UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Lucas de Oliveira Contiero

PORTO ALEGRE

2012/1

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Trabalho apresentado junto ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Lucas de Oliveira Contiero

PORTO ALEGRE

2012/1

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS UTILISANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Trabalho apresentado junto ao curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Hoppen

Banca Examinadora:

____

Profª. Dra. Márcia Rodrigues Notare Meneghetti

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

____

Profª. Dra Maria Alice Gravina

INSTITUTO DE MATEMÁTICA – UFRGS

Porto Alegre, Junho de 2012

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Hoppen, pelo apoio, preocupação e ótimo desempenho comigo e com este trabalho.

Às professoras Maria Alice Gravina e Márcia Rodrigues Notare Meneghetti, componentes da banca examinadora.

A Universidade Federal do Rio Grande do Sul e ao Instituto de Matemática pelo excelente ensino.

Ao meu colega Genê Claas de Bona, pelo auxílio e coleta de dados para o trabalho.

À minha família, pelo amor, carinho e compreensão que sempre tiveram comigo.

À minha namorada Ariane, por ter sido minha companheira durante praticamente todo meu curso.

RESUMO

Este trabalho é o relato de uma experiência realizada em uma escola pública, da zona sul de Porto Alegre, para trabalhar as definições dos quadriláteros notáveis com um grupo de alunos da sexta série do ensino fundamental, utilizando o software matemático Geogebra. Para tal, elaborei quatro oficinas onde os alunos teriam que construir os quadriláteros.

Durante a experiência, observei que fazer construções no Geogebra, que é um software que possibilita construções geométricas com régua e compasso, é semelhante a uma atividade de programação. Por isso, quando os alunos realizavam construções de figuras da Geometria Dinâmica, eles sentiam a necessidade de utilizar as propriedades fundamentais que definem os quadriláteros, ao invés da imagem intuitiva. A dinâmica de manipulação possibilitada pelo Geogebra contribuiu, ainda, para que os alunos percebessem as generalizações e particularizações das definições de quadriláteros, transformando, por exemplo, um retângulo ou um losango em um quadrado.

A partir disso, acredito que tenha contribuído para a passagem dos alunos do nível de Van Hiele de visualização para o nível de Van Hiele de análise.

ABSTRACT

This work describes a teaching experiment with a group of 5th- and 6th-grade students in a public school in Porto Alegre, which used the mathematical software Geogebra to introduce the definitions of the main classes of quadrilaterals.

During this experiment, I have observed that the process of constructing polygons with Geogebra, which has been developed to mimic geometric constructions with ruler and compass, resembles th act of programming. Therefore, as the students created figures of dynamic geometry, they saw the need of using the fundamental properties defining these figures instead of intuitive images of them. Moreover, the manipulation of figures allowed by Geogebra helped the students understand generalizations and specializations of the definitions of quadrilaterals. They have realized, for instance, that squares are a specialization of rectangles and rhombuses.

In terms of the Van Hiele levels of geometrical thought, I believe that these activities contributed with a step in the transition from Visualization to Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Comandos do Geogebra 1...11
Figura 2: Comandos do Geogebra 2...12
Figura 3: Comandos de Geogebra 3...12
Figura 4: Comandos do Geogebra 4...12
Figura 5: Conhecendo o Geogebra...13
Figura 6: Conjuntos de quadriláteros...16
Figura 7: Imagem da construção sólida / não sólida a ser manipulada pelos alunos....20
Figura 8: Um círculo qualquer e dois diâmetros perpendiculares deste círculo...........20
Figura 9: Atividade do 2º encontro...21
Figura 10: Construção de Alexandre e Edilson 1...30
Figura 11: Construção de Alexandre e Edilson 2...31
Figura 12: Construção de Luís e Horácio 1...32
Figura 13: Construção de Luís e Horácio 2...32
Figura 14: Atividade 1 do Edilson do 2º encontro...35
Figura 15: Atividade 2 do Edilson do 2º encontro...36
Figura 16: Primeira construção do quadrado de Luís e Horácio..................................37
Figura 17: Primeira construção do quadrado de Luís e Horácio movimentada.............38
Figura 18: Construção do quadrado de Alexandre e Edilson.....................................38
Figura 19: Construção do quadrado de Alexandre e Edilson exibindo os objetos escondidos...39
Figura 20: Construção do quadrado de Julia...39
Figura 21: Atividade da tabela do 3º encontro...40
Figura 22: Uma das tabelas preenchida...41
Figura 23: Tentativa de construção do paralelogramo de Daniel.........................42
Figura 24: Tentativa de construção do paralelogramo de Daniel movimentada....42
Figura 25: Segunda Tentativa de construção do paralelogramo de Daniel...................43
Figura 26: Segunda Tentativa de construção do paralelogramo de Daniel movimenta..43
Figura 27: Construção do paralelogramo de Alexandre...44
Figura 28: Construção do retângulo de Julia...44
Figura 29: Construção do retângulo de Julia após a exibição dos objetos escondidos...45
Figura 30: Construção do retângulo de Alexandre...46

SUMÁRIO

Cap. 1 Introdução..9

Cap. 2 Base Teórica..11

2.1 Do Software Geogebra Beta Release...11

2.2 Sobre o modelo de Van Hiele...14

2.3 Definições dos Quadriláteros Notáveis...15

2.4 Atividades Prévias com Uso de Softwares na Escola...................................16

Cap. 3 Planos de Aula e Resultados Esperados..19

3.1 Primeiro Encontro: Aprendendo a Utilizar o Geogebra............................19

3.2 Segundo Encontro: Definindo Quadrado, Retângulo e Losango.................21

3.3 Terceiro Encontro: Definindo Paralelogramo e Trapézio...........................24

3.4 Quarto Encontro: Construindo Quadriláteros Genéricos e Particulares.....26

Cap. 4 Desenvolvimento da Experiência..29

4.1 Primeiro encontro..29

4.2 Segundo Encontro...33

4.3 Terceiro Encontro..40

4.4 Quarto Encontro..45

4.5 Alguns Obstáculo...47

Cap. 5 Considerações finais...48

Cap. 6 Referências...50

1. INTRODUÇÃO

O trabalho apresenta o relato uma experiência prática desenvolvida com oito alunos da sexta série do Ensino Fundamental de uma escola pública da zona sul de Porto Alegre, cujo objetivo foi trabalhar com as definições dos quadriláteros notáveis utilizando um software de geometria dinâmica.

Um dos motivos que me levaram a realizar esta experiência foi o fato de haver uma carência no uso de tecnologias por parte dos professores de matemática das escolas públicas, e isso faz com que os alunos desconheçam que há uma maneira dinâmica e diferente de se aprender matemática. Além disso, os quadriláteros notáveis foram escolhidos como tema devido à dificuldade que os alunos têm com as suas definições formais, especialmente com relação às suas particularizações ou generalizações.

Para tal objetivo, elaborei quatro encontros que foram aplicados no laboratório de informática da escola nos dias 17, 19, 24 e 26 de abril de 2012 (terças e quintas) das 9h às 11h, com pequeno intervalo de quinze minutos das 10h às 10h 15min. Fiz uso do software Geogebra. O Geogebra é um software que vem sendo desenvolvido por Markus Hohenwarter desde 2001 na Universidade de Salzburg com o intuito de prestar apoio didático ao ensino de matemática. No programa, é possível fazer construções geométricas de maneira semelhante ao Paint (um software do Windows), ou seja, apenas utilizando o mouse e desenhando figuras da maneira desejada. Porém, como o Geogebra é uma plataforma para realizar construções com régua e compasso, as ferramentas desse programa possibilitam a manutenção de propriedades pré-determinadas pelo usuário.

O Geogebra foi escolhido para esta experiência, pois ele possui uma dinâmica de manipulação dos objetos construídos, mantendo suas propriedades. Esperava-se que, dessa forma, os alunos realmente entendessem a definição de cada quadrilátero a partir de suas propriedades. Além disso, os comandos do Geogebra, que são precisamente as ferramentas utilizadas nas construções com régua e compasso (por exemplo reta paralela e compasso), fornecem os subsídios necessários para traçar quadriláteros notáveis, e é justamente a partir deles que a atividade foi desenvolvida.

As oficinas consistiram inicialmente em identificar as propriedades dos quadriláteros a partir de conhecimentos prévios dos alunos. A partir disso, procurei chegar, em conjunto com os alunos, a uma definição formal de cada quadrilátero e utilizei construções dos cinco quadriláteros notáveis no Geogebra para que os alunos pudessem manipular e perceber suas propriedades. Durante as oficinas, os alunos ainda tiveram que construir quadriláteros no Geogebra, o que os iniciou na Geometria Dinâmica a partir de construções por régua e compasso. Além disso, os alunos foram confrontados com problemas cuja resolução envolvia a determinação de uma sequência de ferramentas (ou "comandos") para que o quadrilátero construído mantivesse as suas propriedades. Nesse sentido, as habilidades desenvolvidas formam, de um ponto de vista mais geral, a base de uma atividade de programação, onde as ferramentas são comandos e a sequência de ferramentas é um algoritmo. Na resolução dos problemas, essa estrutura forçou os alunos a utilizar a definição escrita, isto é, a definição formal de cada quadrilátero a partir de suas propriedades fundamentais, ao invés da imagem intuitiva que porventura tivessem.

A escolha dos alunos que participaram dessa atividade se deu de forma voluntária. Os alunos foram convidados a participar das oficinas, que ocorreram no turno inverso de suas aulas regulares, e oito alunos optaram por participar. Eu já os conhecia, pois desenvolvi atividade de estágio com essa turma de alunos. Os seguintes nomes fictícios foram usados para identificá-los: Alexandre, Daniel, Edilson, Horácio, Jéssica, Júlia, Luís e Vítor. Todos eles tinham idades entre 10 e 11 anos. Meu colega de curso, Genê Claas de Bona, contribuiu para as atividades.

Com base no trabalho desenvolvido, procurei avaliar as habilidades dos alunos de acordo com os níveis descritos pelo modelo de Van Hiele e até contribuir na passagem desses alunos do nível de visualização para o nível de análise, que são dois dos cinco níveis descritos no modelo.

O próximo capítulo deste trabalho trata da base teórica na qual me apoiei para a realização do mesmo. Em seguida, há um capítulo que contém os planos de aula de cada um dos encontros. Depois disso, relato o desenvolvimento de cada encontro. Para concluir, apresento minhas considerações finais.

2. BASE TEÓRICA

Neste capítulo irei dissertar sobre o embasamento teórico no qual me apoiei para a realização desta experiência prática. Utilizamos definições da Geometria Dinâmica que podem ser encontradas em **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação de professor de matemática** (GRAVINA, M. A. ; BASSO, M. V. ; BURIGO, E. Z. ; Garcia, V. C. ; 2012).

2.1 Do Software Geogebra Beta Release

O Geogebra é um software gratuito, leve, muito fácil de ser usado (é usado apenas com o mouse) e muito utilizado para o ensino/aprendizado de geometria plana. O software pode ser obtido no site http://www.geogebra.org/cms/. Ele é a simulação de um plano para se fazer construções com régua e compasso. Sem utilizar ferramentas avançadas do programa, é possível utilizá-lo para fazer construções geométricas de maneira semelhante ao Paint (um software do Windows que os alunos já conheciam), ou seja, apenas utilizando o mouse e desenhando figuras de maneira livre. Porém o programa permite também manter propriedades pré-determinadas através de uma série de comandos, e realizar construções de figuras da Geometria Dinâmica, que são construções que não perdem tais propriedades mesmo que os pontos sejam manipulados. Ao invés de utilizar essa nomenclatura com os alunos, introduzi o termo *construção sólida*, que considero mais intuitivo, e que será utilizado a partir desse momento com esse significado.

Na realização dessa oficina, utilizei as seguintes ferramentas do Geogebra: Novo Ponto, Intersecção de Dois Objetos, Ponto Médio ou Centro, Reta Definida por Dois Pontos, Segmento Definido por Dois Pontos, Reta Perpendicular, Reta Paralela, Compasso, Exibir / Esconder Objeto, Desfazer e Refazer e Exibir Rótulo.

