

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA E RELAÇÕES INTERNACIONAIS

Lucas Rubbo Tesser

Estimação e Previsão da Estrutura a Termo da Taxa de Juros Por Modelos de Fatores

Porto Alegre
2013

Lucas Rubbo Tesser

Estimação e Previsão da Estrutura a Termo da Taxa de Juros Por Modelos de Fatores

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. João Fróis Caldeira

**Porto Alegre
2013**

Lucas Rubbo Tesser

Estimação e Previsão da Estrutura a Termo da Taxa de Juros Por Modelos de Fatores

Trabalho de conclusão submetido ao Curso de Graduação em Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS, como requisito parcial para obtenção do título Bacharel em Economia.

Orientador: Prof. Dr. João Fróis Caldeira

Aprovada em: Porto Alegre, ____ de _____ de 2013.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Fróis Caldeira – Orientador
UFRGS

Prof. Dr. Fabricio Tourrucôo
UFRGS

Prof. Dr. Marcelo Savino Portugal
UFRGS

Aos meus pais

Agradecimentos:

Agradeço a todos que me ajudaram de alguma forma. Em especial ao Professor João Fróis Caldeira pela motivação e orientação indispensáveis para a realização deste trabalho. Agradeço, também, aos meus antepassados, pobres imigrantes, cujo trabalho e sacrifício possibilitaram que em poucas gerações seus descendentes pudessem sair da miséria e da ignorância, tendo a possibilidade de viverem vidas plenas, o que lhes foi negado pelas circunstâncias. Por fim, gostaria de fazer um agradecimento especial a Lara, minha querida companheira, eterna fonte de inspiração, apoio e alegria.

Resumo:

Tendo em vista os recentes avanços na capacidade de estimação e previsão dos modelos de fatores sobre a ETTJ este trabalho se propõe a explicar e verificar as qualidades de um grupo de quatro modelos popularmente abordados na literatura sobre o assunto. No presente trabalho são definidos conceitos base sobre a matemática da taxa de juros. Nos testes realizados concluímos que o modelo de Svensson (1994) tem uma larga vantagem sobre os correntes (Diebold Li (2006), Bliss(1997), 2 Fatores) no quesito ajuste dentro da amostra. No que se refere ao poder preditivo, o modelo de 4 fatores de Svensson previsto por um AR(1), se mostra o melhor para os horizontes 1 mês (21 dias), 3 meses (63 dias) e 6 meses (126 dias), enquanto o modelo de 2 fatores previsto pelo VAR(1) tem melhores resultados no horizonte de 1 dia e 1 semana (5 dias).

Palavras Chave: Estrutura a termo da taxa de juros, modelos de fatores da classe Nelson e Siegel, ajuste dentro da amostra, previsão.

Abstract

Having in mind the recent advances in the capacity of estimation and forecasting of factor models concerning the term structure of interest rates this study proposes itself to verify the quality of a group of four popularly approached models in the literature. In the present work base concepts concerning the mathematics of interest rates are defined. In the tests done here we conclude that the Svensson (1994) model performs best than its rivals (Diebold Li (2006), Bliss(1997), 2 Factors), at the in sample adjustment. In regard of the prediction power, the 4 factor Svensson model predicted by an AR(1) comes out as the best for the horizons of a month (21 days), 3 months (63 days) and 6 months (126 days) meanwhile the 2 factor model predicted by a VAR(1) has the best results for the horizons of a day and 1 week (5 days).

Keywords: Term structure of interest rates, factor models of the Nelson and Siegel class, in sample adjustment, forecasting.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	9
2. RENDA FIXA E ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS.....	11
2.1 Renda Fixa e Títulos Sem Cupom.....	11
2.2 Estrutura a Termo da Taxa de Juros.....	11
2.3 Teorias de Determinação da Taxa de Juros.....	17
2.3.1 Teoria das Expectativas.....	17
2.3.2 Teoria da Preferência pela Liquidez.....	18
2.3.3 Teoria do Habitat Preferido.....	18
2.3.4 Teoria da Segmentação de Mercado.....	19
3. MODELOS DE FATORES.....	20
3.1 Modelo Base de Três Fatores.....	21
3.2 Modelo de Dois Fatores.....	23
3.3 Modelo de Três Fatores de Bliss.....	23
3.4 Modelo de Quatro Fatores de Svensson.....	24
3.5 Especificação Geral.....	24
4. Dados e Análise dos Resultados.....	26
4.1 Dados.....	26
4.2 Ajuste Dentro da Amostra.....	27
4.3 Resultados Empíricos do Ajuste da Amostra.....	27
4.4 Previsão.....	27
4.5 Resultados Empíricos da Previsão.....	29
4.6 Conclusões.....	30
5. Referências.....	32
Anexo.....	35

1 INTRODUÇÃO

A estimação e previsão da estrutura a termo da taxa de Juros (ETTJ) é de grande importância para inúmeras áreas, dentro e fora da academia. Os Bancos Centrais a utilizam para avaliar como mudanças nas taxas de juros afetam as decisões dos agentes econômicos, podendo avaliar a eficácia da política monetária. Como a política monetária afeta somente as taxas de curto prazo fica claro a importância da ETTJ, já que são as taxas de longo prazo (com maturidades mais longas) que afetam as decisões dos agentes. A ETTJ reflete as expectativas sobre a trajetória futura das taxas de curto prazo, carregando informação acerca das decisões correntes e futuras da política monetária. Dessa forma, a maneira que os bancos centrais têm para afetar as taxas de juros de longo prazo é afetar as expectativas quanto às decisões futuras sobre política monetária que tomará. Para os tesouros nacionais a evolução da ETTJ sinaliza quais taxas de juros devem ser praticadas, para que o mercado compre seus títulos pré-fixados. Já as instituições financeiras em geral utilizam a ETTJ com o intuito de determinar os fatores de desconto que são usados para se determinar o valor de mercado dos seus ativos. E para as firmas o conhecimento da ETTJ é importante para as tomadas de decisão sobre investimento.

Em resposta a tantas demandas, nas últimas três décadas tem se visto grandes avanços com relação à modelagem e estimação das curvas de juros¹. Como produto disto, diversos modelos teóricos e econométricos vêm sendo desenvolvidos. Estes podem ser separados em três classes. A primeira diz respeito aos modelos de equilíbrio, os quais se utilizam normalmente de um modelo afim para modelar as taxas de curto de prazo e a partir delas derivar as taxas de médio e longo prazos com a ajuda de um processo de difusão (Rezende 2008). Seus principais representantes são os modelos de Vasicek (1977), Cox et. Al (1985) e Duffie e Kan (1996). A segunda classe é composta pelos modelos de não-arbitragem, que tem como principais expoentes os modelos de Hull e White (1990) e Heath et. Al (1992). Eles são desenvolvidos a partir da imposição de condições de não arbitragem entre as taxas que formam a curva de juros corrente, chegando a um ajuste perfeito da curva observada. Tais modelos são especialmente utilizados para fins de precificação de ativos. Alternativamente é possível modelar a estrutura a termo das

¹ Expressão gráfica da ETTJ.

taxas de juros sem a imposição das condições de equilíbrio e de não arbitragem. Esta, a terceira classe é composta pelos modelos de fatores, também ditos estatísticos ou paramétricos. Desta classe fazem parte os modelos de Litterman e Scheinkman (1991), os *splines* quadrático e cúbico de McCulloch (1971, 1975), o modelo de splines exponenciais de Vasicek e Fong (1982), assim como os modelos de fatores de Nelson e Siegel (1987), Svensson (1994), Almeida Duarte e Fernandes (1998), Björk e Christensen (1999) e Diebold e Li (2006), sendo que alguns destes últimos serão tratados neste trabalho. A importância desta classe está presente no resultado obtido pelo estudo realizado no Banco de Compensações Internacional Bis (2005). Este, afirma que dos quinze bancos centrais analisados quatorze faziam uso de modelos de fatores para a estimação da curva de juros, sendo que nove usavam o modelo de Nelson e Siegel(1987) e ou o modelo de Svensson(1994).

O presente trabalho está dividido quatro seções. Esta introdução, o capítulo 2 que trata dos conceitos base sobre a matemática de taxas de juros, o capítulo três que apresenta os modelos que estudaremos, a seção 4 onde analisamos os dados e os resultados, as referências e um anexo com figuras e tabelas que complementam a análise feita.

2 RENDA FIXA E ESTRUTURA A TERMO DA TAXA DE JUROS:

2.1 Renda Fixa e Títulos sem cupom

Pode-se dizer que Renda Fixa é o assunto que trata sobre a precificação dos títulos de renda fixa e da sua remuneração básica, ou seja, a taxa de juros. Os títulos de renda fixa são, em geral, classificados em dois tipos básicos: sem cupom² e com cupom. O título sem cupom é aquele que é comprado por um valor e apenas no vencimento paga o valor de face ao investidor. Valor de face também pode ser entendido como o principal e cupom como juros. Todo o rendimento do título estaria embutido na diferença entre o valor pago inicialmente pelo investidor e o seu valor de face, ou valor de resgate. Dessa forma, o título seria vendido com um deságio sobre o valor de face que seja suficiente para, no resgate, dar ao investidor a remuneração justa. Um título com cupom é aquele que é adquirido pelo investidor por um valor, paga ao investidor juros periódicos (cupons) e no final o seu valor de face. Os fluxos de caixa de tais títulos são representados pelas seguintes fórmulas:

$$P_{sem\ cupom} = \frac{Valor\ de\ Face}{(1+i)^n}$$

$$P_{com\ cupom} = \sum_{k=1}^n \frac{Juros}{(1+i)^k} + \frac{Valor\ de\ face}{(1+i)^n},$$

onde n é o prazo do título.

2.2 Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ)

O conceito de taxa de juros está presente no dia a dia de todos, nos fazendo pensar nele como algo familiar que sabemos lidar. Quando se deposita certa quantia de dinheiro em uma conta bancária, por exemplo, é esperado que este montante cresça a uma certa taxa, com o passar do tempo. O fato de que emprestar dinheiro deve ser recompensado de certa forma, para que receber uma dada quantidade de dinheiro amanhã não é o mesmo que receber exatamente a mesma quantidade hoje é tido como conhecimento tácito (Brigo e Mercurio, 2006). No entanto expressar tais conceitos matematicamente não é de forma alguma imediato, portanto várias

² Zero coupon bond em inglês.

definições devem ser introduzidas para se ter um aparato teórico consistente e desenvolvido.

No caso deste trabalho, seguiremos a metodologia de exposição em (Brigo e Mercurio, 2006), explicaremos alguns dos conceitos fundamentais para o entendimento da ETTJ. Vale ressaltar, que para facilitar a álgebra envolvida nas equações que trataremos, usaremos taxas instantâneas e compostas continuamente.

Definição Conta bancária

Representa uma aplicação local sem risco, onde o lucro acumula-se continuamente a taxa livre de risco vigente no mercado a cada instante.

Seja $B(t)$ o valor de uma conta bancária no tempo $t \geq 0$. Assumimos $B(0) = 1$ e que esta conta bancária evolui de acordo com a equação diferencial:

$$\frac{B(t)'}{B(t)} = r_t,$$

onde r_t é uma função positiva do tempo. Sua solução é obtida da seguinte forma:

$$\int_0^t \frac{B(t)'}{B(t)} dt = \int_0^t r_t dt$$

$$\ln(B(t)) = \int_0^t r_t dt$$

$$B(t) = e^{\int_0^t r_t dt}. \quad (1.1)$$

A definição (1.1) acima, nos diz que uma unidade monetária aplicada no tempo $t = 0$, na conta bancária, retorna o valor em (1.1) no tempo t . A função r_t é dita a taxa instantânea a qual $B(t)$ cresce, também sendo referida como taxa spot ou taxa curta. Podemos mostrar este fato usando uma expansão de primeira ordem em Δt :

$$B(t + \Delta t) = B(t)(1 + r(t)\Delta t),$$

que para qualquer intervalo arbitrariamente pequeno $[t, t + \Delta t)$,

$$\frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{B(t)} = r(t)\Delta t,$$

que deixa claro que $B(t)$ cresce a cada t a taxa r_t .

A função $B(t)$ é importante para relacionar quantidades monetárias disponíveis em tempos distintos. Sabemos que se depositarmos A unidades monetárias na conta bancária em $t = 0$, em $t > 0$, teremos $AB(t)$ unidades monetárias. Analogamente no tempo $T > t$ temos $AB(T)$ unidades. Como queremos uma unidade, exatamente, em T , desejamos $AB(T) = 1$. Para tanto necessitamos aplicar inicialmente $A = \frac{1}{B(T)}$. Dessa forma, o valor no tempo t de uma quantidade A aplicada é $AB(t) = \frac{B(t)}{B(T)}$. Vimos, portanto, que o valor de uma unidade monetária pagável no tempo T a valor presente em t é $\frac{B(t)}{B(T)}$. A definição que acabamos de ver nos permite chegar a próxima.

Definição Fator de desconto, ou função de desconto.

O fator de desconto $P(t, T)$, no intervalo de t a T , é a quantidade no tempo t que é equivalente a uma unidade monetária resgatável no tempo T e é dada por:

$$P(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \frac{e^{\int_0^t r_t dt}}{e^{\int_0^T r_t dt}} = e^{-\int_t^T r_t dt}.$$

Definição Tempo até a maturidade.

É definido como $T - t$ e indica a quantidade de tempo do presente até a maturidade, $T > t$. Dessa forma, denotamos $\tau (t - T)$ como sendo a medida de tempo escolhida entre t e T .

Definição Taxa de juros a vista (spot) continuamente composta.

A taxa de juros a vista continuamente composta predominante no tempo t para a maturidade T , é denotada por $y(\tau)$ e é a taxa constante, a qual uma aplicação de $P(\tau)$ unidades monetárias no tempo t rende continuamente para retornar uma unidade monetária na maturidade T , sendo expressa pela equação:

$$y(\tau) = -\frac{\ln P(\tau)}{\tau}.$$

Adicionalmente, a taxa de juros a vista continuamente composta é uma taxa constante que é consistente com o preço dos títulos sem cupom. Pode se chegar a esta conclusão a partir da expressão:

$$e^{y(\tau)\tau}P(\tau) = 1,$$

da qual podemos chegar ao preço de um título sem cupom (função de desconto), em função da taxa $y(\tau)$:

$$P(\tau) = e^{-y(\tau)\tau}.$$

Definição Taxa a termo

As taxas a termo são caracterizadas por três instantes de tempo, a saber, o tempo t em que são consideradas, o seu termo T e sua maturidade S , onde $t \leq T \leq S$. Estas são taxas que podem ser acordadas hoje, para um investimento em um período futuro e são consistentes com a estrutura a termo dos fatores de desconto³.

