

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
Tese de Doutorado

Dinâmica Não Linear de Ondas Eletromagnéticas Localizadas em Interações Laser-Plasma*

Alexandre Bonatto

Tese realizada sob a orientação do Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato e co-orientação do Prof. Dr. Renato Pakter, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFRGS em preenchimento parcial dos requisitos para a obtenção do grau de *Doutor em Ciências*.

Porto Alegre - RS
Dezembro de 2012

*Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

*Em algum lugar, alguma coisa incrível
está esperando para ser conhecida.*

Carl Sagan

Agradecimentos

- À minha mãe Regina (*in memoriam*), a quem dedico este trabalho, e ao meu pai Nilton, por ser uma pessoa incrível e por tudo que fez (e faz) por nossa família.
- Aos meus orientadores Felipe Rizzato e Renato Pakter, pela excelente orientação e pela convivência extremamente agradável ao longo dos anos em que trabalhamos juntos.
- Ao professor e amigo Antônio Endler, por disponibilizar recursos computacionais para rodar minhas simulações e pelas inúmeras vezes em que me ajudou a superar dificuldades com as mesmas, e a todos os demais professores do Instituto de Física.
- Aos meus irmãos Marcos, Karen, Rafael e em especial ao meu irmão Cristian, também físico, por finalmente fazermos parte do mesmo grupo de pesquisa.
- À Vanessa, pela afinidade que temos no modo de ver o mundo.
- Ao meu amigo Giancarlo pelo apoio, pela parceria e pelas discussões instigantes e, eventualmente, irritantes!
- Ao meu amigo Wagner, pelos incontáveis *cafés filosóficos* nos finais de tarde em São Leopoldo, nos quais divagávamos sobre “o que realmente é importante na vida”, além de outros assuntos (nem tão importantes, mas não menos interessantes).
- Aos amigos Maurício, Eduardo “Cabelo”, Aline, Fernanda, Filipe, Rodrigo e Cassio, por constituírem (juntamente com as demais pessoas que mencionei) um grupo indispensável para mim.
- Ao CNPq por financiar o meu doutorado.
- À sociedade brasileira, que financia o ensino público.

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica fracamente não linear de ondas eletromagnéticas localizadas em interações laser-plasma. Ao se propagarem, estas ondas perturbam a densidade de elétrons do plasma e eventualmente originam campos elétricos por efeitos de *space-charge*. Estes campos por sua vez afetam a dinâmica das ondas, ou seja, a dinâmica de ambos é acoplada. Modelamos a onda localizada através de uma equação para seu envelope e tratamos o plasma como um fluido eletrônico frio, com alta mobilidade, e um fundo iônico fixo neutralizador .

Inicialmente investigamos a dinâmica longitudinal da propagação autoconsistente de pulsos laser em plasmas. Nesta configuração, os campos elétricos no plasma são excitados no rastro dos pulsos, sendo por isto denominados *wakefields*. Desenvolvemos um modelo composto por duas equações, uma para o envelope do pulso laser e outra para o *wakefield*, no qual as interações entre ambos são plenamente consideradas na análise da evolução temporal e da estabilidade do pulso. Aplicando técnicas de lagrangeano efetivo e o método variacional obtemos uma equação para a dinâmica aproximada da largura dos pulsos, utilizada para fazer estimativas analíticas sobre dois casos-limite: pulsos largos e pulsos estreitos. Enquanto pulsos largos podem ou não manter a sua forma localizada dependendo da sua potência, pulsos muito estreitos sempre tendem a se dispersar à medida que o tempo avança.

Em seguida estudamos a propagação de feixes laser focalizados, incluindo a dinâmica transversal em um modelo desenvolvido sem o uso da aproximação paraxial. Este modelo, direcionado à análise de regimes estacionários quando observados no referencial do feixe, nos permite obter uma condição de equilíbrio para os perfis transversais do mesmo. Examinamos a dependência de tais perfis nos parâmetros de controle e a estabilidade de feixes levemente descasados dos perfis de equilíbrio. Embora os detalhes da dinâmica dos feixes dependam das condições iniciais, feixes descasados sempre evoluem para padrões espaço-temporais incoerentes, independente da precisão adotada em tais condições.

Em ambos os sistemas abordados, os modelos podem ser aplicados para estudar propagação de ondas em plasmas com densidades arbitrárias, uma vez que foram construídos sem aproximar a velocidade de propagação da onda eletromagnética pela velocidade da luz no vácuo (algo usual no estudo de plasmas com baixa densidade, do tipo *underdense*).

Abstract

In the present analysis we study the weakly nonlinear dynamics of localized electromagnetic waves in laser-plasma interactions. As these waves are injected into plasmas, they disturb its electronic density and eventually give rise to space-charge fields, which in turn affect back the waves. In other words, their dynamics is coupled. We model the localized wave using an equation for its envelope and we treat the plasma as consisting of a mobile cold electronic fluid and a neutralizing fixed ionic background.

We first investigate the longitudinal self-consistent dynamics propagation of laser pulses in plasmas. Here the space-charge fields in the plasma are excited in the wake of the pulses, thus being called wakefields. We develop a model consisting of two equations, one for the pulse envelope, another for the wakefield, and the interactions between both are fully taken to account to analyze the pulse time dependent dynamics and stability. Applying effective Lagrangian techniques and the variational approach we derive an equation for the approximated dynamics of a pulse width, which is used in order to obtain some analytical estimates about two limit-cases: wide and narrow pulses. While wide pulses may or may not retain the localized shape depending on their power, narrower pulses always tend to delocalize as time evolves.

Next we study the propagation of focused laser beams, taking to account the transverse dynamics in a model derived avoiding any assumption on paraxial conditions. This model, directed to the analysis of stationary regimes when observed in the co-moving coordinate of the beam frame, allows us to obtain an equilibrium condition for the beam transverse profiles. We examine the dependence of equilibrium profiles on control parameters and the stability of beams as one adds small mismatches to the ideally matched equilibrium. Details of beam evolution depend on initial conditions. However, independently of the precise form of initial conditions, mismatched beams evolve to incoherent space-time patterns.

In both systems discussed, the models can be applied to study the wave propagation in plasmas with arbitrary densities, since they were constructed without approximating the group velocity of the wave by the speed of light in vacuum (something usual when studying underdense plasmas).

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
1 Introdução	1
2 Dinâmica longitudinal de um pulso laser	4
2.1 Introdução	4
2.2 O modelo	6
2.2.1 Considerações iniciais	6
2.2.2 Os campos	7
2.2.3 Equação da densidade de elétrons no plasma	7
2.2.4 Equação do envelope do pulso laser	11
2.2.5 Normalização	12
2.2.6 Aproximação modulacional	12
2.2.7 Equações no referencial do pulso laser	14
2.2.8 Cálculo do potencial escalar φ	16
2.3 A formulação lagrangeana e o método variacional	17
2.3.1 Considerações iniciais	17
2.3.2 Formulação lagrangeana	17
2.3.3 Método variacional	18
2.4 Aproximação de pulso estreito	20
2.5 Aproximação de pulso largo	23
2.6 Soluções numéricas	26
2.6.1 Considerações iniciais	26
2.6.2 Método numérico	27
2.6.3 Parâmetros	28
2.7 Condições iniciais	30

2.8	Comparações: aproximações <i>vs.</i> sistema completo	31
2.8.1	Regime de baixa potência ($W = 0,01$)	31
2.8.2	Regime de “alta” potência ($W = 0,10$)	39
2.9	Conclusões	48
3	Dinâmica longitudinal e transversal de um feixe laser	49
3.1	Introdução	49
3.2	O Modelo	52
3.2.1	Equação do envelope do feixe laser	52
3.2.2	Equação do potencial de space-charge	55
3.2.3	Resumo	56
3.3	Geometria do feixe e condições de contorno	56
3.4	Solução analítica do modelo linear associado	57
3.5	Feixes focalizados: soluções de equilíbrio	59
3.6	Simulações da dinâmica espaço-temporal	63
3.6.1	Considerações iniciais	63
3.6.2	Parâmetros	64
3.6.3	Dinâmica linear	64
3.6.4	Feixes casados	66
3.6.5	Feixes descasados	67
3.7	Conclusões	71
4	Considerações finais e perspectivas	73
4.1	Considerações finais	73
4.2	Perspectivas	74
	Referências	75

Lista de Figuras

2.1	Propagação de um pulso laser em um plasma	5
2.2	Comparação entre as variações do envelope $ a ^2$ e do campo $\text{Re}(a)$	13
2.3	Potencial efetivo U_{eff}^{narrow} : aproximação de pulso estreito	23
2.4	Potencial efetivo U_{eff}^{wide} : aproximação de pulso largo	25
2.5	($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$) evolução temporal da largura $\Delta(\tau)$	32
2.6	($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$) curvas de $ a ^2$: solução completa	33
2.7	($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$) curvas de $ a ^2$: solução aproximada	33
2.8	($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$) perfil espacial do envelope em $\tau = 0$	35
2.9	($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$) perfil espacial do envelope em $\tau = 1,6$	35
2.10	($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$) perfil espacial do envelope em $\tau = 3,2$	36
2.11	($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$) perfil espacial do envelope em $\tau = 4,7$	36
2.12	($W = 0,01$, $\Delta(0) = 0,25$) evolução temporal da largura $\Delta(\tau)$	37
2.13	($W = 0,01$, $\Delta(0) = 0,25$) curvas de $ a ^2$: solução aprox. <i>vs.</i> completa	38
2.14	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$) evolução temporal da largura $\Delta(\tau)$	39
2.15	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$) curvas de $ a ^2$: solução aprox. <i>vs.</i> completa	40
2.16	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$) perfil espacial do envelope em $\tau = 0$	42
2.17	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$) perfil espacial do envelope em $\tau = 2,4$	42
2.18	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$) perfil espacial do envelope em $\tau = 4,8$	43
2.19	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$) perfil espacial do envelope em $\tau = 7,1$	43
2.20	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$) evolução temporal da largura $\Delta(\tau)$	44
2.21	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$) curvas de $ a ^2$: solução aprox. <i>vs.</i> completa	45
2.22	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$) perfil espacial do envelope em $\tau = 0$	46
2.23	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$) perfil espacial do envelope em $\tau = 0,6$	46
2.24	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$) perfil espacial do envelope em $\tau = 1,2$	47
2.25	($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$) perfil espacial do envelope em $\tau = 1,9$	47
3.1	Geometria do feixe	56
3.2	Evolução da solução da equação do envelope linearizada	58

3.3	Escala característica do crescimento exponencial do envelope do feixe (ξ^*) .	59
3.4	Exemplo da construção de uma solução numérica $a_{eq}(x_{\perp})$ para a equação de equilíbrio completa	62
3.5	Perfis de equilíbrio para diferentes valores de δ	63
3.6	Comparação entre a simulação do sistema linearizado e sua solução analítica (a_{linear})	65
3.7	Dinâmica de um feixe casado (teste do código da simulação numérica) . . .	66
3.8	Dinâmica do potencial de <i>space-charge</i> excitado por um feixe casado	67
3.9	Dinâmica de feixes descasados	69
3.10	Dinâmica do potencial de <i>space-charge</i> ϕ	70
3.11	Dependência do comportamento da dinâmica na escala do descasamento χ	71

Capítulo 1

Introdução

A dinâmica não linear autoconsistente de ondas eletromagnéticas localizadas em plasmas é um assunto de interesse atual em diversas áreas que fazem uso das tecnologias modernas de laser disponíveis, dentre as quais destacamos a aceleração de partículas através de aceleradores de plasma a laser (*laser wakefield*¹ *accelerators*, ou LWFA) como uma das principais motivações para o estudo deste assunto. Embora este princípio de aceleração tenha sido desenvolvido conceitualmente há muito tempo por Tajima e Dawson [1], esta é uma área em franco desenvolvimento, cujos trabalhos têm recebido destaque nas principais conferências sobre aceleradores de partículas, principalmente porque verificações experimentais significativas [2] só foram realizadas após o recente desenvolvimento de lasers extremamente potentes e com pulsos muito curtos [3]. Se em um acelerador convencional as estruturas metálicas das cavidades aceleradoras limitam a intensidade do campo elétrico acelerador até o “campo de quebra”, a partir do qual ele passa a extrair elétrons destas estruturas, em um plasma não existe esta limitação. De fato, o plasma pode suportar campos elétricos pelo menos mil vezes mais intensos que os aceleradores convencionais [4], ou seja, um acelerador de plasma a laser poderia em tese ser mil vezes mais curto que um acelerador convencional para o mesmo ganho de energia. Em um experimento conduzido no SLAC (*Stanford Linear Accelerator Center*) que ficou conhecido como *energy doubling experiment*² [5], uma câmara com 85cm de comprimento contendo gases específicos foi colocada na saída de um acelerador linear cujo feixe de elétrons (que sai com energia de 42GeV após ser acelerado ao longo de um trajeto com 3km de comprimento) foi utilizado para ionizar os gases (gerando o plasma) e excitar os *wakefields* responsáveis pelo processo de aceleração. Embora parte dos elétrons tenham perdido energia ao cruzarem a câmara, uma certa fração dos mesmos foi acelerada a uma

¹Campo elétrico associado a flutuações na densidade do plasma, excitado no rastro do laser.

²Experimento de duplicação da energia.

energia de 82Gev (ou seja, receberam um ganho de 40Gev em um percurso de 85cm). Embora este experimento não tenha utilizado um laser para promover a aceleração, ele ilustra bem a capacidade do plasma de suportar gradientes de aceleração extremamente intensos. Além da aceleração de elétrons, estudos têm sido conduzidos para acelerar íons através de aceleradores de plasma a laser [6]. Em resumo, esta é uma área ainda em desenvolvimento, com uma ampla gama de possíveis aplicações tecnológicas, e por isso estamos interessados em estudar a existência de soluções estáveis em interações laser-plasma, bem como os mecanismos que eventualmente destroem tais soluções.

Nossa proposta de trabalho consiste em estudar a dinâmica de ondas eletromagnéticas localizadas propagando-se em plasmas, levando em conta o acoplamento entre tais ondas e as flutuações na densidade do plasma (excitadas por esta propagação). Sendo mais específicos com relação aos tipos de ondas localizadas, investigamos a dinâmica longitudinal, dependente do tempo, de pulsos laser e, posteriormente, a dinâmica longitudinal e transversal de feixes laser em regimes estacionários (quando observados no seu referencial). Fazemos isto com modelos de baixa dimensionalidade, nos quais podemos aplicar técnicas de análise de dinâmica não linear para extrair estimativas analíticas sobre a existência e a estabilidade de soluções de equilíbrio. Estas estimativas são então utilizadas como referência para direcionar as simulações numéricas autoconsistentes, que servem tanto para validá-las quanto para investigar regiões onde tais estimativas não valem.

Com relação à estrutura, esta tese está organizada por capítulos que abordam os assuntos descritos a seguir. Dedicamos o capítulo 2 ao estudo da dinâmica longitudinal de pulsos laser propagando-se em plasmas, com interesse específico no estudo do acoplamento não linear entre estes pulsos e os *wakefields*, associados a flutuações na densidade de elétrons do plasma no rastro dos pulsos. Inicialmente caracterizamos o sistema físico em estudo e apresentamos de forma detalhada a obtenção das equações que governam a evolução temporal do pulso laser e do *wakefield*. Em seguida encontramos um lagrangeano para esse sistema, no qual aplicamos o método variacional para obter soluções aproximadas para a evolução da largura do pulso. Tais soluções nos permitem fazer algumas estimativas analíticas sobre o comportamento da largura do pulso e sobre a existência de soluções estáveis em dois casos-limite: pulsos largos e pulsos estreitos. Conduzimos então simulações numéricas para validar as estimativas analíticas e também para investigar a dinâmica da largura de pulsos que cruzam a região de transição entre pulsos largos

e estreitos, onde as estimativas não valem e a análise numérica é requerida. Por fim, apresentamos as conclusões obtidas nesta etapa do trabalho.

No capítulo 3, com o objetivo de incluir a análise da dinâmica transversal, estudamos agora a propagação de feixes laser em plasmas, em regimes estacionários quando observados no referencial que se propaga com os mesmos. Estamos interessados na dinâmica não linear acoplada de um feixe com o potencial de *space-charge*, que é a resposta do plasma à propagação deste feixe (equivalente ao *wakefield* gerado pela propagação de um pulso). Fazendo algumas adaptações no modelo previamente desenvolvido, inserindo a dependência transversal nos campos e considerando a condição estacionária no referencial do feixe, chegamos às equações não lineares acopladas do envelope do feixe e do potencial de *space-charge*. Definimos a geometria do feixe e as condições de contorno adequadas para resolver analiticamente versões linearizadas das equações obtidas. A solução analítica obtida evidencia o comportamento instável do envelope do laser e nos permite estimar a escala de crescimento desta instabilidade. Obtemos uma condição de equilíbrio e fazemos simulações de feixes casados, cujos perfis inicialmente satisfazem esta condição, e feixes levemente descasados (através de perturbações nos seus perfis iniciais). Estas simulações nos permitem estudar a competição entre o crescimento exponencial observado na solução linear e a saturação do mesmo causada pela presença das não linearidades. Finalmente, apresentamos as conclusões relacionadas aos estudos desenvolvidos neste capítulo.

O capítulo 4 é o último capítulo desta tese. Nele apresentamos algumas considerações finais, além de uma discussão sobre possíveis direções para a continuidade desta linha de pesquisa.

Capítulo 2

Dinâmica longitudinal de um pulso laser

Neste capítulo estudamos a propagação autoconsistente de pulsos eletromagnéticos não lineares em plasmas. As interações destes pulsos com os *wakefields* (campos elétricos associados a flutuações na densidade de elétrons do plasma, causadas pela propagação do pulso) são plenamente consideradas e a nos permitem obter informações precisas sobre evolução temporal e a estabilidade do pulso. Enquanto pulsos largos podem ou não manter a sua forma localizada dependendo da sua potência, pulsos estreitos sempre tendem a se dispersar à medida que evoluem no tempo. Os resultados deste trabalho foram apresentados em conferências [9, 10] e publicados no periódico *Laser and Particle Beams* [11].

2.1 Introdução

A propagação de pulsos eletromagnéticos intensos em plasmas é um assunto de interesse corrente em áreas que fazem uso das tecnologias laser atualmente disponíveis [3] (capazes de gerar pulsos extremamente curtos com potências muito altas), dentre as quais podemos destacar a aceleração de fótons e partículas, fusão à laser e outros processos não lineares [1, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20].

Pulsos eletromagnéticos intensos deslocam os elétrons do plasma e criam um campo de *space-charge* associado às flutuações na densidade dos mesmos, conforme ilustrado na figura 2.1. Eventualmente, o campo de *space-charge* evolui no rastro do pulso eletromagnético que se propaga no plasma, assumindo uma forma conhecida por *wakefield*, que pode ser utilizado como um mecanismo de aceleração de partículas se for suficientemente

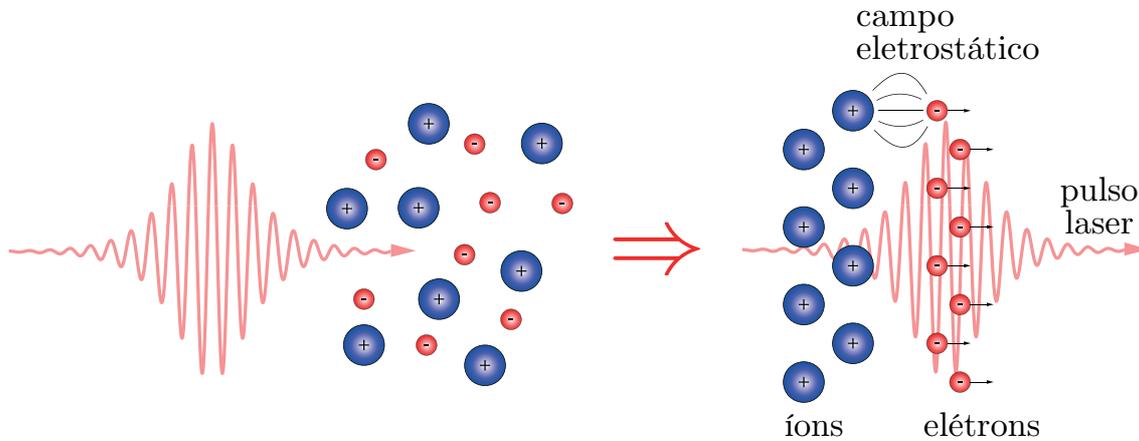


Figura 2.1: a propagação de um pulso laser em um plasma desloca os seus elétrons gerando um campo eletrostático conhecido como campo de *space-charge* devido à redistribuição espacial das cargas.

estável e coerente para que os elétrons sob sua ação possam absorver energia de um modo ressonante. Uma vez que o pulso se acopla com o *wakefield*, a geração do segundo pode afetar o comportamento do primeiro. Por isso, é interessante analisarmos a dinâmica acoplada de ambos os campos.

Embora existam investigações deste tipo na literatura, é usual observarmos a aproximação conhecida como “aproximação de regime *underdense*”, na qual supõe-se que a velocidade de grupo do pulso eletromagnético é igual à velocidade da luz no vácuo c nos casos em que a frequência de plasma ω_p é uma quantidade pequena. Neste caso as velocidades de grupo e fase do pulso são aproximadas pela velocidade da luz [21], e distorções no mesmo são por vezes negligenciadas ou tratadas sob hipótese de onda estacionária [22].

Como muitos resultados da análise de interações em sistemas laser-plasma são específicas para regimes em que a aproximação *underdense* é válida, nosso objetivo é investigar como o sistema se comporta se esta aproximação for relaxada. Em particular, tais aproximações são muito restritivas se alguém deseja seguir a dinâmica dependente do tempo de pulsos laser ao longo da direção de modulação. Vamos investigar até que ponto um pulso eletromagnético mantém a sua forma inicial seguindo a sua interação com o wakefield, uma questão que é relevante não apenas para aceleradores mas também para todos os tipos de transmissão de informações através de sólitons eletromagnéticos [23].

Para uma dada potência de pulso, a dinâmica é em grande parte determinada pela largura do mesmo. Uma das descobertas aqui é que, enquanto pulsos com larguras suficientemente maiores do que o comprimento de onda de plasma ω_p podem manter suas formas mesmo na presença de campos de *space-charge*, pulsos estreitos (com larguras

comparáveis ao comprimento de onda do plasma) sempre tendem a se espalhar à medida que o tempo avança. Tudo depende, em última instância, da potência de pulso e dos papéis relativos desempenhados pelas não-linearidades presentes nos termos relativístico e ponderomotriz.

2.2 O modelo

2.2.1 Considerações iniciais

Nosso objeto de estudo é a propagação de pulsos laser em plasmas. Em nosso modelo, tratamos o plasma como um fluido frio, ou seja, a temperatura do plasma é igual a zero e, conseqüentemente, as velocidades térmicas dos elétrons e dos íons são nulas. Em teoria hidrodinâmica isto significa que não há forças de pressão existentes no plasma. Esta é uma aproximação razoável para plasmas em que a interação coulombiana é dominante, mas traz como limitação a impossibilidade de estudarmos regimes fortemente não lineares, nos quais ocorre a quebra de onda e modelos de fluido que incluem efeitos térmicos [24] ou ainda modelos cinéticos [25] são requeridos para uma análise detalhada. Além disso, como normalmente é feito com os modelos mais simples, consideramos que os íons são estacionários, atuando como um fundo de cargas que neutraliza o plasma não perturbado em cada ponto. Neste caso, uma perturbação é aplicada no espaço apenas para os elétrons e, devido a esta perturbação, um campo elétrico é criado no plasma.

Aplicando a segunda lei de Newton a um elétron do plasma (sujeito à ação da força de Lorentz) e fazendo uso das equações de Maxwell, obtemos uma equação para a dinâmica de tal partícula. Em seguida, combinamos esta equação com a equação da continuidade aplicada à densidade de elétrons do plasma, chegando a uma equação para a evolução temporal da densidade.

O pulso laser é descrito pelo potencial vetor \mathbf{A} e, assim como os demais campos, radiações e *wakefields*, se propaga ao longo da coordenada x do nosso sistema de coordenadas. Usando as equações de Maxwell (especificamente, a lei de Ampère) obtemos uma expressão para a dinâmica do envelope de um pulso laser propagando-se no plasma, que em seguida é simplificada através da aproximação de envelope com variação lenta.

Após uma mudança de coordenadas, as equações obtidas são reescritas em um referencial que se propaga com o pulso, simplificando a análise do problema proposto. Finalmente, introduzimos um potencial escalar que nos permite reescrever as equações de uma forma mais simples, facilitando principalmente a análise da resposta do plasma à propagação do pulso laser.

2.2.2 Os campos

Neste trabalho estudamos a dinâmica longitudinal do problema proposto através de uma abordagem unidimensional, similar à adotada em trabalhos anteriores [22, 26, 27]. Por isso, tratamos todas as variáveis como funções de uma dimensão espacial (a coordenada x , definida na direção de propagação do pulso laser) e do tempo t . Ainda que esta abordagem seja bastante simplificada se comparada com o problema físico real, ela nos permite analisar muitas características relevantes do sistema em estudo, como veremos ao longo deste trabalho.

Os campos elétrico e magnético, transversais à propagação do pulso, dados por

$$\mathbf{E} = \hat{y} E(x, t) \quad , \quad \mathbf{B} = \hat{z} B(x, t) \quad , \quad (2.1)$$

são expressos em função dos potenciais escalar ϕ e vetor \mathbf{A} respectivamente,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \quad (2.2)$$

O potencial vetor, dado por

$$\mathbf{A} = \hat{y} A(x, t) \quad , \quad (2.3)$$

é a onda portadora do envelope do pulso laser, que se propaga em um plasma tratado como um fluido frio de elétrons. Em resposta à propagação do pulso, estes elétrons se movimentam (devido à ação da força ponderomotriz), gerando flutuações na sua densidade que dão origem a campos elétricos conhecidos como *wakefields*.

2.2.3 Equação da densidade de elétrons no plasma

A equação que descreve as oscilações na densidade de elétrons no plasma é derivada a partir de um conjunto de equações simples, com base na teoria hidrodinâmica sem um campo magnético no plasma.