Figura 1: Comandos 1

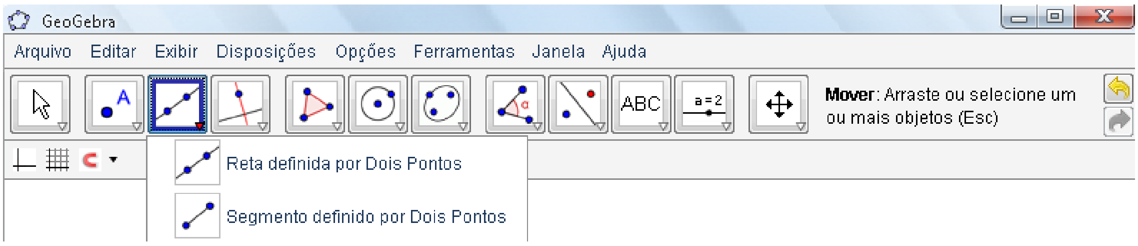


Figura 2: Comandos 2

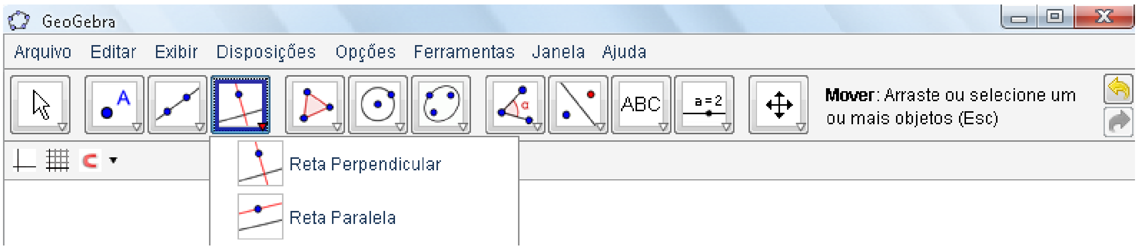


Figura 3: Comandos 3

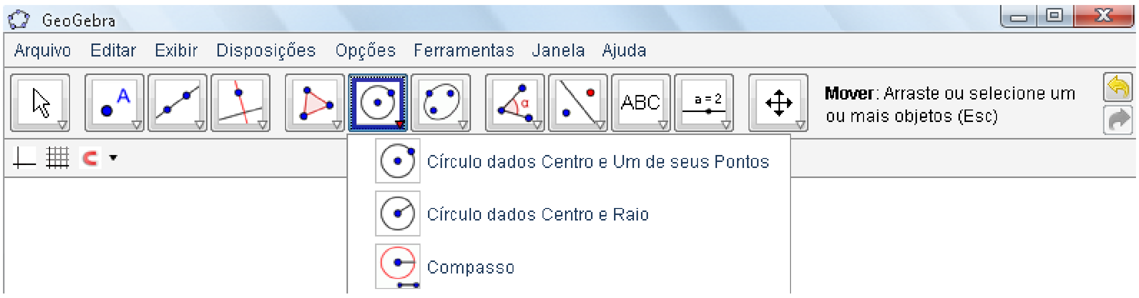


Figura 4: Comandos 4

Para ilustrar o significado de uma construção sólida, considere os seguintes exemplos. Uma reta $\overleftrightarrow{AB}$, um ponto C fora de $\overleftrightarrow{AB}$, e uma reta b perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C. Temos que, ao manipular o ponto C, a reta b acompanhará o ponto, sendo sempre perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Se manipularmos os pontos A ou B, a reta b acompanhará também o movimento para se manter sempre perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Essa construção é sólida. Por outro lado, considere a construção de uma reta $\overleftrightarrow{AB}$, um ponto C fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$, e uma reta *b* que passa por C e por mais um ponto de modo que visualmente as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e *b* pareçam perpendiculares. Ao movimentar qualquer um dos pontos, já que, na estrutura da construção, esses pontos são arbitrários, a construção não manterá o perpendicularismo.

Vejamos uma segunda construção. Considere um segmento de reta $\overline{AB}$, um ponto C fora do segmento de reta $\overline{AB}$ e um círculo de raio $|\overline{AB}|$ e centro em C. Ao manipularmos os pontos A ou B, aumentando ou diminuindo o tamanho do segmento de reta $\overline{AB}$, também será aumentado o tamanho do raio do círculo, pois a medida do raio depende exclusivamente do tamanho do segmento de reta $\overline{AB}$. Da mesma forma, se movermos o ponto C de lugar, o círculo acompanhará o ponto, de modo que ele seja sempre o seu centro (ver figura).

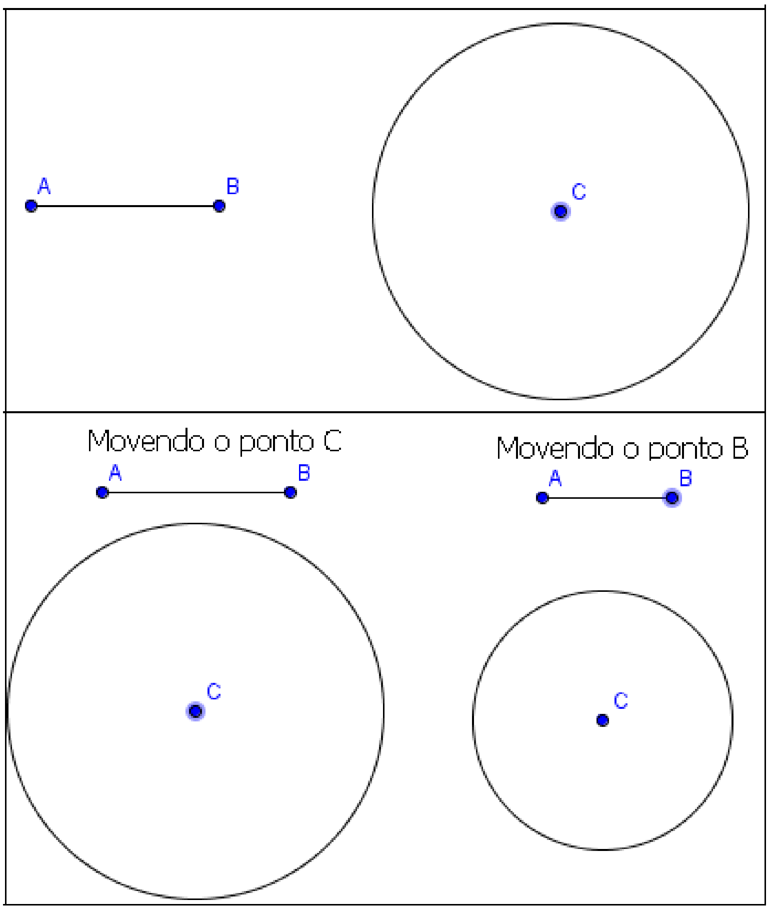


Figura 5: Conhecendo o Geogebra

O propósito de utilizar o programa foi de fazer com que os alunos entendessem melhor as definições de cada quadrilátero, pois o programa permite a manipulação dos mesmos para a percepção de suas propriedades.

Além disso, o programa serviu como auxílio para que os alunos percebessem que a definição escrita de um quadrilátero diz mais sobre ele do que a sua imagem intuitiva. O programa funciona de forma rígida e, em função disso, é necessário saber planejar a construção para que ela obedeça às propriedades desejadas. Portanto, essa atividade ilustra aos alunos a necessidade de conhecer as definições formais dos quadriláteros notáveis.

2.2 Sobre o modelo de Van Hiele

Gostaria de fazer algumas considerações sobre o modelo de Van Hiele (Apud LINDQUIST & SCHULTE, *Aprendendo e Ensinando Geometria*, 1994), que acho muito interessante. Inicialmente Van Hiele divide o conhecimento em geometria em cinco níveis, que estão descritos abaixo.

Visualização**:** Neste nível a pessoa ainda está criando um vocabulário geométrico e reconhece as figuras geométricas por comparar com outras que já conhecia antes, ou seja, a pessoa não reconhece as figuras por suas propriedades ou por sua definição.

Análise**:** Neste nível a pessoa identifica, de maneira intuitiva, propriedades das figuras, e até tira algumas conclusões de maneira intuitiva; porém não consegue ainda definir figuras geométricas a partir de suas propriedades, nem fazer relações entre as propriedades.

Dedução Informal**:** Neste nível a pessoa reconhece relações, identifica propriedades, classifica as figuras, é capaz de entender uma demonstração, porém não é capaz de demonstrar ou de entender o papel dos axiomas ou teoremas. em uma demonstração (Neste nível, gostaria de ressaltar que a pessoa já é capaz de definir as figuras).

Dedução Formal**:** Neste nível a pessoa entende o papel dos axiomas e teoremas matemáticos e até consegue demonstrar novos resultados a partir deles. Compreende que é possível demonstrar de mais de uma maneira. Entende a relação entre condições necessárias e condições suficientes. Não confunde uma afirmação com sua recíproca durante uma demonstração.

Rigor**:** Neste nível a pessoa é capaz de mudar a base axiomática e abstrair.

Considero esses níveis de aprendizado em Geometria importantes para o ensino de Geometria, pois, apesar de serem períodos duradouros, no sentido de que a pessoa permanece muito tempo em um nível até passar para outro, são muitos eficazes para situar o professor, já que ele pode avaliar o nível no qual o aluno está e se planejar para encaminhar o aluno para o próximo nível. Esta é uma das coisas que pretendo fazer nessa experiência. É intuitivo para mim que você precisa realmente ter concluído um nível para começar outro, e que eles estão de fato na ordem proposta por Van Hiele.

É importante enfatizar que o modelo de Van Hiele não é usado na grande maioria das escolas. Aliás, os professores nas escolas, em geral, não estão acostumados a se apoiar em nenhum modelo didático para a avaliação do aprendizado.

2.3 Definições dos Quadriláteros Notáveis

Considero aqui as definições de quadrilátero e dos cinco quadriláteros notáveis descritos no livro Fundamentos de Matemática Elementar (Vol 9).

Quadrilátero: "Sejam A, B, C e D quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três a três não colineares. Se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero."

Quadrilátero Notável: "Os quadriláteros notáveis são os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados".

Trapézio: "Um quadrilátero plano convexo é um *trapézio* se, e somente se, possui *dois lados* paralelos."

Paralelogramo: "Um quadrilátero plano convexo é um *paralelogramo* se, e somente se, possui os *lados opostos* paralelos."

Retângulo: "Um quadrilátero plano convexo é um *retângulo* se, e somente se, possui os quatro *ângulos* congruentes."

Losango: "Um quadrilátero plano convexo é um *losango* se, e somente se, possui os quatro *lados* congruentes."

Quadrado: "Um quadrilátero plano convexo é um *quadrado* se, e somente se, possui os quatro *ângulos* congruentes e os quatro *lados* congruentes."

Com essas definições, vemos que há conjuntos de quadriláteros contidos em outros conjuntos de quadriláteros. O seguinte esquema é válido para esta análise.

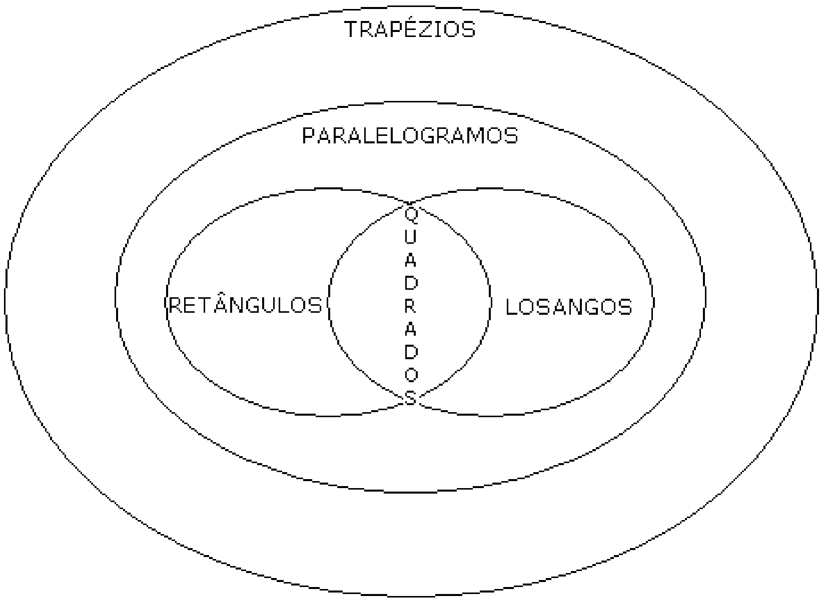


Figura 6: Conjuntos de Quadriláteros

O quadrado, por exemplo, é visto como uma especialização do retângulo, ou do losango. O retângulo e o losango são vistos como generalizações do quadrado. Isto é o que difere estas definições das de Euclides do livro Os Elementos, de acordo com a Revista do Professor de Matemática nº 55 (Apud BONGIOVANNI, Vicenzo <http://matematica.com.br/site/artigos-matematicos/637-as-diferencas-definicoes-dos-quadrilateros-notaveis.html>), onde não havia intersecções entre os conjuntos de quadriláteros e, portanto, um retângulo não poderia ser simultaneamente um quadrado, por exemplo.

