Este fato já foi observado por ARNESEN *et alli*<sup>1</sup>.

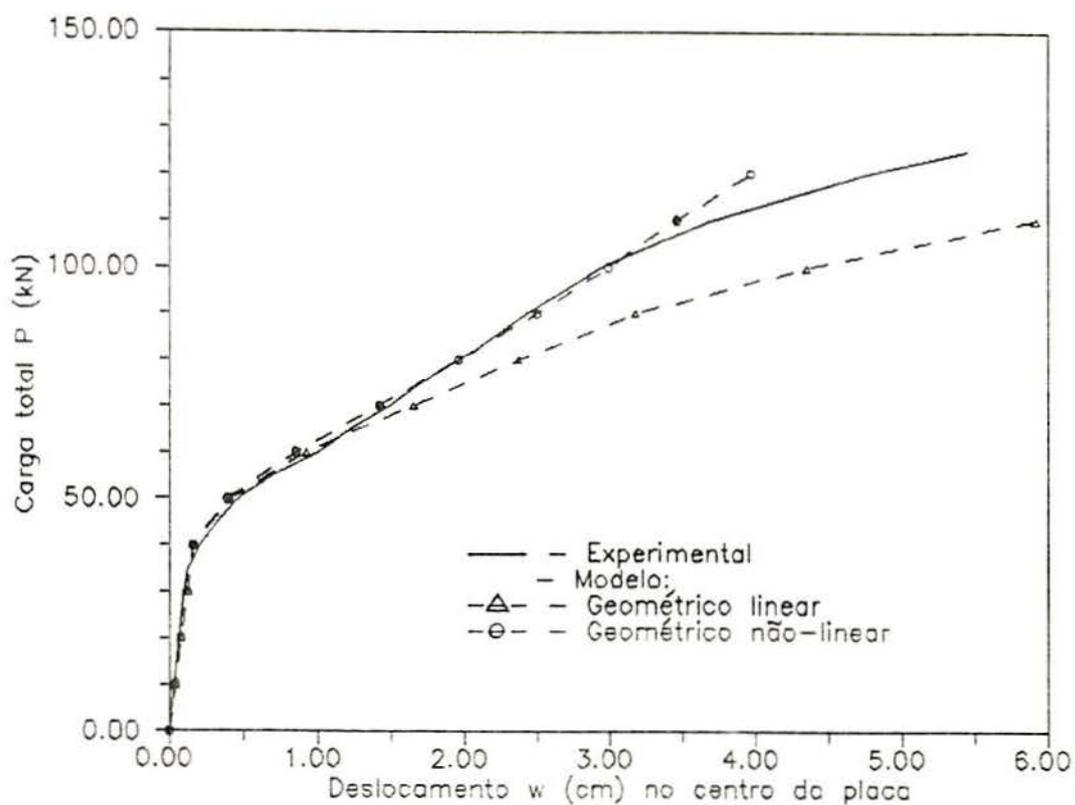


FIGURA 6.4 - Curvas carga-deslocamento: laje S1 de TAYLOR

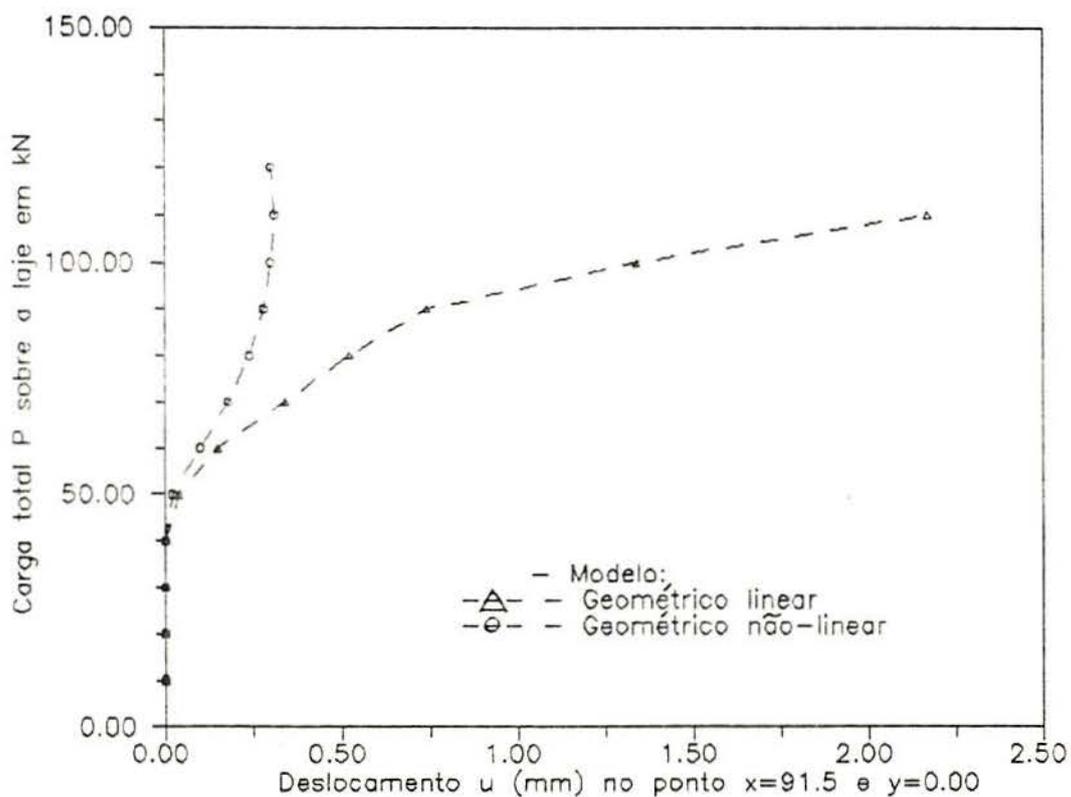


FIGURA 6.5 - Não-linearidade geométrica: laje S1 de TAYLOR

### 6.2.3 - Laje S6 de TAYLOR

A laje S6 de TAYLOR possui basicamente a mesma geometria da laje S1, porém sua armadura se encontra inclinada a  $45^\circ$  em relação aos lados, conforme a FIGURA 6.6. Na TABELA 6.3 estão indicadas as propriedades mecânicas dos materiais para este exemplo.

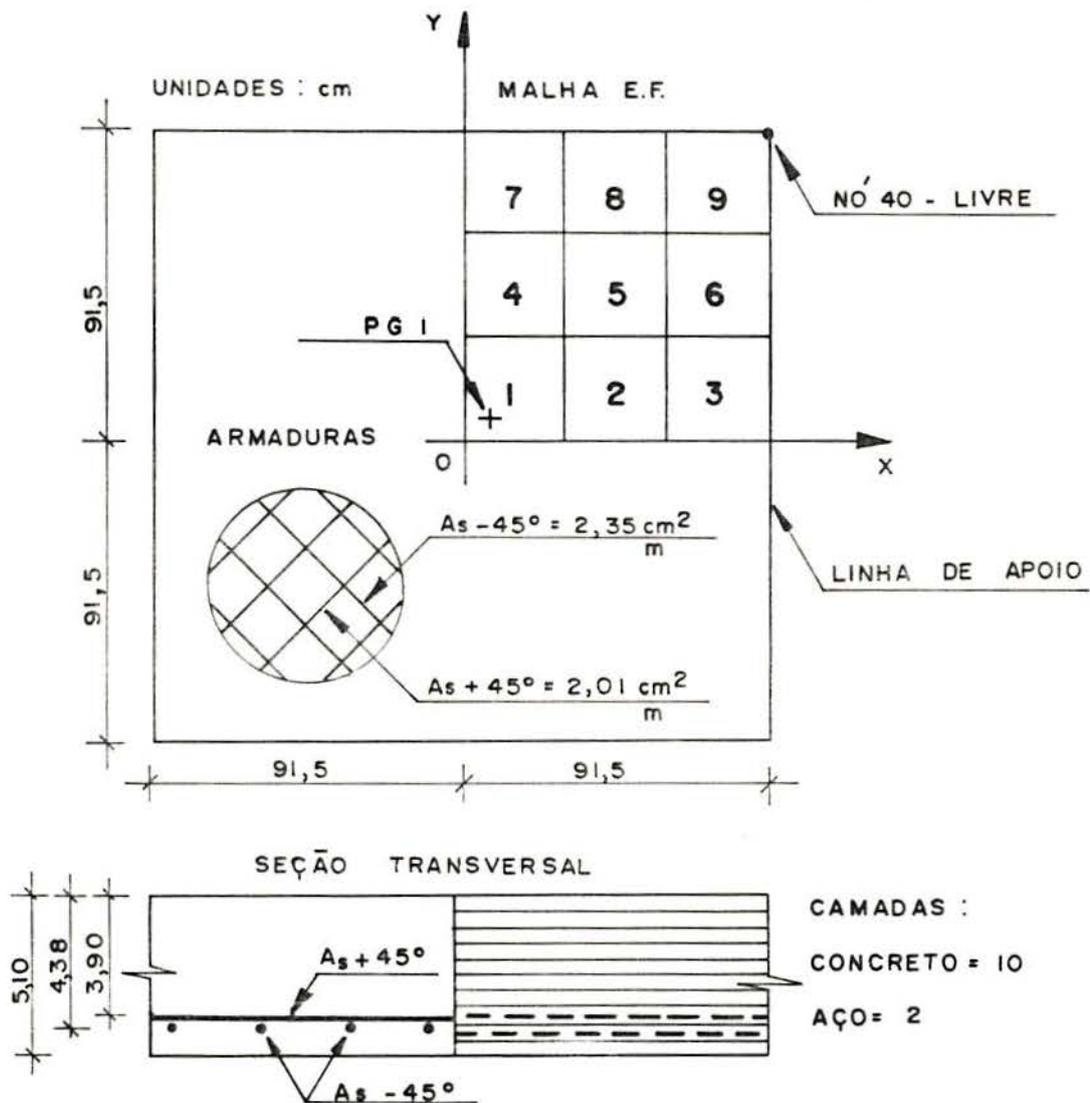


FIGURA 6.6 - Laje S6 de TAYLOR

Propriedades dos Materiais	
Concreto	Aço
$E_{co} = 3.242,00 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 20.691,00 \text{ kN/cm}^2$
$\nu = 0,18$	$E_{s2} = 1.379,00 \text{ kN/cm}^2$
$f_c = 3,50 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 42,03 \text{ kN/cm}^2$
$f_t = 0,35 \text{ kN/cm}^2$	

TABELA 6.3 - Propriedades da laje S6 de TAYLOR

A curva relacionando a carga total sobre a laje em kN com o deslocamento vertical  $w$  no centro em cm é mostrada na FIGURA 6.7. Os pontos obtidos numericamente apresentam uma boa concordância com os resultados experimentais.

