

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**

Malú Grave

**ESCADAS AUTOPORTANTES: DESENVOLVIMENTO DE
PROGRAMA COMPUTACIONAL DE DIMENSIONAMENTO**

Porto Alegre
dezembro 2013

MALÚ GRAVE

**ESCADAS AUTOPORTANTES: DESENVOLVIMENTO DE
PROGRAMA COMPUTACIONAL DE DIMENSIONAMENTO**

Trabalho de Diplomação apresentado ao Departamento de
Engenharia Civil da Escola de Engenharia da Universidade Federal
do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do
título de Engenheiro Civil

Orientador: Américo Campos Filho

Porto Alegre
dezembro 2013

MALÚ GRAVE

**ESCADAS AUTOPORTANTES: DESENVOLVIMENTO DE
PROGRAMA COMPUTACIONAL DE DIMENSIONAMENTO**

Este Trabalho de Diplomação foi julgado adequado como pré-requisito para a obtenção do título de ENGENHEIRO CIVIL e aprovado em sua forma final pelo Professor Orientador e pela Coordenadora da disciplina Trabalho de Diplomação Engenharia Civil II (ENG01040) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, dezembro de 2013

Prof. Américo Campos Filho
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Orientador

Profa. Carin Maria Schmitt
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA

Prof. Américo Campos Filho (UFRGS)
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Prof. Roberto Domingo Rios (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Ronald José Ellwanger (UFRGS)
Dr. pela Universidade Federal do Rio de Janeiro

Dedico este trabalho a meus pais, Margrit e Lutero, que sempre me apoiaram e me incentivaram, conduzindo meu rumo para eu chegar até onde já cheguei.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Américo Campos Filho, pela orientação, incentivo e conhecimento transmitido ao longo do desenvolvimento deste trabalho e durante o período de graduação.

À Profa. Carin Maria Schmitt, pelo auxílio para a realização deste trabalho e constante acompanhamento nas etapas de elaboração do mesmo.

Aos meus pais, Margrit e Lutero, pelo apoio, incentivo e por todas as oportunidades que me concederam ao longo da minha vida.

Aos demais professores da Escola de Engenharia, que fazem desta uma escola de ensino de excelência, e que nos dão as diretrizes para nos tornarmos futuramente bons profissionais.

Aos amigos e colegas de trabalho que de alguma forma me incentivaram e me ajudaram a realizar este trabalho, estando presentes nos bons e maus momentos, porém, sempre me apoiando.

Agradeço, por fim, a todos que de alguma forma colaboraram para eu chegar até aqui.

O degrau de uma escada não serve simplesmente para que alguém permaneça em cima dele, destina-se a sustentar o pé de um homem pelo tempo suficiente para que ele coloque o outro um pouco mais alto.

Thomas Huxley

RESUMO

Este trabalho teve como intuito a elaboração de um *software* que calcula escadas autoportantes de concreto armado, visto que é um tipo de estrutura diferenciada já bastante utilizada, porém sem muitas referências bibliográficas que auxiliem o profissional no seu dimensionamento. Para isso, num primeiro momento, foi necessário definir um modelo que represente a estrutura e o seu comportamento adequadamente. Criou-se, então, um modelo de barras, discretizando a escada em uma estrutura reticulada, e, após aplicadas as cargas atuantes, este modelo pôde ser resolvido pelo método dos deslocamentos, através de análise matricial para estruturas de barras. Todo o processo de cálculo foi, então, sistematizado, e transformado num algoritmo, que, posteriormente, foi traduzido para uma linguagem de programação. Os resultados dos deslocamentos e solicitações encontrados foram verificados com *softwares* já existentes no mercado, e, com os cálculos considerados corretos, foi programada a parte de dimensionamento das seções, a partir das recomendações da NBR 6118:2007. Tudo isso feito sempre com o embasamento teórico fornecido pela pesquisa bibliográfica. Por fim, o *software* pronto recebe a geometria e carregamentos fornecidos pelo usuário, e como resposta, fornece a armadura necessária para suportar os esforços que possam ocorrer nesse tipo de estrutura.

Palavras-chave: Escadas Autoportantes. Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado. Programa Computacional.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Etapas do trabalho de diplomação	21
Figura 2 – Escada autoportante modelada como um estrutura reticulada	23
Figura 3 – Corte longitudinal de um trecho de escada	25
Figura 4 – Solicitações num elemento de pórtico espacial	30
Figura 5 – Matriz de rigidez do elemento de pórtico espacial	30
Figura 6 – Transferência do esforço normal para o centroide da armadura tracionada ...	31
Figura 7 – Diagrama tensão-deformação do concreto	35
Figura 8 – Distribuições de tensões no concreto, considerando diagrama tensão- deformação simplificado	35
Figura 9 – Diagrama tensão-deformação do aço	35
Figura 10 – Domínios de dimensionamento	36
Figura 11 – Diagrama de deformações no limite entre domínios 3 e 4	37
Figura 12 – Tensões na seção transversal	38
Figura 13 – Diagrama das resultantes de tensão na seção transversal	39
Figura 14 – Situações na flexo-compressão estaticamente equivalentes	41
Figura 15 – Diagrama de tensões na flexo-compressão com armadura simples	42
Figura 16 – Diagrama de tensões na flexo-compressão com armadura dupla	44
Figura 17 – Analogia à treliça para dimensionamento de torção	45
Figura 18 – Detalhamento de escadas autoportantes	52
Figura 19 – Viga fictícia dentro das lajes	53
Figura 20 – Detalhe de ligação entre lance e patamar superior	54
Figura 21 – Representação dos nós e barras do modelo	57
Figura 22 – Montagem da matriz de rigidez da estrutura	59
Figura 23 – Formato da matriz de rigidez da estrutura	60
Figura 24 – Vetor de forcas locais de um elemento de pórtico espacial	61
Figura 25 – Montagem do vetor de forcas da estrutura	62
Figura 26 – Vetor de forcas da estrutura	62
Figura 27 – Aplicando as condições de contorno	63
Figura 28 – Janela principal do programa	65
Figura 29 – Janela para aplicação de outros carregamentos	67
Figura 30 – Dimensões utilizadas para as verificações do programa	68
Figura 31 – Comparações dos resultados entre o SAP2000 e o programa criado em Visual Basic	69

Figura 32 – Opção para considerar ou não a rigidez a torção dos lances	70
Figura 33 – Resultados do cálculo de uma escada autoportante	72
Figura 34 – Relatório completo do cálculo da estrutura	73
Figura 35 – Aviso quando as bielas comprimidas não passam no dimensionamento	73
Figura 36 – Aviso quando for necessária armadura de compressão	74
Figura 37 – Reações para modelo de placas e modelo de barras do exemplo utilizado ..	74

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Peso específico dos materiais	27
Quadro 2 – Taxas mínimas de armadura a flexão para uma seção retangular	48
Quadro 3 – Valores mínimos para armadura de distribuição de lajes armadas em uma direção	49

LISTA DE SÍMBOLOS

p = soma de todas as cargas atuantes na escada (kN/m²)

g = soma das cargas permanentes (kN/m²)

q = soma das cargas variáveis (kN/m²)

f_{cd} = resistência de cálculo à compressão do concreto (MPa)

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto (MPa)

γ_c = coeficiente de minoração da resistência do concreto, com o valor de 1,4

f_{yd} = resistência de cálculo de escoamento do aço (MPa)

f_{yk} = resistência característica à tração do aço (MPa)

γ_s = coeficiente de minoração da resistência do aço, com o valor de 1,15

α_e = ângulo de inclinação do trecho inclinado do lance

a = largura do piso do degrau (m)

e = altura do espelho do degrau (m)

$g_{patamar}$ = carga permanente devido ao peso próprio do patamar (kN/m²)

$g_{lance.inclinado}$ = carga permanente devido ao peso próprio do lance inclinado (kN/m²)

γ_{CA} = peso específico do concreto armado (kN/m³)

h_p = espessura do patamar (m)

h_l = espessura da laje do lance inclinado (m)

γ_{CS} = peso específico do concreto simples ou do enchimento do degrau (kN/m³)

g_{parede} = carga permanente da parede (kN/m²)

γ_{alv} = peso específico da alvenaria (kN/m³)

H_{parede} = altura da parede (m)

t_{parede} = espessura da parede (m)

l_{lance} = largura do lance (m)

M_p = momento no engaste do patamar do balanço (kNm/m);

l = comprimento do patamar em balanço (m);

Q_p = reação vertical no engaste do patamar em balanço (kN/m).

S = vetor de forças e momentos em cada nó

k = matriz de rigidez do elemento

u = vetor de deslocamentos em cada nó do elemento

M_{sd} = Momento fletor solicitante equivalente após deslocamento do ponto de aplicação de N_d (kNcm)

M_d = Momento fletor solicitante de cálculo (kNcm)

N_d = Força normal de tração de cálculo (kN)

d = distância da face superior da seção até o centroide da armadura tracionada (cm)

d' = distância da face superior da seção até o centroide da armadura comprimida (cm)

x_{lim} = posição da linha neutra no limite entre os domínios 3 e 4 (cm)

ε_{yd} = deformação específica de cálculo do aço

M_{dlim} = momento limite entre os domínios 3 e 4 (kNcm)

b = largura da seção transversal, no caso de lajes é considerado 1 metro (cm)

x = posição da linha neutra em relação à fibra mais comprimida (cm)

A_s = área de aço necessária para flexão pura (cm²/m)

ΔA_s = área de armadura necessária para tração pura (cm²/m)

A_{sft} = área de aço necessária para flexo-tração (cm^2/m)

e_0 = excentricidade equivalente devido ao momento M_d (cm)

A_{S1} = área de aço tracionado necessária para flexo-compressão (cm^2/m)

e_1 = distância entre o ponto de aplicação da força normal e o centroide da armadura (cm)

A_{S2} = área de aço comprimido necessária para flexo-compressão (cm^2/m)

ε_2 = deformação do aço da armadura de compressão

h_e = espessura equivalente da seção vazada (cm)

h = altura da seção transversal (cm)

C_1 = distância entre o eixo da armadura longitudinal do canto e a face lateral da peça (cm)

T_{Sd} = Momento torçor de cálculo (kNm/m)

$T_{Rd,2}$ = resistência das diagonais comprimidas de concreto

$T_{Rd,3}$ = parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural

$T_{Rd,4}$ = parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo do elemento estrutural

$T_{Rd,2}$ = resistência das diagonais comprimidas de concreto (kNm)

A_e = área limitada pela linha média da parede da seção vazada, real ou equivalente, incluindo a parte vazada (cm^2)

θ = ângulo de inclinação das diagonais de concreto, arbitrado no intervalo 30° a 45°

$A_{90/s}$ = área de armadura de estribos necessária (cm^2/m)

f_{ywd} = valor de cálculo da resistência ao escoamento do aço da armadura passiva

A_{sl} = área de armadura longitudinal necessária (cm^2)

u_e = perímetro da linha média da parede da seção vazada (cm)

W_0 = módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada

$f_{ctk,sup}$ = resistência característica superior do concreto à tração

ρ_{min} = taxa geométrica mínima de armadura de tração (%)

$A_{s,min}$ = área mínima da armadura principal de flexão (cm²/m)

V_{Rd1} = força cortante resistente de cálculo (kN/m)

τ_{rd} = tensão de cisalhamento resistente de cálculo (MPa)

k = coeficiente de majoração da força cortante resistente de cálculo

ρ_1 = taxa de armadura longitudinal de tração que se estende até não menos que $d+l_{b,nec}$ além da seção considerada

b_w = largura da seção, considera-se 1 metro

f_{ctd} = resistência à tração de cálculo do concreto (MPa)

$f_{ctk,inf}$ = resistência característica inferior à tração do concreto (MPa)

f_{ctm} = resistência média à tração do concreto (MPa)

η_1 = coeficiente de conformação superficial

η_2 = coeficiente de conformação superficial

η_3 = coeficiente de conformação superficial

ϕ = diâmetro da barra em mm

l_b = comprimento básico de ancoragem (cm)

$l_{b,nec}$ = comprimento necessário de ancoragem (cm)

α = coeficiente para o cálculo do comprimento de ancoragem

$A_{s,calc}$ = área de aço calculada que precisa ser ancorada (cm²/m)

$A_{s,efet}$ = área de aço efetiva utilizada na ancoragem (cm²/m)

$l_{b,min}$ = comprimento de ancoragem mínimo (cm)

K_{global} = matriz de rigidez global do elemento

R^T = matriz de rotação transposta

K_{local} = matriz de rigidez local do elemento

R = matriz de rotação do elemento

F_{global} = vetor de forças global do elemento

F_{local} = vetor de forças local do elemento

Re_{local} = vetor de reações em relação ao eixo de coordenadas locais do elemento

U_{local} = vetor de deslocamentos em relação ao eixo de coordenadas locais do elemento

E_{ci} = módulo de elasticidade inicial do concreto (MPa)

E_{cs} = módulo de elasticidade secante do concreto (MPa)

G_c = módulo de elasticidade transversal do concreto (MPa)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
2 DIRETRIZES DA PESQUISA	19
2.1 QUESTÃO DA PESQUISA	19
2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA	19
2.2.1 Objetivo principal	19
2.2.2 Objetivo secundário	19
2.3 PRESSUPOSTO	19
2.4 DELIMITAÇÕES	20
2.5 LIMITAÇÕES	20
2.6 DELINEAMENTO	20
3 MODELO ESTRUTURAL, CARGAS ATUANTES E SOLICITAÇÕES	22
3.1 MODELO ESTRUTURAL	22
3.2 COMPOSIÇÃO DE CARGAS	23
3.2.1 Peso próprio da escada	25
3.2.2 Peso do revestimento	27
3.2.3 Paredes	28
3.2.4 Carga do patamar em balanço no modelo estrutura	28
3.3 SOLICITAÇÕES	29
4 DIMENSIONAMENTO DAS SEÇÕES	33
4.1 DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA À FLEXO-TRAÇÃO	33
4.1.1 Dimensionamento da armadura à flexão simples	34
4.1.2 Dimensionamento da armadura à tração pura	40
4.2 DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA À FLEXO-COMPRESSÃO	41
4.2.1 Armadura simples na flexo-compressão	42
4.2.2 Armadura dupla na flexo-compressão	43
4.3 DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO	44
4.4 ARMADURA MÍNIMA	48
4.5 ARMADURA DE DISTRIBUIÇÃO	49
4.6 ARMADURA PARA FORÇA CORTANTE	49
5 DETALHAMENTO DE ESCADAS	52
6 PROCEDIMENTO DE CÁLCULO	52
7 PROGRAMA DE DIMENSIONAMENTO DE ESCADAS AUTOPORTANTES	65
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS	76

1 INTRODUÇÃO

As escadas são parte fundamental da composição do prédio quando se fala da sua utilização. Mesmo não sendo parte vital da sua sustentação, são elas estruturas simples que dão acesso de um pavimento para o outro sem a utilização de nenhum equipamento mecânico. Existem muitos tipos de escadas e materiais que podem ser utilizados para cumprir essa função. Elas podem ser de madeira, metálicas, de concreto armado ou mistas.

Comumente, arquitetos são encarregados pela concepção do projeto das escadas de um prédio e, então, este é enviado a um engenheiro. O engenheiro é o profissional responsável pela definição das dimensões e materiais a serem utilizados para garantir a viabilidade do projeto inicialmente proposto. Todavia, existem estruturas que demandam tratamento mais especializado e, devido à complexidade que apresentam, estas são denominadas escadas especiais.

As escadas especiais têm formas não convencionais e surpreendem do ponto de vista arquitetônico pela sua estrutura diferenciada. O valor estético do projeto recebe destaque devido à aparência leve que adquire ao dispensar estruturas auxiliares. Porém, o dimensionamento passa a requerer maior conhecimento por parte do projetista. Exemplos desse grupo de escadas são as helicoidais, como as escadas do Museu do Louvre que foram projetadas em estrutura metálica, e as chamadas escadas autoportantes, ou seja, uma escada em formato “U” sem apoio no patamar intermediário, como a do aeroporto Salgado Filho.

Apesar de não ser um assunto novo, são escassas as fontes bibliográficas referentes ao dimensionamento desses tipos de escadas. Sendo assim, este trabalho foi apresentado com a pretensão de contribuir com a literatura sobre a temática, e, principalmente, com a prática de trabalho do profissional de engenharia civil. A criação de um *software* capaz de calcular uma escada autoportante em concreto armado foi o objetivo central deste estudo e, de forma complementar, visou-se a descrição do processo de dimensionamento e detalhamento da mesma.

Para isso, em um primeiro momento, são fornecidas as etapas necessárias para alcançar esses objetivos, em que, primeiramente, encontra-se explicitado o modelo de cálculo utilizado para representar esse tipo de estrutura. Em seguida, é apresentada a composição de cargas que

podem atuar numa escada, e a partir do modelo e dos carregamentos, tem-se uma breve explicação da forma de como se encontram as solicitações atuantes nas seções. Posteriormente, são abordados tópicos referentes ao dimensionamento estrutural para cada tipo de solicitação de acordo com a NBR 6118, e como última abordagem teórica, são apresentadas as recomendações para o detalhamento de uma escada autoportante. Por fim, são apresentadas as características e considerações do *software* desenvolvido.