Partimos da equação de movimento de uma partícula carregada, sujeita à ação da força eletromagnética. Para tanto, inserimos na segunda lei de Newton a força de Lorentz:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] \quad . \quad (2.4)$$

Expressando os campos em função dos potenciais conforme (2.2) e considerando que tal

partícula seja um elétron, de carga igual a $-e$, temos que:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left[-\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]. \quad (2.5)$$

As características da abordagem adotada para tratar o problema proposto, descritas na seção 2.2.1, nos permitem reescrever esta equação de uma forma mais simples. Considerando a dependência espacial em uma única dimensão (a coordenada x), podemos desprezar as derivadas espaciais em relação às demais coordenadas. Além disso, podemos também utilizar a forma proposta para o potencial vetor (2.3) para realizar os produtos vetoriais. Assim, a expressão (2.5) fica:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left[\hat{x} \left(\frac{v_y}{c} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \hat{y} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{v_x}{c} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \right]. \quad (2.6)$$

Tomando a parte transversal dessa expressão,

$$\frac{dp_y}{dt} = \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} \right), \quad (2.7)$$

e considerando que a velocidade inicial seja nula (ou seja, $v_x(0) = 0$), obtemos uma relação simples entre a velocidade transversal v_y e o potencial vetor A :

$$p_y = \frac{e}{c} A \Rightarrow v_y = \frac{1}{\gamma} \frac{eA}{mc}. \quad (2.8)$$

Voltando à equação (2.6), tomamos a sua parte longitudinal,

$$\frac{dp_x}{dt} = e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{v_y}{c} \frac{\partial A}{\partial x} \right), \quad (2.9)$$

e substituímos nela a velocidade v_y dada pela expressão (2.8). Fazendo isso e escrevendo o momento longitudinal em função da velocidade ($p_x = m\gamma v_x$), temos que:

$$\frac{d}{dt}(\gamma v_x) = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \frac{e^2}{m^2 c^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial |A|^2}{\partial x} \right). \quad (2.10)$$

Agora, analisando o movimento dos elétrons do plasma e considerando que estamos em um regime fracamente não linear (no qual a amplitude do pulso permanece pequena),

vamos fazer algumas aproximações. Expressando γ em função da velocidade dos elétrons,

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (2.11)$$

e considerando que a propagação longitudinal do pulso laser no plasma excita um movimento oscilatório nos elétrons que é muito mais intenso no sentido transversal¹, podemos fazer a seguinte aproximação sobre a velocidade dos mesmos:

$$v_x \ll v_y \Rightarrow v^2 \approx v_y^2.$$

Aplicando essa aproximação em (2.11) e considerando a relação (2.8), temos que:

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \approx 1 - \frac{v_y^2}{c^2} = 1 - \frac{e^2|A|^2}{\gamma^2 m^2 c^4} \Rightarrow \gamma = \left(1 + \frac{e^2|A|^2}{m^2 c^4}\right)^{1/2}. \quad (2.12)$$

Por fim, considerando que $|A|^2 \ll 1$ em regimes fracamente não lineares, vamos expandir esta expressão:

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{e^2|A|^2}{m^2 c^4}, \quad \frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{e^2|A|^2}{m^2 c^4}. \quad (2.13)$$

Aplicando estas aproximações na equação (2.10) e mantendo somente os termos não lineares de mais baixa ordem, chegamos na seguinte expressão:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{e^2}{m^2 c^4} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial |A|^2}{\partial x} \right). \quad (2.14)$$

Neste ponto, vamos introduzir as seguintes normalizações,

$$\frac{v}{c} \rightarrow v, \quad \frac{p}{mc} \rightarrow p, \quad \frac{eA}{mc^2} \rightarrow A, \quad \frac{e\phi}{mc^2} \rightarrow \phi, \quad (2.15)$$

que nos permitem reescrever (2.14) da seguinte forma:

$$\frac{dv_x}{dt} = c^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{c^2}{2} \frac{\partial |A|^2}{\partial x}. \quad (2.16)$$

Como estamos tratando o plasma utilizando um modelo de fluido, vamos aplicar a

¹Este movimento é causado pela força ponderomotriz, representada na equação (2.10) pela derivada espacial do módulo quadrado do potencial vetor (associado ao envelope do pulso laser); a força ponderomotriz é uma força desfocalizadora, que expulsa os elétrons da região de maior intensidade do pulso.

equação da continuidade para a sua densidade de elétrons \bar{n} :

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{n} \mathbf{v}) = 0. \quad (2.17)$$

Essa densidade pode ser escrita como a soma de uma densidade de equilíbrio n_0 e uma perturbação δn na mesma:

$$\bar{n} \approx n_0 + \delta n = n_0 \left(1 + \frac{\delta n}{n_0} \right) = n_0(1 + n), \quad n \equiv \frac{\delta n}{n_0}. \quad (2.18)$$

Considerando a dependência espacial unidimensional que estamos utilizando, podemos substituir o divergente existente na equação (2.17) por uma derivada em relação à coordenada x , e o vetor velocidade pela sua componente longitudinal v_x . Além disso, aplicando a expansão (2.18) e considerando que a velocidade longitudinal dos elétrons no plasma é uma grandeza de ordem perturbativa, podemos reescrever a equação (2.17) da seguinte forma, mantendo apenas os termos não lineares de mais baixa ordem:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \quad (2.19)$$

Se derivarmos a expressão (2.19) em relação ao tempo,

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.20)$$

podemos substituir a derivada temporal da velocidade longitudinal pela expressão (2.16). Fazendo isso, chegamos à seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 |A|^2}{\partial x^2}. \quad (2.21)$$

Consideramos agora a equação de Poisson, escrita com o potencial eletrostático ϕ normalizado conforme definido na expressão (2.15),

$$c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \omega_p^2 n, \quad \omega_p^2 \equiv \frac{4\pi n_0 e^2}{m},$$

onde ω_p é a frequência de plasma, pode ser aplicada na expressão (2.21). Com isso, obtemos finalmente a seguinte equação para a densidade de elétrons:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + \omega_p^2 n = \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 |A|^2}{\partial x^2}. \quad (2.22)$$

Essa equação é do tipo oscilador harmônico forçado, sendo que a força que atua no mesmo é a força ponderomotriz.

2.2.4 Equação do envelope do pulso laser

Partindo da lei de Ampère,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.23)$$

e fazendo uso de (2.2) para expressar os campos em função dos potenciais, chegamos à seguinte expressão:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right).$$

Escolhendo o calibre de Coulomb, ou seja, considerando que a divergência do potencial vetor é nula ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), podemos simplificar a expressão anterior, escrevendo-a da seguinte forma:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c} - \nabla \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (2.24)$$

Tomando a parte transversal de (2.24), considerando as normalizações definidas e a dependência espacial unidimensional (na coordenada x), temos que:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A = \frac{4\pi e}{m} J_y. \quad (2.25)$$

A corrente transversal J_y pode ser expressa como função da velocidade transversal v_y . Fazendo isso e, utilizando a relação (2.8) com as normalizações que definimos em (2.15), podemos ainda expressá-la como função do potencial vetor:

$$J_y = -e\bar{n}v_y = -\frac{\bar{n}e}{\gamma} A. \quad (2.26)$$

Inserindo (2.26) na equação (2.25),

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A = -\frac{\omega_p^2}{\gamma} \bar{n} A, \quad (2.27)$$

expandindo a densidade (2.18), o fator relativístico (2.13) e mantendo somente os termos de menor ordem, chegamos finalmente à equação que descreve o envelope do pulso laser:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A = -\omega_p^2 \left(1 + n - \frac{|A|^2}{2} \right) A. \quad (2.28)$$

No lado direito da igualdade da equação (2.28) podemos observar as características não lineares da teoria: o termo de acoplamento entre a densidade e o potencial vetor representa a não linearidade ponderomotriz, e o termo cúbico do potencial vetor que se origina da expansão do fator γ para um regime fracamente não linear.

2.2.5 Normalização

Considerando que os fenômenos físicos do sistema em estudo ocorrem na escala de tempo da frequência de plasma ω_p , convém normalizarmos a coordenada temporal em nossas equações por esta quantidade. Como as velocidades já foram normalizadas pela velocidade da luz c (2.15), normalizamos as dimensões espaciais por ω_p/c (que é o vetor de onda do plasma k_p):

$$t_{\text{norm}} \equiv \omega_p t \quad , \quad x_{\text{norm}} \equiv \frac{\omega_p}{c} x. \quad (2.29)$$

Com isso (e suprimindo os índices que indicam as coordenadas normalizadas: $t_{\text{norm}} \rightarrow t$, $x_{\text{norm}} \rightarrow x$), podemos reescrever as equações do pulso (2.28) e da densidade (2.22) normalizadas e adimensionalizadas:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A = - \left(1 + n - \frac{|A|^2}{2} \right) A, \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) n = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{|A|^2}{2}. \quad (2.31)$$

2.2.6 Aproximação modulacional

A equação (2.30) que descreve a evolução temporal do envelope do pulso laser é uma equação da onda não-homogênea, cuja inhomogeneidade – composta por termos perturbativos (n é uma perturbação na densidade e $|A|^2 \ll 1$) – faz com que a sua solução $A(x, t)$ varie lentamente no tempo e no espaço. Este comportamento nos permite aplicar a aproximação modulacional, conhecida também como aproximação de envelope com variação lenta, na qual o pulso pode ser escrito como o produto de uma amplitude complexa $a(x, t)$

por uma onda portadora:

$$A(x, t) = a(x, t)e^{i(k_0x - \omega_0t)}, \quad (2.32)$$

onde ω_0 e k_0 são a frequência e o vetor de onda do laser respectivamente. Essa solução evidencia as duas escalas existentes no problema em análise: uma rápida, de alta frequência, associada à evolução do campo representado pela parte real de (2.32), outra lenta, associada à evolução do envelope do pulso representado pelo módulo quadrado de (2.32). Na figura 2.2 ilustramos estas duas escalas.

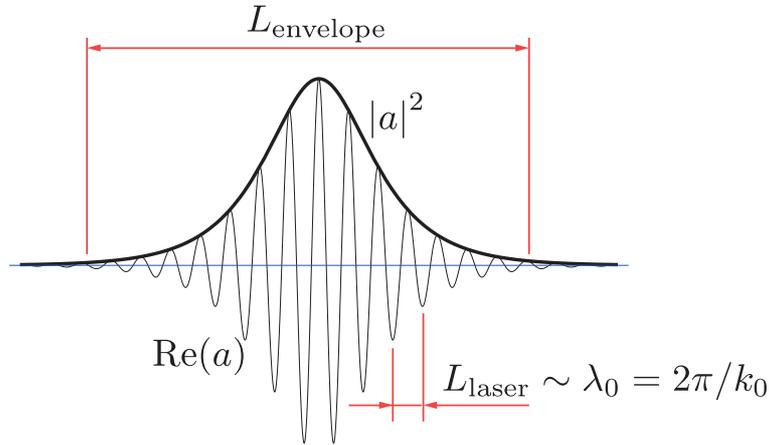


Figura 2.2: comparação entre as variações do envelope $|a|^2$ e do campo $\text{Re}[a]$.

Fazendo uso de (2.32), podemos reescrever as derivadas espaciais e temporais de A da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= \left[\frac{\partial a}{\partial x} + ik_0 a \right] e^{i(k_0x - \omega_0t)}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial a}{\partial x} - k_0^2 a \right] e^{i(k_0x - \omega_0t)}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \left[\frac{\partial a}{\partial t} - i\omega_0 a \right] e^{i(k_0x - \omega_0t)}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial a}{\partial t} - \omega_0^2 a \right] e^{i(k_0x - \omega_0t)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Substituindo (2.33) e (2.34) na equação do pulso (2.30),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial a}{\partial t} - \omega_0^2 a \right) - \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial a}{\partial x} - k_0^2 a \right) &= - \left(1 + n - \frac{|a|^2}{2} \right) a, \\ \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - 2i \left(\omega_0 \frac{\partial a}{\partial t} + k_0 \frac{\partial a}{\partial x} \right) + (k_0^2 - \omega_0^2 + 1)a &= - \left(n - \frac{|a|^2}{2} \right) a. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nesta equação vemos que o coeficiente $k_0^2 - \omega_0^2 + 1$, que pode ser escrito na sua forma dimensional como $c^2 k_0^2 - \omega_0^2_{\text{dim}} + \omega_p^2$, é nulo uma vez que a relação de dispersão linear $\omega_0^2_{\text{dim}} = \omega_p^2 + c^2 k_0^2$ é obedecida sem perda de generalidade. Deste modo, a equação (2.35) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - 2i \left(\omega_0 \frac{\partial a}{\partial t} + k_0 \frac{\partial a}{\partial x} \right) = - \left(n - \frac{|a|^2}{2} \right) a. \quad (2.36)$$

2.2.7 Equações no referencial do pulso laser

Para simplificar a análise do problema proposto, é interessante observarmos o sistema em um referencial que se move com a velocidade de grupo do pulso laser. Para isso, introduzimos a seguinte transformação de coordenadas:

$$\xi(x, t) \equiv x - v_g t, \quad (2.37)$$

$$\tau(x, t) \equiv t, \quad (2.38)$$

onde $v_g = k_0/\omega_0$ é a velocidade de grupo do pulso. Podemos então expressar as derivadas parciais em relação às coordenadas originais da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Aplicando estas relações na equação (2.36) temos que:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} - 2v_g \frac{\partial^2 a}{\partial \xi \partial \tau} + (v_g^2 - 1) \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - 2i \left[\omega_0 \left(\frac{\partial a}{\partial \tau} - v_g \frac{\partial a}{\partial \xi} \right) + k_0 \frac{\partial a}{\partial \xi} \right] = - \left(n - \frac{|a|^2}{2} \right) a. \quad (2.39)$$

Por inspeção (lembrando que $v_g = k_0/\omega_0$) vemos que os termos da equação (2.39) com derivada primeira de a em relação ξ se anulam (como esperado, dado que estamos agora no referencial do pulso). Com isso, e desprezando o termo com derivada mista (para manter somente os termos de mais baixa ordem, como fizemos nas aproximações anteriores), ela pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} + (v_g^2 - 1) \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - 2i\omega_0 \frac{\partial a}{\partial \tau} = - \left(n - \frac{|a|^2}{2} \right) a. \quad (2.40)$$

Observando a equação (2.40) e a forma do potencial vetor (2.32) proposta ao discutirmos a aproximação modulacional (seção 2.2.6), vemos que as derivadas em relação a τ representam a escala de variação do envelope a , que é lenta, e o termo $i\omega_0$ representa a escala de variação da onda portadora, que é rápida se comparada à variação do envelope. Assim,

$$|\omega_0|^2 \gg \left| \omega_0 \frac{\partial a}{\partial \tau} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} \right| \Rightarrow \left| \omega_0 \frac{\partial a}{\partial \tau} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 a}{\partial \tau^2} \right|. \quad (2.41)$$

Por isso, desprezando a derivada segunda do envelope em relação ao tempo, podemos reescrever a equação do envelope do pulso laser (2.40) da seguinte forma:

$$-2i\omega_0 \frac{\partial a}{\partial \tau} + (v_g^2 - 1) \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = - \left(n - \frac{|a|^2}{2} \right) a. \quad (2.42)$$

A equação da densidade de elétrons no plasma também pode ser reescrita no referencial do pulso laser. Tomando a equação (2.31), fazendo a transformação de coordenadas conforme (2.37) e (2.38) e desprezando termos com derivada mista e derivada segunda em relação a τ (como fizemos na equação do envelope), temos que:

$$\left(v_g^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) n = \frac{\partial^2 |a|^2}{\partial \xi^2}. \quad (2.43)$$

Agrupando os termos com derivada segunda em relação a ξ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(v_g^2 n - \frac{|a|^2}{2} \right) + n = 0,$$

depois de algumas manipulações algébricas (subtraindo-se um termo conveniente de ambos os lados da igualdade),

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(v_g^2 n - \frac{|a|^2}{2} \right) + \left(n - \frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2}{2} \right) = -\frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2}{2}. \quad (2.44)$$

Podemos definir um potencial escalar φ ,

$$\varphi \equiv \left(v_g^2 n - \frac{|a|^2}{2} \right), \quad (2.45)$$

que nos permite reescrever a equação (2.44) da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\varphi}{v_g^2} = -\frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2}{2}. \quad (2.46)$$

Essa é a equação diferencial que vamos utilizar para descrever o *wakefield*, que é a resposta do plasma à propagação do pulso laser. Por isso, precisamos agora voltar à equação do envelope do pulso e reescrevê-la em função do potencial φ . Isso pode ser feito somando-se e subtraindo-se termos convenientes na equação (2.42), de modo similar ao que fizemos em (2.44):

$$\begin{aligned} -2i\omega_0 \frac{\partial a}{\partial \tau} + (v_g^2 - 1) \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} &= - \left(n - \frac{|a|^2}{2} \right) a + \frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2 a}{2} - \frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2 a}{2}, \\ -2i\omega_0 \frac{\partial a}{\partial \tau} + (v_g^2 - 1) \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \left(1 - \frac{1}{v_g^2} \right) \frac{|a|^2 a}{2} + \left(n - \frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2}{2} \right) a &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando a definição de φ (2.45) e definindo $\kappa \equiv v_g^2 - 1$, finalmente temos:

$$-2i\omega_0 \frac{\partial a}{\partial \tau} + \kappa \left(\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2 a}{2} \right) + \frac{\varphi a}{v_g^2} = 0. \quad (2.47)$$

Essa é a equação diferencial que vamos utilizar para descrever a evolução temporal do envelope do pulso laser propagando-se no plasma.

Resumindo, (2.46) e (2.47) são as equações diferenciais parciais que formam o nosso modelo, descrevendo a dinâmica acoplada do *wakefield* e do pulso respectivamente.

2.2.8 Cálculo do potencial escalar φ

Com a transformação das coordenadas e a introdução do potencial escalar, foi possível expressar a resposta do plasma à propagação do pulso laser de uma forma conveniente (2.46), que (em cada instante de tempo) depende somente da distribuição espacial do envelope do pulso e pode ser resolvida utilizando-se a função de Green:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{v_g^2} \right) G(\xi, \xi') = \delta(\xi - \xi'), \quad (2.48)$$

que (aplicando-se as condições de contorno adequadas ao problema em questão) pode ser calculada:

$$G(\xi, \xi') = -v_g \Theta(\xi' - \xi) \operatorname{sen} \left(\frac{\xi - \xi'}{v_g} \right). \quad (2.49)$$

Conhecendo a função de Green, podemos calcular o potencial escalar integrando o produto de tal função pela inhomogeneidade da equação (2.46), expressa como função da variável

de integração ξ' :

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2v_g} \int_{\xi}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{\xi - \xi'}{v_g} \right) |a(\xi')|^2 d\xi'. \quad (2.50)$$

2.3 A formulação lagrangeana e o método variacional

2.3.1 Considerações iniciais

Nesta seção apresentamos uma formulação lagrangeana para o problema proposto (a partir da qual podemos resgatar as equações do nosso modelo através da aplicação das equações de Euler-Lagrange). Essa formulação nos permite aplicar o método variacional, que consiste em escolher uma solução-tentativa (um *ansatz*) para o pulso laser expressa em função de quantidades relevantes ao mesmo (posição, largura, fase, etc.) e inseri-la na densidade lagrangeana para calcular soluções (equações dinâmicas) para tais quantidades através da aplicação do princípio da mínima ação. Dada a complexidade da obtenção de uma solução analítica para o caso geral, aplicamos o método variacional para obter a solução de dois casos-limite: pulsos muito estreitos e pulsos muito largos. Como resultado, obtemos para cada um dos casos estudados equações diferenciais ordinárias para os parâmetros variacionais, que podem ser usadas na obtenção de um potencial efetivo para a largura. Com este potencial efetivo, similar ao obtido a partir da equação não-linear de Schrödinger [28], podemos estimar a existência e a localização de uma largura de equilíbrio (um ponto fixo) para um dado regime de propagação do pulso. Podemos então determinar se este vai se comportar como um sóliton, oscilando em torno desta largura de equilíbrio mas mantendo a sua forma, ou se vai se dispersar até se extinguir durante a sua propagação. Para os casos em que a largura de equilíbrio existe, podemos estimar a frequência e o período das oscilações linearizando a equação da largura em torno deste equilíbrio.

2.3.2 Formulação lagrangeana

No modelo adotado, o sistema físico em estudo é representado pelas equações diferenciais parciais (2.47) e (2.46), respectivamente dadas por:

$$2i\omega_0 \frac{\partial a}{\partial \tau} + \kappa \left(\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2 a}{2} \right) + \frac{\varphi a}{v_g^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\varphi}{v_g^2} = -\frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2}{2},$$

que descrevem a evolução temporal do envelope do pulso laser e da densidade do plasma. Precisamos então construir uma expressão tal que a aplicação das equações de Euler-Lagrange resulte nas equações do nosso modelo. Este processo de construção, realizado de forma manual através de tentativa e erro, resulta na seguinte expressão:

$$\mathcal{L} = i\omega_0 \left[a^* \frac{\partial a}{\partial \tau} - a \frac{\partial a^*}{\partial \tau} \right] - \kappa \left[\frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial a^*}{\partial \xi} + \frac{(aa^*)^2}{4v_g^2} \right] - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\varphi^2}{v_g^2} + \frac{\varphi}{v_g^2} (aa^*), \quad (2.51)$$

que é a densidade lagrangeana $\mathcal{L}(a, a^*, \varphi, a_\tau, a_\tau^*, a_\xi, a_\xi^*, \varphi_\xi)$ do nosso sistema ². A integração de (2.51) sobre todo o espaço resulta no lagrangeano:

$$L = \int \mathcal{L} d\xi, \quad (2.52)$$

com o qual podemos estudar a conservação de energia do sistema físico em estudo, além de propor soluções para o mesmo utilizando o método variacional (a ser discutido no decorrer deste capítulo).

2.3.3 Método variacional

No tópico anterior, partindo das equações diferenciais obtidas na derivação do modelo, chegamos à formulação lagrangeana do sistema físico em estudo. Isto foi possível porque ambas as formulações são equivalentes. Em tese, podemos portanto obter a partir da formulação lagrangeana as equações diferenciais que foram o nosso ponto de partida. Isto é feito tomando-se a integral da ação do sistema,

$$\mathcal{S} = \int L d\tau, \quad (2.53)$$

e fazendo-se uso do princípio da mínima ação (ou princípio de Hamilton), o qual afirma que dentre todas as trajetórias possíveis que transcorrem entre os instantes de tempo τ_1 e τ_2 , o sistema escolhe aquela que minimiza a sua ação. Matematicamente, o que fazemos é tomar a variação da ação $\delta\mathcal{S}$ e igualá-la a zero, obtendo assim a seguinte condição (que, ao ser resolvida, resulta nas equações de Euler-Lagrange):

$$\delta\mathcal{S} = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L d\tau = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int \mathcal{L} d\xi = 0. \quad (2.54)$$

²Os índices subscritos nas variáveis indicam derivadas parciais: $\partial a/\partial \tau \rightarrow a_\tau$; usamos esta notação para simplificar a escrita de expressões que são funções das coordenadas e suas derivadas, tais como lagrangeanos e hamiltonianos.

Porém, ao invés de resolvermos a expressão (2.54) inserindo diretamente nela a densidade lagrangeana (2.51), o que resultaria nas equações diferenciais parciais que já conhecemos, vamos aplicar o método variacional, propondo uma solução-tentativa (*ansatz*) para o envelope do pulso laser, expressa em função de quantidades relevantes (formalmente chamadas de parâmetros variacionais) para as quais pretendemos obter equações dinâmicas. Essa solução-tentativa é inserida na densidade lagrangeana que, ao ser integrada no espaço, resulta no lagrangeano expresso em função dos parâmetros variacionais. Finalmente, aplicando o princípio da mínima ação neste lagrangeano, chegamos às equações que governam a evolução temporal destes parâmetros. Uma vantagem da aplicação do método variacional é que as equações obtidas com seu uso são equações diferenciais ordinárias, mais simples de serem resolvidas que as equações (2.47) e (2.46), as quais são equações diferenciais parciais.

Trabalhos anteriores [21, 29, 30, 31, 32] utilizaram esta abordagem para tratar problemas similares, tais como a equação não-linear de Schrödinger e as equações de Zakharov. Analisando estes trabalhos, escolhemos para o envelope do pulso laser o mesmo *ansatz* proposto por Oliveira e Rizzato [32],

$$a(\xi, \tau) \equiv \sqrt{\frac{W}{2\Delta(\tau)}} \operatorname{sech} \left(\frac{\xi - \xi_c(\tau)}{\Delta(\tau)} \right) \exp \left\{ i \left[\delta(\tau) + \eta(\tau) \left(\xi - \frac{\xi_c(\tau)}{2} \right) + b(\tau) (\xi - \xi_c(\tau))^2 \right] \right\}, \quad (2.55)$$

onde os parâmetros variacionais do pulso são a sua largura $\Delta(\tau)$ e sua posição central $\xi_c(\tau)$, além de $\delta(\tau)$, $\eta(\tau)$ e $b(\tau)$, relacionados com a fase e a variação da frequência instantânea (*chirping*) do pulso. A normalização do *ansatz* foi definida de modo que sua integral no espaço resulta na potência W , proporcional ao número de fótons no pulso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi, \tau) a^*(\xi, \tau) d\xi = W. \quad (2.56)$$

Para que possamos expressar o lagrangeano (2.51) como função apenas dos parâmetros variacionais, precisamos calcular as derivadas do *ansatz* (e do seu complexo conjugado) em relação ao tempo e ao espaço, além de usá-lo para calcular o potencial escalar φ (que precisa também ser escrito como função de tais parâmetros).

Porém, ao inserirmos o *ansatz* (2.55) na expressão (2.50) para calcular o potencial escalar φ como função dos parâmetros variacionais, obtemos uma integral complicada, para a qual a existência de uma solução analítica não é garantida. Como esta complicação nos impede de obter uma expressão geral para o potencial escalar, vamos estudar dois

casos-limite do sistema fazendo aproximações sobre a largura do pulso laser: a propagação de pulsos estreitos e pulsos largos.

2.4 Aproximação de pulso estreito

O primeiro caso-limite a ser discutido é o caso dos pulsos estreitos. Consideramos pulsos estreitos aqueles cuja largura Δ é muito menor que comprimento de onda do plasma c/ω_p (ou seja, $\Delta \ll 1$ considerando as normalizações adotadas). Nesta condição, os pulsos se comportam como funções delta e dentro deles o potencial do *wakefield* é aproximadamente nulo ($\varphi \sim 0$). Com isso, podemos reescrever a equação do envelope (2.47) na aproximação de pulso estreito:

$$-2i\omega_0 \frac{\partial a}{\partial \tau} + \kappa \left(\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2 a}{2} \right) = 0. \quad (2.57)$$

Esta equação pode ser usada para calcular rapidamente a evolução temporal de um pulso estreito (pois nela o termo de acoplamento com o potencial φ é nulo, agilizando o processo numérico), e também na obtenção de uma densidade lagrangeana para este regime aproximado. Embora o potencial do *wakefield* seja nulo dentro do pulso, ele pode assumir valores grandes no rastro do mesmo, dados por

$$\varphi(\xi, \tau) \approx \frac{W}{2v_g} \operatorname{sen} \left[\frac{\xi - \xi_c(\tau)}{v_g} \right]. \quad (2.58)$$

Agora, como fizemos no início deste capítulo, nós aplicamos novamente o “caminho inverso” da formulação lagrangeana, buscando um funcional que nos permita resgatar a equação (2.57) a partir da aplicação das equações de Euler-Lagrange. Deste modo, chegamos à seguinte expressão, que atende o requisito citado:

$$\mathcal{L} = i\omega_0 (a^* a_\tau - a a_\tau^*) - \kappa \left[(a_\xi a_\xi^*) + \frac{(a a^*)^2}{4v_g^2} \right]. \quad (2.59)$$

Conhecendo a densidade lagrangeana podemos aplicar nela o *ansatz* (2.55) e, integrando-a no espaço, chegamos ao seguinte lagrangeano³:

$$L = -W \left[\frac{\kappa}{3\Delta^2} + \frac{\kappa W}{12v_g^2 \Delta} + \frac{\pi^2 \Delta^2}{6} \left(2\kappa b^2 + \omega_0 \dot{b} \right) + \kappa \eta^2 + \omega_0 (2\dot{\delta} + \xi_c \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}_c) \right], \quad (2.60)$$

³Aqui adotamos pontos sobre os parâmetros como notação para as derivadas (totais) em relação ao tempo: $d\Delta/d\tau \rightarrow \dot{\Delta}$, $d^2\Delta/d\tau^2 \rightarrow \ddot{\Delta}$, etc.

que é função dos parâmetros variacionais e das suas derivadas em relação à τ . Podemos agora obter as equações que governam a dinâmica de tais parâmetros através da aplicação das equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0. \quad (2.61)$$

Como veremos a seguir, as equações obtidas para os parâmetros variacionais são equações ordinárias, e não equações parciais como as obtidas para o envelope e a densidade. Fazendo isso para a largura $\Delta(\tau)$, ou seja, fazendo $q_j = \Delta(\tau)$ em (2.61), chegamos à seguinte equação:

$$\frac{8\kappa v_g}{\Delta} + \frac{\kappa W}{v_g} - 4\pi^2 v_g \Delta^3 (2\kappa b^2 + \omega_0 \dot{b}) = 0, \quad (2.62)$$

que depende de $\Delta(\tau)$, $b(\tau)$ e $\dot{b}(\tau)$. Aplicando o mesmo procedimento com relação ao fator de *chirping*, ou seja, fazendo $q_j = b(\tau)$, obtemos uma expressão para o mesmo que depende apenas da largura $\Delta(\tau)$ e sua derivada $\dot{\Delta}(\tau)$:

$$b = \frac{\omega_0 \dot{\Delta}}{2\kappa \Delta}. \quad (2.63)$$

Essa expressão pode ser derivada em relação à τ para obtermos $\dot{b}(\tau)$ escrito como função da largura $\Delta(\tau)$ e suas derivadas $\dot{\Delta}(\tau)$ e $\ddot{\Delta}(\tau)$:

$$\dot{b} = \frac{\omega_0}{2\kappa} \left(\frac{\ddot{\Delta}}{\Delta} - \frac{\dot{\Delta}^2}{\Delta^2} \right). \quad (2.64)$$

Agora que escrevemos $b(\tau)$ e $\dot{b}(\tau)$ como funções da largura $\Delta(\tau)$ e suas derivadas, podemos finalmente obter uma solução para a mesma. Substituindo (2.63) e (2.64) em (2.62) chegamos na seguinte expressão para $\ddot{\Delta}(\tau)$:

$$\ddot{\Delta} = \frac{\kappa^2}{2\pi^2 v_g^2 \omega_0^2 \Delta^2} \left(\frac{8v_g^2}{\Delta} + W \right). \quad (2.65)$$

Nesta equação, podemos interpretar $\ddot{\Delta}(\tau)$ como sendo o gradiente de um potencial efetivo U_{eff} ,

$$\ddot{\Delta} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial \Delta},$$

que pode ser calculado integrando-se (2.65) em relação à Δ . Fazendo isso, obtemos a seguinte expressão:

$$U_{eff}^{narrow} = \frac{\kappa^2}{2\pi^2 v_g^2 \omega_0^2 \Delta} \left(\frac{4v_g^2}{\Delta} + W \right), \quad (2.66)$$

cuja forma não possui um mínimo local pra valores positivos de Δ . A figura 2.3, calculada para uma potência $W = 0,01$ e velocidade de grupo $v_g^2 = 0,99$, exemplifica a forma do potencial efetivo na aproximação de pulso estreito U_{eff}^{narrow} : na ausência de um ponto de equilíbrio, a largura de um pulso neste regime aumenta monotonicamente à medida que o tempo avança. Para confirmar esta observação, podemos igualar a segunda derivada da largura do pulso na equação (2.65) a zero na busca de um ponto mínimo que possa representar uma largura de equilíbrio. Fazendo isso, obtemos a seguinte expressão:

$$\ddot{\Delta} = 0 \Rightarrow \Delta_n = -\frac{8v_g^2}{W}, \quad (2.67)$$

que mostra que, para quaisquer valores dos parâmetros envolvidos, a da largura de equilíbrio obtida na aproximação de pulso estreito Δ_n é sempre negativa (ou seja, não possui significado físico). Por isso, a expressão (2.67) não é aplicável. Dada a inexistência de uma largura de equilíbrio neste regime, pulsos inicialmente estreitos tendem apenas a se espalhar, aumentando a sua largura até alcançarem a região de transição $\Delta \sim 1$. Nesta região, a aproximação falha e nossas estimativas analíticas deixam de ser válidas, de modo que precisamos conduzir simulações numéricas para estudar a dinâmica do sistema.

