

À biblioteca da Matemática,
e a todos que forem
assim tão diferentes,

Paulo
sexta-feira, 13/03/92

SOBRE ALGUNS PROBLEMAS DE ESPALHAMENTO E
EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO NÃO LINEARES

por

PAULO RICARDO A. ZINGANO

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SOBRE ALGUNS PROBLEMAS DE ESPALHAMENTO E EQUAÇÕES
DE EVOLUÇÃO NÃO LINEARES

por

PAULO RICARDO A. ZINGANO

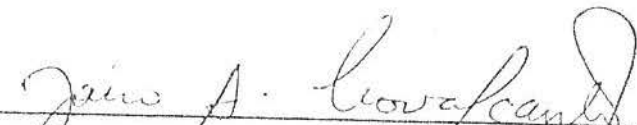
PAULO RICARDO DE ATILA ZINGANO

Dissertação submetida ao Departamento de Matemática da
Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção
do grau de

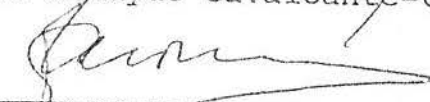
MESTRE EM MATEMÁTICA

03 de julho de 1986

Comissão Julgadora:



Jairo Athayde Cavalcante - Orientador



Carlos Antonio de Moura - Membro



David Goldstein Costa - Membro

A Clarice;
por 150 cartas

Abstract

In this work, it is presented the essential aspects of the theory of the inverse scattering transform and its applications to the study of nonlinear evolution equations. The scattering theory of the Schrödinger operator for either bump- or steplike potentials is considered first, and applications to the initial value problem for the Korteweg- de Vries equation are given. There follows a discussion of the scattering theory for AKNS systems, a class of spectral problems which is ultimately related to most of the interesting nonlinear evolution equations solvable by the inverse scattering method. A recently found integrable equation is discussed in the last chapter in connection with the scattering problem of Shimizu- Wadati.

Many important topics are not considered here, such as the periodic case for the Korteweg- de Vries equation, conservation laws, Hamiltonian formalisms, Bäcklund transformations, long-time asymptotic behavior of solutions, and perturbation theory.

Resumo

Neste trabalho, são apresentados os aspectos essenciais da teoria de espalhamento inverso e suas aplicações ao estudo de equações de evolução não lineares. A teoria de espalhamento do operador de Schrödinger para potenciais decaindo a limites definidos ao $x \rightarrow \pm \infty$ é considerada primeiro, com aplicações ao problema de valor inicial para a equação de Korteweg-de Vries. Segue uma discussão da teoria de espalhamento para sistemas AKNS, uma classe de problemas de autovalores direta ou indiretamente relacionada com a maior parte das equações de evolução não lineares solúveis pelo método de espalhamento inverso de interesse na prática. Uma equação não linear recentemente encontrada solúvel por esse método é discutida no último capítulo em conexão com o problema de espalhamento de Shimizu-Wadati.

Muitos tópicos importantes não são tratados aqui, incluindo o caso periódico da equação de Korteweg-de Vries, leis de conservação, formalismos Hamiltonianos, transformações de Bäcklund, comportamento assintótico das soluções ao $t \rightarrow \infty$ e teoria de perturbação.

Notação

| Símbolo | Significado |
|--------------------------------------|---|
| \mathbb{R} | conjunto dos números reais |
| $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^+$ | $\{\lambda \in \mathbb{R}: \lambda > 0\}$ |
| $\overline{\mathbb{R}}_+$ | $\{\lambda \in \mathbb{R}: \lambda \geq 0\}$ |
| $\mathbb{R}_-, \mathbb{R}^-$ | $\{\lambda \in \mathbb{R}: \lambda < 0\}$ |
| $\overline{\mathbb{R}}_-$ | $\{\lambda \in \mathbb{R}: \lambda \leq 0\}$ |
| \mathbb{C} | conjunto dos números complexos |
| $\text{Re } \lambda$ | parte real de λ |
| $\text{Im } \lambda$ | parte imaginária de λ |
| \mathbb{C}_+ | $\{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Im } \lambda > 0\}$ |
| $\overline{\mathbb{C}}_+$ | $\{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Im } \lambda \geq 0\}$ |
| \mathbb{C}_- | $\{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Im } \lambda < 0\}$ |
| $\overline{\mathbb{C}}_-$ | $\{\lambda \in \mathbb{C}: \text{Im } \lambda \leq 0\}$ |
| i | unidade imaginária: $i^2 = -1$ |
| λ^* | complexo conjugado de λ |
| f^* | conjugada complexa da função f |
| \equiv | igual, por definição ou notação |
| $A - B, A \setminus B$ | $\{w \in A: w \notin B\}$ |
| $A - 0, A \setminus 0$ | $\{w \in A: w \neq 0\}$ |
| $f _A$ | restrição da função f ao conjunto A . |
| f_i | i -ésima componente de $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ |
| $W [f, g]$ | Wronskiano de f, g |
| $f(\xi, \cdot)$ | $f(\xi, n)$ vista para ξ fixo como função de n |
| $\xi \rightsquigarrow f(\xi, \cdot)$ | aplicação ϕ tal que $\phi(\xi) = f(\xi, \cdot)$ |
| f', Df | derivada de f |
| $f^{(j)}, D^j f$ | j -ésima derivada de f |

Símbolo

Significado

$$f_{\xi}, \partial_{\xi} f$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}$$

$$\partial_{\xi}^n f$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial \xi^n}$$

$$\partial_{\xi \eta}^2 f$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\partial_{\xi}^p \partial_{\eta}^q f$$

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial \xi^p \partial \eta^q}$$

$$\partial_i f$$

derivada de f com respeito à i -ésima variável

$$C^0(A, B)$$

$\{f: A \rightarrow B : f \text{ é contínua em } A\}$

$$C^k(A, B)$$

$\{f: A \rightarrow B : f \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável em } A\}$

$$C^{\infty}(A, B)$$

$\{f: A \rightarrow B : f \text{ é } \infty\text{-vezes diferenciável em } A\}$

$$C^0_{\rightarrow 0}(A, B)$$

$\{f \in C^0(A, B) : f(x) \rightarrow 0 \text{ ao } |x| \rightarrow +\infty \text{ em } A\}$

$$L^1(A)$$

espaço de Lebesgue das funções $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ integráveis em A

$$L^2(A)$$

espaço de Lebesgue das funções $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ de quadrado integrável em A

$$L^{\infty}(A)$$

espaço de Lebesgue das funções mensuráveis $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ limitadas em A

| Símbolo | Significado |
|-------------------------------|--|
| $W^1(A)$ | $\{f \in L^2(A) : f' \in L^2(A)\}$ |
| $W^2(A)$ | $\{f \in L^2(A) : f'' \in L^2(A)\}$ |
| $\mathcal{L}(X, Y)$ | espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y |
| $\mathcal{L}(X)$ | $\mathcal{L}(X, X)$ |
| X^2 | produto cartesiano $X \times X$: $W^j(\mathbb{R})^2, L^p(A)^2, C^k(A, B)^2, \text{ etc.}$ |
| $ x _\infty$ | $\sup \{ x_1 , x_2 , \dots, x_n \}$ se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ |
| $ \cdot _p, \cdot _{L^p(A)}$ | norma de $L^p(A)$ |
| $ \cdot _{op}$ | norma de operadores |
| L^* | adjunto do operador L |
| $\rho(L)$ | conjunto resolvente de L |
| $\sigma(L)$ | espectro de L |
| $P\sigma(L)$ | espectro pontual de L |
| $[L, M]$ | comutador de L, M : $[L, M] = LM - ML$ |
| \mathcal{F}_λ | transformada de Fourier com respeito à variável λ : $\mathcal{F}_\lambda [f(x, \lambda)](x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda$ |

Símbolo

Significado

\int_{λ}^{-1}

transformada inversa de Fourier com respeito à variável λ :

$$\int_{\lambda}^{-1} [f(x, \lambda)] (x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \lambda) e^{i\lambda s} d\lambda$$

$H(x)$

função de Heavyside: $H(x) = 0$ se $x < 0$, $H(x) = 1$ se $x > 0$

cte

constante (não especificada):
cte + cte = cte, etc.

\sim

equivalência assintótica:

$$g(w) \sim f(w) \quad \text{ao } w \rightarrow w_0$$

$$\text{se } g(w) = h(w) f(w)$$

$$\text{com } h(w) \rightarrow 1 \quad \text{ao } w \rightarrow w_0$$

$o(f)$

infinitésimo frente a f :

$$g(w) = o(f(w)) \quad \text{ao } w \rightarrow w_0$$

$$\text{se } g(w) = h(w) f(w)$$

$$\text{com } h(w) \rightarrow 0 \quad \text{ao } w \rightarrow w_0$$

$O(f)$

de ordem não superior a f :

$$g(w) = O(f(w)) \quad \text{ao } w \rightarrow w_0$$

$$\text{se } g(w) = h(w) f(w)$$

com $h(w)$ limitada numa vizinhança de w_0

SUMÁRIO

| | |
|--|-----|
| INTRODUÇÃO | 1 |
| | |
| CAPÍTULO I - ESPALHAMENTO ASSOCIADO À EQUAÇÃO DE SCHRÖ- DINGER | 12 |
| §1 - Introdução | 12 |
| §2 - Teoria de espalhamento de Gelfand- Levitan- Faddeev- Marchenko | 14 |
| §3 - Método de espalhamento para a equação de Kor- teweg- de Vries | 18 |
| §4 - Exemplo de solução: n-solitons | 30 |
| §5 - Teoria de espalhamento de Buslaev- Fomin | 39 |
| §6 - Formalismo de Hruslov para a equação de Kor- teweg- de Vries | 42 |
| §7 - Aplicação à equação KdV com perfil de Heavyside | 47 |
| | |
| CAPÍTULO II - ESPALHAMENTO ASSOCIADO A SISTEMAS ZS-AKNS | 69 |
| §1 - Introdução | 69 |
| §2 - Teoria de espalhamento | 71 |
| §3 - Teoria espectral | 90 |
| §4 - Equação de Gelfand- Levitan- Marchenko | 111 |
| §5 - Método de espalhamento para a equação de Sine- Gordon | 129 |
| | |
| CAPÍTULO III - ESPALHAMENTO ASSOCIADO AO SISTEMA DE SHIMIZU- WADATI | 138 |
| §1 - Introdução | 138 |
| §2 - Teoria de espalhamento | 140 |
| §3 - Teoria espectral | 160 |
| §4 - Invariância do espectro | 167 |
| §5 - Espalhamento inverso | 179 |
| §6 - Aplicação à equação $iq_t + (q/\sqrt{1 + q ^2})_{xx} = 0$ | 188 |

INTRODUÇÃO

Com o surgimento dos computadores digitais e sua rápida evolução, um número cada vez maior de modelos não lineares puderam ser utilizados na descrição e investigação dos fenômenos naturais, em sua grande parte não lineares. A Matemática Não Linear foi-se impondo como uma área dominante de pesquisa, métodos analíticos e numéricos têm sido continuamente desenvolvidos, embora se esteja ainda longe de uma teoria suficientemente forte e abrangente, capaz de um tratamento sistemático a questões básicas como convergência e estabilidade de esquemas numéricos ou mesmo existência e regularidade de soluções. Mesmo assim, alguns procedimentos de análise relativamente abrangentes já foram obtidos, havendo inclinação em se afirmar que eventualmente se atingirá status similar ao da teoria linear.

O presente trabalho é uma rápida exposição sobre um desses métodos, descoberto quase por acaso por C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal e R.M. Miura há pouco mais de 15 anos [19]. Decorreu de modo inesperado das investigações que se seguiram ao célebre experimento de Fermi-Pasta-Ulam [18], um dos marcos básicos da moderna Física Não Linear. Motivados pelo novo MANIAC, E.Fermi, J.R. Pasta e S.M. Ulam estudaram numericamente o comportamento de um sistema de massas idênticas sujeitas a uma interação levemente não linear [14], [18]. A não ocorrência de equipartição de energia entre os diversos modos do sistema, que parecia natural frente à não linearidade das interações, permaneceu inexplicada por alguns anos, motivando diversos trabalhos [33] e culminando com a descoberta definitiva do *soliton* por N.J. Zabusky e M.D. Kruskal em 1965 [41]. Modelando o problema correspondente a interações quadráticas pela equação não linear de Korteweg-de Vries, que pode ser escrita em coordenadas convenientes como

$$(1) \quad u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad ,$$

verificaram numericamente que ondas solitárias dessa equação interagem entre si de uma forma quase linear preservando assintoticamente sua identidade [14], [41]. Esse comportamento corpuscular fez N.J. Zabusky e M.D. Kruskal denominarem tais soluções especiais de *solitons*, e experimentos numéricos subsequentes [42] levaram à conjectura de que toda solução $u(x, t)$ de (1) com $u(x, t) \rightarrow 0$ ao $x \rightarrow \pm \infty$ se decomporia para t grande num número finito de *solitons* [28]. Em outros termos, existia para a equação não linear (1) uma família especial de soluções capaz de descrever essencialmente soluções arbitrariamente gerais!

Motivados por esses surpreendentes resultados, de natureza *computacional*, C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal e R.M. Miura, numa série de sucessivas descobertas, elaboraram um método de solução para a equação de Korteweg- de Vries [19], [20], que permitiu em particular a comprovação parcial da conjectura de N.J. Zabusky [20], [31], [39]. O ponto básico desse método consiste na observação surpreendente de que, introduzindo-se $u(x, t)$ como potencial na equação unidimensional de Schrödinger

$$(2) \quad - \frac{d^2 \psi}{dx^2} + u(x, t) \psi = \lambda \psi ,$$

o espectro resultante é invariante com relação ao parâmetro t se $u(x, t)$ satisfizer (1) e condições de fronteira adequadas. A conexão da equação (1) com o problema quântico de espalhamento traduzido pela equação de Schrödinger (2) torna-se menos surpreendente se for notado que a interação experimentalmente observada entre *solitons* sugere algum tipo de fenômeno de espalhamento, seja clássico ou quântico [14]. A conservação da parte contínua do espectro de (2) é natural pela estabilidade do espectro essencial frente a perturbações compactas, ou fisicamente porque corresponde aos valores de energia admissíveis para os estados não ligados — e a energia de uma partícula livre que incide sobre o centro espalhador representado pelo potencial $u(x, t)$ pode sempre ser escolhida arbitrariamente. O que de fato surpreende é a conservação dos autovalores discre-

tos de multiplicidade finita. Isso significa que o espectro correspondente a um dado inicial $u(x, 0)$ torna-se o espectro para cada $t > 0$ — ou seja, o espectro é conhecido para cada t embora u seja dada apenas para $t = 0$. O problema de obter o potencial de (2) a partir do espectro e do comportamento assintótico de ψ havia sido resolvido dez anos antes por I.M. Gelfand, B.M. Levitan, V.A. Marchenko e outros [21], [29], sendo conhecido como o *problema inverso de espalhamento*. A conservação do espectro de (2) permita então a construção da solução $u(x, t)$ de (1) a partir de um esquema de espalhamento inverso! [19], [20], [31].

Impunha-se naturalmente a questão da particularidade desse método à equação de Korteweg- de Vries [31]. Em 1968, P.D. Lax apresentou um formalismo permitindo estender o método a outras equações de evolução não lineares [15], [28]. Um formalismo particularmente útil foi desenvolvido por M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell e H. Segur [1], [3], [4] permitindo o tratamento de algumas equações de relevância na Física Matemática [1], [33]. Com várias extensões e generalizações, o método ficou conhecido como *método de espelhamento inverso*, tendo tido importantes aplicações, incluindo por exemplo as equações de Korteweg- de Vries [9], [11], [19], [20], [32], [36], Korteweg- de Vries modificada [23], [35], [37], Sine-Gordon [3], [4], Schrödinger não linear [43], Boussinesq [12], [45] e Benjamin-Ono [5], [6].

No capítulo 1, é considerado o problema de espalhamento correspondente à equação de Schrödinger (2) para potenciais integráveis em \mathbb{R} contra $1 + x^2$. Originalmente, L.D. Faddeev [16], [17] considerou o problema para potenciais integráveis contra $1 + |x|$, porém sua descrição não estava inteiramente correta [10], [13], sendo corrigida somente recentemente [30]. Em §2, são apresentados alguns resultados simples da teoria de espalhamento, particularmente a equação de Gelfand- Levitan- Marchenko

$$(3) \quad \Omega(x + y, t) + B(x, y, t) + \int_0^{+\infty} \Omega(x + y + z, t) B(x, z, t) dz = 0$$

que permite a recuperação do potencial $u(x, t)$ via

$$(4) \quad u(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} B(x, 0, t) .$$

A função $\Omega(\xi, t)$ para cada t é obtida a partir do espectro de (2) e do comportamento assintótico das autofunções na fronteira $x \rightarrow \pm \infty$. Em §3, é mostrado que o espectro é invariante no tempo quanto u evolui conforme o regime não linear (1), seguindo essencialmente o argumento original [19], [20]. A condição adicional

$$(5) \quad u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad x \rightarrow \pm \infty$$

permite então que se obtenha facilmente $\Omega(\xi, t)$ a partir de $\Omega(\xi, 0)$. Assim, o método é particularmente adequado para o problema de Cauchy

$$(6) \quad \begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 0 \\ u(x, 0) &= U_0(x) \end{aligned}$$

quando o perfil inicial $U_0(x)$ faz cumprir (5). Para certos potenciais $U_0(x)$, a equação (3) é de núcleo separável e pode então ser resolvida por métodos algébricos. Fisicamente, isso corresponde à situação de inexistência de reflexão das ondas incidentes por parte do potencial (*reflectionless potentials*), e a solução $u(x, t)$ nesse caso fica resolvida para t grande numa seqüência pura de n pulsos solitários [20], um para cada autovalor do espectro discreto, constituindo um n -soliton (*pure n -soliton solutions*). Em §4, é mostrado a partir de uma análise simples que esse é o caso quando

$$(7) \quad U_0(x) = -n(n+1) \operatorname{sech}^2 x$$

e as soluções correspondentes são expressas utilizando a fórmula de Kay-Moses [26], [39]. Em §5 e §6, o método de espalhamento para (6) é estendido de modo a incluir o caso em que $u(x, t)$ de

cai a limites distintos ao $x \rightarrow \pm \infty$ (*steplike potentials*). Essa situação tem interesse prático [24] e, conforme era natural prever [31], conduz a um formalismo parecido. Essencialmente, na expressão do núcleo Ω da equação integral acima é acrescentado um termo que leva em conta a diferença entre os níveis de u na fronteira $x \rightarrow \pm \infty$. Contudo, o comportamento assintótico de $u(x, t)$ ao $t \rightarrow + \infty$ nesse caso não está completamente estudado [11], [24]. O método é aplicado em §7 para o problema

$$(8) \quad \begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 0 \\ u(x, 0) &= H(x) \end{aligned}$$

onde $H(x)$ é a função de Heavyside

$$(9) \quad H(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

obtendo-se uma solução $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ que satisfaz a condição inicial dada na medida em que

$$(10) \quad \int_a^b u(x, t) \, dx \rightarrow \int_a^b H(x) \, dx \quad \text{ao } t \rightarrow 0$$

para cada $a, b \in \mathbb{R}$ dados. A solubilidade da equação (3) é mostrada a partir do Teorema das Alternativas de Fredholm [40], e se aplica a condições iniciais mais gerais que a função de Heavyside, por exemplo [11]

$$(11) \quad U_0(x) = a_1 H(x-x_1) + a_2 H(x-x_2) + \dots + a_n H(x-x_n)$$

Na verdade, toda a análise apresentada é aplicável sempre que Ω apresentar propriedades de regularidade e decaimento adequadas, explicitadas na Proposição 7. Isso permite incluir por

exemplo pulsos arbitrários $U_0 \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ que decaiam a limites definidos ao $x \rightarrow \pm \infty$ de modo suficientemente rápido [11]. A comprovação da Proposição 7 para esses casos, contudo, é demasiadamente trabalhosa.

O método de solução acima para a equação de Korteweg-de Vries resulta de sua associação com o problema linear de autovalores

$$(12) \quad \mathbb{L}\psi = \lambda\psi, \quad \mathbb{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + u$$

correspondente à equação unidimensional de Schrödinger, onde u desempenha o papel do potencial. Em 1968, P.D. Lax [28] observou mais geralmente que o método é aplicável para equações de evolução

$$(13) \quad u_t = F(u)$$

onde o problema linear associado (para \mathbb{L}_0 fixo)

$$(14) \quad \mathbb{L}\psi = \lambda\psi, \quad \mathbb{L} = \mathbb{L}_0 + u$$

satisfaz

$$(15) \quad B\mathbb{L} - \mathbb{L}B = F(u)$$

para algum operador anti-simétrico B . Em 1971, V.E. Zakharov e A.B. Shabat [43] apresentaram a partir disso um esquema de espalhamento inverso para a solução do problema de valor inicial para a equação cúbica de Schrödinger

$$(16) \quad q_t - iq_{xx} - 2iq^2q^* = 0$$

associando o problema linear de autovalores

$$(17) \quad \mathbb{L}\psi = \lambda\psi, \quad \mathbb{L} = i \begin{vmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & q \\ -q^* & -\frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}$$

e obtendo a solução q a partir do problema de espalhamento corresponde a (17). Definitivamente, o método de espalhamento inverso não era particular à equação de Korteweg-de Vries! Em 1973, M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell e H. Segur consideraram mais geralmente o problema de espalhamento associado ao sistema

$$(18) \quad \mathbb{L}\psi = \lambda\psi, \quad \mathbb{L} = i \begin{vmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & q \\ r & -\frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}$$

que permitiu o tratamento por espalhamento inverso de uma larga classe de equações [1], [2], [3], [4]. Essa classe de problemas de espalhamento está relacionada direta ou indiretamente com a maior parte das equações de evolução não lineares de interesse solúveis pela técnica de espalhamento inverso [7].

No Capítulo 2, é desenvolvida em detalhe a teoria de espalhamento para o operador ZS-AKNS dado por (18), em paralelismo com a do operador de Schrödinger exposta sucintamente no Capítulo 1, estabelecendo-se na seção final um esquema de espalhamento inverso para a análise da equação de Sine-Gordon

$$(19) \quad u_{xt} = \sin u, \quad u \text{ real.}$$

Em §2, §3, é considerado o problema direto de espalhamento para (18) e em particular a determinação do espectro a partir dos potenciais $q(x, t)$, $r(x, t)$. Os autovalores de (18) são o conjunto \mathbb{R} dos números reais (o espectro contínuo) acrescido

possivelmente de um conjunto limitado, tipicamente finito, de autovalores complexos de multiplicidade um (o espectro discreto). Para λ real, as autofunções $\psi^{[1]}$, $\psi^{[2]}$ podem ser tomadas com o comportamento

$$(20) \quad \psi^{[1]}(x, t; \lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

$$\sim a(\lambda, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + b(\lambda, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty$$

$$(21) \quad \psi^{[2]}(x, t; \lambda) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

$$\sim \tilde{a}(\lambda, t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \tilde{b}(\lambda, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty$$

onde ficam definidos os coeficientes $a(\lambda, t)$, $\tilde{a}(\lambda, t)$, $b(\lambda, t)$, $\tilde{b}(\lambda, t)$. Para os autovalores discretos, $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, pode-se tomar

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

com

$$(22) \quad \psi(x, t; \lambda_k) \sim \gamma_k(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda_k x} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

$$\sim \delta_k(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda_k x} \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty$$

e a condição de normalização

$$(23) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x, t; \lambda_k) \psi_2(x, t; \lambda_k) dx = 1.$$

O espectro discreto $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$, junto com os coeficientes $\delta_k(t)$ e os coeficientes de transmissão $a(\lambda, t)$, $\tilde{a}(\lambda, t)$ e reflexão $b(\lambda, t)$, $\tilde{b}(\lambda, t)$, constituem os *dados de espalhamento* do operador ZS-AKNS correspondentes aos potenciais $q(x, t)$, $r(x, t)$. O problema inverso consiste em obter os potenciais a partir dos dados de espalhamento, ou seja, realizar a operação

$$(24) \quad \left\{ \{\lambda_k, \delta_k(t)\}_{k=1}^N; a(t, \lambda), \tilde{a}(t, \lambda), b(t, \lambda), \tilde{b}(t, \lambda) \right\} \longrightarrow \{q(x, t), r(x, t)\}$$

que é analisada em §4. Os potenciais são obtidos via

$$(25) \quad \begin{aligned} q(x, t) &= -B_1(x, 0, t) \\ r(x, t) &= -\tilde{B}_2(x, 0, t) \end{aligned}$$

para $B \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, $\tilde{B} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}$ soluções das equações de Gelfand- Levitan- Marchenko

$$(26) \quad B(x, y, t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\Omega}(x+y, t) + \int_0^{+\infty} \tilde{\Omega}(x+y+z, t) \tilde{B}(x, z, t) dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(27) \quad \tilde{B}(x, y, t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Omega(x+y, t) + \int_0^{+\infty} \Omega(x+y+z, t) B(x, z, t) dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde $\Omega(\xi, t)$, $\tilde{\Omega}(\xi, t)$ são construídas a partir dos dados de espalhamento. A solubilidade das equações (26), (27) é garantida impondo-se condições sobre q, r ; a solução pode não ser única [4] mas em qualquer caso (25) pode ser executado para soluções apropriadas B, \tilde{B} .

Sistemas ZS-AKNS de ordem n são da forma

$$(28) \quad \frac{d\psi}{dx} = \lambda J \psi + R(x)\psi$$

onde $J = \text{diag} (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ para $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ complexos distintos e $R(x)$ tem diagonal nula [7]. Para o sistema de Shimizu-Wadati [34], que aparece em conexão com a equação de evolução

$$(29) \quad iq_t + \left(\frac{q}{1 + |q|^2} \right)_{xx} = 0$$

apresentada no Capítulo 3, J é matriz não constante e seus autovalores dependem explicitamente do potencial $q(x, t)$. Essa diferença não chega a ser fundamental no estudo do problema de espalhamento, como apresentado no Capítulo 3, porém o potencial está relacionado com a solução da equação de Gelfand-Levitan-Marchenko por uma equação integral não linear de difícil solução em geral. Em alguns casos, é possível reduzir o problema a uma equação algébrica não linear, e em §6 esse procedimento é seguido para a obtenção de 1-solitons da equação de Shimizu-Wadati (29).

Resta finalmente destacar a contribuição particularmente dada nesse trabalho. No Capítulo 1, a Proposição 3 é não encontrada nas referências utilizadas e ilustra de modo interessante a obtenção de informação sobre a equação não linear de evolução a partir do problema de espalhamento associado — o princípio básico do método de espalhamento. Os Teoremas 1, 2 são enunciados com hipóteses mais fracas que o modo

usual. §4 fornece um tratamento simples para o problema quântico de espalhamento associado a uma família de potenciais do tipo $\text{sech}^2 x$, e deve ser encarado como um exercício de cálculo explícito de autovalores e dados de espalhamento. A idéia originou-se em última instância de extensões feitas a partir de [27], Ch.2, Exercício 11. §7 preocupa-se fundamentalmente em fornecer os detalhes não triviais omitidos em [11], a referência básica nessa seção, vários adaptados de [9], [17], [32], [36]. O Capítulo 2, exceto §5, é resultado da adaptação dos argumentos familiares referentes ao operador de Schrödinger ao sistema ZS-AKNS, sendo a maior parte dos resultados sugeridos em [15], Ch.5. §5 fornece detalhes não presentes em [2] a respeito da aplicação do método à equação de Sine-Gordon, particularmente um modo natural de obter as leis de evolução dos dados de espalhamento. Finalmente, o Capítulo 3, exceto por §6, reescreve quase inteiramente o artigo [34], resolvendo os problemas de rigor aí encontrados. Alguns resultados foram acrescentados ou enriquecidos, como o Teorema da Invariância do Espectro (Teorema 19) e a análise do comportamento das funções de Jost para valores grandes do parâmetro (Teorema 5). Ambos envolvem a análise por métodos elementares do comportamento de soluções de sistemas de equações diferenciais com respeito a parâmetros que intervêm na formulação desses sistemas ou nas condições iniciais, apresentando interesse por si mesmos. A seção §6, contudo, segue inteiramente a análise de T. Shimizu e M. Wadati apresentada em [34].

Por último, seria injustiça não expressar reconhecido agradecimento a todo o Departamento de Matemática da Universidade de Brasília pelo excelente ambiente de estudo ali propiciado e em especial ao professor Jairo Athayde Cavalcante pela orientação segura e os seminários sempre proveitosos a que gentilmente se dispôs durante esse período. Também a Eliene Sulzbacher fica registrado meu sincero agradecimento pelo paciente trabalho de datilografia.

Porto Alegre, 20 de abril de 1986.

CAPÍTULO I

ESPALHAMENTO ASSOCIADO À EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER

§1 - Introdução

Neste capítulo, será apresentada a teoria de espalhamento associado ao problema de autovalores

$$-\frac{d^2}{dx^2} \psi + u(x)\psi = \lambda\psi$$

correspondente à equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo, tendo em vista sua aplicação ao problema de Cauchy não linear

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0) \quad (1)$$

(I)

$$u(x, 0) = U_0(x) \quad (2)$$

Em §2, §3 é considerado o caso $U_0(x) \rightarrow 0$ ao $x \rightarrow \pm \infty$, historicamente o primeiro a ser resolvido via essa teoria, numa descoberta notável que deu significativo impulso ao estudo de alguns problemas não lineares. A teoria de espalhamento correspondente é apresentada em §2. Isso consiste na análise e descrição de certos parâmetros (que incluem por exemplo os autovalores) associados à equação de Schrödinger e o estudo das inter-relações desses parâmetros com o potencial $u(x)$ — de modo especial aqui como esse último pode ser caracterizado (obtido) a partir dos primeiros. Omite-se detalhes desnecessários e as demonstrações mais longas, que podem ser facilmente encontrados nas referências citadas ou adaptados dos capítulos posteriores. Em §3 esses resultados são aplicados na construção de um método exato de solução para (I), o *método de espalhamento inverso*, seguindo essencialmente os trabalhos origi-

nais [19], [20]. Algumas soluções especiais são então obtidas em §4, servindo de ilustração ao importante conceito de *soliton*. Finalmente, nas seções §5, §6 estende-se o tratamento descrito em §2, §3 visando a incluir o caso em que $U_0(x)$ decai a limites diferentes ao $x \rightarrow \pm \infty$, sendo feita uma aplicação detalhada em §7 tomando-se para $U_0(x)$ a função de Heavyside, com ênfase no rigor da aplicação do método.

O princípio geral é apresentar os resultados com clareza e detalhe, eventualmente melhorados ou enriquecidos, omitindo-se as demonstrações sempre que estas sejam encontradas em suficiente detalhe na literatura utilizada, referida no texto.

§2 - Teoria de Espalhamento de Gelfand - Levitan
- Faddeev - Marchenko

Nesta seção, é descrita a teoria de espalhamento utilizada para a solução do problema (I), seguindo [20], no caso de o perfil inicial $U_0(x)$ decair a zero ao $x \rightarrow \pm \infty$. Uma discussão mais detalhada pode ser vista em [15], [16].

Sendo

$$u \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

tal que

$$u(x) \rightarrow 0 \text{ ao } x \rightarrow \pm \infty$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)| (1 + x^2) dx < +\infty$$

tomado como potencial na equação de Schrödinger

$$(3) \quad -D^2\psi + u\psi = k^2\psi \quad (D \equiv \frac{d}{dx}, k \in \overline{\mathbb{C}}_+),$$

considera-se as funções de Jost

$$f_+(\cdot, k), f_-(\cdot, k) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

que são as soluções de (3) com

$$(4+) \quad f_+(x, k) \sim e^{ikx} \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty$$

$$f'_+(x, k) \sim ik e^{ikx}$$

$$f_-(x, k) \sim e^{-ikx}$$

$$(4-) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

$$f'_-(x, k) \sim -ik e^{-ikx}$$

A existência dessas funções pode ser mostrada transformando (3) numa equação de Volterra. O esquema iterativo usual de solução fornece estão ([15], Ch.4)

$$f_+, f_- \in C^2(\mathbb{R} \times \overline{C_+}, \mathbb{C})$$

com

$$f_+(x, \cdot), f_-(x, \cdot) \text{ analíticas em } C_+$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

De (4) resulta nos $k \in \mathbb{R} - 0$ que $f_+(\cdot, k), f_+^*(\cdot, k)$ formam uma base de soluções para (3), de modo que

$$(5) \quad f_-(x, k) = a_+(k) f_+^*(x, k) + b_+(k) f_+(x, k) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Os coeficientes $a_+(k), b_+(k)$ aqui introduzidos possuem várias propriedades e desempenham um papel importante na teoria de espalhamento de (3). Observando que o wronskiano $w[f_1, f_2] \equiv f_1 f_2' - f_1' f_2$ de duas soluções quaisquer f_1, f_2 da equação de Schrödinger (3) independe de x , resulta de (4), (5) a representação

$$a_+(k) = \frac{1}{2ik} w [f_-(\cdot, k), f_+(\cdot, k)]$$

$$b_+(k) = \frac{1}{2ik} w [f_+^*(\cdot, k), f_-(\cdot, k)]$$

$$\forall k \text{ real } \neq 0,$$

de onde a_+ pode ser estendido analiticamente a C_+ . O mesmo raciocínio aplicado a $w[f_-, f_-^*]$ fornece

$$|a_+(k)|^2 = 1 + |b_+(k)|^2 \quad \forall k \text{ real } \neq 0,$$

o que permite escrever

$$(6) \quad T_+(k) f_-(\cdot, k) = f_+^*(\cdot, k) + R_+(k) f_+(\cdot, k)$$

onde

$$T_+(k) \equiv \frac{1}{a_+(k)}, \quad R_+(k) \equiv \frac{b_+(k)}{a_+(k)},$$

k real $\neq 0$,

tendo-se $T_+ \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $R_+ \in L^2(\mathbb{R})$.

A equação (3) corresponde ao problema de autovalores do operador autoadjunto

$$\mathbb{L}: W^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

dado por

$$(7) \quad \mathbb{L}[\phi] \equiv -\phi'' + u\phi$$

onde $W^2(\mathbb{R}) \equiv \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f'' \in L^2(\mathbb{R})\}$.

Pode-se mostrar ([15], Ch.4) que os autovalores de (7) (ou equivalente (3)), se existirem, formam um conjunto finito $\{-\kappa_1^2, -\kappa_2^2, \dots, -\kappa_N^2\}$, onde $i\kappa_1, i\kappa_2, \dots, i\kappa_N$ são precisamente os zeros em \mathbb{C}_+ do coeficiente $a_+(k)$. Ademais, cada autovalor $\lambda_j = (i\kappa_j)^2$ é simples, sendo as funções reais

$$f_+(\cdot, i\kappa_j), f_-(\cdot, i\kappa_j)$$

autofunções associadas a λ_j . Segue então de (4) que as autofunções de (3) decaem exponencialmente ao $x \rightarrow \pm \infty$.

Definindo $c_j > 0$ via

$$c_j^{-2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_+(x, i\kappa_j)^2 dx,$$

obtêm-se as autofunções normalizadas

$$\psi_j(\cdot) = c_j f_+(\cdot, i\kappa_j),$$

e os parâmetros $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_N, c_1, c_2, \dots, c_N$, juntamente

com as funções $R_+(k)$, $T_+(k)$ constituem os dados de espalhamento do operador de Schrödinger correspondente ao potencial u . Potenciais distintos têm dados de espalhamento diferentes [16], e a determinação do potencial $u(x)$ associado a um conjunto de dados de espalhamento dado constitui o chamado *problema inverso de espalhamento*, de importância fundamental para o método de solução de (I) a ser descrito em §3. Esquemáticamente, define-se a função real [15]

$$(8) \quad \Omega_+(z) \equiv 2 \sum_{j=1}^N c_j^2 e^{-2\kappa_j z} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_+(k) e^{2ikz} dk, \quad z \in \mathbb{R},$$

e considera-se para cada $x \in \mathbb{R}$ a única solução [17] $B_+(x, \cdot)$ em $L^2(0, +\infty)$ da equação

$$\Omega_+(x+y) + B_+(x, y) + \int_0^{+\infty} \Omega_+(x+y+z) B_+(x, z) dz = 0$$

(Gelfand - Levitan - Marchenko),

tendo-se então [15]

$$B_+ \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$$

com

$$u(x) = -\frac{\partial}{\partial x} B_+(x, 0)$$

A obtenção da solução B_+ permite portanto a recuperação do potencial $u(x)$ associado aos dados de espalhamento considerados.

§3 - Método de Espalhamento para a Equação de Korteweg-de Vries

Se, na seção precedente, o potencial u depender de um parâmetro adicional t , ou seja, $u = u(x, t)$, os dados de espalhamento correspondentes dependerão em geral desse parâmetro. A descoberta notável de C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal e R.M. Miura [19], que permitiu a elaboração de um método exato de solução para diversas equações não lineares, foi que se $u(x, t)$ evoluir em classe adequada conforme a equação de Korteweg-de Vries (1) então os autovalores de (3) não dependerão do parâmetro t , e os demais coeficientes de espalhamento evoluirão segundo leis simples [15], [19], [20], [31]. Conhecidos os dados de espalhamento para cada t , a técnica de espalhamento inverso exposta no final da seção anterior pode então ser utilizada para a determinação da solução $u(x, t)$.