2 DIRETRIZES DA PESQUISA

As diretrizes para desenvolvimento do trabalho são descritas nos próximos itens.

2.1 QUESTÃO DE PESQUISA

A questão de pesquisa do trabalho foi: qual seria um *software* para executar o dimensionamento de uma escada autoportante em concreto armado?

2.2 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos da pesquisa foram classificados em principal e secundário e são descritos a seguir.

2.2.1 Objetivo Principal

O objetivo principal do trabalho foi o desenvolvimento de uma ferramenta computacional que auxilie o engenheiro a dimensionar uma escada autoportante de concreto armado.

2.2.2 Objetivo secundário

O objetivo secundário do trabalho foi a apresentação de diretrizes para o processo de dimensionamento e detalhamento de uma escada autoportante.

2.3 PRESSUPOSTO

O trabalho teve por pressuposto a validade das recomendações que constam na:

- a) NBR 6118:2007 – Projeto de Estruturas de Concreto;

b) NBR 6120:1980 – Cargas para o Cálculo de Estruturas de Edificações.

Também foi pressuposto que os *softwares* utilizados para obtenção de valores comparativos aos do novo *software* são adequados para o dimensionamento desse tipo de estrutura.

2.4 DELIMITAÇÕES

A pesquisa ficou delimitada ao desenvolvimento de um *software* orientado ao dimensionamento e detalhamento de escadas autoportantes de concreto armado.

2.5 LIMITAÇÕES

São limitações do trabalho:

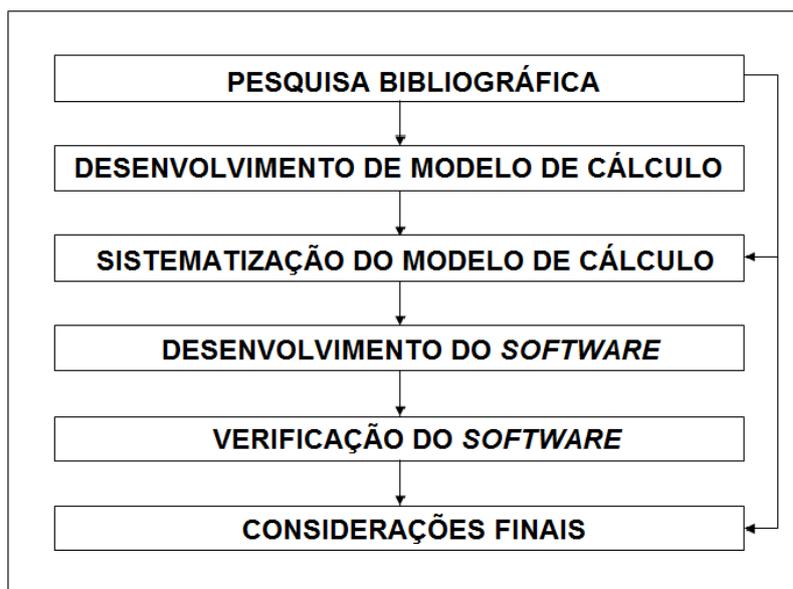
- a) foram tratadas apenas escadas de dois lances paralelos com um patamar intermediário;
- b) foi utilizado somente o *software* SAP2000 para obter os resultados comparativos.

2.6 DELINEAMENTO

O trabalho foi realizado através das etapas apresentadas a seguir, que estão representadas na figura 1, e são descritas nos próximos parágrafos:

- a) pesquisa bibliográfica;
- b) desenvolvimento de modelo de cálculo;
- c) sistematização do modelo de cálculo;
- d) desenvolvimento do *software*;
- e) verificação do *software*;
- f) considerações finais.

Figura 1 – Etapas do trabalho de diplomação



(fonte: elaborado pela autora)

A **pesquisa bibliográfica** teve por finalidade desenvolver uma base teórica sólida para ser possível dar continuidade às demais etapas do projeto de pesquisa. Dentre as principais referências do trabalho foram utilizados normas e livros sobre cálculo e dimensionamento de estruturas em concreto armado e concepção e detalhamento de escadas.

O **desenvolvimento do modelo de cálculo** foi a etapa em que se definiu um modelo adequado para representar a estrutura, a teoria pela qual foi possível encontrar as solicitações atuantes, e a partir dessas, a teoria que dimensiona os lances e patamar da escada. Sabendo como proceder diante de um dimensionamento de escadas autoportantes, foi feita a **sistematização do modelo de cálculo**, etapa na qual foi elaborado um processo automático de cálculo que possibilite a resolução do mesmo.

Na etapa de **desenvolvimento do software**, o algoritmo elaborado na etapa anterior foi traduzido para a linguagem de programação *Visual Basic*, no qual, além das rotinas e sub-rotinas de cálculo, foram criadas as interfaces gráficas do programa. Como resultado, foi elaborado um *software* que dimensiona escadas autoportantes.

Para validar o trabalho, foi feita uma **verificação do software** através de resolução de exemplos com auxílio de programas computacionais já existentes. Por fim, as **considerações finais** fizeram o fechamento do trabalho.

3 ESCADA AUTOPORTANTE: MODELO ESTRUTURAL, CARGAS ATUANTES E SOLICITAÇÕES

As escadas autoportantes se diferenciam das escadas convencionais por não possuírem apoio no patamar intermediário. Essa configuração as caracterizam como estruturas hiperestáticas, que, segundo Martha (2010, p. 87), são aquelas que não podem ter seus esforços determinados apenas pelas equações de equilíbrio.

Por não serem estruturas simples, deve-se utilizar um modelo estrutural adequado que represente o seu comportamento após aplicadas as cargas em que nelas atuam. Existem diversos modelos para fazer essa representação, desde os mais simples, até os mais complexos. Então, para essa definição, deve-se haver um estudo aprofundado sobre as características da estrutura em estudo.

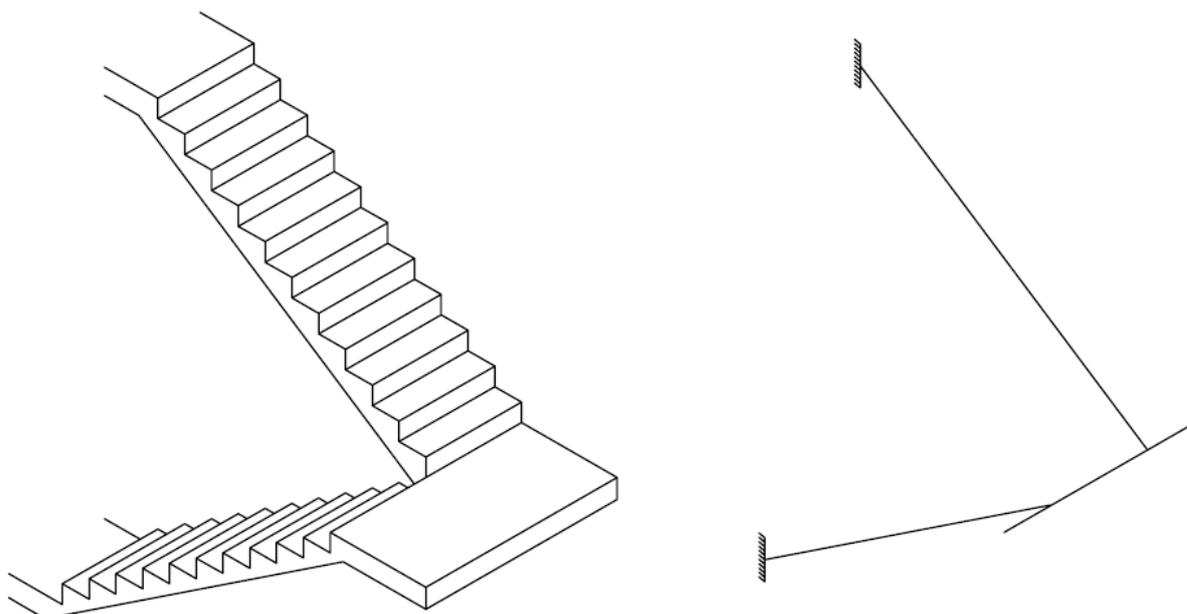
3.1 MODELO ESTRUTURAL

Uma simplificação bastante utilizada para a criação do modelo é discretizá-lo como uma estrutura reticulada, ou seja, uma estrutura formada por barras. Martha (2010, p. 4) explica que:

O modelo matemático desse tipo de estrutura baseia-se no fato de que os elementos estruturais têm um eixo bem definido e está fundamentado na teoria de vigas de Navier, que rege o comportamento de membros estruturais que trabalham à flexão, acrescida de efeitos axiais e de torção.

A escada autoportante está sujeita a todos essas solicitações, e pode ser modelada como uma estrutura reticulada conforme a figura 2. O patamar intermediário também é modelado como barra, porém, nela devem ser aplicadas as forças que ele causa agindo como balanço. Definido o modelo, o próximo passo é definir os carregamentos aplicados no mesmo.

Figura 2 – Escada autoportante modelada como estrutura reticulada



(fonte: elaborado pela autora)

3.2 COMPOSIÇÃO DE CARGAS

Segundo a NBR 6118, “Na análise estrutural deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos para a segurança da estrutura em exame, [...]” (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 51). Essas ações estão divididas em três categorias:

- a) permanentes: são aquelas que ocorrem com valores praticamente constantes durante toda a vida da estrutura, ou aquelas que crescem no tempo, tendendo a um valor limite constante;
- b) variáveis: divididas em ações variáveis diretas, que são constituídas pelas cargas acidentais devido ao uso da construção, ação do vento ou da água, e em ações variáveis indiretas, que se originam de variações de temperatura ou ações dinâmicas;
- c) excepcionais: são ações que tem efeitos que não podem ser controlados.

A partir dessas definições é possível avaliar as ações que ocorrem numa escada:

- a) ações permanentes: devido ao peso próprio da estrutura, do revestimento e/ou reboco, do corrimão e/ou guarda corpo, de uma possível parede;
- b) ações variáveis: cargas acidentais especificadas pela NBR 6120.

A NBR 6120 indica que os carregamentos variáveis em escadas são de 300 kgf/m² para escadas com acesso ao público e 250 kgf/m² para escadas sem acesso ao público (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1980, p. 3). É considerada, então, apenas uma ação variável agindo sobre a estrutura.

Para o dimensionamento, as cargas são majoradas através de coeficientes de ponderação, sendo este coeficiente o mesmo para cargas permanentes e variáveis principais (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 59). Então, a composição de cargas pode ser simplificada como a soma das cargas permanentes e cargas variáveis atuantes numa escada, conforme a fórmula 1, resultando num carregamento por área de projeção horizontal da estrutura:

$$p = g + q \quad (\text{fórmula 1})$$

Onde:

p = soma de todas as cargas atuantes na escada (kN/m²);

g = soma das cargas permanentes (kN/m²);

q = soma das cargas variáveis (kN/m²).

O coeficiente de ponderação para esse caso é 1,4, ou seja, todas as cargas atuantes na estrutura devem ser multiplicadas por esse valor para fazer o dimensionamento.

Também, são aplicados coeficientes de ponderação nas resistências características do concreto e do aço, porém, dessa vez minorando os seus valores, como indicas as fórmulas 2 e 3 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 63-64):

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (\text{fórmula 2})$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (\text{fórmula 3})$$

Onde:

f_{cd} = resistência de cálculo à compressão do concreto (MPa);

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto (MPa);

γ_c = coeficiente de minoração da resistência do concreto, com o valor de 1,4;

f_{yd} = resistência de cálculo de escoamento do aço (MPa);

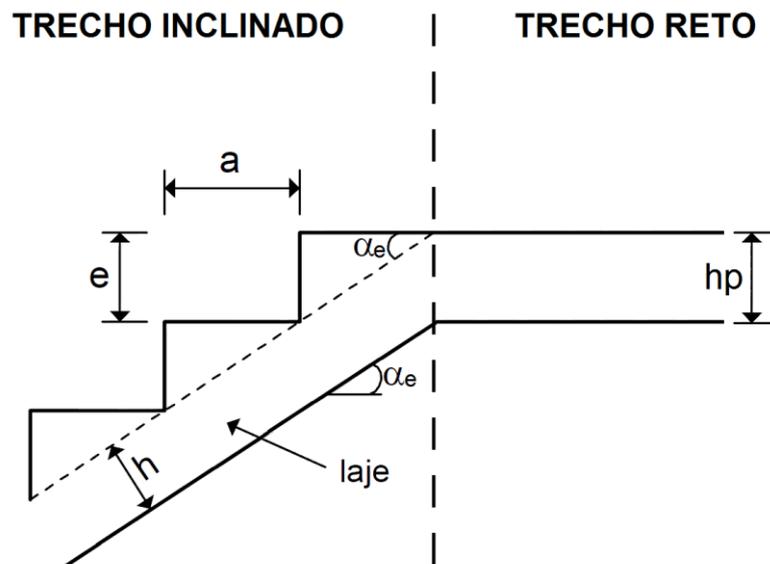
f_{yk} = resistência característica á tração do aço (MPa);

γ_s = coeficiente de minoração da resistência do aço, com o valor de 1,15.

3.2.1 Peso próprio da escada

Para calcular o peso próprio de uma escada, o ideal é dividi-la em dois trechos que possuem características específicas: o trecho inclinado e o trecho reto, como indicado na figura 3. O trecho inclinado é aquele no qual se encontram os degraus e é o chamado lance da escada. Já o trecho reto é patamar da escada no qual os lances chegam.

Figura 3 – Corte longitudinal de um trecho de escada



(fonte: adaptado de ARAÚJO, 2003a)

A partir da figura 4, as fórmulas 4 a 6 fornecem o peso próprio do lance em função da sua projeção horizontal:

$$\cos(\alpha_e) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + e^2}} \quad (\text{fórmula 4})$$

$$g_{patamar} = \gamma_{CA} \cdot h_p \quad (\text{fórmula 5})$$

$$g_{lance.inclinado} = \gamma_{CA} \cdot \frac{h_l}{\cos(\alpha_e)} + \gamma_{CS} \cdot \frac{e}{2} \quad (\text{fórmula 6})$$

Onde:

α_e = ângulo de inclinação do trecho inclinado do lance;

a = largura do piso do degrau (m);

e = altura do espelho do degrau (m);

$g_{patamar}$ = carga permanente devido ao peso próprio do patamar (kN/m²);

$g_{lance.inclinado}$ = carga permanente devido ao peso próprio do lance inclinado (kN/m²);

γ_{CA} = peso específico do concreto armado (kN/m³);

h_p = espessura do patamar (m);

h_l = espessura da laje do lance inclinado (m);

γ_{CS} = peso específico do concreto simples ou do enchimento do degrau (kN/m³).

Para o cálculo do peso próprio da escada, pode-se notar que já deve ter sido estimado previamente o valor das espessuras h e h_p . Então, caso se efetue um dimensionamento com uma espessura de laje que não atenda as condições mínimas de segurança, a escada deve ser recalculada com uma nova espessura e, como num processo iterativo, o peso próprio também tem de ser atualizado.

3.2.2 Peso do revestimento

O peso dos revestimentos depende do peso específico que esses materiais possuem. Para se obter o valor por área de projeção horizontal de escada dessas cargas permanentes, basta multiplicar o seu peso específico pela sua espessura. Após estarem definidos os materiais pelo projeto arquitetônico, pode-se utilizar o quadro 1 para obtenção dos dados relativos a cada material. Caso não haja especificação de qual material é utilizado, pode-se adotar um valor estimado. Araújo (2003a, p. 59) recomenda que este valor seja de 100 kgf/m².

Quadro 1 – Peso específico dos materiais

Materiais		Peso específico aparente (kN/m ³)
1 Rochas	Arenito	26
	Basalto	30
	Gneiss	30
	Granito	28
	Mármore	28
2 Blocos artificiais	Blocos de argamassa	22
	Cimento amianto	20
	Lajotas cerâmicas	18
	Tijolos furados	13
	Tijolos maciços	18
	Tijolos sílico-calcários	20
3 Revestimentos e concretos	Argamassa de cal, cimento e areia	19
	Argamassa de cimento e areia	21
	Argamassa de gesso	12,5
	Concreto simples	24
	Concreto armado	25
4 Madeiras	Pinho, cedro	5
	Louro, imbuia, pau óleo	6,5
	Guajuvirá, guatambu, grápia	8
	Angico, cabriúva, ipê róseo	10
5 Metais	Aço	78,5
	Alumínio e ligas	28
	Bronze	85
	Chumbo	114
	Cobre	89
	Ferro fundido	72,5
	Estanho	74
	Latão	85
	zinco	72
6 Materiais diversos	Alcatrão	12
	Asfalto	13
	Borracha	17
	Papel	15
	Plástico em folhas	21
	Vidro plano	26

(fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1980)

3.2.3 Paredes

Na existência de uma parede no bordo livre de um lance ou patamar da escada, seu peso é geralmente distribuído na laje conforme a fórmula 7 (ARAÚJO, 2003a, p. 59-60):

$$g_{parede} = \frac{\gamma_{alv} H_{parede} t_{parede}}{l_{lance}} \quad (\text{fórmula 7})$$

Onde:

g_{parede} = carga permanente da parede (kN/m²);

γ_{alv} = peso específico da alvenaria (kN/m³);

H_{parede} = altura da parede (m);

t_{parede} = espessura da parede (m);

l_{lance} = largura do lance (m).