A taxa a termo instantânea prevalecente no tempo t , para a maturidade $T > t$, é definida por:

$$f(\tau) = \frac{P(\tau)'}{P(\tau)}.$$

Definição Estrutura a termo a da taxa de juros (ETTJ)

Estrutura a termo é uma função que relaciona determinada variável financeira ou parâmetro, as suas maturidades. O termo de um instrumento de dívida com uma maturidade fixada é o tempo até a maturidade (Caldeira 2013). Sendo assim, ETTJ, no mercado de renda fixa, é a função que relaciona os rendimentos dos títulos sem cupom as suas respectivas maturidades. A curva de juros pode ser entendida como a expressão gráfica da ETTJ. A ETTJ pode ser representada por uma curva de desconto $P(\tau)$, uma curva de taxas a termo $f(\tau)$ ou uma curva de taxas a vista $y(\tau)$, todas relacionadas entre si, de maneira que obtendo-se uma delas pode-se facilmente chegar às outras. Abaixo mostramos um resumo com os conceitos desenvolvidos anteriormente e introduzimos expressões equivalentes às mostradas, relacionando todas as representações da ETTJ.

³ Função que relaciona $P(\tau)$ com as maturidades existentes.

$$P(\tau) = e^{-y(\tau)\tau} = e^{-\int_t^T f(u)du} \quad (1.2)$$

$$f(\tau) = \frac{P(\tau)'}{P(\tau)} = y(\tau) + \tau y'(\tau) \quad (1.3)$$

$$y(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(u)du = -\frac{\ln P(\tau)}{\tau} \quad (1.4)$$

Em seu famoso trabalho, Diebold e Li (2006) listam os principais fatos estilizados sobre a curva de juros, são eles:

1. Geralmente a curva de juros (média) é crescente em relação à maturidade e côncava (aparentemente existe prêmio pelo risco).
2. A curva de juros pode assumir uma variedade de formas: com inclinação positiva, com inclinação negativa, côncava ou convexa.
3. A dinâmica das taxas de juros é persistente (autocorrelação entre períodos de tempo é alta), ao passo que a dinâmica dos spreads é muito menos persistente.
4. Taxas de juros de curto prazo são mais voláteis que as de longo prazo, isto é, a volatilidade diminui com a maturidade (talvez devido ao fato de que as taxas longas envolvam a média do valor esperado das taxas curtas).
5. Taxas de juros de curto prazo são mais persistentes que as de longo prazo.

Com intuito de se fazer uma comparação dos fatos estilizados propostos acima com a curva de juros brasileira, abaixo está uma representação tridimensional da curva de juros brasileira bem como uma tabela de estatísticas descritivas da ETTJ brasileira e o gráfico da curva de juros média, no período entre Janeiro de 2006 e Dezembro de 2010. É possível perceber que os dados brasileiros seguem, em geral, os fatos estilizados.

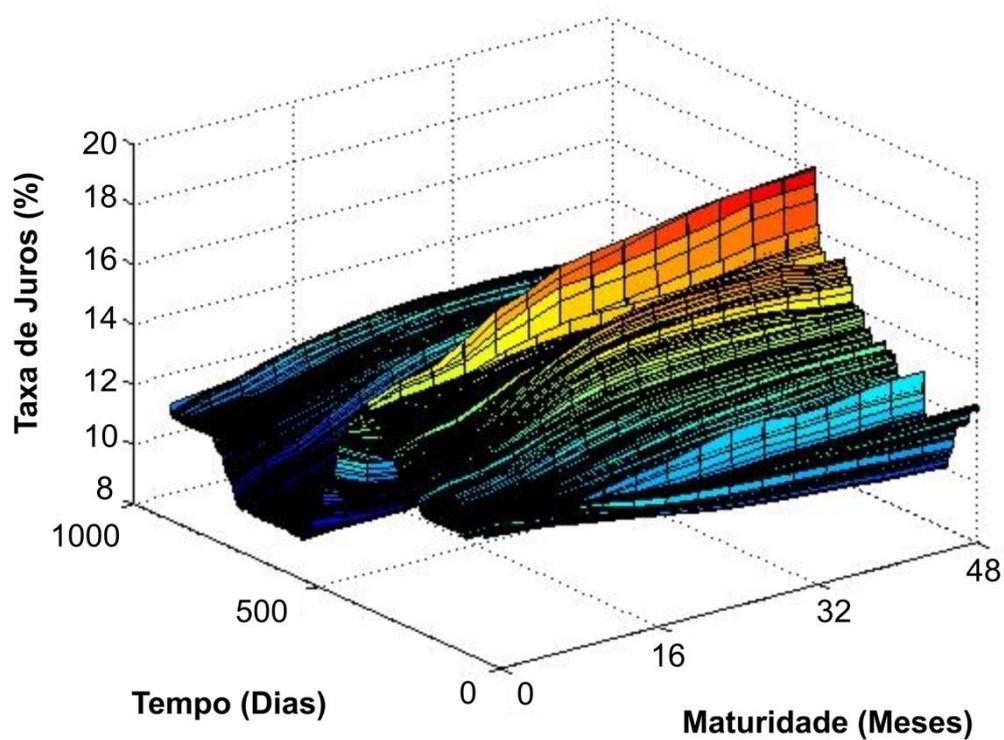
Tabela 1: Estatísticas descritivas da ETTJ brasileira.

Maturidade	τ	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo	$\widehat{\rho}(1)$	$\widehat{\rho}(5)$	$\widehat{\rho}(21)$
	3	10,82	1,65	8,58	14,34	0,999	0,997	0,969
	6	10,88	1,67	8,59	14,52	0,999	0,997	0,968
	9	10,94	1,69	8,58	14,69	0,999	0,996	0,967
	12	11,09	1,72	8,61	15,32	0,999	0,995	0,961

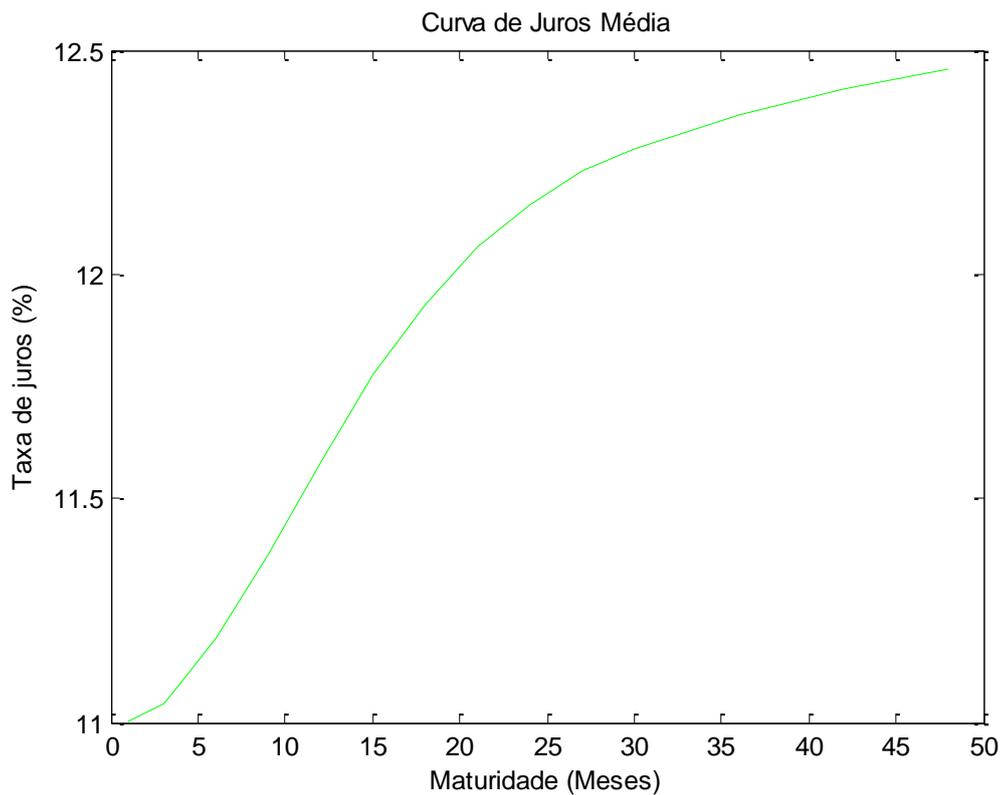
	15	11,34	1,73	8,73	16,04	0,998	0,992	0,950
Meses	18	11,60	1,72	8,99	16,40	0,998	0,989	0,938
	21	11,85	1,68	9,35	16,92	0,997	0,986	0,925
	24	12,04	1,61	9,55	17,12	0,996	0,982	0,911
	27	12,21	1,55	9,79	17,26	0,995	0,979	0,894
	30	12,33	1,49	10,06	17,44	0,995	0,975	0,877
	33	12,43	1,45	10,27	17,62	0,994	0,972	0,859
	36	12,50	1,41	10,42	17,78	0,993	0,968	0,842
	42	12,60	1,32	10,71	17,83	0,992	0,961	0,814
	48	12,68	1,24	11,09	17,93	0,990	0,955	0,788

Fonte: Autor

Figura 1: evolução da ETTJ Brasileira entre 01:2006 e 12: 2010 (contratos de DI futuro).



Fonte: Fonte: BM&F Bovespa



Fonte: Autor

2.3 Teorias de Determinação da Taxa de juros

Agora que definimos os conceitos fundamentais formalmente, faremos uma breve revisão sobre as principais teorias que existem para a determinação da taxa de juros. São elas: a teoria das expectativas (ou hipótese das expectativas), a teoria da preferência pela liquidez, teoria do habitat preferido e a teoria da segmentação de mercado.

2.3.1 Teoria das Expectativas

Segundo Bailey (2005), a hipótese das expectativas serve de ponto inicial para todas as explicações sobre a estrutura a termo da taxa de juros. Esta, afirma que as expectativas sobre os retornos futuros dos títulos determina o formato da curva de juros (expressão gráfica da estrutura a termo da taxa de juros).

Conforme Vasicek (1977), a hipótese das expectativas, a teoria da segmentação de mercado, assim como a teoria da preferência pela liquidez se conformam à premissa de que a taxa de juros a vista, é função das expectativas da taxa a termo instantânea, mais um prêmio de risco, π :

$$y(t, T) = E \left(\frac{1}{\tau} \int_t^T f(u) du \right) + \pi(t, T, f(u)).$$

Pois bem, a teoria das expectativas é aquela que faz sentido com as definições que postulamos sobre a taxa a vista e a taxa a termo. Como visto, as taxas a termo são as taxas entre cada período necessárias para que as taxas a vista, para cada vencimento, possam ocorrer, portanto as taxas a termo são as taxas esperadas para o mercado no futuro. Dessa forma, ao se observar a curva de juros, que é formada por taxas a vista, para cada maturidade, temos que as taxas a termo, que estão implícitas, retratam as expectativas do mercado quanto aos juros em um período futuro.

2.3.2 Teoria da Preferência pela Liquidez

A teoria da preferência pela liquidez afirma que, enquanto investidores são influenciados por expectativas das futuras taxas de retorno, eles são avessos ao risco quando estão tomando decisões sobre quais títulos reterem. Essa aversão ao risco indica que o mercado prefere, ou demanda, mais títulos de curto prazo, isto é, aqueles que estão mais próximos de suas maturidades, em detrimento aos de longo prazo. Sendo assim, os agentes demandam mais os títulos de maior liquidez, a menos que exista um prêmio pelo risco, no retorno esperado das aplicações de prazo mais longo. O padrão do preço dos títulos reflete, portanto, o prêmio pelo risco demandado pelos investidores, se a demanda agregada por títulos com diferentes maturidades, está em equilíbrio com a oferta (Bailey 2005).

A conclusão imediata desta teoria é que as taxas de juros de longo prazo devem ser maiores que as de curto prazo, ajudando a formar curvas de juros ascendentes. Isso é demonstrado na equação acima, onde π é uma função crescente da maturidade, neste caso.

2.3.3 Teoria do Habitat Preferido

Esta teoria propõe que os agentes do mercado procuram aplicações que ajustam seus ativos e passivos. Para isso, os agentes irão se interessar por títulos com determinados prazos, que se ajustarão a estrutura de seus fluxos de caixa futuros. Esses títulos representariam o habitat preferido, sendo que um investidor somente se colocaria fora de seu habitat preferido se recebesse uma compensação para

tanto. Assim, se o perfil dos agentes seja uma preferência por títulos de curto prazo, um prêmio seria exigido para atrair investidores a aplicarem em títulos de longo prazo. O mesmo raciocínio poderia ser feito no caso em que o perfil dos investidores se adequa melhor a títulos de longo prazo, sendo exigido, desta forma, um prêmio adicional para investimento em títulos de curto prazo. Para (Bailey 2005), a principal implicação dessa teoria é que as expectativas das taxas de juros futuras, não são exclusivamente responsáveis pelo padrão corrente dos retornos dos títulos: os estoques de títulos e as demandas dos investidores para os reterem, também influenciam a estrutura a termo.

2.3.4 Teoria da Segmentação de Mercado

Esta teoria é considerada uma versão extrema da teoria do habitat preferido (Bailey 2005). Ela afirma que títulos com diferentes maturidades podem ser agrupados de tal forma que os preços destes, dentro de cada grupo, estão relacionados entre si, mas não estão relacionados ao preço de títulos pertencentes a outros grupos. Exemplificando, suponha que títulos com zero a cinco anos de maturidade formem um grupo, seis a doze formem outro e treze a trinta um terceiro. Se este fosse o caso, então os determinantes de preços em um grupo não influenciariam os outros.

Imaginemos uma situação mais realista para explicar o mecanismo proposto. Suponha que uma empresa esteja investindo na construção de uma fábrica, ela provavelmente fará um financiamento de longo prazo para conseguir os recursos necessários. Para poder pagar esse financiamento, a empresa também aplicará recursos a longo prazo de modo a saber o rendimento que terá no futuro para pagar suas obrigações. Assim a empresa desenvolve uma demanda alta por títulos de longo prazo. Já um banco, que pode sofrer saques de seus clientes a qualquer momento, não pode aplicar os recursos disponíveis em investimentos de longo prazo, precisa fazer aplicações de curto prazo, onde saberá quanto os recursos irão render dentro do tempo necessário para que estejam disponíveis ao saque dos clientes. Neste caso, o banco tem uma demanda forte por aplicações de curto prazo.