Com relação aos demais parâmetros variacionais, a aplicação das equações de Euler-Lagrange (2.61) resulta nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} q_j = \xi_c(\tau) &\rightarrow \dot{\eta} = 0 \Rightarrow \eta = \text{constante}; \\ q_j = \delta(\tau) &\rightarrow \text{trivialmente satisfeita}; \\ q_j = \eta(\tau) &\rightarrow \dot{\xi}_c = \frac{\kappa}{\omega_0} \eta \Rightarrow \xi_c = \frac{\kappa}{\omega_0} \eta \tau + \xi_c(0), \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde $\xi_c(0)$ é posição inicial do centro do pulso. Ou seja, não há restrições para a fase $\delta(\tau)$ e, escolhendo condições iniciais tais que as constantes η e $\xi_c(0)$ sejam nulas (o que podemos fazer sem perda de generalidade), vemos que não há dinâmica para tais parâmetros. De fato, poderíamos voltar ao *ansatz* e reescrevê-lo de forma simplificada, facilitando a

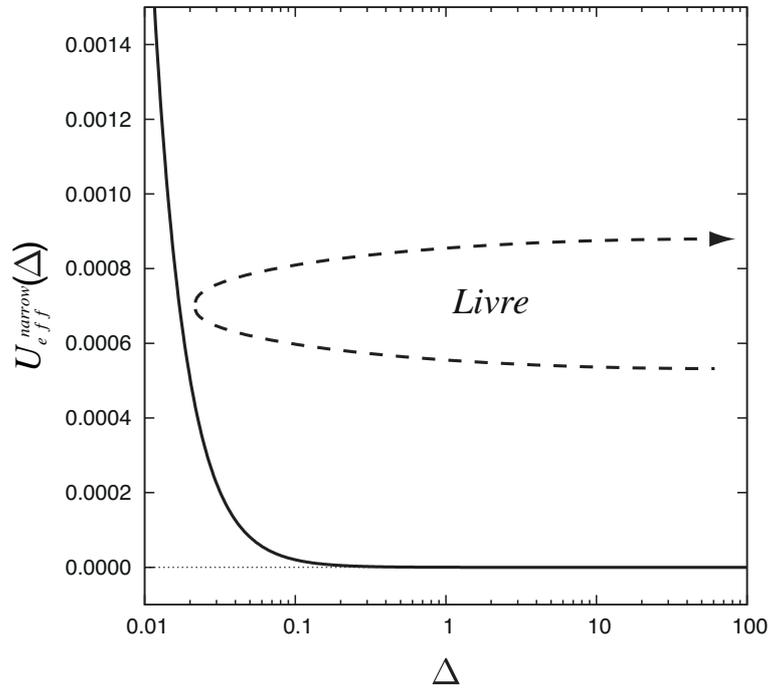


Figura 2.3: potencial efetivo U_{eff}^{narrow} : aproximação de pulso estreito ($W = 0,01$, $v_g^2 = 0,99$).

execução dos cálculos intermediários realizados para chegarmos à equação da largura Δ .

2.5 Aproximação de pulso largo

Consideramos pulsos largos aqueles cuja largura Δ é muito maior que o comprimento de onda do plasma c/ω_p ou ainda, em nossas variáveis adimensionais, $\Delta \gg 1$. Nesta condição, a intensidade do pulso $|a|^2$ varia lentamente na equação 2.50 e a integração por partes mostra que

$$\varphi \rightarrow -\frac{|a|^2}{2} \quad (2.69)$$

e $n \rightarrow 0$ se aproximarmos $\partial|a|^2/\partial\xi \rightarrow 0$ (esta é uma aproximação razoável dado que, como mencionamos, $|a|^2$ varia lentamente no regime proposto). A dinâmica de pulsos largos passa então a ser descrita por uma equação não linear de Schrödinger com a seguinte forma:

$$-2i\omega_0 \frac{\partial a}{\partial \tau} + \kappa \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \frac{|a|^2 a}{2} = 0. \quad (2.70)$$

Seguindo o mesmo procedimento adotado no desenvolvimento da aproximação de pulso estreito, procuramos por uma densidade lagrangeana na qual a aplicação das equações de Euler-Lagrange resulte na equação (2.70). Essa densidade lagrangeana existe e possui a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = i\omega_0 (a^* a_\tau - a a_\tau^*) - \kappa (a_\xi a_\xi^*) - \frac{(aa^*)^2}{4}. \quad (2.71)$$

Aplicando o *ansatz* (2.55) na expressão (2.71) e integrando-a no espaço, obtemos o lagrangeano do sistema na aproximação de pulso largo, escrito como função dos parâmetros variacionais:

$$L = -W \left[\frac{\kappa}{3\Delta^2} + \frac{W}{12\Delta} + \frac{\pi^2 \Delta^2}{6} (2\kappa b^2 + \omega_0 \dot{b}) + \kappa \eta^2 + \omega_0 (2\dot{\delta} + \xi_c \dot{\eta} - \eta \dot{\xi}_c) \right]. \quad (2.72)$$

Considerando este lagrangeano e aplicando a equação de Euler-Lagrange (2.61) com relação à $\Delta(\tau)$, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{8\kappa}{\Delta} + W - 4\pi^2 \Delta^3 (2\kappa b^2 + \omega_0 \dot{b}) = 0. \quad (2.73)$$

Como a aplicação da equação de Euler-Lagrange com relação à $b(\tau)$ no lagrangeano da aproximação de pulso largo (2.72) resulta na mesma expressão obtida para a aproximação de pulso estreito, podemos obter uma equação para $\ddot{\Delta}(\tau)$ neste regime substituindo (2.63) e (2.64) em (2.73):

$$\ddot{\Delta} = \frac{\kappa}{2\pi^2 \omega_0^2 \Delta^2} \left(\frac{8\kappa}{\Delta} + W \right). \quad (2.74)$$

a partir desta equação, podemos calcular um potencial efetivo U_{eff} (do mesmo modo que fizemos na aproximação de pulso estreito):

$$U_{eff}^{wide} = \frac{\kappa}{2\pi^2 \omega_0^2 \Delta} \left(\frac{4\kappa}{\Delta} + W \right). \quad (2.75)$$

A forma deste potencial efetivo admite soluções periódicas uma vez que, diferentemente do potencial obtido na aproximação de pulso estreito (2.75), possui um mínimo local para valores positivos de Δ . A figura 2.4, calculada para uma potência $W = 0,01$ e velocidade de grupo $v_g^2 = 0,99$, exemplifica a forma do potencial efetivo na aproximação de pulso largo U_{eff}^{wide} : para valores de energia suficientemente pequenos, a largura do pulso laser fica confinada na região (a), oscilando em torno do seu ponto de equilíbrio; para valores

maiores de energia, a largura fica na região (b), livre para aumentar indefinidamente.

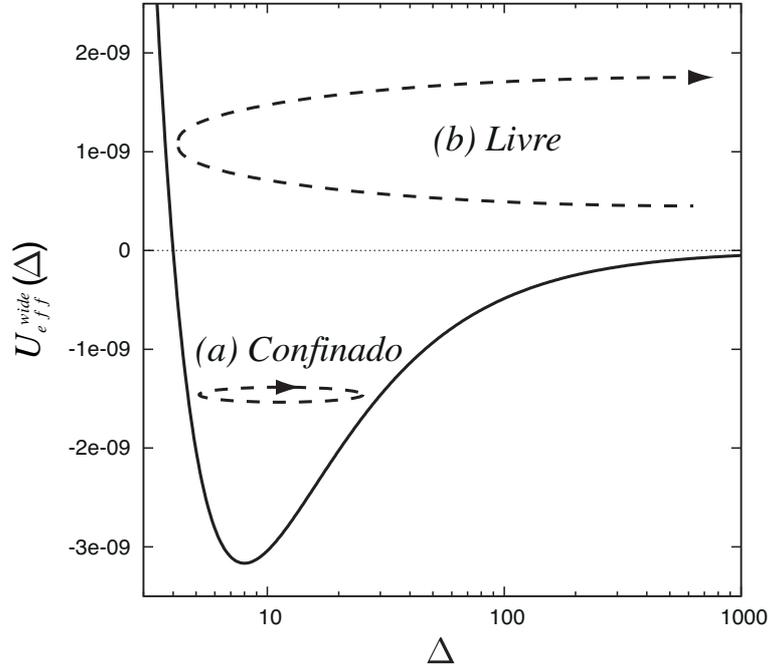


Figura 2.4: potencial efetivo U_{eff}^{wide} : aproximação de pulso largo ($W = 0,01$, $v_g^2 = 0,99$).

É interessante observarmos que os potenciais efetivos obtidos em ambas as aproximações que fizemos são característicos de equações de Schrödinger em regimes fracamente não lineares [28], compatíveis com os casos que estamos estudando (pois $|a|^2 \ll 1$). Em regimes fortemente não lineares, geralmente não é possível obter-se expressões analíticas para tais potenciais, e métodos numéricos são necessários para obtê-los [33].

Igualando $\ddot{\Delta} = 0$, podemos calcular a localização do ponto mínimo no potencial. Fazendo isso na equação (2.74) temos a seguinte expressão:

$$\Delta_w = -\frac{8\kappa}{W}. \quad (2.76)$$

Como qualquer valor não nulo de $\kappa \equiv v_g^2 - 1$ é sempre negativo (pois $v_g \leq 1$), e como a potência W , que mede o número de fótons no pulso, é sempre positiva, temos que Δ_w sempre é positivo para um pulso nesta aproximação. Ou seja, existe um ponto de equilíbrio para a largura neste regime, em torno do qual (sob condições iniciais adequadas) ela fica oscilando. Linearizando $\ddot{\Delta}$ em torno deste ponto, podemos calcular a frequência linear Ω associada à esta oscilação frente à uma perturbação:

$$\Omega = \frac{W^2}{32\pi\omega_0|\kappa|}. \quad (2.77)$$

Em resumo, se $\Delta_w \gg 1$ a solução estável está localizada na região de pulso largo, onde espera-se que a aproximação de pulso largo permaneça válida para todos os tempos se a condição inicial residir suficientemente próxima da solução estável e satisfizer $\dot{\Delta} = 0$. Neste caso, sua largura ficará oscilando em torno do seu valor de equilíbrio $\Delta_w = 8|\kappa|/W$. Por outro lado quando $\Delta_w \lesssim 1$, mesmo utilizando-se uma condição inicial de pulso largo $\Delta(\tau = 0) > 1$, a largura do pulso vai se comprimir na direção do seu valor de equilíbrio Δ_w localizada no mínimo do potencial efetivo. Porém, uma vez que este valor de equilíbrio reside agora em uma região em que a aproximação de pulso largo não é válida, não temos estimativas analíticas para o seu comportamento. A dinâmica nesta região deve então ser analisada utilizando-se simulações numéricas.

Com relação aos demais parâmetros variacionais, a aplicação das equações de Euler-Lagrange nos mesmos nesta aproximação resulta em equações iguais as obtidas na aproximação de pulso estreito (2.68).

2.6 Soluções numéricas

2.6.1 Considerações iniciais

Nesta seção conduzimos simulações numéricas do sistema físico em estudo. Tais simulações, realizadas a partir das equações do envelope do pulso e do potencial do *wakefield*, são realizadas tanto para verificar a validade das estimativas analíticas (obtidas a partir do formalismo lagrangeano e do método variacional) quanto para investigar a região de transição entre as aproximações de pulso estreito e pulso largo, $\Delta \sim 1$, onde não existem estimativas disponíveis para a dinâmica do sistema.

Inicialmente, definimos os parâmetros que caracterizam o regime a ser simulado e as condições iniciais apropriadas para o laser, que nos permitem gerar pulsos estreitos e pulsos largos. Para cada condição inicial escolhida, calculamos numericamente a evolução do envelope do laser e do potencial do *wakefield*, utilizando para isso as equações (2.47) e (2.46) ou (2.50), obtidas no desenvolvimento do modelo. Chamamos estas soluções de soluções completas, uma vez que nos fornecem a evolução autoconsistente destes campos, além de não possuírem aproximações com relação à largura do pulso. Em seguida, utilizamos a equação do envelope na aproximação de pulso estreito (2.57) para resolver os pulsos com condições iniciais neste regime. Analogamente, a equação do envelope na aproximação de pulso largo (2.70) é utilizada para resolver os pulsos com condições iniciais compatíveis com este regime. Chamamos estas soluções de soluções aproximadas, nas aproximações de pulso estreito e pulso largo respectivamente.

2.6.2 Método numérico

A amplitude do pulso laser $a(\xi, \tau)$ é uma grandeza complexa, que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$a(\xi, \tau) = a_r(\xi, \tau) + i a_i(\xi, \tau) \quad , \quad a_r, a_i \in \mathcal{R} .$$

Para simplificar o desenvolvimento do programa (e resolver implicitamente a evolução da fase), separamos as partes real e imaginária da equação do envelope, tratando-as como duas equações reais. Para obter a solução completa, por exemplo, nós reordenamos os termos da equação (2.47),

$$i \frac{\partial a}{\partial \tau} = -\frac{1}{2\omega_0} \left[\kappa \left(\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2 a}{2} \right) + \frac{\varphi a}{v_g^2} \right], \quad (2.78)$$

e a separamos em duas partes, uma real outra imaginária:

$$\frac{\partial a_i}{\partial \tau} = \frac{1}{2\omega_0} \left[\kappa \left(\frac{\partial^2 a_r}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2 a_r}{2} \right) + \frac{\varphi a_r}{v_g^2} \right], \quad (2.79)$$

$$-\frac{\partial a_r}{\partial \tau} = \frac{1}{2\omega_0} \left[\kappa \left(\frac{\partial^2 a_i}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v_g^2} \frac{|a|^2 a_i}{2} \right) + \frac{\varphi a_i}{v_g^2} \right]. \quad (2.80)$$

Estas equações juntamente com a equação (2.46) do potencial do *wakefield* φ são integradas no espaço e no tempo (de forma intercalada como descrevemos a seguir) sendo que o envelope do pulso em um dado instante de tempo e em uma posição específica do espaço é resgatado calculando-se a soma quadrática das partes real e imaginária ($|a|^2 = a_r^2 + a_i^2$).

Com relação à parte espacial do problema, o primeiro passo é discretizar a coordenada ξ em m sítios de tamanho Δ_ξ dados por

$$\Delta_\xi \equiv \frac{\xi_{\text{final}} - \xi_{\text{inicial}}}{m},$$

onde ξ_{inicial} e ξ_{final} definem o intervalo em ξ dentro do qual as equações serão integradas. Nas simulações realizadas, os intervalos $\xi_{\text{final}} - \xi_{\text{inicial}}$ variaram entre 100 e 1.000 e o número de sítios variou entre 1.024 e 8.192, de acordo com a largura e o comportamento do pulso. Em seguida, utilizamos o método das diferenças finitas [34] para calcular as derivadas espaciais existentes nas equações do envelope, considerando condições de contorno periódicas nas extremidades do intervalo espacial. No caso da solução completa, a distri-

buição espacial do potencial φ , associado à densidade do plasma, é calculada resolvendo-se numericamente a equação (2.50).

Com a distribuição espacial das grandezas de interesse calculadas e conhecidas para $\tau = 0$, partimos para a evolução temporal do sistema. Para isso, definimos o intervalo de tempo para o qual as equações serão integradas e o discretizamos em incrementos de tamanho Δ_τ (definidos de forma análoga aos incrementos da coordenada espacial). Para cada passo de integração espacial, incrementamos o tempo fazendo $\tau = \tau + \Delta_\tau$ e integramos as derivadas temporais das equações utilizando o integrador numérico DLSODE, uma rotina de integração de dupla precisão contida no LSODE [35] (*Livermore Solver for Ordinary Differential Equations*), que faz parte de um pacote de integradores desenvolvidos para Fortran chamado ODEPACK [36]. Esse ciclo alternado de integrações no espaço seguidas por integrações no tempo é repetido até atingirmos o tempo final desejado para avaliar a evolução do sistema.

Para garantir a precisão das soluções, monitoramos a conservação da área e da energia do pulso ao longo das integrações, sendo que as variações presentes foram da ordem de 10^{-6} .

2.6.3 Parâmetros

Como mencionamos previamente, as simulações numéricas têm como objetivos a validação das estimativas analíticas e a investigação da dinâmica do sistema quando um pulso cruza a região de transição $\Delta \sim 1$, na qual nenhuma aproximação ou estimativa é válida. Por isso, vamos definir dois regimes distintos, nos quais conduziremos as simulações numéricas:

- **regime 1**, com parâmetros tais que resultem em uma largura de equilíbrio localizada no limiar entre a região de validade da aproximação de pulsos estreitos e a região de transição ($\Delta_w \lesssim 1$),
- **regime 2**, com parâmetros tais que resultem em uma largura de equilíbrio localizada na região de validade da aproximação de pulsos largos ($\Delta_w \gg 1$).

Para tanto, da expressão para o cálculo da largura de equilíbrio ($\Delta_w = 8|\kappa|/W$), vemos que tais regimes podem ser obtidos através da escolha de valores adequados para a velocidade de grupo do v_g (que, além de definir o parâmetro $\kappa \equiv v_g^2 - 1$, define implicitamente outras características do laser e do plasma como veremos em seguida) e para a potência W do pulso.

Velocidade de grupo do pulso (v_g)

Para iniciar os cálculos numéricos, precisamos definir os parâmetros e condições iniciais que caracterizam o sistema físico a ser resolvido. Para tanto, o primeiro parâmetro que definimos é a velocidade de grupo v_g , que é a velocidade com que o pulso laser se propaga no plasma. Com as normalizações que estamos utilizando, ao fixarmos o valor de v_g (que é a razão entre a frequência ω_0 e o número de onda k_0 do laser) estamos implicitamente caracterizando o regime em que o pulso se propaga no plasma. A partir da relação de dispersão e da velocidade de grupo dada, podemos calcular ω_0 e k_0 :

$$\omega_0^2 = 1 + k_0^2, \quad v_g = \frac{k_0}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{1}{(1 - v_g^2)}, \quad k_0^2 = \frac{v_g^2}{(1 - v_g^2)}. \quad (2.81)$$

Estamos particularmente interessados em estudar casos em que o critério $\omega_0^2 \gg \omega_p^2$ seja satisfeito, que equivale à propagação de um pulso em um plasma rarefeito, conhecido como plasma do tipo *underdense*. Esse regime é adequado para acelerar elétrons com um pulso laser, uma vez que os elétrons possuem grande mobilidade e que a energia que ganham na aceleração é proporcional a ω_0^2/ω_p^2 [1]. Como na relação de dispersão (2.81) a frequência do laser já está normalizada pela frequência de plasma, então basta que $\omega_0^2 \gg 1$ para que o critério proposto seja satisfeito. Utilizamos em todas as soluções numéricas apresentadas neste capítulo $v_g^2 = 0,99$ (ou, equivalentemente, $|\kappa| = 0,01$), garantindo assim esta condição:

$$v_g^2 = 0,99 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{1}{(1 - 0,99)} = 100 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 \gg 1.$$

Uma observação relevante é que, mesmo estudando a propagação do laser em um regime do tipo *underdense*, não supomos que este se propaga na velocidade da luz ($v_g = 1$). Embora esta seja uma hipótese usualmente adotada nos trabalhos que visam analisar principalmente a dinâmica transversal do pulso [21, 37], ela simplifica demasiadamente o modelo para o estudo da dinâmica longitudinal e a sua adoção impossibilitaria a observação dos efeitos apresentados neste capítulo.

Potência do pulso (W)

Com o valor do parâmetro κ definido no tópico anterior, basta definirmos dois valores de potência adequados para caracterizar completamente os regimes que vamos investigar (com as características descritas no início desta seção). Escolhemos uma potência baixa, $W = 0,01$, que resulta em uma largura de equilíbrio na região de validade da aproximação

de pulsos largos ($\Delta_w = 8,0$), e uma potência “alta”, $W = 0,10$, que resulta em uma largura de equilíbrio no limiar da região de validade da aproximação de pulsos estreitos ($\Delta_w = 0,8$). A potência $W = 0,10$ é denominada “alta” na comparação com o valor anteriormente definido ($W = 0,01$), pois em todos os casos a serem estudados os valores de potência devem ser pequenos o suficiente para que a amplitude do envelope não viole a aproximação fracamente não linear ($|a|^2 \ll 1$).

Resumo

A tabela a seguir resume os regimes a serem investigados, com os respectivos valores de parâmetros que os caracterizam:

Regime	Parâmetros	Largura de Equilíbrio	Condição atendida
Baixa potência	$ \kappa = 0,01$, $W = 0,01$	$\Delta_w = 8,0$	$\Delta_w \gg 1$
“Alta” potência	$ \kappa = 0,01$, $W = 0,10$	$\Delta_w = 0,8$	$\Delta_w \lesssim 1$

2.7 Condições iniciais

Para iniciarmos uma simulação, precisamos definir o perfil espacial do envelope do pulso laser no instante $\tau = 0$. Ou seja, precisamos definir condições iniciais para a_r e a_i . Por simplicidade, escolhemos um pulso centralizado em $\xi = 0$, cuja amplitude possui as seguintes componentes:

$$a_r(\xi, \tau) = \sqrt{\frac{W}{2\Delta(0)}} \operatorname{sech} \left[\frac{\xi}{\Delta(0)} \right], \quad (2.82)$$

$$a_i(\xi, \tau) = 0, \quad (2.83)$$

onde W é a potência e $\Delta(0)$ é a largura do pulso em $\tau = 0$. Deste modo, o envelope $|a|^2$ tem a mesma forma que o *ansatz* proposto, e a integral do mesmo no espaço resulta na potência adotada:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (a_r^2 + a_i^2) d\xi = \frac{W}{2\Delta(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\xi}{\Delta(0)} \right] d\xi = W.$$

Com relação ao potencial do *wakefield* φ , não precisamos definir nenhuma condição inicial para o mesmo: uma vez que o envelope esteja definido no espaço, podemos calcular φ a partir da equação (2.50). Esta foi a razão pela qual é conveniente introduzimos o potencial φ em nosso modelo (ter uma resposta do plasma “escravizada” à dinâmica do envelope) ao invés de trabalharmos com a densidade n .

Através da potência W e da largura inicial $\Delta(0)$, controlamos a razão de aspecto do envelope do pulso, ou seja, a relação entre sua intensidade e sua distribuição espacial. Deste modo, trabalhando com estes parâmetros (e alterando a razão entre eles) podemos obter pulsos estreitos ou pulsos largos. Já definimos que vamos estudar dois regimes, com potências baixa ($W = 0,01$) e alta ($W = 0,10$). Em cada um deles, vamos fazer duas simulações, uma com uma condição inicial de pulso estreito, $\Delta(0) = 0,25$, outra com uma condição inicial de pulso largo $\Delta(0) = 10,0$. Com este conjunto de parâmetros, podemos verificar todas as previsões analíticas que fizemos e também investigar a dinâmica do sistema quando a largura do pulso atinge a região de transição $\Delta \sim 1$ nos dois modos que isto pode ocorrer: um pulso estreito se expande ou um pulso largo se contrai na direção dessa região.

Para finalizar a discussão sobre as condições iniciais adotadas, é importante observar que em todos os casos investigados numericamente neste trabalho, para cada valor inicial $\Delta(0)$ escolhido nós iniciamos a simulação precisamente no topo das curvas do potenciais efetivo representado na figura 2.3 ou figura 2.4 (de acordo com o regime sendo estudado), de modo que o momentum inicial associado à expansão ou retração do pulso é nulo.

2.8 Comparações: aproximações *vs.* sistema completo

Com as estimativas prévias disponíveis, prosseguimos para a investigação da dinâmica através de simulações numéricas. Vamos exibir o comportamento do sistema e fazer comparações utilizando gráficos com a evolução temporal da largura, gráficos com os perfis espaciais “instantâneos” dos campos (ou seja, representando a distribuição espacial dos mesmos em um dado instante) e também através de curvas de contorno para a intensidade do laser $|a(\xi, \tau)|^2$.

2.8.1 Regime de baixa potência ($W = 0,01$)

Tomamos a potência $W = 0,01$ com $v_g^2 = 0,99$. Neste caso $\kappa = 0,01$ e $\Delta_w = 8$, ou seja, a solução de equilíbrio está na região em que a aproximação de pulso largo é válida. Vamos apresentar duas simulações para estes parâmetros, uma para um pulso inicialmente largo ($\Delta(0) = 10,0$), outra para um pulso inicialmente estreito ($\Delta(0) = 0,25$).

Condição inicial de pulso largo ($\Delta(0) = 10,0$)

Como podemos ver na figura 2.4, com o potencial efetivo traçado para os mesmos parâmetros que estamos utilizando, um pulso com largura inicial $\Delta(0) = 10$ deve ficar confinado no potencial efetivo oscilando em torno da largura de equilíbrio $\Delta_w = 8$, localizada no seu mínimo. Este é exatamente o comportamento que observamos na figura 2.5, que mostra a evolução temporal da largura da solução do sistema completo (linha contínua) e da aproximação de pulso largo (linha tracejada).