2.4 Atividades Prévias com Uso de Softwares na Escola

Nesta seção quero comentar dois trabalhos de conclusão de curso, um sobre o uso do Geogebra na escola e o outro sobre o uso de um software de programação na escola. Além disso, quero comentar um artigo, do qual fui co-autor, que também trata do uso do software Geogebra.

Os dois trabalhos com o Geogebra enfatizam um resultado que considero importante para este trabalho, que é a eficiência do software Geogebra para que os alunos desenvolvam o seu raciocínio matemático. O outro trabalho é uma experiência com o software SuperLogo no Ensino Médio, que enfatiza que a atividade de programação colabora no desenvolvimento do pensamento lógico do aluno.

O primeiro trabalho a ser comentado é *Desenho Geométrico Como Ferramenta de Aprendizado de Geometria* (JÚNIOR, F. D. ; 2010). Neste trabalho, o autor realizou uma experiência prática de ensino-aprendizagem de construções geométricas com alunos do Ensino Médio. Para tal, ele contou com o modelo de Van Hiele, e com alguns dados históricos.

Em sua experiência, Fernando fez uso do software Geogebra para trabalhar com os alunos a construção do ângulo reto e da reta mediatriz, a construção de alguns triângulos particulares e a do quadrado. O autor ainda se apoiou nas habilidades citadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM).

Uma conclusão do autor que considero relevante é:

"Acreditamos que o trabalho com o Desenho Geométrico contribui no desenvolvimento das habilidades citadas nos PCNEM, visto que os alunos: estabeleceram relações entre as etapas seguidas nas construções e as propriedades das figuras... Aprenderam a reconhecer uma figura geométrica pelas suas propriedades e relacionar propriedades entre figuras." (p. 47 e 48).

O segundo trabalho que gostaria de comentar é *A Linguagem Logo Como Possibilidade de Aprendizagem em Matemática* (MATTE, M. L. ; 2011). Neste trabalho, Marília Luiza Matte realizou uma experiência com alunos do Ensino Médio utilizando o software SuperLogo 3.0, um programa que possui uma linguagem simples de programação. Com este programa, ela elaborou oficinas para analisar a possibilidade de ensino de geometria e trigonometria através da linguagem de programação.

Um resultado que gostaria de salientar é o seguinte:

"Tenho a convicção de que a utilização da linguagem Logo em aulas de matemática seja uma alternativa capaz de fornecer aos alunos ferramentas para tornar seu aprendizado mais proveitoso e significativo".

Pude perceber que o fato de os alunos terem que programar faz com que eles tenham que ter certo domínio dos conceitos de matemática. Este é um resultado que quero verificar em minha experiência, utilizando o software Geogebra.

Finalmente, tenho comentários sobre *Modelagem com o Geogebra: Uma Possibilidade para a Educação Interdisciplinar?* (CONTIERO, L. O. & GRAVINA, M. A. ; 2011) Este é um artigo do qual fui co-autor em conjunto com a professora Maria Alice Gravina. Este é um trecho sobre o qual concordamos e que vimos com muita clareza quando fui monitor do curso de Geometria I no semestre de 2011/1 do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS.

"De uma forma geral, o estudo da geometria escolar tem foco na apresentação de conceitos e propriedades geométricas, sem que haja maiores preocupações com o desenvolvimento do raciocínio geométrico. Os livros apresentam uma coleção de definições e as propriedades são tomadas como "fatos" sem que haja maior explicação." (p. 2).

Na disciplina de Geometria I, a professora Maria Alice pediu aos alunos que construam, no Geogebra, algo que se assemelhe à realidade e que possua movimento. Os alunos teriam o meu auxílio para esta realização. Dentre os trabalhos apresentados, principalmente um nos chamou muita atenção, a construção do nosso espaço sideral com quatro planetas orbitando em torno do Sol em sincronia.

3. PLANOS DE AULA E RESULTADOS ESPERADOS

3.1 Primeiro Encontro: Aprendendo a Utilizar o Geogebra

Objetivo: Fazer com que os alunos se familiarizem com o software Geogebra, aprendam a utilizar alguns comandos necessários para a realização do trabalho e criem uma ideia de como funcionará a atividade.

Tempo de Aula: 1h 40min.

Desenvolvimento:

- (15 minutos): Apresentação.
- (20 minutos): Apresentar o programa Geogebra e os seguintes comandos: Novo Ponto, Intersecção de Dois Objetos, Ponto Médio ou Centro, Reta Definida por Dois Pontos, Segmento Definido por Dois Pontos, Reta Perpendicular, Reta Paralela, Compasso, Exibir / Esconder Objeto, Desfazer e Refazer e Exibir Rótulo. Pedirei que os alunos usem cada comando para que os conheçam.
- (5 minutos): Pedirei que construam um segmento de reta $\overline{AB}$ e usem o compasso para construir um círculo de raio $|\overline{AB}|$ e centro fora do segmento. Depois disso, eles deverão alterar o tamanho do segmento $\overline{AB}$ para perceber que, consequentemente, o tamanho do raio do círculo também se alterará.
- (5 minutos): Pedirei que construam uma reta *a* qualquer no plano e, após, uma reta *b* perpendicular à reta *a* usando o comando "Reta Perpendicular". A seguir, pedirei que manipulem um dos pontos da reta *a* para que percebam que a reta *b* continuará perpendicular à reta *a*.
- (5 minutos): Introduzirei o conceito de *construção* sólida.
    - Digo que uma construção é *sólida* quando, manipulando seus pontos, ela não sofre deformações, a não ser as de proporção, translação ou rotação.

Mostrarei aos alunos dois arquivos de Geogebra tais que um deles é a construção sólida de uma casa e o outro é uma construção não sólida da mesma casa.

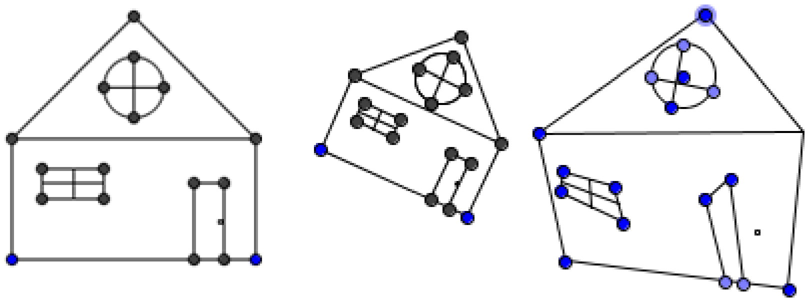


Figura 7: Imagem da construção sólida / não sólida a ser manipulada pelos alunos

- (15 minutos): Será feita uma discussão sobre a diferença entre uma construção sólida e uma construção não sólida.
- (25 minutos): Pedirei que os alunos tentem fazer a construção sólida da seguinte figura (salvando no computador a construção):

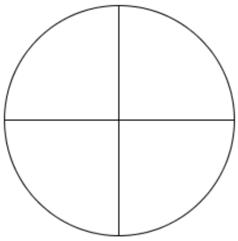


Figura 8: Um círculo qualquer e dois diâmetros perpendiculares deste círculo

Uma solução esperada

  - Pontos A e B quaisquer.
  - Segmento $\overline{AB}$.
  - Ponto médio C do segmento $\overline{AB}$.
  - Círculo c de raio $\overline{AC}$ e centro em C.
  - Reta b perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando por C.
  - Pontos E e D de intersecção do círculo c com a reta b.
  - Segmento $\overline{ED}$.
  - Esconder b, C, A, B, E e D e tirar rótulos.
- (10 minutos): Imprevistos.

Resultados Esperados no Primeiro Encontro

Na apresentação, o esperado é que os alunos façam um pouco de bagunça inicialmente e estejam entusiasmados para usar o computador. Porém, acredito que se sentirão bem recebidos e eu também.

No ensino dos comandos, o pressuposto é que eles entendam cada comando, mas não memorizem cada um e pensem pouco sobre a utilidade deles.

Quanto aos comandos de reta perpendicular e de compasso, o propósito é que se deem conta que uma reta está presa à outra, bem como o círculo está preso ao segmento.

Na manipulação da casa sólida e da não sólida, é esperado que pelo menos um aluno faça uma associação com a solidez da reta perpendicular e do círculo construído a partir do compasso.

Quanto à discussão sobre a construção ser sólida ou não, imagino que os alunos criem um mecanismo do tipo "tem que fazer usando os comandos que o professor ensinou".

É esperado que todos consigam realizar a construção do fim do primeiro encontro com algumas dicas minhas e do Genê (o colega que me auxiliou nas oficinas), porém que pelo menos um aluno consiga sem dicas.

3.2 Segundo Encontro: Definindo Quadrado, Retângulo e Losango

Objetivo: Fazer com que os alunos tenham uma compreensão das definições de quadrado, retângulo e losango.

Tempo de Aula: 1h 40min.

Desenvolvimento:

- (20 minutos): Será perguntado aos alunos o que eles sabem sobre um quadrado (podendo ser feito um desenho no quadro). Conforme eles forem falando, irei escrevendo no quadro aquilo que eles disserem. Em caso de insuficiência, ou erro, mostrarei um exemplo (um desenho no quadro) para mostrar a insuficiência ou corrigirei os erros. Após terminar com o quadrado, farei o mesmo para retângulo e losango. Deste modo pretendo incentivá-los a chegar a uma definição equivalente às que seguem:

- Quadrado: Polígono de quatro lados de mesma medida, e todos os ângulos também de mesma medida.
- Retângulo: Polígono de quatro lados com todos os ângulos de mesma medida.
- Losango: Polígono de quatro lados com todos os lados de mesma medida.