Mais precisamente, a análise de [15], [20] permite concluir

TEOREMA 1 (J.M. Greene, C.S. Gardner, M.D. Kruskal, R.M. Miura, 1967)

Sendo

$$u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$$

solução da equação de Korteweg-de Vries

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

tal que

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)| dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u_t(x, t)| dx$$

convergem uniformemente em t sobre compactos $\underline{C} \overline{\mathbb{R}}_+$

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)| (1 + |x|) dx \quad \text{converge para cada} \\ t \geq 0 \quad \text{dado}$$

e

(iii) para cada $t \geq 0$ fixado

$$u(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R})$$

e

$$u_x(\cdot, t) = O(e^{-\alpha|x|}) \quad \text{ao } x \rightarrow \pm \infty$$

para cada $\alpha > 0$

ENTÃO

o espectro do operador de Schrödinger

$$\mathbb{L}(t) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + u(x, t)$$

independe de t , e também o espectro pontual de $\mathbb{L}(t)$ independente de t .

PROVA

Para cada t , o espectro de $\mathbb{L}(t)$ contém $]0, +\infty[$: de fato, dado $\lambda = k^2$, $k > 0$, tomando $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(x) = 1$ para $|x| \leq 1$ e $\theta(x) = 0$ para $|x| \geq 2$, e considerando

$$\theta_n(x) \equiv \theta\left(\frac{x}{n}\right),$$

tem-se ao $n \rightarrow +\infty$

$$\|\theta_n \cdot f_+(\cdot, k; t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow +\infty$$

enquanto

$$(\mathbb{L}(t) - \lambda) [\theta_n f_+] = - [2f'_+ \theta'_n + f_+ \theta''_n]$$

fornece

$$\|(\mathbb{L} - \lambda) [\theta_n f_+]\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0 \quad \text{ao } n \rightarrow +\infty$$

Em particular, $[0, +\infty[$ faz parte do espectro de L . Ademais, claramente $]0, +\infty[$ não contém autovalores, já que para $\lambda = k^2$, $k > 0$, tem-se $f_+(x, k; t)$, $f_+^*(x, k; t)$ linearmente independentes comportando-se oscilatoriamente ao $x \rightarrow +\infty$ e descrevendo todas as soluções em $W^2(\mathbb{R})$ de (3). Um raciocínio desse tipo mostra que $\lambda = 0$ também não é autovalor: de fato, a condição (ii) garante a existência das funções de Jost f_+ , f_- para $k = 0$, e tomando (para x_0 grande)

$$g(x) \equiv f_+(x, 0; t) \int_{x_0}^x f_+(\xi, 0; t)^{-2} d\xi, \quad x \geq x_0,$$

obtêm-se uma base de soluções f_+ , g no $[x_0, +\infty[$ em que nenhuma das funções é de quadrado integrável. Portanto, $[0, +\infty[$ faz parte do espectro contínuo de L , para cada $t \geq 0$. O restante do espectro é formado pelos autovalores, que correspondem aos quadrados dos zeros em \mathbb{C}_+ da função analítica $a_+(\cdot, t)$ introduzida em §2, todos simples e isolados ([15], ch. 4). Sendo L autoadjunto, resulta em particular que todos tais zeros são imaginários puros.

Seja então $\lambda_0 = -\kappa_0^2$, $\kappa_0 > 0$, um autovalor qualquer de $L(0)$, fixado no que segue.

Da condição (i) resulta [15]

$$a_+ \in C^1(\mathbb{C}_+ \times [0, +\infty[, \mathbb{C})$$

enquanto

$$a_+(i\kappa_0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial a_+}{\partial k}(i\kappa_0, 0) \neq 0$$

Segue do teorema da função implícita que existe

$$\kappa \in C^1([0, \delta], \mathbb{R}_+), \quad \delta > 0,$$

tal que

$$a_+(i\kappa(t), t) = 0 \quad \forall t \in [0, \delta]$$

Tem-se assim uma trajetória C^1 de autovalores $\lambda(t) = -\kappa(t)^2$, $0 \leq t \leq \delta$, sendo $f_+(\cdot, i\kappa(t), t)$, $f_-(\cdot, i\kappa(t); t)$ autofunções correspondentes [15]. Considere então para cada $t \in [0, \delta]$ as autofunções normalizadas

$$\Psi(x, t) \equiv c(t) f_+(x, i\kappa(t); t)$$

onde

$$c(t) \equiv \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_+(x, i\kappa(t); t)^2 dx \right)^{-2}$$

Do comportamento de f_+ resulta imediato que

$$c \in C^1([0, \delta], \mathbb{R}_+)$$

e em particular

$$\Psi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \delta], \mathbb{R}).$$

Definindo então [20]

$$M(x, t) \equiv \Psi_t(x, t) - 2(u(x, t) + 2\lambda(t)) \Psi_x(x, t) + u_x(x, t) \Psi(x, t)$$

obtém-se de um cálculo direto

$$(*) \quad \mathcal{L}(t) M = \lambda_t \Psi,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \lambda_t \Psi^2 &= -\Psi M_{xx} + (u - \lambda) \Psi M = \\ &= -\Psi M_{xx} + \Psi_{xx} M = (M \Psi_x - \Psi M_x)_x. \end{aligned}$$

Integrando de $-\infty$ a $+\infty$, segue então

$$\lambda_t = 0, \quad 0 \leq t \leq \delta,$$

se for mostrado que

$$(**) \quad M\psi_x - \psi M_x \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad x \rightarrow \pm \infty:$$

Da construção de f_x , resulta imediato que

$\psi, \psi_x, \psi_t \rightarrow 0$ exponencialmente ao $x \rightarrow \pm \infty$ e então, em vista de (iii), obtém-se da definição acima de $M(x, t)$ que

$$M(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{exponencialmente ao} \quad x \rightarrow \pm \infty,$$

Segue então de (*) que o mesmo ocorre com $M_{xx}(x, t)$, resultando então por um argumento de interpolação

$$M_x(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad x \rightarrow \pm \infty,$$

o que conclui a prova de (**).

Portanto,

$$\lambda(t) = \lambda_0 \quad \forall t \in [0, \delta],$$

e repetindo sucessivamente o raciocínio acima obtém-se afinal que

$$\lambda_0 \text{ é autovalor de } \mathbb{L}(t) \text{ para todo } t \geq 0.$$

Finalmente, o mesmo raciocínio mostra que autovalores novos não podem ser criados, ou seja, se λ_1 é autovalor de $\mathbb{L}(t_1)$ para algum $t_1 > 0$, então em verdade λ_1 é autovalor de \mathbb{L} para todo t .

QED

A invariância do espectro e o conhecimento de que $u(x, t) \rightarrow 0$ na fronteira $x \rightarrow \pm \infty$ (Proposição 3) permitem estudar a evolução dos parâmetros de espalhamento.

TEOREMA 2

Sendo

$$u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$$

solução da equação de Korteweg-de Vries (1)

com

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)| dx \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x(x, t)| dx$$

são uniformemente convergentes (em t) nos compactos $\underline{C} [0, +\infty[$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)| (1 + |x|) dx \text{ converge para cada } t \geq 0$$

$$(iii) u(\cdot, t), u_x(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R})$$

uniformemente (em t) nos compactos $\underline{C} [0, +\infty[$

ENTÃO

os dados de espalhamento

$$k_1(t), k_2(t), \dots, k_N(t)$$

$$c_1(t), c_2(t), \dots, c_N(t)$$

$$T_+(k, t)$$

$$R_+(k, t)$$

evoluem nos $t \in [0, +\infty[$ conforme

$$k_j(t) = k_j(0)$$

$$c_j(t) = c_j(0) e^{4ik_j^3 t} \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$T_+(k, t) = T_+(k, 0)$$

$$R_+(k, t) = R_+(k, 0) e^{8ik^3 t} \quad (k \text{ real } \neq 0)$$

O resultado abaixo ilustra o tipo de argumento utilizado, além de atuar como lema para a proposição acima:

PROPOSIÇÃO 3

Sendo

$$u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$$

solução da equação de Korteweg- de Vries

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)| dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x(x, t)| dx \quad \text{são uniformemente} \\ \text{convergentes nos compactos } \underline{C} \quad [0, +\infty[,$$

ENTÃO

- (i) se para algum $t \geq 0$
valer

$$u(\cdot, t), u_x(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R})$$

então

se terá

$$u(x, t) \rightarrow 0$$

ao $x \rightarrow \pm \infty$

$$u_x(x, t) \rightarrow 0$$

- (ii) se

$$u(\cdot, t), u_x(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R})$$

uniformemente (em t) sobre compactos $\underline{C} \quad [0, +\infty[$

então

os limites de (i) serão uniformes (em t) sobre compactos $\underline{C} \quad [0, +\infty[$.

PROVA

Sendo $t_0 \in [0, +\infty[$ tal que

$$u(\cdot, t_0), u_x(\cdot, t_0) \in L^\infty(-\infty, 0)$$

considere para os $t \geq 0$ a solução $\psi(\cdot, t) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ da equação de Schrödinger

$$-\psi''(x) + (u(x, t) - 1)\psi(x) = 0$$

dada por

$$\psi(x, t) = T_+(l, t) f_-(x, l, t).$$

Sendo

$$M(x, t) \equiv \psi_t(x, t) - 2(u(x, t) + 2)\psi_x(x, t) + u_x(x, t)\psi(x, t)$$

tem-se [15], [20]

$$M \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{C})$$

$$M(\cdot, t) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad \text{para cada } t \geq 0$$

e

$$-M_{xx} + (u - 1)M = 0;$$

em particular, $M(\cdot, t_0)$ pode ser escrita como uma combinação linear das soluções $f_-(\cdot, l; t_0), f_-^*(\cdot, l; t_0)$.

Das hipóteses acima pode-se mostrar que

$$M(x, t_0) = \left[\frac{\partial T_+}{\partial t}(l, t_0) + T_+(l, t_0) (2iu(x, t_0) + 4i + u_x(x, t_0)) \right] e^{-ix} + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

e em particular, como

$$f_-^*(x, l; t_0) \sim e^{ix} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty,$$

decorre que

$$M(\cdot, t_0) = \tilde{A}(t_0) \cdot f_-(\cdot, l; t_0) = A(t_0) \cdot \psi(\cdot, t_0)$$

para algum $A(t_0) \in \mathbb{C}$; tem-se assim

$$\psi_t(x, t_0) = 2(u(x, t_0) + 2) \psi_x(x, t_0) + (A(t_0) - u_x(x, t_0)) \cdot \psi(x, t_0)$$

nos $x \in \mathbb{R}$

Observando que [15]

$$\begin{aligned} \text{ao } x \rightarrow -\infty: \quad f_-(x, l; t_0) &\sim e^{-ix} \\ f'_-(x, l; t_0) &= o(1) \\ \frac{\partial f_-}{\partial t}(x, l; t_0) &= o(1) \\ u(x, t_0) &= O(1) \\ u_x(x, t_0) &= O(1), \end{aligned}$$

decorre então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\partial T_+}{\partial t}(l, t_0) + 2iu(x, t_0) + 4i - A(t_0) + u_x(x, t_0) \right] = 0$$

Escrevendo

$$\frac{\partial T_+}{\partial t}(l, t_0) = \gamma_1(t_0) + i\gamma_2(t_0)$$

$$A(t_0) = A_1(t_0) + iA_2(t_0)$$

$$(\gamma_1, \gamma_2, A_1, A_2 \in \mathbb{R})$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\gamma_1(t_0) - A_1(t_0) + u_x(x, t_0) \right] = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\gamma_2(t_0) + 4 + 2u(x, t_0) - A_2(t_0) \right] = 0,$$

de onde

$$u(x, t_0) \rightarrow 0$$

ao $x \rightarrow -\infty$

$$u_x(x, t_0) \rightarrow 0$$

já que

$$u(\cdot, t_0) \in L^1(-\infty, 0).$$

De modo análogo, de

$$u(\cdot, t_0), u_x(\cdot, t_0) \in L^\infty(0, +\infty)$$

decorre que

$$\begin{aligned} u(x, t_0) &\rightarrow 0 \\ u_x(x, t_0) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty,$$

o que prova (i). Para (ii), basta observar que a uniformidade (em t) de convergência das integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)| dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u_t(x, t)| dx$$

garante uniformidade nas relações acima.

QED

Os resultados apresentados até aqui permitem a construção de um processo de solução para o problema de Cauchy (I), se o perfil inicial $U_0(x)$ for suficientemente adequado de modo a se ter a solução $u(x, t)$ evoluindo nas classes indicadas pelos teoremas acima [32]. A solução nesse caso é única, conforme o resultado abaixo, devido a P.D. Lax [28].

TEOREMA 4 (P.D. Lax, 1968)

Sendo

$u_1, u_2 \in C^1(\mathbb{R} \times I, \mathbb{R})$, I intervalo $\subset \mathbb{R}$, soluções da equação de Korteweg-de Vries

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, t \in I)$$

com

(i) $\int_{-\infty}^{+\infty} |u_i(x, t)| dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, t) \right| dx, \quad i = 1, 2,$
uniformemente convergentes (em t) sobre compactos $\subset I$

$$(ii) \quad u_i(\cdot, t), \frac{\partial u_i}{\partial x}(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2,$$

uniformemente (em t) sobre compactos $\underline{C} \ I$

$$(iii) \quad u_1(x, t_0) = u_2(x, t_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

para algum $t_0 \in I$

ENTÃO

$$u_1 = u_2 \quad \text{em } \mathbb{R} \times I.$$

Formalmente, o processo de construção para a solução de (I) pode ser resumido como segue:

- *Espalhamento direto*: introduz-se o perfil inicial $U_0(x)$ como potencial na equação de Schrödinger

$$-\phi'' + (U_0 - \lambda)\phi = 0,$$

determinando-se os dados de espalhamento correspondentes

$$k_1, k_2, \dots, k_N$$

$$c_1, c_2, \dots, c_N$$

$$R_+(k)$$

- *Evolução dos parâmetros de espalhamento*: para cada $t > 0$ considera-se como dados de espalhamento

$$k_1, k_2, \dots, k_N$$

$$c_1 e^{4k_1^3 t}, c_2 e^{4k_2^3 t}, \dots, c_N e^{4k_N^3 t}$$

$$R_+(k) e^{8ik^3 t}$$

- *Espalhamento inverso*: pela equação de Gelfand-

-Levitan-Marchenko determina-se o potencial $u(x,t)$ correspondente aos dados de espalhamento acima.

Seguindo o formalismo acima, A.Cohen [9] construiu rigorosamente soluções para a equação de Korteweg- de Vries no caso

$$U_0 \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

$$U_0^{(4)} \text{ seccionalmente contínua em } \mathbb{R},$$

com

$$U_0^{(j)}(x) = O(|x|^{-N}) \quad \text{ao } x \rightarrow \pm \infty$$

para algum $N > 10$,

para cada $j = 0, 1, 2, 3, 4$,

obtendo resultados de regularidade e decaimento para a solução $u(x, t)$ que justificam rigorosamente o método de espalhamento inverso em caso de condições iniciais como acima. Uma análise similar é apresentada em §6 para o caso

$$U_0(x) = H(x)$$

onde $H(x)$ denota a função de Heavyside

$$H(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

§4 - Exemplo de Solução: n - Solitons

Nesta seção, os métodos das seções precedentes serão aplicados para a produção de soluções especiais da equação de Korteweg- de Vries (solitons).

A análise parte de uma observação básica devida a G. Darboux [25]:

sendo

y, \tilde{y} soluções de

$$- y'' + u(x)y = \lambda y$$

$$- \tilde{y}'' + u(x)\tilde{y} = \tilde{\lambda}\tilde{y}, \text{ respectivamente,}$$

então

$$z = y' - y \cdot \frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}}$$

é solução de

$$- z'' + \tilde{y} \cdot \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right)'' z = (\lambda - \tilde{\lambda})z.$$

Considerando $u(x) = 0$,
tem-se

$$y_0 = e^{\pm i\sqrt{\lambda} x}$$

é solução de

$$- y_0'' = \lambda y_0$$

enquanto

$$\tilde{y}_0 = \cosh x$$

$$\text{resolve } \tilde{y}_0'' = \tilde{\lambda} \tilde{y}_0 \quad (\tilde{\lambda} = -1);$$

em particular,

$$y_1 \equiv y_0' - y_0 \frac{\tilde{y}_0'}{\tilde{y}_0} = \left(\frac{d}{dx} - \operatorname{tgh} x \right) y_0$$

é solução de

$$- y_1'' - 2 \operatorname{sech}^2 x \cdot y_1 = \lambda y_1$$

Tomando-se agora

$$u(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x$$

e observando que

$$\tilde{y}_1 = \cosh^2 x$$

resolve

$$\tilde{y}_1'' + 2 \operatorname{sech}^2 x \cdot \tilde{y}_1 = 4 \tilde{y}_1 \quad (\tilde{\lambda} = -4),$$

resulta que

$$\begin{aligned} y_2 &\equiv y_1' - y_1 \cdot \frac{\tilde{y}_1'}{\tilde{y}_1} = \left(\frac{d}{dx} - 2 \operatorname{tgh} x \right) y_1 = \\ &= \left(\frac{d}{dx} - 2 \operatorname{tgh} x \right) \left(\frac{d}{dx} - \operatorname{tgh} x \right) e^{\pm i \sqrt{\lambda} x} \end{aligned}$$

é solução de

$$- y_2'' - 6 \operatorname{sech}^2 x \cdot y_2 = \lambda \cdot y_2$$

Analogamente,

$$\tilde{y}_2 = \cosh^3 x$$

resolve

$$\tilde{y}_2'' + 6 \operatorname{sech}^2 x \cdot \tilde{y}_2 = 9 \tilde{y}_2 \quad (\tilde{\lambda} = -9)$$

e então

$$y_3 \equiv y_2' - y_2 \cdot \frac{\tilde{y}_2'}{\tilde{y}_2} = \left(\frac{d}{dx} - 3 \operatorname{tgh} x \right) y_2$$

é solução de

$$- y_3'' - 12 \operatorname{sech}^2 x \cdot y_3 = \lambda y_3$$

Em geral,

para cada $n \geq 1$

tem-se que

$$Y_n \equiv \left(\frac{d}{dx} - n \operatorname{tgh} x \right) \left(\frac{d}{dx} - (n-1) \operatorname{tgh} x \right) \dots \left(\frac{d}{dx} - 2 \operatorname{tgh} x \right) \left(\frac{d}{dx} - \operatorname{tgh} x \right) e^{\pm i \sqrt{\lambda} x}$$

resolve

$$- Y_n'' - n(n+1) \operatorname{sech}^2 x Y_n = \lambda Y_n$$

para cada $\lambda \in \mathbb{C}$.

AFIRMAÇÃO 5

Para cada $n \geq 1$

os autovalores da equação

$$(9) \quad - y'' - n(n+1) \operatorname{sech}^2 x y = \lambda y$$

são

$$\lambda = -1, -4, -9, \dots, -n^2$$

PROVA:

Para $n = 1$,

$$e^{i\sqrt{\lambda}x} (i\sqrt{\lambda} - \operatorname{tgh} x), e^{-i\sqrt{\lambda}x} (i\sqrt{\lambda} + \operatorname{tgh} x)$$

formam uma base de soluções para cada $\lambda \neq 0, -1$; em particular, tais λ não são autovalores da equação. Também $\lambda = 0$ não é autovalor, já que

$$\operatorname{tgh} x, \operatorname{tgh} x \cdot \ln(\operatorname{senh} x)$$

formam nesse caso

uma base de soluções em $]0, +\infty[$. Finalmente, $\lambda = -1$ é autovalor com autofunção

$$e^{-x}(1 + \operatorname{tgh} x) \in W^2(\mathbb{R}).$$

Supondo agora o resultado válido para $n = p \geq 1$, o argumento abaixo mostra a validade para $n = p + 1$:

(i) para cada $1 \leq m \leq p$, $\lambda = -m^2$ é autovalor:

De fato, dado m , tomando-se $u_m \in W^2(\mathbb{R})$

tal que

$$u_m'' + p \cdot (p + 1) \operatorname{sech}^2 x \cdot u_m = m^2 \cdot u_m,$$

a função

$$y_m \equiv \left(\frac{d}{dx} - (p + 1) \operatorname{tgh} x \right) \cdot u_m$$

satisfaz (9) para $n = p + 1$, tendo-se $y_m \in W^2(\mathbb{R})$

(ii) $\lambda = -(p + 1)^2$ é autovalor,

com autofunção $y_{p+1} = \operatorname{sech}^{p+1} x$

(iii) supondo $\lambda \neq -1, -4, \dots, -(p + 1)^2$ autovalor, então, sendo y_λ autofunção associada e

$$\tilde{y} = \operatorname{sech}^{p+1} x, \quad \tilde{\lambda} = -(p + 1)^2,$$

segue que

$$z \equiv y_\lambda' - y_\lambda \cdot \frac{\tilde{y}'}{\tilde{y}} = y_\lambda' + (p+1) \cdot \operatorname{tgh} x \cdot y_\lambda$$

satisfaz

$$-z'' + \tilde{y} \cdot \left(\frac{1}{\tilde{y}} \right)'' z = (\lambda - \tilde{\lambda})z$$

que é a equação (9) para $n = p$, o que implicaria ser λ autovalor dessa equação, contradizendo a hipótese de indução.

QED

Um argumento indutivo mostra

AFIRMAÇÃO 6

Para cada $n \geq 1$, $k \in \overline{\mathbb{C}}_+$, tem-se

$$\delta_+^{[n]}(x, k) \equiv \delta_+(x, k) = \mathbb{P}_n \mathbb{P}_{n+1} \dots \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 e^{ikx}$$

$$\delta_-^{[n]}(x, k) \equiv \delta_-(x, k) = (-1)^n \mathbb{P}_n \mathbb{P}_{n-1} \dots \mathbb{P}_2 \mathbb{P}_1 e^{-ikx}$$

são as funções de Jost correspondentes ao potencial

$$u^{[n]}(x) \equiv u(x) = -n(n+1) \operatorname{sech}^2 x,$$

onde

$$\mathbb{P}_j \equiv \frac{1}{ik - j} \left(\frac{d}{dx} - j \operatorname{tgh} x \right)$$

Em particular, segue de (6)

$$R_+^{[n]}(k) \equiv R_+(k) = 0$$

$$T_+^{[n]}(k) \equiv T_+(k) = \prod_{j=1}^n \frac{ik - j}{ik + j}$$

para o potencial $u^{[n]}(x)$.

Resta o cálculo dos coeficientes de normalização

$$c_{n;j} \equiv c_j = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_+^{[n]}(x, k)^2 dx \right)^{-1/2}$$

para $1 \leq j \leq n - 1$, tem-se integrando por partes

$$c_{n;j}^{-2} = \frac{1}{(j+n)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f_+^{[n+1]'}(x, ij) - n \operatorname{tgh} x f_+^{[n-1]}(x, ij) \right]^2 dx =$$

$$= \frac{n-j}{n+j} c_{n-1;j}^{-2},$$

observando que

$$f_+^{[n-1]''}(x, ij) + n(n-1) \operatorname{sech}^2 x f_+^{[n-1]}(x, ij) =$$

$$= j^2 f_+^{[n-1]}(x, ij)$$

Resulta então

$$c_{n;j}^2 = \frac{(n+j)!}{(n-j)! (2j)!} c_{j;j}^2 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n);$$

porém

$$f_+^{[j]}(x, ij) = \frac{\operatorname{sech}^j x}{2^j}$$

e daí, integrando por partes,

$$c_{j;j}^{-2} = \frac{1}{4^j} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^{2j} x dx = \frac{j-1}{2} c_{j-1;j-1}^{-2} - (2j-2) c_{j;j}^{-2}$$

ou seja,

$$c_{j;j}^2 = 2 \frac{2j-1}{j-1} c_{j-1;j-1}^2$$

o que fornece

$$c_{j;j}^2 = j \frac{(2j)!}{(j!)^2} \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Em particular, para cada $n \geq 1$,
os coeficientes de normalização são dados por

$$c_{n;j} = \frac{1}{j!} \sqrt{j \frac{(n+j)!}{(n-j)!}} \quad (1 \leq j \leq n).$$

segundo §2, §3, a solução $u(x, t)$ do problema de Cauchy

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

$$u(x, 0) = u^{[n]}(x)$$

é dada por

$$u(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} B_+(x, 0, t)$$

onde $B_+(x, \cdot, t) \in L^2(0, +\infty)$ é a solução da equação
de Gelfand-Levitan-Marchenko

$$0 = \Omega_+(x+y, t) + B_+(x, y, t) + \int_0^{+\infty} \Omega_+(x+z, t) B_+(x, z, t) dz$$

onde

$$\Omega_+(\xi, t) = 2 \sum_{j=1}^n c_{n;j}^2 e^{-2j\xi + 8j^3 t}$$

Essa é uma equação com núcleo degenerado, que pode ser resolvida por procedimentos algébricos. Obtém-se [20], [22], [26], [39]

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln [\det A(x, t)]$$

onde $A(x, t)$ é a matriz $n \times n$ cuja entrada na i -ésima linha e j -ésima coluna é dada por

$$a_{ij}(x, t) = \delta_{ij} + \frac{c_{n;i} \cdot c_{n;j}}{i+j} e^{-(i+j)x + 4(i^3 + j^3)t}$$

sendo

δ_{ij} o delta de Kronecker.

Por exemplo, $n = 2$ fornece

$$u(x, t) = -24 \frac{e^{8t-2x} + 4e^{64t-4x} + 6e^{72t-6x} + 4e^{80t-8x} + e^{136t-10x}}{(1 + 3e^{8t-2x} + 3e^{64t-4x} + e^{72t-6x})^2}$$

(2 - soliton)

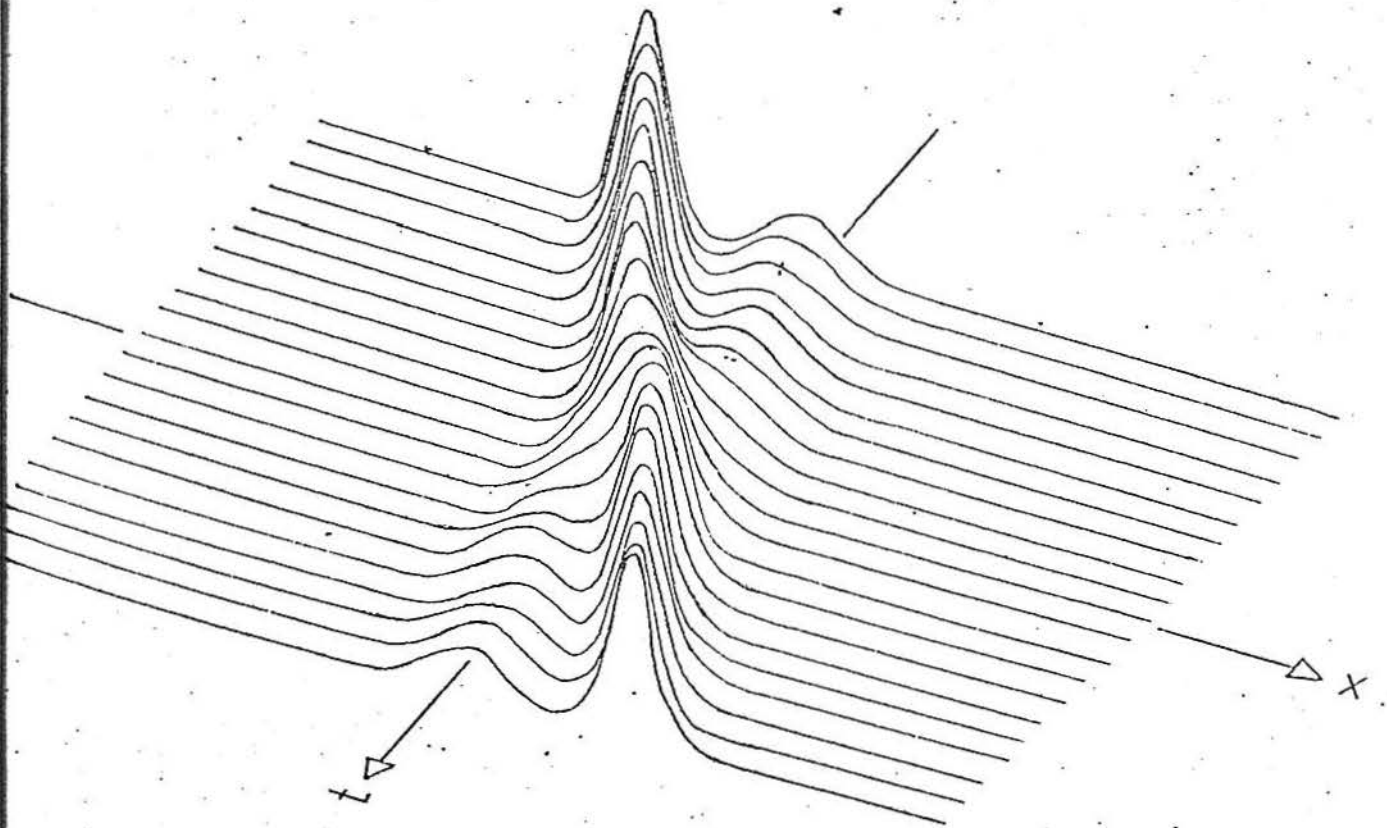


FIG. 1

SOLUÇÃO DE

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$u(x, 0) = 6 \operatorname{sech}^2 x$$

mostrando a formação de um par de solitons

enquanto $n = 3$ produz o 3 - soliton

$$u(x,t) = -48 \left[\begin{aligned} & e^{8t-2x} + 10 e^{64t-4x} + 30 e^{72t-6x} + 40 e^{80t-8x} + 25 e^{136t-10x} + \\ & + 15 e^{216t-6x} + 80 e^{224t-8x} + 135 e^{232t-10x} + 50 e^{280t-10x} + \\ & + 252 e^{288t-12x} + 50 e^{296t-14x} + 135 e^{344t-14x} + 80 e^{352t-16x} + \\ & + 15 e^{360t-18x} + 25 e^{440t-14x} + 40 e^{496t-16x} + 30 e^{504t-18x} + \\ & + 10 e^{512t-20x} + e^{568t-22x} \end{aligned} \right]$$

$$\left[\begin{aligned} & 1 + 6 e^{8t-2x} + 15 e^{64t-4x} + 10 e^{72t-6x} + 10 e^{216t-6x} + \\ & + 15 e^{224t-8x} + 6 e^{280t-10x} + e^{288t-12x} \end{aligned} \right]^2$$

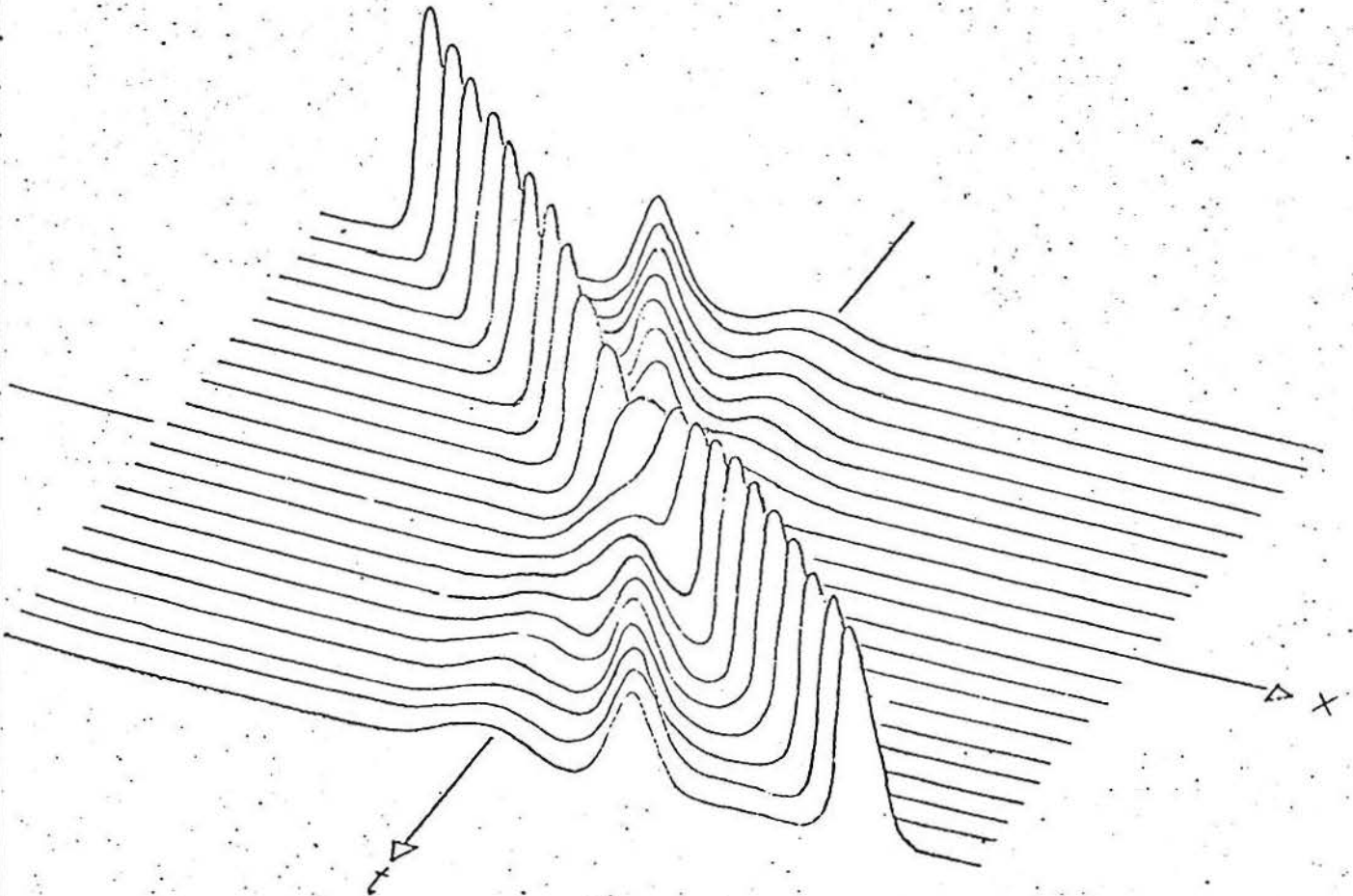


FIG. 2
SOLUÇÃO DE

$$\begin{aligned} u_t + 6uu_x + u_{xxx} &= 0 \\ u(x, 0) &= 12 \operatorname{sech}^2 x \end{aligned}$$

mostrando a formação de uma terna de solitons

§5 - Teoria de Espalhamento de Buslaev-Fomin

Nesta seção, é descrita a teoria de espalhamento utilizada para a solução do problema (I) quando

$$(10) \quad \begin{aligned} & \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad x \rightarrow -\infty \\ U_0(x) & \\ & \rightarrow a^2 \quad (a > 0) \quad \text{ao} \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

segundo [10], [11], [24]

Seja $u \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfazendo (10) com

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 |u(x)| (1+x^2) dx < \infty \\ & \int_0^{+\infty} |u(x) - a^2| (1+x^2) dx < \infty, \end{aligned}$$

sejam $f_+(\cdot, k)$, $f_-(\cdot, k) \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ as soluções da equação de Schrödinger (3) com

$$(11_+) \quad \begin{aligned} f_+(x, k) & \sim e^{i\ell x} \\ & \text{ao } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$f'_+(x, k) \sim i\ell e^{i\ell x}$$

$$(11_-) \quad \begin{aligned} f_-(x, k) & \sim e^{-ikx} \\ & \text{ao } x \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (' \equiv \frac{\partial}{\partial x})$$

$$f'_-(x, k) \sim -ik e^{-ikx} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

onde

$$\ell = \ell(k) = \sqrt{k^2 - a^2} \quad (k \in \overline{\mathbb{C}_+})$$

[Aqui, $\sqrt{k^2 - a^2}$ tem o sinal de k quando $k \in \mathbb{R}$, $|k| > a$, tendo-se $\ell \in \mathbb{C}_+$ se $k \in \mathbb{C}_+$.]

para k real $\neq 0$, $f_-(\cdot, k)$, $f_-^*(\cdot, k)$ formam uma base de soluções para (3), de modo que

$$T_-(k) f_+(\cdot, k) = f_-^*(\cdot, k) + R_-(k) f_-(\cdot, k)$$

para $T_-(k)$, $R_-(k) \in \mathbb{C}$.

Analogamente,

$$T_+(k) f_-(\cdot, k) = f_-^*(\cdot, k) + R_+(k) f_+(\cdot, k)$$

nos $k \in \mathbb{R}$, $|k| > a$.

$T_+(k)$, $T_-(k)$ estendem-se meromorficamente a \mathbb{C}_+ via

$$T_-(k) = \frac{2ik}{W[f_-(\cdot, k), f_+(\cdot, k)]}$$

$$T_+(k) = \frac{2i\ell}{W[f_-(\cdot, k), f_+(\cdot, k)]},$$

tendo um número finito de pólos $i\kappa_1, i\kappa_2, \dots, i\kappa_N$, em correspondência com os autovalores de (3). O restante dos dados de espalhamento consiste nos coeficientes de normalização

$$c_j \equiv \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_+(x, i\kappa_j)^2 dx \right)^{-1/2} \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

Pode-se recuperar o potencial $u(x)$ a partir de seus dados de espalhamento de um modo análogo ao descrito em §2. Definindo-se [11]

$$(12) \quad \Omega_+(z) \equiv 2 \sum_{j=1}^N c_j^2 e^{-2\sqrt{a^2 + \kappa_j^2} \cdot z} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_+(k(\ell)) e^{2i\ell z} d\ell + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^a |T_-(k)|^2 e^{-2\sqrt{a^2 - k^2} \cdot z} dk,$$

toma-se para cada $x \in \mathbb{R}$ a única solução

$B_+(x, \cdot) \in L^2(0, +\infty)$ da equação

$$B_+(x, y) + \Omega_+(x + y) + \int_0^{+\infty} \Omega_+(x + y + z) B_+(x, z) dz = 0$$

($y \geq 0$),

tendo-se

$$B_+ \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{R})$$

e

$$u(x) = a^2 - \frac{\partial}{\partial x} [B_+(x, 0)].$$

Em comparação com (8), o núcleo Ω_+ possui o termo adicional

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a |T_-(k)|^2 e^{-2\sqrt{a^2 - k^2} \cdot z} dk$$

correspondente ao salto da função $u(x)$ ao x variar de $-\infty$ a $+\infty$.