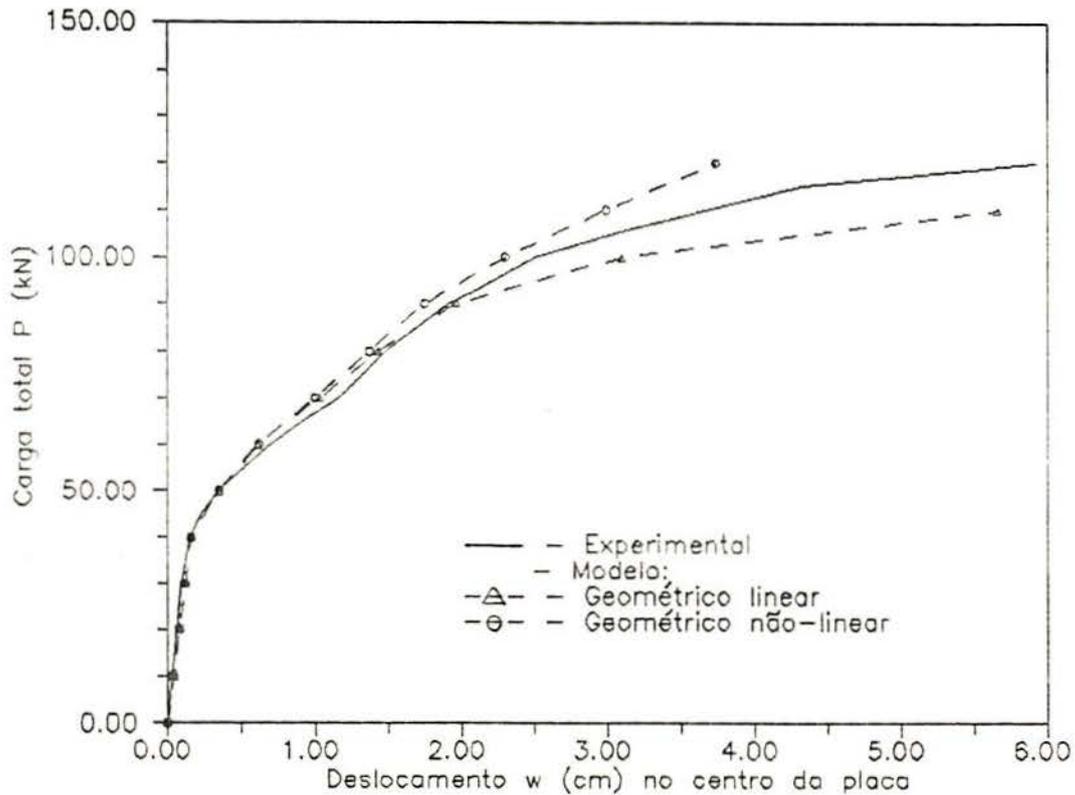


FIGURA 6.7 - Curvas carga-deslocamento: laje S6 de TAYLOR

Na FIGURA 6.8 é feita uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo para as lajes S1 e S6. Observa-se que a laje S6 apresenta-se mais rígida após a carga de fissuração. Este fato pode ser explicado através da TABELA 6.4, que mostra a evolução da direção de deformações principais  $\theta_1$ , para a camada mais tracionada do ponto de integração PG1 indicado na FIGURA 6.3 (  $x = 3,44$  cm,  $y = 3,44$  cm e  $z = 2,30$  cm ).

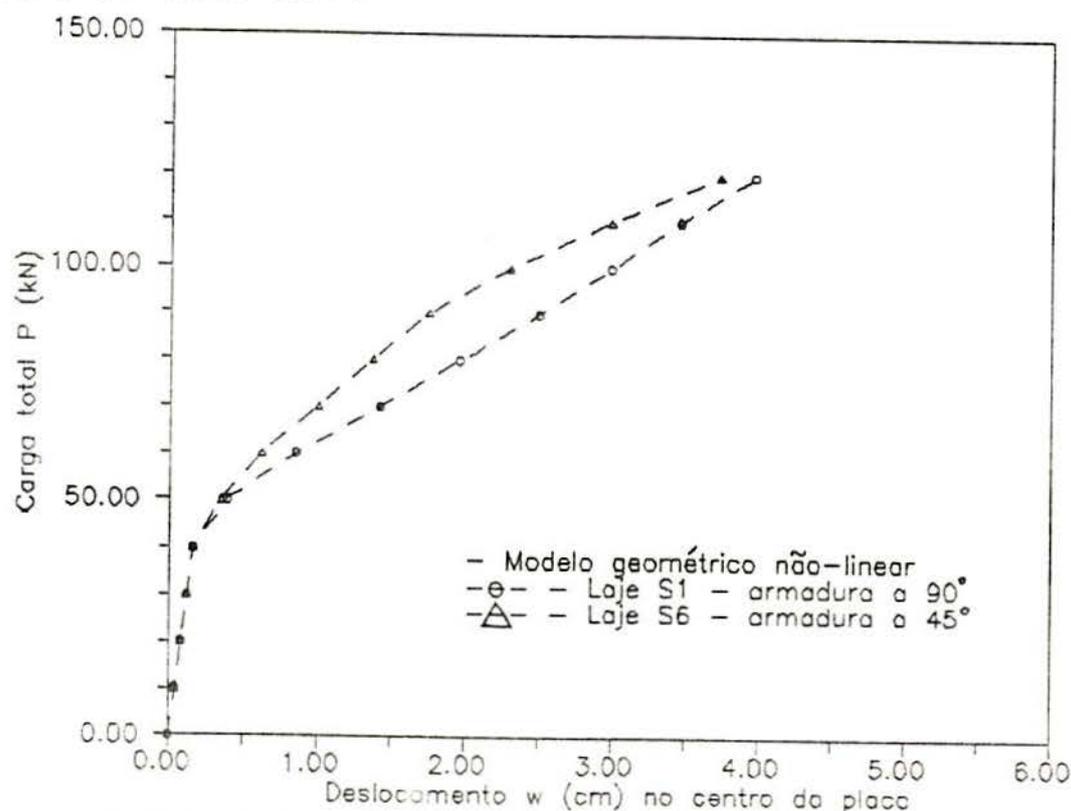


FIGURA 6.8 - Comparação das curvas carga-deslocamento

Etapa	Carga (kN)	Laje S1	Laje S6
		$\theta_1$ (graus dec.)	$\theta_1$ (graus dec.)
1	10,00	-39,74	-45,00
2	20,00	-39,80	-45,00
3	30,00	-39,82	-45,00
4	40,00	-42,39	-45,00
5	50,00	-44,37	-45,00
6	60,00	-47,40	45,00
7	70,00	-49,74	45,00
8	80,00	-71,03	45,00
9	90,00	-71,00	45,00
10	100,00	-70,69	45,00

TABELA 6.4 - Direções principais de deformação nas lajes S1 e S6

### 6.3 - Estudos paramétricos

#### 6.3.1 - Introdução

Com a finalidade de avaliar a influência de diversos parâmetros de entrada do programa nos resultados fornecidos pelo modelo foram desenvolvidos os testes que se seguem.

Os estudos comparativos foram feitos com base nas respostas obtidas durante a análise de uma laje armada em uma só direção com 2,00 m de vão, 1,00 m de largura e 8 cm de espessura. O carregamento é formado por duas cargas linearmente distribuídas (kN/m), que atuam a 0,50 m dos apoios.

Na FIGURA 6.9 estão indicadas a geometria da laje, a disposição das armaduras e a malha de elementos finitos empregada nos estudos numéricos. As propriedades mecânicas dos materiais que foram utilizadas são mostradas na TABELA 6.5.

#### 6.3.2 - Tipo de integração numérica

Conforme é descrito no capítulo 3, as integrais de superfície que surgem na obtenção da matriz de rigidez do elemento, bem como na avaliação do vetor de ações nodais não-lineares, são calculadas numericamente através da quadratura de Gauss-Legendre.

Muito têm sido escrito<sup>9, 97, 98, 39</sup> sobre o efeito enrijecedor que uma integração numérica exata, com 3x3 pontos de integração, provoca em elementos de placa isoparamétricos quadráticos baseados, na Teoria de Placas de Mindlin. Soluções alternativas têm sido empregadas adotando-se uma integração seletiva, com 3x3 pontos de Gauss para os termos de estado plano e de flexão e com uma integração inexata com 2x2 pontos para os termos do corte; ou em forma simplificada, utilizando-se 2x2 pontos para todos os termos.