3 MODELOS DE FATORES

O problema para se modelar a estrutura a termo das taxas de juros é resumir a informação de preços da grande quantidade de títulos nominais em um ponto no tempo. (Diebold e Rudebusch 2013). Uma estrutura de fatores se refere a situações onde se tem um objeto de grande dimensão, que pode ser explicado por um grupo de objetos de dimensão menor, os fatores. Dessa forma, por traz de um conjunto de observações aparentemente complicado, pode haver uma realidade muito mais simples. Diebold e Rudebusch (2013) afirmam que uma estrutura de fatores prove uma descrição particularmente boa da ETTJ e citam três motivos para justificar:

1. Uma estrutura de fatores geralmente resulta em descrições empíricas muito precisas dos dados referentes a ETTJ. Já que somente um pequeno número de riscos sistemáticos parece influenciar os preços da miríade de ativos financeiros transacionáveis, praticamente toda a informação dos preços de títulos pode ser sintetizada com apenas alguns fatores modelados. Portanto, modelos sobre curva de juros quase que invariavelmente aplicam uma estrutura que consiste de um pequeno conjunto de fatores e seus “factor loadings” associados, que relacionam os juros de diferentes maturidades com os fatores.
2. Modelos de fatores são tremendamente apelativos por razões estatísticas. Eles provêm uma compreensão valiosa de um conjunto de dados de grande dimensão, quase intratáveis, transformando estes, em um conjunto de dimensão pequena e tratável. O que é mais animador disto tudo é que os dados referidos de fato apresentam uma estrutura de fatores e de dimensão pequena, isto é, poucos fatores. Outro apelo estatístico dos modelos de fatores seria a sua boa qualidade preditiva, superior a outros tipos de modelos e que é consistente com o “princípio da parcimônia”⁴.
3. A teoria econômica financeira sugere a estrutura de fatores. Existem milhares de ativos financeiros nos mercados, mas devido a uma variedade de razões enxergam-se os prêmios de risco que separam os seus retornos esperados sendo governados por um pequeno número de componentes ou fatores de risco, como vimos na revisão das teorias sobre taxas de juros.

⁴ O princípio da parcimônia segundo Diebold e Rudebusch (2013) advoga que a inclusão de muitos parâmetros em um modelo prejudica o seu poder preditivo.

Agora que justificamos a sua aplicação, partimos para os modelos em si. Começamos com um modelo base três fatores e prosseguimos com suas extensões.

3.1 Modelo Base de três fatores

Em seu trabalho seminal, Nelson e Siegel (1987) propõem uma classe de funções que geraria os formatos típicos da curva de juros. Esta seria representada pela solução de uma equação diferencial. Segundo a sua argumentação, a teoria das expectativas das taxas de juros prove a motivação para tanto baseado no seguinte: se as taxas a vista são geradas por uma equação diferencial, as taxas a termo por serem previsões daquelas serão a sua solução. Os autores sugerem ajustar a curva de taxa a termo em determinada data através de uma função do tipo:

$$f(\tau) = \beta_1 + \beta_2 e^{-\lambda\tau} + \beta_3 \lambda e^{-\lambda\tau},$$

que pode ser interpretada como a solução de uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea com raízes reais e iguais. Pela relação (1.4) pode-se obter a função para a taxa a vista, que representa a curva de juros:

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right).$$

De Pooter (2007) resume bem as razões pelas quais o modelo proposto é um método tão popular para estimação da ETTJ. Em primeiro lugar, ele prove uma aproximação parcimoniosa da curva de juros usando somente um pequeno número de parâmetros. Juntos os três componentes $\left[1, \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}, \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right]$ dão ao modelo flexibilidade suficiente para capturar todas as formas tipicamente observadas nos dados. Em segundo lugar, o modelo produz curvas a termo e a vista que tem a desejável propriedade de começarem com o facilmente computável valor de $\beta_1 + \beta_2$ e convergirem para β_1 quando a maturidade tende ao infinito:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} y(\tau) = \beta_1 + \beta_2, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} y(\tau) = \beta_1, \quad (2.1)$$

além disso a curva de desconto para esse modelo:

$$P(\tau) = \exp\{-\beta_1\tau - \beta_2(1 - e^{-\lambda\tau}) - \beta_3(1 - e^{-\lambda\tau} - \tau e^{-\lambda\tau})\},$$

começa em um, na maturidade zero e converge a zero quando a maturidade cresce até o infinito, como necessário.

Os três componentes do modelo de Nelson e Siegel são interpretados como taxas de curto, médio e longo prazo e recebem este rótulo pela contribuição particular que dão a curva de juros. O componente de curto prazo $\left[\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right]$ é o referente ao β_2 , ele começa em 1 e decai para 0 a taxa de decaimento λ , que quanto maior for, mais rápido o decaimento para zero. Já o componente referente ao $\beta_3 \left[\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right]$ é o de médio prazo, o qual começa em 0, aumenta com as maturidades médias e decai novamente a zero, criando uma concavidade. A maturidade em que este componente atinge o seu máximo depende do parâmetro λ . Por fim, o componente de longo prazo referente a β_1 [1] é constante e igual a 1 para todas as maturidades.

O modelo de Nelson e Siegel foi escrito originalmente como um modelo estático, capaz de representar diversas formas de curvas de juros em um determinado ponto no tempo. Buscando desenvolver modelos capazes de produzir melhores previsões para a Curva de juros, Diebold e Li (2006) reinterpretaram-no como um modelo dinâmico. Os autores mostram que os coeficientes β_1 , β_2 e β_3 podem ser vistos como fatores latentes dinâmicos. Dessa forma, assim como λ , os fatores agora variam no tempo, β_{1t} , β_{2t} , β_{3t} e λ_t , sendo reinterpretados como nível, inclinação e curvatura, respectivamente. Apesar de λ_t variar no tempo, por simplicidade, ele é fixado⁵, tornando o modelo linear e capaz de ser estimado por mínimos quadrados ordinários.

Apesar de o modelo base apresentado ser capaz de representar uma grande variedade de formas da curva de juros, ele não consegue representar toda a diversidade de formas existente. No caso dos países emergentes este fato fica especialmente explícito (Rezende 2008). Para lidar com isso extensões do modelo base são desenvolvidas. Trataremos de algumas das mais populares no restante desta seção.

⁵ O método aqui utilizado para fixar este parâmetro será descrito mais adiante no texto.

3.2 Modelo de Dois Fatores

Diebold, Piazzesi e Rudebusch (2005), argumentam que os dois primeiros componentes do modelo de Nelson e Siegel (1987), os que representam as taxas de longo prazo e curto prazo (β_1 e β_2), respectivamente, são capazes de explicar a maior parte das variações nos juros, sendo que o terceiro fator, de médio prazo adiciona tipicamente somente alguns pontos percentuais a mais à variância das taxas de juros capturadas pelos dois primeiros fatores. Seguindo essa linha teórica somente dois fatores seriam suficientes para fazer a previsão da curva de juros, no entanto como exposto por De Pooter (2007) dois fatores não são o suficiente para ajustar toda a curva de juros.

Comparado ao modelo base exposto, o modelo de dois fatores contém somente os fatores de nível e inclinação, ficando:

$$y(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} \right).$$

3.3 Modelo de Três Fatores de Bliss

Uma opção para se fazer o modelo base mais flexível seria relaxar a hipótese de que o parâmetro de decaimento λ_t , que governa o decaimento da inclinação e a curvatura seja igual para os dois fatores. Em seu trabalho, Nelson e Siegel (1987) propuseram tal alternativa supondo que a função para as taxas a termo instantâneas poderia ser representada pela solução de uma equação diferencial de segunda ordem com raízes reais, agora diferentes. Apesar de proporem a mudança Nelson e Siegel (1987) somente aplicaram o modelo a maturidades de até um ano, reportando que dessa forma o modelo continha parâmetros em excesso. Neste contexto, Bliss (1997) propõe que se maturidades de prazos mais longos forem incluídas o problema de muitos parâmetros desaparece. A função de taxas a termo, já na forma dinâmica, fica:

$$f(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} e^{-\lambda_{1t}\tau} + \beta_{3t} \lambda_{2t} e^{-\lambda_{2t}\tau},$$

sendo que o termo λ_{2t} é adicionado na solução da equação diferencial para termos um fator para a curvatura, caso contrário teríamos dois fatores para a inclinação que

difeririam somente no parâmetro de decaimento. A expressão para a as taxas a vista e a curva de juros é, portanto:

$$y(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau} \right).$$

Fica claro que se $\lambda_{1t} = \lambda_{2t}$ o modelo de Bliss seria igual ao modelo base.

3.4 Modelo de Quatro Fatores de Svensson

Outro modelo popular, muito utilizado por bancos centrais (BIS 2005), é o modelo de quatro fatores de Svensson (1994). Este busca melhorar a flexibilidade e o ajuste do modelo base adicionando um segundo fator referente as taxas de médio prazo, o qual lembra o terceiro componente do modelo base com a diferença de ter um parâmetro de decaimento diferente. Em sua forma dinâmica as curvas a termo ajustadas por esse modelo são dadas por:

$$f(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}e^{-\lambda_{1t}\tau} + \beta_{3t}\lambda_{1t}e^{-\lambda_{1t}\tau} + \beta_{4t}\lambda_{2t}e^{-\lambda_{2t}\tau}.$$

A equação resultante para a taxa a vista e as curvas de juros é:

$$y(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{3t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{1t}\tau}}{\lambda_{1t}\tau} - e^{-\lambda_{1t}\tau} \right) + \beta_{4t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{2t}\tau}}{\lambda_{2t}\tau} - e^{-\lambda_{2t}\tau} \right).$$

O quarto componente e o fator β_{4t} são interpretados como mais um componente representando a curvatura. Sendo assim, o modelo seria teoricamente capaz de se ajustar aos diversos formatos das curvas de juros. Vale ressaltar que os resultados em (2.1) se mantêm aqui.

3.5 Especificação Geral

As diferentes formas do modelo base apresentadas até aqui podem ser representadas por uma especificação geral. Considere a seguinte representação de estado-espço:

$$Y_t(\tau) = X_t\beta_t + \varepsilon_t \quad (2.2)$$

$$\beta_t = \phi\beta_{t-1} + v_t \quad (2.3)$$

A equação (2.2) especifica um vetor de taxas a vista para N maturidades diferentes, $Y_t(\tau) = \{y_t(\tau_1)y_t(\tau_2) \dots y_t(\tau_N)\}'$. $Y_t(\tau)$ é aproximado por um dos modelos descritos, representados em $X_t\beta_t$, mais um termo de erro, ε_t . X_t é o vetor dos *loadings* dos fatores com dimensão (N x K) e β_t o vetor dos fatores em si, de dimensão (K x 1). Todos os modelos vistos podem ser representados pela equação (2.2), tendo diferentes números de fatores e especificações dos *loadings* dos fatores. Esta especificação é capaz de representar toda a ETTJ.

Caso se esteja interessado somente em ajustar a estrutura a termo a equação (2.2) seria suficiente, entretanto estamos interessados em prevê-la também. Para tanto faz-se o uso da equação (2.3) que modela a dinâmica dos fatores latentes. Seguindo a literatura sobre o assunto (Diebold e Li (2006), De Pooter (2007), Rezende (2008)), propomos a utilização de um AR(1) e um VAR(1). Por fim, assumimos que os termos de erro são i.i.d. e seguem uma distribuição normal.

4 DADOS E ANÁLISE DE RESULTADOS

4.1 Dados

O conjunto de dados utilizados nesse trabalho consiste de series temporais de taxas de juros a vista de contratos DI-Futuro coletados diariamente. O contrato de DI-Futuro com maturidade τ , é um contrato futuro sem cupom, o qual tem como referência a taxa DI-Futuro. Esta pode ser entendida como a média diária dos depósitos interbancários, calculada pela Cetip para todos os dias úteis. O valor do contrato é definido pelo seu valor na maturidade, R\$ 100.000,00, descontado de acordo com a taxa de juros acordada entre o comprador e o vendedor.

A bolsa de mercadorias e futuros (BM&F) é a entidade que oferece o contrato de DI-Futuro e estabelece o número de maturidades autorizadas. Em geral existem por volta de vinte maturidades com contratos autorizados todos os dias. Em 2010 o mercado de DI-Futuro negociou um total de 293 milhões de contratos o que representou 15 bilhões de dólares. Um contrato de DI-Futuro é muito similar a um título sem cupom, diferindo somente no pagamento diário de ajustamentos marginais. Todos os dias o fluxo de caixa é determinado pela diferença entre o preço de ajuste do dia corrente e o preço de ajuste do dia anterior, indexada pela taxa DI-Futuro do dia anterior.

Nós usamos as séries diárias de fechamento das taxas de juros dos contratos de DI-Futuro com maior liquidez. Estas começam em Janeiro de 2006 indo até Dezembro de 2010, totalizando 986 observações. Na prática, contratos com todas as maturidades não são observados diariamente. Sendo assim, baseado nas taxas observadas para as maturidades disponíveis os dados foram convertidos para maturidades fixas de 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 42 e 48 meses se usando o método dos *splines* cúbicos originalmente proposto por McCulloch (1975, 1976).

4.2 Ajuste dentro da amostra

Para se fazer o ajuste do modelos propostos utilizou-se de um método diferente do proposto por Diebold e Li (2006). Naquele trabalho os autores propuseram fixar o parâmetro de decaimento que maximizava o *loading* da curvatura, isto é, o de médio prazo, na maturidade de 30 meses, considerada pelos autores como representante das taxas de médio prazo. Aqui, no entanto escolhemos fixar o λ que minimiza o erro de ajuste, este medido pela média da raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM).

Seguindo a metodologia proposta, primeiro criamos uma matriz para os *loadings* de cada modelo usando um parâmetro λ arbitrário. Após estimamos por mínimos quadrados ordinários a matriz de betas na equação (2.2). Neste ponto já temos uma estimativa da curva de juros, usando-se desta, calculamos uma matriz de erros fazendo a diferença dos dados reais e da estimativa. A partir da matriz de erros calculamos a média da REQM e finalmente, a partir de um algoritmo de minimização, calculamos o parâmetro λ que minimiza a média da REQM para cada modelo. A seguir está uma tabela com os parâmetros obtidos.