§6 - Formalismo de Hruslov para a equação de Korteweg- de Vries

Nesta seção, o método de espalhamento inverso descrito em §5 será utilizado para a construção de um esquema formal de solução para o problema (I) quando o perfil inicial $U_0(x)$ for do tipo *degrau*, ou seja,

$$U_0(x) \rightarrow \alpha \quad \text{ao} \quad x \rightarrow -\infty$$

$$U_0(x) \rightarrow \beta \quad \text{ao} \quad x \rightarrow +\infty, \quad \text{onde} \quad \alpha < \beta.$$

É suficiente considerar o caso

$$\alpha = 0, \quad \beta = a^2 \quad (a > 0),$$

já que

$$\tilde{u}(x, t) \equiv u(x - 6at, t) - \alpha$$

satisfaz (1) juntamente com u .

A solução $u(x, t)$ é suposta evoluir numa classe adequada de funções degrau que permita a análise abaixo [11], [24]. Em §7, é feito um tratamento rigoroso no caso $U_0(x) = H(x)$ (função de Heavyside).

O ponto básico para a aplicação de §5 refere-se à evolução dos dados de espalhamento com o parâmetro t quando $u(\cdot, t)$ é vista como potencial na equação de Schrödinger.

Seguindo Lax [28], sendo

$$\mathbb{L} \equiv \mathbb{L}(t) \equiv - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t)$$

$$\mathbb{B} \equiv \mathbb{B}(t) \equiv - 4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3v(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + 3 \frac{\partial}{\partial x} v(x, t),$$

tem-se

$$\mathbb{L}_t = \mathbb{B}\mathbb{L} - \mathbb{L}\mathbb{B}$$

se

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

e daí

para cada autovalor $\lambda_j = -\kappa_j^2$ de \mathbb{L} pode-se tomar autofunções $g(\cdot, t)$ evoluindo conforme

$$(13) \quad g_t = \mathbb{B}g.$$

Tem-se

$$g(\cdot, t) = \theta(t) \cdot f_+(\cdot, i\kappa_j, t),$$

de modo que (13) fornece

$$\theta_t f_+ + \theta f_{+t} = \theta \mathbb{B}f_+ = -\theta u_x f_+ + \theta \cdot (2u - 4\kappa_j^2) f_{+x},$$

observando que

$$\mathbb{L}f_+ = -\kappa_j^2 f_+.$$

Em particular,

$$\frac{\theta_t}{\theta} f_+ + f_{+t} = -u_x f_+ + (2u - 4\kappa_j^2) f_{+x}.$$

O comportamento assintótico da função de Jost f_+ fornece então, fazendo $x \rightarrow +\infty$,

$$\theta_t = (2a - 4\kappa_j^2) i l_j, \quad l_j = i \sqrt{a^2 + \kappa_j^2},$$

com que

$$f_{+t} = \mathbb{B}f_+ - 2i l_j (a - 2\kappa_j^2) f_+$$

descreve a evolução da autofunção $f_+(\cdot, i\kappa_j; t)$. Segue que o coeficiente de normalização

$$c_j(t) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_+(x, i\kappa_j; t)^2 dx \right)^{-1/2}$$

evolui conforme

$$\dot{c}_j = -c_j \int_{-\infty}^{+\infty} f_+^2 dx \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_+ B f_+ dx - 2i\ell_j (a - 2\kappa_j^2) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} f_+^2 dx$$

ou seja, como B é anti-simétrico,

$$\begin{aligned} \dot{c}_j &= 2i\ell_j (a - 2\kappa_j^2) c_j = \\ &= \left[-2\mu_j (a + 2a^2) + 4\mu_j^3 \right] c_j \end{aligned}$$

onde

$$\mu_j \equiv \sqrt{a^2 + \kappa_j^2} .$$

Uma análise similar mostra que [24]

$$\dot{T}_+(k, t) = (-4ik^3 + 4i\ell^3 + 6i\ell a^2) T_+(k, t)$$

$$\dot{R}_+(k, t) = (8i\ell^3 + 12i\ell a^2) R_+(k, t)$$

nos $k \in \mathbb{R}$, $|k| > a$

$$\dot{T}_-(k, t) = (-4ik^3 + 4i\ell^3 + 6i\ell a^2) T_-(k, t)$$

$$\dot{R}_-(k, t) = -8ik^3 R_-(k, t)$$

nos $k \in \mathbb{R}$.

Para a obtenção de $u(x, t)$ a partir dos dados de espalhamento no instante t , define-se, conforme (12),

$$F_+(z, t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_+(k(\ell), t) \cdot e^{2i\ell z} d\ell =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_+(k(\ell), 0) e^{8i\ell^3 t + 2i\ell[6a^2 t + z]} d\ell$$

$$H_+(z, t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^a |T_-(k, t)|^2 e^{-2\sqrt{a^2 - k^3} z} dk =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^a |T_-(k, 0)|^2 e^{8(a^2 - k^2)^{3/2} t - 2(a^2 - k^2)^{1/2} [6a^2 t + z]} dk$$

$$G_+(z, t) \equiv 2 \sum_{j=1}^N c_j^2(t) e^{-2z \sqrt{a^2 + \kappa_j^2}}$$

$$= 2 \sum_{j=1}^N c_j^2(0) e^{8\mu_j^3 t - 4\mu_j a t + 4\mu_j a^2 t - 2\mu_j z + 6a^2 t}$$

e então

$$\Omega_+(z, t) \equiv F_+(z, t) + G_+(z, t) + H_+(z, t).$$

O potencial $u(x, t)$ é obtido via

$$u(x, t) = a^2 - \frac{\partial}{\partial x} \left| B_+(x, 0, t) \right|$$

onde $B_+(x, \cdot, t) \in L^2(0, +\infty)$ resolve a equação de Gelfand-Levitan-Marchenko

$$B_+(x, y, t) + \Omega_+(x + y, t) + \int_0^{+\infty} B_+(x, z, t) \Omega_+(x + y + z, t) dz = 0$$

nos $x \in \mathbb{R}, y \geq 0, t > 0.$

Alternativamente, a construção pode ser posta como em [17]: definindo-se

$$F_0(\sigma, t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_+(k(\ell), 0) e^{8i\ell^3 t + 2i\ell\sigma} d\ell$$

$$H_0(\sigma, t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |T_-(k, 0)|^2 e^{8(a^2 - k^2)^{3/2} t - 2(a^2 - k^2)^{1/2} \sigma} dk$$

$$G_0(\sigma, t) \equiv 2 \sum_{j=1}^N c_j(0)^2 e^{8\mu_j^3 t - 4\mu_j a t + 4\mu_j a^2 t - 2\mu_j \sigma}$$

e

$$\Omega_0(\sigma, t) \equiv F_0(\sigma, t) + G_0(\sigma, t) + H_0(\sigma, t),$$

claramente

$$\Omega_0(\sigma, t) = \Omega_+(\sigma - 6a^2 t, t),$$

de modo que

$$B_0(x, y, t) \equiv B_+(x - 6a^2 t, y, t)$$

resolve

$$B_0(x, y, t) + \Omega_0(x + y, t) + \int_0^{+\infty} B_0(x, z, t) \Omega_0(x + y + z, t) dz = 0,$$

tendo-se

$$\mu(x, t) = a^2 - \frac{\partial}{\partial x} \left[B_0(x + 6a^2 t, 0, t) \right].$$

§7 - Aplicação à Equação KdV com perfil inicial de Heavyside

Tomando-se no problema (I)

$$U_0(x) = H(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

obtêm-se de um cálculo direto as funções de Jost

$$f_+(x, k) = \begin{cases} e^{i\ell x} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{k+\ell}{2k} e^{ikx} + \frac{k-\ell}{2k} e^{-ikx} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

se $k \neq 0$,

$$f_+(x, 0) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 1-x & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

$$f_-(x, k) = \begin{cases} \frac{\ell+k}{2\ell} e^{-i\ell x} + \frac{\ell-k}{2\ell} e^{i\ell x} & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-ikx} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

se $k \neq \pm 1$,

$$f_-(x, \pm 1) = \begin{cases} 1 \mp ix & \text{se } x \geq 0 \\ e^{\mp ix} & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

onde

$$\ell = \sqrt{k^2 - 1} . .$$

Uma análise direta fornece

$$T_-(k) f_+(\cdot, k) = f_-^*(\cdot, k) + R_-(k) f_-(\cdot, k)$$

$$\forall k \in \mathbb{R}$$

para

$$T_-(k) = \begin{cases} \frac{2k}{\ell + k} & \text{se } k \text{ real } \neq 0 \\ 0 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

$$R_-(k) = \begin{cases} \frac{k - \ell}{k + \ell} & \text{se } k \text{ real } \neq 0 \\ -1 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

tendo-se

$$T_-, R_- \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

Analogamente, definindo-se

$$T_+(k) \equiv \frac{2\ell}{\ell + k} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$R_+(k) \equiv \begin{cases} \frac{\ell - k}{\ell + k} & \text{se } k \text{ real, } |k| \geq 1 \\ -1 & \text{se } k \text{ real, } |k| \leq 1 \end{cases}$$

tem-se

$$T_+, R_+ \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

com

$$T_+(k) f_-(\cdot, k) = f_+^*(\cdot, k) + R_+(k) f_+(\cdot, k)$$

$$\forall k \text{ real, } |k| > 1.$$

Para $U_0(x) = H(x)$, a equação

$$-\phi'' + U_0\phi = \lambda\phi \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

é facilmente vista não possuir solução não trivial em $W^2(\mathbb{R})$, de modo que não há autovalores para o operador de Schrödinger neste caso.

Seguindo o formalismo da seção anterior, introduz-se

$$\Omega_0(\sigma, t) \equiv F_0(\sigma, t) + G_0(\sigma, t) + H_0(\sigma, t)$$

onde

$$\begin{aligned} F_0(\sigma, t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_+(k(l)) \cdot e^{8il^3t + 2il\sigma} dl = \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (l-k)^2 e^{8il^3t + 2il\sigma} dl \end{aligned}$$

$$G_0(\sigma, t) \equiv 0$$

$$H_0(\sigma, t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^1 |T_-(k)|^2 e^{8(1-k^2)^{3/2}t - 2(1-k^2)^{1/2}\sigma} dk$$

e considera-se a equação de Gelfand - Levitan - Marchenko

$$(14) \quad B_0(x, y, t) + \int_0^{+\infty} \Omega_0(x+y+z, t) B_0(x, z, t) dz + \Omega_0(x+y, t) = 0$$

nos $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $y \geq 0$. De acordo com §6, espera-se obter

$u(x, t) = 1 - \int_x B_0(x + 6t, 0, t)$, o que é feito abaixo numa seqüência de pequenos passos, seguindo o esquema de Cohen [9], [11], [32]. O primeiro deles, naturalmente, consiste na análise da equação (14), fazendo-se necessário o estudo em mais detalhe das propriedades de regularidade e decaimento do núcleo $\Omega_0(\sigma, t)$ ao $\sigma \rightarrow +\infty$. Pode-se mostrar ([11], pp. 774-784)

PROPOSIÇÃO 7

Na notação acima, tem-se

$$(1) \quad \Omega_0 \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}_+}, \mathbb{R})$$

$$\Omega_0 \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

$$(2) \quad \partial_t \Omega_0 + \int_\sigma^3 \Omega_0 = 0 \quad \text{nos } t > 0, \sigma \in \mathbb{R}$$

$$(3) \quad \Omega_0(\sigma, t) = O(\sigma^{-2}) \quad \text{ao } \sigma \rightarrow +\infty$$

uniformemente em t nos compactos $\underline{c} [0, +\infty[$

$$(4) \quad \int_\sigma^\alpha \int_t^\beta \Omega_0(\sigma, t) = O(\sigma^{-2-\alpha-3\beta}) \quad \text{ao } \sigma \rightarrow +\infty$$

uniformemente em t nos compactos $\underline{c}]0, +\infty[$

Da proposição acima decorre que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, o operador

$$\mathbb{P}_{x,t} : L^1(\mathbb{R}^+) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^+)$$

dado por

$$\mathbb{P}_{x,t}[f](y) \equiv \int_0^{+\infty} \Omega_0(x+y+z, t) f(z) dz$$

é compacto, tendo-se ademais

$$(15) \quad \left\| \mathbb{P}_{x,t} \right\|_{\text{op}} \leq \frac{A}{1+|x|} \quad \text{nos } x \geq X, t \in [0, T]$$

para cada $X \in \mathbb{R}$, $T > 0$ dados (onde A depende de X , T). A solubilidade em $L^1(0, +\infty)$ de (14) nos $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ segue então do Teorema das Alternativas de Fredholm [40] se for mostrado que a equação

$$(16) \quad f + P_{x,t} f = 0 \quad (f \in L^1(0, +\infty))$$

admite apenas a solução trivial $f = 0$, o que é feito abaixo seguindo essencialmente o argumento original de Faddeev [17]. Sendo Ω_0 real, não há perda de generalidade em supor f real, e nesse caso multiplicando-se (16) por f e integrando, obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 dy + \int_0^{+\infty} f(y) \left[\int_0^{+\infty} \Omega_0(x+y+z, t) f(z) dz \right] dy = \\ &= \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(y) \left[\int_0^{+\infty} f(z) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} R(\ell) e^{8i\ell^3 t + 2i\ell(x+y+z)} d\ell + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^1 |T_-(k)|^2 e^{8(1-k^2)^{3/2} t - 2(1-k^2)^{1/2}(x+y+z)} dk \right) dz \right] dy \end{aligned}$$

onde

$$R(\ell) \equiv - (k(\ell) - \ell) = - (\operatorname{sgn} \ell \cdot \sqrt{1 + \ell^2} - \ell)^2.$$

Pelo Teorema de Fubini, tem-se então

$$(17) \quad 0 = \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\ell) e^{8i\ell^3 t + 2i\ell x} \phi(\ell)^2 d\ell + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |T_-(k)|^2 e^{8(1-k^2)^{3/2} t} \left(\int_0^{+\infty} f(y) e^{-2(1-k^2)^{1/2} y} dy \right) dk$$

onde ϕ é a transformada de Fourier

$$\phi(l) = \int_0^{+\infty} f(y) e^{2ily} dy.$$

Claramente $f \in L^2(0, +\infty)$, porque

$$|f(y)| \leq \int_0^{+\infty} |\Omega_0(x+y+z, t)| |f(z)| dz \leq \frac{\text{cte}}{1+y^2} \int_0^{+\infty} |f(z)| dz.$$

Resulta então, pelo teorema de Parseval,

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(l) \phi(-l) dl + \int_{-\infty}^{+\infty} R(l) e^{8il^3t + 2ilx} \phi(l) \phi(l) dl.$$

observando que $\phi^*(l) = \phi(-l)$.

Chamando

$$\alpha(l) \equiv R(l) e^{8il^3t + 2ilx}$$

$$\beta(l) \equiv (1 - |\alpha(l)|^2)^{1/2}$$

$$\psi_1(l) \equiv \phi(l) + \alpha(-l) \phi(-l)$$

$$\psi_2(l) \equiv \beta(l) \phi(l)$$

obtêm-se, observando que $\alpha^*(l) = \alpha(-l)$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi_1(l)|^2 + |\psi_2(l)|^2) dl &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(l) \phi(-l) dl + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(l) \phi(l) \phi(l) dl + \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(-l) \phi(-l) \phi(-l) dl = \end{aligned}$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\ell) \phi(-\ell) d\ell + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\ell) \phi(\ell) \phi(\ell) d\ell = 0$$

Em particular

$$\psi_2 = 0$$

e então

$$\phi = 0,$$

já que

$$|\alpha(\ell)| < 1 \quad \forall \ell \text{ real } \neq 0,$$

o que dá pelo teorema da inversa de Fourier

$$f = 0.$$

Como conseqüência, $I + P_{x,t}$ tem inversa em $\mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}^+))$, e a equação (14) define para cada $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ uma única função $B_0(x, \cdot, t) \in L^1(0, +\infty)$. Observando que $(x, t) \rightsquigarrow P_{x,t}$ é contínua na norma de operadores, resulta facilmente de (15)

AFIRMAÇÃO 8

Para cada $X \in \mathbb{R}$, $T > 0$ dados, existe $A > 0$ (dependendo de X, T) tal que

$$\left\| (I + P_{x,t})^{-1} \right\|_{op} \leq A \quad \forall x \geq X, t \in [0, T]$$

já que em particular $(x, t) \rightsquigarrow (I + P_{x,t})^{-1}$ é contínua na norma de operadores. De (14) resulta então $B_0(x, \cdot, t) \rightarrow B_0(x_0, \cdot, t_0)$ em $L^1(0, +\infty)$ ao $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$, o que fornece

$$B_0 \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R}).$$

Em verdade, os resultados acima permitem mostrar que

$$B_0 \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

com

$$\partial_x B_0(x, \cdot, t), \partial_t B_0(x, \cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^+),$$

de modo que (14) pode ser derivada formalmente com respeito a cada variável nos $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $y \geq 0$. De fato, tem-se¹

$$\frac{1}{h} \left[B_0(x+h, \cdot, t) - B_0(x, \cdot, t) \right] = (I + \mathbb{P}_{x,t})^{-1} \left[\frac{1}{h} (\omega_{x+h,t} - \omega_{x,t}) + \right. \\ \left. - \frac{1}{h} (\mathbb{P}_{x+h,t} - \mathbb{P}_{x,t}) B_0(x+h, \cdot, t) \right],$$

onde

$$\omega_{x,t}(y) \equiv - \Omega_0(x+y, t),$$

e em particular, nos $t > 0$, tem-se ao $h \rightarrow 0$

$$\frac{1}{h} \left[B_0(x+h, \cdot, t) - B_0(x, \cdot, t) \right] \rightarrow (I + \mathbb{P}_{x,t})^{-1} \left[\omega_{x,t}^{(1,0)} + \right. \\ \left. - \mathbb{P}_{x,t}^{(1,0)} B_0(x, \cdot, t) \right] \equiv B_0^{(1,0,0)}(x, \cdot, t) \quad \text{em } L^1(\mathbb{R}^+),$$

onde

$$\omega_{x,t}^{(1,0)}(y) \equiv - \partial_1 \Omega_0(x+y, t)$$

$$\mathbb{P}_{x,t}^{(1,0)}[f](y) \equiv \int_0^{+\infty} \partial_1 \Omega_0(x+y+z, t) f(z) dz, \quad f \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

Em particular, para cada $y \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$,

$$\frac{1}{h} \left[B_0(x+h, y, t) - B_0(x, y, t) \right] = - \frac{1}{h} \left[\Omega_0(x+h+y, t) - \Omega_0(x+y, t) \right] +$$

¹ Esse argumento segue Faddeev [17], Cohen [9].

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{+\infty} \Omega_0(x+y+z, t) \frac{B_0(x+h, z, t) - B_0(x, z, t)}{h} dz + \\
& - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \left[\Omega_0(x+h+y+z, t) - \Omega_0(x+y+z, t) \right] B_0(x+h, z, t) dz
\end{aligned}$$

que tende (ao $h \rightarrow 0$) ao limite

$$\begin{aligned}
& - \mathcal{D}_1 \Omega_0(x+y, t) - \int_0^{+\infty} \Omega_0(x+y+z, t) B_0^{(1,0,0)}(x, z, t) dz + \\
& - \int_0^{+\infty} \mathcal{D}_1 \Omega_0(x+y+z, t) B_0(x, z, t) dz,
\end{aligned}$$

de onde

$$\mathcal{D}_x B_0 \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$

e

$$\mathcal{D}_x B_0(x, \cdot, t) = B_0^{(1,0,0)}(x, \cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

Para $\mathcal{D}_t B_0$, o raciocínio é análogo; finalmente, é óbvio de (14) que

$$B_0(x, \cdot, t) \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R})$$

para cada $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

Um argumento indutivo (A. Cohen [9], [32]) similar mostra que em verdade

$$B_0 \in C^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}),$$

tendo-se

$$\mathcal{D}_x^m \mathcal{D}_t^n B_0(x, \cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^+).$$

AFIRMAÇÃO 9

Para cada $X \in \mathbb{R}$, K compacto $\subset \mathbb{R}_+$, existem constantes

$$M_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

tais que

$$\left\| \int_x^n B_0(x, \cdot, t) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{M_n}{(1 + |x|)^{n+1}}$$

e

$$\left| \int_x^n B_0(x, y, t) \right| \leq \frac{M_n}{(1 + |x| + y)}$$

$$\forall x \geq X, t \in K, y \geq 0.$$

PROVA:

Para $n = 0$, tem-se de

$$B_0(x, \cdot, t) = (I + P_{x,t})^{-1} \omega_{x,t}$$

que, pela Afirmação 8,

$$\left\| B_0(x, \cdot, t) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \text{cte.} \left\| \omega_{x,t} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}$$

$$\forall x \geq X, \forall t \in K.$$

Como

$$\left| \omega_{x,t}(y) \right| = \left| \Omega_0(x+y, t) \right| \leq \frac{\text{cte}}{(1 + |x| + y)^2},$$

segue que

$$\left\| \omega_{x,t} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \text{cte} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + |x| + y)^2} dy \leq \frac{\text{cte}}{1 + |x|},$$

e daí de (14) resulta

$$|B_0(x, y, t)| \leq \frac{\text{cte}}{(1 + |x| + y)^2}$$

nos $x \geq X, t \in K, y \geq 0$.

Para $n = 1$, obtêm-se de (14)

$$(*) \quad \partial_x B_0(x, y, t) + \int_0^{+\infty} \partial_1 \Omega_0(x + y + z, t) B_0(x, z, t) dz + \\ + \int_0^{+\infty} \Omega_0(x + y + z, t) \partial_x B_0(x, z, t) dz + \partial_1 \Omega_0(x + y, t) = 0$$

e então

$$(**) \quad \partial_x \Omega_0(x, \cdot, t) = (I + P_{x,t})^{-1} \tilde{\omega}_{x,t}$$

onde

$$\tilde{\omega}_{x,t}(y) \equiv - \partial_1 \Omega_0(x + y, t) - \int_0^{+\infty} \partial_1 \Omega_0(x + y + z, t) B_0(x, z, t) dz$$

Pela Proposição 7,

$$\left| \tilde{\omega}_{x,t}(y) \right| \leq \frac{\text{cte}}{(1 + |x| + y)^3} \quad \text{nos } x \geq X, t \in K, y \geq 0$$

e daí

$$\left| \tilde{\omega}_{x,t} \right|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{\text{cte}}{(1 + |x|)^2}$$

com o que (**) fornece

$$\left\| \partial_x B_0(x, \cdot, t) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{\text{cte}}{(1 + |x|)^2}.$$

segue então de (*) que

$$\left| \partial_x B_0(x, y, t) \right| \leq \frac{\text{cte}}{(1 + |x| + y)^2}$$

$$\forall x \geq X, t \in K, y \geq 0.$$

Um argumento indutivo similar completa a demonstração.

QED

Usando a Proposição 7, obtêm-se também

AFIRMAÇÃO 9'

Para cada $X \in \mathbb{R}$, K compacto $\subset \mathbb{R}_+$, existem constantes

$$N_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

tais que

$$\left\| \partial_t^n B_0(x, \cdot, t) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{N_n}{(1 + |x|)^{1 + 3n}}$$

e

$$\left| \partial_t^n B_0(x, y, t) \right| \leq \frac{N_n}{(1 + |x| + y)^2}$$

$$\forall x \geq X, t \in K, y \geq 0.$$

Resulta em particular que, sendo

$$f_0(x, k, t) \equiv e^{i\ell(k)x} \left[1 + \int_0^{+\infty} B_0(x, y, t) e^{2i\ell(k)y} dy \right]$$

$$(x \in \mathbb{R}, k \in \overline{\mathbb{C}}_+, t \geq 0),$$

onde

$\ell(k) \in \overline{\mathbb{C}}_+$ é dado por

$$\ell(k) \equiv \begin{cases} \sqrt{k^2 - 1} \in \mathbb{C}_+ & \text{se } k \in \mathbb{C}_+ \cup]-1, 1[\\ \operatorname{sgn}(k) \sqrt{k^2 - 1} & \text{se } k \in \mathbb{R}, |k| \geq 1, \end{cases}$$

tem-se

$$f_0 \in C^\circ(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{C}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})$$

com

$$f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{C}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{C}),$$

tendo-se

$$f(x, \cdot, t) \text{ analítica em } \mathbb{C}_+$$

$$\text{para cada } x \in \mathbb{R}, t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Ademais, decorre da Afirmação 9

que

$$f_0(x, k, t) \sim e^{i\ell x}$$

ao $x \rightarrow +\infty$,

$$\partial_x f_0(x, k, t) \sim i\ell e^{i\ell x}$$

em semelhança com as funções de Jost de §6. Do formalismo de Hruslov [24], espera-se ter

$$e^{6ilt} f_+(x - 6t, k, t) = e^{i\ell x} \left[1 + \int_0^{+\infty} B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy \right]$$

com

$$-\partial_x^2 f_+(x, k, t) + u(x, t) f_+(x, k, t) = k^2 f_+(x, k, t)$$

e

$$u(x, t) = 1 - \partial_x B_0(x + 6t, 0, t).$$

Em particular, sendo

$$f_0(x, k, t) \equiv e^{6i\ell t} f_+(x - 6t, k, t),$$

espera-se ter

$$(18) \quad - \partial_x^2 f_0(x, k, t) - \partial_x B_0(x, 0, t) f_0(x, k, t) = \ell^2 f_0(x, k, t),$$

o que é confirmado abaixo.

AFIRMAÇÃO 10Para cada $k \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $t > 0$, $f_0(x, k, t)$ satisfaz (18) nos $x \in \mathbb{R}$

PROVA:

Tem-se, via integração por partes,

$$\begin{aligned} & - \partial_x^2 f_0(x, k, t) - \partial_x B_0(x, 0, t) f_0(x, k, t) = \\ & = \ell^2 f_0(x, k, t) - 2i\ell e^{i\ell x} \int_0^{+\infty} \partial_x B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy + \\ & - e^{i\ell x} \int_0^{+\infty} \partial_x^2 B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy - \partial_x B_0(x, 0, t) f_0(x, k, t) = \\ & = \ell^2 f_0(x, k, t) + e^{i\ell x} \int_0^{+\infty} e^{2i\ell y} \left[\partial_{xy} B_0(x, y, t) + \right. \\ & \left. - \partial_x^2 B_0(x, y, t) - \partial_x B_0(x, 0, t) B_0(x, y, t) \right] dy \end{aligned}$$

de modo que é suficiente mostrar que

$$(19) \quad \partial_x^2 B_0(x, y, t) - \partial_{xy} B_0(x, y, t) + \partial_x B_0(x, 0, t) B_0(x, y, t) = 0$$

$$\forall y \geq 0$$

Derivando (14) com relação a x e integrando por partes, vem

$$(*) \quad \partial_x B_0(x, y, t) + \partial_1 \Omega_0(x + y, t) - \Omega_0(x + y, t) B_0(x, 0, t) +$$

$$- \int_0^{+\infty} \Omega_0(x + y + z, t) \partial_z B_0(x, z, t) dz +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \Omega_0(x + y + z, t) \partial_x B_0(x, z, t) dz = 0$$

Por outro lado, derivando (14) com relação a y e integrando por partes, segue

$$(**) \quad \partial_y B_0(x, y, t) + \partial_1 \Omega_0(x + y, t) - \Omega_0(x + y, t) B_0(x, 0, t) +$$

$$- \int_0^{+\infty} \Omega_0(x + y + z, t) \partial_2 B_0(x, z, t) dz = 0$$

Subtraindo (**) de (*), obtêm-se

$$\partial_x B_0(x, y, t) - \partial_y B_0(x, y, t) + \int_0^{+\infty} \Omega_0(x + y + z, t) \partial_x B_0(x, z, t) dz = 0$$

e daí, derivando-se com relação a x , vem

$$(***) \quad \partial_x^2 B_0(x, y, t) - \partial_{xy} B_0(x, y, t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{+\infty} \partial_1 \Omega_0(x+y+z, t) \partial_x B_0(x, z, t) dz + \\
& + \int_0^{+\infty} \Omega_0(x+y+z, t) \partial_x^2 B_0(x, z, t) dz = 0.
\end{aligned}$$

Porém

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \partial_1 \Omega_0(x+y+z, t) \partial_x B_0(x, z, t) dz = - \Omega_0(x+y, t) \cdot \partial_x B_0(x, 0, t) \\
& - \int_0^{+\infty} \Omega_0(x+y+z, t) \cdot \partial_{xz} B_0(x, z, t) dz,
\end{aligned}$$

com o que (***) fornece

$$\begin{aligned}
& \partial_x^2 B_0(x, y, t) - \partial_{xy} B_0(x, y, t) + \partial_x B_0(x, 0, t) B_0(x, y, t) = \\
& = - \int_0^{+\infty} \Omega_0(x+y+z, t) \left[\partial_x^2 B_0(x, z, t) - \partial_{xz} B_0(x, z, t) + \right. \\
& \quad \left. + \partial_x B_0(x, 0, t) \cdot B_0(x, z, t) \right] dz,
\end{aligned}$$

de modo que (19) decorre da inversibilidade do operador de Fredholm

$$I + P_{x,t} : L^1(\mathbb{R}^+) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^+)$$

QED

Seja

$$w(x, t) \equiv - \partial_x B_0(x, 0, t) :$$

se $u(x, t) \equiv 1 - \partial_x B_0(x + 6t, 0, t)$ satisfizer (1),

então

$$u(x, t) = w(x - 6t, t) - 1 \text{ satisfará (1),}$$

de modo que do formalismo de Lax [28] se deve esperar

$$(20) \quad \partial_t f_0 = Bf_0 + g(\ell, t)f_0$$

para alguma g , onde

$$B \equiv -4D^3 + 6wD + 3w_x, \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$$

Observando que $-D^2 f_0 + w f_0 = \ell^2 f_0$,

tem-se

$$Bf_0 = -w_x f_0 + 2w \partial_x f_0 + 4\ell^2 \partial_x f_0$$

de modo que (20) fornece

$$(21) \quad \partial_t f_0 \equiv -w_x f_0 + (2w + 4\ell^2) \partial_x f_0 + g f_0.$$

Fazendo $x \rightarrow +\infty$ em (21), obtém-se

$$o(e^{i\ell x}) = (o(1) + 4\ell^2) i\ell e^{i\ell x} (1 + o(1)) + g e^{i\ell x},$$

de modo que $g = -4i\ell^3$.

Portanto, é esperado valer

$$(22) \quad \partial_t f_0 = Bf_0 - 4i\ell^3 f_0,$$

o que é mostrado abaixo, seguindo o argumento de Tanaka [36], Cohen [9].

Chamando

$$h(x, k, t) \equiv f_0(x, k, t) e^{-i\ell x} = 1 + \int_0^{+\infty} B_0(x, y, t) e^{2i\ell(k)y} dy,$$

(22) fica

$$h_t = 12\ell^2 h_x - 12i\ell h_{xx} - 4h_{xxx} + 6w(h_x + i\ell h) + 3w_x h$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \partial_t B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy &= 12\ell^2 \int_0^{+\infty} \partial_x B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy + \\ &- 12i\ell \int_0^{+\infty} \partial_x^2 B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy - 4 \int_0^{+\infty} \partial_x^3 B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy + \\ &+ 6w(x, t) \int_0^{+\infty} \partial_x B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy + 6i\ell w(x, t) + \\ &+ 6i\ell w(x, t) \int_0^{+\infty} B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy + 3w_x(x, t) + \\ &+ 3w_x(x, t) \int_0^{+\infty} B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy \end{aligned}$$

De (19) segue que

$$\partial_{xx} B_0 - \partial_{xy} B_0 = w B_0,$$

de modo que, integrando por partes, tem-se

$$12\ell^2 \int_0^{+\infty} \partial_x B_0(x, y, t) e^{2i\ell y} dy = -6i\ell w(x, t) +$$

$$+ 6il \int_0^{+\infty} \partial_x^2 B_0(x, y, t) e^{2ily} dy - 6ilw(x, t) \int_0^{+\infty} B_0(x, y, t) e^{2ily} dy$$

e

$$- 3 \int_0^{+\infty} \partial_x^3 B_0(x, y, t) e^{2ily} dy = - 3 \int_0^{+\infty} \partial_y \partial_x^2 B_0(x, y, t) +$$

$$+ w(x, t) \partial_x B_0(x, y, t) + w_x(x, t) B_0(x, y, t) e^{2ily} dy =$$

$$= - 3 w_x(x, t) + 6il \int_0^{+\infty} \partial_x^2 B_0(x, y, t) e^{2ily} dy +$$

$$- 3w_x(x, t) \int_0^{+\infty} B_0(x, y, t) e^{2ily} dy - 3w(x, t) \int_0^{+\infty} \partial_x B_0(x, y, t) e^{2ily} dy$$

Resulta então que (22) é equivalente a

$$\int_0^{+\infty} \partial_t B_0(x, y, t) e^{2ily} dy = \int_0^{+\infty} \left(- \partial_x^3 B_0(x, y, t) + 3w(x, t) \partial_x B_0(x, y, t) \right) e^{2ily} dy$$

para o que é suficiente mostrar que

$$\partial_t B_0 = - \partial_x^3 B_0 + 3w \partial_x B_0.$$

De (14) decorre que

$$(I + P_{x,t}) \partial_t B_0 = v_{x,t},$$

onde

$$\begin{aligned} v_{x,t}(y) &\equiv - \int_0^{+\infty} \partial_2 \Omega_0(x+y+z, t) \cdot B_0(x, z, t) \, dz + \\ &- \partial_2 \Omega_0(x+y, t) = \\ &= \int_0^{+\infty} \partial_x^3 \Omega_0(x+y+z, t) B_0(x, z, t) \, dz + \\ &+ \partial_x^3 \Omega_0(x+y, t) \end{aligned}$$

Integrando-se algumas vezes por partes, obtém-se que

$$(I + P_{x,t}) \left[- \partial_x^3 B_0 + 3w \partial_x B_0 \right] = v_{x,t},$$

o que conclui o argumento.

Resulta finalmente

AFIRMAÇÃO 11

A função $w(x, t) \equiv - \partial_x B_0(x, 0, t)$ satisfaz a equação de Korteweg-de Vries (1) nos $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

PROVA:

Para $t > 0$, $k \in \overline{C}_+$, $x \in \mathbb{R}$

tem-se

$$-\partial_x^2 f_0 + w f_0 = l^2 f_0$$

e então, derivando com relação a t ,

vem

$$w_t f_0 + \mathbb{L} \partial_t f_0 = l^2 \partial_t f_0$$

onde

$$\mathbb{L} \equiv -\partial_x^2 + w,$$

ou seja, por (22)

$$\begin{aligned} w_t f_0 + \mathbb{L}(B f_0 - 4il^3 f_0) &= \\ &= l^2 B f_0 - l^2 4il^3 f_0 = \\ &= \mathbb{L} B f_0 - 4il^3 \mathbb{L} f_0 \end{aligned}$$

já que

$$\mathbb{L} f_0 = l^2 f_0.$$

Segue então

$$w_t f_0 - (B \mathbb{L} - \mathbb{L} B) f_0 = 0.$$

Um cálculo direto fornece

$$(B \mathbb{L} - \mathbb{L} B) f_0 = (6w w_x - w_{xxx}) f_0,$$

de modo que

$$(*) \quad \left[w_t(x,t) - 6w(x,t) w_x(x,t) + w_{xxx}(x,t) \right] \cdot f_0(x,k,t) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, t > 0, k \in \overline{C}_+$$

Dado $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

tem-se

$$f_0(x, k, t) \sim e^{i\ell x} \neq 0$$

ao $x \rightarrow +\infty$,

de modo que (*) implica

$$w_t(x, t) - 6w(x, t)w_x(x, t) + w_{xxx}(x, t) = 0,$$

ou seja,

$$w \text{ satisfaz a equação (1) nos } x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

QED

Resulta então imediato que

$$u(x, t) \equiv 1 - \partial_x B_0(x + 6t, 0, t) = 1 + w(x + 6t, t)$$

satisfaz a equação de Korteweg-de Vries (1) nos $x \in \mathbb{R}, t > 0$.
Quanto à condição (2), pode-se mostrar apenas que

$$(23) \quad \int_a^b u(x, t) dx \rightarrow \int_a^b H(x) dx \quad \text{ao } t \rightarrow 0$$

para cada a, b dados. De fato, do problema direto de espalhamento sabe-se que

$$H(x) = 1 - \partial_x B_0(x, 0, 0),$$

de modo que (23) é consequência imediata da continuidade de B_0 em $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}_+} \times \overline{\mathbb{R}_+}$.

CAPÍTULO II

ESPALHAMENTO ASSOCIADO A SISTEMAS ZS-AKNS

§1 - Introdução

A técnica de solução de problema (I, Cap. I) exposta no capítulo anterior pode ser sumarizada como segue. O perfil inicial $u(x, 0)$, pertencente a uma certa classe \mathcal{L} , é introduzido como potencial na equação de Schrödinger

$$(1) \quad -D^2 \psi + u\psi = \lambda\psi, \quad D \equiv \partial / \partial x$$

sendo determinado um conjunto de parâmetros associados ao problema de autovalores (1) permitindo a reconstrução do potencial u . A identificação desses parâmetros e a elaboração de um procedimento de recuperação do potencial a partir deles constitui a teoria de espalhamento do sistema (1) correspondente à classe \mathcal{L} de potencial. Se u evoluir com t de uma maneira adequada (no caso em questão, a equação *não linear* de Korteweg-de Vries, a *duas* variáveis), pode ser possível determinar a priori a evolução correspondente dos parâmetros de espalhamento, reduzindo a questão de obter $u(x, t)$ a um problema de espalhamento inverso (no caso, uma equação *integral linear* de Fredholm, a *uma* variável). Esse procedimento constitui o método de espalhamento para a solução do problema dado.