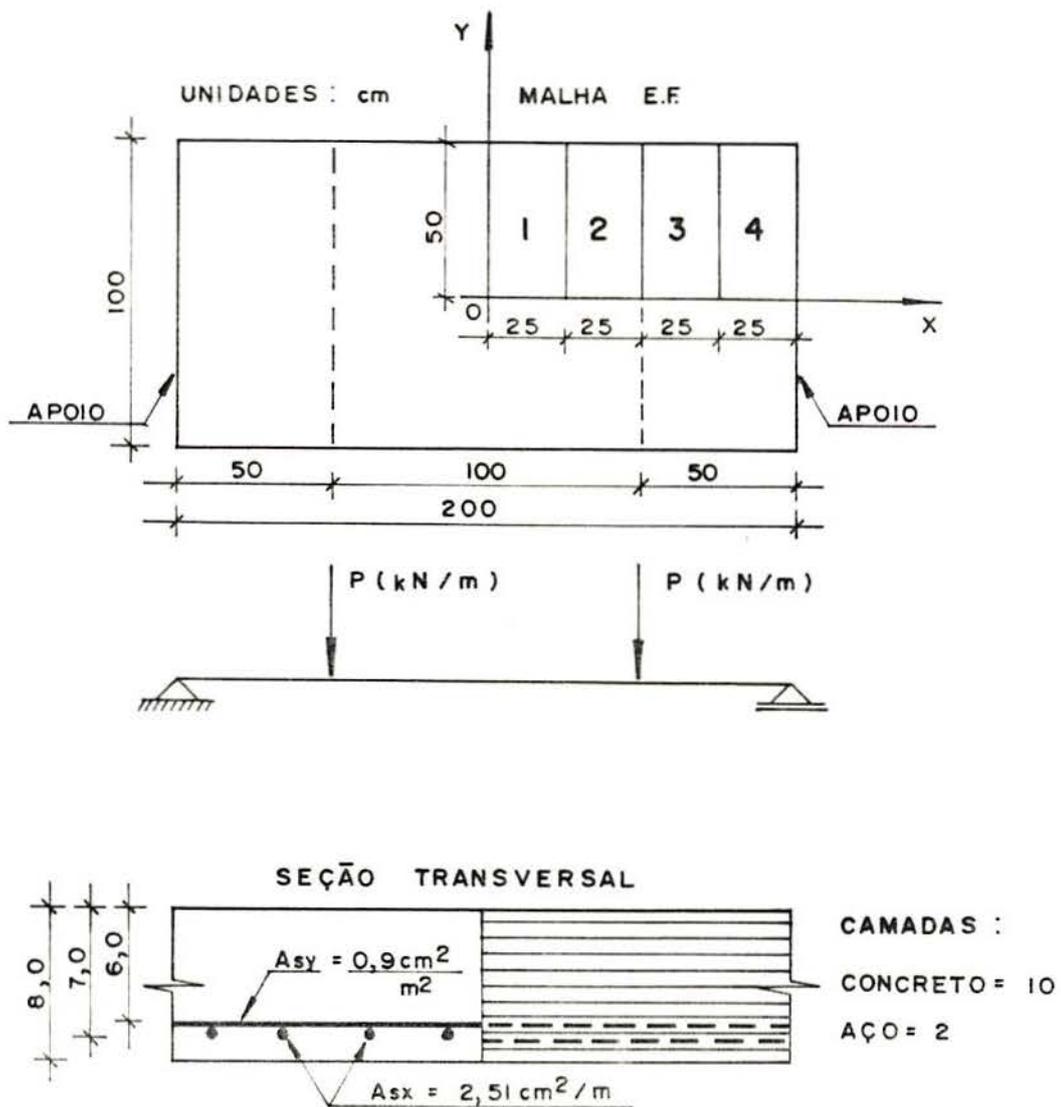


FIGURA 6.9 - Laje armada em uma só direção

Propriedades dos Materiais	
Concreto	Aço
$E_{co} = 2.840,00 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21.000,00 \text{ kN/cm}^2$
$\nu = 0,20$	$E_{s2} = 0,00 \text{ kN/cm}^2$
$f_c = 1,85 \text{ kN/cm}^2$	$f_y = 50,00 \text{ kN/cm}^2$
$f_t = 0,19 \text{ kN/cm}^2$	

TABELA 6.5 - Propriedades dos materiais: estudos paramétricos

Para a laje em estudo, cuja relação entre o vão e a espessura é igual a 25, a FIGURA 6.10 mostra que a integração numérica adotada pouco influi nos resultados fornecidos pelo modelo. Porém, observa-se que a integração seletiva produz resultados intermediários, compreendidos entre a integração exata e a reduzida. Em lajes mais esbeltas ( $L/h > 40$ ), a integração exata dos termos relativos ao corte pode causar um enrijecimento espúrio, devendo-se preferir, portanto, uma integração numérica seletiva.

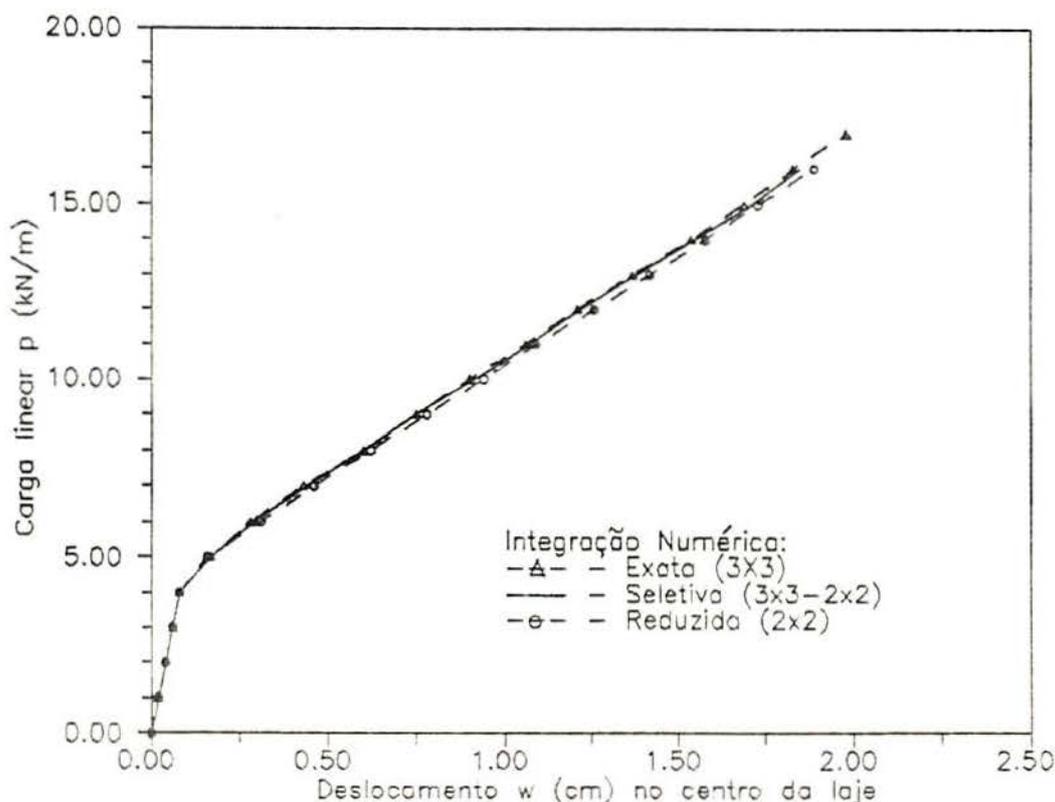


FIGURA 6.10 - Efeito da integração numérica

### 6.3.3 - Resistência à compressão do concreto

O gráfico da FIGURA 6.11 revela que uma variação de 20%, para mais ou para menos, da resistência à compressão do concreto praticamente não interfere na resposta carga-deslocamento fornecida pelo modelo.

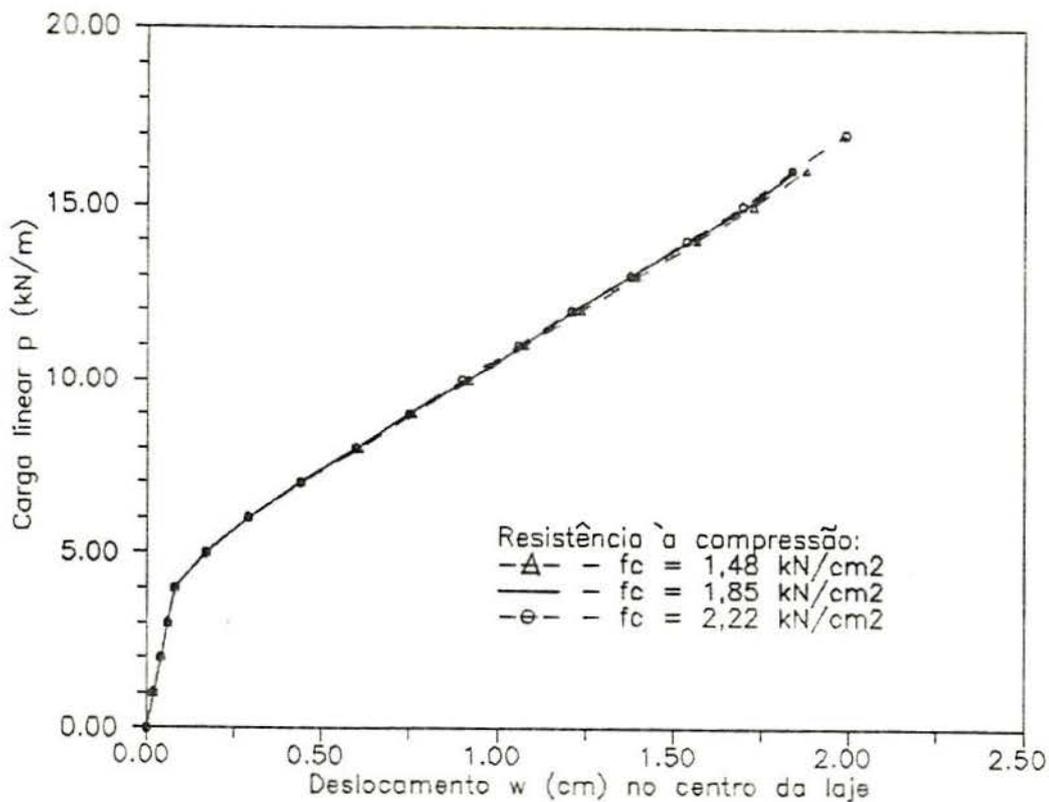


FIGURA 6.11 - Influência da resistência à compressão do concreto .

#### 6.3.4 - Resistência à tração do concreto

O concreto é um material que apresenta uma baixa resistência sob tensões de tração. Este fato origina o surgimento de fissuras na zona tracionada de lajes submetidas a flexão, o que provoca redução da seção transversal resistente, diminuindo a rigidez, resultando em um aumento dos deslocamentos.

A resistência à tração do concreto influi no valor da carga de fissuração, a partir da qual os deslocamentos crescem de forma acentuada, afastando-se notadamente de um comportamento elástico linear.

A FIGURA 6.12 mostra que uma variação de mais ou menos 20% no valor da resistência à tração do concreto produz uma alteração sensível na curva carga-deslocamento gerada através do modelo.