Porém, como está sendo utilizado um modelo de barras, o carregamento pode ser aplicado linearmente, e, para isso, basta considerar o l_{lance} igual a 1. Dependendo da localização da parede, podem existir inclusive solicitações de torção nos eixos das lajes, ou seja, nas barras do modelo, e estas também devem ser consideradas nas ações atuantes. O peso específico da alvenaria pode ser determinado conforme o quadro 1.

3.2.4 Carga do patamar em balanço no modelo estrutural

Considerando o modelo de cálculo adotado, o patamar intermediário é discretizado em uma barra que sofre a ação de um momento e carregamentos verticais devido ao balanço que está sujeito. As ações se equivalem às reações de uma marquise em balanço. O cálculo dessa marquise é muito simples tendo o momento no engaste calculado pela fórmula 8 e o esforço vertical pela fórmula 9 (ROCHA, 1969, p. 639):

$$M_p = \frac{pl^2}{2} \quad (\text{fórmula 8})$$

$$Q_p = pl \quad (\text{fórmula 9})$$

Onde:

M_p = momento no engaste do patamar do balanço (kNm/m);

p = soma de todas as cargas atuantes na escada (kN/m²);

l = comprimento do patamar em balanço (m);

Q_p = reação vertical no engaste do patamar em balanço (kN/m).

3.3 SOLICITAÇÕES

Definido o modelo e as cargas atuantes, podem-se encontrar as solicitações que ocorrem na escada. Por ser uma estrutura hiperestática, uma das maneiras de resolvê-la é através da análise matricial para estruturas de barras, que utiliza o método dos deslocamentos para a obtenção dos resultados. A seguir é apresentada uma breve explicação sobre este método e um roteiro para aplicá-lo neste tipo de estrutura.

O objetivo da análise matricial para estruturas de barras é determinar os esforços e deslocamentos que ocorrem nas mesmas. A estrutura é discretizada em elementos ligados por nós, e são para esses nós que se obtém os resultados das solicitações e deformações existentes (MOREIRA, 1997, p. 3).

Um dos principais passos na análise estrutural matricial é a formulação de um modelo matemático discreto equivalente à estrutura real que está sendo analisada. Este modelo é necessário a fim de ter um sistema com um número finito de graus de liberdade, em que as operações de álgebra de matrizes possam ser realizadas (PRZEMIENIECKI, c1968, p. 49, tradução nossa).

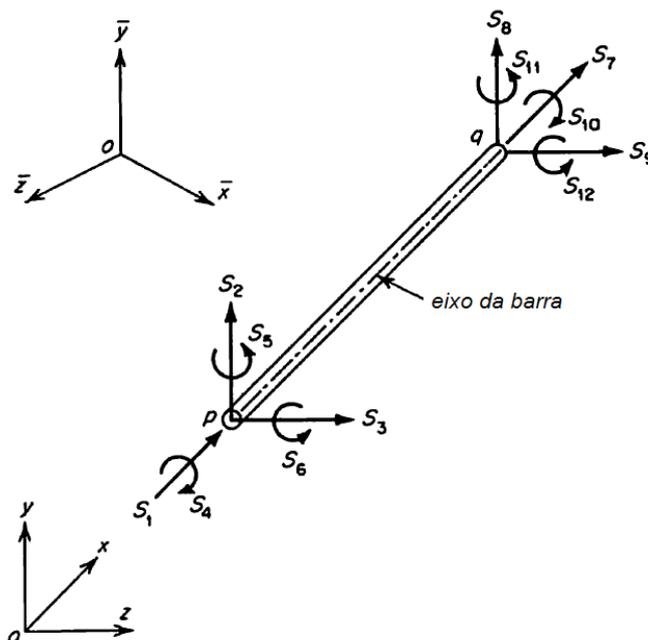
O modelo adotado para a escada autoportante é o de um pórtico espacial. O pórtico espacial é o tipo mais geral de estrutura reticulada, pois não há restrições quanto a posições dos nós, direção dos elementos ou direção das cargas aplicadas (GERE; WEAVER JR., c1981, p. 2).

Um elemento de pórtico espacial pode ser assumido como uma barra reta de seção uniforme capaz de resistir forças axiais, momentos fletores sobre os eixos principais de inércia da seção transversal, e momentos de torção sobre o seu eixo que passa pelo centroide da seção. Essas forças estão ilustradas na figura 4, e podem ser nomeadas como (PRZEMIENIECKI, c1968, p. 70, tradução nossa):

- a) forças axiais S_1 e S_7 ;
- b) forças cortantes S_2, S_3, S_8 e S_9 ;
- c) momentos de flexão S_5, S_6, S_{11}, S_{12} ;
- d) momentos de torção S_4 e S_{10} .

As mais importantes grandezas fundamentais de uma barra isolada são os seus coeficientes de rigidez. Os coeficientes de rigidez de barra são forças e momentos que devem atuar nas extremidades de uma barra isolada, para equilibrá-la quando um deslocamento (ou rotação) unitário é imposto, isoladamente, em uma das suas extremidades (MARTHA, 2010, p. 272).

Figura 4 – Solicitações num elemento de pórtico espacial



(adaptado de PRZEMIENIECKI, c1968, p. 71)

A matriz de rigidez de um pórtico espacial é da ordem de 12x12, e está apresentada na figura 5:

Figura 5 – Matriz de rigidez do elemento de barra de pórtico espacial

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{L^2} \\
 0 & 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EIy}{L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{Glx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{Glx}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{2EIy}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EIz}{L} \\
 \hline
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} \\
 0 & 0 & -\frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{Glx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Glx}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{2EIy}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L}
 \end{bmatrix}$$

(fonte: PRZEMIENIECKI, c1968)

A análise matricial utiliza o método dos deslocamentos para resolver a estrutura, sendo que este relaciona as cargas aplicadas e os deslocamentos nos nós através de uma matriz de rigidez, conforme apresentado na fórmula 10 (GERE; WEAVER JR., c1981, p. 104):

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (\text{fórmula 10})$$

Onde:

F = vetor de forças e momentos em cada nó;

K = matriz de rigidez do elemento;

U = vetor de deslocamentos em cada nó do elemento.

Vanderbilt apresenta um pequeno roteiro da aplicação do método computacionalmente, dividido nas seguintes etapas (VANDERBILT, c1974, p. 223, tradução nossa):

- a) a matriz de rigidez local de cada elemento deve ser rotacionada para o eixo de coordenadas da estrutura utilizando o auxílio de matrizes de rotação, e os membros que compõe essa matriz rotacionada devem ser alocados corretamente na matriz de rigidez da estrutura;
- b) as cargas aplicadas nos nós entram no programa em termos do eixo de coordenadas da estrutura e são atribuídas diretamente ao equivalente vetor de cargas nos nós. Carregamentos nas barras são convertidos e fixados em ações nos extremos das barras, rotacionados para o sistema de coordenadas da estrutura, e alocados no vetor de cargas;
- c) a matriz de rigidez e o vetor de cargas devem ser corrigidos para levar em consideração as condições de contorno dos conhecidos nós restringidos;
- d) os deslocamentos dos nós são encontrados após resolvido o sistema;
- e) sabendo os deslocamentos nos extremos de cada elemento, deve-se rotacionar o vetor de deslocamentos correspondente deste para o eixo de coordenadas locais e é possível determinar as ações que ocorrem nas extremidades de cada elemento.

Sabendo as reações nas extremidades, é possível encontrar as solicitações ao longo de toda a estrutura, e com esses resultados, tem-se os dados necessários para o dimensionamento.

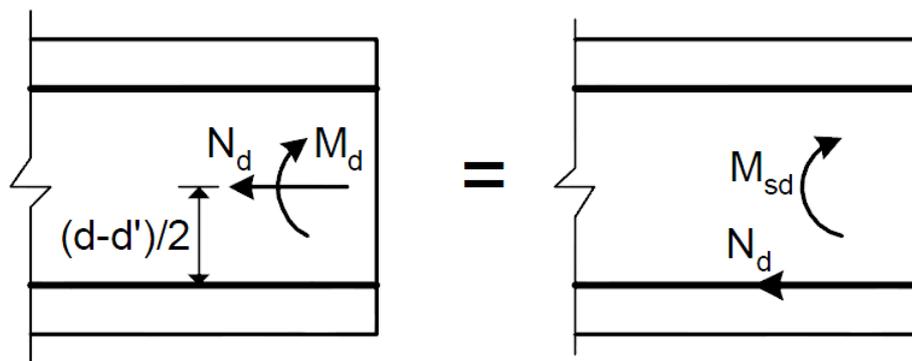
4 DIMENSIONAMENTO DAS SEÇÕES

Uma escada autoportante é mais complexa do que uma escada convencional devido às solicitações que atuam nesse tipo de estrutura. Após encontrados os valores dessas solicitações – a parte mais complexa do dimensionamento –, basta recorrer à NBR 6118 para fazer o dimensionamento das seções.

4.1 DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA À FLEXO-TRAÇÃO

A flexo-tração é uma solicitação composta por um momento fletor e por um esforço axial de tração. Para o dimensionamento da sua armadura, é conveniente deslocar o ponto de aplicação da força normal de tração para o centroide da armadura tracionada, alterando, assim, o valor do momento atuante na seção, conforme a figura 6 e a fórmula 11 (ARAÚJO, 2003a, p. 33-34).

Figura 6 – Transferência do esforço normal para o centroide da armadura tracionada



(fonte: ARAÚJO, 2003a)

A fórmula é:

$$M_{sd} = M_d - N_d \frac{(d - d')}{2} \quad (\text{fórmula 11})$$

Onde:

M_{sd} = Momento fletor solicitante equivalente após deslocamento do ponto de aplicação de N_d (kNcm);

M_d = Momento fletor solicitante de cálculo (kNcm);

N_d = Força normal de tração de cálculo (kN);

d = distância da face superior da seção até o centroide da armadura tracionada (cm);

d' = distância da face superior da seção até o centroide da armadura comprimida (cm).

Com essa configuração, a força N_d deve ser absorvida integralmente pela armadura tracionada e o momento fletor M_{sd} apenas causa uma solicitação de flexão simples na seção. Deve ser calculada uma área de armadura para cada situação, flexão simples e esforço axial, e, a armadura de flexo-tração total é a soma daquelas calculadas para cada esforço em separado (ARAÚJO, 2003a, p. 34).

4.1.1 Dimensionamento da armadura à flexão simples

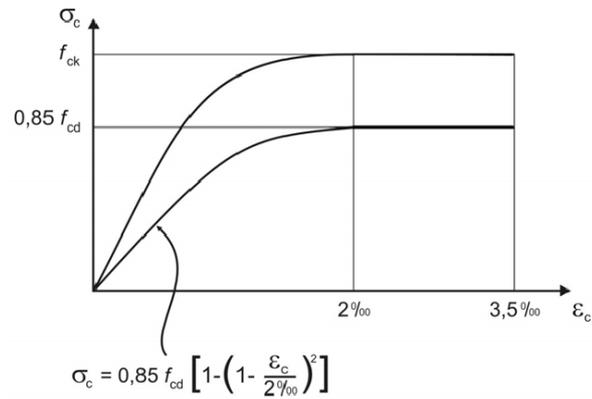
Uma seção transversal de concreto armado, submetida à flexão simples ou composta, é dimensionada a partir de algumas hipóteses básicas de dimensionamento listadas a seguir (ARAÚJO, 2003b, p. 75):

- a) hipótese das seções planas: admite-se que uma seção transversal ao eixo do elemento estrutural permanece plana a esse eixo após a deformação, resultando numa distribuição linear das deformações normais ao longo da seção;
- b) aderência perfeita: admite-se aderência perfeita entre aço e concreto, não considerando nenhum escorregamento da armadura. As armaduras e o concreto estão sujeitos às mesmas deformações;
- c) concreto em tração: a resistência à tração do concreto é desprezada, todos os esforços de tração são absorvidos apenas pelas armaduras.

Outra hipótese básica tomada no início do dimensionamento é a simplificação do diagrama tensão-deformação do concreto. A NBR 6118 admite a possibilidade de simplificar esse diagrama, que é não-linear, em um diagrama parábola retângulo com tensão de pico igual a $0,85f_{cd}$, conforme a figura 7. Mas, para simplificar o trabalho de cálculo a norma considera mais uma simplificação, considerando o diagrama tensão-deformação do concreto como um retângulo de altura $0,8x$ (onde x é a profundidade da linha neutra), ilustrado na figura 8. Já para o aço, de acordo com a NBR 6118, pode-se adotar o seu diagrama tensão-deformação

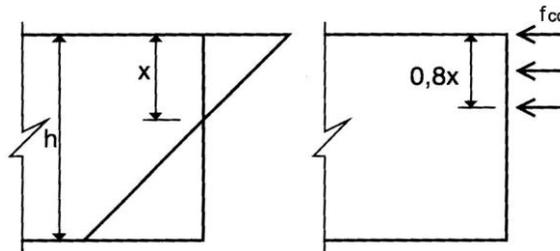
ilustrado na figura 9 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 107-108).

Figura 7 – Diagrama tensão-deformação do concreto



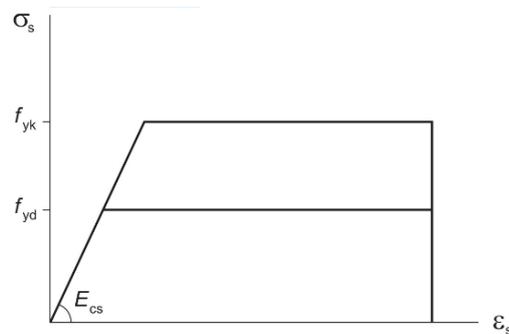
(fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007)

Figura 8 – Distribuições de tensões no concreto considerando diagrama tensão-deformação simplificado



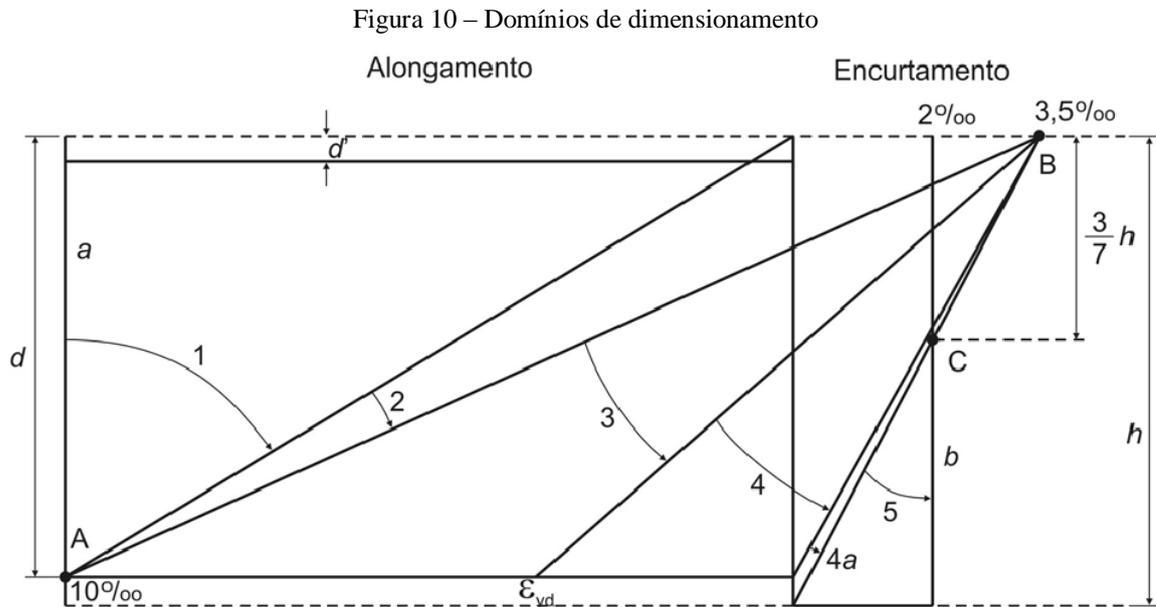
(fonte: adaptado de ARAÚJO, 2003b)

Figura 9 – Diagrama tensão-deformação do aço



(fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007)

O estado limite último pode ocorrer por ruptura do concreto ou por deformação excessiva da armadura (ARAÚJO, 2003b, p. 78). A NBR 6118 caracteriza o estado limite último quando a deformada pertencer a um dos domínios de dimensionamento apresentados na figura 10.



(ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007)

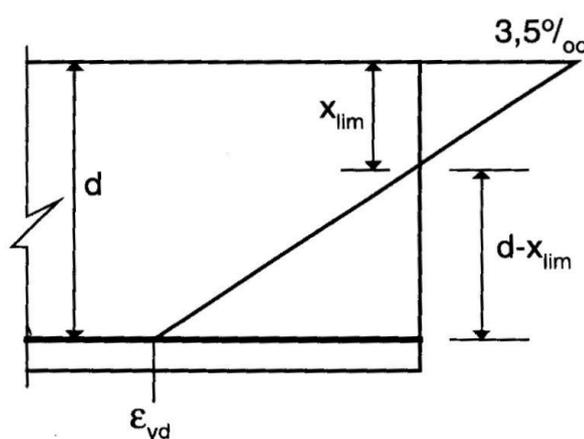
Nesses domínios ocorrem as seguintes solicitações (ARAÚJO, 2003b, p. 79):

- a) reta a: tração uniforme;
- b) domínio 1: tração não uniforme (flexo-tração) sem tensões de compressão;
- c) domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto e com o máximo alongamento permitido;
- d) domínio 3: flexão simples ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço;
- e) domínio 4: flexão simples ou composta com ruptura do à compressão do concreto e o aço tracionado sem escoamento;
- f) domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
- g) domínio 5: compressão não uniforme (flexo-compressão), sem tensões de tração;
- f) reta b: compressão uniforme.

Na flexão simples a ruptura pode ocorrer nos domínios 2, 3 e 4, mas, é aconselhável evitar o dimensionamento no último citado, pois a armadura não chega a escoar e a ruptura ocorre por esmagamento do concreto, sendo frágil, brusca e sem aviso prévio (ARAÚJO, 2003b, p. 79).

Para evitar que a seção esteja superarmada e possa ter uma ruptura frágil (domínio 4), é necessário determinar o momento limite para as seções normalmente armadas. Se o momento solicitante de cálculo for inferior ao limite, a seção está fora dessa situação indesejável. A obtenção do momento limite se dá admitindo-se que a máxima deformação de compressão no concreto é de $3,5\text{‰}$ e que a deformação do aço é igual a ε_{yd} , conforme é indicado na figura 11 (ARAÚJO, 2003b, p. 83-84).

Figura 11 – Diagrama de deformações no limite entre domínios 3 e 4



(fonte: ARAÚJO, 2003b)

A partir do diagrama pode-se determinar a altura da linha neutra limite entre os domínios pela fórmula 12 (ARAÚJO, 2003b, p. 84):

$$x_{lim} = \left(\frac{3,5\text{‰}}{3,5\text{‰} + \varepsilon_{yd}} \right) \quad (\text{fórmula 12})$$

Onde:

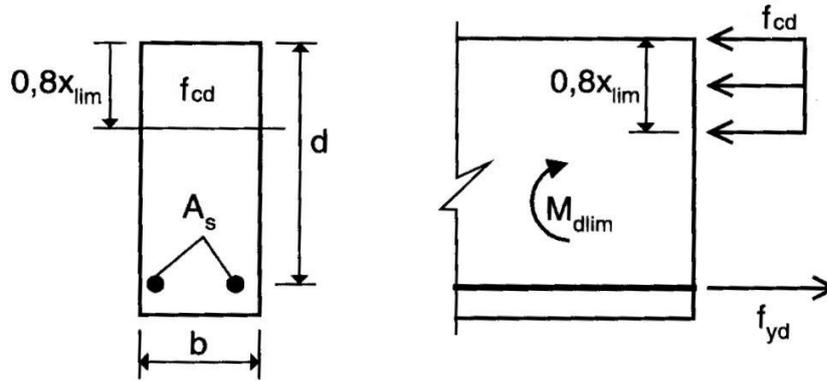
x_{lim} = posição da linha neutra no limite entre os domínios 3 e 4 (cm);

ε_{yd} = deformação específica de cálculo do aço. Para obter esse valor na falta de ensaios ou valores fornecidos por fabricantes, pode-se admitir que o valor do módulo de elasticidade do aço é igual a 210 GPa (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 26);

d = distância da face superior da seção até o centroide da armadura tracionada (cm).

Fazendo o equilíbrio das forças atuantes na seção transversal ilustradas na figura 12, é possível deduzir que o momento limite é fornecido através da fórmula 13.

Figura 12 – Tensões na seção transversal



(fonte: adaptado de ARAÚJO, 2003b)

A fórmula 13 é:

$$M_{dlim} = 0,8bx_{lim}(d - 0,4x_{lim})\sigma_{cd} \quad (\text{fórmula 13})$$

Onde:

M_{dlim} = momento limite entre os domínios 3 e 4 (kNcm);

b = largura da seção transversal, no caso de lajes é considerado 1 metro (cm);

x_{lim} = posição da linha neutra no limite entre os domínios 3 e 4 (cm);

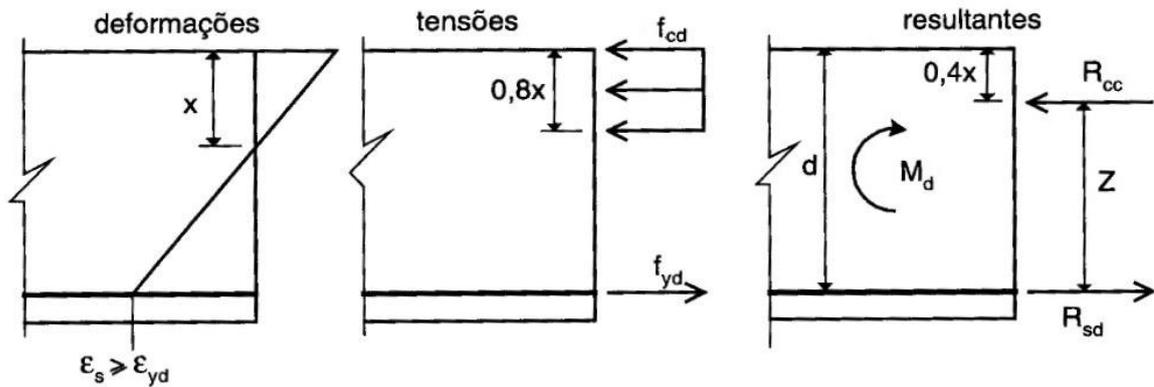
d = distância do centroide da armadura até a borda comprimida da seção transversal (cm);

f_{cd} = tensão no concreto (kN/cm²).

Assim, se $M_{sd} \leq M_{dlim}$, adota-se uma solução de armadura simples. Já se $M_{sd} > M_{dlim}$, a seção está superarmada, e recorre-se a armadura dupla para evitar essa situação (ARAÚJO, 2003b, p. 87).

O dimensionamento de seções retangulares com armaduras simples é efetuado de forma análoga aos procedimentos para encontrar o momento limite, no qual se faz o equilíbrio dos esforços solicitantes e resistentes da seção. Na figura 13, são indicadas as resultantes das tensões na seção transversal.

Figura 13 – Diagrama das resultantes de tensão na seção transversal



(adaptado de ARAÚJO, 2003b)

Essas resultantes, quando analisadas fornecem um sistema de equações composto pelas fórmulas 14 e 15 (CARVALHO; FIGUEIREDO FILHO, 2010, p. 117).

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0,8 \cdot x \cdot (d - 0,4x) = M_d \quad (\text{fórmula 14})$$

$$-0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0,8 \cdot x + A_s \cdot f_{yd} = 0 \quad (\text{fórmula 15})$$

Onde:

M_{sd} = Momento fletor solicitante equivalente, no caso de lajes, por unidade de comprimento (kNcm/m);

b = largura da seção transversal, no caso de lajes é considerado 1 metro (cm);

x = posição da linha neutra em relação à fibra mais comprimida (cm);

d = distância do centroide da armadura até a borda comprimida da seção transversal (cm);

f_{cd} = resistência de cálculo à compressão do concreto (kN/cm²);

A_s = área de aço necessária para flexão pura (cm²/m);

f_{yd} = resistência de cálculo de escoamento do aço (kN/cm²).

Resolvendo o sistema de equações da fórmula anterior, chega-se a expressões que definem a posição da linha neutra e a área de aço necessária, descritas nas fórmulas 16 e 17, respectivamente (CAMPOS FILHO, 2011a, p. 12):

$$x = 1,25 \cdot d \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M_d}{0,425 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2}} \right) \quad (\text{fórmula 16})$$

$$A_s = \frac{0,68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x}{f_{yd}} \quad (\text{fórmula 17})$$

4.1.2 Dimensionamento da armadura a tração pura

A área de armadura tracionada apenas pelo esforço axial, ΔA_s , é calculada a partir da fórmula 18 que é dada por (ARAÚJO, 2003a, p. 34-35):

$$\Delta A_s = \frac{N_d}{f_{yd}} \quad (\text{fórmula 18})$$

Onde:

ΔA_s = área de armadura necessária para tração pura (cm²/m);

N_d = Força normal de tração de cálculo (kN/m);

f_{yd} = resistência de cálculo de escoamento do aço (kN/cm²).

Assim, a armadura necessária na flexo-tração é obtida a partir da fórmula 19:

$$A_{sft} = A_s + \Delta A_s \quad (\text{fórmula 19})$$

Onde:

A_{sft} = área de aço necessária para flexo-tração (cm²/m);

A_s = área de aço necessária para flexão pura (cm²/m);

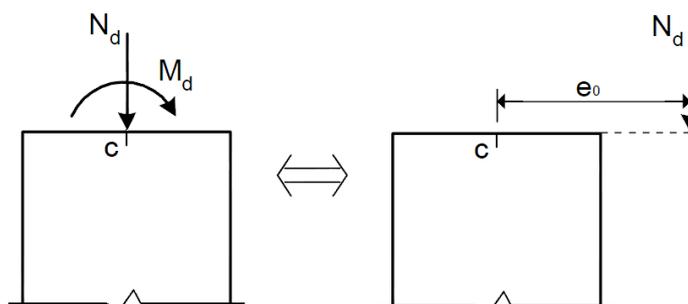
ΔA_s = área de armadura necessária para tração pura (cm²/m).

4.2 DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA À FLEXO-COMPRESSÃO

A flexo-compressão é uma solicitação composta por um esforço axial de compressão juntamente com um momento fletor. Quando a flexão acontece em um plano que passa pelos eixos de simetria da seção transversal, a solicitação é denominada flexo-compressão normal (ARAÚJO, 2003c, p. 15). Todas as considerações e hipóteses básicas utilizadas para o cálculo da flexo-tração, são também válidas na flexo-compressão normal (CAMPOS FILHO, 2011b, p. 2-4).

Para equacionar e resolver esse tipo de solicitação, é mais conveniente trabalhar em função da excentricidade, e_0 , do que com o momento associado a ela, M_d , conforme apresentado na figura 14. As duas situações de solicitação são estaticamente equivalentes (CAMPOS FILHO, 2011b, p. 7).

Figura 14 – Situações na flexo-compressão estaticamente equivalentes



(fonte: elaborado pela autora)

A excentricidade e_0 é determinada a partir da fórmula 20 (CAMPOS FILHO, 2011b, p. 7):

$$e_0 = \frac{M_d}{N_d} \quad (\text{fórmula 20})$$

Onde:

e_0 = excentricidade equivalente devido ao momento M_d (cm);

M_d = Momento fletor solicitante de cálculo (kNcm);

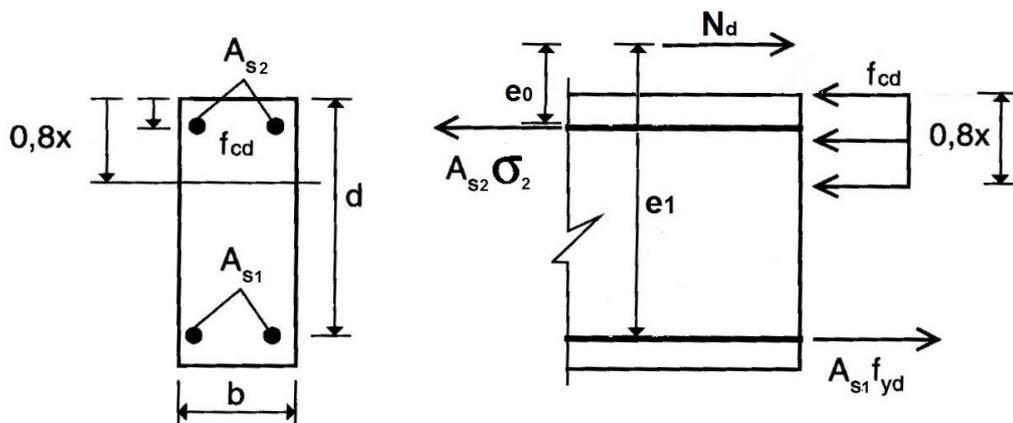
N_d = Força normal de tração de cálculo (kN/cm).

Como, para o lance da escada autoportante, a solicitação de flexão é consideravelmente maior do que o esforço axial de compressão, a flexo-compressão é de grande excentricidade. Nesse caso, a situação de dimensionamento deve cair nos domínios 2 ou 3 para ser econômica, podendo haver solução de armadura simples ou armadura dupla caso x seja maior que x_{lim} (conforme fórmulas 12 e 13) (CAMPOS FILHO, 2011a, p. 9). Em seguida, são apresentados os processos de cálculo da armadura para essas duas situações.

4.2.1 Armadura simples na flexo-compressão

Para armadura simples, a partir do diagrama de esforços solicitantes e resistentes da seção solicitada ilustrado na figura 15, pode-se equacionar um sistema conforme as fórmulas 21 a 23 (CAMPOS FILHO, 2011b, p. 9).

Figura 15 – Diagrama de tensões na flexo-compressão com armadura simples



(fonte: adaptado de ARAÚJO, 2003b)

Resolvendo o sistema, encontra-se a área de aço necessária:

$$N_d = 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x - A_{s1} \cdot f_{yd} \quad (\text{fórmula 21})$$

$$N_d \cdot e_1 = 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x \cdot (d - 0,4 \cdot x) \quad (\text{fórmula 22})$$

$$e_1 = \frac{d - d'}{2} + e_o \quad (\text{fórmula 23})$$

Onde:

N_d = Força normal de tração de cálculo (kN/m);

f_{cd} = resistência de cálculo à compressão do concreto (kN/cm²);

b = largura da seção transversal, no caso de lajes é considerado 1 metro (cm);

x = posição da linha neutra em relação à fibra mais comprimida (cm);

A_{s1} = área de aço tracionado necessária para flexo-compressão (cm²/m);

f_{yd} = resistência de cálculo de escoamento do aço (kN/cm²).

e_1 = distância entre o ponto de aplicação da força normal e o centroide da armadura (cm);

d = distância do centroide da armadura até a borda comprimida da seção transversal (cm);

d' = distância da face superior da seção até o centroide da armadura comprimida, no caso de armadura simples $d'=0$ (cm);

e_o = excentricidade equivalente devido ao momento M_d (cm).

4.2.2 Armadura dupla na flexo-compressão

Para o caso de armadura dupla $x=x_{lim}$, tendo o sistema de equações que gera essa configuração expresso nas fórmulas 24 e 25 e ilustrado na figura 16 (CAMPOS FILHO, 2011b, p. 9):

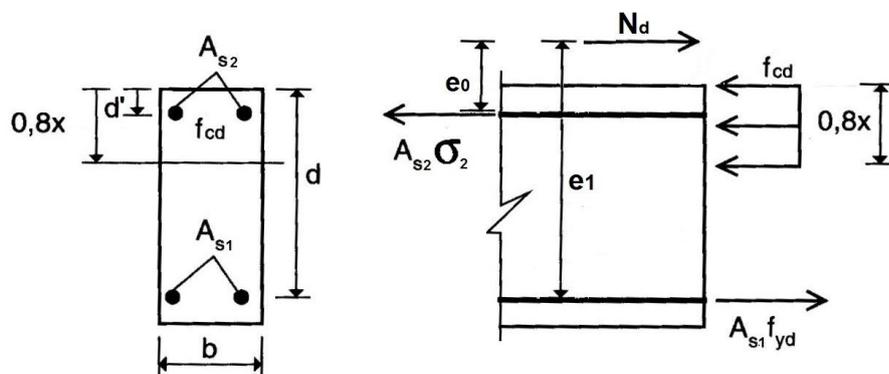
$$N_d = 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x_{lim} + A_{s2} \cdot \sigma_2 - A_{s1} \cdot f_{yd} \quad (\text{fórmula 24})$$

$$N_d \cdot e_1 = 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x_{lim} \cdot (d - 0,4 \cdot x_{lim}) + A_{s2} \sigma_2 \cdot (d - d') \quad (\text{fórmula 25})$$

Onde:

A_{S2} = área de aço comprimido necessária para flexo-compressão (cm^2/m).