É natural perguntar se outros problemas além de (I) podem ser resolvidos seguindo um esquema desse tipo, ou se tal procedimento é inerente à equação de Korteweg-de Vries [4]. Voltando ao Cap. I, a determinação das leis de evolução dos parâmetros de espalhamento associados a (1) apoiou-se fundamentalmente no conhecimento do comportamento de $u(x, t)$ na fronteira $x \rightarrow \pm \infty$ e principalmente no fato de o potencial u ser *iso-spectral*, ou seja, manter invariante com t o espectro de (1) — a descoberta notável de C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal e R.M. Miura [19]. O primeiro ponto a observar é que

outras equações além da KdV exibem essa invariância (P.D. Lax, 1968 [28]). Segundo, outros sistemas diferenciais

$$(2) \quad \mathbb{L} \psi = \lambda \psi, \quad \mathbb{L} = \mathbb{L}(u)$$

podem ser considerados para o problema de espalhamento, e procedimentos sistemáticos para obtenção de equações de evolução conduzindo a potenciais u isoenergéticos têm sido descritos [1], [3], [4], [28]. Portanto, a técnica do Cap. I não é particular à equação de Korteweg-de Vries.

Nesse capítulo, é descrita a teoria de espalhamento de (2) no caso do operador ZS-AKNS

$$(3) \quad \mathbb{L} = i \begin{bmatrix} D & -q \\ r & -D \end{bmatrix}, \quad D \equiv d/dx,$$

onde dois potenciais independentes intervêm, ambos de classe

$$\mathcal{L} \equiv \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f, f' \in L^1(\mathbb{R}), f(x) \rightarrow 0 \text{ ao } x \rightarrow \pm \infty\}.$$

Originalmente, V.E. Zakharov e A.B. Shabat [43] consideraram o caso $r = -q^*$, associado à equação de Schrödinger não linear. A generalização acima, devida a M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell e H. Segur [3], permitiu o tratamento de diversas equações de relevância na Física Matemática [1], [3], [4].

Algumas provas são omitidas quando encontradas em detalhe no Cap. III ou em referências citadas; o tratamento é análogo ao caso do operador de Schrödinger como descrito em [15], Ch. 4. A notação segue Ablowitz [1].

§2 - Teoria de Espalhamento

Nesta seção e na seguinte, serão identificados e estudados parâmetros de espalhamento associados ao sistema ZS-AKNS (2), (3), ou seja,

$$(ZS-AKNS) \quad \frac{d}{dx} \psi = \begin{bmatrix} -i\lambda & q(x) \\ r(x) & i\lambda \end{bmatrix} \psi, \quad \psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

onde

$q, r \in \mathcal{L} \equiv \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f, f' \in L^1(\mathbb{R}), f(x) \rightarrow 0 \text{ ao } x \rightarrow \pm \infty\}$, permitindo a partir deles a recuperação dos potenciais q, r num esquema análogo ao do Cap. I.

Observando que

$$q(x) \rightarrow 0$$

$$\text{ao } x \rightarrow \pm \infty,$$

$$r(x) \rightarrow 0$$

é natural [27] procurar soluções de (ZS-AKNS) na forma

$$\phi \equiv R e^{-i\lambda x}, \quad R \equiv \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\phi} \equiv \tilde{R} e^{i\lambda x}, \quad \tilde{R} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \end{pmatrix}$$

$$\psi \equiv L e^{i\lambda x}, \quad L \equiv \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\psi} \equiv \tilde{L} e^{-i\lambda x} \quad \tilde{L} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{pmatrix}$$

com

$$R(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

$$L(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty$$

Nos $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, isso equivale a procurar soluções R, L para

$$(I) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} R_1(x, \lambda) \\ R_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x \begin{bmatrix} 0 & q(y) \\ r(y)e^{2i\lambda(x-y)} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R_1(y, \lambda) \\ R_2(y, \lambda) \end{pmatrix} dy \\ R(\cdot, \lambda) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-)^2 \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} L_1(x, \lambda) \\ L_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & q(x)e^{2i\lambda(y-x)} \\ r(y) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} L_1(y, \lambda) \\ L_2(y, \lambda) \end{pmatrix} dy \\ L(\cdot, \lambda) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)^2 \end{cases}$$

enquanto para cada $\lambda \in \bar{C}_-$ o problema de encontrar \tilde{R}, \tilde{L} consiste em resolver

$$(I) \quad \begin{bmatrix} \tilde{R}_1(x, \lambda) \\ \tilde{R}_2(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x \begin{bmatrix} 0 & q(y) e^{-2i\lambda(x-y)} \\ r(y) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{R}_1(y, \lambda) \\ \tilde{R}_2(y, \lambda) \end{pmatrix} dy$$

$$\tilde{R}(\cdot, \lambda) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-)^2$$

$$(II) \quad \begin{bmatrix} \tilde{L}_1(x, \lambda) \\ \tilde{L}_2(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & q(y) \\ r(y) e^{-2i\lambda(y-x)} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{L}_1(y, \lambda) \\ \tilde{L}_2(y, \lambda) \end{pmatrix} dy$$

$$\tilde{L}(\cdot, \lambda) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)^2$$

O esquema iterativo usual de resolver essas equações fornece

TEOREMA 1

Seja $q, r \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$

e

$$M \equiv \exp \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |q(x)| dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |r(x)| dx \right),$$

tem-se

- (1) para cada $\lambda \in \bar{C}_+$, os problemas (I), (II) admitem uma única solução, tendo-se ademais

$$R, L \in C^0(\mathbb{R} \times \bar{C}_+, \mathbb{C})^2,$$

$$\left| R(x, \lambda) \right|_{\infty} \leq M$$

$$\forall (x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathcal{C}}_+,$$

$$\left| L(x, \lambda) \right|_{\infty} \leq M$$

e, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$R(x, \cdot)$, $L(x, \cdot)$ analíticas em \mathcal{C}_+

(2) para cada $\lambda \in \bar{\mathcal{C}}_-$, os problemas (I'), (I'') admitem uma única solução, tendo-se admais

$$\tilde{R}, \tilde{L} \in C^0(\mathbb{R} \times \bar{\mathcal{C}}_-, \mathbb{C})^2,$$

$$\left| \tilde{R}(x, \lambda) \right|_{\infty} \leq M$$

$$\forall (x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathcal{C}}_-,$$

$$\left| \tilde{L}(x, \lambda) \right|_{\infty} \leq M$$

e, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$\tilde{R}(x, \cdot)$, $\tilde{L}(x, \cdot)$ analíticas em \mathcal{C}_- .

Para $\lambda \in \mathbb{R}$, existem então as quatro soluções $\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi}$ do sistema (ZS-AKNS) de ordem 2; a relação

$$\psi(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}$$

ao $x \rightarrow +\infty$

$$\tilde{\psi}(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}$$

mostra serem $\psi(\cdot, \lambda)$, $\tilde{\psi}(\cdot, \lambda)$ linearmente independentes, de modo que

$$\phi(\cdot, \lambda) = a(\lambda) \tilde{\psi}(\cdot, \lambda) + b(\lambda) \psi(\cdot, \lambda)$$

$$\tilde{\phi}(\cdot, \lambda) = \tilde{a}(\lambda) \psi(\cdot, \lambda) - \tilde{b}(\lambda) \tilde{\psi}(\cdot, \lambda)$$

para $a(\lambda), \tilde{a}(\lambda), b(\lambda), \tilde{b}(\lambda) \in \mathbb{C}$.

Analogamente, nos $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\psi(\cdot, \lambda) = c(\lambda) \tilde{\phi}(\cdot, \lambda) + d(\lambda) \phi(\cdot, \lambda)$$

$$\tilde{\psi}(\cdot, \lambda) = \tilde{c}(\lambda) \phi(\cdot, \lambda) - \tilde{d}(\lambda) \tilde{\phi}(\cdot, \lambda),$$

e em particular

nos $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$R(x, \lambda) = a(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2i\lambda x} + o(1)$$

$$\tilde{R}(x, \lambda) = \tilde{a}(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tilde{b}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2i\lambda x} + o(1)$$

ao $x \rightarrow +\infty$

enquanto

$$L(x, \lambda) = c(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2i\lambda x} + o(1)$$

$$\tilde{L}(x, \lambda) = \tilde{c}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tilde{d}(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2i\lambda x} + o(1)$$

ao $x \rightarrow -\infty$.

Em particular,

$$W[\phi, \psi] = R_1 L_2 - R_2 L_1 = \begin{cases} c(\lambda) + o(1) & \text{ao } x \rightarrow -\infty \\ a(\lambda) + o(1) & \text{ao } x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$W[\tilde{\phi}, \tilde{\psi}] = \tilde{R}_1 \tilde{L}_2 - \tilde{R}_2 \tilde{L}_1 = \begin{cases} -\tilde{c}(\lambda) + o(1) & \text{ao } x \rightarrow -\infty \\ -\tilde{a}(\lambda) + o(1) & \text{ao } x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Como o wronskiano de um par qualquer de soluções de (ZS-AKNS) não depende de x ,

segue então

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= c(\lambda) = W [\phi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda)] \\ \tilde{a}(\lambda) &= \tilde{c}(\lambda) = -W [\tilde{\phi}(\cdot, \lambda), \tilde{\psi}(\cdot, \lambda)] \end{aligned} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

de modo que a, c têm extensões analíticas a C_+ e \tilde{a}, \tilde{c} a C_- .

Analogamente, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \tilde{d}(\lambda) = -W [\phi(\cdot, \lambda), \tilde{\psi}(\cdot, \lambda)] \\ \tilde{b}(\lambda) &= d(\lambda) = -W [\tilde{\phi}(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda)]. \end{aligned}$$

É imediato então do Teorema 1

COROLÁRIO 2

Nas hipóteses do Teorema 1, tem-se:

$$(i) \quad a, c \in C^0(\bar{C}_+, \mathbb{C}) \cap L^\infty(\bar{C}_+) \quad \text{analíticas em } C_+$$

$$\tilde{a}, \tilde{c} \in C^0(\bar{C}_-, \mathbb{C}) \cap L^\infty(\bar{C}_-) \quad \text{analíticas em } C_-$$

$$(ii) \quad b, \tilde{b}, d, \tilde{d} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$

Finalmente, levando-se em conta $W[\phi, \tilde{\phi}]$, $W[\psi, \tilde{\psi}]$, obtém-se que

$$a(\lambda) \tilde{a}(\lambda) + b(\lambda) \tilde{b}(\lambda) = 1$$

$$c(\lambda) \tilde{c}(\lambda) + d(\lambda) \tilde{d}(\lambda) = 1.$$

TEOREMA 3

Se $q, \kappa \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$,

tem-se

$$(i) \quad R(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty, \quad \lambda \in \bar{C}_+$$

$$L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty, \quad \lambda \in \bar{C}_+$$

com $o(1)$ valendo uniformemente em λ em \bar{C}_+

$$(ii) \quad \tilde{R}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty, \quad \lambda \in \bar{C}_-$$

$$\tilde{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty, \quad \lambda \in \bar{C}_-$$

com $o(1)$ valendo uniformemente em λ em \bar{C}_-

$$(iii) \quad R_1(x, \lambda) = a(\lambda) + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty, \quad \lambda \in \bar{C}_+$$

$$L_2(x, \lambda) = a(\lambda) + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty, \quad \lambda \in \bar{C}_+$$

com $o(1)$ valendo uniformemente em λ em \bar{C}_+

$$(iv) \quad R_2(x, \lambda) = o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty, \quad \lambda \in C_+$$

$$L_1(x, \lambda) = o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty, \quad \lambda \in C_+$$

com $o(1)$ valendo uniformemente em $\text{Im } \lambda \geq B$
para cada $B > 0$

$$(v) \quad \tilde{R}_2(x, \lambda) = \tilde{a}(\lambda) + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty, \quad \lambda \in \bar{C}_-$$

$$\tilde{L}_1(x, \lambda) = \tilde{a}(\lambda) + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty, \quad \lambda \in \bar{C}_-$$

com $o(1)$ valendo uniformemente em λ em \bar{C}_-

$$(vi) \quad \tilde{R}_1(x, \lambda) = o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty, \quad \lambda \in C_-$$

$$\tilde{L}_2(x, \lambda) = o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty, \quad \lambda \in C_-$$

com $o(1)$ valendo uniformemente em $\text{Im } \lambda \leq -B$
para cada $B > 0$

$$(vii) \quad R_2(x, \lambda) = b(\lambda) e^{2i\lambda x} + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{R}_1(x, \lambda) = -\tilde{b}(\lambda) e^{-2i\lambda x} + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$L_1(x, \lambda) = \tilde{b}(\lambda) e^{-2i\lambda x} + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{L}_2(x, \lambda) = -b(\lambda) e^{2i\lambda x} + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty, \lambda \in \mathbb{R}$$

com $o(1)$ valendo uniformemente em λ em \mathbb{R} .

PROVA:

- (i) Segue imediato de (I), (II), observando que

$$R, L \in L^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{C}_+})^2$$

- (ii) Imediato de (\tilde{Q}_1) , (\tilde{Q}_2) e do fato

$$\tilde{R}, \tilde{L} \in L^\infty(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{C}_-})^2$$

- (iii) Tem-se

$$a(\lambda) = R_1(x, \lambda) L_2(x, \lambda) - R_2(x, \lambda) L_1(x, \lambda) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

de modo que o resultado segue imediato de (i)

- (iv) Dado $B > 0$, e sendo $\text{Im } \lambda \geq B$, segue de

$$R_2(x, \lambda) = \int_{-\infty}^x r(y) e^{2i\lambda(x-y)} R_1(y, \lambda) dy$$

que, nos $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
|R_2(x, \lambda)| &\leq \int_{-\infty}^{x/2} |r(y)| e^{-2B(x-y)} |R_1(y, \lambda)| dy + \\
&+ \int_{x/2}^x |r(y)| |R_1(y, \lambda)| dy \leq \\
&\leq M \left(e^{-Bx} \int_{-\infty}^{+\infty} |r(y)| dy + \int_{x/2}^{+\infty} |r(y)| dy \right)
\end{aligned}$$

Analogamente, nos $\text{Im } \lambda \geq B$:

$$|L_1(x, \lambda)| \leq M \left(e^{-Bx} \int_{-\infty}^{+\infty} |q(y)| dy + \int_{-\infty}^{x/2} |q(y)| dy \right) \forall x \leq 0.$$

- (v) Análogo a (iii)
 (vi) Análogo a (iv)
 (vii) Tem-se, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$L_1(x, \lambda) = a(\lambda) \tilde{R}_1(x, \lambda) + \tilde{b}(\lambda) R_1(x, \lambda) e^{-2i\lambda x};$$

de (i), (ii) e Corolário 2
 segue então

$$L_1(x, \lambda) = \tilde{b}(\lambda) e^{-2i\lambda x} + o(1) \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

uniformemente nos $\lambda \in \mathbb{R}$.

Analogamente para R_2 , \tilde{R}_1 e \tilde{L}_2 .

QED

Resulta imediato então a seguinte representação para os coeficientes a , \tilde{a} , b , \tilde{b} :

COROLÁRIO 4

Seendo $q, \kappa \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$,
tem-se

$$(i) \quad a(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) R_2(y, \lambda) dy = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(y) L_1(y, \lambda) dy$$

$$\forall \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+$$

$$(ii) \quad \tilde{a}(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(y) \tilde{R}_1(y, \lambda) dy = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) \tilde{L}_2(y, \lambda) dy$$

$$\forall \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_-$$

$$(iii) \quad b(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(y) e^{-2i\lambda y} R_1(y, \lambda) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa(y) e^{-2i\lambda y} \tilde{L}_1(y, \lambda) dy$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad \tilde{b}(\lambda) = - \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) e^{2i\lambda y} \tilde{R}_2(y, \lambda) dy = - \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) e^{2i\lambda y} L_2(y, \lambda) dy$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Resta finalmente obter o comportamento assintótico das funções de Jost ao $\lambda \rightarrow \infty$.

Seja por exemplo $\psi(x, \lambda) = L(x, \lambda) e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+$.

Da teoria de equações diferenciais ([8], Ch. 4) é natural esperar

$$L(x, \lambda) = L^{(0)}(x) + \frac{1}{\lambda} L^{(1)}(x, \lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

substituindo em (II), vem

$$L^{(0)}(x) + \frac{1}{\lambda} L^{(1)}(x, \lambda) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & q(y)e^{2i\lambda(y-x)} \\ r(y) & 0 \end{bmatrix} L^{(0)}(y) dy \\ - \frac{1}{\lambda} \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & q(y)e^{2i\lambda(y-x)} \\ r(y) & 0 \end{bmatrix} L^{(1)}(y, \lambda) dy ,$$

onde se supõe

$$\int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & q(y)e^{2i\lambda(y-x)} \\ r(y) & 0 \end{bmatrix} o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) dy = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) .$$

Se $q' \in L^1(0, +\infty)$, tem-se, integrando por partes,

$$\int_x^{+\infty} q(y)e^{2i\lambda(y-x)} dy = -\frac{1}{2i\lambda} q(x) - \frac{1}{2i\lambda} \int_x^{+\infty} q'(y)e^{2i\lambda(y-x)} dy ,$$

de modo que é natural tomar

$$L^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

tendo-se então

$$\frac{1}{\lambda} L^{(1)}(x, \lambda) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = - \int_x^{+\infty} \begin{pmatrix} q(y)e^{2i\lambda(y-x)} \\ 0 \end{pmatrix} dy +$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\lambda} \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & q(y) e^{2i\lambda(y-x)} \\ r(y) & 0 \end{bmatrix} L^{(1)}(y, \lambda) dy = \\
& = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{2i} q(x) + \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} q'(y) e^{2i\lambda(y-x)} dy \right) + \\
& - \frac{1}{\lambda} \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & q(y) e^{2i\lambda(y-x)} \\ r(y) & 0 \end{bmatrix} L^{(1)}(y, \lambda) dy,
\end{aligned}$$

de onde parece natural tomar

$$L_1^{(1)}(x, \lambda) \equiv \frac{1}{2i} \left(q(x) + \int_x^{+\infty} q'(y) e^{2i\lambda(y-x)} dy \right),$$

com o que

$$\begin{aligned}
L_2^{(1)}(x, \lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= - \int_x^{+\infty} r(y) L_1^{(1)}(y, \lambda) dy = \\
&= - \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} r(y) q(y) dy - \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} r(y) \left[\int_y^{+\infty} q'(t) e^{2i\lambda(t-y)} dt \right] dy.
\end{aligned}$$

Se $r' \in L^1(0, +\infty)$, segue então, integrando-se por partes,

$$r(y) \int_x^{+\infty} \left[\int_y^{+\infty} q'(t) e^{2i\lambda(t-y)} dt \right] dy = o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

de onde

$$L_2^{(1)}(x, \lambda) = -\frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} r(y) q(y) dy$$

Espera-se portanto ter

$$L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\lambda} \begin{pmatrix} q(x) + \int_x^{+\infty} q'(y) e^{-2i\lambda(x-y)} dy \\ - \int_x^{+\infty} q(y) r(y) dy \end{pmatrix} + \rho(x, \lambda)$$

com

$$\rho(x, \lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{ao } \lambda \rightarrow \infty \text{ em } \bar{\mathbb{C}}_+$$

no caso

$$q, r \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

$$q', r' \in L^1(\mathbb{R})$$

$$q(x), r(x) \rightarrow 0 \quad \text{ao } x \rightarrow \pm \infty.$$

Para a prova, observa-se que $\rho(x, \lambda)$ é dado por

$$(*) \quad \rho(x, \lambda) = \begin{pmatrix} f_1(x, \lambda) \\ f_2(x, \lambda) \end{pmatrix} - \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & q(y) e^{2i\lambda(y-x)} \\ r(y) & 0 \end{bmatrix} \rho(y, \lambda) dy$$

onde

$$f_1(x, \lambda) \equiv \frac{1}{(2i\lambda)^2} \left[\int_x^{+\infty} q(y)^2 r(y) e^{2i\lambda(y-x)} dy - q(x) \int_x^{+\infty} q(y) r(y) dy + \right. \\ \left. - \int_x^{+\infty} q'(y) \left[\int_y^{+\infty} q(t) r(t) dt \right] e^{2i\lambda(y-x)} dy \right]$$

$$f_2(x, \lambda) \equiv \frac{1}{(2i\lambda)^2} \left[\int_x^{+\infty} q'(y) r(y) dy - r(x) \int_x^{+\infty} q'(y) e^{2i\lambda(y-x)} dy + \right. \\ \left. - \int_x^{+\infty} r'(y) \left[\int_y^{+\infty} q'(t) e^{2i\lambda(t-y)} dt \right] dy \right],$$

de modo que

$$\left| f(x, \lambda) \right|_{\infty} \leq \frac{\text{cte}}{|\lambda|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+ - 0,$$

$$f \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix};$$

a resolução da equação de Volterra (*) pelo procedimento iterativo usual fornece então

$$\left| \rho(x, \lambda) \right|_{\infty} \leq \frac{\text{cte}}{|\lambda|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+ - 0.$$

procedendo analogamente com $R(x, \lambda)$, $\tilde{R}(x, \lambda)$ e $\tilde{L}(x, \lambda)$, obtém-se

TEOREMA 5

Seja

$$q, r \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

com

$$q', r' \in L^1(\mathbb{R})$$

$$q(x), r(x) \rightarrow 0 \quad \text{ao } x \rightarrow \pm \infty,$$

então

$$(i) \quad R(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2i\lambda} \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^x q(y) r(y) dy \\ r(x) - \int_{-\infty}^x r'(y) e^{2i\lambda(x-y)} dy \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\lambda} \begin{pmatrix} q(x) + \int_x^{+\infty} q'(y) e^{2i\lambda(y-x)} dy \\ - \int_x^{+\infty} q(y) r(y) dy \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em $\overline{\mathbb{C}}_+$

onde $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ vale uniformemente em x em \mathbb{R}

$$(ii) \tilde{R}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\lambda} \begin{pmatrix} q(x) - \int_{-\infty}^x q'(y) e^{-2i\lambda(x-y)} dy \\ \int_{-\infty}^x q(y) r(y) dy \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\tilde{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2i\lambda} \begin{pmatrix} \int_x^{+\infty} q(y) r(y) dy \\ -r(x) + \int_x^{+\infty} r'(y) e^{-2i\lambda(y-x)} dy \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em $\overline{\mathbb{C}}_-$, uniformemente nos $x \in \mathbb{R}$.

COROLÁRIO 6

Nas hipóteses do teorema acima, tem-se

$$(i) a(\lambda) = 1 - \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) r(y) dy + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em $\overline{\mathbb{C}}_+$

$$(ii) \tilde{a}(\lambda) = 1 + \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) r(y) dy + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em $\overline{\mathbb{C}}_-$

$$(iii) b(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ ao } \lambda \rightarrow \infty \text{ em } \mathbb{R}$$

tendo-se ademais $b \in L^1(\mathbb{R})$ se $r' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(iv) $\tilde{b}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ao $\lambda \rightarrow \infty$ em \mathbb{R}
 tendo-se ademais $\tilde{b} \in L^1(\mathbb{R})$ se $q' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

PROVA:

(i) Tem-se pelo Corolário 4

$$a(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) R(y, \lambda) dy$$

e daí, pelo Teorema 5

$$a(\lambda) = 1 - \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) r(y) dy +$$

$$+ \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} q(y) \left[\int_{-\infty}^y r'(t) e^{2i\lambda(y-t)} dt \right] dy + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

O resultado segue observando que

$$\int_{-\infty}^y r'(t) e^{2i\lambda(y-t)} dt = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{-\infty}^y r'(t) \frac{e^{2i\lambda(y-t)}}{2i\lambda} dt \right] - \frac{r'(y)}{2i\lambda}$$

(ii) Análogo a (i)

(iii) Do Corolário 4

$$b(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(y) e^{-2i\lambda y} R_1(y, \lambda) dy$$

e então, pelo Teorema 5,

$$b(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(y) e^{-2i\lambda y} dy - \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} r(y) e^{-2i\lambda y} \left[\int_{-\infty}^y q(t) r(t) dt \right] dy + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

Porém, integrando por partes, vem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(y) e^{-2i\lambda y} \left[\int_{-\infty}^y q(t) r(t) dt \right] dy = o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

de modo que

$$\begin{aligned} b(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} r(y) e^{-2i\lambda y} dy + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} r'(y) e^{-2i\lambda y} dy + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) (*) \end{aligned}$$

Da teoria da transformação de Fourier [40],
 r' é $L^1(\mathbb{R})$ dá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r'(y) e^{-2i\lambda y} dy \rightarrow 0 \text{ ao } \lambda \rightarrow \infty \text{ em } \mathbb{R},$$

de modo que

$$b(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ ao } \lambda \rightarrow \pm \infty.$$

Finalmente, se $r' \in L^\infty(\mathbb{R})$,
então

$$r' \in L^2(\mathbb{R})$$

e daí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r'(y) e^{-2i\lambda y} dy \in L^2(\mathbb{R}).$$

Como $b \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, segue de (*) que $b \in L^1(\mathbb{R})$.

(iv) Análogo a (iii)

QED

§3 - Teoria Espectral

Os parâmetros $a(\lambda)$, $\tilde{a}(\lambda)$ descritos na seção anterior podem ser utilizados para uma caracterização algébrica do espectro do operador

$$\mathbb{L} \equiv i \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & -q(x) \\ r(x) & -\frac{d}{dx} \end{bmatrix}$$

num modo análogo ao feito em [15], Ch.4 para o operador de Schrödinger (5, Cap. I). Convém observar que $\mathbb{L}f = \lambda f$ é exatamente o sistema (ZS-AKNS) dado acima.

Para $q, r \in L^\infty(\mathbb{R})$, $W^1(\mathbb{R}) \equiv \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \in L^2(\mathbb{R})\}$, tem-se

$$\mathbb{L} : W^1(\mathbb{R})^2 \longrightarrow L^2(\mathbb{R})^2$$

com adjunto

$$\mathbb{L}^* : W^1(\mathbb{R})^2 \longrightarrow L^2(\mathbb{R})^2$$

dado por

$$\mathbb{L}^* = i \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & -r^*(x) \\ q^*(x) & -\frac{d}{dx} \end{bmatrix},$$

de modo que \mathbb{L} é autoadjunto se e somente se $q = r^*$. Observando que \mathbb{L} é fechado, segue que seu conjunto resolvente $\rho(\mathbb{L})$ é a coleção de todos os $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais

$\mathbb{L} - \lambda I : W^1(\mathbb{R})^2 \rightarrow L^2(\mathbb{R})^2$ é uma bijeção com inversa contínua [40]. Ademais, $\rho(\mathbb{L})$ é aberto em \mathbb{C} , e seu comple-

mentar é o espectro de \mathbb{L} , denotado por $\sigma(\mathbb{L})$. Parte de $\sigma(\mathbb{L})$ é formado pelo espectro pontual de \mathbb{L} , $P\sigma(\mathbb{L})$, que é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais $\mathbb{L} - \lambda I$ deixa de ser inversível [40].

No que segue, será mostrado

TEOREMA 7

Seja $q, r \in C^\circ(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$,

tem-se:

$$(i) \quad \rho(\mathbb{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ : a(\lambda) \neq 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}_- : \tilde{a}(\lambda) \neq 0\}$$

$$(ii) \quad P\sigma(\mathbb{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ : a(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}_- : \tilde{a}(\lambda) = 0\}$$

$$(iii) \quad \sigma(\mathbb{L}) = \mathbb{R} \cup P\sigma(\mathbb{L}) \quad (\text{união disjunta})$$

em analogia com [15], Ch.4, Th.4.3.I.

PROPOSIÇÃO 8

Seja q, r como no Teorema 7, então

$$\{\lambda \in \mathbb{C}_+ : a(\lambda) \neq 0\} \subseteq \rho(\mathbb{L})$$

e

$$\{\lambda \in \mathbb{C}_- : \tilde{a}(\lambda) \neq 0\} \subseteq \rho(\mathbb{L}).$$

PROVA:

Seja $\lambda \in \mathbb{C}_+$ tal que $a(\lambda) \neq 0$;

de

$$a(\lambda) = W[\phi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda)]$$

resulta então que

$\phi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda)$ constituem uma base de soluções para (ZS-AKNS) e do comportamento de $\phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)$ ao $x \rightarrow \pm \infty$ segue em particular que $\lambda \notin P\sigma(\mathbb{L})$.

O resultado então seguirá se for mostrado que

$$(\mathbb{L} - \lambda I)^{-1}: L^2(\mathbb{R})^2 \longrightarrow W^1(\mathbb{R})^2$$

for contínua.

Para isso, seja $f \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in L^2(\mathbb{R})^2$

e considere o problema de se encontrar $\phi \in W^1(\mathbb{R})^2$ tal que

$$(\mathbb{L} - \lambda I) \phi = f,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} \phi = A(x) \phi + \begin{pmatrix} -if_1 \\ if_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$$(\text{com } \phi(\pm \infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}),$$

onde

$$A(x) \equiv \begin{bmatrix} -i\lambda & q(x) \\ r(x) & i\lambda \end{bmatrix}$$

Como

$$B(x) \equiv \left[\begin{array}{c|c} \phi(x, \lambda) & \psi(x, \lambda) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} R_1(x, \lambda) e^{-i\lambda x} & L_1(x, \lambda) e^{i\lambda x} \\ R_2(x, \lambda) e^{-i\lambda x} & L_2(x, \lambda) e^{i\lambda x} \end{bmatrix}$$

é solução fundamental de

$$\frac{d}{dx} \phi = A(x) \phi,$$

procura-se solução de (*) na forma

$$\phi(x) = B(x) \text{Ib}(x), \quad \text{Ib}(x) \equiv \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix}$$

com $b_1(+\infty) = 0, b_2(-\infty) = 0$.

Um cálculo direto fornece

$$\phi(x) = \frac{i}{a(\lambda)} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y; \lambda) f(y) e^{i\lambda|x-y|} dy$$

onde

$$G(x, y; \lambda) \equiv \begin{bmatrix} G_1(x, y; \lambda) & G_2(x, y; \lambda) \\ H_1(x, y; \lambda) & H_2(x, y; \lambda) \end{bmatrix}$$

para

$$G_1(x, y, \lambda) \equiv \begin{cases} R_1(x, \lambda) & L_2(y, \lambda) & \text{se } y > x \\ L_1(x, \lambda) & R_2(y, \lambda) & \text{se } x > y \end{cases}$$

$$G_2(x, y, \lambda) \equiv \begin{cases} R_1(x, \lambda) & L_1(y, \lambda) & \text{se } y \geq x \\ L_1(x, \lambda) & R_1(y, \lambda) & \text{se } x \geq y \end{cases}$$

$$H_1(x, y, \lambda) \equiv \begin{cases} R_2(x, \lambda) & L_2(y, \lambda) & \text{se } y \geq x \\ L_2(x, \lambda) & R_2(y, \lambda) & \text{se } x \geq y \end{cases}$$

$$H_2(x, y, \lambda) \equiv \begin{cases} R_2(x, \lambda) & L_1(y, \lambda) & \text{se } y > x \\ L_2(x, \lambda) & R_1(y, \lambda) & \text{se } x > y \end{cases}$$

Decore daí que $\phi \in L^2(\mathbb{R})^2$

com

$$\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})^2} \leq \text{cte.} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})^2} : \text{de fato,}$$

$$\left| \phi(x) \right|_{\infty} \leq \text{cte.} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(y) \right|_{\infty} \cdot e^{-\text{Im}\lambda \cdot |x-y|} dy$$

e daí

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \phi(x) \right|_{\infty}^2 dx &\leq \text{cte.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\text{Im}\lambda \cdot (|x-y_1| + |x-y_2|)} dx \right] \left| f(y_1) \right|_{\infty} \left| f(y_2) \right|_{\infty} dy_1 dy_2 = \\ &= \text{cte.} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\text{Im}\lambda} + |y_1 - y_2| \right] \left| f(y_1) \right|_{\infty} \left| f(y_2) \right|_{\infty} e^{-\text{Im}\lambda \cdot |y_1 - y_2|} dy_1 dy_2 = \\ &= \text{cte.} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\text{Im}\lambda} + 2|\eta| \right] \cdot e^{-2 \cdot \text{Im}\lambda \cdot |\eta|} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(\zeta + \eta) \right|_{\infty} \left| f(\zeta - \eta) \right|_{\infty} d\zeta \right] d\eta \end{aligned}$$

ou seja, pela desigualdade de Cauchy - Schwarz,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \phi(x) \right|_{\infty}^2 dx \leq \text{cte.} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\text{Im}\lambda} + 2|\eta| \right) \cdot e^{-2 \cdot \text{Im}\lambda \cdot |\eta|} d\eta \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(\zeta) \right|_{\infty}^2 d\zeta \right]$$

Em particular, tem-se $\phi \in W^1(\mathbb{R})^2$

já que, no sentido das distribuições,

$$\phi_1' = -if_1 + q\phi_2 - i\lambda\phi_1$$

$$\phi_2' = if_2 + r\phi_1 + i\lambda\phi_2$$

Portanto, tem-se

$$\mathbb{L} - \lambda I : W^1(\mathbb{R})^2 \rightarrow L^2(\mathbb{R})^2 \quad \text{bijetiva com inversa}$$

contínua, o que mostra $\lambda \in \rho(\mathbb{L})$.

O caso $\lambda \in \mathbb{C}_-$, $\check{a}(\lambda) \neq 0$ é análogo.

QED

Para a caracterização do espectro pontual de \mathbb{L} , serão úteis os dois lemas a seguir.

LEMA 9

Sendo

$$q, r \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

então

para cada $\lambda \in \mathbb{C}_+$ existe uma solução (clássica) $\hat{\phi}(\cdot, \lambda) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$,

$$\hat{\phi} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix}, \text{ do sistema ZS-AKNS}$$

$$\frac{d}{dx} \hat{\phi} = \begin{bmatrix} -i\lambda & q(x) \\ r(x) & i\lambda \end{bmatrix} \hat{\phi}$$

tal que

$$\left| \hat{\phi}_1(x, \lambda) \right| \geq M e^{\operatorname{Im} \lambda \cdot x} \quad \forall x \geq x_0$$

para algum $M > 0$, $x_0 > 0$.

PROVA:

Sejam

$$A(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} -i\lambda & 0 \\ 0 & i\lambda \end{bmatrix}, \quad Q(x) \equiv \begin{bmatrix} 0 & q(x) \\ r(x) & 0 \end{bmatrix}$$

e seja $V(\cdot, \lambda) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$ a solução em \mathbb{R} do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} V = A(\lambda)V + Q(x)V \\ V(x_0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

onde x_0 é tal que

$$\int_{x_0}^{+\infty} |q(y)| dy \leq \frac{1}{4}, \quad \int_{x_0}^{+\infty} |r(y)| dy \leq \frac{1}{4}$$

Tem-se

$$V(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ V(x, \lambda) \end{pmatrix} + \int_{x_0}^x e^{(x-y)A(y)} Q(y) V(y, \lambda) dy$$

onde

$$\begin{pmatrix} 0 \\ V(x, \lambda) \end{pmatrix} \equiv e^{-i\lambda(x-x_0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Considere agora $X > x_0$ qualquer, fixado no que se segue, e seja

$$W_X \equiv C^0([x_0, X], \mathbb{C})^2$$

munido da norma

$$\|W\|_X \equiv \sup_{x_0 \leq x \leq X} |W(x)|_{\infty} e^{-\text{Im}\lambda \cdot (x - x_0)}$$

Nesse espaço de Banach W_X , seja

$$\pi_X : W_X \rightarrow W_X$$

dado por

$$\pi_X [W](x) \equiv \int_{x_0}^x e^{(x-y)A(y)} Q(y) W(y) dy \quad (x_0 \leq x \leq X).$$

Tem-se

π_X contínuo,

com

$$\left\| \pi_X \right\|_{op} \leq \max \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |q(y)| dy, \int_{-\infty}^{+\infty} |r(y)| dy \right) \leq \frac{1}{4}$$

e

$$V(x, \lambda) = V^{(0)}(x, \lambda) + \pi_X [V(\cdot, \lambda)](x) \quad \text{nos } x_0 \leq x \leq X.$$

Daí

$$I - \pi_X : W_X \longrightarrow W_X \quad \text{é inversível,}$$

com

$$\left\| I - \pi_X \right\|_{op} \leq 2$$

e

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} + \pi_X [V] = \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} + \pi_X \left((I - \pi_X)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} \right),$$

de onde

$$\left\| V - \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} \right\|_X \leq \left\| \pi_X \right\|_{op} \left\| (I - \pi_X)^{-1} \right\|_{op} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} \right\|_X \leq \frac{1}{2}.$$

Em particular, nos $x \in [x_0, X]$:

$$\begin{aligned} \left| V_1(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \end{pmatrix}(x, \lambda) \right| &\leq \left| V(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}(x, \lambda) \right|_{\infty} \leq \\ &\leq \left\| V - \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix} \right\|_X e^{\operatorname{Im} \lambda \cdot (x - x_0)} \leq \frac{1}{2} e^{\operatorname{Im} \lambda \cdot (x - x_0)} \end{aligned}$$

e então

$$\left| V_1(x, \lambda) \right| \geq \left| \begin{pmatrix} 0 \\ V_1 \end{pmatrix}(x, \lambda) \right| - \frac{1}{2} e^{\operatorname{Im} \lambda \cdot (x - x_0)} = \frac{1}{2} e^{\operatorname{Im} \lambda \cdot (x - x_0)}$$

Como $x > x_0$ é arbitrário,
segue então

$$|V_1(x, \cdot)| \geq \frac{1}{2} e^{\operatorname{Im}\lambda \cdot (x - x_0)} \quad \forall x \geq x_0$$

QED

Analogamente, pode-se mostrar

LEMA 10

Sendo

$$q, r \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}).$$

então

para cada $\lambda \in \mathbb{C}_-$
existe uma solução $\hat{\Psi}(\cdot, \lambda) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$,

$$\hat{\Psi} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_1 \\ \hat{\Psi}_2 \end{pmatrix}, \text{ do sistema ZS-AKNS}$$

$$\frac{d}{dx} \Psi = \begin{bmatrix} -i\lambda & q(x) \\ r(x) & i\lambda \end{bmatrix} \Psi$$

tal que

$$|\hat{\Psi}_2(x, \lambda)| \geq M \cdot e^{-\operatorname{Im}\lambda \cdot x} \quad \forall x \geq x_0$$

para algum $M > 0$, $x_0 > 0$.