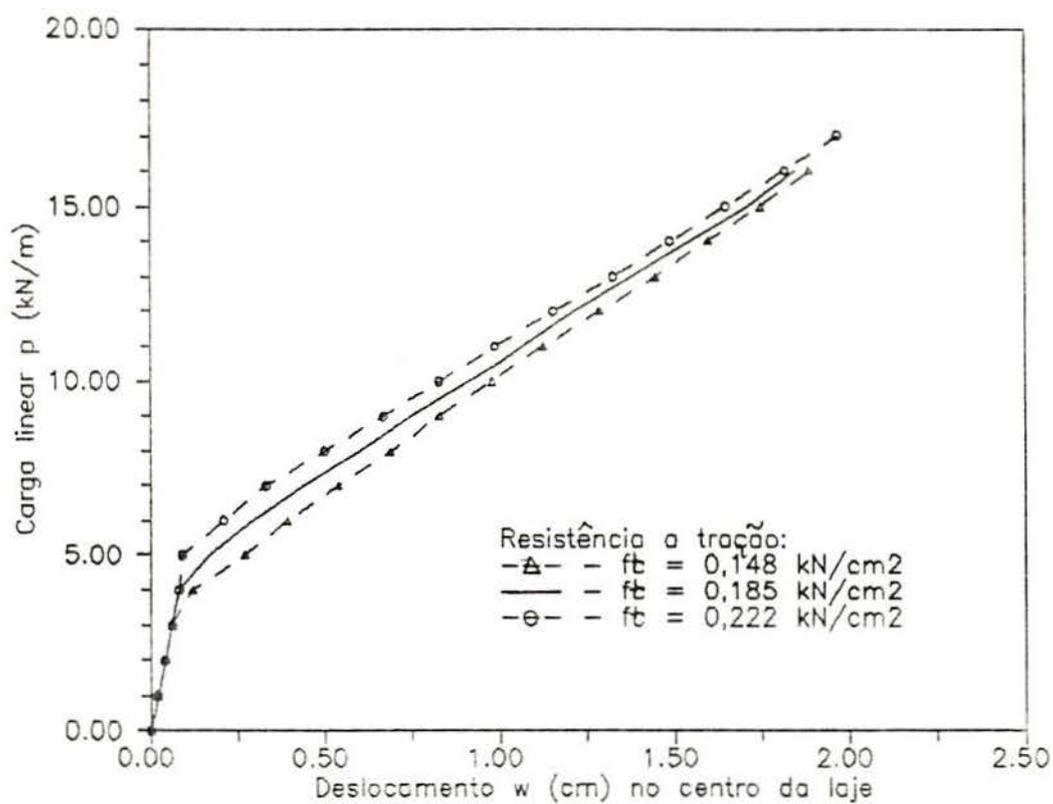


FIGURA 6.12 - Influência da resistência à tração do concreto.

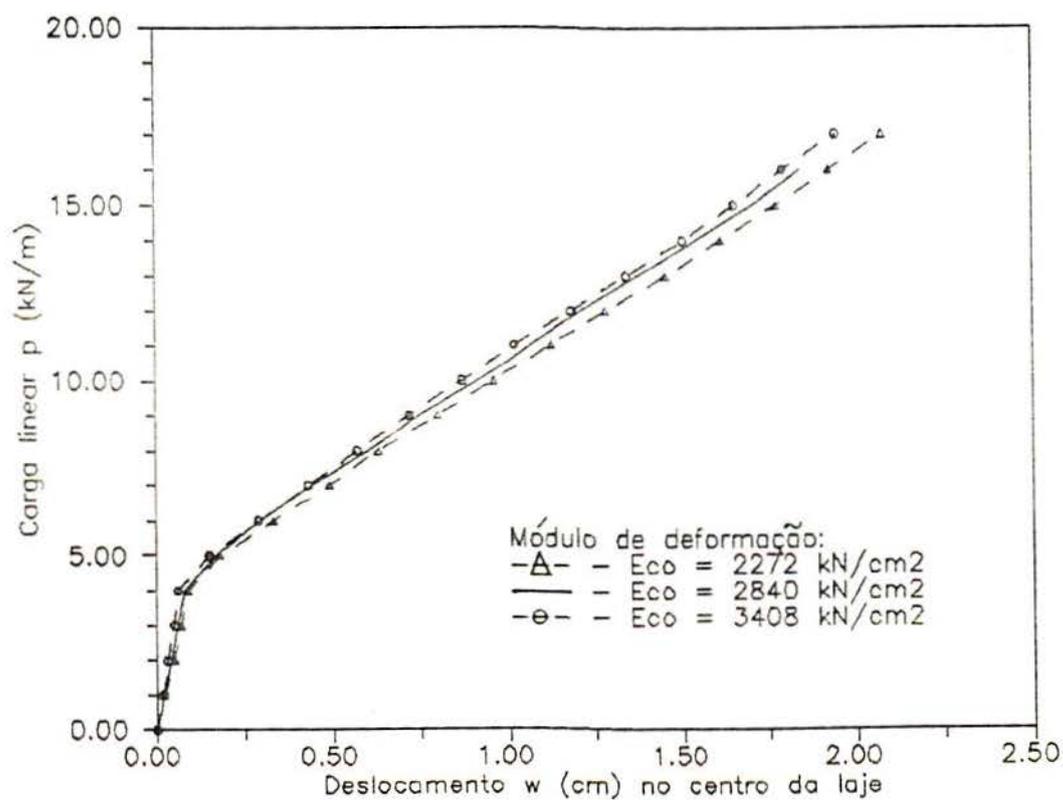


FIGURA 6.13 - Influência do módulo de deformação do concreto

### 6.3.5 - Módulo de deformação-longitudinal do concreto

Aumentando-se ou reduzindo-se o módulo de deformação longitudinal do concreto  $E_{co}$  em 20%, ocorre uma pequena variação na curva carga-deslocamento, mantendo-se praticamente paralelas entre si as três curvas. Isto pode ser observado na FIGURA 6.13.

### 6.3.6 - Algoritmo de solução do sistema de equações não-lineares

Da aplicação do Método dos Elementos Finitos na análise não-linear física e geométrica de lajes de concreto armado, resulta um sistema de equações de equilíbrio não-lineares a ser resolvido, conforme foi mostrado no capítulo 3.

O processo de solução do sistema de equações de equilíbrio implementado inicialmente foi o método de Newton-Raphson modificado, com matriz de rigidez na origem mantida constante em todas as etapas de carga. Este processo mostrou-se demasiado lento na busca da configuração de deslocamentos correspondente ao equilíbrio. Como alternativa, foi utilizado o método Secante-Newton, desenvolvido por CRISFIELD<sup>11</sup>, que se encontra detalhado no capítulo 5.

Na TABELA 6.6 encontra-se a evolução do deslocamento vertical  $w$  no centro da laje e do número de iterações necessárias para atingir a convergência a medida que a carga cresce. Observa-se que o método Secante-Newton produz basicamente os mesmos resultados que o método Newton-Raphson modificado, porém o número de iterações dispendidas pelo primeiro para alcançar a convergência é muito menor, notadamente após a carga de fissuração (entre 4,0 e 5,0 kN/m).

O tempo relativo de processamento utilizado pelo método Secante-Newton é apenas 30% daquele gasto pelo método de Newton-Raphson modificado. O método Secante-Newton revela-se tanto mais eficiente, quanto mais intensa for a propagação das fissuras ao longo da laje.

Etapa	Carga (kN/m)	Newton-Raphson modificado		Secante-Newton	
		w (cm)	Iter.	w (cm)	Iter.
1	1,00	0,02	6	0,02	5
2	2,00	0,04	6	0,04	5
3	3,00	0,06	6	0,06	5
4	4,00	0,08	6	0,08	5
5	5,00	0,17	60	0,17	19
6	6,00	0,29	89	0,29	37
7	7,00	0,44	113	0,44	39
8	8,00	0,60	174	0,60	74
9	9,00	0,75	149	0,75	43
10	10,00	0,91	151	0,91	41
11	11,00	1,07	152	1,07	44
12	12,00	1,22	155	1,22	28
13	13,00	1,38	157	1,38	67
14	14,00	1,55	205	1,55	58
15	15,00	1,71	175	1,71	72
16	16,00	1,85	167	1,85	56

TABELA 6.6 - Comparação do algoritmos de solução.

#### 6.4 - Comparação com os critérios da norma NBR-6118

##### 6.4.1 - Introdução

No projeto de edifícios em concreto armado ocorre com frequência a situação de se ter que adotar, por razões construtivas, uma mesma espessura para todas as lajes de um pavimento. Se os vãos não forem muito grandes, o dimensionamento destas lajes segundo os critérios da norma brasileira NBR-6118<sup>2</sup>, terá como resultado uma taxa de armadura mínima.

Conseqüentemente, o que diferenciará o comportamento de uma laje em relação a outra, sob uma mesma carga de serviço, será a esbeltez  $\lambda$ , neste trabalho definida como sendo a razão entre a média dos lados e a espessura da laje.

Com o objetivo de comparar os critérios de projeto para lajes de concreto armado prescritos pela norma NBR-6118,

com o comportamento previsto através do modelo desenvolvido neste estudo, foram elaborados os exemplos das lajes L1, L2, L3 e L4 que se seguem.

#### 6.4.2 - Descrição dos exemplos

As lajes são quadradas, possuem todas 8,0 cm de espessura e foram projetadas para uma carga de serviço de 4,00 kN/m<sup>2</sup>. No seu dimensionamento foi empregado um concreto com resistência à compressão característica  $f_{ck}$ , igual a 1,50 kN/cm<sup>2</sup> (15,0 MPa), e o aço é do tipo CA-60 B. A altura útil "d" adotada foi de 7,0 cm.

Nestas condições, fazendo-se variar a esbelteza  $\lambda$  de 20 até 50, obteve-se em todos os casos a taxa de armadura mínima  $\rho_{min}$ , prescrita pela NBR 6118, que é igual a 0,15%.