Figura 16 – Diagrama de tensões na flexo-compressão com armadura dupla



(fonte: adaptado de ARAÚJO, 2003b)

As únicas incógnitas são a área de aço tracionada e comprimida que são facilmente obtidas com a resolução do sistema. Porém, antes de resolvê-lo, deve-se determinar o valor de σ_2 a partir da relação tensão-deformação do aço (ver figura 9), sendo a deformação dada pela fórmula 26 (CAMPOS FILHO, 2011b, p. 9):

$$\varepsilon_2 = 3,5\% \frac{x_{lim} - d'}{x_{lim}} \quad (\text{fórmula 26})$$

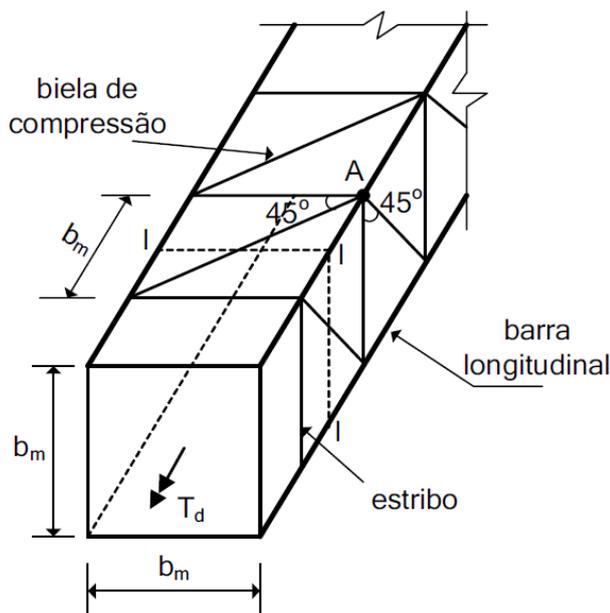
Onde:

ε_2 = deformação do aço da armadura de compressão.

4.3 DIMENSIONAMENTO À TORÇÃO

O dimensionamento à torção é feito através de um modelo, ilustrado na figura 17, que faz analogia à uma treliça espacial formada pelas barras longitudinais e estribos verticais (ARAÚJO, 2003a, p. 6).

Figura 17 – Analogia à treliça para dimensionamento de torção



(fonte: ARAÚJO, 2003a)

Segundo Araújo (2003a, p. 4), “[...] a resistência à torção de uma seção cheia é equivalente à resistência de uma seção vazada com as mesmas armaduras.”, dessa forma o dimensionamento para uma seção cheia é feito por uma seção vazada equivalente. Ele indica que a espessura da parede equivalente da seção vazada é dada pela fórmula 27:

$$h_e = \frac{bh}{2(b+h)} \geq 2C_1 \quad (\text{fórmula 27})$$

Onde:

h_e = espessura equivalente da seção vazada (cm);

b = largura da seção transversal (cm);

h = altura da seção transversal (cm);

C_1 = distância entre o eixo da armadura longitudinal do canto e a face lateral da peça (cm).

Quando a viga tem pequenas dimensões, a definição dessa largura fictícia da seção vazada pode estar fora do intervalo permitido pela norma. A nova versão da NBR 6118 (que está em consulta pública) está acrescentando o seguinte parágrafo no item 17.5.1.4.1: "Caso A/u

resulte menor que $2C1$, pode-se adotar $h_e = A/u \leq b_w - 2c1$ e a superfície média da seção celular equivalente A_e definida pelos eixos das armaduras do canto (respeitando o cobrimento exigido nos estribos)". Então, para este trabalho, esta consideração já foi aplicada quando necessária (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2013, p. 152).

A resistência da seção é admitida como satisfeita quando atender simultaneamente as condições apresentadas nas fórmulas 28 a 30 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 124-125):

$$T_{Sd} \leq T_{Rd,2} \quad (\text{fórmula 28})$$

$$T_{Sd} \leq T_{Rd,3} \quad (\text{fórmula 29})$$

$$T_{Sd} \leq T_{Rd,4} \quad (\text{fórmula 30})$$

Onde:

T_{Sd} = Momento torçor de cálculo (kNm/m)

$T_{Rd,2}$ = resistência das diagonais comprimidas de concreto;

$T_{Rd,3}$ = parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural;

$T_{Rd,4}$ = parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo do elemento estrutural.

O cálculo da resistência decorrente das diagonais comprimidas do concreto é demonstrado pela fórmula 31 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 126):

$$T_{Rd,2} = 0,5 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot A_e \cdot h_e \cdot \text{sen}2\theta \quad (\text{fórmula 31})$$

Sendo:

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (\text{fórmula 32})$$

Onde:

$T_{Rd,2}$ = resistência das diagonais comprimidas de concreto (kNm);

A_e = área limitada pela linha média da parede da seção vazada, real ou equivalente, incluindo a parte vazada (cm²);

h_e = espessura equivalente da seção vazada (cm);

θ = ângulo de inclinação das diagonais de concreto, arbitrado no intervalo 30° a 45°;

f_{ck} = resistência característica à compressão do concreto (MPa).

A resistência decorrente dos estribos normais ao eixo do elemento e a decorrente da armadura longitudinal atendem às fórmulas 32 e 33, respectivamente (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 126):

$$T_{Rd,3} = \left(\frac{A_{90}}{s}\right) f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \cot \theta \quad (\text{fórmula 32})$$

$$T_{Rd,4} = \left(\frac{A_{sl}}{ue}\right) f_{ywd} \cdot 2 \cdot A_e \cdot \tan \theta \quad (\text{fórmula 33})$$

Onde:

$T_{Rd,3}$ = parcela resistida pelos estribos normais ao eixo do elemento estrutural;

$\left(\frac{A_{90}}{s}\right)$ = área de armadura de estribos necessária (cm²/m);

f_{ywd} = valor de cálculo da resistência ao escoamento do aço da armadura passiva, limitada a 435 MPa;

A_e = área limitada pela linha média da parede da seção vazada, real ou equivalente, incluindo a parte vazada (cm²);

θ = ângulo de inclinação das diagonais de concreto, arbitrado no intervalo 30° a 45°;

$T_{Rd,4}$ = parcela resistida pelas barras longitudinais, paralelas ao eixo do elemento estrutural;

A_{sl} = área de armadura longitudinal necessária (cm²);

ue = perímetro da linha média da parede da seção vazada (cm).

4.4 ARMADURA MÍNIMA

Segundo a NBR 6118, a armadura mínima de tração em elementos estruturais armados deve ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo, $M_{d,mín}$, dado pelo valor que corresponderia da ruptura da seção de concreto simples, e que é apresentado na fórmula 34 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 116-117):

$$M_{d,mín} = 0,8W_0f_{ctk,sup} \quad (\text{fórmula 34})$$

Onde:

W_0 = módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada;

$f_{ctk,sup}$ = resistência característica superior do concreto à tração.

Essa condição é atendida se forem respeitadas as taxas mínimas de armadura do quadro 2.

Quadro 2 – Taxas mínimas de armadura à flexão para uma seção retangular

f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
ρ_{min} ($A_{s,min}/A_c$)	0,15	0,15	0,173	0,201	0,23	0,259	0,288
ω_{min} ($A_s f_{yd}/A_c f_{cd}$)	0,035						

(fonte: adaptado de ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007)

Os valores estabelecidos no quadro 2 pressupõem o uso de aço CA-50 e os coeficientes de ponderação γ_c e γ_s com valores de 1,4 e 1,15 respectivamente. Caso estes valores sejam diferentes, ou mude a classe do concreto ou aço, as fórmulas 35 e 36 apresentam as relações necessárias para determinar a área de aço mínima (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 117):

$$\rho_{min} \geq \begin{cases} 0,035f_{cd} \\ f_{yd} \\ 0,15\% \end{cases} \quad (\text{fórmula 35})$$

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot b \cdot h \quad (\text{fórmula 36})$$

Onde:

ρ_{min} = taxa geométrica mínima de armadura de tração (%);

$A_{s,min}$ = área mínima da armadura principal de flexão (cm²/m).

4.5 ARMADURA DE DISTRIBUIÇÃO

A NBR 6118 indica que para controlar a fissuração, deve ser prevista uma armadura adicional uniformemente distribuída em malha nas duas direções da laje, calculada para no máximo 20% dos esforços totais (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 170). Ou seja, é necessária uma armadura transversal, de distribuição, cujos critérios de dimensionamento estão apresentados no quadro 3.

Quadro 3 – Valores mínimos para armaduras de distribuição de lajes armadas em uma direção

Armadura positiva (secundária) de lajes armadas em uma direção	$A_s/s \geq 20\%$ da armadura principal $A_s/s \geq 0,9 \text{ cm}^2/\text{m}$ $\rho_s \geq 0,5 \rho_{min}$
--	---

(fonte: adaptado de ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS 2007)

4.6 ARMADURA PARA FORÇA CORTANTE

A NBR 6118 indica que a armadura para esforço cortante pode ser dispensada quando a força cortante solicitante de cálculo, V_{sd} , for menor do que a força cortante resistente do concreto,

V_{rd1} . Conforme essa mesma Norma, a força cortante resistente pode ser obtida segundo as fórmulas 37 à 42 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 143):

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd} k(1,2 + 40\rho_1)] b_w d \quad (\text{fórmula 37})$$

$$\tau_{Rd} = 0,25 f_{ctd} \quad (\text{fórmula 38})$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk,inf}}{\gamma_c} \quad (\text{fórmula 39})$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ctm} \quad (\text{fórmula 40})$$

$$f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{\frac{2}{3}} \quad (\text{fórmula 41})$$

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{b_w d} \leq 0,2 \quad (\text{fórmula 42})$$

Onde:

V_{Rd1} = força cortante resistente de cálculo (kN/m);

τ_{rd} = tensão de cisalhamento resistente de cálculo (MPa);

$k = 1$ para lajes aonde 50% da armadura inferior não chega até o apoio e $k=(1,6-d)>1$ para os demais casos sendo que d é altura útil da seção em metros;

ρ_1 = taxa de armadura longitudinal de tração que se estende até não menos que $d+l_{b,nec}$ além da seção considerada;

b_w = largura da seção, considera-se 1 metro;

f_{ctd} = resistência á tração de cálculo do concreto (MPa);

$f_{ctk,inf}$ = resistência característica inferior à tração do concreto (MPa);

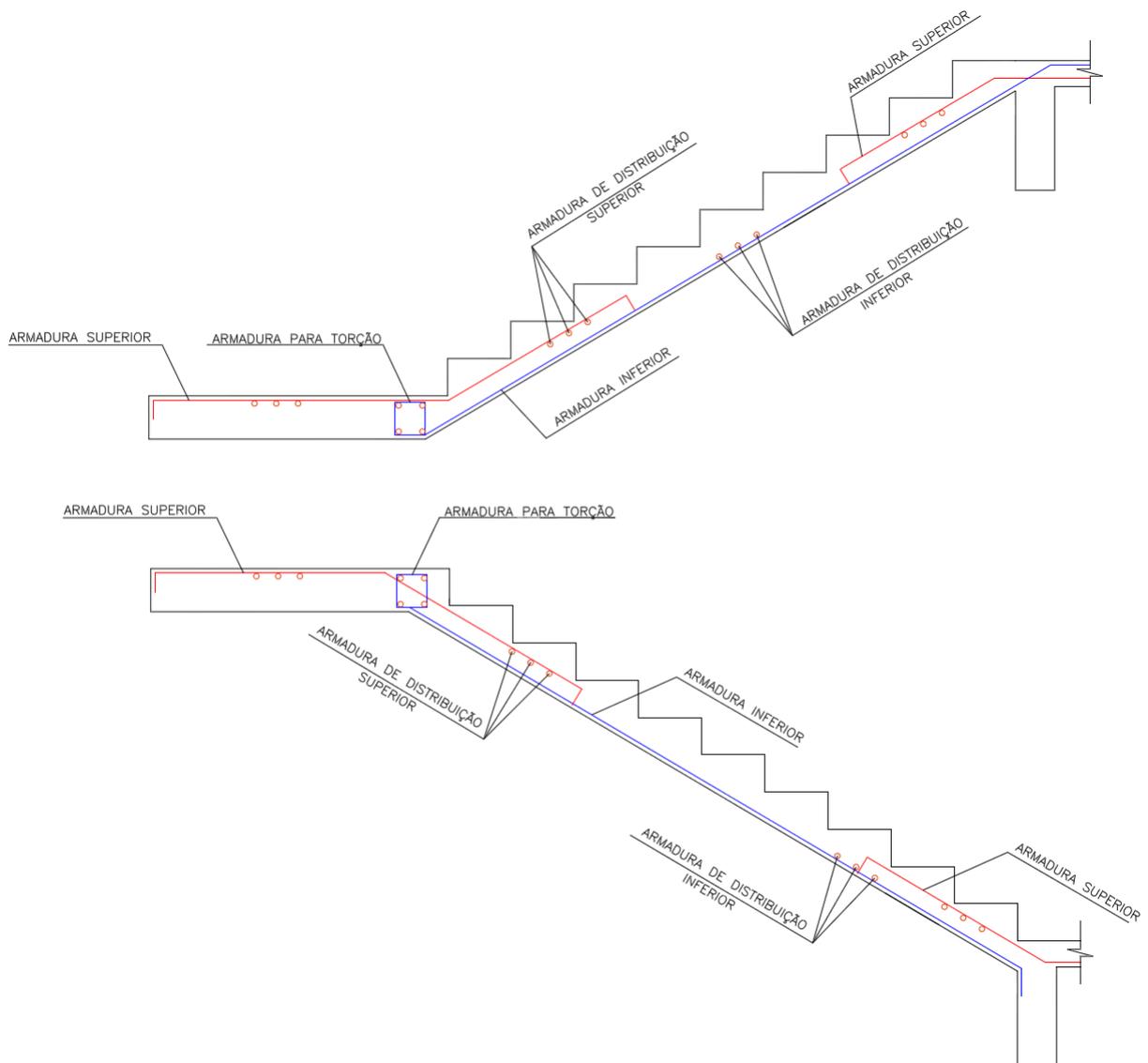
f_{ctm} = resistência média à tração do concreto (MPa).

Assim se $V_{Sd} \leq V_{Rd1}$, a seção pode dispensar o uso de estribos.

5 DETALHAMENTO DE ESCADAS

Com o dimensionamento das armaduras feito, é importante que o engenheiro detalhe a disposição destas no elemento estrutural. Guerrin (1990, p. 355) apresenta um exemplo adequado para o detalhamento de escadas autoportantes conforme a figura 18.

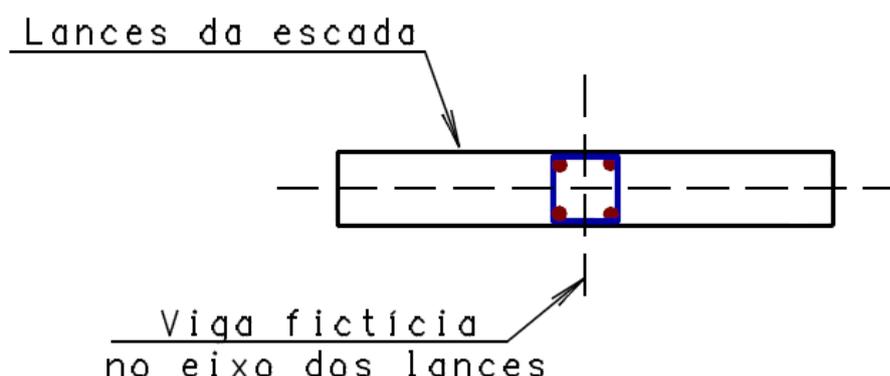
Figura 18 – Detalhamento de escadas autoportantes



(fonte: elaborado pela autora)

Esse detalhamento não está considerando a rigidez à torção dos lances inferior e superior. Porém, se estes forem considerados, deve haver uma armadura que resista às solicitações de torção que possam existir. É considerada uma viga fictícia no eixo dos lances, e a armadura necessária está detalhada na figura 19.

Figura 19 – Viga fictícia dentro das lajes



(fonte: elaborado pela autora)

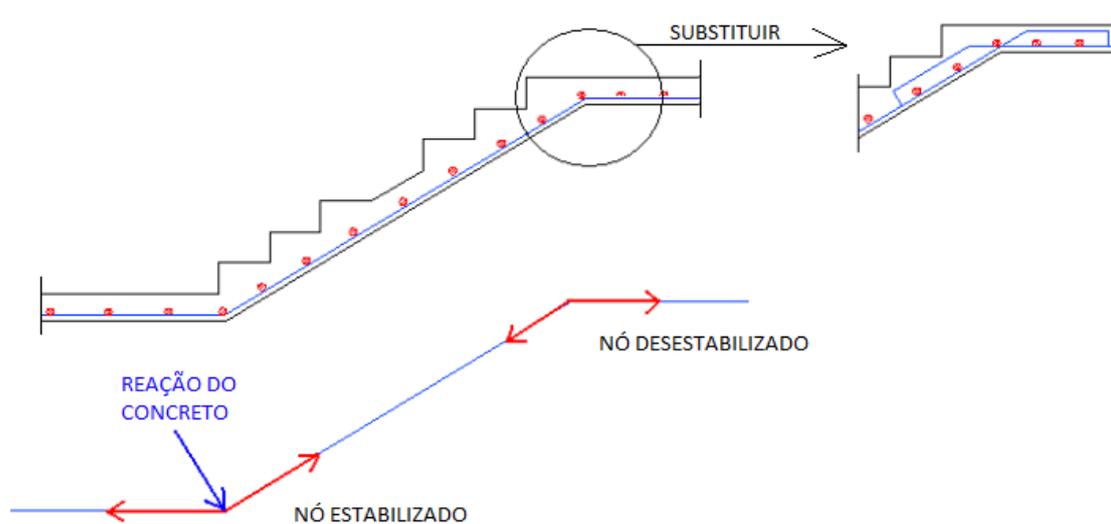
O programa somente apresenta as áreas de aço calculadas e a posição das barras dentro da estrutura de concreto, não tendo como objetivo detalhar o diâmetro e comprimento das mesmas, nem quantidades de materiais utilizados. Porém, seguem algumas informações importantes a respeito do detalhamento da estrutura.