- (10 minutos): Será preenchida uma tabela no quadro com S e N, onde S quer dizer sim e N quer dizer não; respondendo a certas perguntas. A tabela e as perguntas encontram-se abaixo:

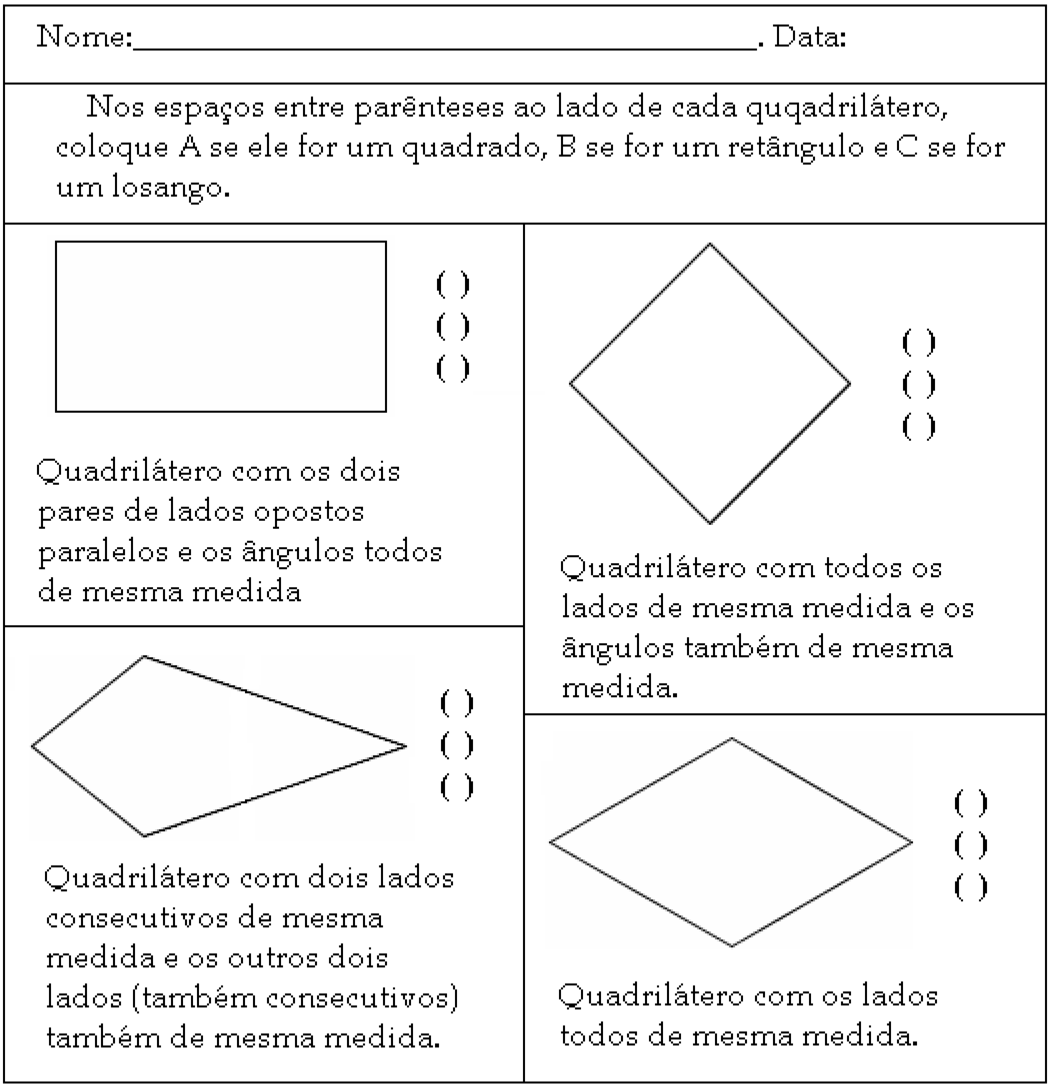
O \ é sempre um	Quadrado	Retângulo	Losango
Quadrado			
Retângulo			
Losango			

- Um quadrado é sempre um retângulo?
- Um retângulo é sempre um quadrado?
- Um quadrado é sempre um losango?
- Um losango é sempre um quadrado?
- Um retângulo é sempre um losango?
- Um losango é sempre um retângulo?

- (10 minutos): Os quadriláteros serão redefinidos da seguinte forma, partindo do princípio que um polígono de quatro lados é chamado de um *quadrilátero*:
  - <u>Quadrado: retângulo e losango.</u>
  - <u>Retângulo: quadrilátero cujos quatro ângulos internos são congruentes.</u>
  - <u>Losango: quadrilátero cujos quatro lados são congruentes.</u>
- (10 minutos): **Atividade de manipulação.** Cada aluno terá no computador três arquivos de Geogebra previamente preparados pelo professor. Cada arquivo corresponde à construção sólida de cada um desses três quadriláteros. Então os alunos terão que manipular cada quadrilátero para

transformá-lo nos outros (essa maneira mostra, também, que de fato alguns quadriláteros não podem ser transformados em outros). Esta manipulação será feita com o mouse movendo os vértices de cada quadrilátero.

- (15 minutos): Será dada a seguinte atividade para os alunos resolverem. Eles poderão usar como auxílio as construções sólidas recém vistas dos quadriláteros. Na atividade os alunos teriam que fazer uso tanto dos textos quanto das figuras.


Nome:____________________________________. Data:

Nos espaços entre parênteses ao lado de cada quqadrilátero, coloque A se ele for um quadrado, B se for um retângulo e C se for um losango.

( ) ( ) ( )
Quadrilátero com os dois pares de lados opostos paralelos e os ângulos todos de mesma medida

( ) ( ) ( )
Quadrilátero com todos os lados de mesma medida e os ângulos também de mesma medida.

( ) ( ) ( )
Quadrilátero com dois lados consecutivos de mesma medida e os outros dois lados (também consecutivos) também de mesma medida.

( ) ( ) ( )
Quadrilátero com os lados todos de mesma medida.

Figura 9: Atividade do 2º Encontro

- (25 minutos): Pedirei para os alunos tentarem fazer no Geogebra a construção sólida do quadrado a partir de um de seus lados. Meu colega e eu ajudaremos os alunos nesta atividade (eles terão que salvar a construção no computador).

- (10 minutos): Imprevistos.

Resultados Esperados no Segundo Encontro

Ao perguntar o que os alunos sabem sobre quadrado, retângulo e losango, imagino que quadrado e retângulo todos saibam descrever, comparando-os com objetos como mesa, janela, etc. Com relação ao losango talvez alguém diga informalmente que é um quadrado virado.

No preenchimento da tabela, acredito que os alunos consigam responder sem problemas que um quadrado é um retângulo sempre, porém não verão importância alguma nisso.

Na hora de eu apresentar as definições, é pressuposto que os alunos as leiam e também não deem atenção.

Quanto à hora de manipular os quadriláteros para transformá-los nos outros, imagino que se distraiam com a animação, porém consigam as transformações sem problemas.

Na atividade da folha, acredito que os alunos respondam corretamente a primeira figura, marcando-a como um retângulo; na segunda marcarão apenas que é um losango; na terceira, alguns marcarão que é um losango (principalmente porque alguns pensarão que é necessário marcar alguma coisa em todas elas); e na quarta marcarão também apenas que é um losango.

Quanto à construção do quadrado a partir do lado, a expectativa é que pelo menos um consiga a construção sem ajuda alguma, mas que, em geral, todos consigam com ajuda minha e do Genê.

3.3 Terceiro Encontro: Definindo Paralelogramo e Trapézio

Objetivo: Fazer com que os alunos tenham uma compreensão das definições de paralelogramo e trapézio.

Tempo de aula: 1h 40min

Desenvolvimento:

- (20 minutos): O que foi feito nos primeiros 20 minutos de aula no segundo encontro será feito de forma análoga para o paralelogramo e o trapézio, chegando a definições equivalentes às que seguem:
    - Paralelogramo: Quadrilátero com os dois pares de lados opostos paralelos.
    - Trapézio: Quadrilátero com um par de lados opostos paralelos.
- (10 minutos): Os quadriláteros, então, serão definidos da seguinte forma:
    - <u>Trapézio: Quadrilátero com um par de lados opostos paralelos.</u>
    - <u>Paralelogramo: Quadrilátero com os dois pares de lados opostos paralelos.</u>
    - <u>Losango: Quadrilátero com os lados todos de mesma medida.</u>
    - <u>Retângulo: Quadrilátero com os ângulos todos de mesma medida.</u>
    - <u>Quadrado: Quadrilátero com os ângulos todos de esma medida, e os lados todos de mesma medida.</u>
- (10 minutos): Será preenchida uma tabela análoga à tabela do segundo encontro, que conterá a tabela do segundo encontro e ainda a análise dos conceitos de paralelogramo e trapézio. Ela ficará como segue:

O \ é um	Quadrado	Retângulo	Losango	Paralelogramo	Trapézio
Quadrado	_	S	S	S	S
Retângulo	N	_	N	S	S
Losango	N	N	_	S	S
Paralelogramo	N	N	N	_	S
Trapézio	N	N	N	N	_

Serão acrescentadas as perguntas:

- O paralelogramo é sempre um quadrado, ou um retângulo, ou um losango, ou um trapézio?
- O trapézio é sempre um quadrado, ou um retângulo, ou um losango, ou um paralelogramo?

- (10 minutos): Atividade análoga à “atividade de manipulação” do segundo encontro, porém com as construções sólidas do paralelogramo e do trapézio para que os alunos os manipulem e os transformem em outros quadriláteros.

- (40 minutos): Pedirei para que cada aluno escolha um dos cinco quadriláteros e tente fazer uma construção sólida dele no Geogebra (se um aluno terminar muito rápido, pedirei que tente a construção sólida de outro quadrilátero). O objetivo é analisar cada construção para verificar se o quadrilátero é genérico ou particular. Os resultados serão usados para dar início ao próximo encontro. Nessa atividade os alunos serão auxiliados por mim e por meu colega.
- (10 minutos): Imprevistos.

Resultados Esperados No Terceiro Encontro

Ao perguntar o que sabem sobre o paralelogramo e o trapézio, imagino que ninguém saberá dizer nada.

Quanto à parte das definições, acredito que os alunos lerão e não darão importância.

Acredito que não haverá problemas em terminar a tabela e tenho já a esperança que eles comecem a olhar para o que está escrito, já que eles não saberão o que é cada figura.

Espero que os alunos consigam manipular os quadriláteros para transformá-los nos outros.

Na construção de um quadrilátero à escolha, o pressuposto é que alguns façam uma construção genérica, e outros uma construção particular. Tenho receio de que os alunos ainda não tenham domínio do uso do Geogebra.

3.4 Quarto Encontro: Construindo Quadriláteros Genéricos e Particulares

Objetivo: Fazer com que os alunos compreendam a diferença entre um quadrilátero genérico e um particular.

Tempo de aula: 1h 40min

Desenvolvimento:

- (30 minutos): Mostrarei para os alunos um trapézio, um paralelogramo e um losango, todos de ângulos fixos, e um retângulo de proporção fixa igual a dois, por meio de um arquivo de Geogebra para cada um desses quadriláteros, sem dizer que eles têm ângulos fixos. Então pedirei que eles manipulem cada quadrilátero nos arquivos e perguntarei qual a diferença entre esses quadriláteros e os que eles haviam manipulado no encontro anterior. Concluirei que esses são construções particulares de quadriláteros, pois têm os ângulos fixos, enquanto que os do encontro anterior eram genéricos. No nosso contexto, uma *construção genérica* de um trapézio, por exemplo, é uma construção a partir da qual é possível obter todos os trapézios existentes manipulando os pontos da figura, que nunca deixará de ser um trapézio. Por outro lado, uma *construção particular* do trapézio seria uma construção em que, ao manipular os pontos, obtém-se uma classe particular de trapézios, como os trapézios isósceles, por exemplo.

- (10 minutos): Pedirei que cada um dos alunos analise as construções feitas por todos eles no encontro anterior e determine se foram construções de um quadrilátero particular, ou de um quadrilátero genérico.
- (30 minutos): Pedirei para os alunos que fizeram uma construção particular de um quadrilátero, que tentem fazer a construção genérica do mesmo quadrilátero. Para os alunos que fizeram a construção genérica de um quadrilátero, pedirei que tentem fazer uma construção particular do mesmo quadrilátero.
- (20 minutos): Pedirei que os alunos respondam a um pequeno questionário, incluído a seguir, a fim de avaliar a oficina e a sua importância.

    - Você gostou de participar desta oficina?
    - Você gostou de fazer atividades no computador?
    - Você gostou de usar o programa Geogebra?
    - O que você aprendeu na oficina?
    - De 1 a 5, qual seria sua avaliação quanto ao desempenho do professor Lucas?
    - De 1 a 5, qual seria sua avaliação quanto ao desempenho do professor Genê?

- (10 minutos): Imprevistos.

Resultados Esperados no Quarto Encontro

Na manipulação dos quadriláteros, espero que pelo menos alguns alunos consigam expressar, de alguma forma (mesmo que informalmente), a diferença entre o quadrilátero particular e o genérico.

Espero que a maioria consiga dizer se a construção de cada colega foi particular ou genérica.

Na construção do quadrilátero genérico, ou particular, tenho receio de, por acaso, ser uma construção muito difícil, além de os alunos já estarem um tanto sem paciência por estarem construindo quadriláteros. Esta atividade ficará como um desafio para mim também.

No questionário, acredito que os alunos dirão que gostaram da atividade, mesmo que não seja verdade. Porém acredito que eles realmente considerarão que esse foi um jeito novo de se aprender matemática, e um jeito muito mais interessante que o tradicional.

4. DESENVOLVIMENTO DA EXPERIÊNCIA

4.1 Primeiro encontro

Estavam presentes todos os oito alunos. Eles se sentaram em quatro duplas:

Alexandre e Edilson, Julia e Jéssica, Luís e Horácio, e Vítor e Daniel.