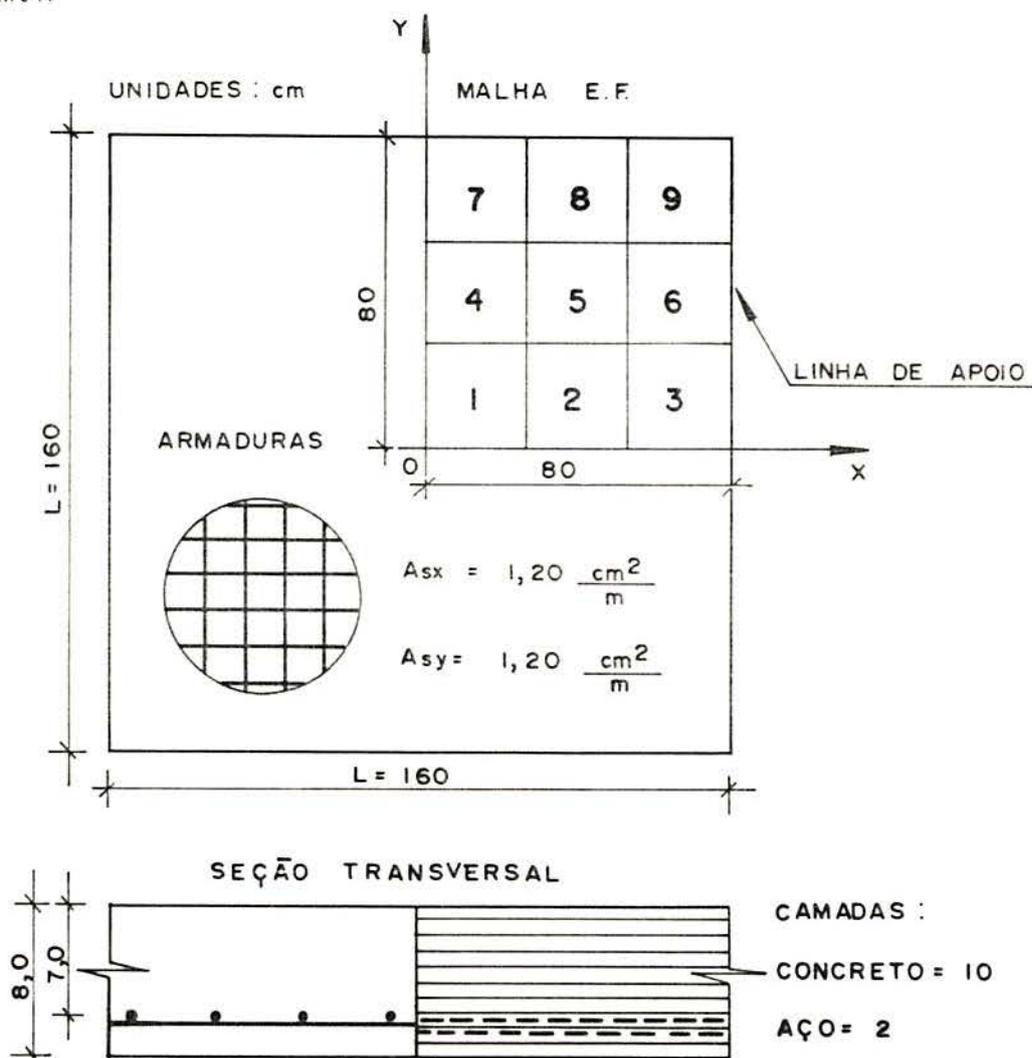


FIGURA 6.14 - Aspectos geométricos da laje L1

A FIGURA 6.14, contém os aspectos geométricos da laje L1 (  $\lambda = 20$  ), indicando-se a malha de elementos finitos e a divisão da espessura em camadas, que foram mantidas constantes para as demais lajes. Na TABELA 6.7, encontram-se as propriedades mecânicas dos materiais que foram utilizadas. Em todos os exemplos foi considerado o comportamento não-linear geométrico da laje.

O diagrama tensão-deformação utilizado para o aço CA-60 B foi aquele indicado pela NBR-6118, sem a adoção do patamar de escoamento, conforme a FIGURA 6.15.

Definido-se a deformação limite de proporcionalidade por

$$\varepsilon_p = 0,7 \frac{f_y}{E_{s1}} , \quad (6.1)$$

e a deformação convencional de escoamento como sendo

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_{s1}} + 0,002 , \quad (6.2)$$

a equação constitutiva para um aço do tipo B será dada pela expressão

$$\sigma_s = E_{s1} \varepsilon_s , \text{ quando } 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_p , \quad (6.3)$$

e pela fórmula

$$\sigma_s = f_y \left[ \beta + \sqrt{\beta^2 + 45 \varepsilon_s - 0,49} \right] , \text{ quando } \varepsilon_s > \varepsilon_p , \quad (6.4)$$

onde

$$\beta = 0,70 - 22,5 \frac{f_y}{E_{s1}} . \quad (6.5)$$

#### 6.4.3 - Comparação dos resultados

A norma NBR-6118 permite em seu item 4.2.3.1, que o cálculo de deformações por flexão em lajes seja feito no

Propriedades dos Materiais	
Concreto	Aço
$E_{co} = 2.840,00 \text{ kN/cm}^2$	$E_{s1} = 21.000,00 \text{ kN/cm}^2$
$\nu = 0,20$	$f_y = 60,00 \text{ kN/cm}^2$
$f_c = 1,85 \text{ kN/cm}^2$	Aço do tipo B
$f_t = 0,19 \text{ kN/cm}^2$	

TABELA 6.7 - Propriedades dos materiais: lajes L1, L2, L3 e L4

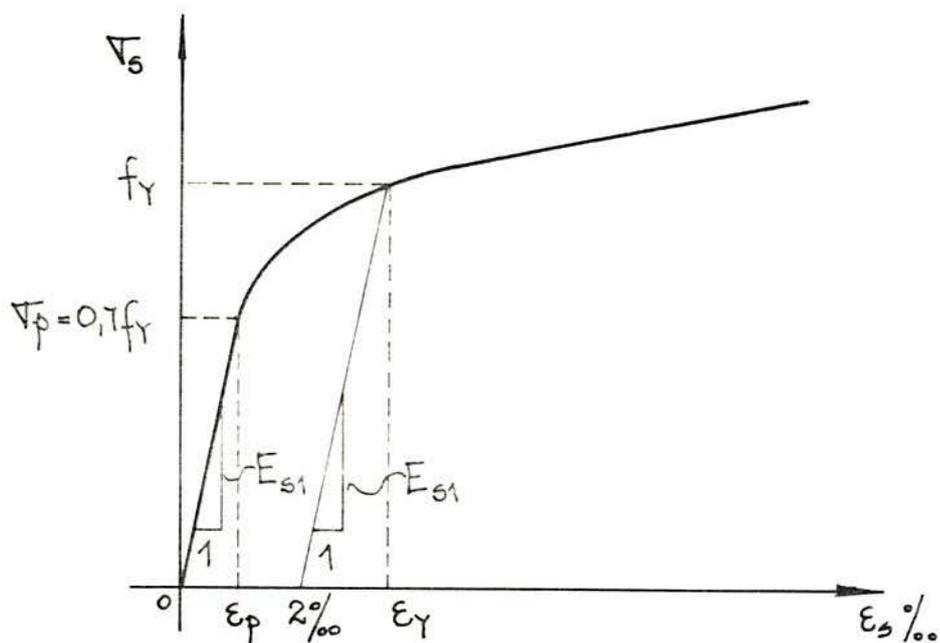


FIGURA 6.15 - Diagrama tensão-deformação para o aço do tipo B

"Estádio I", adotando-se no caso de ações de curta duração, o módulo de deformação secante do concreto  $E_{cs}$ , dado por

$$E_{cs} = 0,9 E_{co}, \quad (6.6)$$

sendo  $E_{co}$  o módulo de deformação na origem, igual a

$$E_{co} = 6600 \sqrt{f_{cj}} \quad (6.7)$$

onde  $f_{cj}$  é a resistência à compressão média do concreto aos "j" dias de idade, podendo ser estimada através da expressão,

$$f_{cj} = f_{ck} + 3,5 \text{ MPa.} \quad (6.8)$$

Segundo BARES<sup>3</sup>, a flecha  $w$  no centro de uma laje quadrada de vão  $L$ , sob uma carga uniforme  $p$ , espessura  $h$  e coeficiente de Poisson igual a 0,20, pode ser calculada pela fórmula

$$w = 0,0467 \frac{p L^4}{E_{cs} h^3} \quad (6.9)$$

A TABELA 6.8 permite comparar o valor da flecha  $w$  no centro da laje calculado através da equação 6.9, com aqueles fornecidos pelo modelo, quando se considera apoios deslocáveis ou fixos no plano, para as lajes L1, L2, L3 e L4.

Laje	L (m)	$\lambda$	$P_s$ (kN/m <sup>2</sup> )	$w_{Elast}$ (cm)	$w_{Desl}$ (cm)	$w_{Fixo}$ (cm)
L1	1,60	20	4,00	0,0094	0,0089	0,0089
L2	2,40	30	4,00	0,0474	0,0449	0,0449
L3	3,20	40	4,00	0,1498	0,1421	0,1419
L4	4,00	50	4,00	0,3658	1,0714	0,4732

TABELA 6.8 - Previsão da flecha  $w$ : NBR-6118/82 x Modelo.

Considerando-se que o modelo desenvolvido até aqui inclui o comportamento não-linear físico e geométrico da laje; pode-se afirmar que ele representa uma melhor aproximação da realidade do que a expressão 6.9, que baseia-se em uma formulação elástica linear.

A partir desta premissa, é possível concluir que as lajes analisadas apresentam uma relação carga-deslocamento muito próxima da prevista pela Teoria da Elasticidade até ser atingida a carga de serviço, para uma esbeltez  $\lambda$  variando entre 20 e 40.

Para uma esbeltez  $\lambda$  próxima de 50, lajes com as características acima mencionadas podem começar a apresentar fissuras, que fazem com que sua resposta estática se torne menos rígida e se afaste daquele modelo elástico linear.

Se o confinamento oferecido pelas lajes e vigas situadas no contorno da laje em estudo for considerado, o comportamento da laje volta a se aproximar do regime linear, pois esforços normais de compressão, contidos no plano médio da laje passam a impedir a expansão da fissuração.