Resulta daí

PROPOSIÇÃO 11

Sendo

$$q, r \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),$$

tem-se

$$(i) \quad \{\lambda \in \mathbb{C}_+ : a(\lambda) = 0\} \subset P_{\sigma}(\mathbb{L})$$

$$(ii) \quad \{\lambda \in \mathbb{C}_- : \tilde{a}(\lambda) = 0\} \subset P_{\sigma}(\mathbb{L})$$

PROVA

(i) Seja $\lambda \in \mathbb{C}_+$ tal que $a(\lambda) = 0$, e considere a solução $\hat{\phi}(\cdot, \lambda)$ de (ZS) dada pelo Lema 9.

Como

$$\psi(x, \lambda) = L(x, \lambda) e^{i\lambda x} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \text{ de-}$$

cai exponencialmente ao $x \rightarrow +\infty$,

tem-se

$\psi(\cdot, \lambda)$, $\hat{\phi}(\cdot, \lambda)$ linearmente independentes e em particular

$$\phi(\cdot, \lambda) = \alpha \cdot \psi(\cdot, \lambda) + \beta \cdot \hat{\phi}(\cdot, \lambda) \text{ para } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Tem-se então

$$R_1(x, \lambda) = \alpha \cdot L_1(x, \lambda) e^{2i\lambda x} + \beta \cdot \hat{\phi}_1(x, \lambda) e^{i\lambda x},$$

o que dá, para todo x suficientemente grande,

$$\begin{aligned} |R_1(x, \lambda)| &\geq |\beta| |\hat{\phi}_1(x, \lambda)| e^{-\text{Im}\lambda x} - |\alpha| |L_1(x, \lambda)| e^{-2 \cdot \text{Im}\lambda x} \\ &\geq M |\beta| - |\alpha| |L_1(x, \lambda)| e^{-2 \text{Im}\lambda x} \end{aligned}$$

para algum $M > 0$;

fazendo $x \rightarrow +\infty$, vem pelo Teorema 3 (iii)

$$0 = |a(\lambda)| \geq M |\beta|,$$

ou seja, $\beta = 0$.

Portanto, para tal λ existe $\alpha \in \mathbb{C}$

tal que

$$\phi(\cdot, \lambda) = \alpha \cdot \psi(\cdot, \lambda) :$$

em particular, $\phi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda) \in W^1(\mathbb{R})^2$

e $\mathbb{L}\phi(\cdot, \lambda) = \lambda \phi(\cdot, \lambda), \mathbb{L}\psi(\cdot, \lambda) = \lambda \psi(\cdot, \lambda)$, de modo que λ é valor próprio de \mathbb{L} , sendo $\phi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda)$ autofunções associadas.

(ii) Análogo, usando o Lema 10

QED

A demonstração do Teorema 7 fica completa com

PROPOSIÇÃO 12

Sendo

$$q, r \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}),$$

então

(i) $\mathbb{R} \subset \sigma(\mathbb{L})$

(ii) \mathbb{R} não contém nenhum valor próprio de \mathbb{L} ,
ou seja,

$$\mathbb{R} \cap P\sigma(\mathbb{L}) \text{ é vazio}$$

PROVA:

Claramente $\lambda \in \sigma(\mathbb{L})$ se for possível encontrar uma seqüência $(\phi_n)_n \subset W^1(\mathbb{R})^2 - 0$ tal que

$$\frac{\|(\mathbb{L} - \lambda I) \phi_n\|_{L^2(\mathbb{R})^2}}{\|\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R})^2}} \rightarrow 0 \quad \text{ao } n \rightarrow +\infty$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, considere a função de Jost

$$\psi(x, \lambda) = L(x, \lambda) e^{i\lambda x}$$

e, tomando $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

tal que

$$\alpha(x) = 1 \text{ nos } x \in [0, 1]$$

$$\alpha(x) = 0 \text{ nos } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2$$

$$0 \leq \alpha(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

considere

$$\alpha_n(x) \equiv \alpha\left(\frac{x}{n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Tem-se

$$\psi^{[n]} \equiv \alpha_n \cdot \psi(\cdot, \lambda) \in W^1(\mathbb{R})^2$$

e

$$\begin{aligned} \left\| \psi^{[n]} \right\|_{L^2(\mathbb{R})^2} &\geq \left\| \alpha_n(x) \cdot L_2(x, \lambda) e^{i\lambda x} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \\ &\geq \int_0^n |L_2(x, \lambda)|^2 dx \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

enquanto

$$\left\| (\mathbb{L} - \lambda I) \psi^{[n]} \right\|_{L^2(\mathbb{R})^2} \leq \text{cte.} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n'(x)^2 dx \rightarrow 0$$

ao $n \rightarrow +\infty$,

de modo que pela observação acima $\lambda \in \sigma(\mathbb{L})$.

Porém $\lambda \in P\sigma(\mathbb{L})$,
 porque

se $\phi \in W^1(\mathbb{R})^2$ satisfaz $\mathbb{L}\phi = \lambda\phi$,
 então em particular

$$\phi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$$

e daí

$$\phi = \alpha \cdot \psi(\cdot, \lambda) + \beta \cdot \tilde{\psi}(\cdot, \lambda);$$

agora,

$$\phi \in L^2(\mathbb{R})^2$$

claramente acarreta então $\alpha = \beta = 0$,
 ou seja, $\phi = 0$.

QED

COROLÁRIO 13

Sendo $q, r \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$,

então

- (i) cada valor próprio do operador \mathbb{L} é SIMPLES, ou seja, o espaço correspondente das funções próprias tem dimensão 1
- (ii) para cada $\lambda \in C_+ \cap P\sigma(\mathbb{L})$, $\phi(\cdot, \lambda)$ e $\psi(\cdot, \lambda)$ são funções próprias de \mathbb{L} associadas ao valor próprio λ
- (iii) para cada $\lambda \in C_- \cap P\sigma(\mathbb{L})$, $\tilde{\phi}(\cdot, \lambda)$ e $\tilde{\psi}(\cdot, \lambda)$ são funções próprias de \mathbb{L} associadas ao valor próprio λ

PROVA:

- (i) Sendo $\lambda \in C_+ \cap P\sigma(\mathbb{L})$
 e sendo $\phi \in W^1(\mathbb{R})^2$ uma função própria associada, considere a solução $\hat{\phi}(\cdot, \lambda)$ de (ZS-AKNS) dada pelo Lema 9.

Claramente

$$\phi = \alpha \cdot \psi(\cdot, \lambda) + \beta \cdot \hat{\phi}(\cdot, \lambda) ;$$

como

$$|\hat{\phi}(x, \lambda)|_{\infty} \geq M e^{\operatorname{Im} \lambda \cdot x} \quad \forall x \geq x_0$$

(para algum $M > 0$, $x_0 > 0$)

e

$$\phi \in L^2(\mathbb{R})^2,$$

segue que $\beta = 0$,

ou seja,

$$\phi = \alpha \cdot \psi(\cdot, \lambda) \text{ para algum } \alpha \in \mathbb{C}.$$

O caso $\lambda \in \mathbb{C}_- \cap P\sigma(\mathbb{L})$ é tratado de modo análogo, utilizando o Lema 10.

(ii), (iii) decorrem da prova da Proposição 11.

QED

COROLÁRIO 14

Sendo

$$q, r \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

com

$$q', r' \in L^1(\mathbb{R})$$

$$q(x) \rightarrow 0, r(x) \rightarrow 0 \text{ ao } x \rightarrow \pm \infty,$$

então

o espectro pontual do operador \mathbb{L} de Zakharov-Shabat / AKNS é limitado, e FINITO (possivelmente vazio) ou INFINITO ENUMERÁVEL sem pontos de acumulação em $\mathbb{C}-\mathbb{R}$.

PROVA:

Imediata do Teorema 7 e Corolário 6, levando em conta a analiticidade dos coeficientes a, \tilde{a} .

QED

Pode-se mostrar ademais [15], Ch.5 que os zeros em C_+ (C_-) de $a(\lambda)$ ($\tilde{a}(\lambda)$) são SIMPLES, ou seja, tem-se

$$\frac{da}{d\lambda}(\lambda_0) \neq 0 \quad \text{para cada } \lambda_0 \in C_+ \cap P\sigma(\mathbb{L})$$

$$\frac{d\tilde{a}}{d\lambda}(\lambda_0) \neq 0 \quad \text{para cada } \lambda_0 \in C_- \cap P\sigma(\mathbb{L}).$$

Vale também a representação

PROPOSIÇÃO 15

Sendo $q, \kappa \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$,

tem-se

(i) para cada $\lambda_0 \in C_+ \cap P\sigma(\mathbb{L})$:

$$\frac{da}{d\lambda}(\lambda_0) = \frac{2}{i\alpha(\lambda_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x, \lambda_0) \phi_2(x, \lambda_0) dx$$

onde $\alpha(\lambda_0) \in \mathbb{C}$ é a constante de proporcionalidade entre as autofunções de Jost $\phi(\cdot, \lambda_0)$ e $\psi(\cdot, \lambda_0)$, ou seja,

$$\phi(\cdot, \lambda_0) = \alpha(\lambda_0) \cdot \psi(\cdot, \lambda_0)$$

(ii) para cada $\lambda_0 \in C_- \cap P\sigma(\mathbb{L})$:

$$\frac{d\tilde{a}}{d\lambda}(\lambda_0) = \frac{-2}{i\tilde{\alpha}(\lambda_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}_1(x, \lambda_0) \tilde{\phi}_2(x, \lambda_0) dx$$

onde

$\tilde{\alpha}(\lambda_0) \in \mathbb{C}$ é a constante de proporcionalidade entre as autofunções de Jost $\tilde{\phi}(\cdot, \lambda_0)$ e $\tilde{\psi}(\cdot, \lambda_0)$, ou seja,

$$\tilde{\phi}(\cdot, \lambda_0) = \tilde{\alpha}(\lambda_0) \tilde{\psi}(\cdot, \lambda_0).$$

PROVA:

(i) Do Teorema 3 (iii), (iv) decorre

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda}(x, \lambda) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{da}{d\lambda}(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty, \lambda \in C_+.$$

Definindo

$$w : \mathbb{R} \times C_+ \rightarrow \mathbb{C}$$

por

$$w(x, \lambda) \equiv \left[\frac{\partial R_1}{\partial \lambda}(x, \lambda) R_2(x, \lambda) - R_1(x, \lambda) \frac{\partial R_2}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right] e^{-2i\lambda x},$$

obtém-se

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, \lambda) = -2i \phi_1(x, \lambda) \phi_2(x, \lambda)$$

e então

$$w(x, \lambda) = -2i \int_{-\infty}^x \phi_1(y, \lambda) \phi_2(y, \lambda) dy \quad (*)$$

Para $\lambda = \lambda_0 \in C_+ \cap P\sigma(\mathbb{L})$,

tem-se pelo Teorema 3

$$R_1(x, \lambda_0) \cdot e^{-2i\lambda_0 x} \rightarrow 0 \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty,$$

$$R_2(x, \lambda_0) \cdot e^{-2i\lambda_0 x} \rightarrow \alpha(\lambda_0)$$

de onde segue o resultado fazendo $x \rightarrow +\infty$ em (*).

(ii) Análogo, utilizando

$$\tilde{w} : \mathbb{R} \times C_- \rightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$\tilde{w}(x, \lambda) \equiv \left[\frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial \lambda}(x, \lambda) \tilde{R}_1(x, \lambda) - \tilde{R}_2(x, \lambda) \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial \lambda}(x, \lambda) \right] e^{2i\lambda x}$$

QED

Considere agora o caso em que os potenciais q , r dependem de um parâmetro adicional t , variando num certo intervalo I , ou seja, $q = q(x, t)$, $r = r(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in I$. As estimativas das seções precedentes valerão uniformemente (em t) sobre compactos $\underline{C} I$ se cada hipótese sobre $q(x)$, $r(x)$ for substituída pela correspondente sobre $q(x, t)$, $r(x, t)$ com uniformidade (em t) sobre compactos $\underline{C} I$.

Ademais, se

$$q, r \in C^1(\mathbb{R} \times I, \mathbb{C})$$

com

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |q(x, t)| dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |q_t(x, t)| dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |r(x, t)| dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |r_t(x, t)| dx$$

uniformemente convergentes sobre os compactos $\underline{C} I$, então valerá

$$R, L \in C^1(\mathbb{R} \times I \times \bar{C}_+, \mathbb{C})^2$$

$$\tilde{R}, \tilde{L} \in C^1(\mathbb{R} \times I \times \bar{C}_-, \mathbb{C})^2$$

$$a = a(t, \lambda) \in C^1(I \times \bar{C}_+, \mathbb{C})$$

$$\tilde{a} = \tilde{a}(t, \lambda) \in C^1(I \times \bar{C}_-, \mathbb{C})$$

Seja então a família de operadores ZS-AKNS

$$L(t) \equiv \begin{bmatrix} i \frac{d}{dx} & -iq(x, t) \\ ir(x, t) & -i \frac{d}{dx} \end{bmatrix} : W^1(\mathbb{R})^2 \rightarrow L^2(\mathbb{R})^2$$

indexada pelo parâmetro t em I ,
onde, naturalmente, é suposto

$$q(\cdot, t), r(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ para cada } t \in I.$$

Uma aplicação

$$\lambda : J \rightarrow \mathbb{C}, \quad J \text{ intervalo } \underline{C} I,$$

é dita uma C^1 -trajetória (ou simplesmente trajetória) de autovalores de $\mathbb{L}(t)$ se ocorrer

(i) $\lambda \in C^1(J, \mathbb{C})$

(ii) $\lambda(t) \in P\sigma(\mathbb{L}(t))$ para cada $t \in J$

(iii) o intervalo de definição J não pode ser estendido a um intervalo maior $J' \underline{C} I$ com preservação das propriedades (i) e (ii).

Como conseqüência dos resultados acima, tem-se que (sob hipóteses razoáveis sobre q, r) os valores próprios de $\mathbb{L}(t)$ formam C^1 -trajetórias, ou mais exatamente

TEOREMA 16

Sendo

$$q, r \in C^1(\mathbb{R} \times I, \mathbb{C})$$

com

(i) $q(\cdot, t), r(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R})$ para cada $t \in I$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} |q(x, t)| dx, \int_{-\infty}^{+\infty} |q_x(x, t)| dx, \int_{-\infty}^{+\infty} |r(x, t)| dx, \int_{-\infty}^{+\infty} |r_x(x, t)| dx$

uniformemente convergentes sobre compactos $\underline{C} I$,

ENTÃO

(i) dados $t_0 \in I$ e $\lambda_0 \in P\sigma(\mathbb{L}(t_0))$,
 existe uma única C^1 -trajetória de autovalores $\lambda : J \rightarrow \mathbb{C}$
 com $\lambda(t_0) = \lambda_0$

(ii) duas trajetórias de valores próprios não se interceptam,
 ou seja,

sendo

$$\lambda : J_\lambda \rightarrow \mathbb{C}, \mu : J_\mu \rightarrow \mathbb{C} \text{ trajetórias distintas,}$$

então

$$\lambda(t) \neq \mu(t) \quad \forall t \in J_\lambda \cap J_\mu$$

(iii) se o intervalo (maximal) de existência J_λ de uma trajetória λ for aberto num extremo T que pertença ao intervalo I ,

então

$$\text{dist}(\lambda(t), \mathbb{R}) \rightarrow 0 \quad \text{ao } t \rightarrow T \text{ em } J_\lambda.$$

PROVA:

(i) Tem-se, se $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$,

$$a(t_0, \lambda_0) = 0$$

$$\frac{\partial a}{\partial \lambda}(t_0, \lambda_0) \neq 0$$

onde $a \in C^1(I \times \mathbb{C}_+, \mathbb{C})$: o resultado segue então imediato do teorema da função implícita. O caso $\lambda_0 \in \mathbb{C}_-$ é análogo, considerando-se a função \tilde{a} .

(ii) Se

$$\lambda : J_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\mu : J_\mu \rightarrow \mathbb{C}$$

denotam duas trajetórias distintas em intervalos com in-

tersecção $J_{\lambda\mu}$ não vazia, então (pela maximalidade de J_λ, J_μ) existe $t_0 \in J_{\lambda\mu}$ tal que $\lambda(t_0) \neq \mu(t_0)$.

Se ocorresse $t_1 \in J_{\lambda\mu}$ com $\lambda(t_1) = \mu(t_1)$, o teorema da função implícita (aplicado à equação $a(t, \lambda) = 0$ ou $\tilde{a}(t, \lambda) = 0$, conforme o caso) daria $\lambda(t) = \mu(t)$ em toda uma vizinhança de t_1 , e repetindo sucessivamente este argumento valeria

$$\lambda(t) = \mu(t) \quad \forall t \in J_{\lambda\mu},$$

contradizendo a existência de t_0 .

(iii) Suponha por exemplo

$$\lambda(t) \in C_+ \quad \forall t \in J_\lambda.$$

Se não ocorresse

$\text{dist}(\lambda(t), \mathbb{R}) \rightarrow 0$ ao $t \rightarrow T$ em J_λ , $T \in I$, existiria $(t_n)_n \subset J_\lambda$ com $t_n \rightarrow T$ e $\lambda(t_n) \rightarrow \lambda_0 \in C_+$; como $T \in I$, valeria $a(T, \lambda_0) = 0$, de modo que $\lambda_0 \in P\sigma(\mathbb{L}(T))$ e existiria uma trajetória

$$\mu : J_\mu \rightarrow \mathbb{C}$$

com $T \in J_\mu$, $\mu(T) = \lambda_0$.

Pela unicidade da solução $\mu = \mu(t)$ (em torno de λ_0) da equação

$$a(t, \mu) = 0$$

numa vizinhança de T em I , ter-se-ia de ter

$$\mu(t_n) = \lambda(t_n) \quad \text{para todo } n \text{ grande,}$$

de modo que μ e λ teriam de coincidir, e em particular T pertencia a J_λ .

O caso $\lambda(t) \in C_- \quad \forall t \in J_\lambda$ é análogo.

QED

Os autovalores de $\mathbb{L}(t)$ formam então trajetórias

suaves que não se interceptam. Em geral, o número de autovalores de $\mathbb{L}(t)$ pode variar com t , ou seja, autovalores podem ser criados ou destruídos. Pode-se porém impor equações de evolução para q, r levando a espectro invariante [1], [3], [4], [28], de tal forma a se prever a evolução correspondente dos parâmetros descritos na seção anterior. Nesse caso, a análise dessas equações pode ser feita considerando-se o problema (linear) de espalhamento inverso (§4), num modo análogo ao descrito no Capítulo I para a equação de Korteweg- de Vries.

§4 - Equação de Gelfand - Levitan - Marchenko

Nesta seção será mostrado um procedimento de recuperação das potenciais q , r a partir dos parâmetros introduzidos em §2 (espalhamento inverso), o que é alcançado no Teorema 19.

Definindo, nos $x, s \in \mathbb{R}$,

$$(4) \quad J(x, s) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (L(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) e^{-i\lambda s} d\lambda$$

$$(5) \quad \tilde{J}(x, s) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{L}(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) e^{i\lambda s} d\lambda$$

tem-se pelo Teorema 5

$$J(x, \cdot), \tilde{J}(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})^2$$

com

$$x \rightsquigarrow J(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})^2$$

$$x \rightsquigarrow \tilde{J}(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})^2$$

contínuas.

TEOREMA 17

Sendo

$$q, r \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

com

$$q(x), r(x) \rightarrow 0 \quad \text{ao } x \rightarrow \pm \infty$$

$$q', r' \in L^1(\mathbb{R})$$

então

$$J(x, s) = \begin{cases} N(x, s) & \text{se } s \geq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{J}(x, s) = \begin{cases} \tilde{N}(x, s) & \text{se } s \geq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{se } s < 0 \end{cases}$$

com

$$N, \tilde{N} \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty[, \mathbb{C})^2$$

e

$$N(x, s) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}(x, s) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ao } s \rightarrow +\infty$$

uniformemente (em x) sobre compactos $\underline{\mathbb{C}} \mathbb{R}$.

Ademais,

$$N(x, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} q(x) \\ \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} q(y) \kappa(y) dy \end{pmatrix}$$

e

$$\tilde{N}(x, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} q(y) \kappa(y) dy \\ -\frac{1}{2} \kappa(x) \end{pmatrix}$$

PROVA:

Pelo Teorema 5 (i), observando que

$$q(x) + \int_x^{+\infty} q'(y) e^{-2i\lambda(x-y)} dy = -2i\lambda \int_x^{+\infty} q(y) e^{2i\lambda(y-x)} dy$$

$$\frac{1}{2i\lambda} = \frac{1}{2i(i+\lambda)} + \frac{1}{2\lambda(i+\lambda)},$$

obtem-se

$$L(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \int_x^{+\infty} q(y) e^{2i\lambda(y-x)} dy \\ \frac{1}{2i(i+\lambda)} \int_x^{+\infty} q(y) r(y) dy \end{pmatrix} + \rho(x, \lambda)$$

onde

$$\rho \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{C}}_+, \mathbb{C})^2.$$

Como na prova do Teorema 5, vale

$$|\rho(x, \lambda)|_\infty \leq \frac{M}{|\lambda|^2} \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

para alguma constante $M > 0$,

de modo que

$$x \rightsquigarrow \rho(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})^2$$

é contínua.

Da teoria da transformada de Fourier [40], segue então sendo

$$\hat{\rho}(x, s) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, \lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda$$

$$C_{+0}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \equiv \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f(x) \rightarrow 0 \text{ ao } x \rightarrow \pm \infty\}$$

que

$$\hat{\rho}(x, \cdot) \in C_{\rightarrow 0}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$$

com

$$x \rightsquigarrow \hat{\rho}(x, \cdot) \in C_{\rightarrow 0}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \quad \text{contínua,}$$

ou seja,

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} |\hat{\rho}(x, s) - \hat{\rho}(\bar{x}, s)|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{ao } x \rightarrow \bar{x} \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

$s \in \mathbb{R}$

para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

Em particular,

$$\hat{\rho} \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})^2$$

e

$$\hat{\rho}(x, s) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ao } s \rightarrow \pm \infty$$

uniformemente (em x) sobre compactos $\underline{C} \mathbb{R}$.

Observando que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$\rho(x, \cdot)$ é analítica em \mathbb{C}_+ , contínua em $\overline{\mathbb{C}}_+$

e nos $s < 0$

$$\int_{\substack{|z| = R \\ z \in \mathbb{C}_+}} \rho(x, z) e^{-isz} dz \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ao } R \rightarrow +\infty,$$

segue do teorema dos resíduos que

$$\hat{\rho}(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, \lambda) e^{-i\lambda s} d\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s \leq 0$$

Por outro lado,

$$\int_x^{+\infty} q(y) e^{2i\lambda(y-x)} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} q\left(x + \frac{s}{2}\right) e^{i\lambda s} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H(s) q\left(x + \frac{s}{2}\right) e^{i\lambda s} ds,$$

onde H denota a função de Heavyside,

produz

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_x^{+\infty} q(y) e^{2i\lambda(y-x)} dy \right] e^{-i\lambda s} d\lambda = \frac{1}{2} H(s) q\left(x + \frac{s}{2}\right)$$

pelo teorema de inversão da Transformada de Fourier [40].

Analogamente,

$$\int_0^{+\infty} e^{-s} e^{i\lambda s} ds = \frac{1}{1 - i\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

dã

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i(i + \lambda)} e^{-i\lambda s} d\lambda = \frac{1}{2} H(s) e^{-s}$$

Portanto,

$$J(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[L(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-i\lambda s} d\lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} H(s) q\left(x + \frac{s}{2}\right) \\ \frac{1}{2} H(s) e^{-s} \cdot \int_x^{+\infty} q(y) r(y) dy \end{pmatrix} + \hat{\rho}(x, s)$$

de onde segue imediato o resultado sobre $J(x, s)$ e $N(x, s)$. O caso de $\tilde{J}(x, s)$, $\tilde{N}(x, s)$ é tratado de modo análogo.

QED

Em particular, tem-se as seguintes representações de Fourier para $L(x, \lambda)$, $\tilde{L}(x, \lambda)$ nos $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(6) \quad L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^{+\infty} N(x, s) e^{i\lambda s} ds$$

$$(7) \quad \tilde{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^{+\infty} \tilde{N}(x, s) e^{-i\lambda s} ds$$

Na verdade, essas relações valem para um conjunto maior de valores de λ , o que será importante no Teorema 19:

LEMA 18

Nas hipóteses do Teorema 17, tem-se para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$(i) \quad L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^{+\infty} N(x, s) e^{i\lambda s} ds \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

$$(ii) \quad \tilde{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^{+\infty} \tilde{N}(x, s) e^{-i\lambda s} ds \quad \forall \lambda \in \bar{C}_-$$

PROVA:

(i) Seja, nos $\lambda \in \bar{C}_+$,

$$v(\lambda) \equiv L(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F(\lambda)$$

onde

$$F(\lambda) \equiv \int_0^{+\infty} N(x, s) e^{i\lambda s} ds$$

Claramente

$$F \in C^0(\mathbb{C}_+, \mathbb{C})^2$$

e

$$F|_{\mathbb{R}} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \quad \text{já que } F(\lambda) = L(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nos $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema de Cauchy, para cada $\lambda \in \mathbb{C}_+$

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{F(z)}{z - \lambda} dz \quad \forall R > |\lambda|,$$

onde C_R é o caminho formado pelo semicírculo

$\{z \in \mathbb{C}_+ : |z| = R\}$ e o segmento $[-R, R]$,

orientado positivamente.

Em particular, nos $R > |\lambda|$,

$$v(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{v(z)}{z - \lambda} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\pi \frac{v(R e^{i\theta})}{R e^{i\theta} - \lambda} i R e^{i\theta} d\theta$$

já que por (6) $v(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$.

O resultado segue então se for mostrado que

$$\int_0^\pi |v(R e^{i\theta})|_\infty d\theta \rightarrow 0 \quad \text{ao } R \rightarrow +\infty$$

Ora,

$$L(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall |\lambda| \geq 1, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

dã, nos $R \geq 1$:

$$\int_0^\pi \left[L(x, R e^{i\theta}) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\infty d\theta \leq \frac{M\pi}{R} \rightarrow 0 \text{ ao } R \rightarrow +\infty.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |F(R e^{i\theta})|_\infty d\theta &\leq \int_0^\pi \left[\int_0^{+\infty} |N(x, s)|_\infty \cdot e^{-Rs \cdot \text{sen}\theta} ds \right] d\theta \leq \\ &\leq \int_0^\pi \left[\int_0^{+\infty} e^{-2Rs \text{sen}\theta} ds \right]^{1/2} d\theta \cdot \left[\int_0^{+\infty} |N(x, s)|_\infty^2 ds \right]^{1/2} = \\ &= \text{cte.} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\text{sen}\theta}} d\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{R}} \rightarrow 0 \text{ ao } R \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

o que conclui o argumento.

(ii) Análogo a (i), considerando

$$\tilde{v}(\lambda) \equiv \tilde{L}(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tilde{F}(\lambda), \quad \lambda \in \bar{C}_-,$$

onde

$$\tilde{F}(\lambda) \equiv \int_0^{+\infty} \tilde{N}(x, s) e^{-i\lambda s} ds$$

QED

Está-se em posição, afinal, para estabelecer um procedimento de reconstrução dos potenciais q, r a partir dos parâmetros de espalhamento discutidos em §2.

Lembrando que, nos $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$R(x, \lambda) = a(\lambda) \tilde{L}(x, \lambda) + b(\lambda) L(x, \lambda) e^{2i\lambda x}$$

e supondo que o coeficiente $a(\lambda)$ NÃO tenha zeros sobre \mathbb{R} , ou seja,

$$(8) \quad a(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

pode-se escrever

$$\frac{1}{a(\lambda)} R(x, \lambda) = \tilde{L}(x, \lambda) + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} L(x, \lambda) e^{2i\lambda x}$$

Pelos resultados da seção §2, tem-se

$$\frac{1}{a} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

$$\frac{b}{a} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap C^0_{\rightarrow 0}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

De (4), (5) vem

$$\begin{aligned}
 L(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^{+\infty} N(x, s) e^{i\lambda s} ds = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{2\pi} \mathfrak{S}^{-1}[J(x, \cdot)](\lambda) \\
 \tilde{L}(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^{+\infty} \tilde{N}(x, s) e^{-i\lambda s} ds = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2\pi} \mathfrak{S}[\tilde{J}(x, \cdot)](\lambda),
 \end{aligned}$$

onde \mathfrak{S} denota a transformada de Fourier

$$\mathfrak{S}[f](\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{-i\xi\omega} d\omega \equiv \mathfrak{S}_{\omega}[f(\omega)](\xi)$$

e \mathfrak{S}^{-1} sua inversa

$$\mathfrak{S}^{-1}[f](\xi) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\xi\omega} d\omega \equiv \mathfrak{S}_{\omega}^{-1}[f(\omega)](\xi)$$

Tem-se então

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a(\lambda)} R(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{2\pi} \mathfrak{S}[\tilde{J}(x, \cdot)](\lambda) + \\
 &+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{2i\lambda x} + \sqrt{2\pi} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \mathfrak{S}^{-1}[J(x, \cdot)](\lambda) e^{2i\lambda x}
 \end{aligned}$$

o que dá

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\lambda}^{-1} \left[\frac{1}{a(\lambda)} R(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] (x, s) = \tilde{J}(x, s) + \\
 & + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\lambda}^{-1} \left[\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{2i\lambda x} \right] (x, s) + \\
 & + \sum_{\lambda}^{-1} \left[\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{2i\lambda x} \sum_s^{-1} [J(x, s)] (x, \lambda) \right] (x, s)
 \end{aligned}$$

Definindo, nos $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\Omega_{\text{cont}}(\xi) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda \xi} d\lambda,$$

resulta

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\lambda}^{-1} \left[\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{2i\lambda x} \right] (x, s) = \Omega_{\text{cont}}(2x + s)$$

enquanto

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\lambda}^{-1} \left[\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{2i\lambda x} \cdot \sum_y^{-1} [J(x, y)] (x, \lambda) \right] (x, s) = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{2i\lambda x} \left[\int_0^{+\infty} N(x, y) e^{i\lambda y} dy \right] e^{i\lambda s} d\lambda = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} N(x, y) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{i\lambda(2x + y + s)} d\lambda \right] dy = \\
 & (*)
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} N(x, y) \int_{\Omega_{\text{cont}}} (2x + y + s) dy$$

onde a troca na ordem de integração (*) é justificada pelo fato de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{i\lambda y} dy \right] d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda \right] dy$$

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}).$$

Resta considerar o membro esquerdo da expressão (9): escrevendo, para $x \in \mathbb{R}$ fixado,

$$F(\lambda) \equiv \frac{1}{a(\lambda)} R(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$F^{(\varepsilon)}(\lambda) \equiv F(\lambda) \frac{1}{1 - i\varepsilon\lambda} \quad \text{para cada } \varepsilon > 0$$

nos $\lambda \in \mathbb{R}$,

tem-se

$$F \in L^2(\mathbb{R})^2, \quad F^{(\varepsilon)} \in L^1(\mathbb{R})^2 \cap L^2(\mathbb{R})^2$$

e

$$F^{(\varepsilon)} \rightarrow F \quad \text{ao } \varepsilon \searrow 0 \quad \text{em } L^2(\mathbb{R})^2,$$

de modo que

$$\mathfrak{S}^{-1} [F^{(\varepsilon)}] \rightarrow \mathfrak{S}^{-1} [F] \quad \text{em } L^2(\mathbb{R})^2.$$

Para cada $\varepsilon > 0$ dado,

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\lambda) \frac{e^{i\lambda s}}{1 - i\epsilon\lambda} d\lambda \rightarrow 0 \quad \text{ao } R \rightarrow +\infty \\ \lambda \in C_+ \\ |\lambda| = R \end{array} \right. \quad \text{nos } s \geq 0,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}^{-1} \left[F^{(\epsilon)}(\lambda) \right] (s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^{(\epsilon)}(\lambda) e^{i\lambda s} d\lambda = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R F(\lambda) \frac{e^{i\lambda s}}{1 - i\epsilon\lambda} d\lambda = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} F(\lambda) \frac{e^{i\lambda s}}{1 - i\epsilon\lambda} d\lambda \quad \text{para } s \geq 0 \end{aligned}$$

De (8) resulta pelo Corolário 2 que a equação

$$a(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \overline{C}_+$$

tem um número finito $d \geq 0$ de zeros, todos em C_+ , denotados por

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$$

que são os autovalores em C_+ do operador ZS-AKNS. Portanto, para cada $R > \max \{ |\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_d| \}$ tem-se pelo teorema dos resíduos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{C_R} F(\lambda) \frac{e^{i\lambda s}}{1 - i\epsilon\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{C_R} \left[\frac{1}{a(\lambda)} R(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] * d\lambda$$

$$\begin{aligned}
 * \frac{e^{i\lambda s}}{1 - i \epsilon \lambda} d\lambda &= \\
 &= i \sum_{k=1}^d \frac{1}{\frac{da}{d\lambda}(\lambda_k)} R(x, \lambda_k) \frac{e^{i\lambda_k s}}{1 - i \epsilon \lambda_k}
 \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon \downarrow 0$, obtêm-se então nos $s \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{-1} \left[\frac{1}{a(\lambda)} R(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] (x, s) &= \\
 &= i \sum_{k=1}^d \frac{1}{\frac{da}{d\lambda}(\lambda_k)} R(x, \lambda_k) e^{i\lambda_k s} = \\
 &= i \sum_{k=1}^d C_k L(x, \lambda_k) e^{i\lambda_k (2x + s)}
 \end{aligned}$$

onde

$$C_k \equiv \frac{i}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(\xi, \lambda_k) \psi_2(\xi, \lambda_k) d\xi \right)^{-1}$$

Pelo Lema 18, resulta então nos $s \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda}^{-1} \left[\frac{1}{a(\lambda)} R(x, \lambda) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] (x, s) &= \\
 &= - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Omega_{\text{DISCR}}(2x + s) - \int_0^{+\infty} N(x, y) \Omega_{\text{DISCR}}(2x + s + y) dy
 \end{aligned}$$

onde

$$\Omega_{\text{DISCR}}(\xi) \equiv -i \sum_{k=1}^d C_k \cdot e^{i\lambda_k \xi} \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

entendendo-se $\Omega_{\text{DISCR}} \equiv 0$ caso $d = 0$.