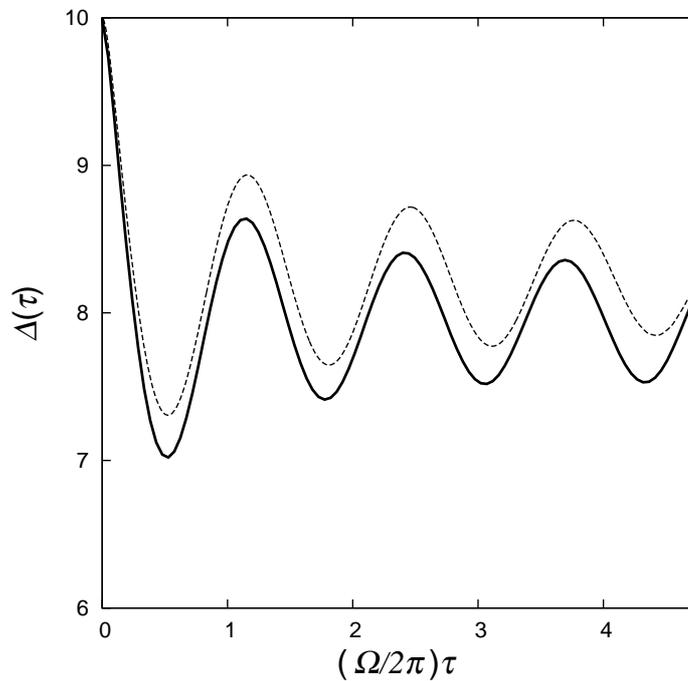


Figura 2.5: evolução temporal da largura do pulso $\Delta(\tau)$ ($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$). Comparação da solução completa (linha contínua) e da aproximação de pulso largo (linha tracejada).

Outra forma de comparar estas soluções é através de curvas de contorno para a intensidade do laser $|a|^2$. A figura 2.6, traçada a partir da solução do sistema completo, mostra que neste regime o pulso se propaga como um sóliton, exibindo um comportamento oscilatório bem definido em torno da sua largura de equilíbrio. A figura 2.7, com as curvas de nível da solução na aproximação de pulso largo, exhibe o mesmo comportamento. De fato, os resultados obtidos a partir da solução do sistema completo e da solução aproximada apresentam excelente concordância. As figuras 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11 mostram a estabilidade do perfil espacial ao longo de um vasto intervalo de tempo e reforçam o comportamento solitônico de um pulso neste regime.

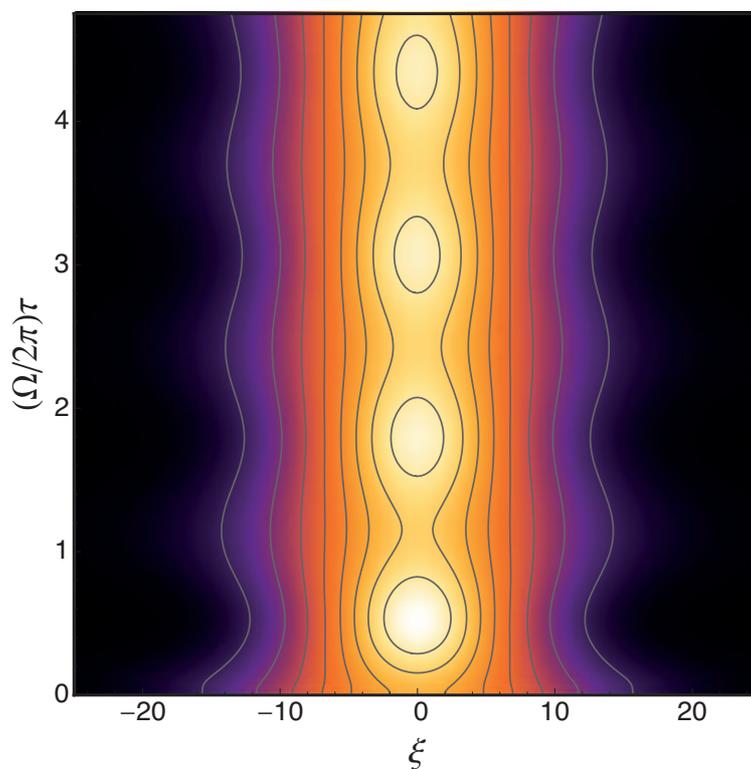


Figura 2.6: curvas de contorno de $|a|^2$: solução completa ($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$).

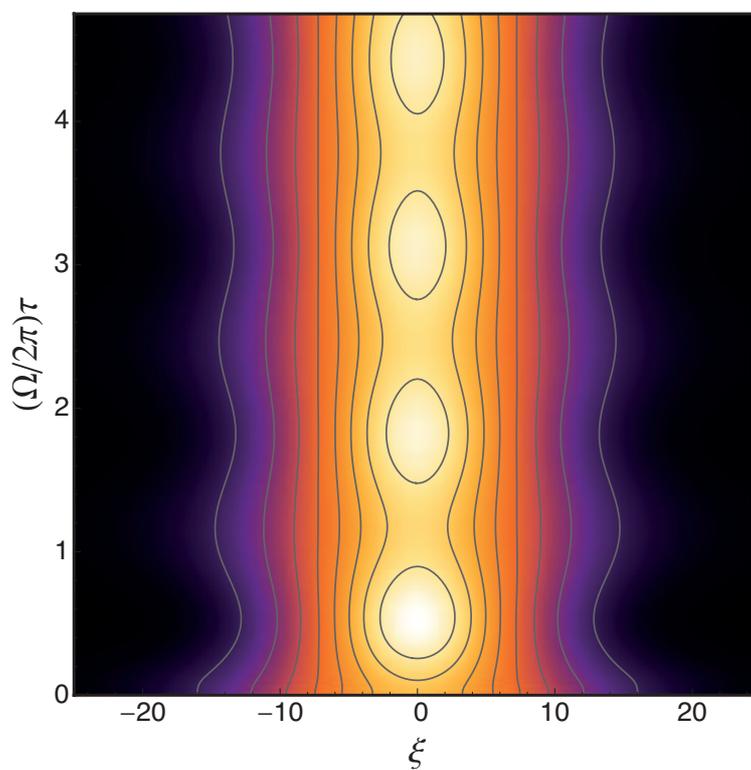


Figura 2.7: curvas de contorno de $|a|^2$: solução aproximada ($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$).

Em resumo, observamos neste regime uma concordância muito boa entre as soluções aproximadas e as soluções completas, com o pulso permanentemente oscilando em torno da solução de equilíbrio em ambos os casos. A frequência de oscilação em torno do ponto de equilíbrio também concorda bem com o valor obtido a partir da expressão (2.77), pelo menos para instantes iniciais de tempo (enquanto a radiação do pulso oscilando ainda não é significativa). À medida que o tempo avança, a emissão de radiação pode ser constatada a partir do decaimento da amplitude da oscilação observado na figura 2.5, que pode ser estudada utilizando-se o método de espalhamento inverso para sólitons [38]. A concordância do período estimado com o observado na solução numérica melhora à medida que $\Delta(0) \rightarrow \Delta_w$, pois sua expressão foi obtida a partir de uma expansão em torno deste ponto.

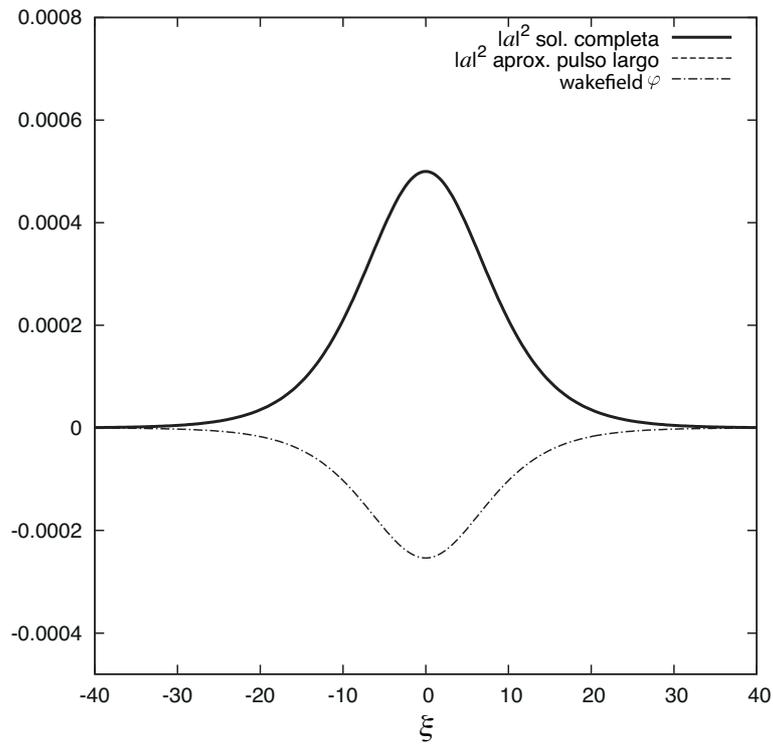


Figura 2.8: perfil espacial do envelope em $\tau = 0$ ($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$)

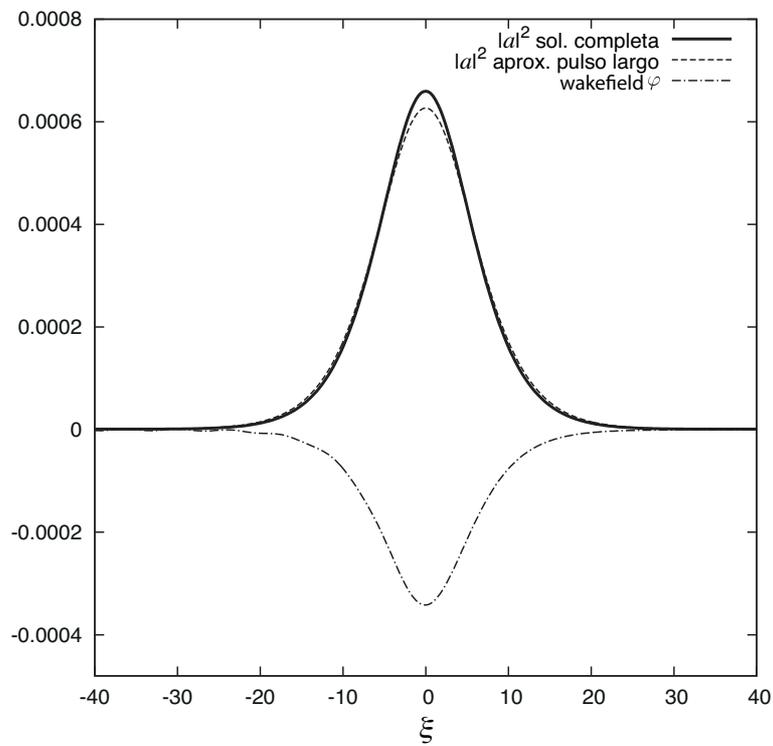


Figura 2.9: perfil espacial do envelope em $\tau = 1,6$ ($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$)

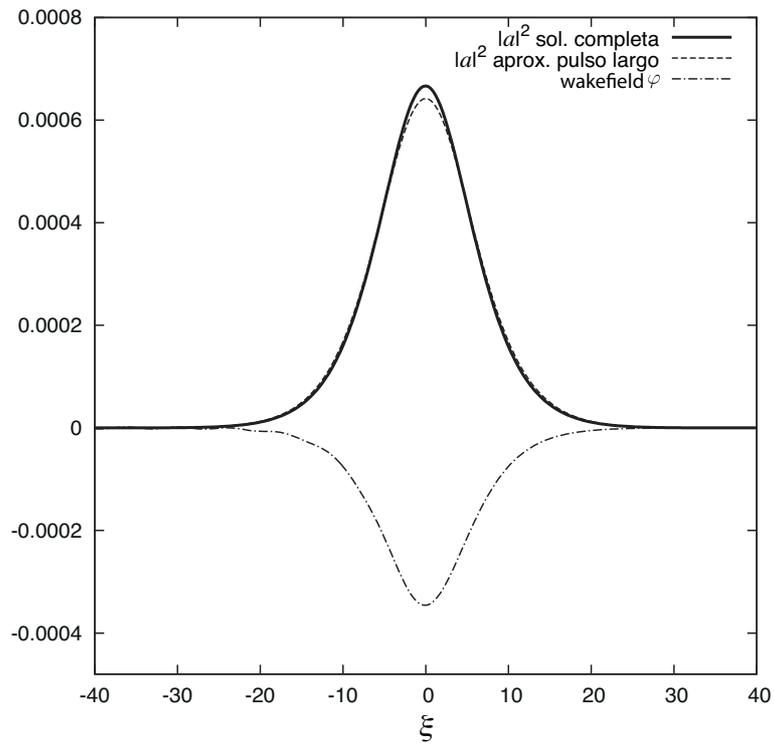


Figura 2.10: perfil espacial do envelope em $\tau = 3,2$ ($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$)

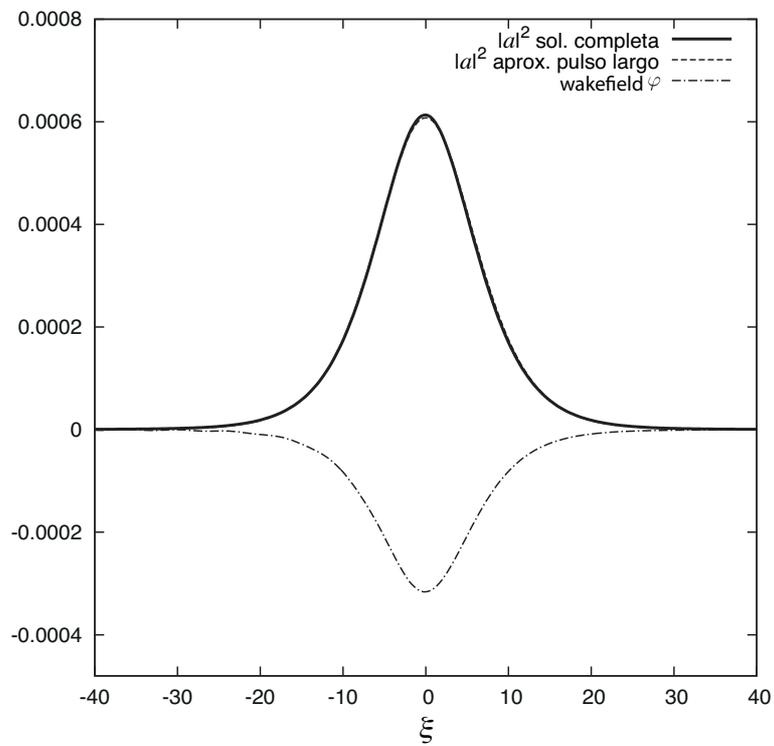


Figura 2.11: perfil espacial do envelope em $\tau = 4,7$ ($W = 0,01$, $\Delta(0) = 10$)

Condição inicial de pulso estreito ($\Delta(0) = 0,25$)

Para completar a análise deste regime, investigamos o comportamento de um pulso com largura inicial $\Delta(0) = 0,25$. Mesmo sabendo da existência do ponto fixo $\Delta_w = 8$, se a nossa estimativa estiver correta, a largura do pulso deve cruzá-lo e continuar se espalhando indefinidamente. Isto porque a condição inicial escolhida está na região livre do potencial efetivo, ou seja, na região (b) da figura 2.4. A figura 2.12 mostra a evolução temporal da largura do pulso da solução completa e da aproximação de pulso estreito, corroborando a nossa estimativa para o comportamento do sistema. Neste caso, a concordância foi tal que ambas as linhas estão sobrepostas na figura.

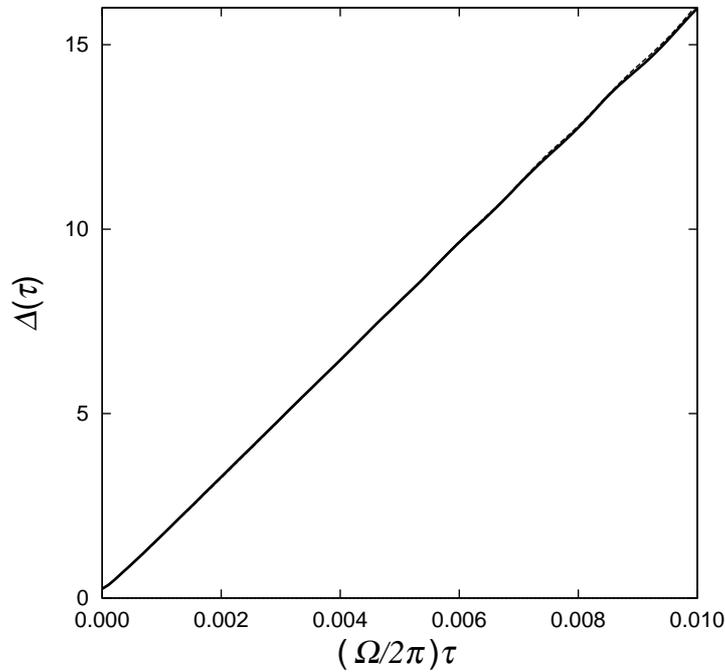


Figura 2.12: evolução temporal da largura do pulso $\Delta(\tau)$ ($W = 0,01$, $\Delta(0) = 0,25$). Comparação da solução completa (linha contínua) e da aproximação de pulso estreito (linha tracejada). Neste caso a concordância foi tal que ambas as linhas ficaram sobrepostas.

Podemos investigar com mais detalhes este comportamento através da figura (2.13), que exhibe as curvas de contorno da intensidade do pulso: tanto o painel (a), que exhibe a dinâmica obtida a partir da equação aproximada (2.57), quanto o painel (b), obtida a partir do sistema completo (2.47) e (2.50), mostram que para intervalos curtos de tempo o pulso se espalha como previsto na aproximação de pulso estreito. Para tempos mais longos o painel (c), obtido a partir do sistema completo, mostra que o pulso cruza a região de transição $\Delta \sim 1$ de uma forma direta e continua se espalhando, atingindo sem dificuldade a região onde vale o regime de pulsos largos.

A leve distorção observada na solução do sistema completo, marginalmente visível no painel (c) como uma inclinação para a esquerda, surge quando a largura do pulso se aproxima da região de transição $\Delta \sim 1$, e é consequência da interação do pulso com o *wakefield* excitado pelo mesmo. À primeira vista, parece um pouco surpreendente que a região de transição tenha tão pouco efeito no pulso. Mas, fazendo uma análise mais cuidadosa da situação, vemos que quando a largura do pulso alcança a região de transição ela já está se abrindo rapidamente, pois partiu de uma condição inicial localizada em um valor muito elevado do potencial efetivo U_{eff}^{narrow} . Como uma consequência do “momentum” adquirido (ou dinâmica inercial), o pulso atravessa firmemente a região de transição, permanecendo pouco tempo sob efeito da mesma. Assim, quanto menor for a largura inicial $\Delta(0)$, menor é a distorção que o pulso sofre ao cruzar a região de transição (um comportamento que concorda bem com a idéia de que menores larguras partem de valores mais elevados no potencial efetivo).

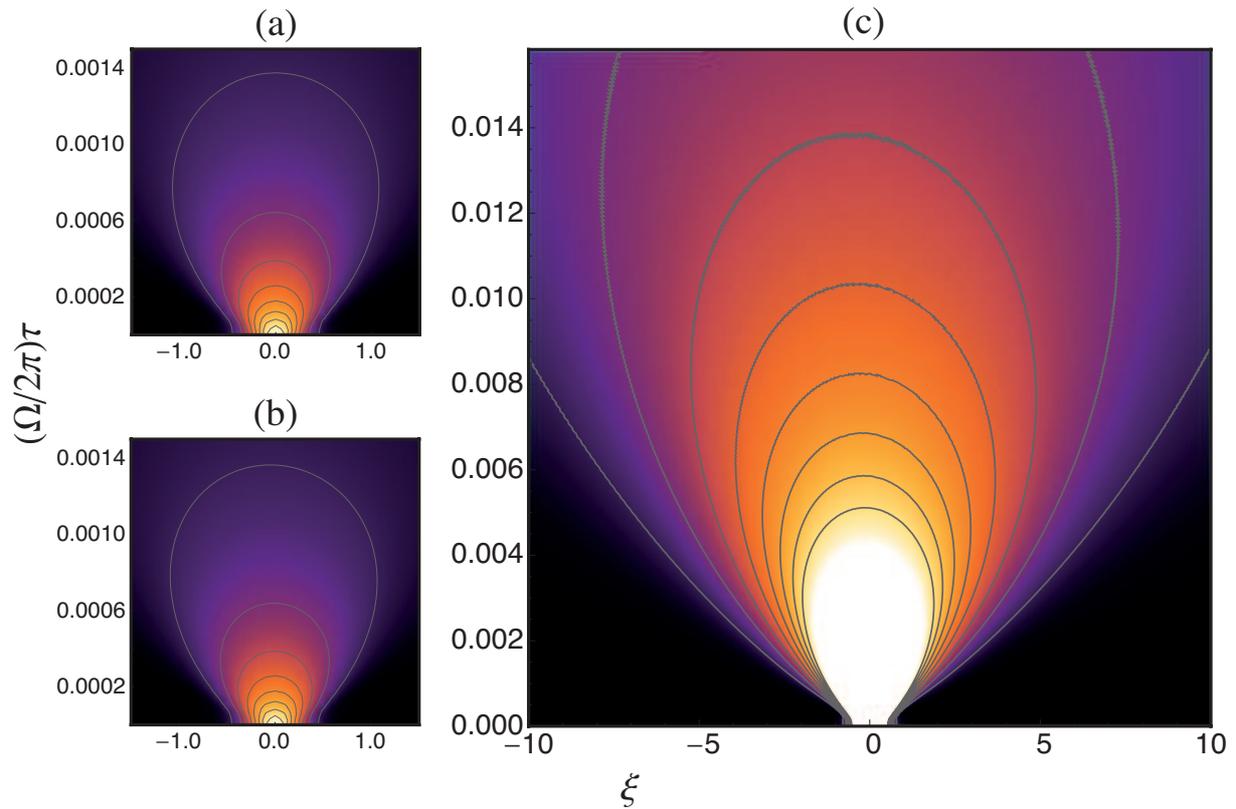


Figura 2.13: curvas de $|a|^2$ ($W = 0,01$, $\Delta(0) = 0,25$). Os painéis (a) e (b) comparam a solução aproximada e a solução completa para intervalos de tempo curtos. O painel (c) exibe a solução para um longo intervalo de tempo – a escala de tempo de (c) é maior que a escala de (a) e (b).

2.8.2 Regime de “alta” potência ($W = 0,10$)

A próxima investigação numérica é para o caso com maior potência, $W = 0,10$, que resulta em uma suposta largura de equilíbrio $\Delta_w \sim 0,8 < 1$, próxima à região de transição, para a qual não existe solução estável nem no regime de pulsos largos. As simulações a seguir esclarecem o comportamento do sistema quando a largura do pulso cruza (ou tenta cruzar) a região de transição.

Condição inicial de pulso largo ($\Delta(0) = 10,0$)

Agora vamos investigar o comportamento de um pulso com largura inicial $\Delta(0) = 10$. Ou seja: estamos lançando um pulso largo mas com uma potência relativamente elevada, em um regime cujo ponto fixo $\Delta_w \sim 0,8$ está fora da região de validade da aproximação de pulso largo. A figura 2.14 traça a evolução temporal da largura do pulso neste regime, mostrando que o pulso é inicialmente atraído pelo ponto fixo, contraindo-se em direção ao mesmo. Porém, ao se aproximar da região de transição $\Delta \sim 1$, ele é intensamente distorcido.

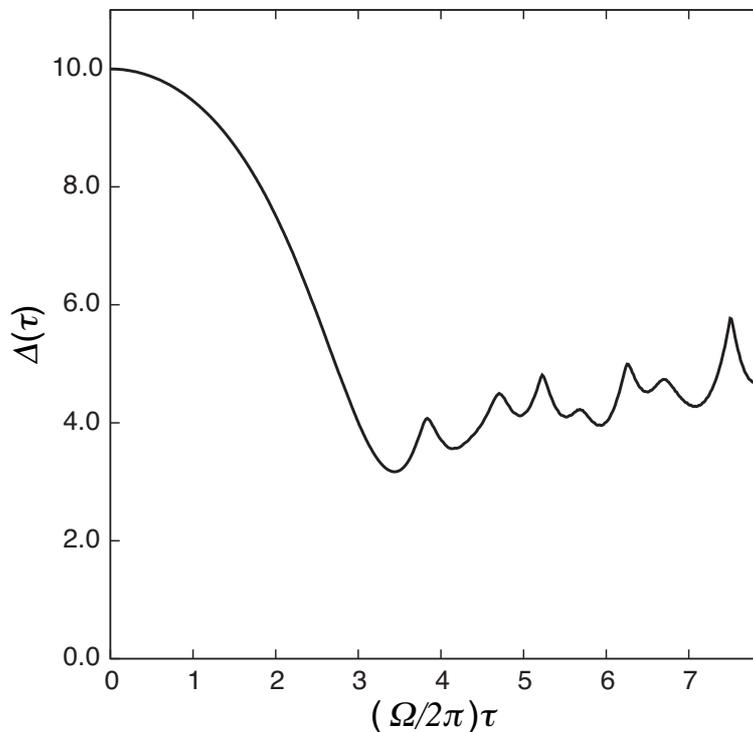


Figura 2.14: evolução temporal da largura do pulso $\Delta(\tau)$, calculada a partir do sistema completo ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$).

Para uma análise mais detalhada recorreremos mais uma vez às curvas de contorno da intensidade do laser. A figura (2.15) mostra que um pulso inicialmente largo contrai a sua largura em direção à $\Delta_w \sim 0,8$. Os painéis (a) e (b), que novamente se referem ao instantes iniciais da dinâmica da solução aproximada e do sistema completo, mostra uma boa concordância entre os dois casos. Porém vemos no painel (c) que, para intervalos de tempo maiores, a largura do pulso se aproxima da região de transição $\Delta \sim 1$ e o mesmo é fortemente distorcido. Isto ocorre porque, neste caso, o potencial efetivo inicial não é grande a ponto de fornecer “momentum” suficiente para o pulso cruzar a região de transição de forma “ilesa”, e o mesmo sofre deformações apreciáveis.

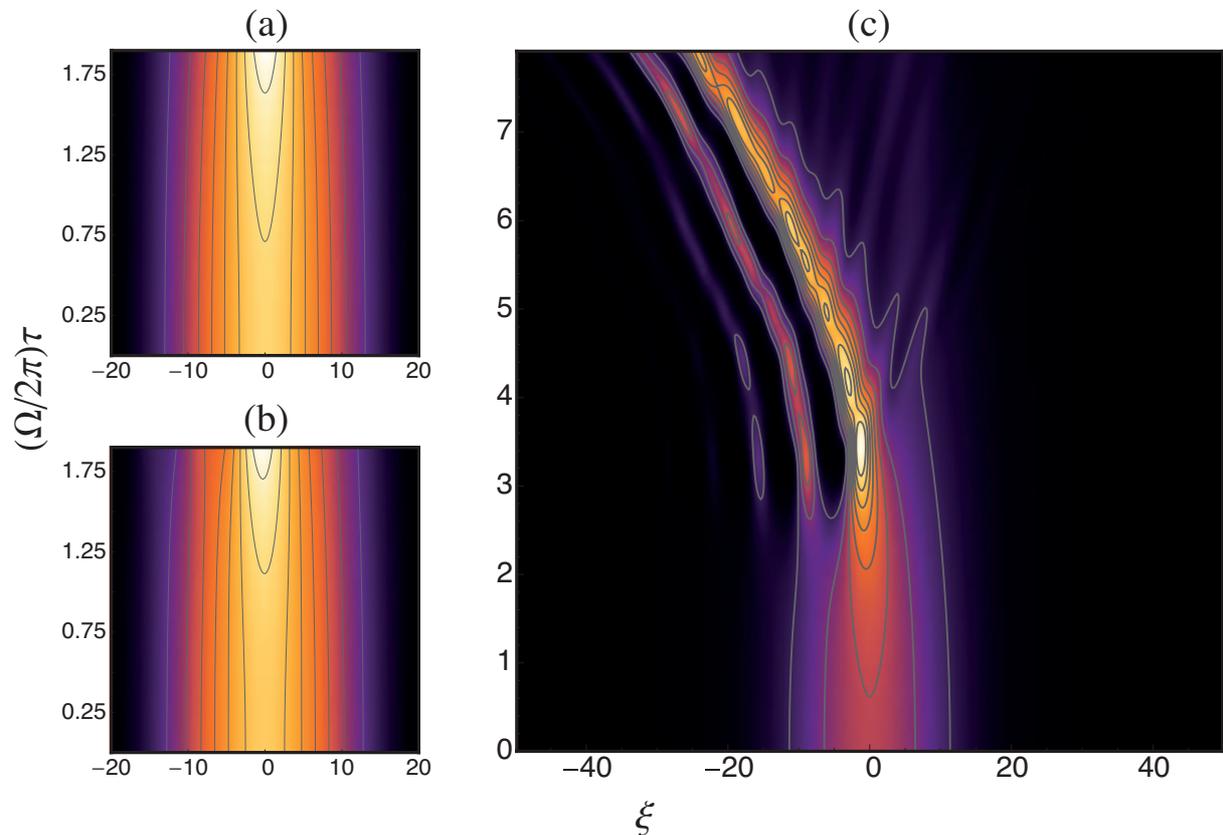


Figura 2.15: curvas de $|a|^2$ ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$). Os painéis (a) e (b) comparam a solução aproximada com a solução completa para intervalos de tempo pequenos, e o painel (c) mostra a dinâmica obtida a partir do sistema completo para longos períodos.