Tabela 2: Parâmetros que minimizam a média da REQM

Modelo	λ_1	λ_2
Modelo Base 3 Fatores	0,1240	-
2 Fatores	0,1048	-
3 Fatores de Bliss	0,1235	0,1236
4 Fatores de Svensson	0,1558	0,1554

Fonte: Autor

4.3 Resultados empíricos do ajuste dentro da amostra

A tabela 3 abaixo fornece os valores da REQM para cada maturidade, assim como a sua média para cada modelo.

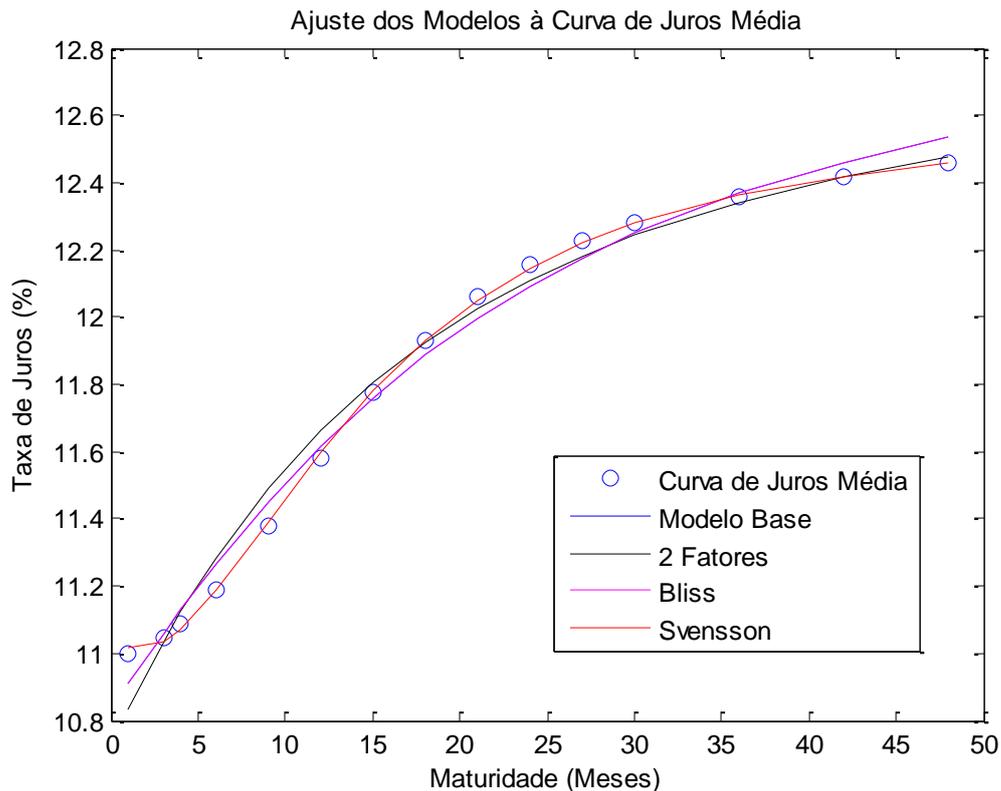
Tabela 3: REQM por maturidade e sua média para cada modelo analisado.

	Modelo Base	2 Fatores	3 Fatores Bliss	4 Fatores Svensson
Média	0,0789	0,2148	0,0789	0,0340

1	0,1467	0,4373	0,1469	0,0357
3	0,0443	0,1684	0,0443	0,0392
6	0,0793	0,0984	0,0792	0,0374
9	0,1164	0,1552	0,1165	0,0262
12	0,1006	0,2637	0,1008	0,0347
15	0,0529	0,3013	0,0531	0,0409
18	0,0474	0,2916	0,0473	0,0356
21	0,0777	0,2504	0,0776	0,0273
24	0,0924	0,1879	0,0923	0,0293
27	0,0861	0,1222	0,0862	0,0374
30	0,0702	0,0757	0,0703	0,0357
33	0,0541	0,0639	0,0542	0,0344
36	0,0369	0,1561	0,0368	0,0361
42	0,0666	0,2836	0,0664	0,0243
48	0,1112	0,3654	0,1110	0,0356

Fonte: Autor

Note que o modelo de Svensson apresenta larga vantagem sobre os demais. Em todas as maturidades ele apresenta REQM menor, mostrando a vantagem que a inclusão de um segundo fator de curvatura traz a capacidade de ajuste. A partir da tabela podemos perceber que o modelo de dois fatores tem o pior ajuste, apontando para o fato de que a retirada do fator de curvatura penaliza em termos de ajuste, no entanto não de maneira a se descartar o modelo, já que o poder preditivo do mesmo deve ser avaliado. Fica a conclusão que o fator de curvatura contribui muito menos para o ajuste do que os fatores de nível e inclinação. Vemos também que não há diferença entre o modelo base e o de Bliss, o que já era esperado visto que os dois parâmetros de decaimento foram praticamente idênticos para a especificação de Bliss e ainda muito próximos ao encontrado para o modelo base. Na literatura sobre o assunto existem trabalhos recentes como Almeida et. al (2007b), De Pooter (2007) e Rezende (2008) que propõe diversas regras para se fixarem os parâmetros de decaimento, obtendo resultados diferentes para os modelos base e Bliss. Abaixo colocamos uma figura mostrando o ajuste de cada modelo à curva de juros média, reiterando os dados da tabela anterior.



Fonte: Autor

4.4 Previsão

As previsões fora da amostra foram feitas para os horizontes de 1 dia, 1 semana (5 dias úteis), 1 mês (21 dias úteis), 3 meses (63 dias úteis) e 6 meses (126 dias úteis). O procedimento foi feito em dois estágios. Primeiro cortamos a amostra, que tem 986 observações, na observação 734, usando estas para estimar cada um dos quatro modelos, deixando as 252 restantes para avaliar o poder preditivo de cada um. Após o ajuste aplicamos os dois modelos de previsão propostos o AR(1) e o VAR(1) para modelar a dinâmica dos fatores latentes obtendo assim suas previsões. Neste ponto os fatores previstos são multiplicados pelos seus respectivos *loadings* obtendo-se as curvas de juros previstas para cada modelo.

4.5 Resultados empíricos da previsão

As tabelas 4 e 5 abaixo mostram os principais resultados para as previsões, inferidos através da média da REQM. Notamos que nenhum modelo associado a algum método de previsão supera os demais para todos os horizontes de previsão. O modelo de 4 fatores de Svensson previsto por um AR(1), se mostra o melhor para

os horizontes 1 mês (21), 3 meses (63) e 6 meses (126), enquanto o modelo de 2 fatores previsto pelo VAR(1) tem melhores resultados no horizonte de 1 dia e 1 semana (5). O modelo base e o de Bliss tiveram os piores resultados para os dois métodos e para todos os horizontes, sendo estes praticamente idênticos.

Pode-se concluir que a adição de um fator a mais de curvatura (Svensson) além de melhorar o ajuste obtido, produz previsões satisfatórias em relação às alternativas propostas. No entanto o modelo de Svensson não pode ser tido como o melhor para se fazer previsão, ao passo que o modelo de 2 fatores mostrou-se melhor para os dois horizontes mais curtos nos dois métodos de previsão utilizados e foi melhor em todos os horizontes que os dois modelos de três fatores, mostrando que o princípio da parcimônia na previsão está presente.

Tabela 4: Média da REQM por horizonte de previsão, AR(1)

Modelos	Média REQM Por Horizonte de Previsão AR(1)				
	1	5	21	63	126
Modelo Base	0,9225	0,9279	0,9478	0,9819	0,9855
2 Fatores	0,8912	0,8794	0,8372	0,7599	0,7024
Bliss	0,9226	0,9279	0,9482	0,9828	0,9866
Svensson	0,9060	0,8744	0,7681	0,5979	0,5029

Fonte: Autor

Tabela 5: Média da REQM por horizonte de previsão, VAR(1)

Modelos	Média REQM Por Horizonte de Previsão VAR(1)				
	1	5	21	63	126
Modelo Base	0,9147	0,8899	0,8209	1,0347	2,1400
2 Fatores	0,8899	0,8726	0,8090	0,6991	0,7101
Bliss	0,9147	0,8899	0,8208	1,0344	2,1395
Svensson	0,9080	0,8858	0,8378	1,0662	2,1500

Fonte: Autor

4.6 Conclusões

Nesse trabalho, partimos das definições matemáticas que são a base para a modelagem da ETTJ e expomos e comentamos as teorias sobre taxa de juros mais importantes. Seguimos com a Introdução e a motivação usada na literatura para o

uso de modelos de fatores e apresentamos os quatro modelos que nos propusemos a trabalhar. Em seguida descrevemos os dados para a curva de juros brasileira, bem como comentamos brevemente a sua construção, dessa forma partindo para a exposição da metodologia usada no ajuste e os resultados obtidos.

No que se refere às teorias de determinação da taxa de juros vistas no capítulo 2, das observações empíricas que fizemos constatamos que não existe uma teoria mais certa que a outra, todas elas fazem sentido e parece que todas influenciam o mercado. A curva de juros, portanto, pode ter qualquer formato, e isso pode ser explicado pela junção de todas as teorias vistas.

O método utilizado para determinação dos parâmetros de decaimento, a minimização da média da REQM, mostrou-se satisfatório tendo em vista os bons ajustes obtidos pelos modelos. No entanto, este método produziu parâmetros que deixaram os modelos base de três fatores e o modelo de Bliss praticamente idênticos, sendo isso demonstrado no erro de ajuste médio igual obtido por estes. Esta questão nos leva a sugerir que talvez outros métodos de otimização dos parâmetros talvez obtenham resultados melhores, porém os aqui obtidos provaram-se superiores ao menos aos encontrados em Rezende (2008), para dados da curva de juros brasileira em uma amostra ligeiramente diferente. Esta argumentação nos leva a concluir que o parâmetro adicional proposto por Bliss (1997), não traz ganhos ao poder de ajuste do modelo para os dados utilizados. O modelo de Svensson mostrou-se particularmente superior no seu ajuste dentro da amostra em relação aos demais.

Quanto ao poder preditivo nenhuma especificação mostrou-se absolutamente superior. Podemos concluir que o princípio da parcimônia mostrou-se nos resultados obtidos. Apesar de o modelo de 2 fatores ter um ajuste pobre, não sendo capaz de reproduzir todas as formas da curva de juros (ver anexo), este teve os melhores resultados para os horizontes de 1 dia e uma semana (5 dias úteis). Porém a inclusão de um segundo fator de curvatura no modelo de Svensson fez dele capaz de produzir as melhores previsões para os horizontes de 1,3 e 6 meses quando seus fatores foram modelados por um AR(1). Fica a constatação que devem ser usados modelos diferentes para cada horizonte de previsão.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, C.; DUARTE, A.; FERNANDES, C. Decomposing and simulating the movements of term structures in emerging eurobonds markets. *Journal of Fixed Income*, New York, v. 8, n. 1, p. 21–31, 1998.
- ALMEIDA, C.; GOMES, R.; LEITE, A.; VICENTE, J. Does curvature enhance forecasting? Brasília, D.F.: Banco Central do Brasil, 2007a. 30 p. (Working paper, n. 155)
- ALMEIDA, C.; GOMES, R.; LEITE, A.; VICENTE, J. Movimentos da estrutura a termo e critérios de minimização do erro de previsão em um modelo paramétrico exponencial. Brasília, D.F.: Banco Central do Brasil, 2007b. (Trabalhos para discussão, n. 146)
- BALEY, R. *The economics of financial markets*. New York: Cambridge University press, 2005.
- BJORK, T.; CHRISTENSEN, B. Interest rate dynamics and consistent forward rate curves. *Mathematical Finance*, Oxford, UK., v. 9, n. 4, p. 323–348, 1999.
- BLISS, R. R. Testing term structure estimation methods. *Advances in Futures and Options Research*. Greenwich, Conn., v. 9, p. 197–231, 1997.
- BRIGO, D.; MERCURIO, F. *Interest rate models: theory and practice*. New York: Springer, 2006.
- CALDEIRA, J. F. Estimação da estrutura a termo da curva de juros no Brasil. *Análise Econômica*, Porto Alegre, ano 29, n. 55, p. 95-122, mar. 2011.
- CALDEIRA, J.; MOURA, G. V.; Santos, A. Predicting the Yield Curve Using Forecast Combinations (August 11, 2013). Disponível em <http://ssrn.com/abstract=2311733>
- CHRISTENSEN, J.; DIEBOLD, F.; RUDEBUSCH, G. The affine arbitrage-free class of: Nelson-Siegel term structure models. Cambridge, Mass.: NBER, 2007. 38 p. (Working papers; n. 13611)
- COMMITTEE ON THE GLOBAL FINANCIAL SYSTEM. *Stress testing at major financial institutions: survey results and practice*. Basel: Bank for International Settlements, 2005.
- COX, J.; INGERSOLL, J. E.; ROSS, S. A. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, Chicago, Ill., v. 53, n. 2, p. 385–407, 1985.
- DE ARAÚJO, R. C. *Combinação de modelos de previsão da estrutura a termo da taxa de juros: aplicações ao caso brasileira*. Universidade de Brasília, 2011.
- DE POOTER, M. *Examining the Nelson-Siegel class of term structure models*. Amsterdam: Tinbergen Institute, 2007. 56 p. (Discussion paper, n. TI 2007–043/4).

DIEBOLD, F. X.; LI, C. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics*, Amsterdam v. 130, n. 2, p. 337–364, Feb. 2006.

DIEBOLD, F. X.; RUDEBUSCH, G. D. *Yield curve modeling and forecasting: the dynamic Nelson Siegel approach*. Princeton University Press, 2013.

DUFFIE, D.; KAN, R. A yield-factor model of interest rates. *Mathematical Finance*, Oxford, UK., v. 6, n. 4, p. 379–406, 1996.

FISHER, M.; NYCHKA, D.; ZERVOS, D. Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines. Washington, D.C.: Board of Governors of the Federal Reserve System, 1995. (Finance and economics discussion series n. 1995–1).

HEATH, D.; JARROW, R.; MORTON, A. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, Chicago, Ill., v. 60, n. 1, p. 77–105, Jan. 1992.

HULL, J.; WHITE, A. Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*. New York, v. 3, n. 4, p. 573–592, 1990.

INGERSOLL, J. *Theory of financial decision making*. Oxford: Rowan & Littlefield, 1987.

LITTERMAN, R.; SCHEINKAMN, J. Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income*, New York, v. 1, n. 1, p. 54–61, 1991.

McCULLOCH, J. H. Measuring the term structure of interest rates. *Journal of Business*, South Orange, N.J., v. 44, n. 1, p. 19–31, 1971.