#### 6.4.4 - Curvas carga-deslocamento

Com a finalidade de permitir uma melhor comparação entre a previsão de flechas recomendada pela NBR-6118 e aquela obtida através do modelo não-linear, publica-se a seguir, nas

FIGURAS de 6.16 a 6.19, os gráficos contendo as curvas carga-deslocamento para as lajes L1, L2, L3 e L4.

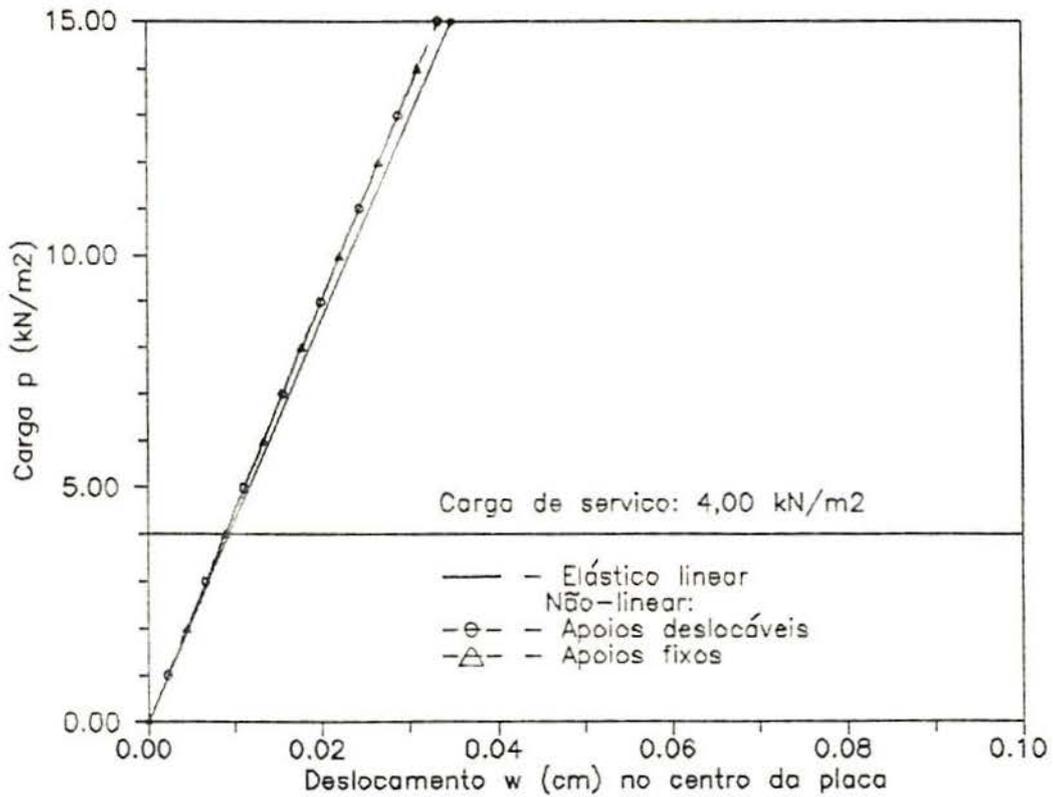


FIGURA 6.16 - Curvas carga-deslocamento para a laje L1.

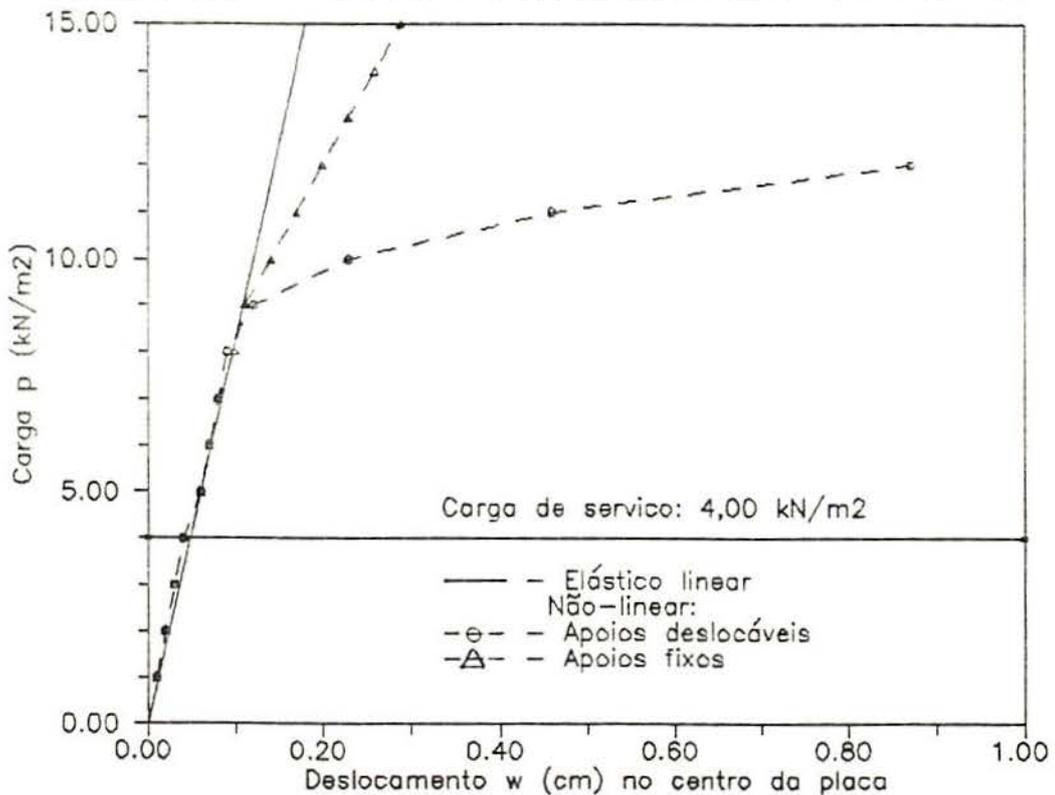


FIGURA 6.17 - Curvas carga-deslocamento para a laje L2.

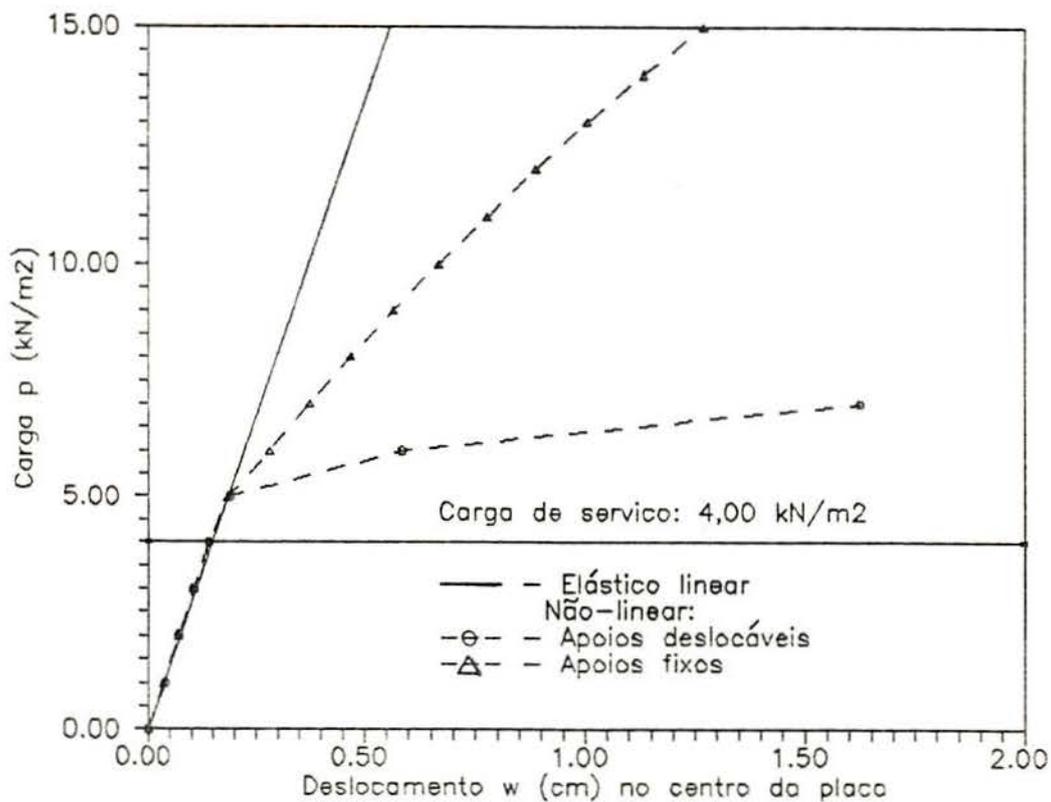


FIGURA 6.18 - Curvas carga-deslocamento para a laje L3.

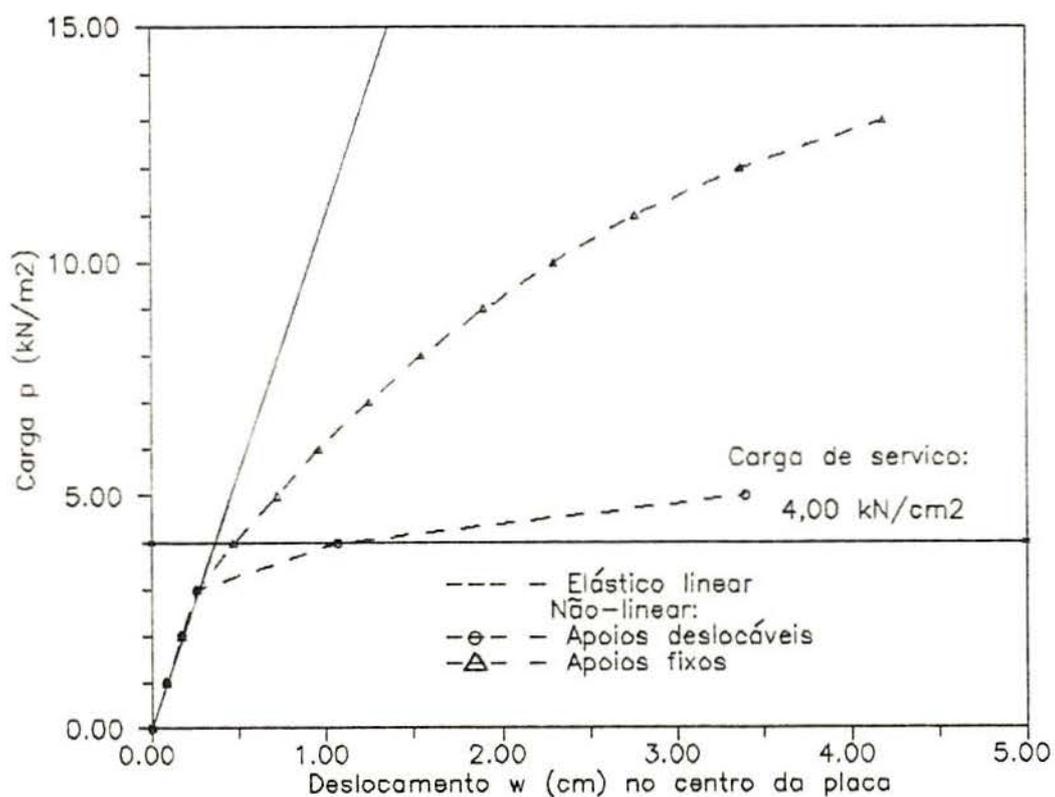


Fig. 6.19 - Curvas carga-deslocamento para a laje L4.