Podemos entender melhor esta deformação se observarmos a evolução temporal da distribuição espacial da solução do sistema completo, composta pelo pulso laser e pelo *wakefield*. A figura 2.16 mostra que, em $\tau = 0$, temos uma situação muito similar à que observamos durante a evolução do pulso com mesma largura inicial mas no regime de menor potência (visto nas figuras 2.8 a 2.11). Em $\tau = 2,4$ (figura 2.17), fica claro que o *wakefield*, excitado pelo aumento da intensidade do pulso laser, é o responsável pela

deformação do seu envelope. A figura 2.18 ($\tau = 4,8$) mostra que, mesmo deformado, a intensidade do pico principal do pulso continua crescendo; isto excita mais ainda o *wakefield* e intensifica a deformação. Por fim, na figura 2.19 ($\tau = 7,1$), vemos que o pico principal do pulso não está mais em $\xi = 0$, provavelmente porque ele está transferindo energia para o *wakefield* e, com isso, perdendo velocidade.

É importante observarmos que, mesmo fortemente deformado, o pulso formou um pico estreito e intenso e continuou se propagando. Esse pico excitou um *wakefield* com amplitude razoável, que continuou existindo durante o tempo restante da solução numérica. Por isso, pode ser que este seja um regime interessante para aceleradores do tipo laser-*wakefield* (*LWFA*).

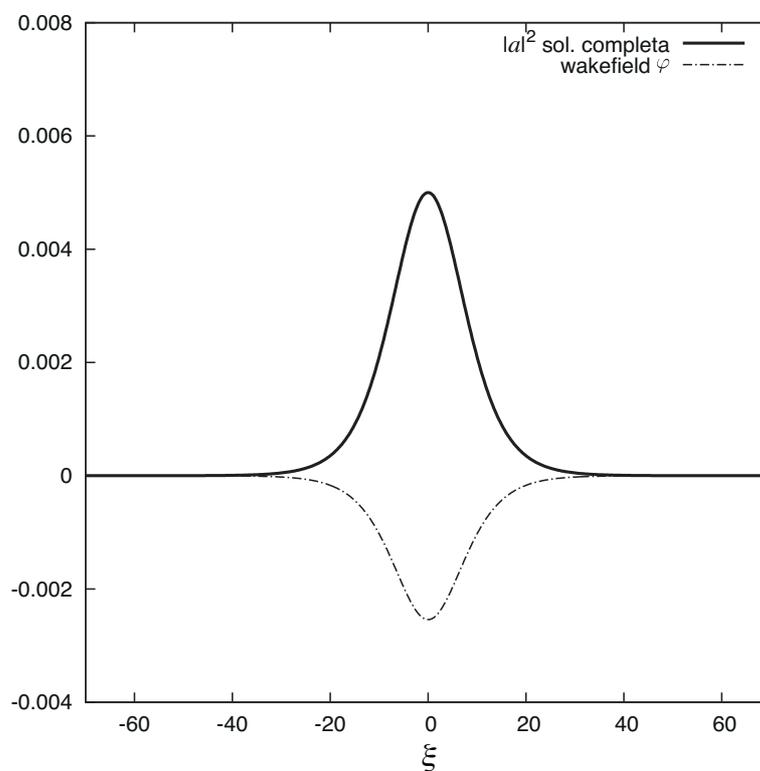


Figura 2.16: perfil espacial do envelope em $\tau = 0$ ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$).

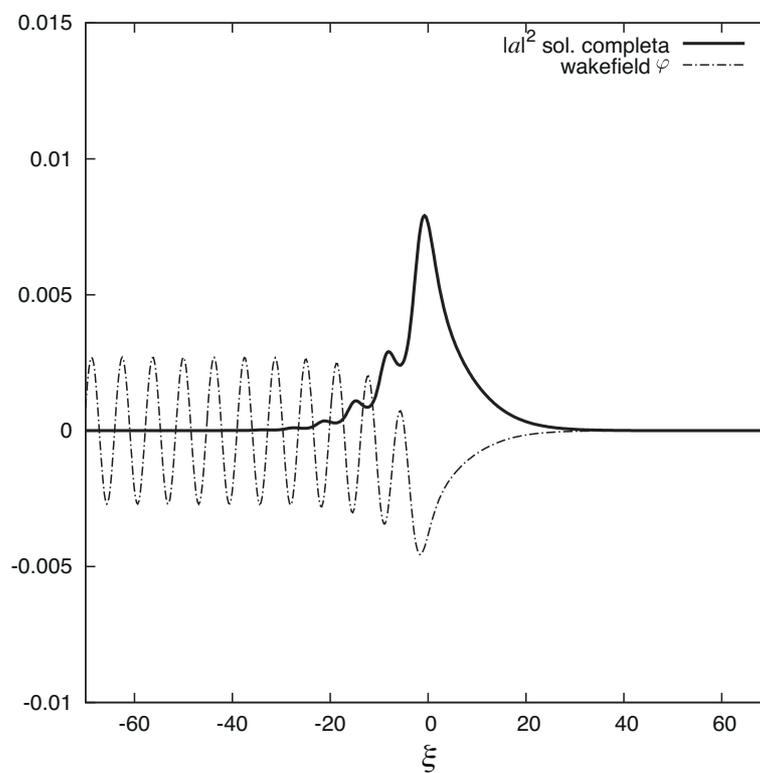


Figura 2.17: perfil espacial do envelope em $\tau = 2,4$ ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$).

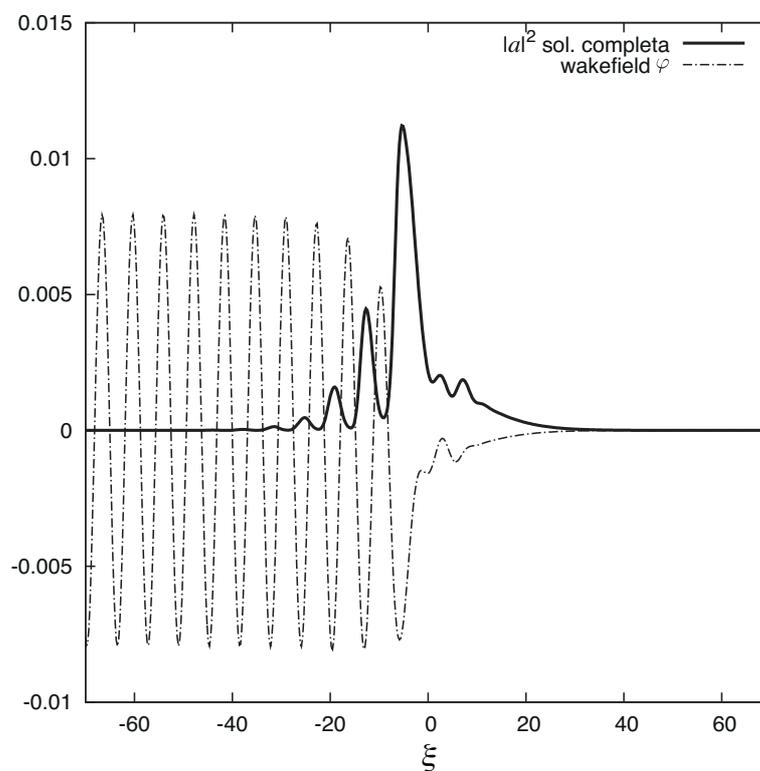


Figura 2.18: perfil espacial do envelope em $\tau = 4,8$ ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$).

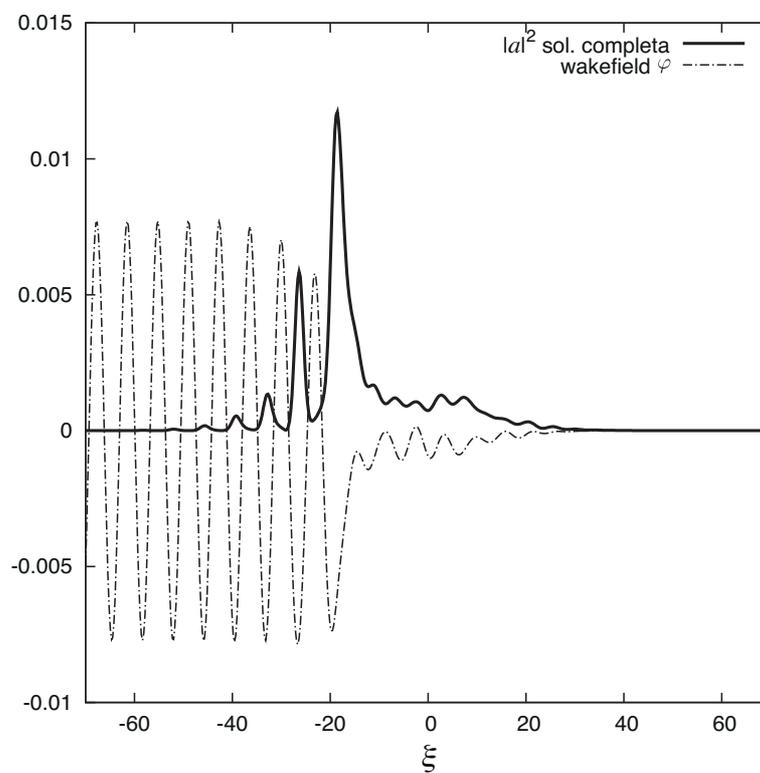


Figura 2.19: perfil espacial do envelope em $\tau = 7.1$ ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 10$).

Condição inicial de pulso estreito ($\Delta(0) = 0,25$)

Para concluirmos a nossa série de simulações, investigamos agora um pulso inicialmente estreito com potência $W = 0,10$. Neste regime, a largura de equilíbrio é $\Delta_w \sim 0,8 < 1$ e, pelas nossas estimativas, um pulso com largura inicial pequena deve apenas se espalhar.

É exatamente isso que observamos na figura 2.20, que mostra a evolução temporal da largura de um pulso com $\Delta(0) = 0,25$ calculada a partir do sistema completo (linha contínua) e da aproximação de pulso estreito (linha tracejada). Pulsos partindo de

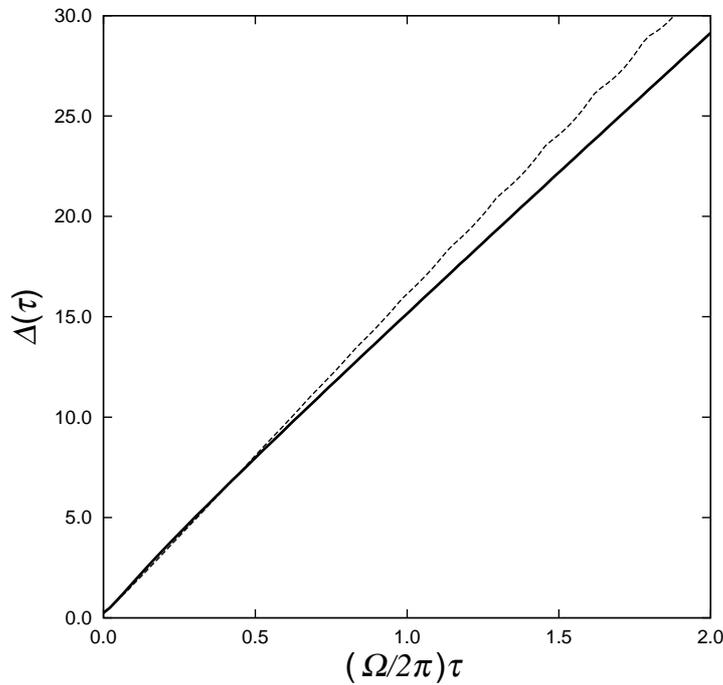


Figura 2.20: evolução temporal da largura do pulso $\Delta(\tau)$ ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$). Comparação da solução completa (linha contínua) e da aproximação de pulso estreito (linha tracejada).

configurações estreitas apresentam o mesmo tipo de comportamento observado no caso anterior: o pulso apenas se abre, indefinidamente. Porém, neste regime de maior potência, vemos um pouco mais de distorção do que observamos anteriormente. A evolução espaço-temporal pode ser visualizada na figura 2.21 - o painel (a) representa agora o início da evolução da aproximação de pulso estreito, o painel (b) representa o início da evolução do sistema completo e o painel (c) mostra a evolução do sistema completo durante um intervalo de tempo suficientemente longo para que o pulso cruze a região de transição e atinja a região de pulsos largos. Para períodos curtos de tempo, a dinâmica aproximada e completa coincidem, e em tempos posteriores a distorção mais intensa (se comparada com a distorção observada na figura 2.13) é consequência da formação de *wakefields* com

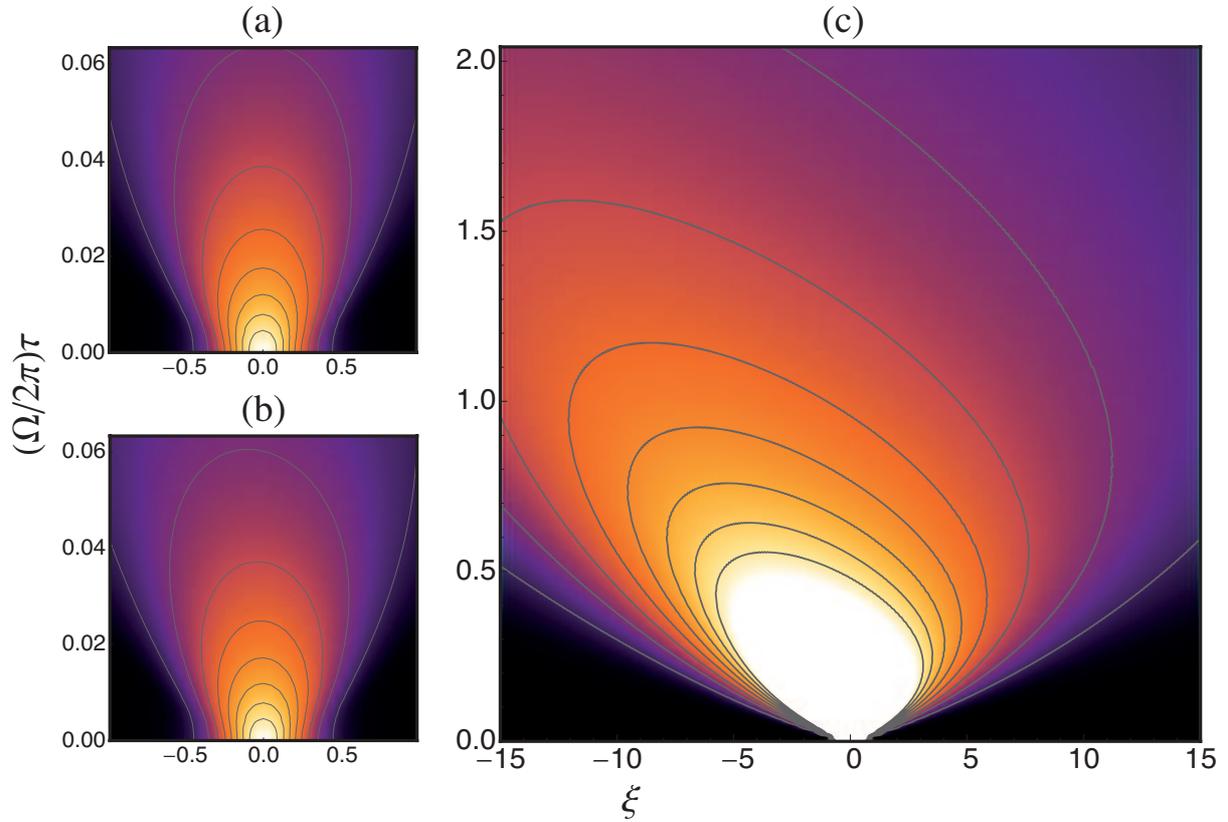


Figura 2.21: curvas de $|a|^2$ ($W = 0,1$, $\Delta(0) = 0,25$). Mais uma vez os painéis (a) e (b) comparam a dinâmica aproximada com dinâmica completa em intervalos curtos de tempo, e o painel (c) mostra a dinâmica completa para longos intervalos de tempo.

intensidades mais altas neste caso. Novamente, podemos entender melhor a deformação do envelope analisando a distribuição espacial da solução do sistema completo, composto pelo pulso e pelo *wakefield*, e da solução na aproximação de pulso estreito em diferentes tempos. Em $\tau = 0$ (figura 2.22), o *wakefield* na região do pulso é pequeno e ambas as soluções formam um pulso estreito ($\Delta \sim 0,25$) e com uma intensidade razoável. Em $\tau = 0,6$ (figura 2.23), vemos que o pulso se espalhou e que, embora a onda do *wakefield* seja praticamente nula fora do pulso, $\varphi \neq 0$ em toda a sua extensão. Neste instante já vemos uma leve deformação, um deslocamento no pico do pulso do sistema completo, causado pelo acoplamento com o potencial φ . As figuras 2.24 e 2.25 (para $\tau = 1,2$ e $\tau = 1,9$ respectivamente) mostram que, à medida que o pulso se propaga, a deformação do envelope do pulso obtido a partir da solução completa se acentua, enquanto que a solução aproximada apenas se espalha, mantendo sempre um perfil simétrico. Para valores muito maiores de τ , este pulso simplesmente se extingue ($\Delta \rightarrow \infty$).

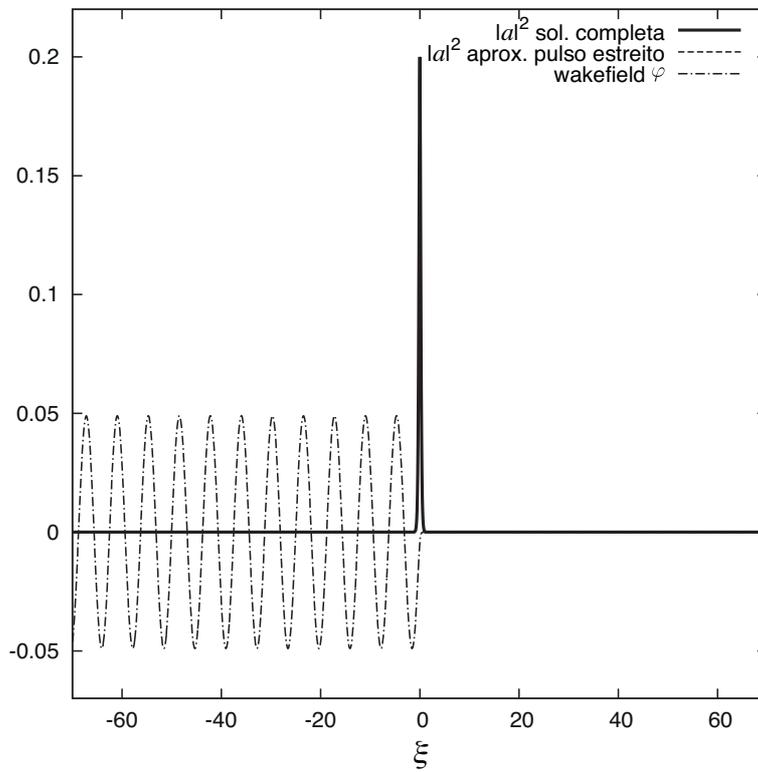


Figura 2.22: perfil espacial do envelope em $\tau = 0$ ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$).

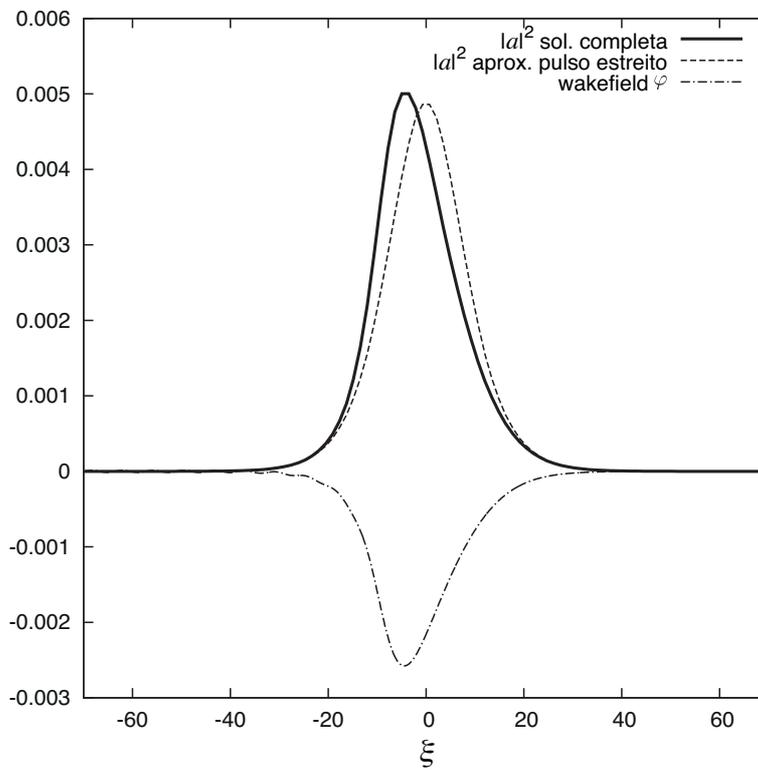


Figura 2.23: perfil espacial do envelope em $\tau = 0,6$ ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$).

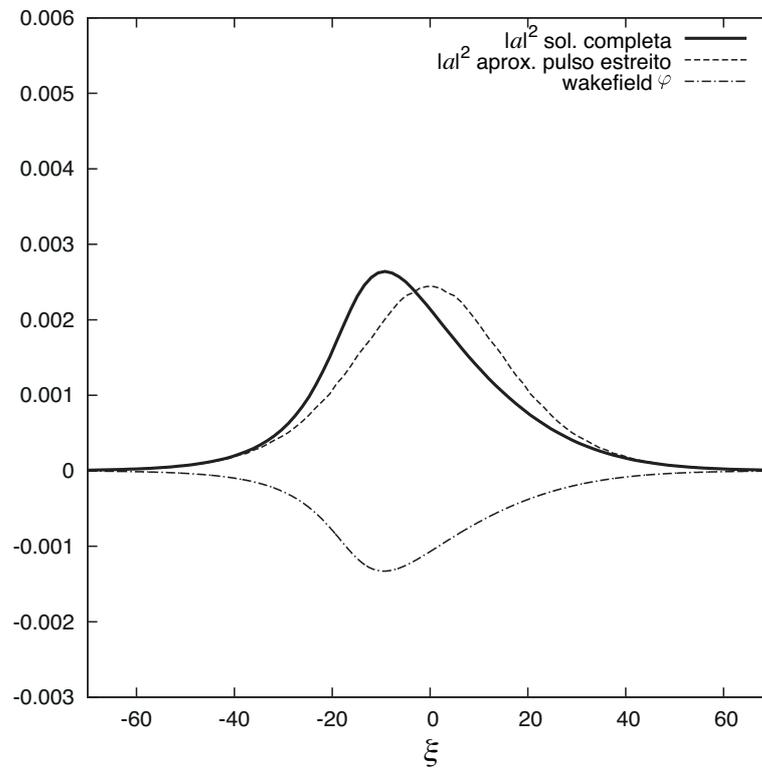


Figura 2.24: perfil espacial do envelope em $\tau = 1,2$ ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$).

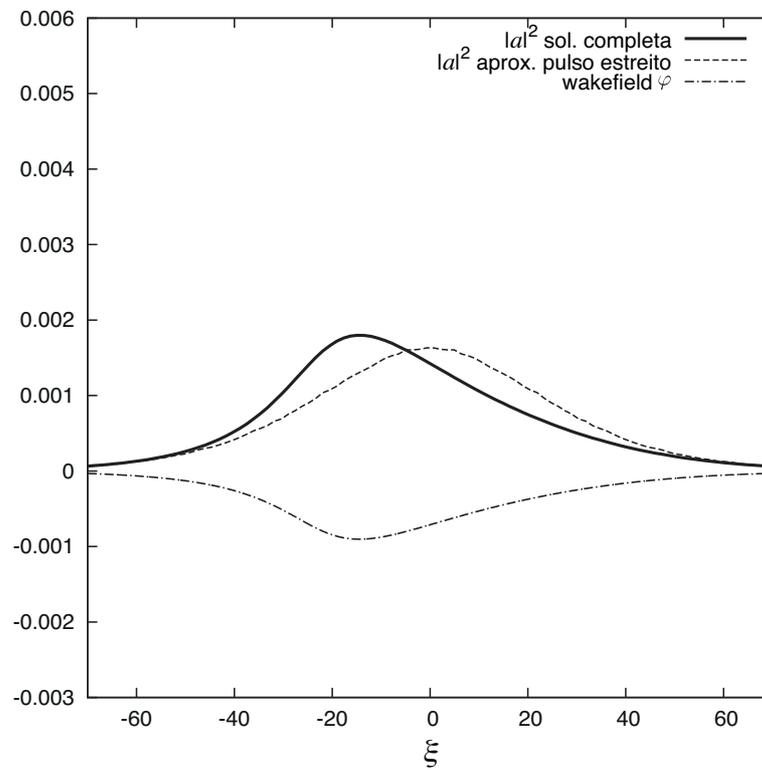


Figura 2.25: perfil espacial do envelope em $\tau = 1,9$ ($W = 0,10$, $\Delta(0) = 0,25$).

2.9 Conclusões

O presente trabalho foi dedicado ao estudo da dinâmica acoplada de pulsos laser e *wakefields* em sistemas do tipo laser-plasma. Métodos de lagrangeano médio foram aplicados na obtenção de estimativas que serviram para direcionar as investigações numéricas.

Restaurando momentaneamente as dimensões às quantidades físicas em estudo, podemos dizer que pulsos laser estáveis foram encontrados em regimes de baixa potência nos quais a largura do pulso é muito maior que o comprimento de onda do plasma, $\Delta \gg c/\omega_p$. Neste caso as estimativas e simulações completas apresentam ampla concordância.

Em casos com potências mais elevadas, soluções estáveis estão ausentes. Pulsos lançados de condições inicialmente largas se comprimem até atingirem a região de transição $\Delta \sim c/\omega_p$, onde são fortemente distorcidos. Por outro lado, pulsos inicialmente estreitos ($\Delta \ll c/\omega_p$) cruzam a região de transição e continuam se espalhando, avançando indefinidamente no regime de pulsos largos. Esta assimetria é creditada ao fato de que pulsos inicialmente estreitos sempre partem de pontos elevados nos potenciais efetivos, habilitando-os a cruzarem a região de transição $\Delta \sim c/\omega_p$ devido a efeitos inerciais.