É importante que a disposição das armaduras no lance da escada permita o comportamento adequado e esperado conforme modelado na hora do cálculo. Para o modelo utilizado, foi considerado que a escada está engastada nos pavimentos em que ela chega. Então, é preciso prever armadura nesses encontros que faça a escada se comportar dessa maneira.

Outro cuidado especial que se deve ter na hora do detalhamento desses encontros, é com as barras que fazem a ligação entre o lance da escada e o patamar superior. A resultante de forças, no ponto de mudança de seções, tende a desequilibrar o nó ao tentar tornar retilíneo o caminho do esforço, empurrando a barra na direção do cobrimento. A NBR 6118 recomenda a substituição de uma barra por duas que se cruzam, e, que se prolongam além do cruzamento até serem ancoradas (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 131). Já no encontro entre o lance da escada e o patamar inferior, o nó tende a ser deslocado

para dentro da laje, e, nesse caso, o concreto consegue absorver essa reação. A figura 20 ilustra essa substituição.

Figura 20 – Detalhe de ligação entre lance e patamar superior



(fonte: adaptado de GUERRIN, 1990)

É exigência da NBR 6118 que todas as barras sejam ancoradas de forma que todos os esforços a que elas estão submetidas sejam transmitidos ao concreto. Essa ancoragem pode se dar através de dispositivos mecânicos ou por meio de aderência entre o concreto e o aço (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 33).

Utilizando a ancoragem por aderência, as barras comprimidas devem ser ancoradas com ganchos e as tracionadas podem ser ancoradas ao longo de um comprimento retilíneo ou com grande raio de curvatura em sua extremidade, e podem ter gancho ou não dependendo das características citadas a seguir (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 33):

- a) obrigatoriamente com gancho para barras lisas;
- b) sem gancho nas que tenham alternância de solicitação, de tração e compressão;
- c) com ou sem gancho nos demais casos, não sendo recomendado o gancho para barras de diâmetro maior que 32 mm ou para feixes de barras.

Chama-se de comprimento básico de ancoragem aquele necessário para que uma barra passiva ancore a força limite $A_s f_{yd}$, admitindo ao longo da área lateral da barra uma resistência de aderência uniforme e igual a f_{bd} (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 35). Essa aderência pode ser calculada pela fórmula 43 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 32):

$$f_{bd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot f_{ctd} \quad (\text{fórmula 43})$$

Onde:

f_{ctd} = conforme fórmula tal.

$\eta_1 = 1$ para barras lisas, 1,4 para barras entalhadas ou 2,25 para barras nervuradas;

$\eta_2 = 1$ para situações de boa aderência ou 0,7 para situações de má aderência;

$\eta_3 = 1$ para $\phi < 32\text{mm}$ ou $(132-\phi)/100$ para $\phi \geq 32\text{mm}$;

ϕ = diâmetro da barra em mm.

Então, o comprimento básico de aderência e o comprimento necessário de aderência são dados pelas fórmulas 44 e 45 respectivamente (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 35):

$$l_b = \frac{\phi f_{yd}}{4 f_{bd}} \quad (\text{fórmula 44})$$

$$l_{b,nec} = \alpha \cdot l_b \cdot \frac{A_{s,calc}}{A_{s,efet}} \geq l_{b,min} \quad (\text{fórmula 45})$$

Onde:

l_b = comprimento básico de ancoragem (cm);

$l_{b,nec}$ = comprimento necessário de ancoragem (cm);

$\alpha = 1$ para barras sem gancho ou $\alpha = 0,7$ para barras tracionadas com gancho com cobrimento no plano normal ao do gancho $\geq 3\phi$, ou ainda, $\alpha = 0,5$ quando houver barras transversais soldadas e gancho, com cobrimento no plano normal ao do gancho $\geq 3\phi$;

$A_{s,calc}$ = área de aço calculada que precisa ser ancorada (cm²/m);

$A_{s,efet}$ = área de aço efetiva utilizada na ancoragem (cm²/m);

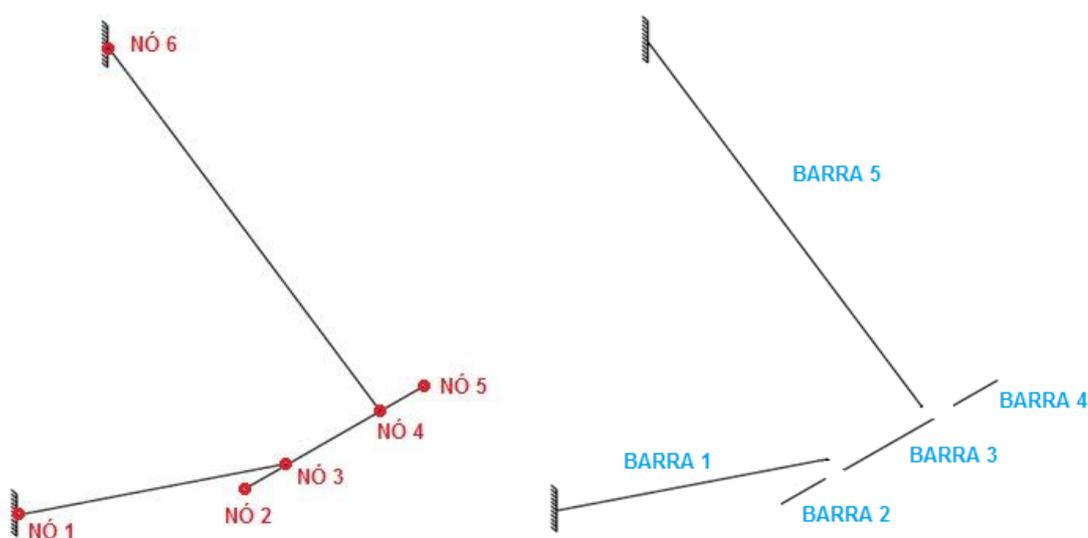
$l_{b,min}$ = maior valor entre $0,3l_b$, 10ϕ e 10 cm.

A partir dessas informações, é possível fazer o detalhamento da escada, e com este concluído, pode-se estimar o consumo de aço, concreto e formas que são utilizados para a sua confecção, tendo, assim, um guia para a execução da mesma.

6 PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO

O pórtico escolhido para representar uma escada autoportante possui 5 barras com 6 nós que as ligam entre si, conforme apresentado na figura 21. As barras 1 e 5, que representam os lances da escada, foram definidas passando pelos eixos das lajes, e as barras 3, 4 e 5 que representam o patamar intermediário da escada, foram definidas no encontro entre os lances e essas lajes. Esse modelo foi escolhido como o mais adequado para a representação da estrutura, inspirado numa simplificação utilizada por Guerrin (1990), que discretiza a estrutura entre lances e patamar intermediário, sendo os lances barras engastadas/apoiadas e, o patamar em balanço, uma barra engastada/livre. A consideração de um modelo de pórtico espacial dá uma maior representatividade para o que ocorre na prática, apesar de os cálculos serem um pouco mais complexos do que a simplificação de Guerrin. A seguir são apresentados os passos para resolver um pórtico espacial por análise matricial, aplicando o modelo da escada como o exemplo suporte e de interesse principal.

Figura 21 – Representação dos nós e barras do modelo



(fonte: elaborado pela autora)

Como já mencionado, a análise matricial de estruturas reticuladas relaciona as grandezas vetor de forças e o vetor de deslocamentos de cada nó por uma matriz de rigidez que representa o comportamento da estrutura. O primeiro passo para resolver a estrutura é montar a sua matriz de rigidez. Para isso, é preciso conhecer as matrizes de rigidez locais de cada elemento que a compõe.

A matriz de um elemento de pórtico espacial já foi apresentada na figura 5. Essa é a configuração da matriz de rigidez local de cada barra, e seus coeficientes dependem das suas propriedades geométricas, podendo haver 5 diferentes matrizes de rigidez que representam as 5 barras da estrutura. Porém, o cálculo final deve ser feito em relação às coordenadas globais da estrutura. Então, é necessário rotacionar as matrizes em função da posição em que a barra está inclinada no espaço global, que tem seus eixos de referência pré-definidos. Para isso é utilizada uma matriz de rotação para elementos tridimensionais, utilizando a seguinte fórmula (VANDERBILT, c1974, p. 233):

$$[K_{global}] = [R^T][K_{local}][R] \quad (\text{fórmula 46})$$

Onde:

K_{global} = matriz de rigidez global do elemento;

R^T = matriz de rotação transposta;

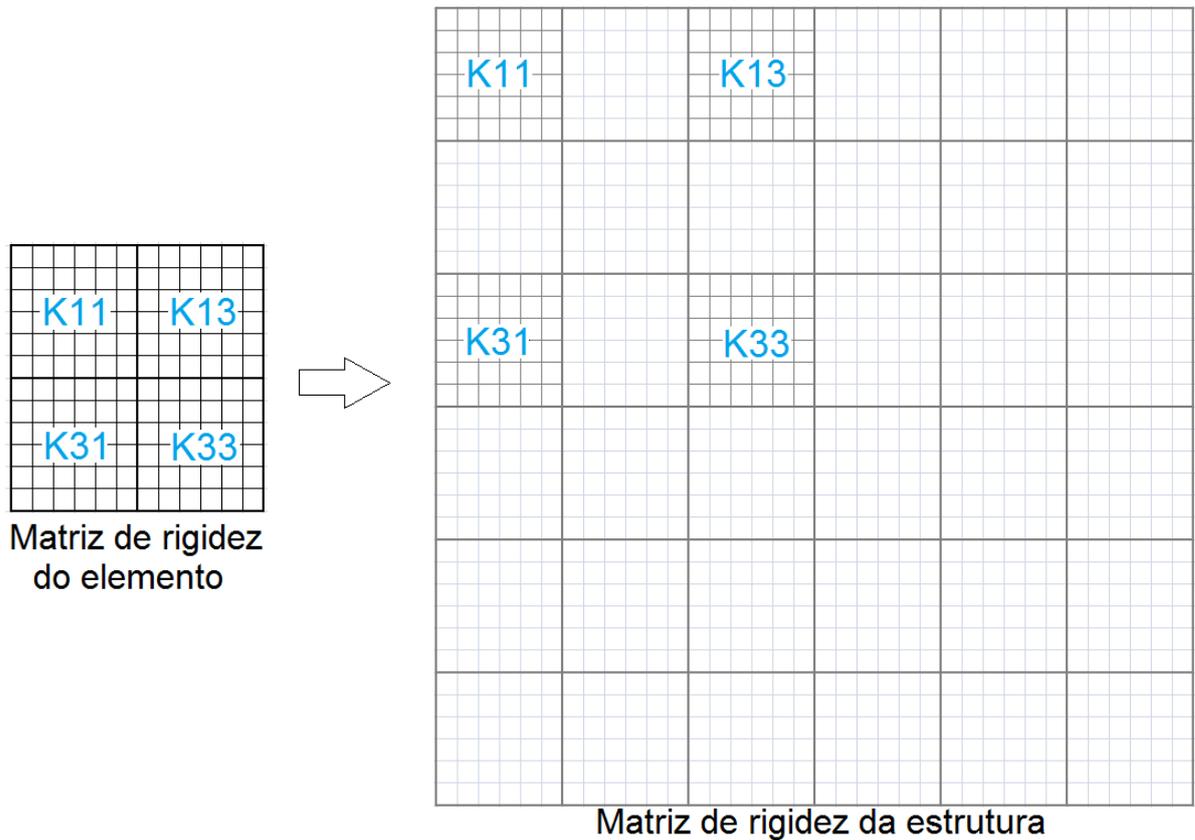
K_{local} = matriz de rigidez local do elemento;

R = matriz de rotação do elemento.

A matriz de rigidez da estrutura é a soma adequada das matrizes de rigidez dos elementos. A ordem de tamanho desta depende do número de nós e de graus de liberdade que cada um possui. No caso de um pórtico espacial, são seis graus de liberdade por nó e a estrutura em questão possui seis nós, então a matriz é de tamanho 36x36. A posição que cada coeficiente da matriz de rigidez dos elementos tem na matriz da estrutura depende dos nós que ligam cada barra. Os coeficientes da matriz podem ser divididos em quadrantes, que representam a rigidez para cada grau de liberdade quando as forças foram aplicadas no próprio nó ou no outro. Por exemplo, a barra 1 está conectada pelos nós 1 e 3, então os quadrantes da matriz do elemento devem ser posicionados na matriz de rigidez conforme a figura 22, na qual cada

coluna e cada linha destacada na matriz de rigidez da estrutura representam a numeração dos nós de 1 a 6.

Figura 22 – Montagem da matriz de rigidez da estrutura



(fonte: elaborado pela autora)

Esse procedimento deve se repetir para todas as barras até se formar uma matriz do tipo apresentado na figura 23, onde os subíndices representam a numeração das barras:

Figura 23 – Formato da matriz de rigidez da estrutura

K_{11_1}		K_{13_1}			
	K_{22_2}	K_{23_2}			
K_{31_1}	K_{32_2}	K_{33_1} K_{33_2} K_{33_3}	K_{34_3}		
		K_{43_3}	K_{44_3} K_{44_4}	K_{45_4}	
			K_{54_4}	K_{55_4} K_{55_5}	K_{56_5}
				K_{65_5}	K_{66_5}

(fonte: elaborado pela autora)

Após montada a matriz de rigidez, estão prontas as definições da estrutura e é a vez dos carregamentos serem adaptados ao método de análise matricial. Os carregamentos são aplicados como um vetor de forças, e este é composto por duas parcelas, a dos carregamentos concentrados nos nós e a dos carregamentos distribuídos ao longo das barras. Na escada apenas existem carregamentos do segundo tipo, e para representá-los no vetor de forças, deve-se obter as reações que eles produziram nos apoios das barras como se estes fossem engastes, chamadas de reações de engastamento perfeito. Na figura 24, está apresentado o vetor de forças locais de um elemento de pórtico espacial, no qual os coeficientes do vetor são as reações de engastamento perfeito de um carregamento vertical e de um momento torçor distribuídos ao longo da barra, que na hora de serem aplicados ao sistema de equações, devem aparecer com o sinal contrário. Porém, o vetor de forças também deve estar referenciado em coordenadas globais, então é necessário rotacionar o vetor de cada barra antes de montar o vetor de forças globais aplicados na estrutura através da fórmula 47 (VANDERBILT, c1974, p. 235):

Figura 24 – Vetor de forças locais de um elemento de barra de pórtico espacial

$$\begin{bmatrix} 0 \\ ql/2 \\ 0 \\ -tl/2 \\ 0 \\ ql^2/12 \\ 0 \\ ql/2 \\ 0 \\ -tl/2 \\ 0 \\ -ql^2/12 \end{bmatrix}$$

(fonte: elaborado pela autora)

$$\{F_{global}\} = [R^T]\{F_{local}\} \quad (\text{fórmula 47})$$

Onde:

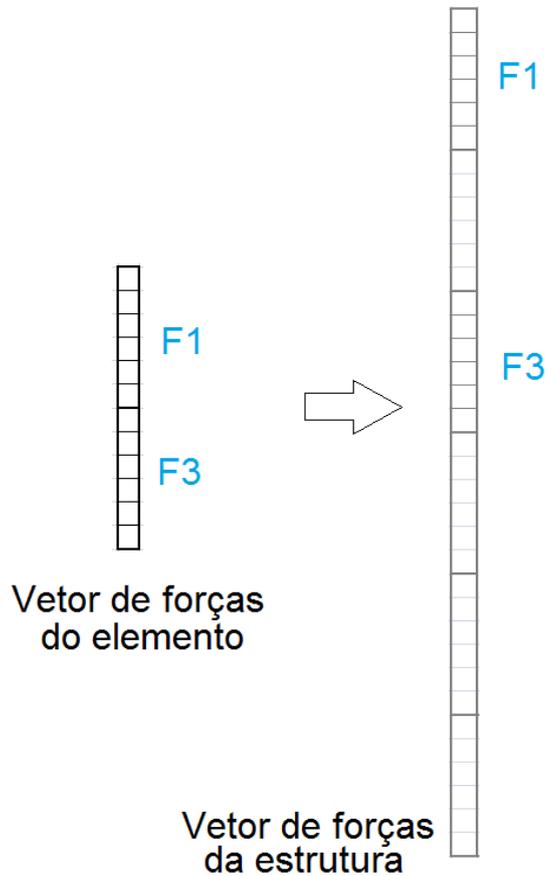
F_{global} = vetor de forças global do elemento;

F_{local} = vetor de forças local do elemento;

R^T = matriz de rotação transposta do elemento;

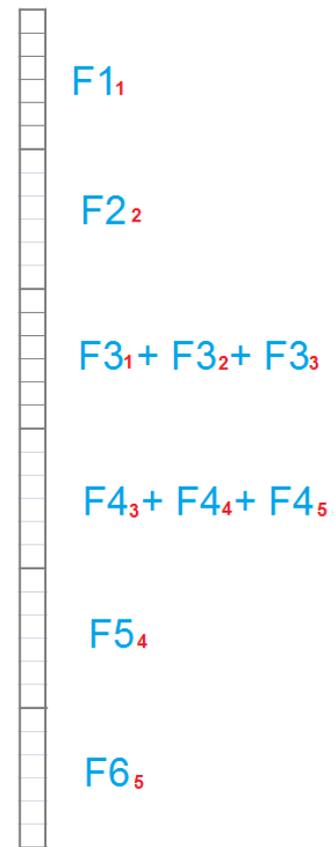
O vetor de forças global da estrutura é montado de forma semelhante à matriz de rigidez, fazendo a soma de forma adequada dos vetores individuais das barras. O vetor também depende do número de graus de liberdade e do número de nós, sendo 1x36, e exemplificando com a barra 1 novamente, o posicionamento deve ser feito conforme a figura 25, formando um vetor final ilustrado na figura 26.