A expressão (9) dá então, nos $s \geq 0$,

$$\begin{aligned} & - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Omega_{\text{DISCR}}(2x + s) - \int_0^{+\infty} N(x, y) \Omega_{\text{DISCR}}(2x + s + y) dy = \\ & = \tilde{N}(x, s) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Omega_{\text{cont}}(2x + s) + \int_0^{+\infty} N(x, y) \Omega_{\text{cont}}(2x + s + y) dy \end{aligned}$$

ou seja,

chamando

$$\Omega(\xi) \equiv \Omega_{\text{cont}}(\xi) + \Omega_{\text{DISCR}}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

tem-se, nos $x \in \mathbb{R}, s \geq 0$,

$$(10) \quad \tilde{N}(x, s) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Omega(2x + s) + \int_0^{+\infty} N(x, y) \Omega(2x + s + y) dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente, partindo da relação

$$\tilde{R}(x, \lambda) = \tilde{a}(\lambda) L(x, \lambda) - \tilde{b}(\lambda) \tilde{L}(x, \lambda) e^{-2i\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

e supondo

$$(11) \quad \tilde{a}(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

obtém-se nos $x \in \mathbb{R}, s \geq 0$,

$$(12) \quad N(x, s) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\Omega}(2x + s) + \int_0^{+\infty} \tilde{N}(x, y) \tilde{\Omega}(2x+s+y) dy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde

$$\tilde{\Omega}(\xi) \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{b}(\lambda)}{\tilde{a}(\lambda)} e^{-i\lambda\xi} d\lambda + i \sum_{k=1}^{\tilde{d}} \tilde{c}_k e^{-i\tilde{\lambda}_k \xi}$$

sendo $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{\tilde{d}}$ os zeros de $\tilde{a}(\lambda)$,

$$\tilde{c}_k \equiv -\frac{i}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_1(y, \tilde{\lambda}_k) \tilde{\psi}_2(y, \tilde{\lambda}_k) dy \right)^{-1}, \quad k=1, 2, \dots, \tilde{d}.$$

Em termos das funções

$$\Omega_+(\xi) \equiv 2 \Omega(2\xi), \quad B_+(x, y) \equiv 2N(x, 2y)$$

$$\tilde{\Omega}_+(\xi) \equiv 2 \tilde{\Omega}(2\xi), \quad \tilde{B}_+(x, y) \equiv 2\tilde{N}(x, 2y),$$

os resultados acima se escrevem

TEOREMA 19

Se $q, n \in \mathbb{R}$ tais que os coeficientes de espalhamento $a(\lambda), \tilde{a}(\lambda)$ não têm zeros REAIS, e sendo (na notação de §2)

$$\Omega_+(\xi) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} e^{2i\lambda\xi} d\lambda - 2i \sum_{k=1}^d c_k \cdot e^{2i\lambda_k \xi}$$

$$\tilde{\Omega}_+(\varepsilon) \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{b}(\lambda)}{\tilde{a}(\lambda)} e^{-2i\lambda\varepsilon} d\lambda + 2i \sum_{k=1}^{\tilde{d}} \tilde{c}_k \cdot e^{-2i\tilde{\lambda}_k \varepsilon}$$

onde

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ são os autovalores em C_+ de (ZS-AKNS)

$\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{\tilde{d}}$ são os autovalores em C_- de (ZS-AKNS)

e

$$c_k \equiv \frac{i}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(z, \lambda_k) \psi_2(z, \lambda_k) dz \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, d$$

$$\tilde{c}_k \equiv -\frac{i}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_1(z, \tilde{\lambda}_k) \tilde{\psi}_2(z, \tilde{\lambda}_k) dz \right)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \tilde{d}$$

ENTÃO, para cada $x \in \mathbb{R}$,

existem soluções $B_+(x, \cdot), \tilde{B}_+(x, \cdot) \in L^2(0, +\infty)^2$

do par de equações

$$B_+(x, y) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\Omega}_+(x+y) + \int_0^{+\infty} \tilde{\Omega}_+(x+y+z) \tilde{B}_+(x, z) dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_+(x, y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Omega_+(x+y) + \int_0^{+\infty} \Omega_+(x+y+z) B_+(x, z) dz = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad y \geq 0$$

tais que

$$(i) \quad B_+, \tilde{B}_+ \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})^2$$

$$(ii) \quad B_+(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_+(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{as } y \rightarrow +\infty$$

uniformemente (em x) sobre compactos $\underline{C} \mathbb{R}$

$$(iii) \quad B_+(x, 0) = \begin{pmatrix} -q(x) \\ \int_x^{+\infty} q(z) \kappa(z) dz \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_+(x, 0) = \begin{pmatrix} \int_x^{+\infty} q(z) \kappa(z) dz \\ -\kappa(x) \end{pmatrix}$$

§5 - Método de Espalhamento para a Equação de Sine-Gordon

Nesta seção, a teoria de espalhamento desenvolvida nas seções anteriores será utilizada para elaborar um processo de construção de soluções $u(x, t)$ da equação de Sine-Gordon

$$(13) \quad u_{xt} = \text{sen } u, \quad u \text{ real}$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

com a condição inicial

$$(14) \quad u_x(x, 0) = U_1(x)$$

onde

$U_1 \in \mathcal{C}$ é suposta tal que permita $u(x, t)$ evoluir na classe estabelecida pelas condições abaixo:

$$(C1) \quad u \in C^2(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{R})$$

(C2) para algum par de inteiros ℓ, m ,
vale

$$u(x, t) \rightarrow 2\pi\ell \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

$$u(x, t) \rightarrow 2\pi m \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty$$

uniformemente (em t) em cada $[0, T]$

$$(C3) \quad u_x(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{ao } x \rightarrow \pm\infty$$

para cada $t \geq 0$ fixado

$$(C4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x(x, t)| dx, \quad \int_{-\infty}^0 |u(x, t) - 2\pi\ell| dx, \quad \int_0^{+\infty} |u(x, t) - 2\pi m| dx$$

uniformemente convergentes em cada $[0, T]$

$$(C5) \int_{-\infty}^{+\infty} |u_{xx}(x, t)| dx \quad \text{convegente}$$

para cada $t \geq 0$ fixado.

Chamado [2]

$$q(x, t) \equiv -\frac{1}{2} u_x(x, t)$$

considere (para cada $\lambda \in \mathbb{C} - 0$) o sistema ZS-AKNS

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial x} v = \begin{bmatrix} -i\lambda & q \\ -q & i\lambda \end{bmatrix} v \quad (r = -q)$$

onde $v = v(x, t, \lambda)$ é suposta evoluir conforme [2]

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{i}{4\lambda} \begin{bmatrix} \cos u & \operatorname{sen} u \\ \operatorname{sen} u & -\cos u \end{bmatrix} v \equiv \mathbb{B}v.$$

A equação (13) torna (15), (16) compatíveis e faz valer

$$\mathbb{L}_t v = (\mathbb{B}\mathbb{L} - \mathbb{L}\mathbb{B})v$$

onde \mathbb{L} é o operador correspondente a (15), ou seja,

$$\mathbb{L} = i \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & -q \\ -q & -\frac{d}{dx} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbb{L}_t \equiv -i \begin{bmatrix} 0 & q_t \\ q_t & 0 \end{bmatrix}$$

É esperado então do formalismo de Lax [28] que o espectro de $\mathbb{L} = \mathbb{L}(t)$ seja invariante com t , o que motiva o raciocínio heurístico a seguir.

Considerando as funções de Jost de (15)

$$\phi(x, t; \lambda) = R(x, t; \lambda) e^{-i\lambda x} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

$$\psi(x, t; \lambda) = L(x, t; \lambda) e^{i\lambda x} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty$$

$$\tilde{\phi}(x, t; \lambda) = \tilde{R}(x, t; \lambda) e^{i\lambda x} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

$$\tilde{\psi}(x, t; \lambda) = \tilde{L}(x, t; \lambda) e^{-i\lambda x} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty$$

introduzidas em §2,

tem-se, nos $\lambda \in \mathbb{R}$, $R = a\tilde{L} + bL e^{2i\lambda x}$,

e na hipótese de se ter

$$\phi = cV, \quad c = c(t, \lambda),$$

decorre

$$\begin{aligned} R_t &= a_t \tilde{L} + a \tilde{L}_t + b_t L e^{2i\lambda x} + b L_t e^{2i\lambda x} \\ &= c_t V e^{i\lambda x} + c V_t e^{i\lambda x} = \frac{c_t}{c} R + iBR \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a_t \tilde{L} + a \tilde{L}_t + b_t L e^{2i\lambda x} + b L_t e^{2i\lambda x} &= \\ = \frac{c_t}{c} a \tilde{L} + \frac{c_t}{c} b L e^{2i\lambda x} + a i B \tilde{L} + b e^{2i\lambda x} i B L \end{aligned}$$

Fazendo-se $x \rightarrow +\infty$, obtém-se então, em vista de (C2),

$$a_t = \left(\frac{c_t}{c} + \frac{i}{4\lambda} \right) a$$

$$b_t = \left(\frac{c_t}{c} - \frac{i}{4\lambda} \right) b$$

de onde resulta pela invariância do espectro

$$c_t = \frac{-i}{4\lambda} c, \quad b_t = \frac{-i}{2\lambda} b, \quad a_t = 0.$$

Em particular, $R(x, t, \lambda)$ é esperado evoluir conforme

$$R_t = \left(\mathbb{B} - \frac{i}{4\lambda} \right) R.$$

Tratando L, \tilde{R}, \tilde{L} de maneira análoga, resulta

AFIRMAÇÃO 20

Sob as condições (C1), (C2), (C4),
tem-se, se u satisfaz (13),

(i) para cada $\lambda \in \overline{C}_+ - 0$:

$$R_t = \mathbb{B}R - \frac{i}{4\lambda} R$$

$$L_t = \mathbb{B}L + \frac{i}{4\lambda} L$$

(ii) para cada $\lambda \in \overline{C}_- - 0$:

$$\tilde{R}_t = \mathbb{B}\tilde{R} + \frac{i}{4\lambda} \tilde{R}$$

$$\tilde{L}_t = \mathbb{B}\tilde{L} - \frac{i}{4\lambda} \tilde{L}$$

PROVA:

De §2 sabe-se que R satisfaz

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x \begin{bmatrix} 0 & q(y,t) \\ -q(y,t) e^{2i\lambda(x-y)} & 0 \end{bmatrix} R(y,t;\lambda) dy$$

($x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+$)

de modo que R_t satisfaz

$$(*) \quad R_t = \int_{-\infty}^x \begin{bmatrix} 0 & q_t(y,t) \\ -q_t(y,t) e^{2i\lambda(x-y)} & 0 \end{bmatrix} R(y,t;\lambda) dy +$$

$$+ \int_{-\infty}^x \begin{bmatrix} 0 & q(y,t) \\ -q(y,t) e^{2i\lambda(x-y)} & 0 \end{bmatrix} R_t(y,t;\lambda) dy,$$

cuja solução é única no espaço

$$W \equiv \{ \omega \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 : \omega \in L^\infty(\mathbb{R}_-)^2 \},$$

tendo-se $R_t, \mathbb{B}R - \frac{i}{4\lambda} R \in W$.

O resultado decorre então do fato de que $\mathbb{B}R - \frac{i}{4\lambda} R$

satisfaz (*), o que pode ser visto após sucessivas integrações por partes.

As demais equações têm prova análoga.

QED

Decorre daí, por um raciocínio similar ao acima,

AFIRMAÇÃO 21

Sob as condições da Afirmação 20,

tem-se

$$(i) \quad a(t, \lambda) = a(0, \lambda) \quad \lambda \in \bar{C}_+, \quad \forall t \geq 0$$

$$\tilde{a}(t, \lambda) = \tilde{a}(0, \lambda) \quad \lambda \in \bar{C}_-, \quad \forall t \geq 0$$

(ii) para cada $\lambda \in \mathbb{R} - 0$:

$$b(t, \lambda) = b(0, \lambda) e^{-it/2\lambda} \quad \forall t \geq 0$$

$$\tilde{b}(t, \lambda) = \tilde{b}(0, \lambda) e^{it/2\lambda}$$

Em particular, o espectro de \mathbb{L} independe de t .

Para cada autovalor $\lambda_k \in C_+$, existe $\alpha_k \in C^1(\bar{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})$ tal que

$$\phi(x, t; \lambda_k) = \alpha_k(t) \psi(x, t; \lambda_k)$$

$$\forall t \geq 0,$$

tendo-se então (sendo $\dot{\cdot} \equiv \partial/\partial t$)

$$\left(\mathbb{B} - \frac{i}{4\lambda_k} \right) R = R_t = \dot{\alpha}_k L e^{2i\lambda_k x} + \alpha_k L_t e^{2i\lambda_k x} =$$

$$= \frac{\dot{\alpha}_k}{\alpha_k} R + \alpha_k \mathbb{B} L e^{2i\lambda_k x} + \frac{i}{4\lambda_k} \alpha_k L e^{2i\lambda_k x}$$

o que fornece

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} = \frac{-i}{2\lambda_k} \alpha_k$$

Analogamente,

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}_k}{\partial t} = \frac{i}{2\tilde{\lambda}_k} \tilde{\alpha}_k$$

para cada autovalor $\tilde{\lambda}_k \in \mathbb{C}_-$,

onde $\tilde{\alpha}_k(t)$ é a constante de proporcionalidade entre as autofunções $\tilde{\phi}(\cdot, t; \tilde{\lambda}_k)$ e $\tilde{\psi}(\cdot, t; \tilde{\lambda}_k)$.

Em vista da Afirmação 21, decorre então que

$$C_k(t) = C_k(0) e^{-it/2\lambda_k}$$

$$\tilde{C}_k(t) = \tilde{C}_k(0) e^{it/2\tilde{\lambda}_k}$$

onde

$$C_k(t) \equiv \frac{i}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(y, t; \lambda_k) \psi_2(y, t; \lambda_k) dy \right)^{-1}$$

$$\tilde{C}_k(t) \equiv -\frac{i}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_1(y, t; \tilde{\lambda}_k) \tilde{\psi}_2(y, t; \tilde{\lambda}_k) dy \right)^{-1}$$

Reunindo os resultados da seção anterior, resulta então

PROPOSIÇÃO 22 (ESQUEMA PARA SOLUÇÃO DE (13), (14))

Seja $U_1 \in \mathcal{C}$ função real que defina uma solução $u(x, t)$ para o problema

$$\begin{array}{l} u_{xt} = \text{sen } u \\ u_x(x, 0) = U_1(x) \end{array}$$

$$(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

satisfazendo (C1) - (C5), com o coeficiente de espalhamento

$a(\lambda) \equiv a(0, \lambda)$ sem zeros reais,

e seja

$$\Omega_+(\xi, t) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(0, \lambda)}{a(0, \lambda)} e^{-\frac{it}{2\lambda} + 2i\lambda\xi} d\lambda - 2i \sum_{k=1}^d c_k(0) e^{-\frac{it}{2\lambda_k} + 2i\lambda_k\xi}$$

$$(\xi \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

onde

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ são os autovalores de $\mathbb{H}(0)$

e

$$c_k(0) \equiv \frac{i}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(z, 0; \lambda_k) \psi_2(z, 0; \lambda_k) dz \right)^{-1}, \quad k=1, 2, \dots, d$$

ENTÃO

$u(x, t)$ é única,
sendo dada por

$$u(x, t) = -B(x, 0, t)$$

onde

para cada $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$,

$B(x, \cdot, t)$ é a única solução em $L^2(0, +\infty)$

da equação

$$B(x, y, t) = \Omega_+^*(x+y, t) - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Omega_+^*(x+y+z, t) \Omega_+(x+z+s, t) B(x, s, t) ds dz$$

As equações de Gelfand-Levitan-Marchenko (p. 127)

$$(i) \begin{cases} \beta_+(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tilde{\Omega}_+^{*}(x, y) + \int_0^{+\infty} \tilde{\Omega}_+^{*}(x+y+s, z) \tilde{\beta}_+(x, z) dz \\ \tilde{\beta}_+(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \Omega_+(x, y) + \int_0^{+\infty} \tilde{\Omega}_+^{*}(x+y+s, z) \beta_+(x, z) dz \end{cases}$$

onde, para $\lambda = -\lambda^*$, segue que

$$\tilde{\beta}_1(x, \lambda) = -\beta_1^*(x, \lambda^*)$$

$$\tilde{\beta}_2(x, \lambda) = \beta_2^*(x, \lambda^*) \quad \forall \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_-$$

$$\tilde{L}_1(x, \lambda) = L_2^*(x, \lambda^*)$$

$$\tilde{L}_2(x, \lambda) = -L_1^*(x, \lambda^*)$$

de modo que

$$\tilde{\alpha}_k = \alpha_k^*, \quad \tilde{a}(\lambda) = a^*(\lambda^*), \quad \tilde{b}(\lambda) = b^*(\lambda), \quad \tilde{c}_k = -c_k^*$$

e então

$$\Omega_+^* = -\tilde{\Omega}_+$$

Se (i) admitir 2 dois pares distintos de soluções $(\beta_+, \tilde{\beta}_+)$ então existe solução $\begin{pmatrix} \vec{\phi}_1(y) \\ \vec{\phi}_2(y) \end{pmatrix} \in L^2(0, +\infty)^2 \times L^2(0, +\infty)^2$ trivial para o problema homogêneo.

$$(a) \quad \vec{\phi}_1(y) - \int_0^{+\infty} \Omega_+^*(x+y+s) \vec{\phi}_2(s) ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \vec{\phi}_2(y) + \int_0^{+\infty} \Omega_+(x+y+s) \vec{\phi}_1(s) ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí, multiplicando (a) por $\vec{\phi}_1(y)^*$ e (b) por $\vec{\phi}_2(y)^*$ integrando em $[0, +\infty[$, obtemos (para cada coordenada $i=1,2$)

$$(a') \quad \int_0^{+\infty} |\phi_1(y)|^2 dy - \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \Omega_+^*(x+y+s) \phi_2(s) \phi_1^*(y) ds \right] dy$$

$$(b') \quad \int_0^{+\infty} |\phi_2(y)|^2 dy + \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \Omega_+(x+y+s) \phi_1(s) \phi_2^*(y) ds \right] dy$$

PROVA:

Decorre do Teorema 19, observando que para $r = -q$ real, tem-se

$$\tilde{R}_1(x, \lambda) = -R_2^*(x, \lambda^*)$$

$$\tilde{R}_2(x, \lambda) = R_1^*(x, \lambda^*)$$

$$\tilde{L}_1(x, \lambda) = L_2^*(x, \lambda^*)$$

$$\tilde{L}_2(x, \lambda) = -L_1^*(x, \lambda^*)$$

$$\forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}_-}$$

de modo que

$$\tilde{\lambda}_k = \lambda_k^* \quad k = 1, 2, \dots, d = \tilde{d}$$

$$\tilde{a}(\lambda) = a^*(\lambda^*) \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}_-}$$

$$\tilde{b}(\lambda) = b^*(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{C}_k = -C_k^*$$

e em particular

$$\Omega_+^* = -\tilde{\Omega}_+$$

A unicidade resulta de Ablowitz [4].

QED

ou seja: (tracando a ordem de integração em (y'))

$$(5'') \int_0^{+\infty} |\phi_1(y)|^2 dy - \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \Omega_+^*(x+y+s) \phi_1(y) \phi_2^*(s) ds \right] dy$$

$$(6'') \int_0^{+\infty} |\phi_2(y)|^2 dy + \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \Omega_+(x+y+s) \phi_2^*(s) \phi_1(y) dy \right] ds$$

Somando, vem:

$$0 = \int_0^{+\infty} (|\phi_1(y)|^2 + |\phi_2(y)|^2) dy + \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} (\Omega_+(x+y+s) \phi_1(y) \phi_2^*(s) - \Omega_+^*(x+y+s) \phi_1^*(y) \phi_2(s)) ds \right] dy$$

ou seja:

$$0 = \underbrace{\int_0^{+\infty} (|\phi_1(y)|^2 + |\phi_2(y)|^2) dy}_{\text{número real}} + \underbrace{2i \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} [\Omega_+(x+y+s) \phi_1(y) \phi_2^*(s)] ds dy}_{\text{n.º imaginário puro}}$$

Logo,

$$\int_0^{+\infty} (|\phi_1(y)|^2 + |\phi_2(y)|^2) dy = 0$$

e então

$$\phi_1 = \phi_2 = 0$$

CAPÍTULO III

ESPALHAMENTO ASSOCIADO AO SISTEMA DE SHIMIZU-WADATI

§1 - Introdução

Nesse capítulo, será apresentada a teoria de espalhamento associado ao problema de autovalores

$$(SW) \quad \frac{d\psi}{dx} = \lambda A(x)\psi, \quad A(x) \equiv \begin{bmatrix} -i & q(x) \\ -q^*(x) & i \end{bmatrix}$$

tendo em vista sua aplicação ao problema de Cauchy não linear

$$iq_t + \left(\frac{q}{\sqrt{1 + |q|^2}} \right)_{xx} = 0$$

$$q(x, 0) = Q_0(x),$$

num esquema análogo ao do capítulo anterior. O potencial q é suposto satisfazer

- (i) $q \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$
- (ii) $q(x) \rightarrow 0$ ao $x \rightarrow \pm \infty$
- (iii) $q_x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$
- (iv) $q_{xx} \in L^1(\mathbb{R})$

sendo o problema de espalhamento de (SW) para essa classe de potencial analisado em §2, §3. A invariância do espectro quando q satisfaz a equação diferencial acima é estabelecida em §4. A análise do problema inverso de espalhamento, apresentada em §5, conduz à elaboração de um método exato de solução para o problema de valor inicial acima quando o perfil conhecido $Q_0(x)$ permitir que a solução $q(x, t)$ evolua consistentemente com as condições (i) - (iv). Esse método é apresentado em §6, sendo aplicado para a obtenção de 1-solitons seguindo Shimizu-Wadati [34].

§2 - Teoria de Espalhamento

Nessa seção e na seguinte, será desenvolvida a teoria de espalhamento para o sistema (SW), em estreita analogia com os sistemas (ZS-AKNS) considerados no capítulo anterior. O problema inverso é analisado em §5.

Para o sistema (SW), considera-se as soluções de Jost¹

$$\phi(x, \lambda) = R(x, \lambda) e^{-i\lambda x} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

$$\tilde{\phi}(x, \lambda) = \tilde{R}(x, \lambda) e^{i\lambda x} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x}$$

e

$$\psi(x, \lambda) = L(x, \lambda) e^{i\lambda x} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow +\infty$$

$$\tilde{\psi}(x, \lambda) = \tilde{L}(x, \lambda) e^{-i\lambda x} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x}$$

Sendo $q \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, isso equivale a considerar, para cada $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, os problemas

$$(R1) \quad \begin{cases} R(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \int_{-\infty}^x \begin{bmatrix} 0 & q(y) \\ -q^*(y) & e^{2i\lambda(x-y)} & 0 \end{bmatrix} R(y, \lambda) dy \\ R(\cdot, \lambda) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-)^2 \end{cases}$$

¹ A escolha $\tilde{R} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ é justificada pelo Teorema 2 a seguir.

$$(R2) \quad \begin{cases} L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & -q(y) e^{2i\lambda(y-x)} \\ q^*(y) & 0 \end{bmatrix} L(y, \lambda) dy \\ L(\cdot, \lambda) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)^2 \end{cases}$$

e, nos $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$,

$$(\tilde{R}1) \quad \begin{cases} \tilde{R}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \lambda \int_{-\infty}^x \begin{bmatrix} 0 & -q(y) e^{-2i\lambda(x-y)} \\ q^*(y) & 0 \end{bmatrix} \tilde{R}(y, \lambda) dy \\ \tilde{R}(\cdot, \lambda) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-)^2 \end{cases}$$

$$(\tilde{R}2) \quad \begin{cases} \tilde{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} 0 & q(y) \\ -q^*(y) e^{-2i\lambda(y-x)} & 0 \end{bmatrix} \tilde{L}(y, \lambda) dy \\ \tilde{L}(\cdot, \lambda) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)^2 \end{cases}$$

O esquema iterativo usual de solução desses problemas fornece

TEOREMA 1

Seja $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$

e

$$\|q\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |q(y)| dy, \quad ,$$

então

(i) para cada $\lambda \in \overline{C}_+$, os problemas (R1), (R2) admitem uma única solução, tendo-se ademais

$$R, L \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{C}_+, \mathbb{C})^2,$$

$R(x, \cdot), L(x, \cdot)$ analíticas em C_+ para cada $x \in \mathbb{R}$
e

$$|R(x, \lambda)|_\infty \leq e^{|\lambda| \|q\|_1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \in \overline{C}_+$$

$$|L(x, \lambda)|_\infty \leq e^{|\lambda| \|q\|_1}$$

(ii) para cada $\lambda \in \overline{C}_-$, os problemas ($\tilde{R}1$), ($\tilde{R}2$) admitem uma única solução, tendo-se ademais

$$\tilde{R}, \tilde{L} \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{C}_-, \mathbb{C})^2$$

$\tilde{R}(x, \cdot), \tilde{L}(x, \cdot)$ analíticas em C_- para cada $x \in \mathbb{R}$
e

$$|\tilde{R}(x, \lambda)|_\infty \leq e^{|\lambda| \|q\|_1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \in \overline{C}_-$$

$$|\tilde{L}(x, \lambda)|_\infty \leq e^{|\lambda| \|q\|_1}$$

Da unicidade da solução de (R1), (R2), ($\tilde{R}1$), ($\tilde{R}2$) resulta em particular

TEOREMA 2

Nas hipóteses do Teorema 1, tem-se

$$\tilde{R}_1(x, \lambda) = R_2^*(x, \lambda^*), \quad \tilde{R}_2(x, \lambda) = -R_1^*(x, \lambda^*)$$

$$\tilde{L}_1(x, \lambda) = L_2^*(x, \lambda^*), \quad \tilde{L}_2(x, \lambda) = -L_1^*(x, \lambda^*)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_-$$

Nos $\lambda \in \mathbb{R}$, existem as quatro soluções $\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi}$ do sistema (SW), tendo-se por exemplo $\psi, \tilde{\psi}$ linearmente independentes. Em particular,¹

$$\phi(\cdot, \lambda) = a(\lambda) \tilde{\psi}(\cdot, \lambda) + b(\lambda) \psi(\cdot, \lambda)$$

$$\tilde{\phi}(\cdot, \lambda) = -\tilde{a}(\lambda) \psi(\cdot, \lambda) + \tilde{b}(\lambda) \tilde{\psi}(\cdot, \lambda)$$

para $a(\lambda), b(\lambda), \tilde{a}(\lambda), \tilde{b}(\lambda) \in \mathbb{C}$, de onde

$$\phi(x, \lambda) = a(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + b(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + o(1)$$

$$\tilde{\phi}(x, \lambda) = -\tilde{a}(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\lambda x} + \tilde{b}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} + o(1)$$

ao $x \rightarrow +\infty$.

Observando que o Wronskiano de duas soluções quaisquer de (SW) é constante em x , resulta então

$$W[\phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} W[\phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)] = a(\lambda)$$

$$W[\tilde{\phi}(x, \lambda), \tilde{\psi}(x, \lambda)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} W[\tilde{\phi}(x, \lambda), \tilde{\psi}(x, \lambda)] = \tilde{a}(\lambda)$$

¹ A notação aqui é coerente com [34].

e

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} W[\tilde{\phi}(x, \lambda), \phi(x, \lambda)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} W[\tilde{\phi}(x, \lambda), \phi(x, \lambda)] = \\
 &= a(\lambda) \tilde{a}(\lambda) + b(\lambda) \tilde{b}(\lambda)
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$(1) \quad a(\lambda) \tilde{a}(\lambda) + b(\lambda) \tilde{b}(\lambda) = 1$$

Em particular, $a(\lambda)$, $\tilde{a}(\lambda)$ podem ser estendidas analiticamente via

$$a(\lambda) \equiv W[\phi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda)] = R_1(x, \lambda) L_2(x, \lambda) - R_2(x, \lambda) L_1(x, \lambda) \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+}$$

$$\tilde{a}(\lambda) \equiv W[\tilde{\phi}(\cdot, \lambda), \tilde{\psi}(\cdot, \lambda)] = \tilde{R}_1(x, \lambda) \tilde{L}_2(x, \lambda) - \tilde{R}_2(x, \lambda) \tilde{L}_1(x, \lambda) \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}_-}$$

Do Teorema 2 vem

$$\begin{aligned}
 a^*(\lambda^*) &= R_1^*(x, \lambda^*) L_2^*(x, \lambda^*) - R_2^*(x, \lambda^*) L_1^*(x, \lambda^*) = \\
 &= -\tilde{R}_2(x, \lambda) \tilde{L}_1(x, \lambda) + \tilde{R}_1(x, \lambda) \tilde{L}_2(x, \lambda) = \\
 &= \tilde{a}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}_-}
 \end{aligned}$$

enquanto

$$b(\lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} R_2(x, \lambda) e^{-2i\lambda x} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\tilde{b}(\lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{R}_1(x, \lambda) e^{2i\lambda x}$$

fornece

$$b^*(\lambda) = \tilde{b}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

De (1) resulta

$$(2) \quad |a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vale então

TEOREMA 3

Sendo $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$,

tem-se

(i) $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$

(ii) $a \in C^0(\overline{\mathbb{C}}_+, \mathbb{C}) \cap L^\infty(\overline{\mathbb{C}}_+)$ analítica em \mathbb{C}_+

(iii) $\tilde{a} \in C^0(\overline{\mathbb{C}}_-, \mathbb{C}) \cap L^\infty(\overline{\mathbb{C}}_-)$ analítica em \mathbb{C}_-

O comportamento assintótico das funções de Jost ao $x \rightarrow \pm \infty$ pode ser estudado como no Cap. 2 (Teorema 3), obtendo-se

TEOREMA 4

Sendo $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$, então

(i) ao $x \rightarrow -\infty$:

$$R(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

uniformemente (em λ) sobre compactos $\underline{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{C}}_+$

$$R(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$$

uniformemente (em λ) sobre compactos $\underline{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{C}}_-$

$$L_1(x, \lambda) = o(1), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

uniformemente (em λ) sobre compactos $\underline{C} \subset \mathbb{C}_+$

$$L_1(x, \lambda) = \tilde{b}(\lambda) e^{-2i\lambda x} + o(1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

uniformemente (em λ) sobre compactos $\underline{C} \subset \mathbb{R}$

$$L_2(x, \lambda) = a(\lambda) + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

uniformemente (em λ) sobre compactos $\underline{C} \subset \overline{\mathbb{C}}_+$

$$\tilde{L}_1(x, \lambda) = \tilde{a}(\lambda) + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$$

uniformemente (em λ) sobre compactos $\underline{C} \subset \overline{\mathbb{C}}_-$

$$\tilde{L}_2(x, \lambda) = o(1), \quad \lambda \in \mathbb{C}_-$$

uniformemente (em λ) sobre compactos $\underline{C} \subset \mathbb{C}_-$

(ii) ao $x \rightarrow +\infty$

$$L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + o(1), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

uniformemente sobre compactos $\underline{C} \subset \overline{\mathbb{C}}_+$

$$\tilde{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$$

uniformemente sobre compactos $\underline{C} \subset \overline{\mathbb{C}}_-$

$$R_1(x, \lambda) = a(\lambda) + o(1), \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

uniformemente sobre compactos $\underline{C} \subset \overline{\mathbb{C}}_+$

$$R_2(x, \lambda) = o(1), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+$$

uniformemente sobre compactos $\underline{C} \subset \mathbb{C}_+$

$$R_2(x, \lambda) = b(\lambda) e^{2i\lambda x} + o(1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

uniformemente sobre compactos $\underline{C} \mathbb{R}$

$$\tilde{R}_1(x, \lambda) = o(1), \quad \lambda \in \underline{C}_-$$

uniformemente sobre compactos $\underline{C} \underline{C}_-$

$$\tilde{R}_1(x, \lambda) = \tilde{b}(\lambda) e^{-2i\lambda x} + o(1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

uniformemente sobre compactos $\underline{C} \mathbb{R}$

$$\tilde{R}_2(x, \lambda) = -\tilde{a}(\lambda) + o(1), \quad \lambda \in \overline{C}_-$$

uniformemente sobre compactos $\underline{C} \overline{C}_-$

Para o problema inverso (§4), é preciso estudar o comportamento das funções de Jost para $|\lambda|$ grande. Examinando a prova do Teorema 5, Cap. 2, observa-se que pode ser estendida mais geralmente a sistemas da forma

$$\Psi' = (\lambda D(x) + B(x))\Psi$$

onde D é matriz diagonal, o que corresponde aqui a mudar a variável dependente em ordem a diagonalizar $A(x)$.

Em tudo que segue nessa seção, será suficiente que o potencial q satisfaça (i), (ii), (iii), (iv), §1.

Considere por exemplo a função de Jost $\phi(x, \lambda)$, nos $\lambda \in \overline{C}_+$: escrevendo

$$\phi(x, \lambda) = \frac{1}{1 + \phi(x)} \begin{bmatrix} -i & q(x) \\ -q^*(x) & i \end{bmatrix} \mathbb{F}(x, \lambda),$$

onde

$$\phi(x) \equiv \sqrt{1 + |q(x)|^2},$$

vem

$$\frac{d}{dx} \mathbb{F}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} i\lambda\phi(x) + q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & -i\lambda\phi(x) + q_{22}(x) \end{bmatrix} \mathbb{F}(x, \lambda)$$

onde

$$q_{11}(x) \equiv \frac{1}{2\phi(x)(1+\phi(x))} \left[(\phi(x) - 1) \phi_x(x) - q^*(x)q_x(x) \right] = q_{22}^*(x)$$

$$q_{12}(x) \equiv \frac{i}{2\phi(x)(1+\phi(x))} \left[q_x^*(x)(1+\phi(x)) - q^*(x)\phi_x(x) \right] = -q_{21}^*(x)$$

tendo-se ademais de

$$\mathbb{F}(x, \lambda) = \frac{1}{2\phi(x)} \begin{bmatrix} q^*(x) & -i(1+\phi(x)) \\ -i(1+\phi(x)) & q(x) \end{bmatrix} \phi(x, \lambda)$$

que

$$\mathbb{F}(x, \lambda) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\lambda x} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty.$$

Escrevendo

$$\mathbb{F}(x, \lambda) = \mathbb{R}(x, \lambda) e^{-i\lambda x},$$

tem-se então

$$\frac{d}{dx} \mathbb{R}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} i\lambda(1+\phi(x)) + q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & i\lambda(1-\phi(x)) + q_{22}(x) \end{bmatrix} \mathbb{R}(x, \lambda)$$

com

$$\mathbb{R}(x, \lambda) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{ao } x \rightarrow -\infty$$

ou, equivalentemente, para $\mathbb{R}(\cdot, \lambda) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-)^2$:

$$\mathbb{R}_1(x, \lambda) = \int_{-\infty}^x q_{12}(y) e^{2i\lambda(x-y)} e^{i\lambda[\varepsilon_-(y) - \varepsilon_-(x)]} e^{Q_{11}(x) - Q_{11}(y)} \mathbb{R}_2(y, \lambda) dy$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_2(x, \lambda) &= -i e^{i\lambda\varepsilon_-(x) + Q_{22}(x)} + \\ &+ \int_{-\infty}^x q_{21}(y) e^{i\lambda[\varepsilon_-(x) - \varepsilon_-(y)]} e^{Q_{22}(x) - Q_{22}(y)} \mathbb{R}_1(y, \lambda) dy \end{aligned}$$

onde

$$\mathbb{R} \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{R}_1 \\ \mathbb{R}_2 \end{pmatrix},$$

$$Q_{ij}(x) \equiv \int_{-\infty}^x q_{ij}(y) dy,$$

$$\varepsilon_-(x) \equiv \int_{-\infty}^x (1 - \phi(y)) dy.$$

Em particular, chamando

$$S(x, \lambda) \equiv \mathbb{R}(x, \lambda) e^{-i\lambda\varepsilon_-(x)},$$

tem-se

$$(*) \quad S(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} e^{Q_{22}(x)} + \int_{-\infty}^x E(x, y; \lambda) S(y, \lambda) dy$$

onde

$$E(x, y; \lambda) \equiv \begin{bmatrix} 0 & q_{12}(y) e^{Q_{11}(x) - Q_{11}(y)} / e^{-2i\lambda(x-y) + \epsilon_-(y) - \epsilon_-(x)} \\ q_{21}(y) e^{Q_{22}(x) - Q_{22}(y)} & 0 \end{bmatrix}$$

Pela análise de §2, Cap. 2, é natural esperar

$$S(x, \lambda) = S^{(0)}(x) + \frac{1}{\lambda} S^{(1)}(x, \lambda) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em $\bar{\mathbb{C}}_+$

obtendo-se de (*) como candidatos

$$S^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} e^{Q_{22}(x)}$$

$$S^{(1)}(x, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{Q_{11}(x)} \left[e^{Q_{22}(x)} \tilde{q}_{12}(x) - \int_{-\infty}^x g(y) e^{2i\lambda(x-y) + \epsilon_-(y) - \epsilon_-(x)} dy \right] \\ e^{Q_{22}(x)} \int_{-\infty}^x \tilde{q}_{12}(y) \tilde{q}_{21}(y) e^{Q_{11}(y) + Q_{22}(y)} dy \end{pmatrix}$$

onde

$$g(y) \equiv \frac{d}{dy} \left[e^{Q_{22}(y)} \tilde{q}_{12}(y) \right] \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

$$q_{12}^2(y) \equiv q_{12}(y) \cdot e^{-Q_{11}(y)} / \phi(y) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

$$q_{21}^2(y) \equiv q_{21}(y) \cdot e^{-Q_{22}(y)} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}).$$

Para a prova, seja $\rho(x, \lambda)$ dada por

$$S(x, \lambda) = S^{(0)}(x) + \frac{1}{\lambda} S^{(1)}(x, \lambda) + \rho(x, \lambda);$$

então de (*) $\rho(x, \lambda)$ satisfaz

$$(**) \quad \rho(x, \lambda) = \rho_0(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x E(x, y; \lambda) \rho(y, \lambda) dy$$

onde $\rho_0(x, \lambda)$ pode ser calculada a partir de (*), obtendo-se afinal que

$$|\rho_0(x, \lambda)|_\infty \leq \frac{M}{|\lambda|^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+} - 0$$

para alguma constante $M > 0$.