McCULLOCH, J.H. The tax adjusted yield curve. *Journal of Finance*, New York, v. 30, n. 3, p. 811–830, 1975.

NELSON, C. R. SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, South Orange, N.J., v. 60, n. 4, 473–489, Oct 1987.

REZENDE, R.B. Modelagem e previsão da estrutura a termo das taxas de juros brasileira utilizando uma classe estendida de modelos Nelson-Siegel. Cedeplar, 2008. Disponível em <http://www.cedeplar.ufmg.br/pos-em-economia/dissertacoes-2008/dissertacoes-aprovadas-2008.php>

SVENSSON, L. E. O. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992 - 1994. Cambridge, Mass: NBER, 1994. 49 p. (Working paper, n. 4871).

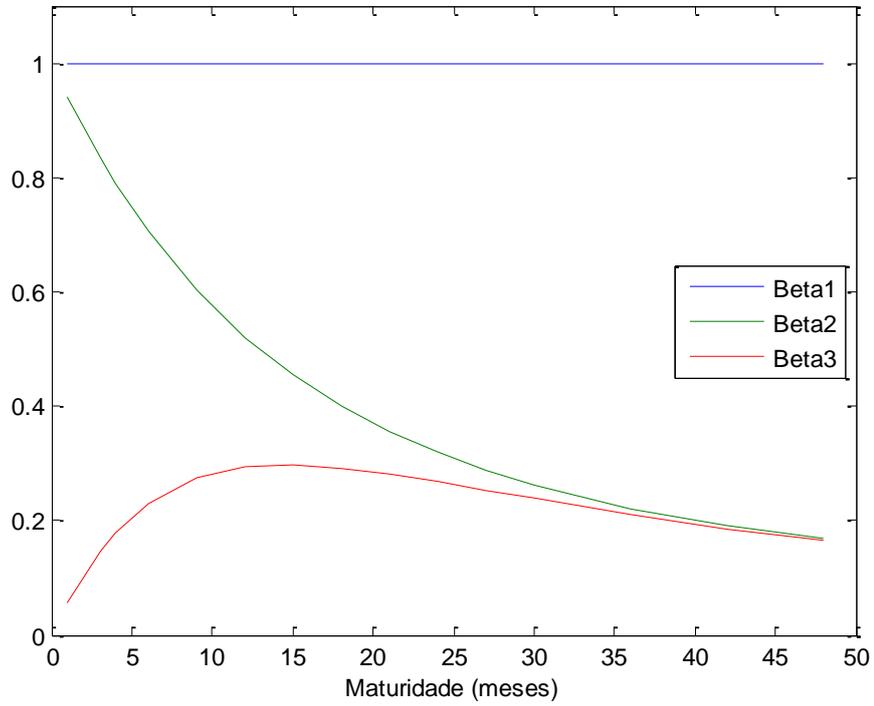
VARGA, G. Brazilian (local) term structure forecast in a factor model. 2007. Trabalho apresentado no Encontro Brasileiro de Finanças, 7., 2007, São Paulo.

VASICEK, O. A. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, Amsterdam, v. 5, n. 2, p. 177–188, 1977.

VASICEK, O. A.; FONG, H. G. Term structure modeling using exponential splines. *Journal of Finance*, New York, v. 37, n. 2, p. 339–348, 1982.

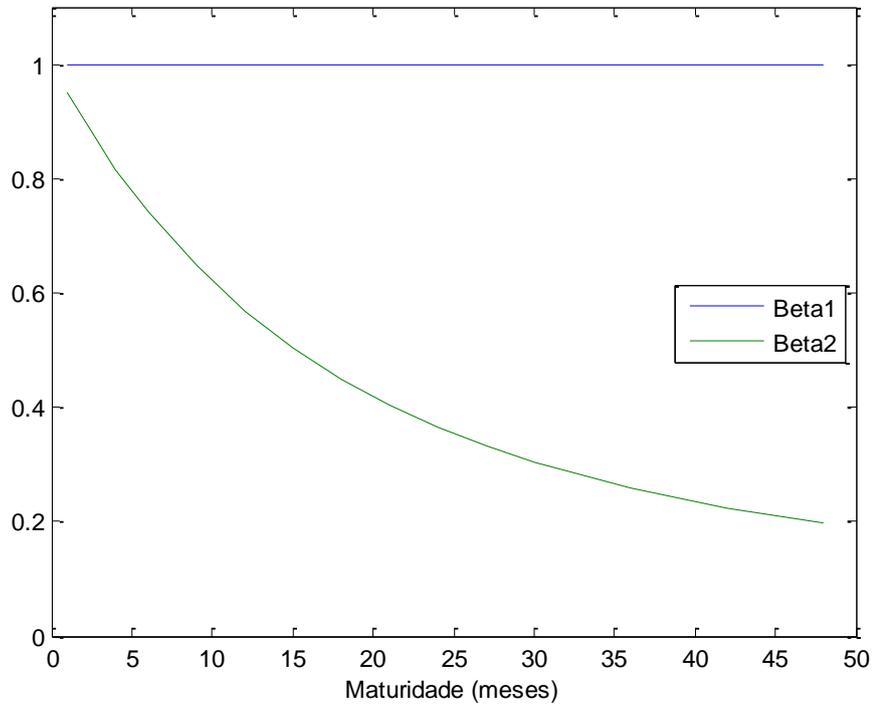
Anexo

Loadings dos fatores para o modelo base dinâmico com parâmetro de decaimento 0,1240



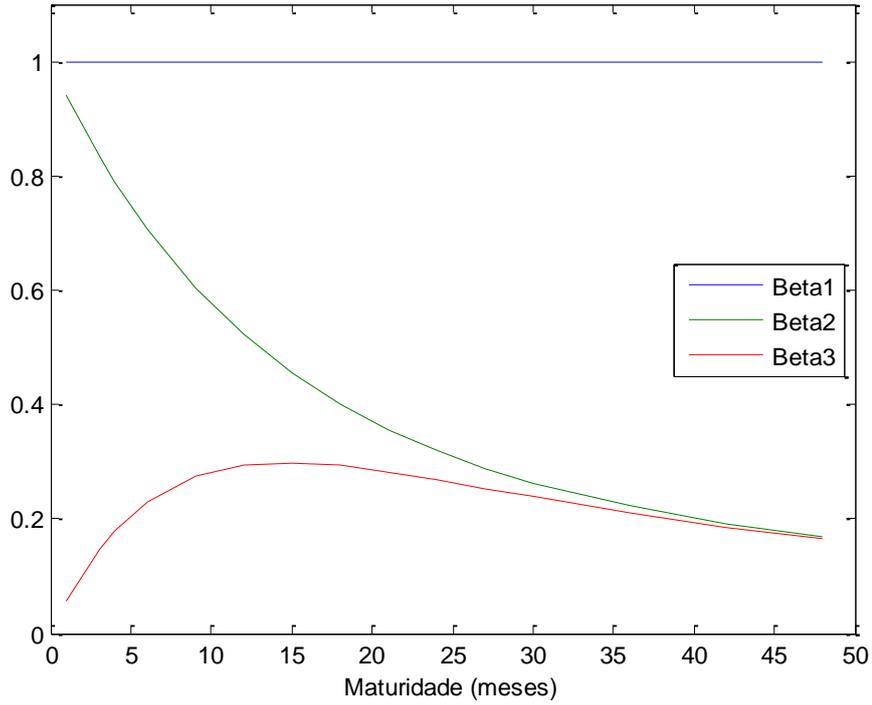
Fonte: Autor

Loadings dos fatores para o modelo de dois fatores com parâmetro de decaimento 0,1048



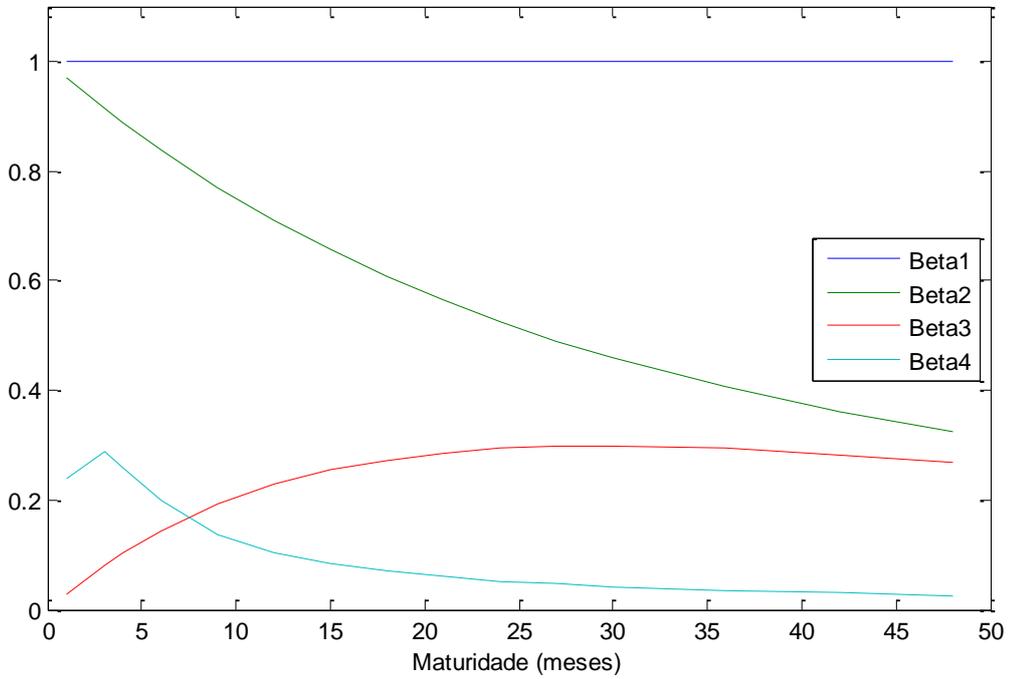
Fonte: Autor

Loadings dos fatores para o modelo Bliss com parâmetros de decaimento 0,1235 e 0,1236

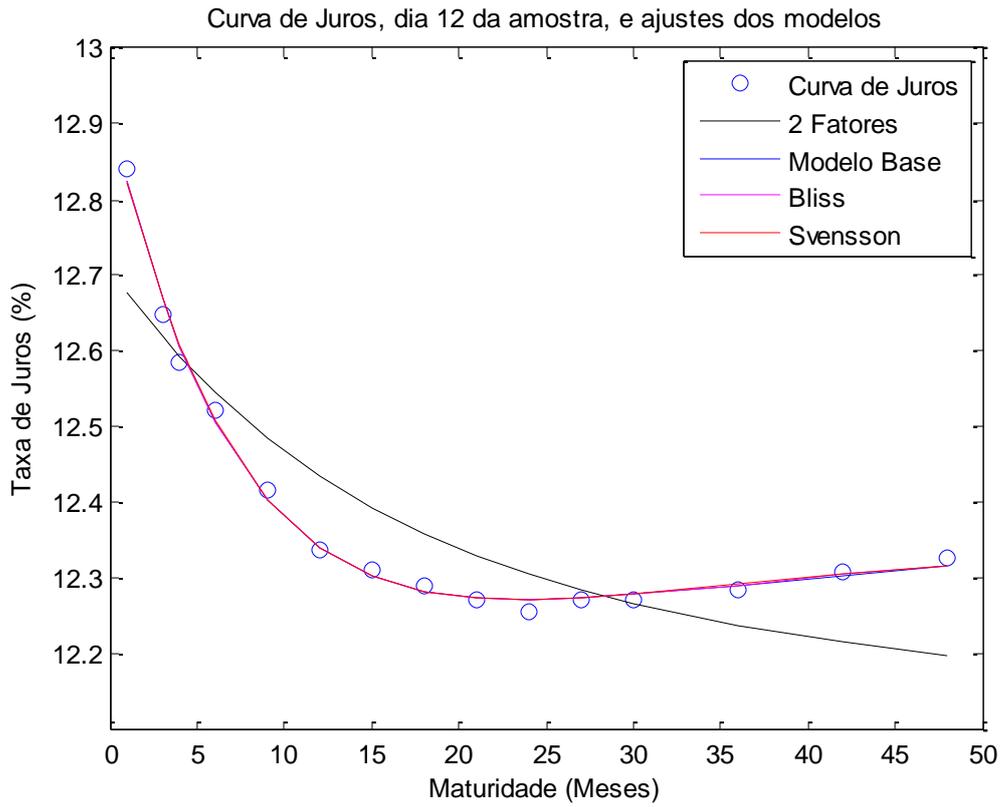


Fonte: Autor

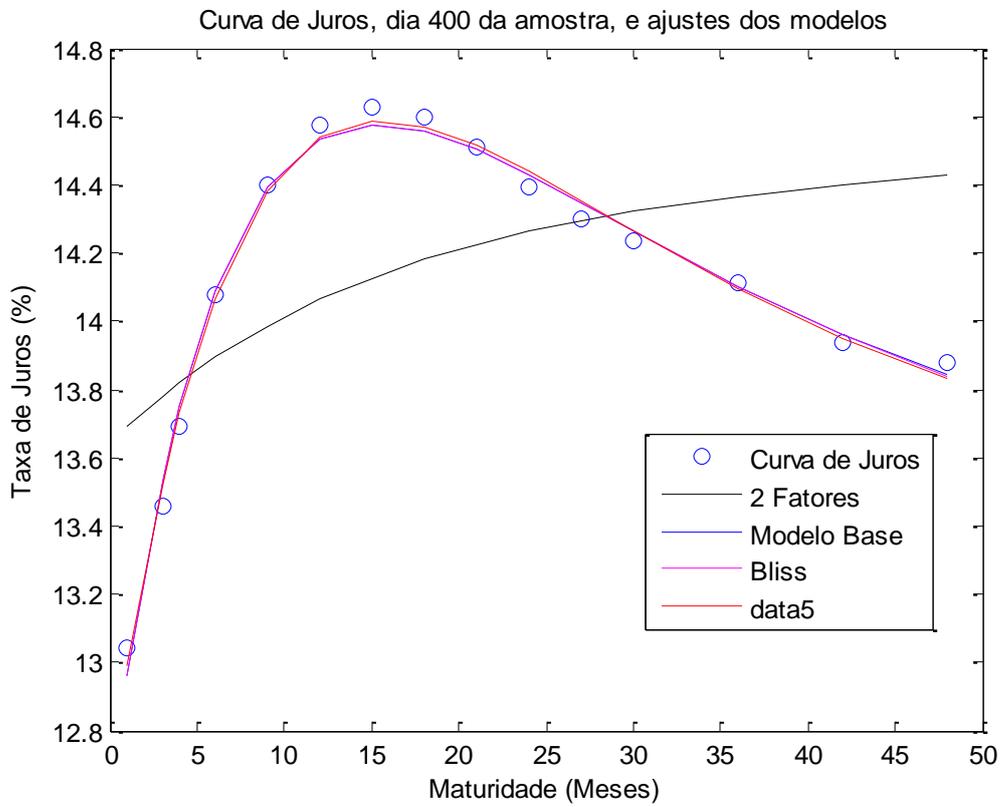
Loadings dos fatores para o modelo de Svensson