Se $\Delta \sim c/\omega_p$, *wakefields* são fortemente excitados. Porém, pulsos inicialmente estreitos cruzam rapidamente esta região, de modo que esta excitação é muito breve (e insuficiente para afetar a evolução do pulso em direção à região dos pulsos largos). Quando um pulso parte de uma condição inicial larga em direção à região de transição em um regime de maior potência onde $\Delta_w \sim c/\omega_p$, ele permanece parcialmente aprisionado nesta região, e é fortemente deformado. Nesta situação, *wakefields* com formas incoerentes são excitados por longos intervalos de tempo.

Trabalhamos com potências baixas para não violarmos a aproximação fracamente não linear, e desprezamos efeitos de quebra de onda, que deve ser considerada quando $|qA/mc^2| \sim 1$. Para uma amplitude do laser desta magnitude, modelos de fluido devem dar lugar a simulações do tipo *particle-in-cell* (PIC) que lidam diretamente com modelos cinéticos ou de partículas. As menores amplitudes analisadas neste trabalho estão porém presentes em modelos e experimentos [23, 39], e os modelos de fluido associados podem certamente ajudar no esclarecimento da física correspondente. Dependendo da potência do pulso ou do quão distante da região de transição as condições iniciais são lançadas, o processo modulacional aqui descrito não pode ser negligenciado. Nos casos mais rápidos considerados neste trabalho o tempo necessário para observarmos uma distorção significativa no pulso laser varia de 10 a 100 períodos do plasma, o que de fato sugere uma descrição mais acurada da dinâmica autoconsistente do laser e do *wakefield*.

Capítulo 3

Dinâmica longitudinal e transversal de um feixe laser

Neste capítulo estudamos a dinâmica não linear acoplada de feixes laser focalizados e campos de *space-charge* (carga espacial) em sistemas do tipo laser-plasma. Direcionamos a análise para regimes que evoluem juntamente com a coordenada associada ao referencial do feixe (que se move com a velocidade de grupo do mesmo). Quando observados neste referencial, tais regimes assemelham-se a regimes estacionários, nos quais o feixe mantém a sua forma espacial e a coordenada do referencial passa a “desempenhar o papel do tempo”. Construimos um modelo sem assumir uma aproximação paraxial e sem aproximar a velocidade de grupo do feixe v_g pela velocidade da luz c (uma aproximação frequentemente utilizada no estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas do tipo *underdense*). Obtemos uma condição de equilíbrio para o perfil transversal do envelope do laser e examinamos a evolução espaço-temporal de feixes que satisfazem tal condição. Além disto, analisamos a evolução de feixes descasados, cujos perfis são levemente perturbados para que se afastem condição de equilíbrio. Os resultados deste trabalho foram publicados no periódico *Laser and Particle Beams* [40].

3.1 Introdução

Os recentes desenvolvimentos de tecnologias laser [3] permitiram a criação de feixes de alta potência que, quando injetados em plasmas, deslocam os elétrons do mesmo (através da ação da força ponderomotriz) gerando campos de *space-charge*¹ que sob certas

¹Campos de carga espacial (em uma tradução livre), associados às perturbações na densidade de elétrons do plasma, que criam regiões eletricamente carregadas localizadas no espaço e dão origem a campos elétricos restauradores. Utilizaremos o termo em inglês por ser de uso corrente na área.

condições podem atingir intensidades elevadas. Tais campos, juntamente com os efeitos relativísticos associados ao movimento dos elétrons do plasma excitado pelo laser, contribuem para a focalização e a propagação do feixe. Assim, feixes laser podem ser convenientemente modelados para uma ampla gama de aplicações, dentre as quais destacamos a óptica não linear, fusão à laser, aceleração de fótons e partículas, telecomunicações e diversas outras que fazem uso das características não lineares e geométricas deste tipo de sistema [1, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 41, 42].

Quando as dimensões e a frequência modulacional do feixe são da ordem das dimensões características do plasma (frequência e o comprimento de onda), as interações entre ambos são amplificadas e resultam na geração de campos de *space-charge* muito intensos. Estes campos, além de relevantes para a própria propagação do feixe, são de especial interesse para algumas situações específicas. Na aceleração de partículas, por exemplo, elétrons do plasma localizados no rastro do laser e com velocidades próximas à velocidade de grupo do mesmo podem ser eficientemente acelerados por efeitos ressonantes [43].

Embora a literatura sobre este assunto seja muito ampla, abrangendo uma diversidade de regimes em diversos níveis de aproximações não lineares, as abordagens para este sistema físico através de equações do envelope para o feixe e de fluido para os elétrons do plasma têm sido feitas em geral para a propagação planar, unidimensional, desprezando-se as dimensões finitas do perfil transversal do feixe. Os trabalhos pioneiros de Kozlov et al [12] e Mofiz e de Angelis [44], bem como trabalhos mais recentes que lidam com modelos relativísticos não lineares [15, 17, 22] são exemplos deste tipo de abordagem.

Nosso objetivo neste trabalho é examinar a propagação de feixes focalizados, onde a dependência nas dimensões transversais é mantida juntamente com a dependência na dimensão longitudinal (de propagação), ou seja, sem impor uma aproximação paraxial ² [45]. Para tanto, partimos dos mesmos fundamentos teóricos utilizados no estudo anteriormente conduzido para a dinâmica longitudinal [11], mas com algumas adaptações descritas a seguir. No referencial do laboratório (referencial de repouso), os campos passam a ser também funções da coordenada transversal x_{\perp} , e não apenas da coordenada longitudinal x . Ao invés de um pulso laser bem localizado na coordenada longitudinal, temos um feixe que se estende ao longo desta. A dinâmica do feixe também é estudada em um referencial que se propaga com a velocidade de grupo do mesmo, cuja coordenada é definida como $\xi \equiv x - v_g t$. Porém, restringimos nossa análise aos regimes nos quais o feixe evolui juntamente com esta coordenada, parecendo estacionário (por manter a sua forma) quando observado no seu referencial. Este tipo de análise é relevante para estudar

²A aproximação paraxial consiste em supor que a derivada longitudinal do envelope do feixe pode ser desprezada frente às derivadas transversais do mesmo

a propagação sobre longas distâncias, depois que os comportamentos transientes do feixe relaxam e a dinâmica passa a depender apenas da coordenada do referencial do feixe [46].

Com estas alterações, passamos da análise de um pulso cujo envelope era função da coordenada “espaço-temporal” ξ e do tempo τ , realizada no capítulo 2, para a análise de um feixe cujo envelope depende da coordenada transversal x_{\perp} e da coordenada ξ :

$$a_{\text{pulso}} = a(\xi, \tau) \rightarrow a_{\text{feixe}} = a(x_{\perp}, \xi).$$

Nesta condição, podemos pensar na coordenada ξ como desempenhando o papel do tempo³ na análise da evolução do perfil transversal do feixe. Agora, a idéia de um *wakefield* (um campo elétrico que surge no “rastros” de um pulso eletromagnético localizado que se propaga no plasma) deixa de ser adequada, uma vez que o feixe se estende ao longo da coordenada longitudinal. Por este motivo, denominamos potencial de *space-charge* o potencial escalar associado à flutuação da densidade dos elétrons do plasma causada pela propagação do feixe laser.

Supondo novamente um regime fracamente não linear, válido para pequenas amplitudes ($a \ll 1$), construímos um modelo composto por duas equações diferenciais parciais não lineares acopladas que descrevem o envelope do feixe laser (movimentos “rápidos”, de alta frequência) e o potencial de *space-charge* no plasma (movimentos “lentos”, de baixa frequência) respectivamente, sem fazer aproximações com relação à magnitude da densidade do plasma. Em particular, o modelo não aproxima a velocidade de grupo do pulso pela velocidade da luz no vácuo, como ocasionalmente é feito em regimes do tipo *underdense* [21]. É importante ressaltar que este tipo de aproximação, bem como a aproximação paraxial, suprimem algumas características que queremos preservar na análise do equilíbrio e da dinâmica do feixe [37, 47, 11].

Iniciamos este trabalho com a construção de um modelo com as características que acabamos de descrever. Feito isto, definimos a geometria do problema a ser estudado, bem como as condições de contorno adequadas para resolver as equações em tal geometria. Em seguida, obtemos soluções analíticas para uma versão linearizada do modelo em estudo, que nos permitem fazer algumas estimativas sobre o comportamento esperado do sistema (além de serem utilizadas como referência para “calibrar” as simulações numéricas do sistema não linear). Em particular, observamos que na aproximação linear o envelope do feixe apresenta um crescimento exponencial intrínseco e obtemos uma expressão para estimar a escala característica deste crescimento. Após esta análise, obtemos uma equação

³Estamos utilizando esta analogia ao mencionarmos ao longo deste capítulo a evolução temporal (ou espaço-temporal) do feixe.

de equilíbrio para o envelope, que pode ser resolvida analiticamente fazendo-se algumas simplificações. Esta solução serve como base para a construção (através de métodos numéricos) de um perfil do envelope que satisfaz plenamente a equação de equilíbrio obtida (sem aproximações ou simplificações). Conduzimos então simulações numéricas para feixes em equilíbrio e para feixes levemente descasados (afastados da condição de equilíbrio), que nos permitem compreender os papéis desempenhados pelas não linearidades presentes no modelo. Por fim, apresentamos as conclusões obtidas.

3.2 O Modelo

3.2.1 Equação do envelope do feixe laser

Para obter a equação do envelope do feixe laser, partimos da equação (2.30), desenvolvida no capítulo 2 para descrever o envelope do pulso. Mantendo-se as derivadas transversais (desprezadas na abordagem unidimensional anteriormente adotada), tal equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A = - \left(1 + n - \frac{|A|^2}{2} \right) A,$$

ou ainda, abrindo o laplaciano em suas componentes longitudinal e transversal,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \nabla_{\perp}^2 \right) A = - \left(1 + n - \frac{|A|^2}{2} \right) A. \quad (3.1)$$

Como discutimos na introdução (3.1), o envelope do feixe laser é função das coordenadas transversal x_{\perp} e espaço-temporal ξ . Por isso, o potencial vetor \mathbf{A} possui agora a seguinte forma

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} a(x_{\perp}, x - v_g t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + c.c., \quad (3.2)$$

que é similar à forma anteriormente adotada (2.32), mas com as diferenças mencionadas a seguir. Ao invés de tratarmos a amplitude como uma grandeza complexa, integrando separadamente suas partes real e imaginária como fizemos no estudo anterior (resolvendo implicitamente a evolução da fase), consideramos agora uma situação um pouco mais simples: uma amplitude real ($a \in \mathfrak{R}$) multiplicada por uma fase ν que evolui linearmente

no tempo. Na expressão (3.2), esta fase está inserida na frequência da onda portadora

$$\omega'_0 \equiv \omega_0 - \nu \quad , \quad \omega_0 \gg \nu . \quad (3.3)$$

A partir de (3.2) podemos reescrever as derivadas espaciais e temporais de A ,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2ik_0 \frac{\partial a}{\partial x} - k_0^2 a \right] e^{i(k_0 x - \omega'_0 t)} , \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2i\omega'_0 \frac{\partial a}{\partial t} - \omega_0'^2 a \right] e^{i(k_0 x - \omega'_0 t)} , \quad (3.5)$$

e aplicá-las na equação (3.1),

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - 2i \left(\omega'_0 \frac{\partial a}{\partial t} + k_0 \frac{\partial a}{\partial x} \right) + (k_0^2 - \omega_0'^2 + 1) a = \nabla_{\perp}^2 a - \left(n - \frac{a^2}{2} \right) a , \quad (3.6)$$

onde a presença do laplaciano transversal $\nabla_{\perp}^2 a$ é única diferença em relação à equação (2.35), obtida para o envelope do pulso laser no capítulo 2.

Neste ponto, consideramos que a fase ν é pequena o suficiente ($\nu \ll 1, \omega_0$) para que as seguintes aproximações sejam válidas:

$$\begin{aligned} \omega'_0 &= \omega_0 - \nu \\ &\approx \omega_0 , \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \omega_0'^2 &= (\omega_0 - \nu)^2 \\ &= \omega_0^2 - 2\omega_0\nu + \nu^2 \\ &\approx \omega_0^2 - \delta \quad , \quad \delta \equiv 2\omega_0\nu . \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aplicando as aproximações (3.7) e (3.8) na equação (3.6) e considerando que $\omega_0^2 = 1 + k_0^2$ é a relação de dispersão linear adimensionalizada, obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - 2i \left(\omega_0 \frac{\partial a}{\partial t} + k_0 \frac{\partial a}{\partial x} \right) + \delta a = \nabla_{\perp}^2 a - \left(n - \frac{a^2}{2} \right) a . \quad (3.9)$$

Aqui, vemos que a presença de uma fase que cresce linearmente no tempo resulta em um coeficiente não nulo no termo linear à esquerda da igualdade da equação (3.6). Este coeficiente, o qual denominamos parâmetro de dessintonia (*detuning*) δ , indica que a frequência e o vetor de onda estão relacionados por uma relação de dispersão não linear. Consequentemente, o feixe se propaga com uma velocidade de grupo v_g não linear.

Como já mencionamos, direcionamos este estudo para feixes que mantêm a sua forma

quando observados no seu referencial. Assim, diferentemente do pulso (cuja dinâmica dependia de ξ e τ , como vimos na seção 2.2.7), descrevemos o referencial do feixe apenas com a coordenada $\xi \equiv x - v_g t$, de modo que usamos as seguintes relações para escrever as derivadas parciais das equações neste referencial:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v_g \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (3.11)$$

Aplicando estas relações na equação (3.6) podemos escrevê-la em função da variável ξ da seguinte maneira:

$$(v_g^2 - 1) \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + 2i(-\omega_0 v_g + k_0) \frac{\partial a}{\partial \xi} + \delta a = \nabla_{\perp}^2 a - \left(n - \frac{a^2}{2} \right) a. \quad (3.12)$$

Como não há termos complexos à direita da igualdade, o segundo termo à esquerda da mesma deve ser nulo. Desta condição obtemos a expressão para a velocidade de grupo

$$v_g = \frac{k_0}{\omega_0}, \quad (3.13)$$

que é igual à expressão obtida na análise da dinâmica longitudinal do pulso laser. Neste ponto, introduzimos o parâmetro $\kappa \equiv 1 - v_g^2$, cuja definição é ligeiramente diferente da anteriormente utilizada⁴ [11] para que o mesmo assumia sempre valores positivos [40]. Com isto, a equação (3.12) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\kappa \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = \delta a - \nabla_{\perp}^2 a + \left(n - \frac{a^2}{2} \right) a. \quad (3.14)$$

É interessante observar que, caso fizéssemos a aproximação da velocidade de grupo pela velocidade da luz (ou seja, $v_g = 1$ considerando as normalizações adotadas) o parâmetro κ seria nulo, eliminando assim o termo com a derivada segunda do envelope em relação à coordenada ξ . Embora tal aproximação pareça razoável, compatível com a propagação de um feixe em plasmas de baixa densidade (plasmas do tipo *underdense*, nos quais $v_g \rightarrow 1$), já vimos que a presença deste termo no modelo é relevante [37, 47], podendo inclusive determinar a existência ou não de uma solução estável [11]. Por isso, ao evitarmos tal aproximação temos um modelo mais abrangente, que nos permite estudar a propagação do feixe em plasmas com densidades arbitrárias. Finalmente, resgatando a definição (2.45)

⁴No capítulo 2, a definição adotada ($\kappa \equiv v_g^2 - 1$) implicava em $\kappa \leq 0$, uma vez que $0 \leq v_g \leq 1$.

do potencial escalar ϕ ,

$$\phi \equiv \left(v_g^2 n - \frac{|a|^2}{2} \right),$$

interpretado a partir de agora como o potencial de *space-charge* (conforme descrito na introdução deste capítulo), obtemos a forma final da equação utilizada para estudar a evolução espaço-temporal do envelope do feixe laser:

$$\kappa \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = \delta a + \frac{1}{v_g^2} \phi a + \frac{\kappa}{2v_g^2} a^3 - \nabla_{\perp}^2 a, \quad (3.15)$$

3.2.2 Equação do potencial de space-charge

Para obter a equação que descreve a dinâmica do potencial de *space-charge*, adotamos um procedimento análogo ao utilizado na obtenção da equação do envelope do feixe. Partimos da equação (2.31), desenvolvida no capítulo 2 para descrever a dinâmica da densidade de elétrons no plasma, que pode ser escrita da seguinte maneira se as derivadas transversais (desprezadas na abordagem unidimensional anteriormente adotada) forem mantidas:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) n = \frac{1}{2} \nabla^2 a^2. \quad (3.16)$$

Separando o laplaciano em suas componentes longitudinal e transversal e utilizando as relações (3.10) e (3.11) para substituir as derivadas em relação ao tempo t e à coordenada longitudinal x por derivadas em relação à coordenada do referencial do feixe ξ , esta equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(v_g^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 1 \right) n = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 a^2. \quad (3.17)$$

Aplicando nesta equação a definição do potencial escalar (2.45), tratado aqui como o potencial de *space-charge*, chegamos à equação utilizada para estudar a sua evolução espaço-temporal deste potencial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{v_g^2} \phi = -\frac{1}{2v_g^2} a^2 + \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 a^2. \quad (3.18)$$

3.2.3 Resumo

Para concluir esta seção, destacamos as equações (3.15) e (3.18), que compõem o nosso modelo para estudar a dinâmica acoplada de feixes laser e campos de *space-charge* em plasmas com densidade arbitrária:

$$\begin{aligned}\kappa \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} &= \delta a + \frac{1}{v_g^2} \phi a + \frac{\kappa}{2v_g^2} a^3 - \nabla_{\perp}^2 a, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{v_g^2} \phi &= -\frac{1}{2v_g^2} a^2 + \frac{1}{2} \nabla_{\perp}^2 a^2.\end{aligned}$$

Estas equações são válidas para regimes fracamente não lineares (nos quais a amplitude do envelope é pequena) e podem ser utilizadas no estudo de diversos problemas, tais como formação de sólitons, excitação de *wakefields* e focalização de feixes. A última aplicação mencionada é o nosso objeto de estudo, uma vez que utilizamos as equações do modelo para fazer simular de forma autoconsistente a dinâmica de feixes inicialmente focalizados.

3.3 Geometria do feixe e condições de contorno

Uma vez que as soluções das equações não lineares (3.15) e (3.18) dependem da geometria do feixe, precisamos defini-la. Neste trabalho adotamos uma geometria planar na qual o feixe é uniforme ao longo de um dos eixos cartesianos transversais, digamos z , e localizado ao longo do outro, o qual denominamos x_{\perp} . Nesta geometria, ilustrada na figura 3.1, construímos um feixe simétrico em relação à origem da coordenada transversal $x_{\perp} = 0$ para resolver as equações, mas consideramos apenas o meio espaço $x_{\perp} \geq 0$ na análise dos resultados.

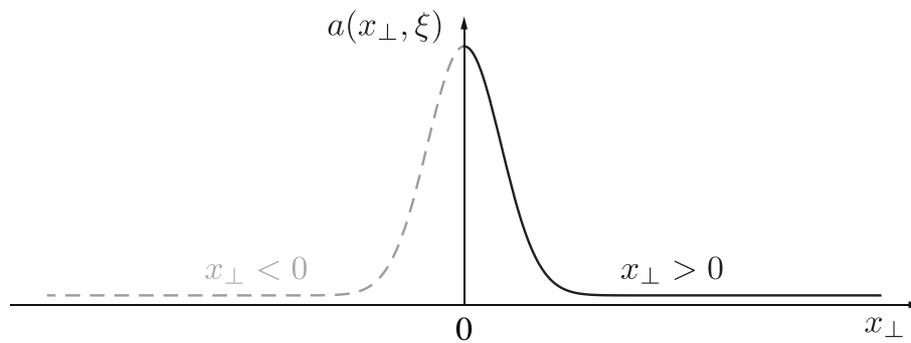


Figura 3.1: geometria do feixe. Definimos um feixe simétrico em relação a $x_{\perp} = 0$ para resolver as equações, mas analisamos somente os resultados do meio-espaço $x_{\perp} \geq 0$ (ou seja, a região tracejada é desprezada).

Esta escolha resulta em um feixe que é qualitativamente similar a um caso cilíndrico, mas sem os problemas relacionados às singularidades inerentes ao eixo $\rho = 0$ do mesmo. Em resumo, todos os campos são funções pares da coordenada transversal x_{\perp} (com derivadas em relação à mesma nulas na origem) que tendem assintoticamente a zero quando $|x_{\perp}| \rightarrow \infty$.

3.4 Solução analítica do modelo linear associado

Linearizando⁵ as equações (3.15) e (3.18),

$$\kappa \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = -\nabla_{\perp}^2 a, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{v_g^2} \phi = 0, \quad (3.20)$$

obtemos equações que possuem solução analítica. Como a equação do potencial de *space-charge* (3.20) é uma equação do tipo oscilador harmônico simples, de imediato vemos que ϕ deve oscilar com frequência linear $1/v_g$. Para resolver a equação do envelope do feixe (3.19), partimos de uma condição geral, inicialmente estática, que expressa a idéia de focalização na coordenada transversal x_{\perp} ,

$$a(x_{\perp}, \xi = 0) = a_0 e^{-\lambda x_{\perp}^2}, \quad (3.21)$$

onde a_0 é a amplitude do envelope e λ é um parâmetro de focalização do feixe. Aplicando-se análise de Fourier na coordenada transversal x_{\perp} e considerando-se a condição (3.21) obtemos a seguinte solução para a equação (3.19):

$$a_{linear}(x_{\perp}, \xi) = a_0 e^{[(\frac{\lambda}{\kappa})\xi^2 - \lambda x_{\perp}^2]} \cos\left(\frac{2 \lambda x_{\perp} \xi}{\sqrt{\kappa}}\right). \quad (3.22)$$

Esta solução apresenta um crescimento exponencial ao longo da coordenada ξ , um comportamento esperado [38] para a solução de uma equação elíptica (3.19), similar à equação de Laplace. A figura 3.2 exhibe a evolução da solução a_{linear}^2 em diferentes estágios, ilustrando claramente o crescimento exponencial mencionado.

⁵Na equação (3.15), além de desprezarmos os termos não lineares, por simplicidade tomamos o parâmetro de dessintonia $\delta = 0$. Mesmo com esta condição, a equação obtida (3.19) é suficiente para os nossos propósitos, como pode ser visto ao longo deste capítulo.

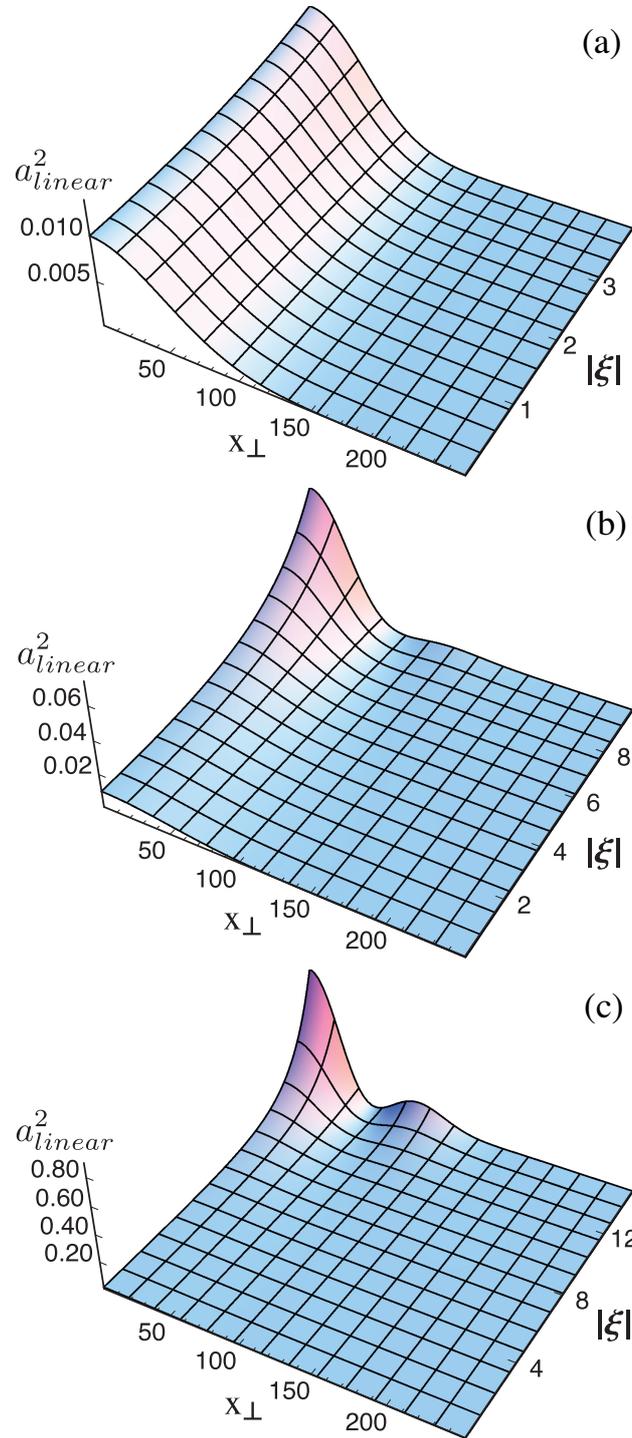


Figura 3.2: evolução da solução da equação do envelope linearizada (3.22), com $\lambda = 10^{-5}$ e $\kappa = 0,01$. O painel (a) mostra a evolução até $\xi = 4$: neste intervalo, o crescimento observado é pequeno ($a_{linear}^2 \sim 0,01 \ll 1$). No painel (b) vemos que em $\xi = 10$ a solução já apresenta um crescimento substancial, mas ainda sem violar o regime fracamente não linear ($a_{linear}^2 \sim 0,08 \ll 1$). Por fim o painel (c) mostra que, para valores maiores de ξ ($\xi = 15$, por exemplo), o regime fracamente não linear é violado ($a_{linear}^2 \sim 0,8 \sim 1$) e o modelo que adotamos não pode mais ser utilizado para descrever o comportamento do sistema.

Uma vez que (à medida que ξ avança) o envelope cresce exponencialmente até sair do regime de validade do nosso modelo, convém definir a escala característica deste crescimento. A partir da solução (3.22) podemos definir o seguinte parâmetro

$$\xi^* \equiv \sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}, \quad (3.23)$$

que pode ser interpretado como a “escala de tempo” dentro da qual vamos estudar a evolução do sistema. A figura 3.3, traçada com os mesmos valores de parâmetros ($\lambda = 10^{-5}$ e $\kappa = 0,01$) utilizados na figura 3.2, mostra o comportamento do envelope do feixe laser em $x_{\perp} = 0$, calculado a partir da solução (3.22): nela vemos que ξ^* (igual a 10 para os parâmetros escolhidos) é um bom parâmetro para definir o intervalo dentro do qual a amplitude do envelope se mantém pequena, dentro do regime de validade do modelo que construímos.

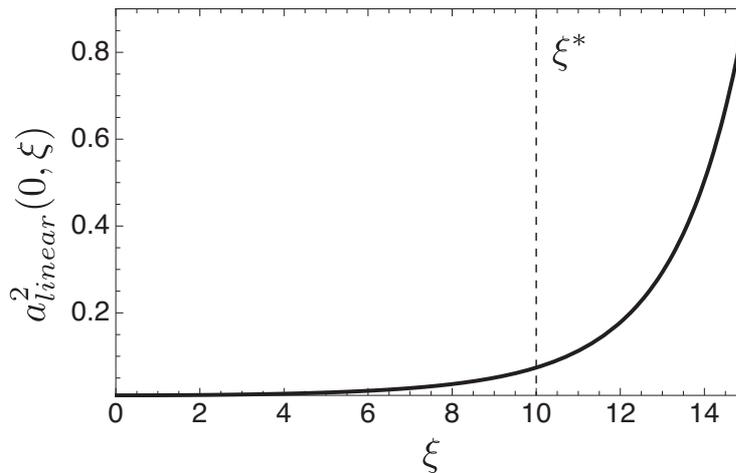


Figura 3.3: escala característica do crescimento exponencial do envelope do feixe. A figura mostra a evolução do envelope do feixe laser em $x_{\perp} = 0$, calculada a partir da solução do sistema linearizado (3.22) com $\lambda = 10^{-5}$ e $\kappa = 0,01$. Para estes parâmetros, $\xi^* = 10$.