O esquema iterativo usual de análise da equação de Volterra (**), fornece então

$$|\rho(x, \lambda)|_\infty \leq \frac{M}{|\lambda|^2} \cdot e^{C \cdot \tilde{M}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}_+} - 0$$

onde

$$C \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} \left[e^{Q_{11}(x)} + e^{Q_{22}(x)} \right]$$

$$\tilde{M} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (|\tilde{q}_{21}(y)| + |\tilde{q}_{12}(y)| |\phi(y)|) dy$$

Daí

$$R(x, \lambda) = \frac{e^{i\lambda \varepsilon_-(x)}}{1 + \phi(x)} \begin{bmatrix} q(x) & i(1 + \phi(x)) \\ i(1 + \phi(x)) & q^*(x) \end{bmatrix} S(x, \lambda)$$

fornece

$$\phi(x, \lambda) e^{i\lambda(x - \varepsilon_-(x))} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(1 - \phi(x))}{q(x)} \end{pmatrix} e^{\mu_-(x)} +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda} \begin{bmatrix} \frac{q(x)}{1 + \phi(x)} & i \\ i & \frac{q^*(x)}{1 + \phi(x)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1(x, \lambda) \\ v_2(x, \lambda) \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em $\overline{\mathbb{C}}_+$,

onde

a relação $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ vale uniformemente nos $x \in \mathbb{R}$

e $\mu_-(x), v_1(x, \lambda), v_2(x, \lambda)$ são dadas por

$$\mu_-(x) \equiv Q_{22}(x) = \int_{-\infty}^x q_{22}(y) dy$$

$$v_1(x, \lambda) \equiv e^{\mu_-(x)} q_{12}(x) \phi(x)^{-1} +$$

$$\Psi(x, \lambda) e^{-i\lambda(x + \varepsilon_+(x))} = \begin{pmatrix} \frac{i(1 - \Phi(x))}{q^*(x)} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\mu_+^*(x)}$$

$$+ \frac{1}{\lambda} B(x) \begin{pmatrix} w_1(x, \lambda) \\ w_2(x, \lambda) \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em \bar{C}_+

$$\tilde{\Psi}(x, \lambda) e^{-i\lambda(x - \varepsilon_-(x))} = \begin{pmatrix} \frac{-i(1 - \Phi(x))}{q^*(x)} \\ -1 \end{pmatrix} e^{\mu_-^*(x)}$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \tilde{B}(x) \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(x, \lambda) \\ \tilde{w}_2(x, \lambda) \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em \bar{C}_-

$$\tilde{\Psi}(x, \lambda) e^{i\lambda(x + \varepsilon_+(x))} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(1 - \Phi(x))}{q(x)} \end{pmatrix} e^{-\mu_+(x)}$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \tilde{B}(x) \begin{pmatrix} \tilde{w}_1(x, \lambda) \\ \tilde{w}_2(x, \lambda) \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em \bar{C}_-

onde

$$\Phi(x) \equiv \sqrt{1 + |q(x)|^2}$$

$$\epsilon_-(x) \equiv \int_{-\infty}^x (1 - \phi(y)) dy$$

$$\epsilon_+(x) \equiv \int_x^{+\infty} (1 - \phi(y)) dy$$

$$\mu_-(x) \equiv \int_{-\infty}^x \sigma_0(y) dy, \quad \mu_+(x) \equiv \int_x^{+\infty} \sigma_0(y) dy,$$

$$\sigma_0(x) \equiv -\frac{1}{2} \left[\frac{q_x(x)}{q(x)} \frac{1 - \phi(x)}{\phi(x)} + \frac{\phi_x(x)}{\phi(x)} \right]$$

$$v_1(x, \lambda) \equiv e^{\mu_-(x)} q_{12}(x) \phi(x)^{-1} +$$

$$+ e^{\mu_-^*(x)} \int_{-\infty}^x g(y) e^{2i\lambda(x-y + \epsilon_-(y) - \epsilon_-(x))} dy$$

$$v_2(x, \lambda) \equiv -e^{\mu_-(x)} \int_{-\infty}^x |q_{12}(y)|^2 \phi(y)^{-1} dy$$

$$\omega_1(x, \lambda) \equiv -e^{-\mu_+^*(x)} \int_x^{+\infty} |q_{12}(y)|^2 \phi(y)^{-1} dy$$

$$\omega_2(x, \lambda) \equiv e^{-\mu_+^*(x)} q_{21}(x) \phi(x)^{-1} +$$

$$+ e^{-\mu_+(x)} \int_x^{+\infty} h(y) e^{2i\lambda(y-x+\epsilon_+(y)-\epsilon_+(x))} dy$$

$$\tilde{v}_1(x, \lambda) \equiv e^{\mu_-^*(x)} q_{12}^*(x) \phi(x)^{-1} +$$

$$+ e^{\mu_-(x)} \int_{-\infty}^x g^*(y) e^{-2i\lambda(x-y+\epsilon_-(y)-\epsilon_-(x))} dy$$

$$\tilde{v}_2(x, \lambda) \equiv -e^{\mu_-^*(x)} \int_{-\infty}^x |q_{12}(y)|^2 \phi(y)^{-1} dy$$

$$\tilde{w}_1(x, \lambda) \equiv -e^{-\mu_+(x)} \int_x^{+\infty} |q_{12}(y)|^2 \phi(y)^{-1} dy$$

$$\tilde{w}_2(x, \lambda) \equiv e^{-\mu_+(x)} \cdot q_{21}^*(x) \phi(x)^{-1} +$$

$$+ e^{-\mu_+^*(x)} \int_x^{+\infty} h^*(y) e^{-2i\lambda(y-x+\epsilon_+(y)-\epsilon_+(x))} dy$$

$$q_{12}(x) \equiv \frac{i}{2\phi(x)(1+\phi(x))} \left[q_x^*(x)(1+\phi(x)) - q^*(x)\phi_x(x) \right]$$

$$q_{21}(x) = -q_{12}^*(x)$$

$$B(x) \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{q(x)}{1 + \phi(x)} & i \\ i & \frac{q^*(x)}{1 + \phi(x)} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}(x) \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & \frac{q(x)}{1 + \phi(x)} \\ -\frac{q^*(x)}{1 + \phi(x)} & i \end{bmatrix}$$

$$g(x) \equiv \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} q_{12}(x) \cdot e^{\mu_-(x)} - \mu_-^*(x) & \phi(x)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$h(x) \equiv \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} q_{12}^*(x) \cdot e^{\mu_+(x)} - \mu_+^*(x) & \phi(x)^{-1} \end{bmatrix}$$

COROLÁRIO 6

Nas hipóteses do Teorema 5, tem-se

$$a(\lambda) e^{-i\lambda\epsilon} = e^{\mu} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em $\overline{\mathbb{C}}_+$

$$\tilde{a}(\lambda) e^{i\lambda\epsilon} = e^{\mu^*} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

ao $\lambda \rightarrow \infty$ em $\overline{\mathbb{C}}_-$,

onde

$$\varepsilon \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \phi(x)) dx, \quad \phi(x) \equiv \sqrt{1 + |q(x)|^2},$$

$$\mu \equiv -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{q_x}{q} \frac{1 - \phi}{\phi} + \frac{\phi_x}{\phi} \right] dx.$$

PROVA:

Pelo Teorema 5 tem-se, nos $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$,

$$R_1(x, \lambda) e^{-i\lambda \varepsilon_-(x)} = e^{\mu_-(x)} + \rho_1(x, \lambda),$$

com

$$|\rho_1(x, \lambda)| \leq \frac{\text{cte}}{|\lambda|} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ - 0.$$

Pelo Teorema 4(ii), ao $x \rightarrow +\infty$

$$R_1(x, \lambda) e^{-i\lambda \varepsilon_-(x)} \rightarrow a(\lambda) e^{-i\lambda \varepsilon}$$

de modo que ao $x \rightarrow +\infty$

$$\rho_1(x, \lambda) \rightarrow \rho(\lambda)$$

para algum $\rho(\lambda) \in \mathbb{C}$,

com

$$|\rho(\lambda)| \leq \frac{\text{cte}}{|\lambda|},$$

de onde segue imediato o resultado para $a(\lambda)$.

Analogamente, considerando nos $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$ ←

$$- \tilde{R}_2(x, \lambda) e^{i\lambda \varepsilon_-(x)} = e^{\mu_-^*(x)} + \tilde{\rho}_2(x, \lambda),$$

$$|\tilde{\rho}_2(x, \lambda)| \leq \frac{\text{cte}}{|\lambda|} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_- - 0,$$

segue fazendo $x \rightarrow +\infty$

$$\tilde{a}(\lambda) e^{i\lambda \varepsilon} = e^{\mu^*} + \tilde{\rho}(\lambda)$$

com

$$|\tilde{\rho}(\lambda)| \leq \frac{\text{cte}}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_- - 0.$$

QED

§3 - Teoria Espectral

O sistema de Shimizu- Wadati [34]

$$(SW) \quad \frac{d\Psi}{dx} = \lambda A(x)\Psi \quad , \quad A \equiv \begin{bmatrix} -i & q \\ -q^* & i \end{bmatrix}$$

pode ser escrito equivalentemente como

$$A^{-1}(x) \frac{d}{dx} \Psi = \lambda \Psi \quad ,$$

de modo que o parâmetro λ do sistema (SW) pode ser interpretado em termos do espectro do operador de Shimizu- Wadati

$$\mathbb{L} \equiv \frac{1}{1 + |q(x)|^2} \begin{bmatrix} i & -q(x) \\ q^*(x) & -i \end{bmatrix} \frac{d}{dx} : W^1(\mathbb{R})^2 \rightarrow L^2(\mathbb{R})^2.$$

Sendo um operador fechado, segue [40] que $\lambda \in \mathbb{C}$ está no conjunto resolvente $\rho(\mathbb{L})$ de \mathbb{L} se e somente se $\mathbb{L} - \lambda$ for uma bijeção linear de $W^1(\mathbb{R})^2$ sobre $L^2(\mathbb{R})^2$ com inversa contínua.

Os resultados a seguir visam a caracterizar o espectro $\sigma(\mathbb{L})$ de \mathbb{L} em termos dos coeficientes de espalhamento do sistema (SW).

PROPOSIÇÃO 7

Seja $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$
e considere $\lambda \in \mathbb{C}_+$ tal que $a(\lambda) \neq 0$.

Então

o operador

$$\mathbb{L} - \lambda : W^1(\mathbb{R})^2 \rightarrow L^2(\mathbb{R})^2$$

é uma bijeção de $W^1(\mathbb{R})^2$ sobre $L^2(\mathbb{R})^2$ com inversa con
tinua, ou seja,
 tem-se

$$\lambda \in \rho(\mathbb{L}).$$

PROVA:

A prova é análoga à da Proposição 8, Cap. 2: o operador inverso

$$(\mathbb{L} - \lambda)^{-1} : L^2(\mathbb{R})^2 \rightarrow W^1(\mathbb{R})^2$$

é construído explicitamente usando-se as funções de Jost $\phi = R e^{-i\lambda x}$, $\psi = L e^{i\lambda x}$, que formam um sistema fundamental de soluções para (SW) já que $W[\phi, \psi] = a(\lambda) \neq 0$, obtendo-se então

$$(\mathbb{L} - \lambda)^{-1} [f](x) = \frac{1}{a(\lambda)} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} G_1(x, y; \lambda) & G_2(x, y; \lambda) \\ H_1(x, y; \lambda) & H_2(x, y; \lambda) \end{bmatrix} f(y) e^{i\lambda|x-y|} dy$$

onde

$$G_1(x, y; \lambda) \equiv \begin{cases} R_1(x, \lambda) [q^*(y) L_1(y, \lambda) - i L_2(y, \lambda)] & \text{se } y > x \\ L_1(x, \lambda) [i R_2(y, \lambda) - q^*(y) R_1(y, \lambda)] & \text{se } x > y \end{cases}$$

$$G_2(x, y; \lambda) \equiv \begin{cases} R_1(x, \lambda) [q(y) L_2(y, \lambda) - i L_2(y, \lambda)] & \text{se } y > x \\ L_1(x, \lambda) [i R_2(y, \lambda) - q(y) R_2(y, \lambda)] & \text{se } x > y \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 H_1(x, y; \lambda) &\equiv \begin{cases} R_2(x, \lambda) [q^*(y) L_1(y, \lambda) - i L_2(y, \lambda)] & \text{se } y > x \\ L_2(x, \lambda) [i R_2(y, \lambda) - q^*(y) R_1(y, \lambda)] & \text{se } x > y \end{cases} \\
 H_2(x, y; \lambda) &\equiv \begin{cases} R_2(x, \lambda) [q(y) L_2(y, \lambda) - i L_1(y, \lambda)] & \text{se } y > x \\ L_2(x, \lambda) [i R_1(y, \lambda) - q(y) R_2(y, \lambda)] & \text{se } x > y. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Obtém-se

$$\left\| (\mathbb{L} - \lambda)^{-1} \right\|_{\text{op}} \leq \frac{8 M(\lambda)}{|a(\lambda)|} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2 \operatorname{Im} \lambda \cdot |n|} \left(\frac{1}{\operatorname{Im} \lambda} + 2 |n| \right) dn \right)^{1/2}$$

para

$$M(\lambda) \equiv \sup_{x, y \in \mathbb{R}} \left\{ |G_1(x, y; \lambda)| + |G_2(x, y; \lambda)| + |H_1(x, y; \lambda)| + |H_2(x, y; \lambda)| \right\}$$

QED

Analogamente, pode-se mostrar

PROPOSIÇÃO 8

Seja $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$,
 seja $\lambda \in \mathbb{C}_-$ tal que $\tilde{a}(\lambda) \neq 0$.

Então $\lambda \in \rho(\mathbb{L})$.

Como no caso dos sistemas (ZS-AKNS), os zeros dos coeficientes de espalhamento constituirão os autovalores de (SW), todos de multiplicidade 1. Para estabelecer esse fato, é necessário

LEMA 9

Seja $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

Então

(i) para cada $\lambda \in \mathbb{C}_+$, existe para (SW) solução

$$\hat{\phi}(\cdot, \lambda) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2, \quad \hat{\phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix},$$

tal que

$$|\hat{\phi}_1(x, \lambda)| \geq A e^{\text{Im}\lambda \cdot x} \quad \forall x \geq x_0$$

para algum $A > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) para cada $\lambda \in \mathbb{C}_-$, existe solução

$$\hat{\psi}(\cdot, \lambda) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2, \quad \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix},$$

tal que

$$|\hat{\psi}_2(x, \lambda)| \geq A e^{-\text{Im}\lambda \cdot x} \quad \forall x \geq x_0$$

para algum $A > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

PROVA:

Análoga à do Lema 9, Cap. 2: sendo $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\lambda| \int_{x_0}^{+\infty} |q(y)| dy \leq \frac{1}{4}$$

e sendo $\hat{\phi}(\cdot, \lambda) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$ a solução do problema

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \phi = \lambda A(x) \phi \\ \phi(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} ,$$

tem-se

$$\hat{\phi}_1(x, \lambda) \geq \frac{1}{2} e^{\operatorname{Im} \lambda \cdot (x-x_0)} \quad \forall x \geq x_0 .$$

Para a parte (ii), basta substituir a condição inicial acima por $\psi(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

QED

Resulta então imediato

PROPOSIÇÃO 10

Seja $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$,

tem-se

$$\{\lambda \in \mathbb{C}_+ : a(\lambda) = 0\} \subset \underline{C} P\sigma(\mathbb{L})$$

$$\{\lambda \in \mathbb{C}_- : \tilde{a}(\lambda) = 0\} \subset \underline{C} P\sigma(\mathbb{L})$$

e cada tal autovalor \bar{e} simples.

Finalmente, como no Cap. 2, pode-se mostrar

PROPOSIÇÃO 11

Seja $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$,

tem-se

$$\mathbb{R} \subset \sigma(\mathbb{L})$$

e além disso \mathbb{R} não contém autovalores.

Os resultados acima reunidos permitem a seguinte caracterização algébrica do espectro de \mathbb{L} :

TEOREMA 12

Sendo $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$,

então

$$(i) \quad \rho(\mathbb{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ : a(\lambda) \neq 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}_- : \tilde{a}(\lambda) \neq 0\}$$

$$(ii) \quad P\sigma(\mathbb{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ : a(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C}_- : \tilde{a}(\lambda) = 0\}$$

$$(iii) \quad \sigma(\mathbb{L}) = \mathbb{R} \cup P\sigma(\mathbb{L}) \quad (\text{união disjunta})$$

Ademais, cada autovalor de \mathbb{L} é simples, tendo-se

$\phi(\cdot, \lambda), \psi(\cdot, \lambda)$ autofunções associadas a $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cap P\sigma(\mathbb{L})$

$\tilde{\phi}(\cdot, \lambda), \tilde{\psi}(\cdot, \lambda)$ autofunções associadas a $\lambda \in \mathbb{C}_- \cap P\sigma(\mathbb{L})$.

Como na Proposição 15, Cap. 2, pode-se mostrar também

PROPOSIÇÃO 13

Sendo $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$,

então:

(i) para cada $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+ \cap P\sigma(\mathbb{L})$, tem-se

$$\frac{da}{d\lambda}(\lambda_0) = \alpha(\lambda_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[q^*(y) \psi_1(y, \lambda_0)^2 + q(y) \psi_2(y, \lambda_0)^2 + \right. \\ \left. - 2i \psi_1(y, \lambda_0) \psi_2(y, \lambda_0) \right] dy$$

onde

$$\phi(\cdot, \lambda_0) = \alpha(\lambda_0) \cdot \psi(\cdot, \lambda_0)$$

(ii) para cada $\lambda_0 \in C_- \cap P\sigma(\mathbb{L})$, tem-se

$$\frac{d\tilde{a}}{d\lambda}(\tilde{\lambda}_0) = \tilde{\alpha}(\tilde{\lambda}_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[q^*(y) \tilde{\psi}_1(y, \tilde{\lambda}_0)^2 + q(y) \tilde{\psi}_2(y, \tilde{\lambda}_0)^2 + \right. \\ \left. - 2i \tilde{\psi}_1(y, \tilde{\lambda}_0) \tilde{\psi}_2(y, \tilde{\lambda}_0) \right] dy$$

onde

$$\tilde{\phi}(\cdot, \tilde{\lambda}_0) = \tilde{\alpha}(\tilde{\lambda}_0) \tilde{\psi}(\cdot, \tilde{\lambda}_0) .$$

§4 - Invariância do Espectro

Nessa seção, os resultados do §3 serão utilizados para obtenção de uma família de potenciais *isoespectrais* $q(x,t)$ para o operador de Shimizu-Wadati

$$\mathbf{L}(t) \equiv \frac{1}{1+q(x,t)} \begin{bmatrix} i & -q(x,t) \\ q^*(x,t) & -i \end{bmatrix} \frac{d}{dx} : W^1(\mathbb{R})^2 \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$$

segundo o formalismo AKNS [3], [4].

Inicialmente, q é suposto satisfazer

$$(C1) \quad q \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}_+}, \mathbb{C})$$

$$(C2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |q(x,t)| dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |q_x(x,t)| dx$$

uniformemente convergentes em cada $[0, T]$

$$(C3) \quad q(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{para cada } t \geq 0$$

Condições (C1), (C2) garantem que as funções de Jost e os coeficientes de espalhamento de (SW) introduzidas em §2 sejam continuamente diferenciáveis com respeito a t nos respectivos domínios.

Sabe-se do Teorema 12 que o espectro de $\mathbf{L}(t)$ é dado pela união disjunta

$$\sigma(\mathbf{L}(t)) = \mathbb{R} \cup P\sigma(\mathbf{L}(t)) ,$$

de modo que é suficiente considerar o espectro pontual $P\sigma(\mathbf{L}(t))$. O problema de autovalores

$$\mathbf{L}(t)\Psi = \lambda\Psi, \quad \Psi \in W^1(\mathbb{R})^2$$

é equivalente ao sistema de Shimizu- Wadati

$$(SW) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \lambda A(x, t) \Psi, \quad A(x, t) \equiv \begin{bmatrix} -i & q(x, t) \\ -q^*(x, t) & i \end{bmatrix}$$

para $\Psi(\cdot, t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^2(\mathbb{R})^2$.

Considerando o problema de evolução [3], [4]

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = Bv \\ v(\cdot, 0) = \Psi(\cdot, 0) \end{cases}$$

onde $\Psi(\cdot, 0)$ é autofunção de $\mathbb{L}(0)$ correspondente ao autovalor λ e

$$B = B(x, t; \lambda) \equiv \begin{bmatrix} b_{11}(x, t; \lambda) & b_{12}(x, t; \lambda) \\ b_{21}(x, t; \lambda) & b_{22}(x, t; \lambda) \end{bmatrix}$$

para b_{ij} de classe C^1 , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \lambda Av \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} - \lambda \frac{\partial A}{\partial t} v - \lambda A \frac{\partial v}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial B}{\partial x} v + B \frac{\partial v}{\partial x} - \lambda \frac{\partial A}{\partial t} v - \lambda ABv \\ &= B \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \lambda Av \right) + \left[\frac{\partial B}{\partial x} + \lambda BA - \lambda AB - \lambda \frac{\partial A}{\partial t} \right] v \end{aligned}$$

de modo que $w \equiv \frac{\partial v}{\partial x} - \lambda Av$ satisfaz

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = Bw \\ w(\cdot, 0) = 0 \end{cases}$$

se a matriz B for escolhida de tal modo a satisfazer

$$(5) \quad \frac{\partial B}{\partial x} + \lambda BA - \lambda AB = \lambda \frac{\partial A}{\partial t},$$

caso em que $\frac{\partial v}{\partial x} = \lambda Av$ para todo t em virtude da unicidade de solução de (4).

Procurando as funções b_{ij} na forma

$$b_{ij} = b_{ij}^{(0)}(x, t) + \lambda b_{ij}^{(1)}(x, t) + \lambda^2 b_{ij}^{(2)}(x, t)$$

obtém-se de um cálculo direto

$$(6) \quad b_{11} = - \frac{2i\lambda^2}{\phi(x, t)} = - b_{22}$$

$$(7) \quad b_{12} = i\lambda \left(\frac{q(x, t)}{\phi(x, t)} \right)_x + 2\lambda^2 \frac{q(x, t)}{\phi(x, t)}$$

$$(8) \quad b_{21} = i\lambda \left(\frac{q^*(x, t)}{\phi(x, t)} \right)_x - 2\lambda^2 \frac{q^*(x, t)}{\phi(x, t)}$$

onde

$$\phi(x, t) \equiv \sqrt{1 + |q(x, t)|^2},$$

desde que o potencial q satisfaça ademais

$$(C4) \quad i q_t + \left(\frac{q}{\phi} \right)_{xx} = 0 \quad \text{nos } x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

Resta apenas mostrar que nesse caso a solução $v(\cdot, t)$ de (3) evolui em $W^1(\mathbb{R})^2$, o que é estabelecido pelos resultados abaixo, sendo B dado por (6) - (8).

LEMA 14

Se q satisfaz (C1) - (C4) e ademais,
para cada $t \geq 0$,

$$q(x, t) \rightarrow 0$$

$$\text{ao } x \rightarrow -\infty,$$

$$q_x(x, t) \rightarrow 0$$

então

$$R(x, t; \lambda) = \phi(x, t; \lambda) e^{i\lambda x} \quad \text{satisfaz, para cada}$$

$$\lambda \in \overline{\mathbb{C}_+},$$

a equação de evolução

$$R_t = BR + 2i\lambda^2 R$$

$$\text{nos } x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

PROVA:

De (R1) segue que $R_t(\cdot, t; \lambda) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-)^2$ é solução da equação não homogênea

$$\begin{aligned}
 (*) \quad R_t(x, t; \lambda) = & \lambda \int_{-\infty}^x \begin{bmatrix} 0 & q_t(y, t) \\ -q_t^*(y, t) e^{2i\lambda(x-y)} & 0 \end{bmatrix} R(y, t; \lambda) dy + \\
 & + \lambda \int_{-\infty}^x \begin{bmatrix} 0 & q(y, t) \\ -q^*(y, t) e^{2i\lambda(x-y)} & 0 \end{bmatrix} R(y, t; \lambda) dy
 \end{aligned}$$

cuja solução é claramente única em $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}_-)^2$. O resultado segue então do fato que $BR + 2i\lambda^2 R$ também satisfaz (*) em consequência de (C4), o que pode ser visto de um cálculo direto e algumas integrações por partes.

QED

É imediato então

LEMA 15

Nas condições do Lema 14, tem-se que para cada $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, a solução $\Psi(x, \cdot; \lambda) \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}, \mathbb{C})^2$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = B\Psi \\ \Psi(t_0) = \phi(x, t_0; \lambda) \end{cases}$$

é dada por

$$\Psi(x, t; \lambda) = e^{-2i\lambda^2(t - t_0)} \phi(x, t; \lambda)$$

Em particular,

$$\Psi \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{C}_+, \mathbb{C})^2.$$

Analogamente ao Lema 14, pode-se mostrar

LEMA 16

Nas mesmas condições do Lema 14,
tem-se que

$\tilde{R}(x, t; \lambda) = \tilde{\phi}(x, t; \lambda) e^{-i\lambda x}$ satisfaz, para cada $\lambda \in \mathbb{C}_-$, a equação de evolução

$$\tilde{R}_t = B\tilde{R} - 2i\lambda^2 \tilde{R}$$

nos $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$.

Tem-se em consequência

LEMA 17

Nas mesmas condições do Lema 14,
tem-se que, para cada $x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}_-$,
a solução $\Psi(x, \cdot; t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}, \mathbb{C})^2$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = B\Psi \\ \Psi(t_0) = \tilde{\phi}(x, t_0; \lambda) \end{cases}$$

é dada por

$$\Psi(x, t; \lambda) = e^{2i\lambda^2(t - t_0)} \tilde{\phi}(x, t; \lambda).$$

Em particular,

$$\Psi \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}_+}, \mathbb{C}_-, \mathbb{C})^2.$$

Finalmente, é fundamental observar

LEMA 18

Seja $q \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})$ tal que

$$q(x, t) \rightarrow 0$$

ao $x \rightarrow \pm \infty$

$$q_x(x, t) \rightarrow 0$$

uniformemente em cada $[0, T]$.

Então, sendo $\lambda \in \mathbb{C}$ qualquer:

(i) Tomando

$$v \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

tal que

$$|v(x)|_{\infty} \leq M e^{-\alpha x} \quad \forall x \geq x_0$$

para algum $M > 0$, $\alpha > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$,
e considerando a solução $\Psi(x, \cdot; \lambda) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})^2$
do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = B\Psi \\ \Psi(t_0) = v(x) \end{cases},$$

com $\Psi(\cdot, \cdot; \lambda) \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})^2$,

então

para cada $T > 0$ existem $x_1 \in \mathbb{R}$, $M_1 > 0$
tais que

$$|\Psi(x, t; \lambda)|_{\infty} \leq M_1 \cdot e^{-\alpha x} \quad \forall x \geq x_1, \quad t \in [0, T].$$

(ii) Tomando

$$w \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$$

tal que

$$|w(x)|_{\infty} \leq M e^{\alpha x} \quad \forall x \leq x_0$$

para algum $M > 0$, $\alpha > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$,

e considerando a solução $\Psi(x, \cdot; \lambda) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})^2$
do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = B\Psi \\ \Psi(t_0) = w(x) \end{cases}$$

com $\Psi(\cdot, \cdot; \lambda) \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})^2$,

então para cada $T > 0$ existem $x_1 \in \mathbb{R}$, $M_1 > 0$

tais que

$$|\Psi(x, t; \lambda)|_{\infty} \leq M_1 e^{\alpha x} \quad \forall x \leq x_1, t \in [0, T].$$

PROVA:

Escrevendo

$$b_{11} = -2i\lambda^2 + 2i\lambda^2 \frac{\phi(x, t) - 1}{\phi(x, t)},$$

tem-se que $\Psi(x, \cdot; \lambda)$ resolve o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = S(\lambda)\Psi + Q(x, t; \lambda)\Psi \\ \Psi(t_0) = v(x) \end{cases}$$

onde

$$S(\lambda) \equiv \begin{bmatrix} -2i\lambda^2 & 0 \\ 0 & 2i\lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$Q(x, t; \lambda) \equiv \begin{bmatrix} 2i\lambda^2 \frac{\phi(x, t) - 1}{\phi(x, t)} & b_{12}(x, t; \lambda) \\ b_{21}(x, t; \lambda) & -2i\lambda^2 \frac{\phi(x, t) - 1}{\phi(x, t)} \end{bmatrix}$$

e em particular

$$\psi(x, t; \lambda) = e^{(t-t_0)S(\lambda)} v(x) + \int_{t_0}^t e^{(t-\zeta)S(\lambda)} Q(x, \zeta; \lambda) \psi(x, \zeta; \lambda) d\zeta$$

Sendo $T > t_0$ fixado, considere (para $\epsilon > 0$ a ser escolhido adiante) $x_1 \in \mathbb{R} (x_1 \geq x_0)$ tal que

$$\left| 2i\lambda^2 \frac{\phi(x, t) - 1}{\phi(x, t)} \right| \leq \epsilon, \quad |b_{12}(x, t; \lambda)| \leq \epsilon, \quad |b_{21}(x, t; \lambda)| \leq \epsilon$$

$$\forall x \geq x_1, \quad t \in [0, T].$$

Fixando $X > x_1$, considere o espaço de Banach

$$W_{X, T} \equiv C^0([x_1, X] \times [0, T], \mathbb{C})^2$$

munido da norma

$$\|w\|_{X, T} \equiv \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ x_1 \leq x \leq X}} |w(x, t)| \cdot e^{\alpha x},$$

e defina

$$\Pi_{X, T} : W_{X, T} \longrightarrow W_{X, T}$$

via

$$\pi_{X,T} [w] (x, t) \equiv \int_{t_0}^t e^{(t-\zeta) S(\lambda)} Q(x, \zeta; \lambda) w(x, \zeta) d\zeta .$$

Sendo

$$\tilde{v}(x, t) \equiv e^{(t-t_0) S(\lambda)} v(x) ,$$

tem-se

$$\psi = \tilde{v} + \pi_{X,T} [\psi] .$$

Como

$$\pi_{X,T} \in \mathcal{L}(W_{X,T}) \text{ com}$$

$$\|\pi_{X,T}\|_{op} \leq 4 \epsilon T \cdot \sup_{-T \leq t \leq T} \left(|e^{-2i\lambda^2 t}| + |e^{2i\lambda^2 t}| \right) ,$$

tomando ϵ suficientemente pequeno seguirá

$$\|(\mathbf{I} - \pi_{X,T})^{-1}\|_{op} \leq 2$$

e então

$$\|\psi\|_{X,T} \leq 2 \|\tilde{v}\|_{X,T} \leq 4M L(T)$$

onde

$$L(T) \equiv \sup_{-T \leq t \leq T} \left(|e^{-2i\lambda^2 t}| + |e^{2i\lambda^2 t}| \right) .$$

Em particular,

$$|\psi(x, t; \lambda)|_{\infty} \leq 4M L(T) e^{-\alpha x}$$

$$\forall x \in [x_1, X] , t \in [0, T] ,$$

e o resultado (i) segue da arbitrariedade de $X > x_1$.

Para (ii), o raciocínio é análogo.

QED

Resulta finalmente

TEOREMA 19 (Invariância do Espectro)

Se q satisfaz (C1) - (C4) com

$$\begin{aligned} q(x, t) &\rightarrow 0 \\ q_x(x, t) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{ao } x \rightarrow \pm \infty$$

uniformemente em cada $[0, T]$,

então nos $t \geq 0$

o espectro de $\mathbb{L}(t)$ é invariante com t
e também

o espectro pontual de $\mathbb{L}(t)$ é invariante com t .

PROVA:

Pela caracterização do espectro de $\mathbb{L}(t)$ dada pelo Teorema 12, é suficiente mostrar a invariância do espectro pontual, que decorre quase imediatamente dos lemas acima:

Seja $\lambda_0 \in P\sigma(\mathbb{L}(t_0))$ para algum $t_0 \geq 0$, e seja $T > t_0$ qualquer. Suponha por exemplo $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$. Pelo Lema 15, a solução $\psi(x, \cdot; \lambda_0) \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+}, \mathbb{C})^2$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = B\psi \\ \psi(t_0) = \phi(x, t_0; \lambda_0) \end{cases}$$

é dada por

$$\Psi(x, t; \lambda_0) = e^{-2i\lambda^2(t - t_0)} \phi(x, t; \lambda_0).$$

Como a função de Jost $\phi(x, t_0; \lambda_0)$ decai exponencialmente ao $x \rightarrow \pm \infty$ segundo $e^{-Im\lambda \cdot |x|}$, segue pelo Lema 18 que

$$|\Psi(x, t; \lambda_0)|_\infty \leq M e^{-Im\lambda \cdot |x|}$$

$$\forall |x| \geq x_0, \quad t \in [0, T]$$

para algum $M > 0$, $x_0 > 0$,

de modo que $\Psi(\cdot, t; \lambda_0) \in L^2(\mathbb{R})^2$ para todo $0 \leq t \leq T$.

Sendo $\Psi(\cdot, t; \lambda_0)$ solução de (SW) para $\lambda = \lambda_0$, segue então que $\Psi(\cdot, t; \lambda_0) \in W^1(\mathbb{R})^2$ para todo $0 \leq t \leq T$

com $\mathbb{L}(t) \Psi(\cdot, t; \lambda_0) = \lambda_0 \cdot \Psi(\cdot, t; \lambda_0)$.

Logo, $\lambda_0 \in P\sigma(\mathbb{L}(t))$ para todo $0 \leq t \leq T$,

e então para todo $t \geq 0$, já que $T > t_0$ é arbitrário. O caso $\lambda_0 \in \mathbb{C}_-$ é tratado de modo análogo.

QED

§5 - Espalhamento Inverso

Supondo $q \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$ com

$$q(x) \rightarrow 0 \quad \text{ao} \quad x \rightarrow \pm \infty$$

$$q_x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

$$q_{xx} \in L^1(\mathbb{R})$$

e observando que

$$\frac{L_1(x, \lambda)}{\lambda} \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{C}}_+, \mathbb{C}),$$

o Teorema 5 permite definir (nos $x, s \in \mathbb{R}$)

$$(9) \quad J(x, s) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda} \begin{bmatrix} L_1(x, \lambda) / \lambda \\ L_2(x, \lambda) \end{bmatrix} e^{-i\lambda \varepsilon_+(x)} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\mu_+^*(x)} \Big] (x, s)$$

tendo-se $J(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})^2$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Como no Cap. 2, $J(x, s) = 0$ nos $s < 0$, e sendo

$$N(x, s) \equiv J(x, s), \quad s \geq 0$$

tem-se

$$N \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})^2$$

com

$$N(x, s) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ao} \quad s \rightarrow +\infty$$

uniformemente (em x) sobre compactos $\subset \mathbb{R}$.

Ademais, escrevendo $N \equiv \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$, tem-se

$$(10) \quad N_1(x, 0) = \frac{1 - \phi(x)}{q^*(x)} e^{-\mu_+^*(x)}$$

onde

$$\phi(x) \equiv \sqrt{1 + |q(x)|^2}$$

$$\mu_+(x) \equiv \int_x^{+\infty} \left[\frac{q_y}{q} \left(\frac{1}{\phi} - 1 \right) + \frac{\phi_y}{\phi} \right] dy$$

A expressão (10) relaciona o núcleo N e o potencial q , porém em comparação com o Cap. 2 a relação é complicada pela presença do termo $e^{-\mu_+^*(x)}$. Mesmo assim, o problema inverso é resolvido determinando-se N a partir de uma equação integral (Gelfand- Levitan- Marchenko) na qual intervêm os parâmetros de espalhamento do sistema (SW), recuperando-se q a partir de (10), num esquema análogo ao do Cap. 2. Quando q depende de uma variável adicional t e evolui nessa variável de modo adequado, os parâmetros de espalhamento podem ser determinados para qualquer t se forem conhecidos para um valor particular t_0 , e resolvida a equação de Gelfand- Levitan correspondente (na qual t atua como simples parâmetro), pode-se então obter $q(x, t)$ para o valor de t desejado.

A obtenção da equação de Gelfand- Levitan pode ser feita de modo análogo ao Cap. 2¹, sendo esquematizado abaixo.

¹ Um procedimento alternativo válido quando $q(x)$ tem suporte compacto é indicado em [34]

Da definição (9) segue nos $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(11) \quad L_1(x, \lambda) = \lambda e^{i\lambda \varepsilon_+(x)} \int_0^{+\infty} N_1(x, s) e^{i\lambda s} ds$$

$$(12) \quad L_2(x, \lambda) = e^{i\lambda \varepsilon_+(x)} \left[e^{-\mu_+^*(x)} + \int_0^{+\infty} N_2(x, s) e^{i\lambda s} ds \right]$$

e como no Lema 18, Cap. 2 essas relações valem em verdade para todo $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$.

Supondo $a(\lambda) \neq 0$ nos $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se de §2

$$\frac{1}{a(\lambda)} \begin{pmatrix} R_1(x, \lambda) \\ R_2(x, \lambda) / \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2^*(x, \lambda) \\ -L_1^*(x, \lambda) / \lambda \end{pmatrix} + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \begin{pmatrix} L_1(x, \lambda) \\ L_2(x, \lambda) / \lambda \end{pmatrix} e^{2i\lambda x}$$

e então de (11), (12)

$$(13) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\lambda}^{-1} \left[\frac{1}{a(\lambda)} \begin{pmatrix} R_1(x, \lambda) \\ R_2(x, \lambda) / \lambda \end{pmatrix} e^{i\lambda \varepsilon_+(x)} - \begin{pmatrix} e^{-\mu_+(x)} \\ 0 \end{pmatrix} \right] (x, s) =$$

$$= \begin{pmatrix} J_2^*(x, s) \\ -J_1^*(x, s) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\mu_+^*(x)} \end{pmatrix} \sum_{\lambda}^{-1} \left[\frac{b(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} e^{2i\lambda [x + \varepsilon_+(x)]} \right] (x, s)$$

$$+ \sum_{\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\lambda b(\lambda)}{a(\lambda)} \sum_{\lambda}^{-1} [J_1](x, \lambda) e^{2i\lambda [x + \varepsilon_+(x)]} \\ \frac{b(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \sum_{\lambda}^{-1} [J_2](x, \lambda) e^{2i\lambda [x + \varepsilon_+(x)]} \end{pmatrix} (x, s)$$

observando que $\frac{b(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \in L^2(\mathbb{R})$.

Chamando $B_{\text{cont}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{S}^{-1} \left[\frac{b(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} e^{2i\lambda \epsilon_+(x)} \right]$

ou seja,

$$(14) \quad B_{\text{cont}}(\xi) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} e^{2i\lambda \epsilon_+(x)} e^{i\lambda \xi} d\lambda,$$

vem

$$(15) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathfrak{S}^{-1} \left[\frac{b(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} e^{2i\lambda [x + \epsilon_+(x)]} \right] (x, s) = B_{\text{cont}}(2x + s)$$

enquanto

$$(16) \quad \mathfrak{S}^{-1} \left[\frac{b(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} \mathfrak{S}^{-1} \left[J_2(x, y) \right] (x, \lambda) e^{2i\lambda [x + \epsilon_+(x)]} \right] (x, s) =$$

$$= \int_0^{+\infty} N_2(x, y) B_{\text{cont}}(2x + s + y) dy.$$

Por outro lado, no sentido das distribuições

$$(17) \quad \mathfrak{S}^{-1} \left[\frac{\lambda b(\lambda)}{a(\lambda)} \mathfrak{S}^{-1} \left[J_1 \right] (x, \lambda) e^{2i\lambda [x + \epsilon_+(x)]} \right] (x, s) =$$

$$= - \frac{\int_0^{+\infty} N_1(x, y) B_{\text{cont}}(2x + s + y) dy}{\int_0^2 s^2}$$

Resta considerar o membro esquerdo de (13). A condição imposta de $a(\lambda)$ não ter zeros reais implica por §2 que a equação

$$a(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$$

tem um número finito de zeros, todos simples [15], que se pode denotar por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$.