Não foi necessária uma apresentação longa, já que nos conhecíamos das aulas que eles tinham comigo e com o Genê no horário normal de aula deles.

É comum que os alunos aprendam as definições dos quadriláteros na sexta série do Ensino Fundamental, porém esta turma jamais havia visto tal assunto em sala de aula. Isto foi positivo para a experiência, pois devido a isto, os alunos conheciam os quadriláteros apenas intuitivamente.

Demorei em torno de quarenta minutos para ensinar os comandos previstos e mostrar a parte da reta perpendicular e do compasso, pois o programa era uma novidade para eles e, em geral, eles apresentaram pouca habilidade com o computador (a maioria não tinha computador em casa, ou não usava). Eles acharam fascinante o fato de mexerem um objeto e o outro se mexer também, e custavam a me ouvir porque ficavam brincando com o programa. Houve uma hora em que perguntei a diferença entre segmento de reta e reta, houve falas do tipo “um eu posso aumentar e diminuir, o outro não”.

Na manipulação da casa sólida e da não sólida eles acharam divertido manipular a casa não sólida e ficavam deformando-a e destruindo-a, já na manipulação da casa sólida, eles não se entusiasmaram tanto, mas acharam interessante que ela estivesse presa, e ficaram com a impressão que seria difícil realizar tal tarefa. Muitos me perguntaram se fui eu que a havia construído.

A discussão de a construção ser sólida ou não foi produtiva, no sentido de que os alunos entenderam que, em uma construção sólida, os objetos ficam presos uns aos outros, enquanto que na construção não sólida isso não acontece. Porém, acredito que os alunos criaram um mecanismo do tipo “o professor quer que a gente faça usando os comandos” e não entenderam de fato como o programa armazena a informação dada pelos comandos e a transforma em diferentes figuras quando os pontos são movidos. Esta é uma ideia discutida por Kátia Maria Medeiros no artigo *O Contrato Didático e a resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula* (MEDEIROS, K. M. ; 1999); neste artigo, a autora enfatiza que nas escolas, os conceitos matemáticos são trabalhados através de exercícios repetitivos, e alguns contratos, não escritos, são estabelecidos entre o professor e os alunos. Penso que, este tipo de didática gera, nos alunos, uma forma mecânica de pensar. Pareceu-me que, com aquele comentário, o aluno estabeleceu o mecanismo "fazer usando os comandos" e agora não é mais necessário pensar sobre este assunto

Houve falas do tipo "sólida é apenas que não consegue mexer separado", que, em minha interpretação, indicam que mostram um entendimento de que, na construção sólida existe apenas uma pequena parte que pode ser movimentada, e o restante não é possível; enquanto que na construção não sólida é possível movimentar os objetos a partir de qualquer parte.

Depois do intervalo, pedi que tentassem fazer a construção do círculo com uma cruz dentro. Como não havia quadro, fiz o desenho em um papel e mostrei para os alunos o desenho e expliquei suas propriedades. Na hora de falar em perpendicularismo, usei termos como "parecido com uma esquina, ou a quina da mesa". Eles não lembravam como usar o Geogebra, achavam que só podiam clicar nos pontos, apesar de eu ter ensinado cada comando anteriormente. Inicialmente, ninguém conseguiu plenamente a construção, porém dois grupos fizeram construções boas no sentido de que houve alguma solidez em suas construções como, por exemplo, o Alexandre e o Edilson.

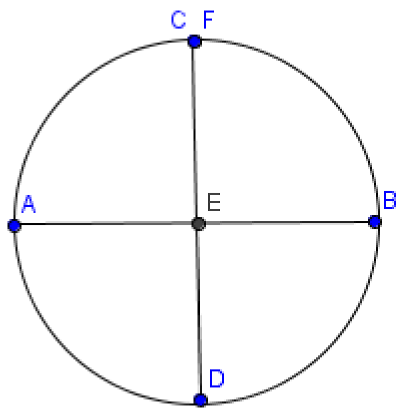


Figura 10: Construção de Alexandre e Edilson 1

Os pontos em azul forte indicam que são pontos quaisquer, os em azul claro (que não há nessa figura) representam pontos restritos a um lugar geométrico, mas ainda movíveis dentro desse lugar geométrico, e os pontos pretos representam intersecções de dois objetos (não são movíveis). Repare que, nesta construção, há cinco pontos da cor azul forte (C e F estão coincidindo), o que significa que os cinco pontos estão soltos. Isso significa que o perpendicularismo foi feito visualmente, assim como o ponto E, que não é na verdade o ponto médio de $\overline{AB}$ (foi também colocado visualmente). Portanto, ao mover os pontos, a construção não se mantém com essas propriedades.

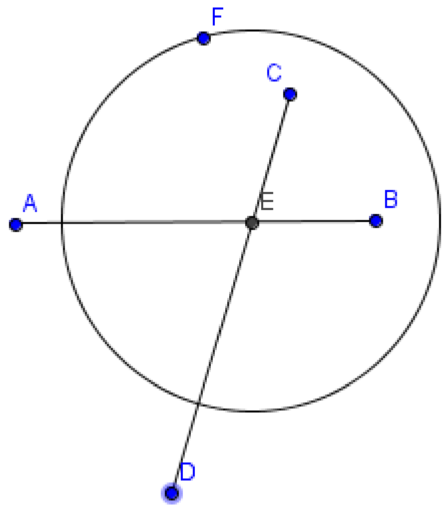


Figura 11: construção de Alexandre e Edilson 2

Na figura 11 visualizamos a construção da figura 10 após mover os pontos C e D de maneira que torna possível a visualização de que os segmentos não são perpendiculares, e também de que o ponto E não é ponto médio de nenhum segmento. O que pude perceber é que a dupla escolheu dois segmentos de reta quaisquer, visualmente perpendiculares, pediu o ponto E de intersecção entre os dois segmentos, e construiu o círculo de modo a ter o centro no ponto E, passando por um ponto F qualquer que eles posicionaram visualmente para que fosse uma extremidade de um dos segmentos

Outra construção que ficou boa na primeira tentativa foi a do Luís com o Horácio:

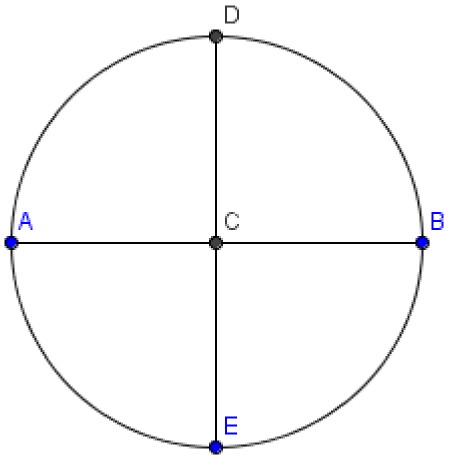


Figura 12: construção de Luís e Horácio 1

Nesta construção o grupo pediu corretamente o ponto C como sendo o ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$, e o ponto D é um ponto de intersecção, mas não estava claro entre quais objetos. Ao pedir o comando Exibir / Esconder, é possível ver que a dupla pediu ainda uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando por C (ponto médio de $\overline{AB}$).

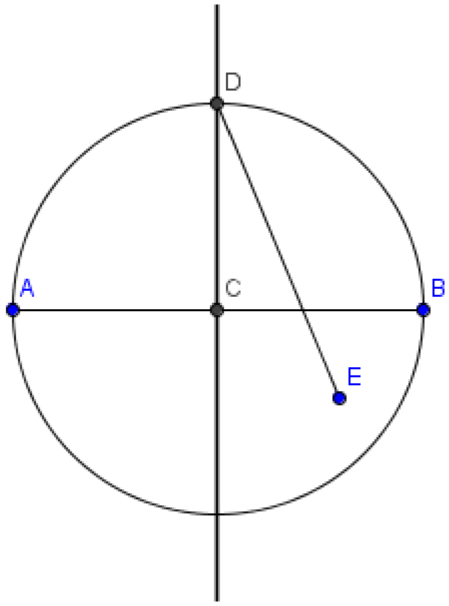


Figura 13: Construção de Luís e Horácio 2

Esta é a mesma construção após mover o ponto E de lugar e pedir a opção Exibir / Esconder Objeto. É possível notar que a dupla percebeu que, para obter o perpendicularismo, era necessário pedir reta perpendicular, e percebeu que essa reta teria que passar, por construção, pelo ponto médio C. Depois disso, a dupla pediu a intersecção entre o círculo e a reta pressionando exatamente onde seria o ponto de intersecção, e obteve o ponto D; então para restringir o segmento os alunos colocaram um ponto solto E, e pediram o segmento $\overline{ED}$, forçando que o ponto E também fique em cima da reta, após isso ele escondeu a reta. Se ele tivesse usado o comando de intersecção de dois objetos escolhendo primeiro o objeto círculo, e depois o objeto reta, o programa teria marcado os dois pontos de intersecção. Considero que eles só não conseguiram a construção por falta de habilidade com o programa, porém, é possível perceber que eles identificaram as propriedades necessárias para a construção desta figura, algo que se encaixa no nível de análise descrito no modelo de Van Hiele.

As primeiras tentativas dos demais grupos foram construções totalmente não sólidas. Com nossa ajuda, todas as duplas conseguiram terminar a construção corretamente, exatamente como está na figura do plano de aula.

4.2 Segundo Encontro

No segundo encontro apenas a Jéssica não compareceu. Ao perguntar o que sabiam sobre um quadrado, os alunos tiveram, inicialmente, dificuldade em dizer; eles só conseguiam pensar em “quadrado é um quadrado”, não sabendo apontar as suas propriedades. Então meu colega e eu os incentivamos a dizer por que o quadrado era diferente de um pentágono? (fizemos o desenho de um pentágono em uma folha e não utilizamos a palavra pentágono). Eles disseram que só tem quatro linhas, então pedimos para comparar com algum objeto, eles fizeram comparações com a tela do monitor, por exemplo. Ao perguntarmos o que é um retângulo, o resultado foi análogo, porém nos surpreendeu que um dos alunos o tivesse comparado com uma bola e depois com uma lâmpada. Acreditamos que esse aluno realmente não soubesse o que é um retângulo. O retângulo foi comparado por outros alunos com o teclado do computador e com a mesa. Houve uma fala “o retângulo é um quadrado esticado”. Os alunos não conheciam o losango. Surpreendeu-me que as comparações foram todas com objetos que havia na sala de aula (com exceção da bola).

Pedi então que escrevessem, no bloco de notas (Programa do Windows), as definições desses quadriláteros, escolhi definir da seguinte maneira: quadrilátero é uma figura de quatro lados. Quadrado é um quadrilátero com os quatro lados de mesma medida e os quatro ângulos de mesma medida; retângulo é um quadrilátero com os quatro ângulos de mesma medida; losango é um quadrilátero com os quatro lados de mesma medida.