À medida que os termos não lineares forem adicionados ao modelo, este crescimento exponencial deve ser saturado em algum ponto. Estamos interessados em entender a competição existente entre tais termos e o crescimento exponencial intrínseco observado na solução linear.

3.5 Feixes focalizados: soluções de equilíbrio

Um feixe focalizado de equilíbrio é aquele cujo perfil transversal não depende da coordenada longitudinal ξ (ou seja, um feixe que mantém seu perfil transversal à medida que

evolui no tempo e no espaço). Por isso, o ponto de partida para obtermos uma solução de equilíbrio é supor como nulas quaisquer derivadas em relação à variável ξ nas equações do modelo. Fazendo isso na equação (3.18) podemos escrever o potencial de *space-charge* ϕ em termos do campo do laser:

$$\phi = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}v_g^2\nabla_{\perp}^2 a^2. \quad (3.24)$$

Esta expressão também representa o campo de *space-charge* sob condições adiabáticas, onde a frequência da onda do plasma é muito maior que a frequência modulacional típica do campo laser que a excita. Inserindo o potencial ϕ obtido em (3.24) na equação (3.15) obtemos a seguinte equação diferencial para o feixe laser de equilíbrio:

$$\nabla_{\perp}^2 a = \delta a - \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a\nabla_{\perp}^2 a^2. \quad (3.25)$$

Conforme descrevemos ao definir a geometria planar adotada (seção 3.3), vamos trabalhar com um feixe simétrico em relação ao eixo $x_{\perp} = 0$ e analisar somente os resultados no meio-espaço $x_{\perp} \geq 0$. Aplicando as condições de contorno previamente mencionadas

$$\left. \frac{\partial a}{\partial x_{\perp}} \right|_{x_{\perp}=0} = 0, \quad a(x_{\perp} \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

a equação (3.25) admite a seguinte solução analítica (aproximada)

$$a_{eq}^{\text{analítico}}(x_{\perp}) = \sqrt{4\delta} \operatorname{sech}(\sqrt{\delta} x_{\perp}), \quad (3.27)$$

se o termo não linear contendo o laplaciano na equação (3.25) for desprezado. Desta solução vemos que (no equilíbrio) tanto a amplitude quanto a largura transversal do feixe escalam com o parâmetro de dessintonia δ . Em particular, dado que δ define a amplitude do campo laser, o vetor de onda e a frequência da onda portadora estão relacionados por uma relação de dispersão não linear. Além disso, o parâmetro δ assume o papel do parâmetro de focalização λ quando o feixe está em equilíbrio, caracterizando assim a escala de comprimento transversal do mesmo.

A solução analítica (3.27) é razoavelmente acurada, uma vez que o termo não linear desprezado para obtê-la é pequeno frente aos demais. Porém, como estamos lidando com equações instáveis, é mais prudente que a solução de equilíbrio seja obtida mantendo-se todos os termos da equação (3.25). Embora não tenhamos uma expressão analítica para esta condição, esperamos que um perfil que a satisfaça não seja muito diferente de um perfil obtido a partir da equação (3.27), uma vez que (como já mencionamos) o

termo desprezado para obtê-la é pequeno. Por isso, utilizamos $a_{eq}^{\text{analítico}}(x_{\perp})$ como ponto de partida para construir através de métodos numéricos uma solução $a_{eq}(x_{\perp})$ que satisfaça a equação de equilíbrio completa. Para tanto, aplicamos o procedimento descrito a seguir.

Impondo a condição de derivada nula em relação a x_{\perp} na origem, $(\partial a_{eq}/\partial x_{\perp})|_{x_{\perp}=0} = 0$, procuramos por uma amplitude inicial $a_0 \equiv a_{eq}(x_{\perp} = 0)$ que faça com que a solução de equilíbrio procurada $a_{eq}(x_{\perp})$ tenda assintoticamente a zero à medida que x_{\perp} cresce. Se utilizarmos como estimativa inicial de a_0 o valor da amplitude da solução de equilíbrio aproximada, ou seja,

$$a_0 \sim a_{eq}^{\text{analítico}}(x_{\perp} = 0) = \sqrt{4\delta}, \quad (3.28)$$

vemos que inicialmente a solução permanece tendendo a zero à medida que x_{\perp} cresce. Porém, eventualmente ela se afasta desta condição, como mostram os painéis (a) e (b) da figura 3.4. Trabalhamos então com os dígitos do valor de a_0 até obtermos uma solução que exiba o comportamento assintótico desejado ao longo de um intervalo da coordenada transversal x_{\perp} suficientemente grande. O painel (c) da figura 3.4 ilustra esta condição. Após obter a solução com as características desejadas, tomamos seu valor e o de sua derivada na extremidade da “cauda”, ou seja, em um certo $x_{\perp} = \alpha$ tal que $a_{eq}(x_{\perp} = \alpha) = a_{\alpha} \sim 0$ e $(\partial a_{eq}/\partial x_{\perp})|_{\alpha} = a'_{\alpha}$. Por fim, resolvemos novamente a equação de equilíbrio (3.25) com as seguintes condições de contorno periódicas

$$a_{eq}(x_{\perp} = -\alpha) = a_{eq}(x_{\perp} = \alpha) = a_{\alpha} \quad , \quad \frac{\partial a_{eq}}{\partial x_{\perp}} \Big|_{x_{\perp}=-\alpha} = -\frac{\partial a_{eq}}{\partial x_{\perp}} \Big|_{x_{\perp}=\alpha} = -a'_{\alpha}. \quad (3.29)$$

O resultado desta última etapa mencionada é uma solução simétrica em relação a $x_{\perp} = 0$, ilustrada no painel (d) da figura 3.4, em pleno acordo com a geometria definida na seção 3.3. Em resumo, este método nos permite construir perfis transversais para o envelope do laser que satisfazem a equação de equilíbrio (3.25) integralmente e que são o nosso ponto de partida para o estudo da dinâmica não linear do sistema.

O único parâmetro de controle presente na solução de equilíbrio (3.27) é o parâmetro de dessintonia δ , que deve ser positivo para gerar uma solução não trivial, mas pequeno para garantir que o envelope do feixe permaneça no regime de validade do modelo ($a_{eq} \ll 1$). A figura 3.5 contém alguns perfis para diferentes valores de δ . Nela vemos que, mesmo para pequenos valores de δ , ocorrem variações significativas no perfil da solução, que fica mais aguda (com maior amplitude e menor largura) à medida que o valor deste parâmetro aumenta.

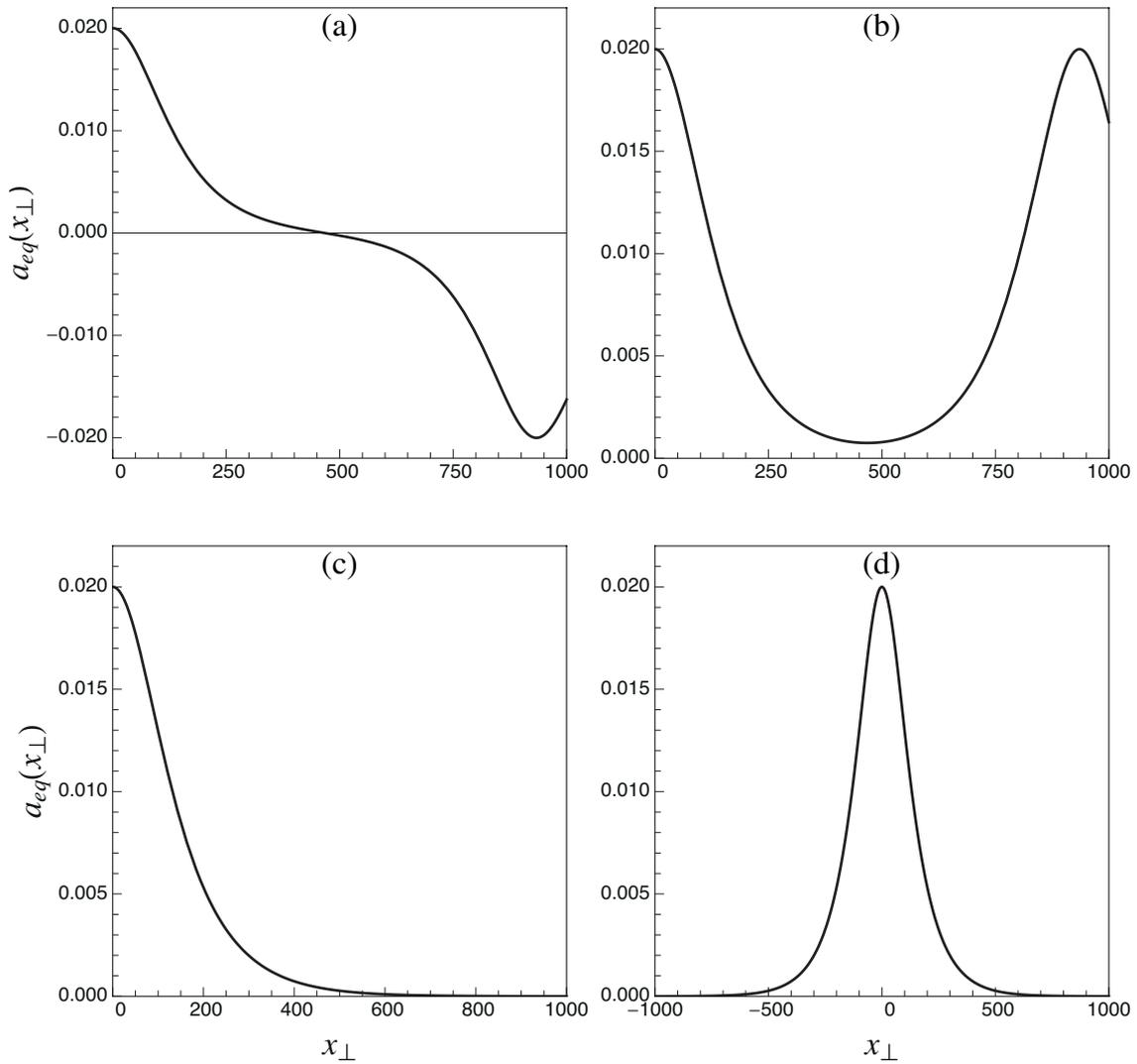


Figura 3.4: construção de uma solução numérica $a_{eq}(x_{\perp})$ para a equação de equilíbrio completa. Buscamos uma amplitude a_0 que resulte em $a_{eq}(x_{\perp}) \rightarrow 0$ à medida que x_{\perp} cresce. Utilizamos $a_{eq}^{\text{analítico}}(0)$ como uma estimativa inicial para o valor de a_0 . Se o valor inserido for maior que o valor que buscamos (a) a solução oscila invertendo seu sinal. Se for menor (b), a solução oscila mantendo-se positiva. Trabalhamos com os dígitos da estimativa inicial até obtermos o comportamento assintótico desejado (c) ao longo do intervalo de interesse em x_{\perp} . Ao encontrar um valor adequado, “espelhamos” a solução com a finalidade de obter um perfil simétrico em relação à $x_{\perp} = 0$ (d).

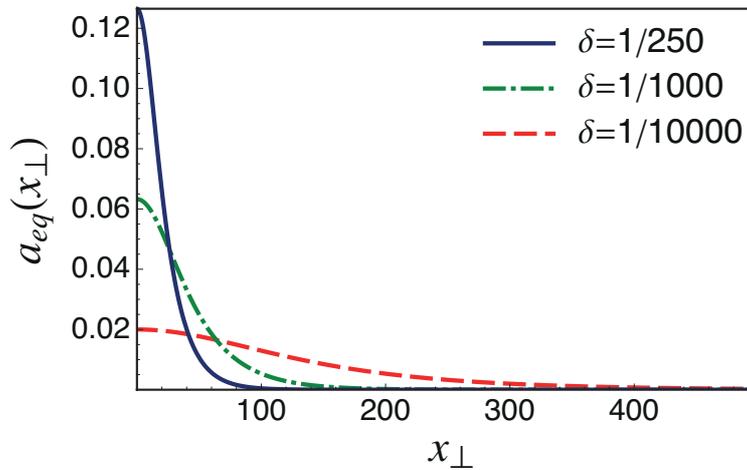


Figura 3.5: perfis de equilíbrio para diferentes valores de δ . Quanto maior for δ , mais agudo será o perfil.

Chamamos de feixes casados os feixes cujos perfis satisfazem a equação de equilíbrio completa (3.25), e de feixes descasados os feixes cujos perfis não satisfazem tal equação. Tomando feixes casados como referência, vamos investigar o comportamento do sistema nas proximidades dos regimes de equilíbrio, resolvendo de forma autoconsistente as equações do laser (3.15) e do potencial de *space-charge* (3.18) com feixes levemente descasados como condições iniciais.

3.6 Simulações da dinâmica espaço-temporal

3.6.1 Considerações iniciais

Neste trabalho adotamos o termo simulação para descrever a resolução numérica autoconsistente das equações do envelope do feixe laser e do potencial de *space-charge*. As simulações foram realizadas utilizando o DLSODE, uma rotina de integração de dupla precisão contida no LSODE [35] (*Livermore Solver for Ordinary Differential Equations*), que faz parte de um pacote de integradores desenvolvidos para Fortran chamado ODEPACK [36]. Fizemos também simulações (com um código desenvolvido por nós) no software *Mathematica* [48, 49], cujos resultados apresentaram excelente concordância com os obtidos nas simulações realizadas com o uso do Fortran. Com relação ao algoritmo, definimos uma grade ao longo da coordenada transversal x_{\perp} para resolver o laplaciano correspondente utilizando o método de diferenças finitas. Os campos em cada sítio são avançados em ξ utilizando o método adaptativo de Runge-Kutta no *Mathematica* e o método de Adams (preditor-corretor) no Fortran.

3.6.2 Parâmetros

Os valores escolhidos para os parâmetros do nosso modelo definem o regime e as escalas do sistema a ser simulado. O valor de κ está relacionado com a velocidade com que o laser se propaga no plasma, caracterizando de forma indireta a sua densidade. Da definição $\kappa \equiv 1 - v_g^2$ vemos que $0 \leq \kappa \leq 1$ e que valores pequenos de κ representam velocidades de propagação maiores (ou seja, mais próximas da velocidade da luz no vácuo), que ocorrem em plasmas com densidades mais baixas. Ao longo do trabalho utilizamos $\kappa = 0,5$, caracterizando assim um regime de densidade intermediária, e $\kappa = 0,01$ caracterizando um regime com baixa densidade (plasma *underdense*).

Com relação ao parâmetro de dessintonia δ , seu valor deve ser positivo (para que existam soluções não triviais) e pequeno (para que a amplitude do envelope permaneça pequena, dentro do regime de validade do modelo fracamente não linear). Na seção 3.5 mencionamos que δ caracteriza também a escala de comprimento transversal (representada por λ na solução do sistema linear), ou seja, a focalização do feixe quando ele está em equilíbrio. Considerando as normalizações adotadas e a solução de equilíbrio aproximada (3.27), a escolha de $\delta = 0,0001$ define uma escala de comprimento transversal contendo em torno de 100 comprimentos de onda do plasma. Este valor é compatível com experimentos [50] e será adotado neste trabalho. Um feixe com dimensão transversal de aproximadamente $50\mu m$ e um comprimento de onda do plasma de $0,5\mu m$ são exemplos dimensionais de um *set-up* experimental compatível com os valores numéricos dos parâmetros adotados nas simulações.

3.6.3 Dinâmica linear

Antes de iniciar o estudo do sistema não linear, conduzimos testes comparando a solução analítica (3.22) com simulações da versão linear da equação do feixe (3.19). Tais testes são úteis no ajuste dos parâmetros do código da simulação para obtermos uma precisão satisfatória nos resultados (uma questão relevante dada a natureza elíptica do sistema).

Nos diversos testes conduzidos, variamos o número de sítios da grade de $N = 256$ a $N = 1024$, com um fator de tolerância de 10^{-10} , e as diferenças observadas foram mínimas. Na figura 3.6 podemos ver a boa concordância de uma simulação realizada com $N = 512$ sítios, exibida no painel (a), com a solução analítica do sistema linear exibida no painel (b). Foram utilizados $\lambda = 0,0001$ e $\kappa = 0,5$, mas a concordância se mantém para outros valores de parâmetros.

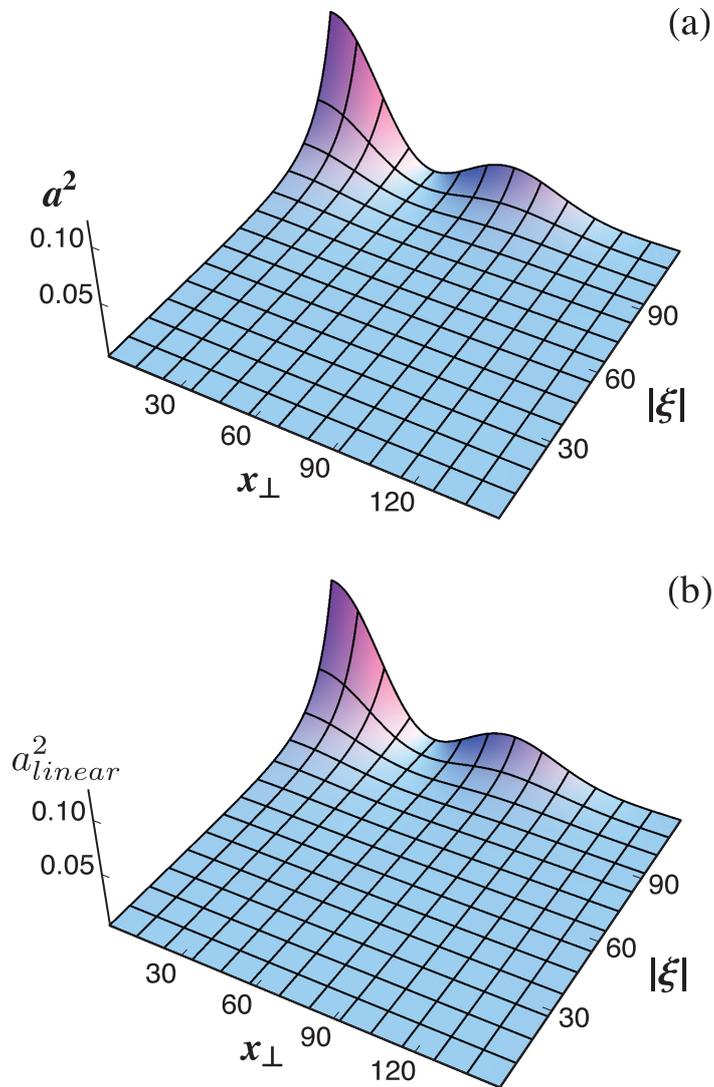


Figura 3.6: comparação entre a simulação da equação linearizada do envelope (3.19), painel (a), com o resultado analítico correspondente (a_{linear}) fornecido pela expressão (3.22), painel (b). Os parâmetros utilizados foram $\lambda = 0,0001$ e $\kappa = 0,5$.

Ainda sobre a figura 3.6 é interessante comentar que, no regime que estudamos, a frente de onda que avança está localizada em $\xi = 0$ e observamos o comportamento dos campos atrás dela (com $\xi < 0$). Por isto, para observarmos a evolução espaço-temporal dos campos da maneira convencional (com o “tempo” avançando da esquerda para a direita, no sentido crescente), traçamos neste e nos demais gráficos a coordenada ξ em termos do seu valor absoluto $|\xi|$.

Com os testes realizados na dinâmica linear demonstrando a boa concordância entre os resultados das simulações numéricas e as soluções analíticas, partimos agora para o estudo da dinâmica espaço-temporal não linear.

3.6.4 Feixes casados

Como mencionamos, um feixe é dito casado quando seu envelope satisfaz a equação de equilíbrio (3.25). Por isso, para simular sua evolução definimos os parâmetros de interesse, geramos uma solução numérica $a_{eq}(x_{\perp})$ seguindo o procedimento descrito na seção 3.5 e a utilizamos como condição inicial $a(x_{\perp}, \xi = 0) = a_{eq}(x_{\perp})$ na simulação das equações (3.15) e (3.18).

A figura 3.7, por exemplo, mostra o resultado da simulação realizada com $\delta = 0,0001$ e $v_g^2 = 0,5$. Neste caso, vemos que o perfil permanece de fato inalterado durante um intervalo que ultrapassa ξ^* , que (para os parâmetros utilizados) vale aproximadamente 70 na forma adimensional adotada. A escala de crescimento é ainda mais curta ($\xi^* \sim 50$) ao adicionarmos o efeito instabilizador do termo de dessintonia positivo δa , ausente na equação (3.22) mas presente nas equações (3.15) e (3.25). Este fato sugere que o código, com todos os seus termos não lineares, permanece robusto contra as instabilidades do problema elíptico.

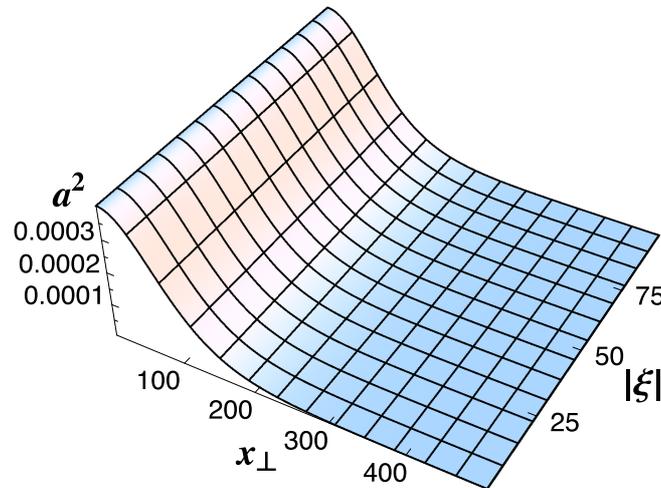


Figura 3.7: simulação da dinâmica de um feixe casado ($\delta = 0,0001$ e $\kappa = 0,5$; $\xi^* \sim 70$). O envelope mantém a sua forma por um intervalo que ultrapassa ξ^* , evidenciando um bom funcionamento do código numérico.

Nas simulações de feixes casados, o potencial de *space-charge* ϕ permanece inalterado ao longo da sua evolução, comportando-se da mesma forma que o feixe laser. Este comportamento é esperado, uma vez que a dinâmica de ambos é acoplada e está sendo simulada na condição de equilíbrio. A figura 3.8, traçada com os mesmos parâmetros utilizados na figura 3.7, ilustra este comportamento.

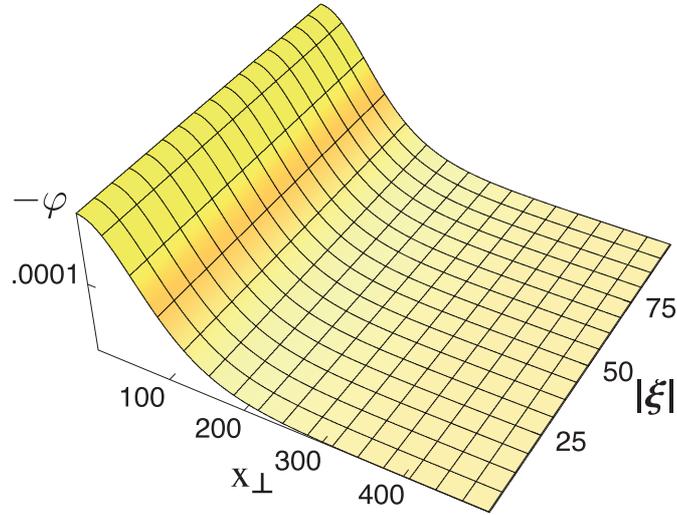


Figura 3.8: dinâmica do potencial de *space-charge* excitado por um feixe casado ($\delta = 0,0001$ e $\kappa = 0,5$; $\xi^* \sim 70$). Como esperado, ϕ mantém seu perfil inalterado.

3.6.5 Feixes descasados

Vamos agora estudar a dinâmica de feixes descasados, ou seja, feixes cujos perfis não satisfazem a equação de equilíbrio (3.25). Partindo de condições iniciais descasadas, estamos interessados em verificar se os feixes permanecem ou não aproximadamente focalizados quando os descasamentos são relativamente pequenos.

Vimos que a versão linear do nosso sistema de equações é instável, no sentido de que a equação (3.19) prediz um crescimento exponencial para $a(x_\perp, \xi)$ à medida que ξ avança. O reflexo desta característica na estabilidade da solução de equilíbrio se dá como descrito a seguir. Se perturbarmos a solução de equilíbrio a_{eq} com uma pequena flutuação \tilde{a} exibindo dependência suficientemente forte na coordenada transversal x_\perp , a equação que governa a evolução de \tilde{a} toma aproximadamente a forma linear vista na equação (3.19):

$$\kappa \frac{\partial^2 \tilde{a}}{\partial \xi^2} = -\nabla_\perp^2 \tilde{a}. \quad (3.30)$$

Pequenas perturbações crescem portanto com ξ , evidenciando a natureza instável do processo. Mesmo campos com uma dependência mais suave na coordenada transversal x_\perp possuem componentes espectrais em valores elevados do respectivo vetor de onda, de modo que esperamos instabilidade em geral, e não apenas quando a escala de comprimento dominante da perturbação é curta.

O crescimento da solução é eventualmente saturado pelos termos não lineares do conjunto de equações completas, como vemos a seguir. Na figura (3.9) exibimos diversos

painéis analisando a evolução temporal dos campos a e ϕ em várias escalas de tempo ao longo do eixo ξ . O feixe inicialmente descasado é escrito da seguinte maneira:

$$a(x_{\perp}, \xi = 0) = a_{eq}(x_{\perp}, \xi = 0) + \epsilon a_{eq}(\chi x_{\perp}, \xi = 0), \quad (3.31)$$

com $\phi(x_{\perp}, \xi = 0) = \phi_{eq}$. Os campos a_{eq} e ϕ_{eq} são os campos de equilíbrio previamente obtidos, $\epsilon \ll 1$ é um parâmetro de escala do termo perturbativo, e χ é um parâmetro para controlar a escala de comprimento dominante na coordenada transversal do termo perturbativo. Valores maiores de $\chi > 1$ representam escalas transversais mais curtas em comparação com a escala do perfil de equilíbrio, e vice-versa. Utilizamos $\delta = 0,0001$, $\chi = 10$ e $\epsilon = 0,2$ em todos os casos da figura 3.9, com $\kappa = 0,5$ para os painéis (a), (b) e (c), e um regime do tipo *underdense* com $\kappa = 0,01$ para os demais painéis, de (d) a (h).

Podemos identificar no painel (a) o crescimento exponencial do envelope do laser, típico do regime linear, no início da simulação. O painel (b) ainda mostra soluções crescentes, mas já identificamos deformações no perfil do pulso. O painel (c) finalmente revela o processo de saturação seguido de uma forte focalização na vizinhança de $x_{\perp} = 0$. À medida que o crescimento da solução atinge a saturação, o feixe se quebra em um padrão aparentemente irregular e a coerência é perdida. É interessante observar que dentro da escala de tempo exibida na figura 3.9 as maiores amplitudes exibidas permanecem pequenas, dentro do regime fracamente não linear. Para intervalos de tempo maiores, o padrão irregular avança acompanhado por picos cujas amplitudes estão além do limite de validade do nosso modelo.

Os painéis (d) a (f) representam a propagação em um plasma de baixa densidade, com $\kappa = 0,01$, um regime de interesse para aplicações de aceleradores de laser a plasma [1] (*LWFA*) por exemplo. O comportamento observado no envelope do laser é análogo ao caso anterior, porém agora o desenvolvimento da instabilidade é muito mais rápido que o observado para $\kappa = 0,5$. De fato, a expressão (3.23) mostra que para $\kappa = 0,01$ a escala característica de crescimento ξ^* é aproximadamente sete vezes menor do que para $\kappa = 0,5$, se for mantido o mesmo perfil inicial.