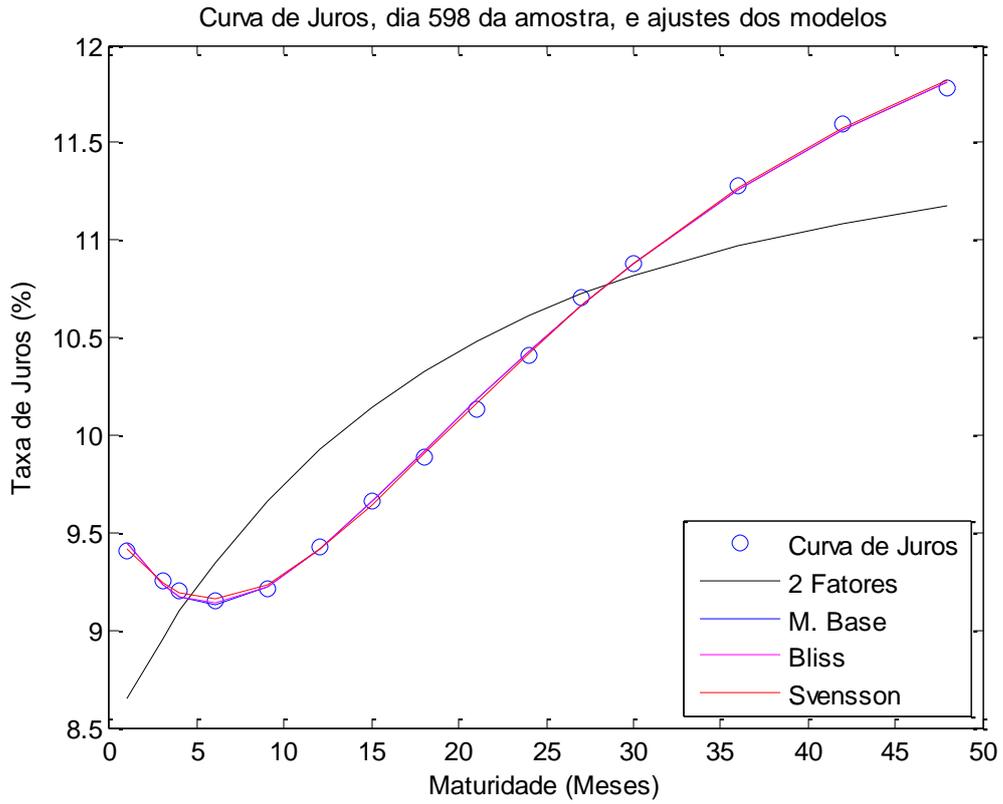
Fonte: Autor



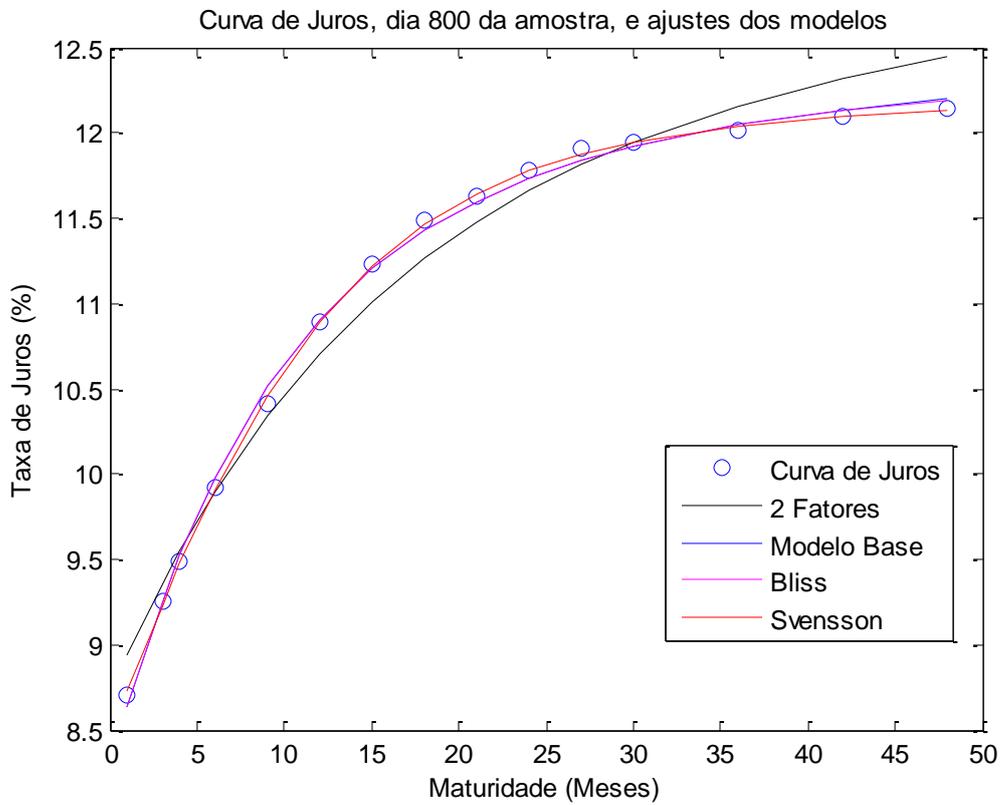
Fonte: Autor



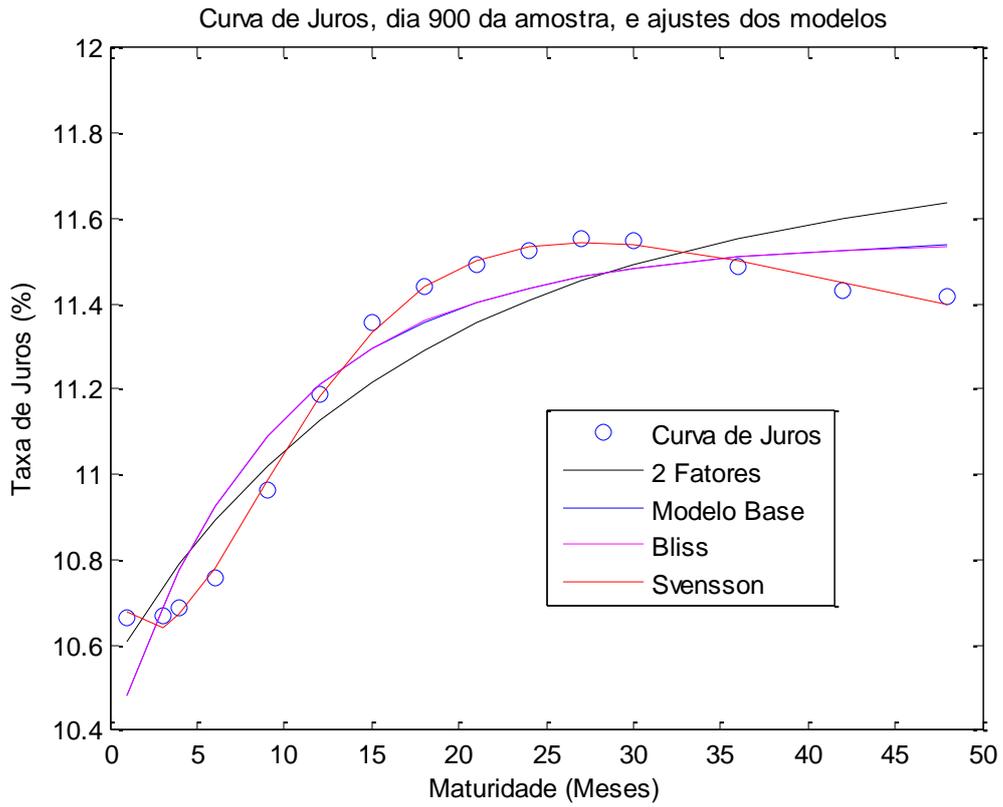
Fonte: Autor



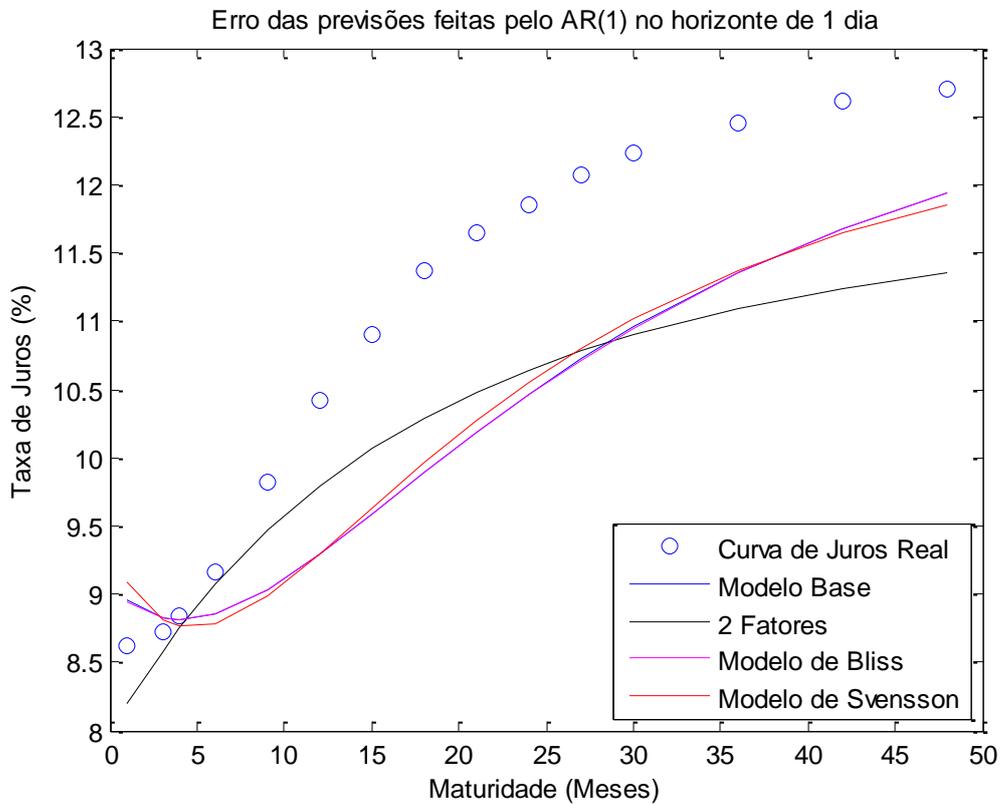
Fonte: Autor



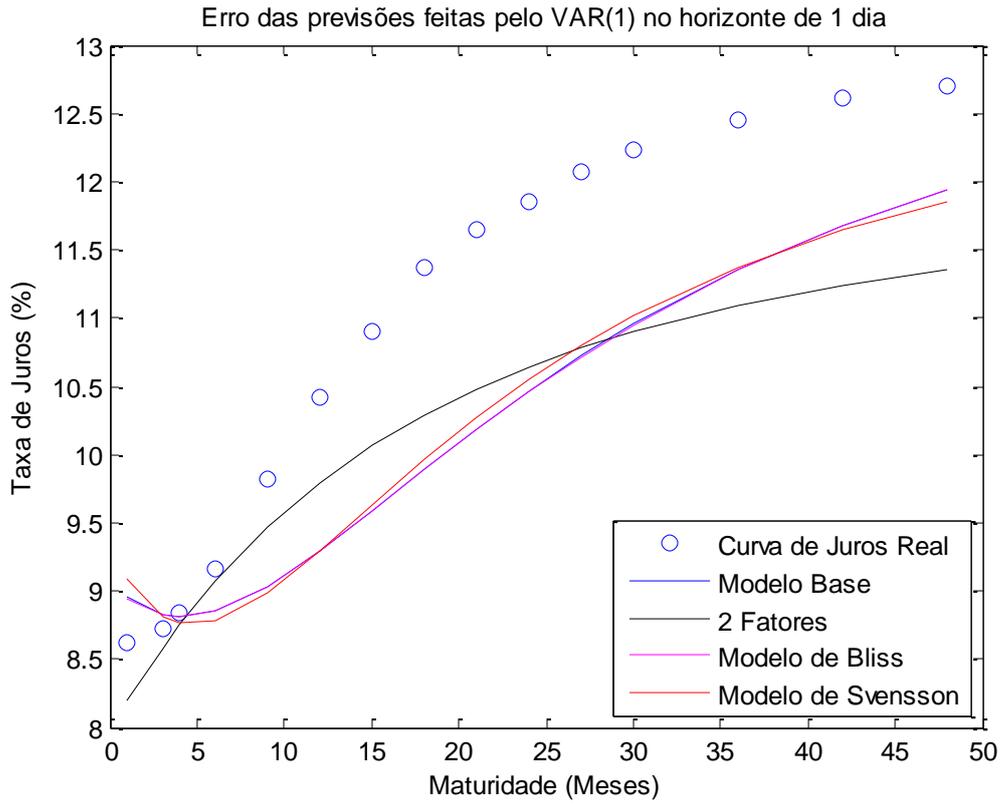
Fonte: Autor



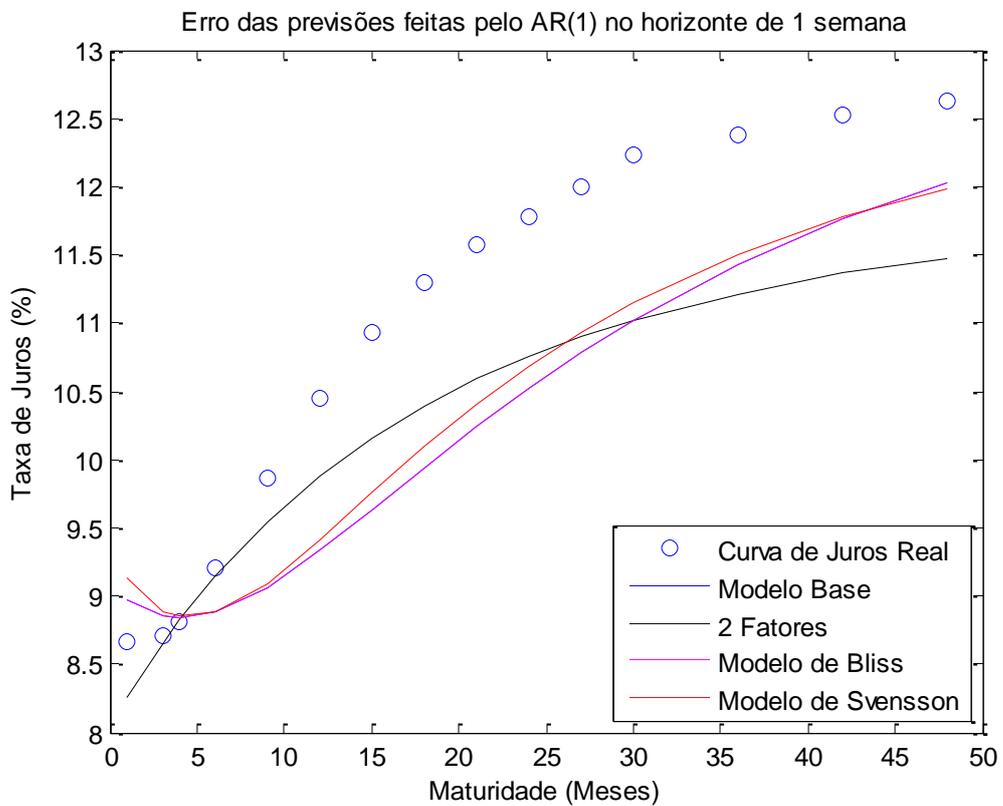
Fonte: Autor



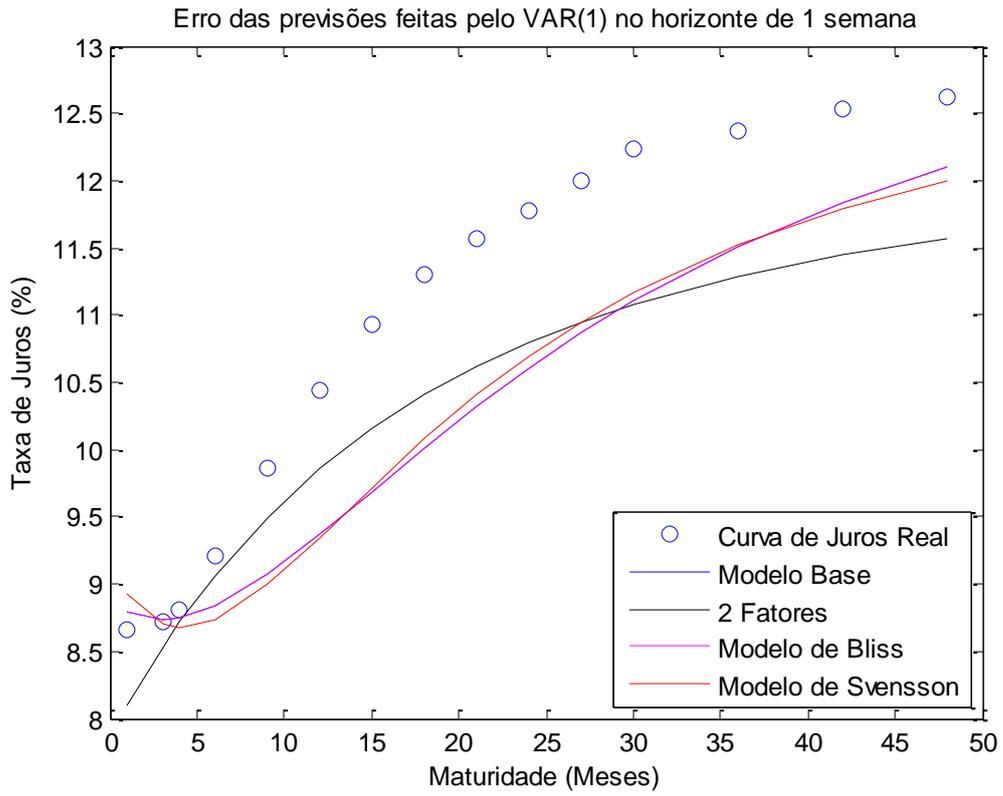
Fonte: Autor



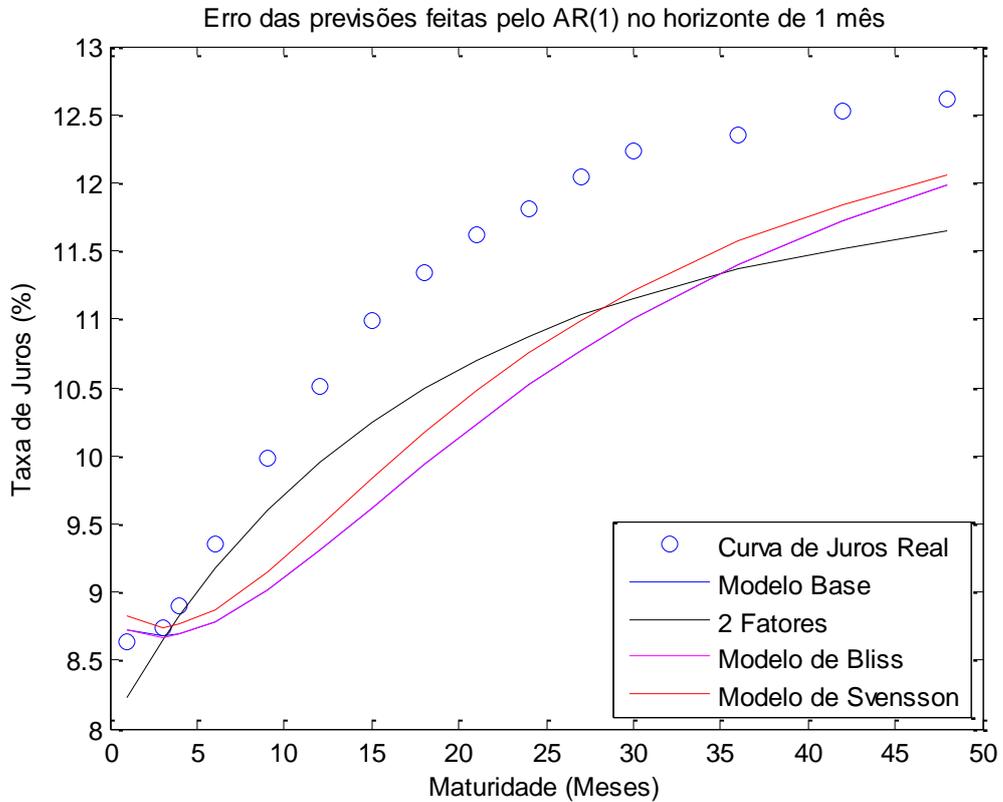
Fonte: Autor



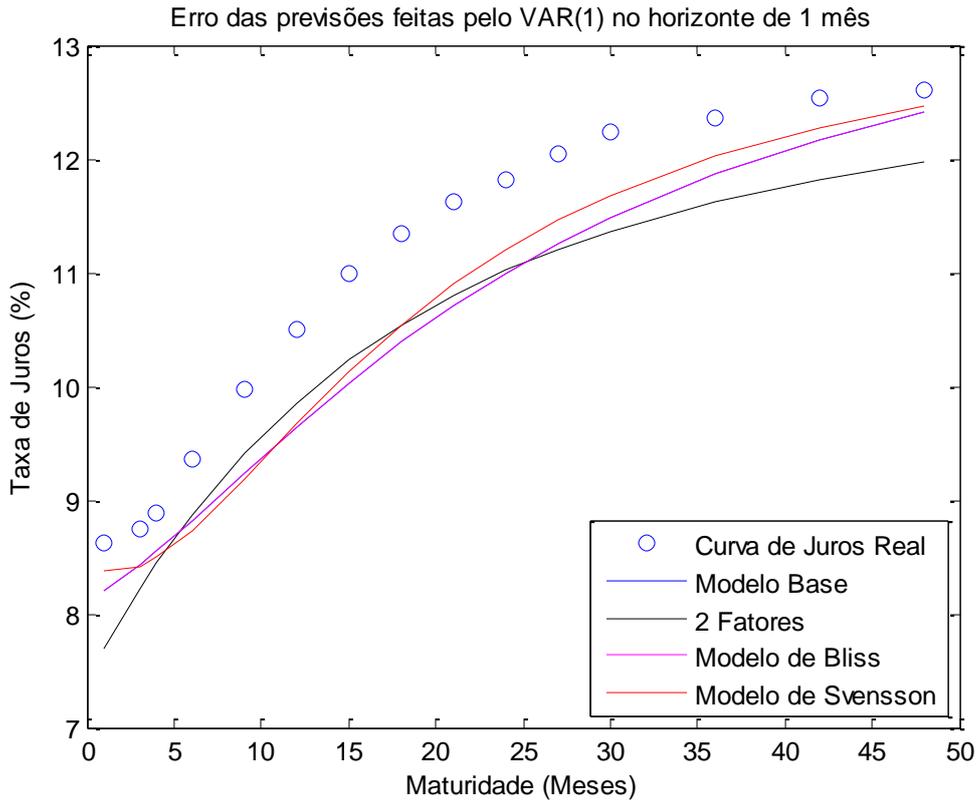
Fonte: Autor



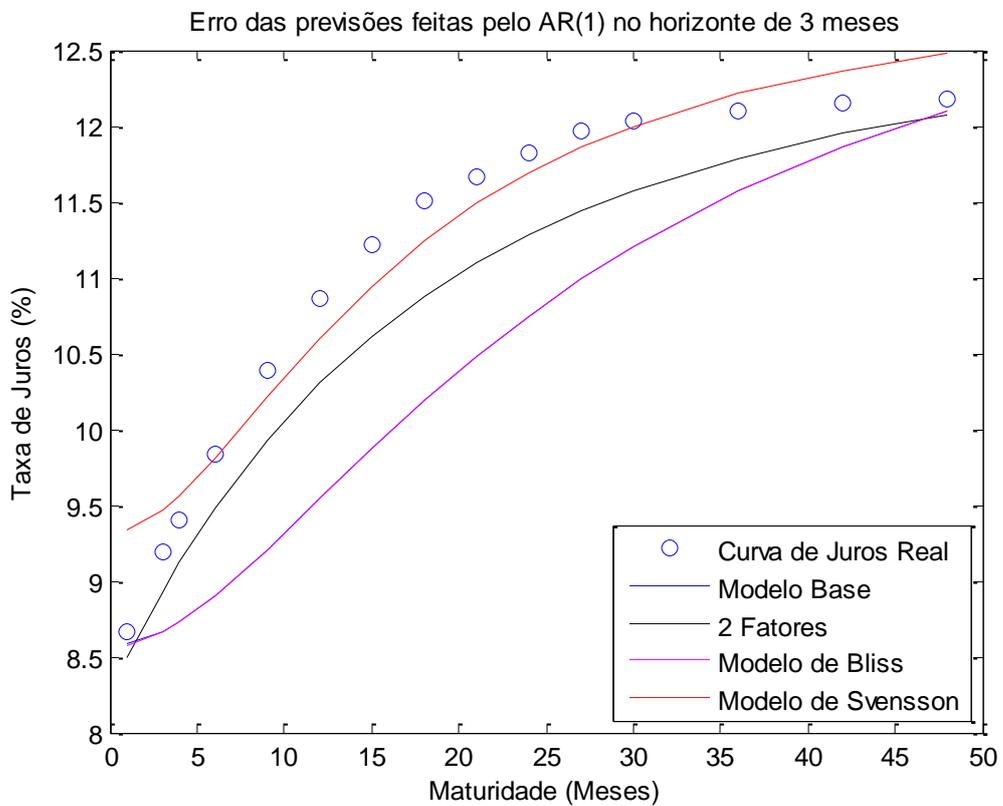
Fonte: Autor



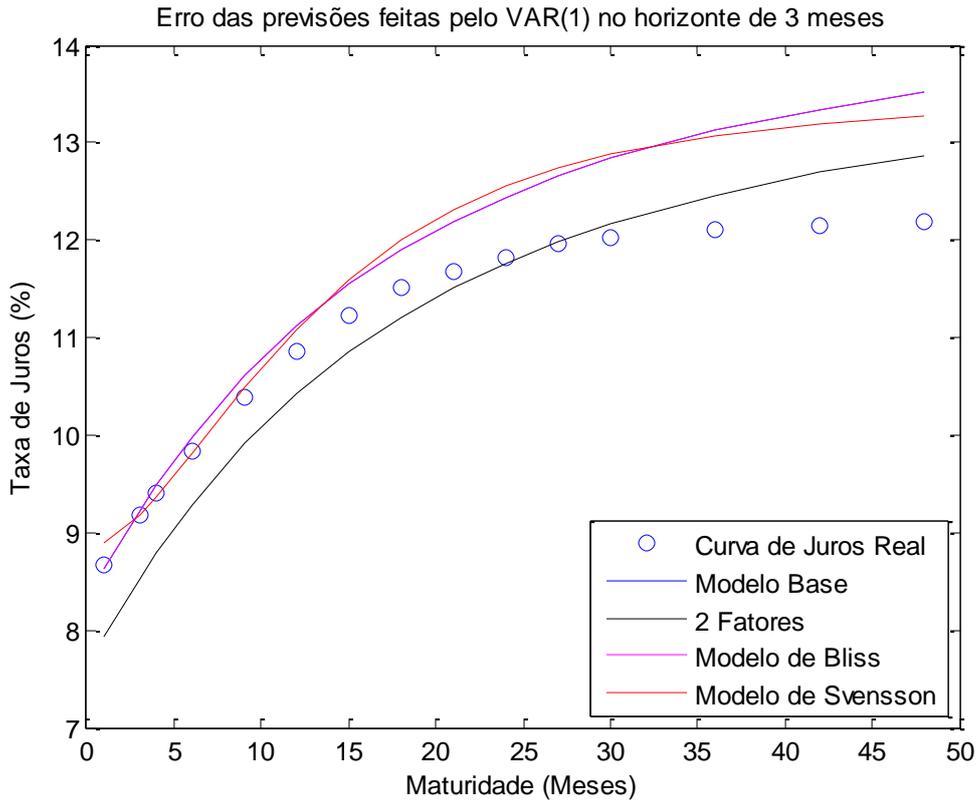
Fonte: Autor



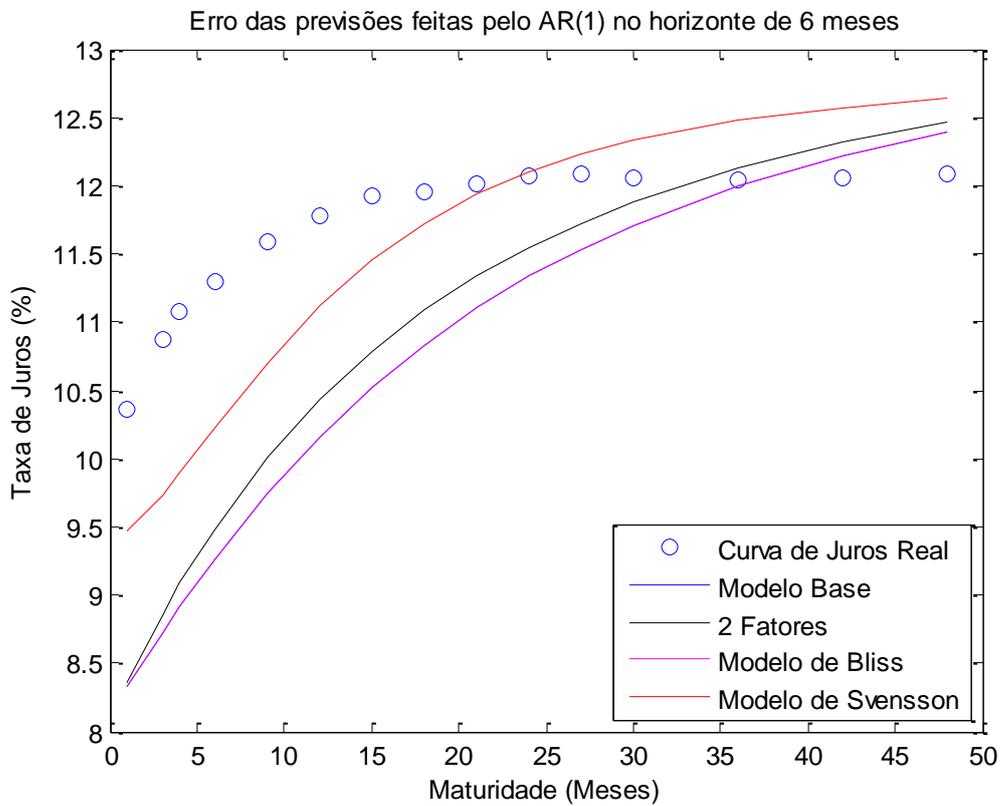
Fonte: Autor



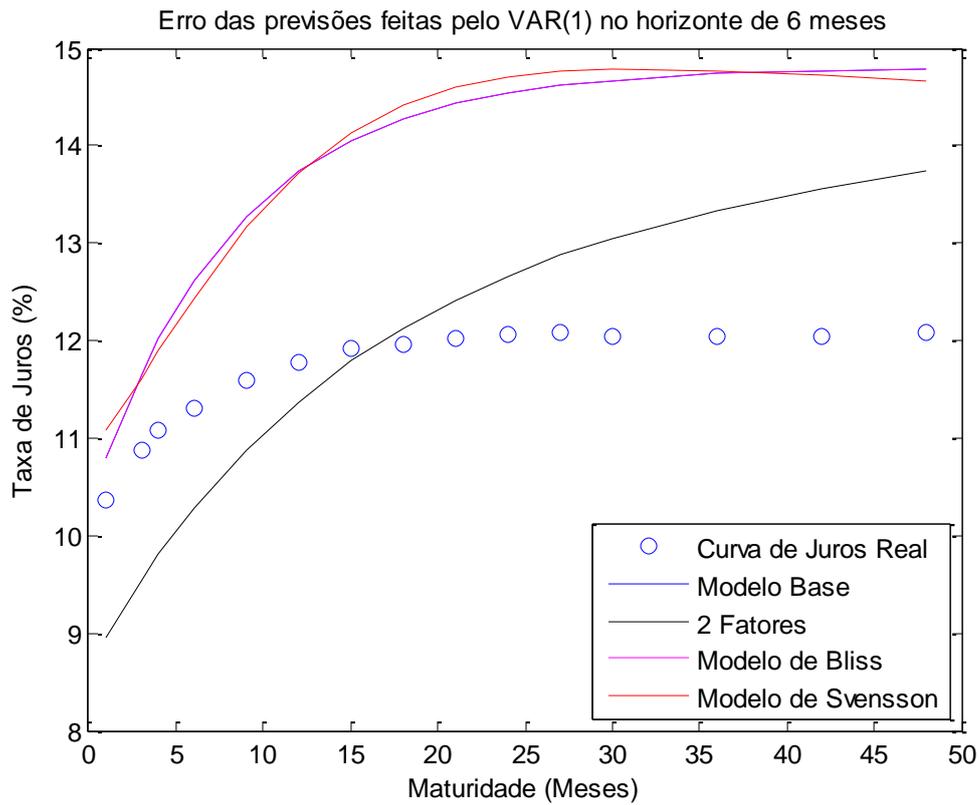
Fonte: Autor



Fonte: Autor



Fonte: Autor



Fonte: Autor

Tabela 6: REQM por maturidade, modelo base previsto por um AR(1)

Maturidade	Horizonte de previsão				
	1	5	21	63	126
1	1,4137	1,4049	1,3731	1,3055	1,2306
3	1,2278	1,2241	1,2101	1,1738	1,1169
6	1,1792	1,1777	1,1711	1,1470	1,0956
9	1,1219	1,1236	1,1281	1,1217	1,0773
12	1,0885	1,0934	1,1089	1,1217	1,0892
15	1,0784	1,0856	1,1096	1,1387	1,1200
18	1,0420	1,0510	1,0813	1,1240	1,1193
21	0,9676	0,9777	1,0126	1,0666	1,0753
24	0,8665	0,8775	0,9162	0,9806	1,0021
27	0,7771	0,7891	0,8322	0,9076	0,9420
30	0,7128	0,7250	0,7698	0,8516	0,8956
33	0,6480	0,6598	0,7040	0,7891	0,8406
36	0,5514	0,5606	0,5986	0,6830	0,7449
42	0,5601	0,5645	0,5880	0,6557	0,7161
48	0,6032	0,6036	0,6135	0,6623	0,7166

Fonte: Autor

Tabela 7: REQM por maturidade, modelo base previsto por um VAR(1)

Maturidade	Horizonte de previsão				
	1	5	21	63	126
1	1,4082	1,3766	1,2365	0,7668	1,0090
3	1,2186	1,1771	0,9973	0,5703	1,5214
6	1,1686	1,1239	0,9333	0,5920	1,7176
9	1,1094	1,0604	0,8607	0,7049	2,0048
12	1,0741	1,0215	0,8211	0,8610	2,2496
15	1,0631	1,0097	0,8168	0,9567	2,3420
18	1,0266	0,9749	0,7979	1,0155	2,3674
21	0,9527	0,9048	0,7541	1,0604	2,3724
24	0,8526	0,8100	0,6942	1,0962	2,3683
27	0,7649	0,7309	0,6626	1,1427	2,3614
30	0,7031	0,6806	0,6650	1,1933	2,3477
33	0,6419	0,6336	0,6770	1,2520	2,3489
36	0,5533	0,5743	0,7199	1,3605	2,3679
42	0,5683	0,6080	0,8017	1,4445	2,3662