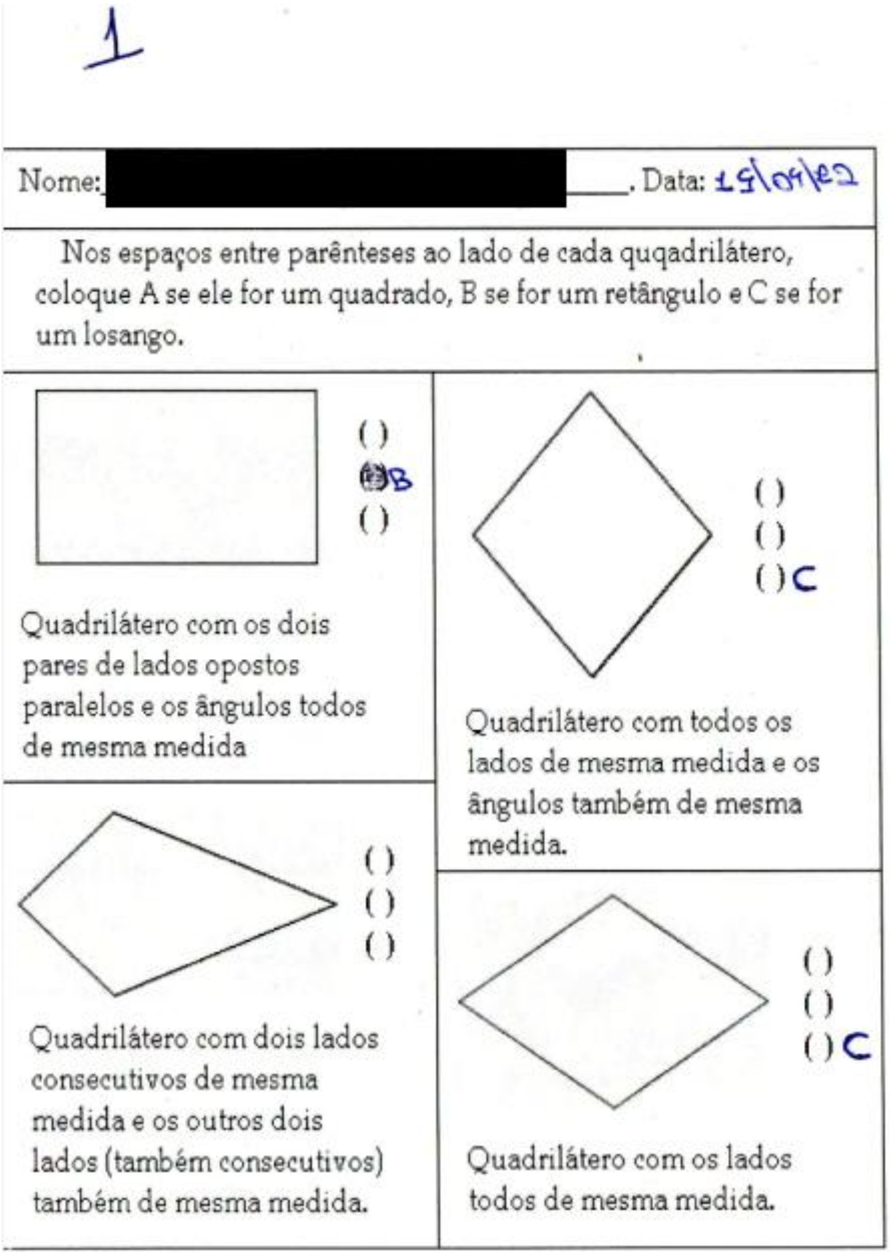
Então pedi que preenchessem a subtabela prevista no plano para essa aula. Foi preciso uma certa insistência nossa para que eles usassem as definições formais escritas no bloco de notas, ao invés de noções intuitivas que eles pudessem ter. Conseguimos fazer com que os alunos preenchessem corretamente a tabela com nossa ajuda.

A atividade de manipular os quadriláteros para transformá-los nos outros correu bem. Horácio, quando girou o quadrado, disse que tinha virado um losango.

Passei então para o questionário das figuras (também presente no plano dessa aula), porém, após explicar como era para responder às perguntas da folha, cometi o erro de dizer que, ao terminarem a atividade, poderiam ir para o recreio, então os alunos responderam tudo rapidamente e correram para o recreio.

Após o intervalo, pedi com muita insistência que refizessem a atividade, com atenção, e me surpreendi muito com o resultado, todos os alunos, a menos de um, responderam às perguntas corretamente sem a nossa ajuda, o outro alunos conseguiu responder corretamente com nossa ajuda.

Seguem aqui as respostas do Edilson para atividade antes do recreio (numerada com 1) e depois do recreio (numerada com 2).


1

Nome: [redacted]. Data: 19\09\12

Nos espaços entre parênteses ao lado de cada quqadrilátero, coloque A se ele for um quadrado, B se for um retângulo e C se for um losango.

( )
( )B
( )

Quadrilátero com os dois pares de lados opostos paralelos e os ângulos todos de mesma medida

( )
( )
( )C

Quadrilátero com todos os lados de mesma medida e os ângulos também de mesma medida.

( )
( )
( )

Quadrilátero com dois lados consecutivos de mesma medida e os outros dois lados (também consecutivos) também de mesma medida.

( )
( )
( )C

Quadrilátero com os lados todos de mesma medida.

Figura 14: Atividade 1 do Edilson do 2º encontro

Nessa atividade pude perceber que o Edilson não entendeu o quadrado virado como um retângulo ou como um quadrado, apenas como losango. Achei interessante que ele não marcou nada no quadrilátero que não é nem quadrado, nem retângulo e nem losango.

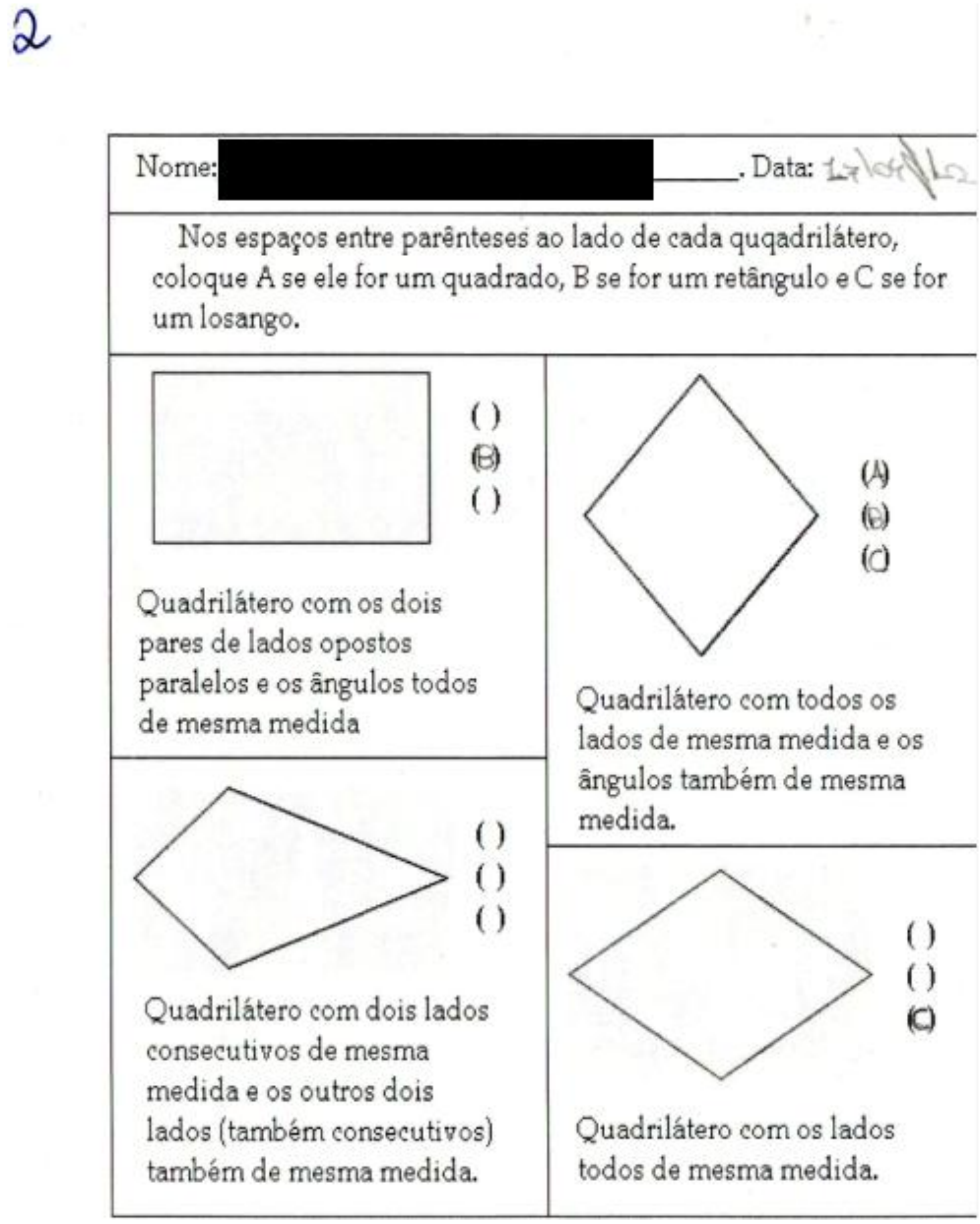


Figura 15: Atividade 2 do Edilson do 2º encontro

Infelizmente, ao imprimir essa atividade, a segunda figura (que é um quadrado) ficou um pouco esticada (não tanto como nesta versão) e, quando o Horácio comentou que ela não estava bem certinha, o Alexandre falou para ele que isso não importava, “Não precisa estar certinho”, disse ele. Acredito que neste momento ele já havia entendido que, para responder à pergunta, bastava olhar para o que estava escrito.

Após essa atividade, pedi que os alunos fizessem a construção sólida do quadrado a partir de um dos seus lados. Perguntei para eles o que eu estava querendo dizer com “sólida” e o Alexandre disse “São esses dois pontos azuis e o resto tem que ser preto né?”; ele pareceu ter compreendido que, uma vez dados os dois pontos extremos de um lado do quadrado (movíveis), os demais pontos estarão fixos. Com isto é possível notar que o Alexandre identificou que são necessárias certas propriedades para a construção do quadrilátero ser uma figura da Geometria Dinâmica, novamente um pensamento que se encaixa no nível de análise descrito no modelo de Van Hiele.

Enquanto eles realizavam a atividade, dei-me conta de que essa é uma construção mais fácil do que a do círculo contendo uma cruz, que foi proposta no primeiro encontro. Preocupei-me que, no primeiro encontro, tivesse pedido uma construção que usasse um número grande de comandos e não me dei conta de que isso seria uma construção excessivamente difícil, pelo próprio motivo de usar muitos comandos. Ainda assim, acredito que seja necessário uma construção difícil para que se possa ensinar todos os comandos e, nesta será preciso um auxílio maior aos alunos por parte do professor.

Novamente, todas as duplas conseguiram realizar a atividade na segunda tentativa, porém me intrigou a primeira tentativa realizada pela dupla Horácio e Luís.

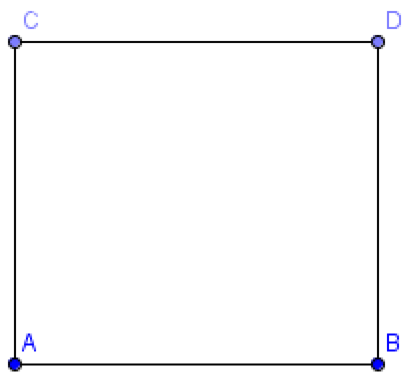


Figura 16: Primeira construção do quadrado de Luís e Horácio

Note que os pontos C e D estão em azul claro, o que indica que são pontos movíveis. Analisando o movimento da construção e os objetos escondidos, é possível ver com mais clareza o que foi feito.

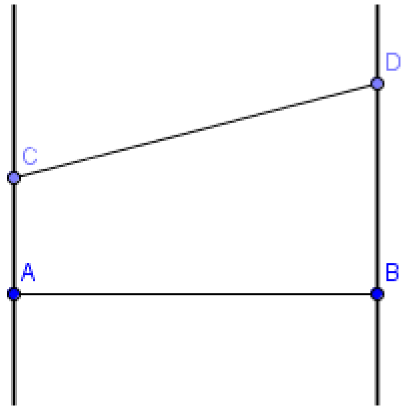


Figura 17: Primeira construção do quadrado de Luís e Horácio movimentada

Esta é a mesma construção após o movimento dos pontos C e D e a exibição dos objetos escondidos. Os dois não usaram o comando compasso. Eles pediram uma reta perpendicular ao segmento passando por A e uma por B, então eles pediram, em cada reta, um ponto qualquer, ajustaram visualmente os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$, e esconderam as retas. Desta maneira os pontos C e D estão soltos, porém com movimento restrito às retas respectivas.

Duas construções que me chamaram a atenção também foram as da dupla Alexandre e Edilson e da Julia (que estava sozinha neste encontro). Após terminarem as construções, eles se interessaram em conhecer o programa e mudaram as cores e as formas dos pontos e dos segmentos.