Pelo Teorema dos Resíduos, segue então

$$(18) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\lambda}^{-1} \left[\frac{1}{a(\lambda)} \begin{pmatrix} R_1(x, \lambda) \\ R_2(x, \lambda) / \lambda \end{pmatrix} e^{i\lambda \varepsilon_+(x)} - \begin{pmatrix} e^{-\mu_+(x)} \\ 0 \end{pmatrix} \right] (x, s) =$$

$$= i \sum_{k=1}^d c_k \begin{pmatrix} L_1(x, \lambda_k) \\ L_2(x, \lambda_k) / \lambda_k \end{pmatrix} e^{i\lambda_k (2x + s + \varepsilon_+(x))}$$

onde

$$c_k \equiv \alpha_k / \frac{da}{d\lambda}(\lambda_k), \quad \text{sendo } \alpha_k \text{ a constante}$$

de proporcionalidade entre as autofunções de Jost

$$\phi(\cdot, \lambda_k), \psi(\cdot, \lambda_k), \quad \text{ou seja,}$$

$$\phi(\cdot, \lambda_k) = \alpha_k \cdot \psi(\cdot, \lambda_k),$$

ou, pelo Teorema 13,

$$(19) c_k = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left[q^*(y) \psi_1(y, \lambda_k)^2 + q(y) \psi_2(y, \lambda_k)^2 - 2i \psi_1(y, \lambda_k) \psi_2(y, \lambda_k) \right] dy \right)^{-1}$$

Por (11), (12), segue então de (18)

$$(20) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a(\lambda)} \begin{pmatrix} R_1(x, \lambda) \\ R_2(x, \lambda)/\lambda \end{pmatrix} e^{i\lambda \epsilon_+(x)} \begin{pmatrix} e^{-\mu_+(x)} \\ 0 \end{pmatrix} dx =$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\mu_+^*(x)} \end{pmatrix} B_{\text{discr}}(2x + s) +$$

$$+ \begin{pmatrix} \int_0^{+\infty} N_1(x, y) B_{\text{discr}}(2x + s + y) dy \\ - \int_0^{+\infty} N_2(x, y) B_{\text{discr}}(2x + s + y) dy \end{pmatrix}$$

onde

$$(21) B_{\text{discr}}(\xi) \equiv -i \sum_{k=1}^d \frac{c_k}{\lambda_k} e^{2i\lambda_k \epsilon_+(x)} e^{i\lambda_k \xi}$$

$$B_{\text{discr}}''(\xi) = \frac{d^2}{d\xi^2} B_{\text{discr}}(\xi)$$

A expressão (13) dá então, reunindo (15), (16), (17), (20),

$$(22) \quad N_1(x, s) = e^{-\mu_+(x)} B^*(2x + s) + \int_0^{+\infty} N_2^*(x, y) B(2x + s + y) dy$$

$$(23) \quad N_2^*(x, s) = \frac{\int^2}{\int s^2} \int_0^{+\infty} N_1(x, y) B(2x + s + y) dy$$

nos $x \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, onde

$$(24) \quad B(\xi) \equiv B_{\text{cont}}(\xi) + B_{\text{discr}}(\xi).$$

Tem-se portanto

TEOREMA 20

Sendo

$$q \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R})$$

com

$$q(x) \rightarrow 0 \quad \text{ao } x \rightarrow \pm \infty$$

$$q_x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

$$q_{xx} \in L^1(\mathbb{R})$$

tal que o coeficiente de espalhamento $a(\lambda)$ não tenha zeros reais, então,

sendo (na notação de §2)

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ os autovalores em \mathbb{C}_+ de (SW)

$$B(x, \xi) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\lambda)}{\lambda a(\lambda)} e^{2i\lambda \varepsilon_+(x)} e^{i\lambda \xi} d\lambda +$$

$$-i \sum_{k=1}^d \frac{c_k}{\lambda_k} e^{2i\lambda_k \varepsilon_+(x)} e^{i\lambda_k \xi}$$

onde os coeficientes c_k são dados por (19),

tem-se que existe solução $N \equiv \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \in C^\circ(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})^2$

com

$$N(x, s) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ao } s \rightarrow +\infty$$

uniformemente (em x) sobre compactos $\underline{C} \mathbb{R}$

e $x \rightsquigarrow N(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})^2$ contínua

para a equação (nos $x \in \mathbb{R}, s \geq 0$)

$$N_1(x, s) = e^{-u_+(x)} B^*(x, 2x + s) + \int_0^{+\infty} N_2^*(x, y) B(x, 2x + s + y) dy$$

$$N_2^*(x, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int_0^{+\infty} N_1(x, y) B(x, 2x + s + y) dy$$

(Gelfand- Levitan- Marchenko)

tal que

$$N_1(x, 0) = \frac{1 - \sqrt{1 + |q(x)|^2}}{q^*(x)} e^{-u_+^*(x)}$$

Em termos das funções

$$K_1(x, y) \equiv N_1(x, y - x) e^{\mu_+(x)}$$

$$K_2(x, y) \equiv N_2(x, y - x) e^{\mu_+^*(x)}$$

$$(x \in \mathbb{R}, y \geq x),$$

as equações de Gelfand- Levitan se escrevem

$$(25) \quad K_1(x, y) = B^*(x, x + y) + \int_x^{+\infty} K_2^*(x, z) B^*(x, y + z) dz$$

$$(26) \quad K_2^*(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_x^{+\infty} K_1(x, z) B(x, y + z) dz$$

tendo-se

$$(27) \quad K_1(x, x) = \frac{1 - \sqrt{1 + |q(x)|^2}}{q^*(x)} e^{\mu_+(x) - \mu_+^*(x)}$$

que é a forma encontrada em Shimizu- Wadati [34].

§6 - Aplicação à equação $iq_t + (q/\sqrt{1+|q|^2})_{xx} = 0$

Nesta seção, os resultados das seções anteriores serão aplicados à equação de evolução

$$(28) \quad iq_t + \left(q / \sqrt{1 + |q|^2} \right)_{xx} = 0$$

introduzida em §3.4, onde $q \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})$ é suposto satisfazer as condições de contorno

$$(29) \quad \begin{aligned} q(x, t) &\rightarrow 0 \\ q_x(x, t) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{ao} \quad x \rightarrow \pm \infty$$

com

$$(30) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |q(x, t)| dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |q_t(x, t)| dx$$

uniformemente convergentes em cada $[0, T]$.

O tratamento segue Shimizu-Wadati [34].

§6.1 - Evolução dos Parâmetros de Espalhamento

Pelos Lemas 14, 16 tem-se

$$(31) \quad \begin{aligned} R_t &= B R + 2i\lambda^2 R & \text{nos } (x, t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{C}}_+ \\ \tilde{R}_t &= B \tilde{R} - 2i\lambda^2 \tilde{R} & \text{nos } (x, t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{C}}_- \end{aligned}$$

e analogamente pode-se obter

$$(32) \quad \begin{aligned} L_t &= B L - 2i\lambda^2 L & \text{nos } (x, t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{C}}_+ \\ \tilde{L}_t &= B \tilde{L} + 2i\lambda^2 \tilde{L} & \text{nos } (x, t, \lambda) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{C}}_- \end{aligned}$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} b_{11}(x, t; \lambda) & b_{12}(x, t; \lambda) \\ b_{21}(x, t; \lambda) & -b_{11}(x, t; \lambda) \end{bmatrix}$$

para

$$\begin{aligned} b_{11}(x, t; \lambda) &\equiv - \frac{2i\lambda^2}{\phi(x, t)} \\ b_{12}(x, t; \lambda) &\equiv i\lambda \left(\frac{q(x, t)}{\phi(x, t)} \right)_x + 2\lambda^2 \frac{q(x, t)}{\phi(x, t)} \\ b_{21}(x, t; \lambda) &\equiv i\lambda \left(\frac{q^*(x, t)}{\phi(x, t)} \right)_x - 2\lambda^2 \frac{q^*(x, t)}{\phi(x, t)}, \\ \phi(x, t) &\equiv \sqrt{1 + |q(x, t)|^2}. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 21 (Evolução dos coeficientes de espalhamento)

Nas hipóteses acima sobre q , tem-se

- (i) $a(t, \lambda)$ constante nos $t \geq 0$
para cada $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$
- (ii) $\tilde{a}(t, \lambda)$ constante nos $t \geq 0$
para cada $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_-$
- (iii) $b(t, \lambda) = b(0, \lambda) e^{4i\lambda^2 t}$ nos $t \geq 0$
para cada $\lambda \in \mathbb{R}$
- (iv) $\tilde{b}(t, \lambda) = \tilde{b}(0, \lambda) e^{-4i\lambda^2 t}$ nos $t \geq 0$
para cada $\lambda \in \mathbb{R}$

PROVA:

(i) Para $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$, tem-se de §3.2

$$a(t, \lambda) = R_1(x, t, \lambda) L_2(x, t, \lambda) - L_1(x, t, \lambda) R_2(x, t, \lambda)$$

e então

$$a_t = R_{1t} L_2 + R_1 L_{2t} - L_{1t} R_2 - L_1 R_{2t} ,$$

o que dá $a_t = 0$ por (31), (32).

(ii) Análogo a (i)

(iii) Para $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se de §3.2

$$R(x, t, \lambda) = b(t, \lambda) L(x, t, \lambda) e^{2i\lambda x} + a(t, \lambda) \tilde{L}(x, t, \lambda)$$

e então

$$R_t = b_t L e^{2i\lambda x} + b L_t e^{2i\lambda x} + a \tilde{L}_t ,$$

o que dá por (31), (32)

$$b_t L e^{2i\lambda x} = 4i\lambda^2 b L e^{2i\lambda x} ,$$

ou seja,

$$b_t = 4i\lambda^2 b$$

(iv) Análogo a (iii)

QED

A proposição acima fornece uma prova alternativa para a invariância do espectro pontual de $\mathbb{L}(t)$ se q obedecer as condições estabelecidas nessa seção. Em particular, no Teorema 19, não é preciso exigir uniformidade em t nas condições de contorno (ii).

PROPOSIÇÃO 22

Nas mesmas condições da proposição anterior, tem-se, na notação de §3.5,

$$(i) \quad \alpha_k(t) = \alpha_k(0) e^{4i\lambda_k^2 t}$$

para cada $\lambda_k \in P\sigma(\mathbb{L}) \cap C_+$

$$(ii) \quad \tilde{\alpha}_k(t) = \tilde{\alpha}_k(0) e^{-4i\tilde{\lambda}_k^2 t}$$

para cada $\tilde{\lambda}_k \in P\sigma(\mathbb{L}) \cap C_-$.

PROVA:

(i) Tem-se $R(x, t, \lambda_k) = \alpha_k(t) L(x, t, \lambda_k) e^{2i\lambda_k x}$
e então

$$R_t = \alpha_{kt} L e^{2i\lambda_k x} + \alpha_k L_t e^{2i\lambda_k x},$$

o que dá por (31), (32)

$$\alpha_{kt} = 4i\lambda_k^2 \alpha_k.$$

(ii) Análogo a (i)

QED

Em particular, sendo (como em §3.5)

$$C_k(t) \equiv \frac{\alpha_k(t)}{\frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda_k)}, \quad \tilde{C}_k(t) \equiv \frac{\tilde{\alpha}_k(t)}{\frac{d\tilde{\alpha}}{d\lambda}(\tilde{\lambda}_k)},$$

tem-se

$$(33) \quad C_k(t) = C_k(0) e^{4i\lambda_k^2 t}, \quad \tilde{C}_k(t) = \tilde{C}_k(0) e^{-4i\tilde{\lambda}_k^2 t}.$$

§6.2 - Espalhamento Inverso

A análise de §3.5 - §3.6.1 permite concluir então

TEOREMA 23 (Método de Espalhamento para (SW))

Seja $q \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}_+}, \mathbb{C})$ com

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |q(x, t)| dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |q_x(x, t)| dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |q_{xx}(x, t)| dx$$

uniformemente convergentes em cada $[0, T]$

$$(ii) \quad q(x, t) \rightarrow 0, \quad q_x(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{ao } x \rightarrow \pm \infty$$

uniformemente em cada $[0, T]$

$$(iii) \quad iq_t + \left(\frac{q}{\sqrt{1 + |q|^2}} \right)_{xx} = 0$$

tal que o coeficiente de espalhamento $a(0, \lambda)$ do sistema (SW) para $t = 0$ não tenha zeros reais,

ENTÃO

sendo $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ os autovalores em \mathbb{C}_+ de $\mathbb{H}(0)$

$$B_{discr}(x, t; \xi) = -i \sum_{k=1}^d C_k(0) \frac{1}{\lambda_k} e^{i\lambda_k(2\varepsilon_+(x, t) + 4\lambda_k^2 t + \xi)}$$

$$B_{\text{cont}}(x, t; \xi) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(0, \lambda)}{\lambda a(0, \lambda)} e^{i\lambda(2\varepsilon_+(x, t) + 4\lambda t + \xi)} d\lambda$$

onde

$$c_k(0) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left[q^*(y, 0) L_1(y, 0; \lambda_k)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + q(y, 0) L_2(y, 0; \lambda_k)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. - 2i L_1(y, 0; \lambda_k) L_2(y, 0; \lambda_k) \right] e^{2i\lambda_k y} dy \right)^{-1}$$

tem-se que

$$\text{existe } N(x, t; s) \equiv \begin{pmatrix} N_1(x, t; s) \\ N_2(x, t; s) \end{pmatrix} \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+, \mathbb{C})^2$$

tal que

$$(i) \quad (x, t) \rightsquigarrow N(x, t; \cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+)^2 \text{ é contínua}$$

$$(ii) \quad N(x, t; s) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ao } s \rightarrow +\infty$$

uniformemente em (x, t) sobre compactos $\underline{C} \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+$

$$(iii) \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}, t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \\ \text{tem-se nos } s \geq 0$$

$$N_1(x, t; s) = e^{-\mu_+(x, t)} B^*(x, t; 2x + s) + \\ + \int_0^{+\infty} N_2^*(x, t; z) B(x, t; 2x + s + z) dz$$

$$N_2^*(x, t; s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int_0^{+\infty} N_1(x, t; z) B(x, t; 2x + s + z) dz$$

$$(iv) \quad N_1(x, t; 0) = \frac{1 - \phi(x, t)}{q^*(x, t)} e^{-\mu_+^*(x, t)}$$

onde

$$\phi(x, t) \equiv \sqrt{1 + |q(x, t)|^2}$$

$$\epsilon_+(x, t) \equiv \int_x^{+\infty} (1 - \phi(y, t)) dy$$

$$\mu_+(x, t) \equiv -\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left[\frac{q_y(y, t)}{q(y, t)} \frac{1 - \phi(y, t)}{\phi(y, t)} + \frac{\phi_y(y, t)}{\phi(y, t)} \right] dy$$

Em termos das funções

$$K_1(x, t; y) \equiv N_1(x, t; y - x) e^{\mu_+(x, t)}$$

$$K_2(x, t; y) \equiv N_2(x, t; y - x) e^{\mu_+^*(x, t)}$$

tem-se por (iii), (iv) do teorema acima

$$(34) \quad K_1(x, t; y) = B^*(x, t; x + y) + \int_x^{+\infty} K_2^*(x, t; z) B^*(x, t; y + z) dz$$

$$(35) \quad K_2^*(x, t; y) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int_x^{+\infty} K_1(x, t; z) B(x, t; y + z) dz$$

com

$$(36) \quad K_1(x, t; x) = \frac{1 - \phi(x, t)}{q^*(x, t)} e^{\mu_+(x, t) - \mu_+^*(x, t)}$$

§6.3 - Solitons

Se no procedimento acima o coeficiente de reflexão $b(0, \lambda)$ for nulo, resultarão soluções especiais (solitons) que poderão ser encontradas resolvendo (34), (35) e recuperando $q(x, t)$ através de (36). A análise porém é complicada significativamente pela presença dos termos $\epsilon_+(x, t)$, $\mu_+(x, t)$, por envolverem implicitamente a solução procurada q , e será ilustrada abaixo para o caso mais simples em que há apenas um autovalor a considerar, correspondente ao caso de 1 - solitons.

Suponha então $b(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, tendo-se também $a(0, \lambda) = 0$ em $\bar{\mathbb{C}}_+$ unicamente para $\lambda = \lambda_1 \equiv \xi + i\eta$ ($\eta > 0$). Tem-se nesse caso

$$B(x, t; y) = \frac{1}{\lambda_1} d_1(t) e^{i\lambda_1 [y + 2\epsilon_+(x, t)]}$$

onde, na notação de §3.6.2,

$$d_1(t) = -ic_1(t) = -ic_1(0) e^{4i\lambda_1^2 t}.$$

A equação de Gelfand- Levitan (34), (35) torna-se

$$K_1(x, t; y) = \frac{d_1^*(t)}{\lambda_1^*} e^{-i\lambda_1^* [x + y + 2\epsilon_+(x, t)]} + \\ + \int_x^{+\infty} K_2^*(x, t; z) \frac{d_1^*(t)}{\lambda_1^*} e^{-i\lambda_1^* [y + z + 2\epsilon_+(x, t)]} dz$$

$$K_2^*(x, t; y) = - \int_x^{+\infty} K_1(x, t; z) \lambda_1 d_1(t) e^{i\lambda_1 [y + z + 2\epsilon_+(x, t)]} dz$$

ou seja,

$$K_1(x, t; y) = f(x, t) e^{-i\lambda_1^* y} + \\ + g(x, t) \int_x^{+\infty} K_1(x, t; z) e^{i\lambda_1 z} dz \cdot e^{-i\lambda_1^* y}$$

onde

$$f(x, t) \equiv \frac{d_1^*(t)}{\lambda_1^*} e^{-i\lambda_1^* [x + 2\varepsilon_+(x, t)]} \\ g(x, t) \equiv -\frac{\lambda_1}{2\lambda_1^* \eta} |d_1(t)|^2 e^{-4\eta\varepsilon_+(x, t)} e^{-2\eta x}$$

Para $\xi, \eta > 0$ essa equação admite uma única solução no espaço $W \equiv \{w \in C^0(\Delta, \mathbb{C}) : w(x, t; \cdot) \in L^\infty(x, +\infty) \text{ para cada } (x, t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+\}$, onde $\Delta \equiv \{(x, t; y) : x \in \mathbb{R}, t \geq 0, y \geq x\}$, tendo-se

$$K_1(x, t; y) = \frac{d_1^*(t)}{\lambda_1^*} \frac{e^{-i\lambda_1^* [x + y + 2\varepsilon_+(x, t)]}}{1 + \frac{|d_1(t)|^2}{4\eta^2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1^*} e^{-4\eta[x + \varepsilon_+(x, t)]}}$$

nos $(x, t; y) \in \Delta$.

Como

$$K_1(x, t, x) = \frac{1 - \sqrt{1 + |q(x, t)|^2} \mu_+(x, t) - \mu_+^*(x, t)}{q^*(x, t)} e$$

$$d_1(t) = d_1(0) e^{4i\lambda_1^2 t} = d_1(0) e^{-8\xi\eta t + 4i(\xi^2 - \eta^2)t}$$

obtém-se

$$\frac{1 - \sqrt{1 + |q(x, t)|^2} \mu_+(x, t) - \mu_+^*(x, t)}{q^*(x, t)} e =$$

$$= \frac{\eta e^{-4i(\xi^2 - \eta^2)t}}{\lambda_1^* e^{i\theta_1} e^{i\beta_0}} \frac{e^{-2i\xi [x + \epsilon_+(x, t)]}}{\cosh [8\xi\eta t - \alpha_0 - i\theta_1 + 2\eta [x + \epsilon_+(x, t)]]}$$

onde

$$e^{\delta_0} = \frac{\bar{d}_1(0)}{2\eta}, \quad \delta_0 = \alpha_0 + i\beta_0 \quad (\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R})$$

$$\lambda_1 = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2} e^{i\theta_1}$$

e em particular

$$\frac{\sqrt{1 + |q(x, t)|^2} - 1}{|q(x, t)|} = \frac{\eta}{\left| \lambda_1 \cosh [2\eta [x + 4\xi t] + 2\eta\epsilon_+(x, t) - \alpha_0 - i\theta_1] \right|}$$

de onde, para $\xi > \eta$,

$$|q(x, t)| = \frac{2\eta \left| \cosh [2\eta \cdot [x + 4\xi t] + 2\eta\epsilon_+(x, t) - \alpha_0 - i\theta_1] \right|}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \left(\left| \cosh [2\eta \cdot [x + 4\xi t] + 2\eta\epsilon_+(x, t) - \alpha_0 - i\theta_1] \right|^2 - \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \right)}$$

Daí

$$|q(x, t)|^2 = \frac{4\eta^2 \left(\cosh^2 [2\eta \cdot [x + 4\xi t] + 2\eta\epsilon_+(x, t) - \alpha_0] - \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \right)}{(\xi^2 + \eta^2) \left(\cosh^2 [2\eta \cdot [x + 4\xi t] + 2\eta\epsilon_+(x, t) - \alpha_0] - \frac{2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \right)^2}$$

e então

$$q(x, t) = \frac{|\lambda_1| e^{i\theta_1} (1 + e^{-16\xi\eta t + 2\alpha_0 - 2i\theta_1 - 4\eta [x + \epsilon_+(x, t)]})}{2\eta e^{-8\xi\eta t + 4i(\xi^2 - \eta^2)t + \delta_0 + 2i(\xi + i\eta) [x + \epsilon_+(x, t)]}}$$

onde

$$\rho = \frac{-2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \frac{e^{\mu_+^*(x, t) - \mu_+(x, t)}}{\left(\cosh^2 \left[2\eta \left[x + 4\xi t \right] + 2\eta \epsilon_+(x, t) - \alpha_0 \right] - \frac{2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \right)}$$

ou seja,

para $\lambda_1 = \xi + i\eta$ com $\xi > \eta > 0$:

$$q(x, t) = - \frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2} e^{\mu_+^*(x, t) - \mu_+(x, t) - 4i(\xi^2 - \eta^2)t - 2i\xi(x + \epsilon_+(x, t)) - i\beta_0} m(x, t)$$

onde

$$m(x, t) \equiv \frac{\cosh \left[2\eta \left(x + 4\xi t + \epsilon_+(x, t) \right) - \alpha_0 + i\theta_1 \right]}{\cosh^2 \left[2\eta \left(x + 4\xi t + \epsilon_+(x, t) \right) - \alpha_0 \right] - \frac{2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}}$$

$$e^{\delta_0} = \frac{d_1(0)}{2\eta}, \quad \delta_0 = \alpha_0 + i\beta_0,$$

$$\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\theta_1}.$$

Porém essa expressão ainda não determina $q(x, t)$ de modo fácil, devido à presença dos termos $\epsilon_+(x, t)$, $\mu_+(x, t)$, que envolvem a função q de um modo complicado. Tentando resolver esse problema, definamos

$$u \equiv x + 4\xi t - \frac{\alpha_0}{2\eta}$$

e

$$\tilde{\epsilon}_+(u, t) = \epsilon_+(u - 4\xi t + \frac{\alpha_0}{2\eta}, t).$$

Então

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}_+}{\partial u}(u, t) = \frac{\partial \epsilon_+}{\partial x}(x, t) = \sqrt{1 + |q(x, t)|^2} - 1 =$$

$$= \frac{\cosh^2 (2\eta u + 2\eta \tilde{\varepsilon}_+(u, t))}{\cosh^2 (2\eta u + 2\eta \tilde{\varepsilon}_+(u, t)) - \frac{2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} - 1$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial u} [u + \tilde{\varepsilon}_+(u, t)] = \frac{\cosh^2 (2\eta [u + \tilde{\varepsilon}_+(u, t)])}{\cosh^2 (2\eta [u + \tilde{\varepsilon}_+(u, t)]) - \frac{2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}}$$

de onde,

observando que $\tilde{\varepsilon}_+(u, t) \rightarrow 0$ ao $u \rightarrow +\infty$,

segue

$$\tilde{\varepsilon}_+(u, t) = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \left[\operatorname{tgh} [2\eta [u + \tilde{\varepsilon}_+(u, t)]] - 1 \right],$$

o que permite encontrar $\tilde{\varepsilon}_+(u, t)$ para cada $u \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ dados, e em particular $\varepsilon_+(x, t)$ para qualquer x, t .



FIG. 1

$$\varepsilon_+(u) = \varepsilon_+(u, t) \text{ para } u \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R}$$

no caso $\xi = 1$ e $\eta = 1$

Resta mostrar como obter o fator $e^{\mu_+^*(x, t) - \mu_+(x, t)}$

Ora:

$$\begin{aligned} \mu_+^*(x, t) - \mu_+(x, t) &= \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{q_x q^* - q q_x^*}{q q^*} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |q|^2}} - 1 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \left(\log \frac{q}{q^*} \right)_x \left(\frac{1}{\sqrt{1 + |q|^2}} - 1 \right) dx \end{aligned}$$

onde, para $\xi > \eta > 0$:

$$\begin{aligned} \left(\log \frac{q(x, t)}{q^*(x, t)} \right)_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\log \frac{\cosh [2\eta [x + 4\xi t + \epsilon_+(x, t)] + i\theta_1 - \alpha_0]}{\cosh [2\eta [x + 4\xi t + \epsilon_+(x, t)] - i\theta_1 - \alpha_0]} + \right. \\ &\quad \left. - 8i(\xi^2 - \eta^2)t - 4i\xi [x + \epsilon_+(x, t)] - 2i\beta_0 + 2\mu_+^*(x, t) - 2\mu_+(x, t) \right] = \\ &= \frac{2i\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2} \frac{2\eta \sqrt{1 + |q(x, t)|^2}}{\cosh^2 [2\eta [x + 4\xi t + \epsilon_+(x, t)] - \alpha_0] - \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \end{aligned}$$

com

$$\sqrt{1 + |q(x, t)|^2} = \frac{\cosh^2 [2\eta [x + 4\xi t + \epsilon_+(x, t)] - \alpha_0]}{\cosh^2 [2\eta [x + 4\xi t + \epsilon_+(x, t)] - \alpha_0] - \frac{2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}}$$

Obtém-se então, após algum cálculo,

$$\begin{aligned} \mu_+^*(x, t) - \mu_+(x, t) &= \frac{4i\xi\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\cosh^2 [2\eta [y + 4\xi t + \epsilon_+(y, t)] - \alpha_0] - \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} dy + \\ &\quad - \frac{2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \int_x^{+\infty} \frac{(\mu_+^*(y, t) - \mu_+(y, t))_y}{\cosh^2 [2\eta [y + 4\xi t + \epsilon_+(y, t)] - \alpha_0]} dy \end{aligned}$$

ou seja,

chamando $f \equiv \mu_+^* - \mu_+$,

tem-se

$$f_x = \frac{4i\xi\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \frac{-1}{\cosh^2 [2\eta [x + 4\xi t + \varepsilon_+(x, t)] - \alpha_0]} - \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} +$$

$$+ \frac{2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \frac{1}{\cosh^2 [2\eta [x + 4\xi t + \varepsilon_+(x, t)] - \alpha_0]} f_x$$

ou seja, sendo $v(x, t) \equiv 2\eta [x + 4\xi t + \varepsilon_+(x, t)] - \alpha_0$,

$$f_x = - \frac{4i\xi\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)} \frac{1}{\cosh^2 v(x, t)} - \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\cosh^2 v(x, t)}{\cosh^2 v(x, t) - \frac{2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} =$$

$$= - \frac{2i\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)} \frac{1}{\cosh^2 v(x, t) - \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}} \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x} \left[\log \frac{\cosh (v(x, t) + i\theta_1)}{\cosh (v(x, t) - i\theta_1)} \right]$$

de modo que

$$f(x, t) = \int_x^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[\log \frac{\cosh (v(y, t) + i\theta_1)}{\cosh (v(y, t) - i\theta_1)} \right] dy =$$

$$= \log (e^{2i\theta_1}) + \log \frac{\cosh (v(x, t) - i\theta_1)}{\cosh (v(x, t) + i\theta_1)}$$

Portanto,

$$e^{\frac{\mu_+^*(x,t) - \mu_+(x,t)}{2}} = e^{\frac{2i\theta_1 \cosh(v(x,t) - i\theta_1)}{\cosh(v(x,t) + i\theta_1)}}$$

e daí

$$q(x,t) = \frac{-2\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \frac{e^{i[2\theta_1 - \beta_0 - 4t(\xi^2 - \eta^2) - 2\xi \cdot (x + \epsilon_+(x,t))]} \cosh[2\eta[x + 4\xi t] - \alpha_0 + 2\eta\epsilon_+(x,t) - i\theta_1]}{\cosh^2[2\eta[x + 4\xi t + \epsilon_+(x,t)] - \alpha_0] - \frac{2\eta^2}{\xi^2 + \eta^2}}$$

onde

$$\lambda_1 = \xi + i\eta, \quad \xi > \eta > 0,$$

$$\theta_1 = \text{Arc tg } \frac{\eta}{\xi}$$

$$e^{\delta_0} = \frac{d_1(0)}{2\eta} = \frac{-i C_1(0)}{2\eta}, \quad \delta_0 = \alpha_0 + i\beta_0,$$

com

$\epsilon_+(x, t)$ calculado, para cada $x, t \in \mathbb{R}$ dados, via

$$\epsilon_+(x, t) = \tilde{\epsilon}_+(u, t) \quad \text{para } u = x + 4\xi t - \frac{\alpha_0}{2\eta}$$

sendo $\tilde{\epsilon}_+(u, t)$ a solução real da equação numérica

$$\tilde{\epsilon}_+(u, t) = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \left[\text{tgh}(2\eta[u + \tilde{\epsilon}_+(u, t)]) - 1 \right].$$

Em particular, ao $x \rightarrow \pm \infty$

$$q(x, t) = o(e^{-2\eta|x|})$$

$$q_x(x, t) = o(e^{-2\eta|x|})$$

$$q_{xx}(x, t) = o(e^{-2\eta|x|})$$

uniformemente em t sobre compactos $\underline{\mathbb{C}}\mathbb{R}$.

Ademais, tem-se, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} |q(x, t)|^2 = 0 \iff x + 4\xi t + \varepsilon_+(x, t) = \frac{\alpha_0}{2\eta}$$

enquanto

$$x + 4\xi t + \varepsilon_+(x, t) = \frac{\alpha_0}{2\eta} \quad \text{admite uma \u00fanica solu\u00e7\u00e3o}$$

$$x = x(t)$$

tendo-se

$$|q(x(t), t)|^2 = \frac{4\eta^2\xi^2}{(\xi^2 - \eta^2)},$$

de modo que para cada $t \in \mathbb{R}$ existe um \u00fanico ponto de m\u00e1ximo $x = x(t)$ para $|q(x, t)|$, tendo-se ademais

$$|q(\cdot, t)|_{\text{MAX}} = \frac{2\eta\xi}{\xi^2 - \eta^2}.$$

Referências

- [1] M.J. ABLOWITZ. *Lectures on the inverse scattering transform.* Studies in Appl. Math. 58(1978), 17-94.
- [2] M.J. ABLOWITZ, D.J. KAUP, A.C. NEWELL & H. SEGUR. *Method for solving the Sine-Gordon equation.* Phys. Rev. Lett., 30(1973), 1262 - 1264.
- [3] M.J. ABLOWITZ, D.J. KAUP, A.C. NEWELL & H. SEGUR. *Non-linear evolution equations of physical significance.* Phys. Rev. Lett., 31(1973), 125 - 127.
- [4] M.J. ABLOWITZ, D.J. KAUP, A.C. NEWELL & H. SEGUR. *The inverse scattering transform - Fourier analysis for nonlinear problems.* Studies in Appl. Math., 53 (1974), 249 - 314.
- [5] R.L. ANDERSON & E. TAFLIN. *Explicit nonsoliton solutions of the Benjamin-Ono equation.* Lett. Math. Physics, 7(1983), 243.
- [6] R.L. ANDERSON & E. TAFLIN. *The Benjamin-Ono equation - Recursivity of linearization maps - Lax pairs.* Lett. Math. Physics, 9(1985), 299 - 311.
- [7] R. BEALS & R.R. COIFMAN. *Scattering and inverse scattering for first order systems.* Comm. Pure Appl. Math., 37(1984), 39 - 90.
- [8] L. CESARI. *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations.* Berlin, Springer, 1959.
- [9] A. COHEN. *Existence and regularity for solutions of the Korteweg-de Vries equation.* Arch. Rat. Mech. Anal., 71(1979), 143 - 175.
- [10] A. COHEN. *A counterexample in the inverse scattering theory for steplike potentials.* Comm. Partial Diff. Eq., 7(1982), 883 - 904.
- [11] A. COHEN. *Solutions of the Korteweg-de Vries equation with steplike initial profile.* Comm. Partial Diff. Eq., 9(1984), 751 - 806.
- [12] P. DEIFT, C. TOMEI & E. TRUBOWITZ. *Inverse scattering and the Boussinesq equation.* Comm. Pure Appl. Math., 35(1982), 567 - 628.
- [13] P. DEIFT & E. TRUBOWITZ. *Inverse scattering on the line.* Comm. Pure Appl. Math., 32(1979), 121 - 251.
- [14] R.K. DODD, J.C. EILBECK, J.A. GIBBON & H.C. MORRIS. *Solitons and nonlinear wave equations.* New York,

Academic, 1982.

- [15] W. ECKHAUS & A. VAN HARTEN. *The inverse scattering transformation and the theory of solitons.* Amsterdam, North-Holland, 1981.
- [16] L.D. FADDEEV. *The inverse problem in the quantum theory of scattering.* J. Math. Phys., 4(1963), 72-104.
- [17] L.D. FADDEEV. *Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation.* Amer. Math. Soc. Transl., 65(1967), 139 - 166.
- [18] E. FERMI, J.R. PASTA & S.M. ULAM. *Studies of nonlinear problems.* Los Alamos Sci. Lab., Technical Report LA - 1940, 1955.
- [19] C.S. GARDNER, J.M. GREENE, M.D. KRUSKAL & R.M. MIURA. *Method for solving the Korteweg-de Vries equation.* Phys. Rev. Lett., 19(1967), 1095 - 1097.
- [20] C.S. GARDNER, J.M. GREENE, M.D. KRUSKAL & R.M. MIURA. *Korteweg-de Vries equation and generalizations VI: methods for exact solution.* Comm. Pure Appl. Math., 27(1974), 97 - 133.
- [21] I.M. GELFAND & B.M. LEVITAN. *On the determination of a differential equation from its spectral function.* Amer. Math. Soc. Transl., 1(1955), 253 - 309.
- [22] R. HIROTA. *Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons.* Phys. Rev. Lett., 27(1971), 1192 - 1194.
- [23] R. HIROTA. *Exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons.* J. Phys. Soc. Japan, 33(1972), 1456 - 1458.
- [24] E.J. HRUSLOV. *Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation with initial data of step type.* Math. USSR Sbornik, 28(1976), 229 - 248.
- [25] E.L. INCE. *Ordinary differential equations.* New York, Dover, 1956.
- [26] I. KAY & H.E. MOSES. *Reflectionless transmission through dielectrics and scattering potentials.* J. Appl. Phys., 27(1956), 1503 - 1508.
- [27] G.L. LAMB, Jr. *Elements of soliton theory.* New York, Wiley, 1980.
- [28] P.D. LAX. *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.* Comm. Pure Appl. Math., 21(1968), 467 - 490.

- [29] V.A. MARCHENKO. *The construction of the potential energy from the phases of the scattered waves.* Dokl. Akad. Nauk. USSR, 104(1955), 695 - 698.
- [30] A. MELIN. *Operator methods for inverse scattering on the real line.* Comm. Partial Diff. Eq., 10(1985), 677 - 766.
- [31] R.M. MIURA. *The Korteweg- de Vries equation: a survey of results.* SIAM Review, 18(1976), 412 - 459.
- [32] A.C. MURRAY. *Solutions of the Korteweg- de Vries equation for irregular data.* Duke Math. J., 45(1978), 149 - 181.
- [33] A.C. SCOTT, F.Y.F. CHU, D.W. MCLAUGHLIN. *The soliton: a new concept in applied science.* Proc. IEEE, 61(1973), 1443 - 1483.
- [34] T. SHIMIZU & M. WADATI. *A new integrable nonlinear evolution equation.* Prog. Theor. Phys., 63(1980), 808 - 820.
- [35] S. TANAKA. *Modified KdV and scattering theory.* Proc. Japan Acad. 48(1972), 466 - 469.
- [36] S. TANAKA. *Korteweg- de Vries equation: construction of solutions in terms of scattering data.* Osaka J. Math., 11(1974), 49 - 59.
- [37] M. WADATI. *The exact solution of the modified Korteweg- de Vries equation.* J. Phys. Soc. Japan, 32(1972), 1981.
- [38] M. WADATI. *The modified Korteweg- de Vries equation.* J. Phys. Soc. Japan, 34(1973), 1289 - 1296.
- [39] M. WADATI & M. TODA. *The exact n-soliton solution of the Korteweg- de Vries equation.* J. Phys. Soc. Japan, 32(1972), 1403 - 1411.
- [40] K. YOSIDA. *Functional analysis.* (6th ed.). Berlin, Springer, 1980.
- [41] N.J. ZABUSKY & M.D. KRUSKAL. *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states.* Phys. Rev. Lett., 15(1965), 240-243.
- [42] N.J. ZABUSKY. *A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction.* Proc. Symp. on Nonlinear Partial Differential Equations, New York, Academic, 1967.
- [43] V. E. ZAKHAROV & A.B. SHABAT. *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media.* Soviet Phys. JETP, 34(1972), 62 - 69.

- [44] V.E. ZAKHAROV & A.B. SHABAT. *Interaction between solitons in stable medium.* Soviet Phys. JETP, 35 (1973), 823 - 828.
- [45] V.E. ZAKHAROV & A.B. SHABAT. *A scheme for integrating the nonlinear equations of Mathematical Physics by the method of the inverse scattering problem I.* Funct. Anal. Appl. 8(1974), 226 - 235.