Com relação ao potencial de *space-charge*, a figura 3.10 aborda duas situações: os painéis (a) e (b) comparam o ϕ calculado a partir da solução autoconsistente das equações não lineares do modelo (3.15) e (3.18) com a sua aproximação adiabática, a qual vamos chamar de ϕ_{ad} , anteriormente discutida no contexto da equação do potencial no equilíbrio (3.24). Dada a suavidade inicial do perfil do feixe laser, vemos que o potencial de *space-charge* inicialmente segue uma dinâmica adiabática, mas somente até o ponto em que o feixe se quebra e assume uma forma irregular. Em seguida, as escalas de tempo para as

flutuações do *space-charge* tornam-se comparáveis às escalas das ondas de plasma.

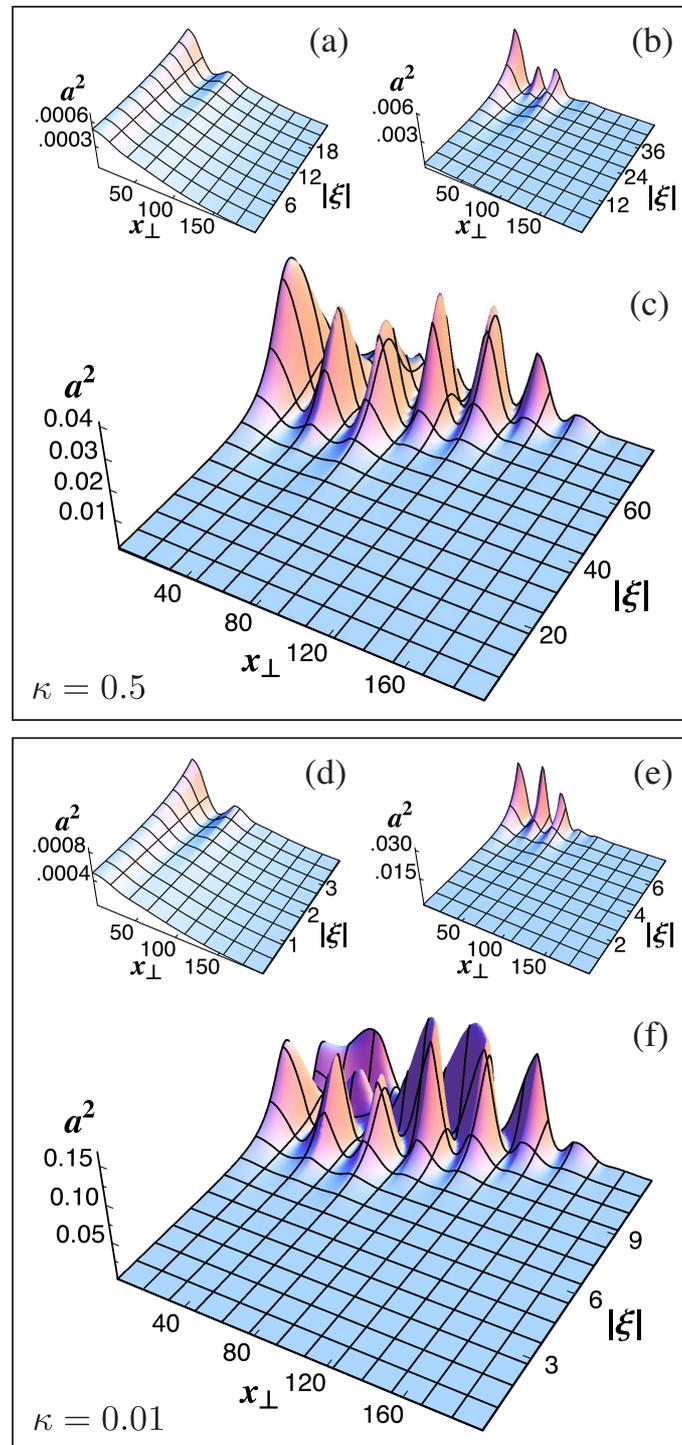


Figura 3.9: evolução espaço-temporal de feixes descasados em diferentes estágios ao longo de ξ , propagando-se em plasmas de maior e menor densidade. Os painéis (a), (b) e (c) referem-se ao envelope do laser em um regime de maior densidade do plasma ($\kappa = 0,5$), e os painéis (d), (e) e (f) referem-se a um regime do tipo *underdense* ($\kappa = 0,01$). Para todos os casos $\delta = 0,0001$, $\chi = 10$ e $\epsilon = 0,2$.

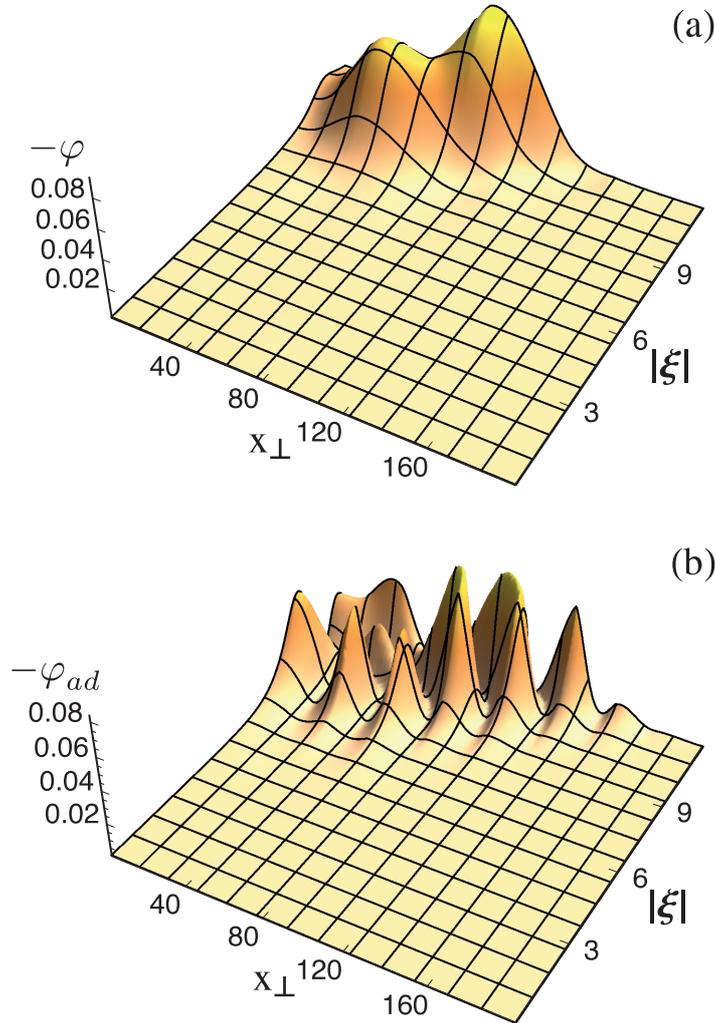


Figura 3.10: evolução espaço-temporal do potencial de *space-charge* ϕ em um regime de baixa densidade ($\kappa = 0,01$). O potencial no painel (a) segue a dinâmica adiabática do painel (b) somente até o ponto em que o feixe se “quebra”. Para todos os casos $\delta = 0,0001$ e $\chi = 10$.

O estudo realizado para $\chi = 10$ representa os casos em que os descasamentos iniciais têm escalas de comprimento menores se comparadas com a escala de comprimento do perfil de equilíbrio. Como já mencionamos, as perturbações com escalas de comprimento mais longas também crescem, mas com um comportamento diferente em relação ao caso anterior. Ambos os casos podem ser comparados na figura 3.11, onde traçamos curvas de $a(x_{\perp} = 0, \xi)$ contra ξ para feixes descasados com a forma dada pela expressão (3.31). Os casos $\chi = 10$ e $\chi = 0,5$ são comparados para $\kappa = 0,01$, mantendo os valores já utilizados para os demais parâmetros. Escalas de comprimento mais curtas exibem um comportamento instável mais convencional: tão logo a perturbação é criada, a solução

correspondente simplesmente cresce se afastando da solução de equilíbrio. Porém, quando escalas de comprimento maiores são consideradas, como o caso representado por $\chi = 0,5$ por exemplo, a solução descasada é inicialmente atraída pela solução de equilíbrio, para depois se afastar da mesma, como pode ser visto no detalhe da figura 3.11. O fato interessante aqui é que descasamentos com escalas de comprimento maiores se comportam como perturbações estáveis até que a escala de tempo do crescimento exponencial seja atingida. Quando isto ocorre, a solução inicial se afasta da vizinhança do equilíbrio.

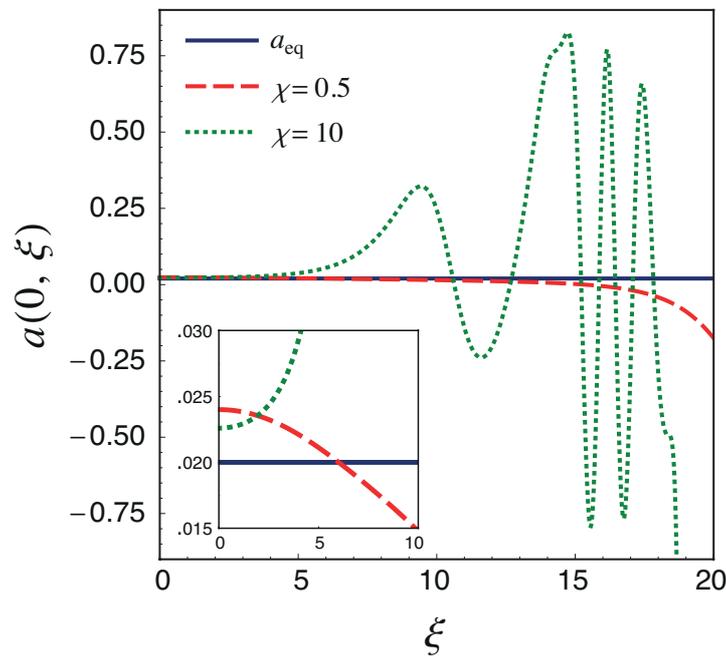


Figura 3.11: dependência do comportamento da dinâmica na escala do descasamento χ . Escalas maiores apresentam crescimentos mais lentos.

3.7 Conclusões

Neste trabalho nos dedicamos ao estudo das interações não lineares de feixes laser focalizados em sistemas do tipo laser-plasma. Inicialmente desenvolvemos um modelo e obtivemos as equações associadas à evolução espaço-temporal do feixe no seu referencial. Termos não-paraxiais foram preservados e a aproximação da velocidade de grupo do feixe pela velocidade da luz no vácuo (usual em regimes do tipo *underdense*) foi evitada. Com este modelo, investigamos as condições de equilíbrio e a dinâmica espaço-temporal do sistema, sem restrições com relação à densidade do plasma.

Primeiramente observamos que feixes de equilíbrio exibem perfis que dependem do fator de dessintonia δ . Nesta condição, δ assume o papel do parâmetro de focalização λ

e, de modo similar ao caso unidimensional de sólitons eletromagnéticos, define a razão de aspecto do perfil transversal do feixe: quanto maior for δ , maiores são as amplitudes (e menores são as larguras) exibidas. Observamos também que feixes descasados (ou seja, feixes cujo perfil não satisfaz a condição de equilíbrio estudada) desenvolvem instabilidades que são saturadas pelos efeitos não lineares da teoria. O crescimento destas instabilidades depende da perturbação inicial, sendo que perturbações com maior comprimento de onda exibem crescimentos mais lentos que perturbações com comprimentos de onda menores.

Outro resultado interessante obtido está relacionado com a obtenção de um parâmetro para estimar o “tempo” de crescimento das perturbações. O fator $\kappa = 1 - v_g^2$ se combina com a escala de comprimento transversal λ para formar a escala de “tempo” $\xi^* = \sqrt{\kappa/\lambda}$ para perturbações crescendo ao longo do eixo ξ . Isto significa que sistemas com densidades menores tendem a evoluir no tempo de um modo mais rápido que o observado em sistemas com densidades maiores. Este comportamento pode ser visto nos resultados das simulações. Mesmo feixes com perfis transversais suaves estão sujeitos à uma dinâmica relativamente rápida quando a densidade do sistema é suficientemente baixa. Se considerarmos um sistema com dimensões similares às mencionadas neste trabalho propagando-se em um regime tal que $\kappa = 0,01$, por exemplo, é possível observar a evolução da perturbação de um feixe descasado em alguns poucos comprimentos de onda do plasma.

Capítulo 4

Considerações finais e perspectivas

4.1 Considerações finais

Neste trabalho estudamos a dinâmica de ondas eletromagnéticas localizadas em interações laser-plasma, considerando o acoplamento entre estas ondas e as oscilações no plasma em um regime fracamente não linear. Desenvolvemos dois modelos, um para descrever a evolução de pulsos laser e *wakefields*, outro para feixes e potenciais de *space-charge*.

Uma constatação interessante, válida para os dois modelos estudados, é a relevância de não termos aproximado a velocidade de grupo do laser v_g pela velocidade da luz no vácuo c , uma vez que a existência de soluções estáveis na dinâmica longitudinal de pulsos e a escala de crescimento exponencial na dinâmica transversal de feixes dependem do coeficiente κ , que seria nulo se tal aproximação fosse adotada. Neste caso, termos nas equações do laser em ambos os modelos seriam eliminados e, conseqüentemente, alguns efeitos que observamos nos estudos apresentados não ocorreriam. Além disso, esta aproximação restringiria a validade dos modelos ao estudo de plasmas do tipo *underdense*.

Estimativas analíticas realizadas a partir dos modelos desenvolvidos nos mostraram que, enquanto a dinâmica longitudinal de pulsos pode ter ou não soluções de equilíbrio estáveis (dependendo da sua potência e largura), perfis transversais de equilíbrio de feixes são instáveis e sempre evoluem para padrões incoerentes depois de um certo “tempo”. Isto ocorre devido ao comportamento intrinsecamente instável da equação que governa a sua dinâmica. Simulações numéricas foram realizadas com o objetivo de validar as estimativas analíticas e investigar regiões e regimes nos quais tais estimativas não estavam disponíveis.

Para finalizar a discussão, ressaltamos que as técnicas e os resultados obtidos ao longo deste trabalho podem ser aplicados na análise de aceleração de elétrons via acelerador de plasma a laser (LWFA), principalmente para localizar soluções longitudinais estáveis

para pulsos e perfis transversais de equilíbrio para feixes (além das escalas características de crescimento das instabilidades associadas). Porém, a aplicação é restrita a pequenos gradientes de aceleração (ou então aos instantes iniciais de uma aceleração mais intensa), uma vez que os modelos foram construídos para regimes fracamente não lineares nos quais a amplitude do envelope laser deve permanecer pequena.

4.2 Perspectivas

Com relação às perspectivas de continuidade desta linha de pesquisa, uma hipótese interessante seria revisitar o regime fortemente não linear, que é adequado para estudar o início do processo de aceleração (na vizinhança da quebra de onda), cuja dinâmica longitudinal estacionária foi previamente estudada por nosso grupo [22, 26, 27]. Utilizando a tecnologia desenvolvida nos estudos apresentados nesta tese, poderíamos de imediato (aplicando as equações anteriores em nossas simulações atuais e fazendo alguns ajustes nos códigos) estudar a dinâmica longitudinal dependente do tempo ou então a dinâmica transversal e longitudinal em regimes estacionários. Outra possibilidade interessante seria considerar no modelo atual a propagação do laser em um canal de plasma, capaz de minimizar os efeitos de difração de pulsos laser focalizados ultra-curtos [51] (os quais são bastante eficientes na aceleração por wakefields). A inclusão desta característica pode ser realizada adicionando-se um perfil adequado na densidade dos elétrons no plasma. Por fim, uma alternativa mais completa (e complexa) seria a utilização de modelos cinéticos [52] e/ou simulações do tipo *particle-in-cell* (PIC) [53], que nos permitiriam estudar acelerações ultra-intensas no chamado “regime de bolha”, onde um pulso laser gera uma cavidade de elétrons solitária no plasma [54] que se desloca a velocidades muito próximas da luz no vácuo. Porém, para aplicar tais técnicas, seria necessário desenvolver códigos completamente novos e dispor de recursos computacionais adequados para rodá-los.

Referências Bibliográficas

- [1] T. Tajima and J. M. Dawson, “Laser electron accelerator,” Physical Review Letters, vol. 43, no. 4, pp. 267–270, 1979.
- [2] C. Geddes, C. Toth, J. van Tilborg, E. Esarey, C. B. Schroeder, D. Bruhwiler, C. Nie-ter, J. Cary, and W. P. Leemans, “High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding,” Nature, vol. 431, no. 7008, pp. 538–541, 2004.
- [3] G. Mourou and D. Umstadter, “Development and applications of compact high-intensity lasers,” Physics of Fluids B Plasma Physics, vol. 4, no. 7, pp. 2315–2325, 1992.
- [4] R. Bingham, “Plasma physics: On the crest of a wake,” Nature, vol. 445, no. 7129, pp. 721–722, 2007.
- [5] I. Blumenfeld, C. E. Clayton, F. J. Decker, M. J. Hogan, C. Huang, R. Ischebeck, R. Iverson, C. Joshi, T. Katsouleas, and N. Kirby, “Energy doubling of 42 GeV electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator,” Nature, vol. 445, no. 7129, pp. 741–744, 2007.
- [6] P. K. Shukla, “Excitation of ion wakefields by electromagnetic pulses in dense plasmas,” Journal of Plasma Physics, vol. 75, pp. 15–75, Feb 2009.
- [7] A. Bonatto, R. Pakter, and F. B. Rizzato, “Nonlinear Dynamics of Electromagnetic Pulses in Cold Relativistic Plasmas,” in PAC07 Proceedings, pp. 2707–2709, 2007.
- [8] A. Bonatto, R. Pakter, and F. B. Rizzato, “Transversal threshold for modulational instability in laser-plasma systems,” in PAC09 Proceedings, pp. 4570–4572, 2009.
- [9] A. Bonatto, R. Pakter, and F. B. Rizzato, “Nonlinear Propagation of Laser Pulses in Plasmas: a Comparison between Numerical and Analytical Solutions,” in IPAC10 Proceedings, pp. 4349–4351, 2010.

- [10] A. Bonatto, R. Pakter, and F. B. Rizzato, “Self-Consistent Dynamics of Electromagnetic Pulses and Wakefields in Laser-Plasma Interactions,” in IPAC11 Proceedings, pp. 2811–2813, 2011.
- [11] A. Bonatto, R. Pakter, and F. B. Rizzato, “Self-consistent dynamics of electromagnetic pulses and wakefields in laser-plasma interactions,” Laser and Particle Beams, vol. 29, no. 4, pp. 399–406, 2011.
- [12] V. A. Kozlov, A. G. Litvak, and E. V. Suvorov, “Solitons of envelopes of intense relativistic electromagnetic waves,” Zhurnal Eksperimental noi i Teoreticheskoi Fiziki, vol. 76, pp. 148–157, Jan. 1979.
- [13] P. Shukla, N. Rao, M. Yu, and N. Tsintsadze, “Relativistic nonlinear effects in plasmas,” Physics Reports, vol. 138, no. 1-2, pp. 1–149, 1986.
- [14] E. Esarey, B. Hafizi, R. Hubbard, and A. Ting, “Trapping and Acceleration in Self-Modulated Laser Wakefields,” Physical Review Letters, vol. 80, no. 25, pp. 5552–5555, 1998.
- [15] D. Farina and S. Bulanov, “Slow electromagnetic solitons in electron-ion plasmas,” Plasma Physics Reports, vol. 27, no. 8, pp. 641–651, 2001.
- [16] J. T. Mendonça, Theory of Photon Acceleration - J. T. Mendonça. IOP Publishing, Bristol, 2001.
- [17] S. Poornakala, A. Das, A. Sen, and P. K. Kaw, “Laser envelope solitons in cold overdense plasmas,” Physics of Plasmas, vol. 9, no. 5, pp. 1820–1823, 2002.
- [18] R. Bingham, “Accelerator physics: in the wake of success,” Nature, vol. 424, no. 6946, pp. 258–259, 2003.
- [19] C. Joshi and T. C. Katsouleas, “Plasma accelerators at the energy frontier and on tabletops,” Phys. Today, vol. 56, pp. 47–53, 2003.
- [20] D. A. Jaroszynski, B. R. A, and R. a. Cairns, Laser-plasma interactions 6. Taylor & Francis Group, 2009.
- [21] B. Duda and W. Mori, “Variational principle approach to short-pulse laser-plasma interactions in three dimensions,” Physical Review E, vol. 61, no. 2, pp. 1925–1939, 2000.

- [22] A. Bonatto, R. Pakter, and F. B. Rizzato, “Nonlinear dynamics of electromagnetic pulses in cold relativistic plasmas,” Journal of Plasma Physics, vol. 72, no. 2, pp. 179–188, 2005.
- [23] P. Gibbon, Short Pulse Laser Interactions with Matter: An Introduction. London: Imperial College, 2005.
- [24] T. Katsouleas and W. B. Mori, “Wave-Breaking Amplitude of Relativistic Oscillations in a Thermal Plasma,” Physical Review Letters, vol. 61, no. 1, pp. 90–93, 1988.
- [25] W. Lu, C. Huang, M. Zhou, M. Tzoufras, and F. Tsung, “A nonlinear theory for multidimensional relativistic plasma wave wakefields,” Physics Of Plasmas, vol. 13, p. 056709, 2006.
- [26] A. Bonatto, R. Pakter, and F. B. Rizzato, “Nonlinear field dynamics of electromagnetic pulses in plasmas,” Chaos, vol. 32, pp. 951–957, 2007.
- [27] A. Bonatto, “Dinâmica não linear de pulsos eletromagnéticos em um plasma relativístico frio,” Dissertação de Mestrado - UFRGS, 2008.
- [28] D. Anderson, “Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers,” Physical Review A, vol. 27, pp. 3135–3145, 1983.
- [29] B. Malomed, D. Anderson, M. Lisak, and M. L. Quiroga-Teixeiro, “Dynamics of solitary waves in the Zakharov model equations,” Physical Review E, vol. 55, no. 1, pp. 962–968, 1997.
- [30] F. B. Rizzato, G. de Oliveira, and R. Erichsen, “Solitons, chaos, and energy transfer in the Zakharov equations,” Physical Review E, vol. 57, no. 3, pp. 2776–2786, 1998.
- [31] F. Rizzato, G. D. Oliveira, and A. Chian, “Nonlinear stability of solitons against strong external perturbations,” Physical Review E, vol. 67, p. 047601, Apr 2003.
- [32] G. de Oliveira and F. B. Rizzato, “Nonlinear spatiotemporal stability of solitons against external perturbations,” Chaos, vol. 28, pp. 1347–1355, 2006.
- [33] D. Anderson, M. Bonnedal, and M. Lisak, “Variational approach to strongly nonlinear Schroedinger equations,” Physics Of Fluids, vol. 22, no. 4, pp. 788–789, 1979.
- [34] P. Gibbon, “Short Pulse Laser Interactions with Matter: An Introduction,” 2005.

- [35] A. C. Hindmarsh and K. Radhakrishnan, “Description and use of LSODE, the Livermore solver for ordinary differential equations,” Lawrence Livermore National Laboratory Report UCRL-ID-113855, 1993.
- [36] A. C. Hindmarsh, “ODEPACK, A Systematized Collection of ODE Solvers, RS Stepleman et al.(eds.), North-Holland, Amsterdam,(vol. 1 of), pp. 55-64.,” IMACS Transactions on Scientific Computation, vol. 1, pp. 55–64, 1983.
- [37] P. Mora and T. A. Jr, “Kinetic modeling of intense, short laser pulses propagating in tenuous plasmas,” Phys Plasmas, vol. 4, no. 1, pp. 217–229, 1997.
- [38] L. Debnath, Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers; Tth ed. Boston: Springer, 2012.
- [39] M. J. H. Luttikhof, A. G. Khachatryan, F. A. van Goor, K. J. Boller, and P. Mora, “Electron bunch injection at an angle into a laser wakefield,” Laser and Particle Beams, vol. 27, pp. 69–77, Jan. 2009.
- [40] A. Bonatto, R. Pakter, F. B. Rizzato, and C. Bonatto, “On the interaction of focused electromagnetic beams and space-charge fields in laser-plasma systems,” Laser and Particle Beams, vol. 30, no. 4, pp. 583–590, 2012.
- [41] W. P. Leemans, B. Nagler, A. J. Gonsalves, C. Toth, K. Nakamura, C. G. R. Geddes, E. Esarey, C. B. Schroeder, and S. M. Hooker, “GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator,” Nature Physics, vol. 2, pp. 696–699, Sept. 2006.
- [42] M. S. Sodha, S. K. Mishra, and S. K. Agarwal, “Self-focusing and cross-focusing of Gaussian electromagnetic beams in fully ionized collisional magnetoplasmas,” Physics Of Plasmas, 2007.
- [43] P. Sprangle, E. Esarey, and A. Ting, “Nonlinear theory of intense laser-plasma interactions,” Physical Review Letters, vol. 64, no. 17, pp. 2011–2014, 1990.
- [44] U. A. Mofiz and U. de Angelis, “Nonlinear propagation and localization of intense electromagnetic waves in relativistic plasmas,” Journal of Plasma Physics, vol. 33, pp. 107–118, Feb. 1985.
- [45] H. S. Brandi, C. Manus, G. Mainfray, and T. Lehner, “Relativistic and ponderomotive self-focusing of a laser beam in a radially inhomogeneous plasma. I. Paraxial approximation | Phys. Fluids B (1984-1993) - Physics of Plasmas,” Physics of Fluids B: Plasma Physics, vol. 5, no. 10, pp. 3539–3550, 1993.

- [46] B. S. Azimov, M. M. Sagatov, and A. P. Sukhorukov, “Formation and propagation of steady-state laser pulses in media under the combined action of third- and fifth-order nonlinearities,” Soviet Journal of Quantum Electronics, vol. 21, pp. 93–95, Oct. 1991.
- [47] E. Esarey, C. Schroeder, B. Shadwick, J. Wurtele, and W. P. Leemans, “Nonlinear Theory of Nonparaxial Laser Pulse Propagation in Plasma Channels,” Physical Review Letters, vol. 84, pp. 3081–3084, Apr. 2000.
- [48] P. R. Wellin, R. J. Gaylord, and S. N. Kamin, An Introduction to Programming with Mathematica. Cambridge University Press, Jan. 2005.
- [49] S. Wagon, Mathematica in Action. Problem Solving Through Visualization and Computation, Springer, Jan. 2010.
- [50] P. Jha, A. Malviya, and A. K. Upadhyay, “Wakefield effects on the evolution of symmetric laser pulses in a plasma channel,” Laser and Particle Beams, vol. 28, pp. 245–251, 2010.
- [51] K. Nakamura, B. Nagler, C. Toth, C. G. R. Geddes, C. B. Schroeder, E. Esarey, W. P. Leemans, A. J. Gonsalves, and S. M. Hooker, “GeV electron beams from a centimeter-scale channel guided laser wakefield accelerator,” Physics Of Plasmas, vol. 14, p. 056708, 2007.
- [52] R. Trines, R. Bingham, and L. O. Silva, “Applications of the wave kinetic approach: from laser wakefields to drift wave turbulence,” Journal of Plasma Physics, vol. 76, no. 6, pp. 903–914, 2010.
- [53] S. F. Martins, R. A. Fonseca, J. Vieira, L. O. Silva, W. Lu, and W. B. Mori, “Modeling laser wakefield accelerator experiments with ultrafast particle-in-cell simulations in boosted frames,” Physics of Plasmas, vol. 17, no. 5, p. 056705, 2010.
- [54] I. Kostyukov, A. Pukhov, and S. Kiselev, “Phenomenological theory of laser-plasma interaction in “bubble” regime,” Physics of Plasmas, vol. 11, no. 11, pp. 5256–5264, 2004.