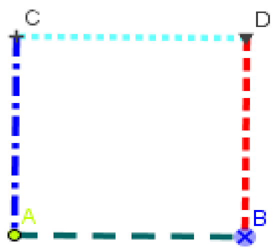


Figura 18: Construção do Quadrado de Alexandre e Edilson

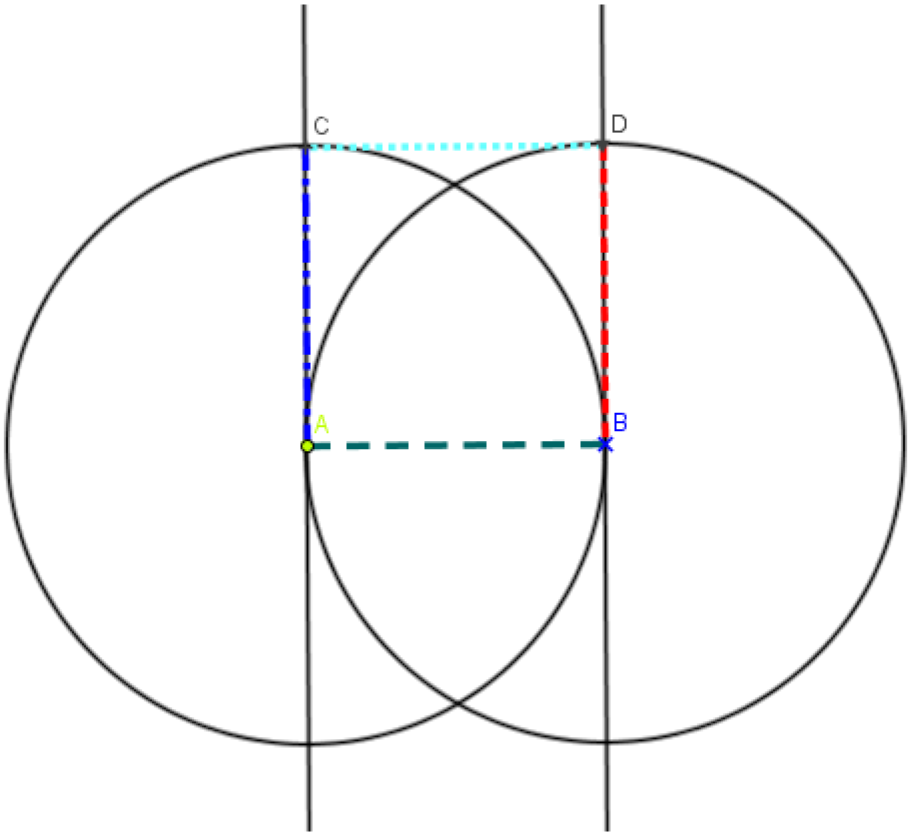


Figura 19: Construção do quadrado de Alexandre e Edilson exibindo os objetos escondidos.

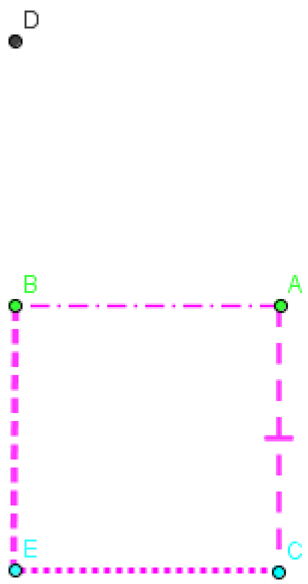


Figura 20: Construção do quadrado de Julia

(note que ela esqueceu de esconder o ponto D acima do quadrado).

4.3 Terceiro Encontro

Neste dia estavam presentes apenas os alunos Alexandre, Daniel e Julia. O dia estava muito frio, e a diretora da escola comentou que pudesse ser por isto que os alunos tinham faltado.

Para este encontro, como os alunos já não tinham uma noção intuitiva do losango (e um aluno nem do retângulo) no encontro anterior, imaginei que eles não teriam sobre paralelogramo ou trapézio. Tendo isso em vista, elaborei a seguinte atividade que já define os quadriláteros e pede para os alunos terminarem a tabela.

Nome:____________________________________ Data:____________

LEIA COM MUITA ATENÇÃO AS DEFINIÇÕES DOS QUADRILÁTEROS E PREENCHA A TABELA ABAIXO.

QUADRADO:

Quadrilátero com os quatro lados de mesma medida e os quatro ângulos de mesma medida.

RETÂNGULO:

Quadrilátero com os quatro ângulos de mesma medida

LOSANGO:

Quadrilátero com os quatro lados de mesma medida.

PARALELOGRAMO:

Quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos.

TRAPÉZIO:

Quadrilátero com um par de lados opostos paralelos.

O \ é um	Quadrado	Retângulo	Losango	Paralelogramo	Trapézio
Quadrado					
Retângulo					
Losango					
Paralelogramo					
Trapézio					

Figura 21: Atividade da Tabela do 3º encontro

Nesta atividade, os alunos tinham que ler as definições, manipular os arquivos de Geogebra para ver as propriedades escritas nas definições em construções concretas, e preencher a tabela inteira podendo manipular os arquivos para tal.

Os alunos manipularam bastante as construções sólidas dos quadriláteros, e isto contribuiu muito para que eles pudessem perceber a inclusão das definições.

Um fato curioso que pude perceber e que não imaginei que aconteceria é que, como na definição de trapézio e de paralelogramo só é falado em número de pares de lados opostos paralelos, e não é falado em lados de mesma medida, ou ângulos de mesma medida, primeiramente os três alunos marcaram que quadrado, retângulo e losango nunca são paralelogramo, nem trapézio. Infelizmente não tenho uma versão escrita disso, pois, conforme fomos ajudando, eles foram apagando e corrigindo. Eles conseguiram uma melhoria, porém ninguém acertou a tabela inteira.

Segue aqui uma das tabelas feitas.

O \ é um	Quadrado	Retângulo	Losango	Paralelogramo	Trapézio
Quadrado	Sim	Sim	Sim	Sim	Não
Retângulo	Não	Sim	Não	Sim	Não
Losango	Não	Não	Sim	Sim	Não
Paralelogramo	Não	Sim	Sim	Sim	Não
Trapézio	Não	Não	Não	não	Sim

Figura 22: Uma das Tabelas Preenchida

Após o recreio, eles voltaram e foi pedido que tentassem a construção sólida do paralelogramo. Um fato curioso é que a Julia e o Daniel começaram pressionando o comando de reta perpendicular (provavelmente porque a construção do encontro anterior começou assim). Uma das construções que gostaria de comentar aqui é a do Daniel. Em um primeiro momento ele concluiu sua construção como na seguinte figura.

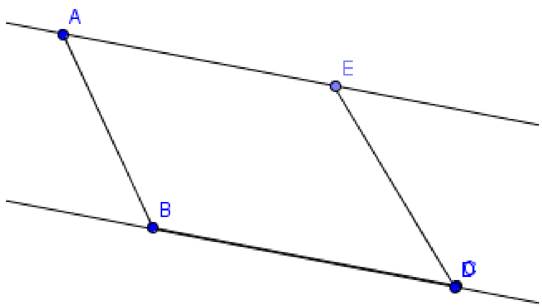


Figura 23: Tentativa de construção do paralelogramo de Daniel

Note que ele tem quatro pontos na cor azul forte e um na cor azul claro (C e D estão coincidindo).

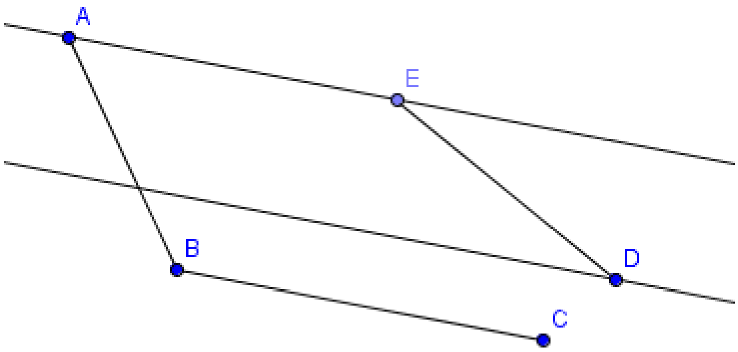


Figura 24: Tentativa de construção do paralelogramo de Daniel movimentada

Esta é a mesma construção após mover o ponto D de lugar. Ele começou por pontos A, B e C quaisquer no plano, então ele pediu o comando reta paralela, pressionou o segmento $\overline{BC}$ e pressionou um lugar qualquer do plano (falando do ponto de vista de programação), então o programa gerou o ponto D qualquer. Depois, ele pediu uma nova reta paralela (ao segmento $\overline{BC}$ ou à reta que ele já tem) e pressionou corretamente passando pelo ponto A. Ele então moveu os pontos C e D até que coincidissem e pediu novo ponto na segunda reta criada. Então ele criou o segmento $\overline{ED}$.

Em sua segunda tentativa, ele foi melhor.

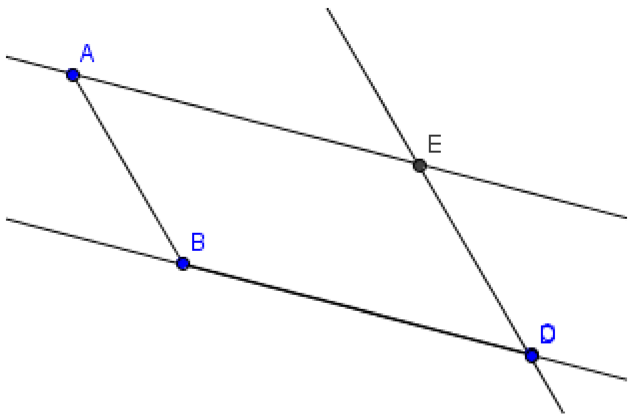


Figura 25: Segunda tentativa de construção do paralelogramo de Daniel

Repare que agora a construção possui um ponto preto. Ele começou da mesma forma que anteriormente, porém ele pediu (após sobrepor os pontos C e D) uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ passando por D, um ponto qualquer (falando do ponto de vista de programação). Então ele construiu o ponto E de intersecção entre as duas retas como mostra a figura.

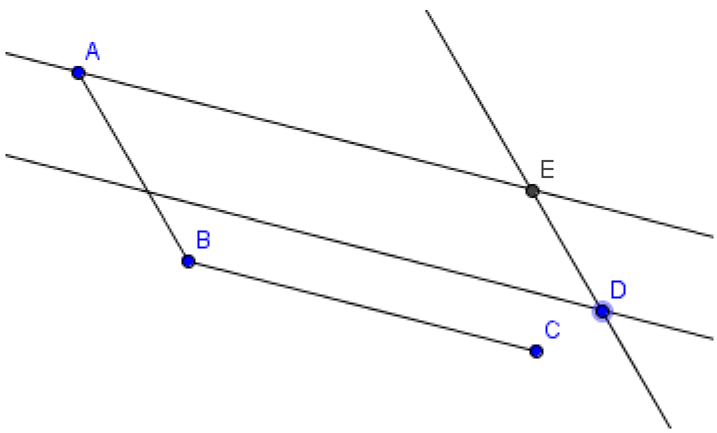


Figura 26: Segunda tentativa de construção do paralelogramo de Daniel movimentada

Mesma construção após mover o ponto D de lugar (na construção se mantiveram os paralelismos). Meu colega e eu acreditamos que, se não fosse a falta de habilidade em usar o programa, ele teria conseguido a construção. Acreditamos que ele entendeu a ideia de dois pares de retas paralelas formando o paralelogramo.

O Alexandre conseguiu de primeira a construção da figura a seguir.

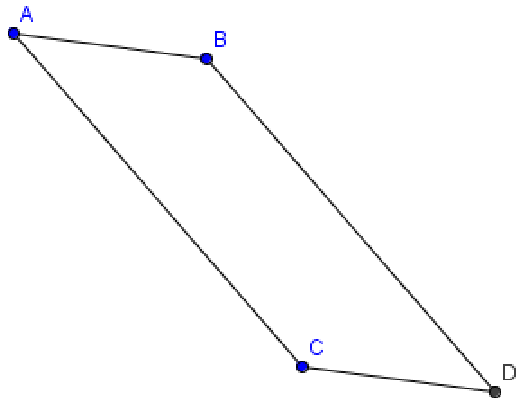


Figura 27: Construção do paralelogramo de Alexandre

É possível notar os três pontos na cor azul forte e o ponto preto D de intersecção.

Após esta construção foi pedido para os alunos tentarem a construção sólida do retângulo. Surpreendeu-me que todos conseguiram de primeira e novamente me chamou a atenção que a Julia e o Alexandre coloriram as construções deles.