## 7 - CONCLUSÕES

A finalidade desta dissertação foi desenvolver um modelo para análise lajes de concreto armado através do Método dos Elementos Finitos, que considerasse o comportamento mecânico não-linear dos materiais, a possibilidade de ocorrerem grandes deformações e a influência das condições de contorno no plano. Esta formulação deveria permitir traçar, desde o início do carregamento até a ruptura, a resposta estática não-linear da laje.

Durante a elaboração deste trabalho foi possível chegar-se a uma série de conclusões que serão expostas a seguir.

No que se refere ao M.E.F., o elemento isoparamétrico quadrático, de oito nós, da família Serindipity comprovou o seu bom desempenho já descrito em outras publicações semelhantes.

Quanto à integração numérica, é aconselhável adotar um processo seletivo com  $3 \times 3$  pontos de Gauss para os termos de estado plano de tensões e flexo-torção de placas e com  $2 \times 2$  pontos para os termos do corte. Este procedimento permite, no cálculo das ações nodais não-lineares, avaliar o comportamento mecânico do material em um maior número de pontos amostrais, sem contudo superestimar a rigidez ao corte.

O modelo para o material composto concreto armado merece as ponderações que se seguem.

O modelo para o concreto como um material isotrópico não-linear de comportamento frágil na tração revelou-se por demais simplificado. A rotação sempre para a direção de deformações principais, sem considerar a direção das fissuras, exige um número muito grande de iterações até estabelecer-se o equilíbrio. Talvez seja mais conveniente adotar o modelo

não-linear ortotrópico sugerido por DARWIN<sup>12</sup>, ou uma formulação baseada na Teoria da Plasticidade como foi feito por OWEN<sup>28</sup> et alii.

A inclusão da colaboração do concreto entre fissuras na resistência aos esforços de tração mostrou-se imprescindível para uma correta simulação da resposta da laje após a carga de fissuração.

Já o modelo adotado para a armadura apresentou-se adequado, devido a correta representação de suas características de resistência. No entanto, seria desejável incluir-se a possibilidade da variação da quantidade e da posição das armaduras de elemento para elemento em que foi discretizada a laje.

O algoritmo inicialmente empregado para a solução do sistema de equações não-lineares foi o método de Newton-Raphson modificado, com matriz de rigidez tangente na origem mantida constante durante todo o processo. Este método exibiu uma grande demora para atingir a convergência, exigindo um elevado número de iterações.

A introdução do método Secante-Newton, desenvolvido por CRISFIELD<sup>11</sup>, veio a acelerar em muito a convergência do método de N-R m., sem alterar a sua essência. Foram obtidas reduções no tempo de processamento da ordem de até 70%, o que encoraja maiores estudos neste campo.

Dentre os diversos parâmetros de entrada do modelo, o que pareceu influenciar mais os resultados foi a resistência a tração do concreto  $f_t$ , pois é ela quem determina o início da fissuração.

Apesar das deficiências do modelo para o concreto, a formulação desenvolvida neste trabalho apresentou uma boa concordância com os resultados experimentais.

É interessante observar a importância da não-linearidade geométrica, para estágios mais avançados de carga, mesmo em lajes que não possuem qualquer restrição ao deslocamento no plano xy. Cumpre salientar que este fato já

havia sido notado experimentalmente por TAYLOR<sup>33</sup>.

As condições de contorno no plano demonstraram exercer um grande uma influência na resposta estática de lajes de concreto armado. O impedimento da livre expansão da laje pela presença de vigas e lajes vizinhas em seu contorno acarreta um diminuição das flechas e um aumento substancial da carga de ruptura.

Um estudo comparativo entre as prescrições da norma brasileira NBR-6118<sup>2</sup> e os resultados fornecidos pelo modelo, permite estabelecer algumas conclusões quanto a previsão de flechas em lajes.

Para lajes de edifícios com um índice de esbeltez menor ou igual a 40, e cujo dimensionamento tenha levado a adoção de uma taxa de armadura mínima a previsão de flechas considerando-se a laje no Estádio I e adotando-se o módulo de deformação longitudinal secante do concreto mostrou-se satisfatória. Porém deve-se observar que estas lajes resultam superarmadas, podendo ocorrer uma ruptura brusca por esmagamento do concreto, quando forem sobrecarregadas.

Em lajes com uma esbeltez superior a 40, com a taxa de armadura calculada muito próxima da armadura mínima o modelo recomendado pela norma não revela-se mais tão eficiente. Isto pode ser explicado pelo fato de que nestes casos a fissuração pode ocorrer antes mesmo de ser atingida a carga de serviço, afastando-se o comportamento da laje do modelo elástico linear.

Uma análise das curvas carga-deslocamento obtidas para as lajes em estudo indica que uma previsão de flechas mais próxima da realidade deveria ser feita através de uma relação bilinear. Até a carga de fissuração poderia ser utilizado o modelo de funcionamento no Estádio I. A partir deste ponto é necessário incluir a perda de rigidez devida a fissuração e, em contrapartida, a influência das condições de contorno no plano, devido ao efeito enrijecedor provocado pelo surgimento de esforços normais.

De tudo o que foi dito até aqui, conclui-se que, em se tratando de lajes de concreto armado, uma correta representação geométrica do problema tem uma importância tão grande quanto a adoção de um refinado modelo para o material.

## ANEXO A - DESCRIÇÃO DO PROGRAMA LAJE-SNW / FORTRAN

### A.1 - Introdução

O algoritmo do modelo para análise não-linear de lajes de concreto armado descrito no capítulo 5, foi implementado no programa computacional LAJE-SNW. O programa LAJE-SNW foi desenvolvido na linguagem FORTRAN 77, para o sistema IBM-4381, do Centro de Processamento de Dados da Universidade do Rio Grande.

O programa é composto por 28 subrotinas, elaboradas com base em HINTON<sup>20</sup> e em OWEN & HINTON<sup>27</sup>. Além do programa principal, foram criados dois programas auxiliares visando a otimizar a entrada de dados. O programa auxiliar GERADOR faz a geração automática de malha para placas de geometria retangular. O programa auxiliar INPUT permite a entrada de dados para geometrias mais complexas, porém a geração do arquivo de entrada deve ser feita manualmente pelo usuário.

O programa LAJE-SNW também pode ser rodado em um micro-computador do tipo IBM-PC, porém o tempo de processamento pode resultar muito longo. Uma descrição mais detalhada do programa, bem de sua forma de utilização, deverá ser objeto de um Cardeno Técnico a ser publicado em um futuro próximo.

### A.2 - Descrição das subrotinas

A seguir são descritas de forma sucinta as subrotinas que compõem o programa LAJE-SNW / FORTRAN.

INPUT → leitura e impressão dos dados do problema.

BANDA → cálculo da semi-largura de banda da matriz  $K_o$ .

- GAUSS → determinação das coordenadas e dos pesos dos pontos de integração de Gauss.
- FUNCST → cálculo das funções de interpolação nos pontos de Gauss.
- JACOB → determinação do determinante da matriz Jacobiana do elemento e cálculo das derivadas cartesianas.
- MATB → cálculo da matriz de deformações do elemento.
- MATD → cálculo da matriz de constantes elásticas.
- PRODB → efetua o produto  $\underline{D} \underline{B}$ .
- RIGID → cálculo da matriz de rigidez do elemento  $\underline{K}_o^e$ .
- VPEXT → cálculo do vetor de ações nodais do elemento  $\underline{P}_{ext}^e$ .
- MONTRG → montagem da matriz de rigidez global  $\underline{K}_o^G$ .
- CONTRG → aplicação das condições de contorno na matriz  $\underline{K}_o^G$ .
- PERFIL → montagem do vetor perfil ("skyline") de  $\underline{K}_o^G$ .
- CHOLE → decomposição da matriz  $\underline{K}_o^G$ , pelo mét. de Cholesky.
- SOLUV → substituição avante e retro-substituição:  $\underline{U} = \underline{K}_o^{G,-1} \underline{\psi}$ .
- DEFOR → deformações generalizadas nos pontos de Gauss:  $\underline{\epsilon}$ .
- ACNL → cálculo das ações não-lineares:  $\underline{A}_{NL}$ .
- SIGMA → tensões generalizadas nos pontos de Gauss:  $\underline{\sigma}$ .
- CONST → cálculo das constantes do concreto e do aço.
- TENC → equação constitutiva para o concreto.
- TENS → equação constitutiva para o aço.
- MONTAN → montagem do vetor de cargas nodais.
- CONF → aplicação das condições de contorno no vetor de cargas nodais.
- MONTNL → montagem do vetor de ações nodais não-lineares.
- CONTNL → aplicação das condições de contorno no vetor de ações não-lineares.
- ITERNL → solução do sistema de equações não-lineares: método Secante-Newton.

ERRO → cálculo de dos erros residuais:  $E1 = ||\psi|| / ||\Delta P||$ ,  
e  $E2 = ||\xi_r|| / ||U_r||$ .

TEMPO → cálculo do tempo de processamento utilizado na  
solução do sistema de equações não-lineares.