Figura 25 – Montagem do vetor de forças da estrutura



(fonte: elaborado pela autora)

Figura 26 – Vetor de forças da estrutura



(fonte: elaborado pela autora)

Antes de resolver o sistema é necessário aplicar as condições de contorno. Isso se faz zerando os coeficientes da matriz de rigidez da linha e da coluna nas posições em que há deslocamentos impedidos, e colocando o número 1 na diagonal principal da matriz nesses termos para o sistema poder ser resolvido. Também é necessário zerar os coeficientes do vetor de forças na posição destes deslocamentos impedidos. Para esta escada, os nós restringidos são os nó 1 e 6, e a configuração final do sistema pode ser visto na figura 27.

Onde:

R_{local} = vetor de reações em relação ao eixo de coordenadas locais do elemento;

F_{local} = vetor de forças local do elemento;

K_{local} = matriz de rigidez local do elemento;

U_{local} = vetor de deslocamentos em relação ao eixo de coordenadas locais do elemento.

Sabendo as reações nas extremidades fica simples a obtenção das solicitações máximas da estrutura, e são essas que devem ser utilizadas para os dimensionamentos das seções. O dimensionamento é feito conforme indicado anteriormente nos capítulos específicos.

7 PROGRAMA DE DIMENSIONAMENTO DE ESCADAS AUTOPORTANTES

O *software* apresenta uma janela principal, na qual o usuário fornece os dados de entrada, e duas janelas auxiliares, uma na qual podem ser fornecidos diferentes tipos de carregamento sobre a seção e outra que apresenta os resultados obtidos. A figura 28 apresenta a janela principal do programa.

Figura 28 – Janela principal do programa

The screenshot shows the main interface of the software. It includes the following elements:

- GEOMETRIA:**
 - Input fields: B11 (cm): 100, Bp (cm): 100, B12 (cm): 100
 - Input fields: h11 (cm): 10, hp (cm): 20, h12 (cm): 10
 - Input fields: L11 (cm): 300, Lp (cm): 210, L12 (cm): 300
 - Input fields: degraus lance superior: 10, H1 (cm): 200
 - Input fields: degraus lance superior: 10, H2 (cm): 200
- CARGAS:**
 - Input fields: Acidental (kN/m²): 3, Revestimento (kN/m²): 1
 - Button: OUTRAS
- PROPRIEDADES E OUTRAS DEFINIÇÕES:**
 - Input fields: fck (MPa): 30, fyk (MPa): 500
 - Input fields: cobrimento (cm): 2.5, redistribuição: 1
 - Text field: Largura da laje do lance inferior.
- Diagrama GEOMETRIA:**
 - Shows a 3D perspective of a staircase with dimensions labeled: H1, H2, h11, h12, hp, L11, L12, Bp, B11, B12, Lp.
- Options:**
 - Não considerar rigidez à torção nos lances
 - Considerar rigidez à torção nos lances
- Button:** CALCULAR

(fonte: elaborado pela autora)

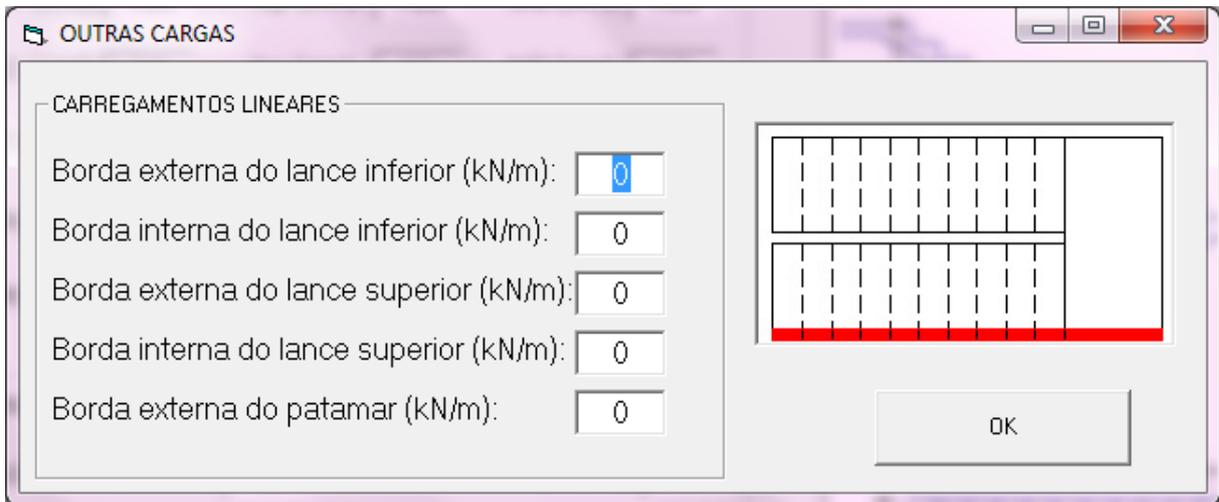
Num primeiro momento o usuário define a geometria da estrutura. Para isso, é apresentada uma ilustração com quais dados devem ser fornecidos, e, a partir desses dados, o programa já calcula a posição dos nós e define as barras, conforme modelo apresentado na figura 21. Os valores de entrada da geometria são:

- a) o comprimento em projeção horizontal dos lances ($L11$, $L12$);
- b) a largura dos lances ($B11$, $B12$);
- c) a altura da laje dos lances ($h11$, $h12$);
- d) o comprimento do patamar intermediário (Lp);
- e) a largura do patamar intermediário (Bp);
- f) a altura da laje do patamar intermediário (hp);
- g) a altura entre o pavimento inferior e o patamar intermediário, e a altura entre o patamar intermediário e o pavimento superior ($H1$, $H2$);
- h) o número de degraus existentes em cada lance.

Com estes dados é possível calcular as propriedades geométricas das seções, como áreas e momentos de inércia. Os momentos de inércia à flexão na direção y e z dos elementos são calculados para uma seção retangular considerando a rigidez de toda a seção. Porém, lajes não são dimensionadas para esforços de torção, então a rigidez à torção é considerada a rigidez de uma viga fictícia que se localiza dentro da laje, ou seja, é calculada armadura pra uma viga embutida dentro da laje, localizada na posição de momento torçor mais desfavorável.

Os carregamentos que podem ser aplicados estão divididos em duas categorias, os carregamentos distribuídos e lineares. Os carregamentos distribuídos estão na tela principal, divididos em cargas acidentais e revestimento. Os carregamentos lineares estão numa outra tela, que abre quando se clica no botão <OUTRAS>. Nessa nova tela são dadas cinco opções de carregamentos lineares, que podem representar uma alvenaria ou um corrimão localizados nas bordas das lajes. A representação dessa janela está ilustrada na figura 29. Já, as cargas permanentes devido ao peso próprio da estrutura, são calculadas automaticamente pelo programa a partir da geometria fornecida.

Figura 29 – Janela para aplicação de outros carregamentos



(fonte: elaborado pela autora)

Nos dados de entrada também são fornecidos os dados dos materiais utilizados, como f_{ck} do concreto e resistência do aço. Com o f_{ck} definido, pode-se calcular o módulo de elasticidade do concreto, que, conforme a NBR 6118, é dado pelas fórmulas 49 e 50, e o módulo de elasticidade transversal do concreto é dado pela fórmula 51 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 23-24):

$$E_{ci} = 5600 \cdot f_{ck}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{fórmula 49})$$

$$E_{cs} = 0,85 \cdot E_{ci} \quad (\text{fórmula 50})$$

$$G_c = 0,4 \cdot E_{cs} \quad (\text{fórmula 51})$$

Onde:

E_{ci} = módulo de elasticidade inicial do concreto (MPa);

E_{cs} = módulo de elasticidade secante do concreto (MPa);

G_c = módulo de elasticidade transversal do concreto (MPa);

f_{ck} = resistência do concreto (MPa).

Com o modelo e as cargas aplicadas definidas, é possível solicitar o dimensionamento ao clicar no botão <CALCULAR>. Neste processo, o modelo é resolvido por análise matricial e a partir das solicitações encontradas é feito o dimensionamento das seções. Então, o mais importante é verificar se o modelo está sendo resolvido corretamente.

Após ter sido programada a análise matricial que resolve a estrutura, o programa foi verificado através de comparações com programas já existentes no mercado. Um exemplo de escada com dimensões pré-definidas foi criado, e o modelo de barras que o programa gera foi aplicado no SAP2000 e no CENTAURUS para fazer a comparação dos deslocamentos e reações obtidos. O único cuidado que teve de se tomar foi na entrada de dados, já que o SAP2000 calcula algumas propriedades de forma um pouco diferente das consideradas neste programa – como rigidez à torção das barras e módulo de elasticidade transversal –, então, para a verificação, foram utilizados os dados fornecidos por ele. A figura 31 apresenta esses resultados, na qual a coluna chamada “VB” representa os resultados obtidos pelo programa criado. Pode-se notar que foram obtidos valores muito próximos aos considerados corretos, sendo o erro relativo muito pequeno tanto nos deslocamentos como solicitações. As dimensões do exemplo utilizado estão apresentadas na figura 30.

Figura 30 – Dimensões utilizadas para as verificações do programa

GEOMETRIA					
Bl1 (cm):	<input type="text" value="100"/>	Bp (cm):	<input type="text" value="100"/>	Bl2 (cm):	<input type="text" value="100"/>
hl1 (cm):	<input type="text" value="10"/>	hp (cm):	<input type="text" value="20"/>	hl2 (cm):	<input type="text" value="10"/>
Ll1 (cm):	<input type="text" value="300"/>	Lp (cm):	<input type="text" value="210"/>	Ll2 (cm):	<input type="text" value="300"/>
degraus lance superior:	<input type="text" value="10"/>	H1 (cm):	<input type="text" value="200"/>		
degraus lance superior:	<input type="text" value="10"/>	H2 (cm):	<input type="text" value="200"/>		

(fonte: elaborado pela autora)

Figura 31 – Comparações dos resultados entre o SAP2000 e o programa criado em Visual Basic

Nó	Deslocamentos e rotações	SAP	VB	Erro %	Barra	Solicitação	SAP	VB	Erro %	
Nó 1	dx	0,0000	0,0000	0,00%	Barra 1	N	-48,953	-48,68	0,56%	
	dy	0,0000	0,0000	0,00%		Vy	12,956	12,81	1,13%	
	dz	0,0000	0,0000	0,00%		Vz	0	0	0,00%	
	rx	0,0000	0,0000	0,00%		Mt	-64,65	-64,31	0,53%	
	ry	0,0000	0,0000	0,00%		My	2174,27	2164,74	0,44%	
	rz	0,0000	0,0000	0,00%		Mzp	396,33	400,58	-1,07%	
Nó 2	dx	0,0660	0,0669	-1,41%		Barra 2	Mzn	871,12	860,13	1,26%
	dy	-0,0784	-0,0803	-2,37%			N	0	0	0,00%
	dz	-0,0596	-0,0596	0,01%	Vy		4,5	4,5	0,00%	
	rx	0,0003	0,0004	-3,23%	Vz		0	0	0,00%	
	ry	0,0006	0,0006	0,00%	Mt		-225	-225	0,00%	
	rz	0,0002	0,0002	15,73%	My		0	0	0,00%	
Nó 3	dx	0,0347	0,0357	-2,68%	Barra 3		Mzp	0	0	0,00%
	dy	-0,0614	-0,0628	-2,27%			Mzn	-112,5	-112,5	0,00%
	dz	-0,0596	-0,0596	0,01%		N	0	0	0,00%	
	rx	0,0003	0,0003	0,00%		Vy	4,95	4,95	0,00%	
	ry	0,0006	0,0006	0,00%		Vz	33,545	33,4	0,00%	
	rz	0,0002	0,0002	3,37%		Mt	-247,5	-247,5	0,00%	
Nó 4	dx	-0,0347	-0,0357	-2,68%		Barra 4	My	-1844,96	-1836,85	0,44%
	dy	-0,0614	-0,0628	-2,27%			Mzp	0	0	0,00%
	dz	-0,0596	-0,0596	0,01%	Mzn		-1264,77	-1259,77	0,40%	
	rx	-0,0003	-0,0003	0,00%	N		0	0	0,00%	
	ry	0,0006	0,0006	0,00%	Vy		4,5	4,5	0,00%	
	rz	0,0002	0,0002	3,37%	Vz		0	0	0,00%	
Nó 5	dx	-0,0660	-0,0669	-1,41%	Barra 5		Mt	-225	-225	0,00%
	dy	-0,0784	-0,0803	-2,37%			My	0	0	0,00%
	dz	-0,0596	-0,0596	0,01%		Mzp	0	0	0,00%	
	rx	-0,0003	-0,0004	-3,23%		Mzn	112,5	112,5	0,00%	
	ry	0,0006	0,0006	0,00%		N	48,953	48,68	0,00%	
	rz	0,0002	0,0002	15,73%		Vy	12,956	12,81	1,13%	
Nó 6	dx	0,0000	0,0000	0,00%		Barra 5	Vz	0	0	0,00%
	dy	0,0000	0,0000	0,00%			Mt	64,65	64,31	0,53%
	dz	0,0000	0,0000	0,00%	My		2174,27	2164,74	0,44%	
	rx	0,0000	0,0000	0,00%	Mzp		396,33	400,58	0,00%	
	ry	0,0000	0,0000	0,00%	Mzn		-871,12	-860,13	1,26%	
	rz	0,0000	0,0000	0,00%						

(fonte: elaborado pela autora)

Nesse primeiro momento, foi considerado que o engaste dos lances com os pavimentos em que eles chegam é perfeito. Porém, nem sempre se consegue representar essa situação na realidade, podendo haver um deslocamento no diagrama de momentos, que diminui os momentos negativos da laje e aumenta os momentos positivos. Foi deixado a critério do usuário do programa definir qual é esse coeficiente de redistribuição dos momentos. É importante ressaltar que alterar essa distribuição de momentos pode causar fissuras em cargas de serviço. Então o projetista deve ser cauteloso quanto a essa definição, sendo que o critério mais favorável à segurança seria armar o momento negativo como se houvesse engaste

perfeito e o momento positivo ao utilizar essa redução, aumentando assim o valor do mesmo. A NBR 6118 recomenda que esse coeficiente de redistribuição não seja menor que 0,75, e pode ser calculado por (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007, p. 85):

- a) $\delta \geq 0,44 + 1,25 x/d$ para concretos com $f_{ck} \leq 35$ MPa;
- b) $\delta \geq 0,56 + 1,25 x/d$ para concretos com $f_{ck} > 35$ MPa.

Onde:

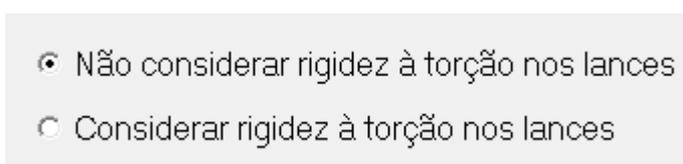
δ = coeficiente de redistribuição dos momentos;

x = posição da linha neutra;

d = distância entre a face superior e o eixo da armadura.