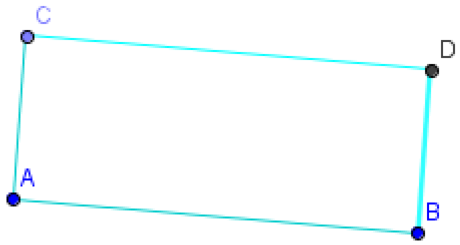


Figura 28: Construção do retângulo de Julia

Repare que, ela não alterou as cores dos pontos desta vez (pedi para que não fizesse isso). Ela tem dois pontos iniciais na cor azul forte, um ponto azul claro que está preso à reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e o ponto D de intersecção entre a reta perpendicular ao segmento AB passando por B e a reta perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ passando por C.

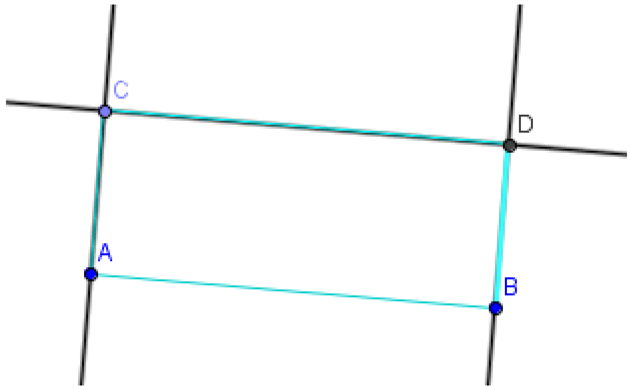


Figura 29: Construção do retângulo de Julia Após a Exibição dos Objetos Escondidos.

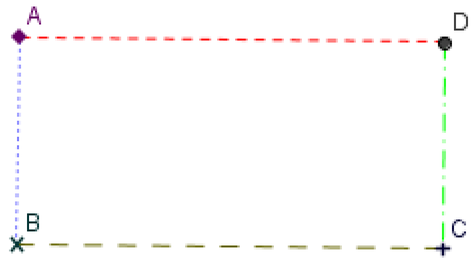


Figura 30: Construção do Retângulo de Alexandre

Construção do retângulo colorido do Alexandre. Note que ele não atendeu ao meu pedido de não modificar as cores e as formas dos pontos.

4.4 Quarto Encontro

Estavam presentes os alunos Alexandre, Daniel, Julia, Luís e Vítor. O Alexandre e a Julia sentaram-se em dupla, enquanto que o Daniel, o Luís e o Vítor sentaram-se em trio.

Devido às dificuldades dos alunos em mexer no programa Geogebra, resolvi fazer uso dele sem que os alunos precisassem construir coisas, mas apenas visualizassem construções. Então peguei nove arquivos de construção no Geogebra; losango genérico, losango particular (ângulos fixos), paralelogramo genérico, quadrado, retângulo genérico, retângulo particular (proporção igual a dois), trapézio genérico, trapézio particular 1 (ângulos fixos) e trapézio particular 2 (a altura e uma das base são ambas a metade da outra base). Então eu renomeei os arquivos com as letras de A a I e pedi para os alunos escreverem em folha de ofício as propriedades que eles identificaram em cada arquivo. Enquanto tentavam fazer, perguntavam-me o que eu queria que eles escrevessem. Falei para escreverem principalmente sobre os lados serem de mesma medida ou não, os ângulos serem de mesma medida ou não, se há lados paralelos e tentarem identificar o quadrilátero.

Achei interessante que todos eles enfatizaram o número de pontos pretos em cada arquivo, era como se fosse um meio de começarem a análise para descobrirem algo sobre a construção, pois os pontos pretos já indicam que são pontos não momvíveis da construção. Outro fato que surpreendeu a mim e meu colega foi o de Vítor e Luís analisarem se a construção possui lados paralelos, analisando se é possível transformá-la em um quadrado ou em um retângulo. Isto não está correto, e por esse motivo eles erraram o paralelismo de algumas figuras com ângulos fixos diferentes (o paralelogramo eles identificaram como tal), contudo é possível perceber que eles construíram a ideia de que o quadrado e o retângulo sempre têm os lados paralelos. Vítor e Luís conseguiram identificar também que, no paralelogramo, os lados opostos têm mesma medida (outra coisa que não está escrita na definição). Todos os alunos acertaram a classificação do quadrado, dos retângulos e do paralelogramo (provavelmente porque foram os três quadriláteros que eles construíram no Geogebra no decorrer dos encontros). Além disso, todos acertaram a particularização da construção dos dois trapézios.

De modo geral os alunos perceberam bem as propriedades das figuras, porém se arriscaram pouco a dizer quais quadriláteros são.

Após o recreio, havia renomeado cada um dos arquivos da seguinte maneira: LOSANGO 1, LOSANGO 2, PARALELOGRAMO, QUADRADO, RETÂNGULO 1, RETÂNGULO 2, TRAPÉZIO 1, TRAPÉZIO 2 e TRAPÉZIO 3. Ensinei aos alunos o que é um quadrilátero particular e um genérico e pedi para tentarem identificar, com base na classificação dada, o quadrilátero mais abrangente que cada uma é, se cada um é particular ou genérico.

Nesta atividade percebi que, quando eles tinham dúvida, eles marcavam o quadrilátero como particular, o que foi ruim, pois havia um quadrilátero genérico de cada tipo. Um fato interessante foi que todos marcaram o quadrado como sendo genérico, o que me fez pensar que eles poderiam estar dando prioridade para o quadrilátero ser genérico, como se fosse preferível um quadrilátero ser genérico a ser particular.

Apesar de os alunos terem se dividido em dois grupos, pude perceber quanto, de fato, cada um acertou. Alexandre teve 8 acertos, Julia fez 7 acertos, Luís fez 7 acertos, Daniel fez 6 acertos, e Vítor fez 8 acertos. A média foi de 7,2 acertos.

Na avaliação da atividade por parte dos alunos, eu não tinha a folha planejada impressa, então pedi para que eles escrevessem em folha de ofício o que eles acharam das aulas, dos professores e o que aprenderam. Os alunos escreveram muito pouco, mas em geral disseram que gostaram das aulas, que aprenderam matemática de um jeito que não parece matemática e que fomos bons professores; um aluno disse que gostou de aprender coisas de que não gostava antes. Achei interessante que eles enfatizavam que foram "aulas de matemática na informática", talvez como uma tentativa de diferenciar das aulas tradicionais que eles eram acostumados a ter.

4.5 Alguns Obstáculos

O laboratório continha oito computadores, porém alguns com o mouse não funcionando, outros com tudo não funcionando e outros sem internet, necessária para a instalação do software Java, já que não encontrei o arquivo de instalação do software e acredito que seja possível a instalação somente pela internet. Juntando partes que funcionavam, consegui aproveitar quatro computadores, que foram os usados até o fim da oficina. O laboratório não continha quadro, o que dificultou um pouco a atividade, pois havia planejado os encontros contando com um quadro.

Os computadores da escola eram programados para excluírem qualquer coisa que tivesse sido feita ao serem desligados, portanto ao ser reiniciado, eles voltavam a sua configuração original. Por esse motivo precisei instalar o Geogebra e o Java todos os dias, e ao final de cada encontro, tinha que salvar as pastas com as produções dos alunos (já que elas seriam excluídas quando o computador fosse desligado). Todo material utilizado pelos alunos foi fornecido por mim durante os quatro encontros.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo de minha vida na escola pública, pude perceber uma mecanização imensa no ensino de matemática. Sempre me foi dada a matéria com muita repetição e trabalhos braçais. Acredito que esta atividade com o Geogebra é um caminho para incentivar os alunos a pensar, a criar e a resolver problemas. Os próprios alunos comentaram que este foi um jeito totalmente novo de aprender matemática, que, para eles, nem parecia matemática.

Durante meu percurso no curso de Licenciatura em Matemática, vi que a matemática é totalmente diferente do que vimos na escola. No curso é necessário pensar, criar e, principalmente, demonstrar. Também é enfatizado que, na escola, a metodologia deveria ser a mesma, de incentivar os alunos ao pensamento dedutivo e lógico. Vejo diversos colegas de curso estudando e escrevendo sobre este assunto, e até hoje, só vi esse tipo de atividade nas escolas quando se tratava de uma atividade de estágio ou de trabalho de conclusão de curso de um desses alunos.

Esta atividade com o Geogebra possibilitou, além de começar o uso do programa com os alunos para futuras atividades da escola, que os alunos aprendessem as definições dos quadriláteros dando valor para a definição formal escrita, ou seja, dando valor para suas propriedades fundamentais, já que eles também tinham que construir o quadrilátero no programa de forma sólida, e percebendo propriedades dos mesmos através da manipulação que o programa permite. Hoje em dia, todas as escolas públicas possuem um laboratório de informática, que é, frequentemente, pouco usado pelos professores, talvez por insegurança, ou por falta de treinamento, ou mesmo por falta de material didático. Contudo, a precisão da imagem das figuras e a dinâmica de um programa de computador como o Geogebra auxilia na educação dos alunos.

Acredito também que eu tenha colaborado com o aprendizado destes alunos, dando um pequeno passo para a passagem deles do nível de Van Hiele de visualização para o de análise.

Dentre as dificuldades que encontrei para a realização desta experiência, quero enfatizar a falta de manutenção do laboratório de informática da escola, pois havia muitos computadores que não estavam em condições de utilização. Quero comentar também que houve pouco tempo para a realização de cada atividade, principalmente para familiarização com o software, pois o Geogebra era uma novidade para os alunos. E, além disso, alguns alunos não tinham familiaridade com o uso de computadores.

Outra dificuldade que encontrei foi que os alunos buscavam mecanismos para realizar as atividades, na esperança de que, depois de construído um mecanismo, não seria mais necessário pensar sobre o assunto. Esta é uma ideia discutida por Kátia Maria Medeiros em *O Contrato Didático e a resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula* (MEDEIROS, K. M. ; 1999). Neste texto, a autora discute acordos que professores fazem com os alunos, que ela chama de contratos didáticos, para que eles acertem as respostas da prova daquele professor. Um exemplo de combinação é “Se estiver escrito ganhou, então coloque o sinal de mais, se estiver escrito perdeu, coloque sinal de menos”.

Realmente, espero que, em futuro próximo, o ensino de matemática nas escolas comece a ter essa dinâmica de uso de tecnologias e de incentivo ao pensamento dos alunos, algo ainda tão ausente nas escolas, e necessário para o desenvolvimento de qualquer sociedade.

6. REFERÊNCIAS

BONGIOVANNI, Vicenzo. <http://matematica.com.br/site/artigos-matematicos/637-as-diferencas-definicoes-dos-quadrilateros-notaveis.html>. Acesso em: <17/05/2012>. *RPM 55*

BRASIL, MEC. Secretaria de Média e Tecnologia. Apud **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. 1998. 58 p. Disponível em < http://portal.mec.gov.br/index.php >.

CONTIERO, Lucas de Oliveira; GRAVINA, M. A. **Modelagem com o Geogebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar?**. RENOTE. Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 01, p. 01-10, 2011.

DOLCE, Osvaldo & POMPEU, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar** Vol. 9; São Paulo, Atual editora, 1993.

GRAVINA, M. A. ; BASSO, M. V. ; BURIGO, E. Z. ; Garcia, V. C. **Matemática - Mídias Digitais Didática: tripé para formação do professor de Matemática**. 1. ed. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2012. v. 01. 180 p.

JÚNIOR, Fernando Dutra. **Desenho Geométrico Como Ferramenta de Aprendizagem de Geometria**. 2010 (p. 47 e 48).

LINDQUIST, Mary Montgomery & SHULTE, Albert P. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. Atual Editora, São Paulo, 1994.

LINS, Rômulo Campos. **Matemática, monstros, significados e educação matemática**. In: BICUDO, Maria A. V.; BORBA, Marcelo de C. (Orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 92 – 120.

MATTE, Marília Luiza. **A Linguagem Logo Como Possibilidade de Aprendizagem em Matemática**. TCC, 2011 (P. 54).

MEDEIROS, K.M. **O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula**. Recife: UFPE, 1999. (dissertação de mestrado).