48	0,6149	0,6630	0,8750	1,5037	2,3554

Fonte: Autor

Tabela 8: REQM por maturidade, modelo de 2 fatores previsto por um AR(1)

Maturidade	Horizonte de previsão				
	1	5	21	63	126
1	1,4559	1,4416	1,3918	1,3061	1,2518
3	1,2561	1,2449	1,2070	1,1484	1,1237
6	1,1865	1,1759	1,1406	1,0874	1,0677
9	1,0665	1,0561	1,0211	0,9675	0,9461
12	0,9424	0,9317	0,8950	0,8356	0,8056
15	0,8797	0,8684	0,8291	0,7606	0,7161
18	0,8334	0,8216	0,7801	0,7038	0,6468
21	0,7812	0,7691	0,7259	0,6442	0,5790
24	0,7225	0,7103	0,6662	0,5815	0,5124
27	0,6855	0,6732	0,6288	0,5427	0,4709
30	0,6798	0,6672	0,6213	0,5301	0,4502
33	0,6748	0,6619	0,6147	0,5193	0,4332
36	0,6758	0,6633	0,6177	0,5257	0,4433
42	0,7341	0,7222	0,6783	0,5900	0,5103
48	0,7943	0,7828	0,7408	0,6561	0,5792

Fonte: Autor

Tabela 9: REQM por maturidade, modelo de 2 fatores previsto por um VAR(1)

Maturidade	Horizonte de previsão				
	1	5	21	63	126
1	1,4597	1,4597	1,4522	1,3744	1,1177
3	1,2579	1,2528	1,2259	1,1062	0,8231
6	1,1876	1,1808	1,1472	1,0137	0,7267
9	1,0669	1,0572	1,0126	0,8572	0,5717
12	0,9417	0,9276	0,8667	0,6819	0,4185
15	0,8780	0,8593	0,7816	0,5672	0,3386
18	0,8307	0,8079	0,7153	0,4780	0,3202
21	0,7778	0,7516	0,6475	0,4021	0,3640
24	0,7185	0,6898	0,5778	0,3453	0,4463
27	0,6811	0,6512	0,5379	0,3489	0,5531
30	0,6756	0,6462	0,5393	0,4084	0,6627
33	0,6711	0,6439	0,5507	0,4871	0,7805
36	0,6737	0,6538	0,5993	0,6577	1,0105
42	0,7336	0,7207	0,6968	0,8169	1,1899
48	0,7948	0,7871	0,7840	0,9410	1,3277

Fonte: Autor

Tabela 10: REQM por maturidade, modelo de Bliss previsto por um AR(1)

Maturidade	Horizonte de previsão				
	1	5	21	63	126
1	1,4140	1,4052	1,3734	1,3055	1,3055
3	1,2278	1,2242	1,2102	1,1740	1,1740
6	1,1791	1,1776	1,1711	1,1472	1,1472
9	1,1215	1,1233	1,1279	1,1219	1,1219
12	1,0880	1,0929	1,1087	1,1220	1,1220
15	1,0780	1,0853	1,1097	1,1393	1,1393
18	1,0420	1,0510	1,0816	1,1248	1,1248
21	0,9678	0,9779	1,0132	1,0678	1,0678
24	0,8668	0,8779	0,9170	0,9820	0,9820
27	0,7776	0,7896	0,8331	0,9091	0,9091
30	0,7132	0,7255	0,7707	0,8532	0,8532
33	0,6483	0,6602	0,7049	0,7907	0,7907
36	0,5514	0,5607	0,5992	0,6844	0,6844
42	0,5599	0,5645	0,5883	0,6568	0,6568
48	0,6029	0,6034	0,6136	0,6631	0,6631