Partindo do pressuposto de que o *software* está calculando corretamente as solicitações e deslocamentos, algumas mudanças foram aplicadas para melhorar o modelo. A rigidez à torção das barras 1 e 5 (aquelas que representam os lances da escada) podem ser arbitradas com um valor desprezível, para assim, não haver a necessidade de armar essas lajes para resistirem a essa solicitação. Como, para este caso a torção nessas barras existe apenas para manter a compatibilidade de solicitações na estrutura, ao se mudar sua rigidez, acontece uma redistribuição dos esforços nas outras barras. Essa técnica de desprezar a rigidez à torção de elementos é bastante aplicada na prática de engenharia, mas sempre deve se verificar se a estrutura como um todo não tem um comportamento muito diferente do inicial, pois nesse caso a torção seria de equilíbrio pra estrutura, e não poderia ser desprezada. O usuário pode escolher se quer considerar essa rigidez dos lances ou não, escolhendo uma das opções apresentadas na figura 32.

Figura 32 – Opção para considerar ou não a rigidez à torção dos lances



(fonte: elaborado pela autora)

Foram testadas várias situações de carregamento que se diferenciavam pela variação da carga accidental entre as barras. Isso devido ao fato da escada ser modelada como um pórtico

espacial, e para diferentes configurações de carregamento, diferentes valores de solicitações são encontrados. Após feitos esses testes, foram definidas 6 situações de carregamentos mais críticas, nas quais as solicitações máximas eram de maior valor do que os outros casos. Já as cargas permanentes foram sempre mantidas aplicadas nas barras. Essas configurações de carregamentos são apresentadas a seguir, sendo descritas as barras em que as cargas acidentais foram aplicadas em cada carregamento:

- a) Carregamento 1: 1, 2, 3, 4 e 5;
- b) Carregamento 2: 1, 2, 3 e 4;
- c) Carregamento 3: 2, 3, 4 e 5;
- d) Carregamento 4: 1 e 5;
- e) Carregamento 5: 3, 4 e 5;
- f) Carregamento 6: 1, 2 e 3.

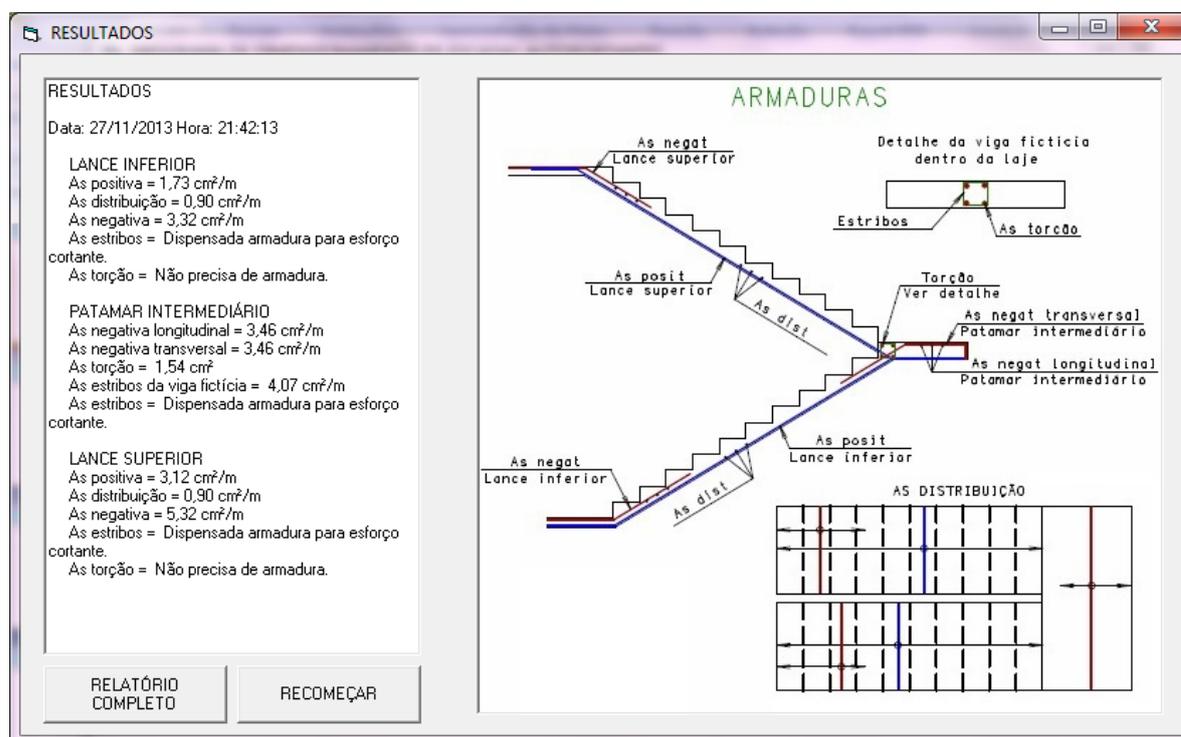
Com as solicitações definidas, pôde-se realizar o dimensionamento das seções. Para cada barra foi calculada a armadura necessária para suportar as solicitações máximas que atuam nela, devidas a todos os carregamentos. Para os casos de flexo-tração e flexo-compressão as solicitações de esforço normal e momento fletor se combinam, por isso a necessidade de primeiro calcular todas as situações de carregamento para depois definir a armadura máxima necessária. Feito isso, a maior área de armadura dentre todos os carregamentos foi definida como a área necessária para aquela solicitação.

Para o momento na direção y das barras, ou seja, momento fletor na direção longitudinal das lajes da escada, apesar de ser calculada uma área de armadura como se a laje fosse uma viga, esta sempre se verificou com um valor bem abaixo da armadura mínima necessária por norma. Então, como nem é costume calcular essa solicitação em lajes, essa armadura pode ser desprezada. Porém o programa fornece esses valores calculados para o usuário decidir se quer armar para essa solicitação ou não. Também são calculados os valores de armadura mínima necessária para cada seção, e estes são comparados com os necessários.

Então, após o usuário clicar em <CALCULAR>, uma nova janela se abre apresentando as armaduras calculadas e uma ilustração indicando as posições das mesmas. A janela está apresentada na figura 33. A primeira resposta que aparece é simplesmente a conclusão dos cálculos da estrutura, mas pode-se exigir um relatório completo do dimensionamento. O relatório completo está dividido em sete abas, em que, na primeira, são apresentados todos os

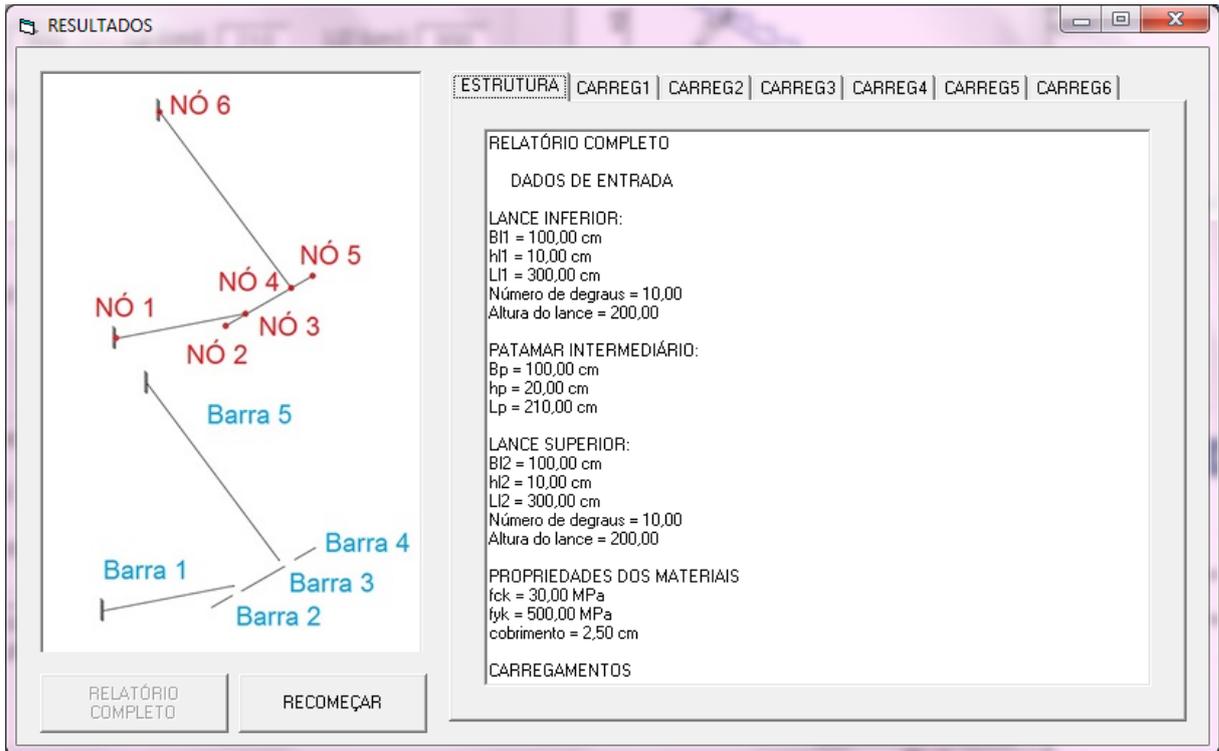
dados da estrutura, bem como sua matriz de rigidez e aquelas das barras isoladas, e, nas seis seguintes, são as respostas devido aos diferentes carregamentos aplicados. No relatório completo são apresentadas todas as matrizes e vetores utilizados na análise matricial e armaduras calculadas para cada carregamento, deixando o usuário com um pequeno memorial de cálculo da estrutura. O relatório completo pode ser acessado clicando no botão <RELATÓRIO COMPLETO>, e a janela está ilustrada na figura 34.

Figura 33 – Resultados do cálculo de uma escada autoportante



(fonte: elaborado pela autora)

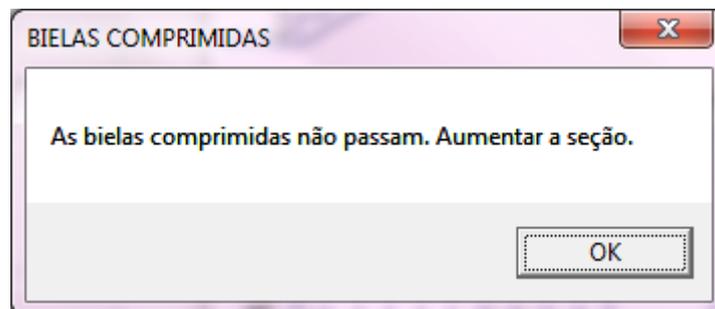
Figura 34 – Relatório completo do cálculo da estrutura



(fonte: elaborado pela autora)

Dentre as verificações que o *software* faz na hora do dimensionamento, podem aparecer duas janelas de aviso se as dimensões não forem adequadas. Uma delas é quanto à verificação das bielas comprimidas do concreto. Se o valor da tensão de cálculo for maior que o valor da tensão resistente do concreto, o programa para o dimensionamento e uma janela de aviso se abre, indicando qual seção não está passando. A figura 35 representa esta mensagem do programa.

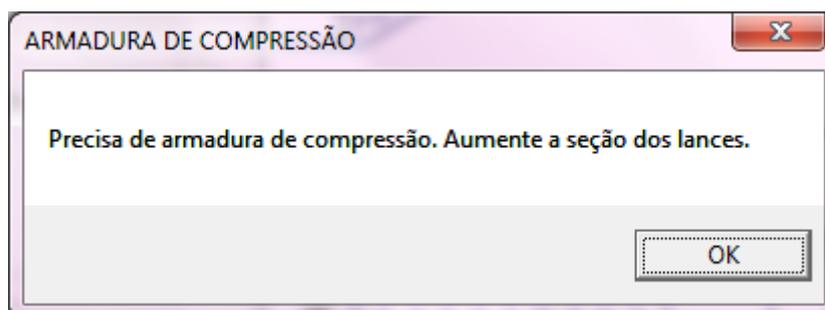
Figura 35 – Aviso quando as bielas comprimidas não passam no dimensionamento



(fonte: elaborado pela autora)

O outro aviso é quando o dimensionamento requer armadura de compressão em alguma das seções. Lajes geralmente não têm armaduras de compressão, portanto, ficou definido que se deve aumentar a seção e recalcular a estrutura quando ela se mostrar necessária. Este aviso pode ser visto na figura 36.

Figura 36 – Aviso quando for necessária armadura de compressão



(fonte: elaborado pela autora)

Por fim, o usuário pode pedir pra voltar à tela dos resultados anteriores ou recomeçar com uma nova entrada de dados.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal do trabalho, que era desenvolver um programa que calcule escadas autoportantes, foi alcançado. O programa desenvolvido é capaz de receber os dados de entrada, modelar a estrutura como um pórtico espacial, calcular as solicitações atuantes, e a partir dessas fazer o dimensionamento das seções segundo as recomendações da NBR 6118.

Apesar de ainda ser uma simplificação, acredita-se que o modelo escolhido faz uma boa representação desse tipo de estrutura. Porém, é considerado que as vinculações da escada com os pavimentos em que ela chega possuem um engaste perfeito, e, apesar de calculada a armadura necessária para essa vinculação, a sua disposição para representá-la adequadamente não foi detalhada. Isso depende apenas da estrutura em que a escada está apoiada, então, é de responsabilidade do usuário definir e calcular a seção que suporta as reações da escada, bem como a disposição de armaduras para a representação do engaste, validando, assim, as condições em que o modelo é representado.

A maior dificuldade no cálculo desse tipo de estrutura é encontrar as solicitações atuantes. Para isso foi utilizado o método de análise matricial, que ao ser verificado no programa, apresentou resultados muito semelhantes com os de programas já existentes no mercado. Essa foi a etapa mais trabalhosa no que se refere à parte de programação, já que são necessárias operações com matrizes e armazenamento de dados. Em contrapartida, a programação do dimensionamento das seções foi mais simples, aplicando as formulações apresentadas anteriormente nos capítulos específicos, e tendo somente considerações especiais nas ocasiões em que a estrutura não resiste os carregamentos aplicados.

Com o *software* pronto, puderam ser feitos alguns testes para escadas com diferentes dimensões. Observou-se que, quando se afastam os lances da escada um do outro, aumentando, assim, o comprimento do patamar intermediário, a torção nos lances aumenta. E quando se aumenta o comprimento dos lances, deixando o balanço maior, bem como quando se aumenta o pé direito da escada, o momento negativo no engaste também aumenta. Com essas informações é possível compreender melhor o comportamento desse tipo de escada na hora de fazer o dimensionamento.

O trabalho como um todo, apesar de ter um foco na criação de um programa, não deixou de ser um projeto completo, no qual se tinha uma estrutura estudo de caso, para a qual foi desenvolvido um modelo de cálculo, e definida a melhor maneira de distribuir as armaduras para suportar as solicitações. O trabalho também apresenta um roteiro de resolução de pórticos espaciais através de análise matricial, que pode ser útil para a compreensão dessa metodologia que foi utilizada. De forma geral, pode-se concluir que a utilização desse programa pode ser válida no meio acadêmico, já que são apresentados os relatórios completos sobre a análise matricial utilizada nos cálculos, a discretização utilizada pra representar a estrutura como um modelo de barras e um detalhamento simplificado das armaduras calculadas.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. M. de. **Curso de concreto armado**. 2. ed. Rio Grande: Dunas, 2003a. v. 4.
- _____. **Curso de concreto armado**. 2. ed. Rio Grande: Dunas, 2003b. v. 1.
- _____. **Curso de concreto armado**. 2. ed. Rio Grande: Dunas, 2003c. v. 3.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.
- _____. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2007.
- _____. Comitê Brasileiro de Construção Civil. **Projeto Norma 6118**: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2013.
- BREBBIA, C. A.; FERRANTE, A. J. **Computational methods for the solution of engineering problems**. London: Pentech Press, 1978.
- CAMPOS FILHO, A. **Projeto de lajes maciças em concreto armado**. Porto Alegre: DECIV/UFRGS, 2011a. Apostila da disciplina Estruturas de Concreto Armado II – UFRGS. Disponível em: <<http://chasqueweb.ufrgs.br/~americo/eng01112/lajes.pdf>>. Acesso em: 25/05/2013.
- _____. **Dimensionamento de seções retangulares submetidas à flexo-compressão**. Porto Alegre: DECIV/UFRGS, 2011b. Apostila da disciplina Estruturas de Concreto Armado II – UFRGS. Disponível em: <http://chasqueweb.ufrgs.br/~americo/eng01112/solicitacoes_normais.pdf>. Acesso em: 25/05/2013.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. de. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: segundo a NBR 6118:2003. 3. ed. (3. reimpr.) São Carlos: EdUFSCar, 2010.
- GERE, J. M.; WEAVER JR., W. **Análise de Estruturas reticuladas**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, c1981.
- GUERRIN, A. **Tratado de concreto armado**. Tradução de Carlos Antonio Lauand. São Paulo: Hemus, 1990. v. 3.
- MARTHA, L. F. **Análise de estruturas**: conceitos e métodos básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- MOREIRA, D. F. **Análise matricial das estruturas**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1977.
- PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of matrix structural analysis**. New York: McGraw-Hill, c1968.
- ROCHA, A. M. **Curso prático de concreto armado**. 5. ed. Rio de Janeiro: Científica, 1969. v. 3.

VANDERBILT, M. D. **Matrix structural analysis**. New York: Quantum, c1974.