### A.3 - Fluxograma

A FIGURA A.1 apresenta um fluxograma, mostrando o  
encadeamento das subrotinas descritas acima.

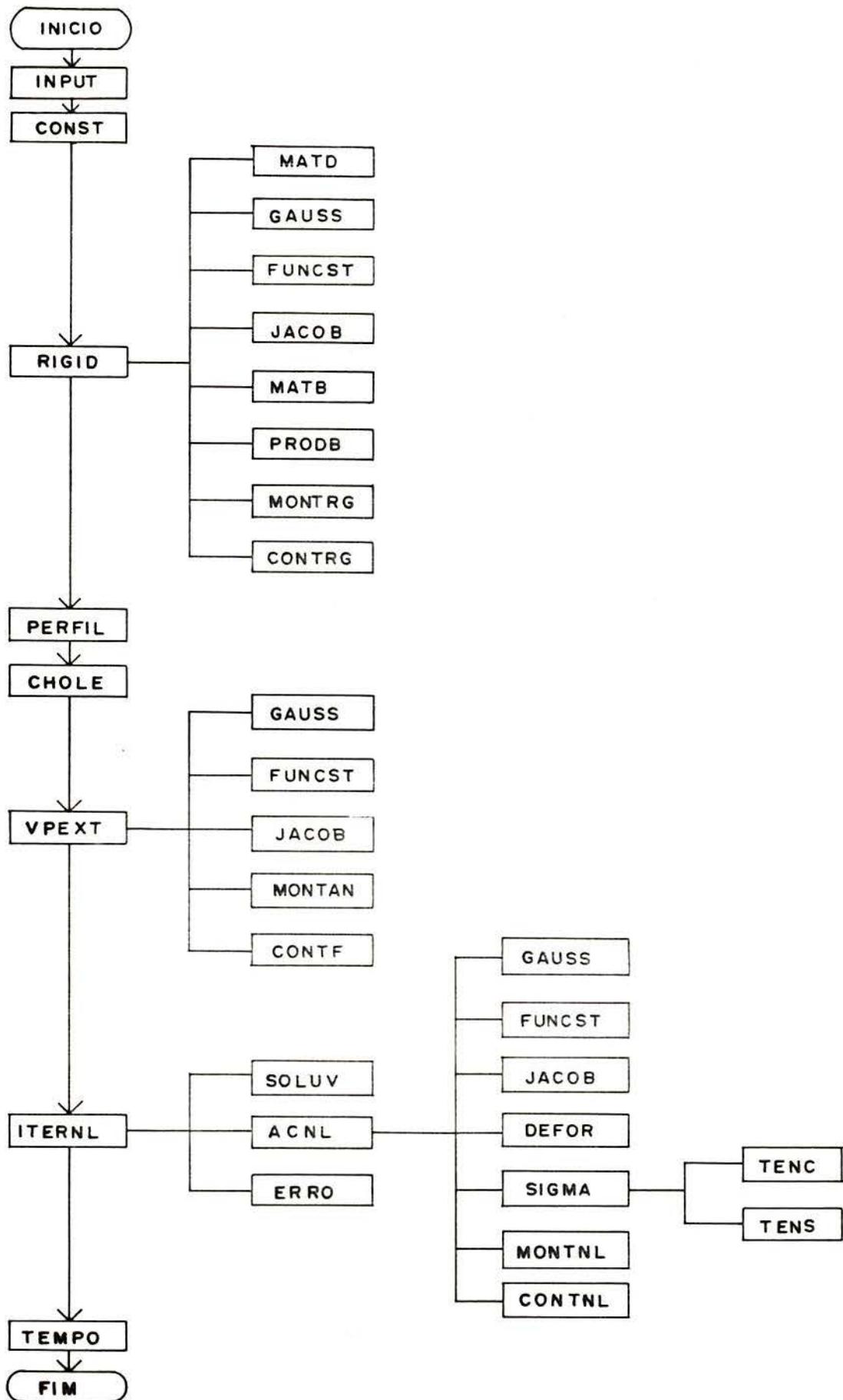


FIGURA A.1 - Fluxograma do programa LAJE-SNW / FORTRAN.

## BIBLIOGRAFIA

1. ARNESEN, A.; SØRENSEN, S.I. & BERGAN, P.G.. Nonlinear analysis of reinforced concrete. Computers & Structures, 12: 571-579, 1980.
2. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto e execução de obras de concreto armado. NBR-6118. Rio de Janeiro, 1982.
3. BARES, R.. Tablas para el cálculo de placas y vigas pared. Barcelona, Gustavo Gili, 1980.
4. BASHUR, F.K. & DARWIN, D.. Nonlinear model for reinforced concrete slabs. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 104(1): 157-170, Jan. 1978.
5. BIGNON, P.G.. Análise dinâmica não-linear de cascas de concreto armado para centrais nucleares. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, 1982. Tese de dout. em ciências.
6. BIGNON, P.G.. Análise Não-linear de Estruturas de Concreto. Notas de aula. Porto Alegre, CPGEC-UFRGS, 1987.
7. BRAESTRUP, M.W.. Dome effect in RC slabs: rigid plastic analysis. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 106(6): 1237-1253, Jun. 1980.
8. BRAESTRUP, M.W.. & MORLEY, C.T.. Dome effect in RC slabs: elastic-plastic analysis. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 106(6): 1255-1262, Jun. 1980.
9. BREBBIA, C.A. The finite element technique; an introduction for engineers, edited by C. Brebbia e A. Ferrante. Porto Alegre, Editora da UFRGS, 1975. 410 p.

10. CHRISTIANSEN, K.P. & FREDERIKSEN, V.T.. Experimental investigation of rectangular concrete slabs with horizontal restraints. Matériaux et Constructions. Paris, RILEM 16(93): 179-192, May-Jun. 1983.
11. CRISFIELD, M.A.. Accelerated solution techniques and concrete cracking. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. North-Holland 33: 585-607, 1982.
12. DARWIN, D. & PECKNOLD, D.A.. Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete. Journal of Engineering Mechanics Division. New York, ASCE, 103(2): 229-241, Apr. 1977.
13. DATTA, T.K.. & RAMESH, C.K.. Some experimental studies on a reinforced slab-beam system. Magazine of Concrete Res.. London, Cement and Concrete Association, 27(91): 111-120, Jun. 1975.
14. DESAYI, P. & KULKARNI, A.B.. Load-deflection behavior of restrained R/C slabs. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 103(2): 405-419, Feb. 1977.
15. DESAYI, P. & KULKARNI, A.B.. Membrane action, deflections and cracking of two-way reinforced concrete slabs. Matériaux et Constructions. Paris, RILEM 10(59): 303-312, Oct. 1977.
16. DYM, C.L. & SHAMES, I.H.. Solid Mechanics: A Variational Approach. New York, McGraw-Hill, 1977.
17. FUNG, Y.C.. Foundations of Solid Mechanics. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1965.
18. GILBERT, R.I. & WARNER, R.F.. Tension stiffening in reinforced concrete slabs. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 104(12): 1885-1900, Dec. 1978.
19. HAND, F.R.; PECKNOLD, D.A. & SCHNOBRICH, W.C.. Nonlinear layered analysis of RC plates and shells. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 99(7): 1491-1505. Jul, 1973.

20. HINTON, E. & OWEN, D.R.J.. Finite element programming. London, Academic Press, 1977. 305 p.
21. JACOBSON, A.. Membrane-flexural failure of restrained slabs. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 93(5): 85-112, Oct. 1967.
22. JOFRIET, J.C. & McNEICE, G.M.. Finite element analysis of reinforced concrete slabs. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 97(3): 785-806, Mar. 1971.
23. JOHANSEN, K.W.. Linhas de Ruptura - Teoria e Prática. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1962.
24. MEHLHORN, G. & KLEIN, D.. Finite element analysis of reinforced concrete slabs and panels. Institut für Massinbau. Technische Hochschule Darmstadt. Germany.
25. MINDLIN, R.D.. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, 18(1): 31-38, Mar. 1951.
26. OCKLESTON, A.J.. Load tests on a three-storey reinforced concrete building in Johannesburg. The Structural Engineer London, 33: 304-322, 1955.
27. OWEN, D.R.J. & HINTON, E.. Finite elements in plasticity: theory and practice. Swansea, Pineridge Press, 1980. 594 p.
28. OWEN, D.R.J.; FIGUEIRAS, J.A. & DAMJANIC, F.. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. North-Holland 41(3): 323-366, Dec. 1983.
29. PARK, R.. Ultimate strength of rectangular concrete slabs under short-term uniform loading with edges restrained against lateral movement. Proceedings of the Institution of Civil Engineers. London 28: 125-150, Jun. 1964.

30. POPOV, E.P.. Introdução à Mecânica dos Sólidos. São Paulo, Edgard Blücher, 1978.
31. RAMESH, C.K. & DATTA, T.K.. Ultimate strength of reinforced concrete slab-beam system - a new approach. Indian Concrete Journal. Bombay, 47: 301-308, Aug. 1973.
32. STRICKLIN, J.A.; HEISLER, W.E. & von RUSMAN, W.. Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically non-linear structural analysis. Journal of the A.I.A.A., 11: 292-299, 1973.
33. TAYLOR, R.; MAHER, D.R.H. & HAYES, B.. Effect of the arrangement of reinforcement on the behaviour of reinforced concrete slabs. Magazine of Concrete Res.. London 18(55): 85-94, Jun. 1966.
34. TIMOSHENKO, S.P. & WOINOWSKY-KREIGER, S.. Theory of Plates and Shells. 2. ed.. McGraw-Hill, 1959.
35. VAZ, L.E.. Solução de sistemas de equações não-lineares. Apostila. PUC-RJ.
36. VEBO, A. & GHALI, A.. Moment-curvature relation of reinforced concrete slabs. Journal of the Structural Division. New York, ASCE, 103(3): 515-531, Mar. 1977.
37. ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. & TOO, J.M.. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 3: 275-290, 1971.
38. ZIENKIEWICZ, O.C. & MORGAN, K.. Finite elements and approximations. New York, John Wiley & Sons, 1983. 327 p.
39. ZIENKIEWICZ, O.C.. The finite element method. 3. ed. London, McGraw-Hill, 1986. 787 p.