Fonte: Autor

Tabela 11: REQM por maturidade, modelo de Bliss previsto por um VAR(1)

Maturidade	Horizonte de previsão				
	1	5	21	63	126
1	1,4085	1,3769	1,2369	0,7671	1,0090
3	1,2186	1,1772	0,9974	0,5702	1,5206
6	1,1685	1,1238	0,9333	0,5916	1,7166
9	1,1090	1,0600	0,8604	0,7044	2,0038
12	1,0736	1,0210	0,8206	0,8604	2,2487
15	1,0627	1,0093	0,8165	0,9563	2,3414
18	1,0265	0,9748	0,7978	1,0154	2,3671
21	0,9528	0,9049	0,7542	1,0604	2,3724
24	0,8529	0,8103	0,6944	1,0962	2,3683
27	0,7653	0,7313	0,6629	1,1427	2,3614
30	0,7035	0,6810	0,6652	1,1932	2,3476
33	0,6422	0,6338	0,6771	1,2519	2,3487
36	0,5533	0,5743	0,7198	1,3601	2,3673
42	0,5681	0,6078	0,8014	1,4438	2,3652
48	0,6146	0,6626	0,8746	1,5028	2,3539

Fonte: Autor

Tabela 12: REQM por maturidade, modelo de Svensson previsto por um AR(1)

Maturidade	Horizonte de previsão				
	1	5	21	63	126
1	1,2590	1,2310	1,1351	0,9812	0,9125
3	1,2577	1,2164	1,0787	0,8748	0,8024
6	1,2610	1,2145	1,0593	0,8297	0,7479
9	1,2392	1,1861	1,0083	0,7384	0,6320
12	1,1655	1,1115	0,9295	0,6440	0,5126
15	1,0899	1,0393	0,8679	0,5886	0,4342
18	1,0028	0,9577	0,8047	0,5483	0,3866
21	0,9013	0,8624	0,7300	0,5049	0,3515
24	0,7936	0,7605	0,6483	0,4564	0,3205
27	0,7119	0,6840	0,5896	0,4285	0,3137
30	0,6652	0,6424	0,5653	0,4335	0,3359
33	0,6207	0,6029	0,5432	0,4415	0,3639
36	0,5446	0,5349	0,5041	0,4548	0,4178
42	0,5366	0,5325	0,5201	0,5007	0,4832
48	0,5409	0,5400	0,5379	0,5351	0,5294

Fonte: Autor

Tabela 13: REQM por maturidade, modelo de Svensson previsto por um VAR(1)

Maturidade	Horizonte de previsão				
	1	5	21	63	126
1	1,2554	1,2122	1,0392	0,5907	1,1594
3	1,2584	1,2170	1,0393	0,5918	1,4137
6	1,2627	1,2199	1,0351	0,6129	1,5430
9	1,2416	1,1949	0,9972	0,6738	1,7853
12	1,1667	1,1147	0,9090	0,8029	2,0844
15	1,0896	1,0362	0,8432	0,9426	2,2768
18	1,0013	0,9502	0,7887	1,0629	2,3953
21	0,8993	0,8540	0,7390	1,1603	2,4677
24	0,7917	0,7541	0,6928	1,2298	2,5024
27	0,7112	0,6852	0,6835	1,2884	2,5092
30	0,6664	0,6534	0,7033	1,3332	2,4911
33	0,6240	0,6251	0,7244	1,3743	2,4756
36	0,5525	0,5798	0,7567	1,4300	2,4438
42	0,5471	0,5889	0,7962	1,4504	2,3840
48	0,5528	0,6017	0,8201	1,4493	2,3191

Fonte: Autor