

# PROCESSOS SAZONAIS DE LONGA DEPENDÊNCIA COM VARIÂNCIA INFINITA



Cnpq  
Apoio

Greice Helen C. Laureano  
Bolsista  
00158953@ufrgs.br

Cleber Bisognin  
Orientador  
cbisognin@ufrgs.br



## RESUMO:

Nas últimas décadas tem ocorrido interesse no estudo de séries temporais com a propriedade de longa dependência. A longa dependência é caracterizada pela presença de correlação entre as observações separadas por um longo período de tempo. Esse tipo de característica é usualmente encontrado em séries temporais nas mais diversas áreas.

Algumas séries temporais, além da propriedade de longa dependência, apresentam sazonalidade. Para estudar os fenômenos com longa dependência e sazonalidade vários autores propõem os processos SARFIMA(p, d, q) x (P, D, Q)<sub>s</sub>.

Neste trabalho estamos propondo um estudo sobre processos SARFIMA(p, d, q) x (P, D, Q)<sub>s</sub>, onde P=p=0=q=Q, com processo de inovação com distribuição α-Estável. O estudo de simulações Monte Carlo consistiu em realizar a estimação dos parâmetros de diferenciação d e diferenciação sazonal D, por meio de estimadores paramétricos e semiparamétricos clássicos e suas versões robustas. A comparação da eficiência destes estimadores foi feita a partir da análise dos erros quadráticos médios, vício e variância de cada estimador.

## CARACTERIZAÇÃO:

Usualmente, em séries temporais, o processo SARFIMA(0, d, 0) x (0, D, 0)<sub>s</sub> possui em processos de inovação  $\varepsilon_t$ , com  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$  um Ruído Branco, isto é  $t \in Z$ , para todo  $\{\varepsilon_t\}_{t \in Z}$ . Neste trabalho, entretanto, vamos considerar que o processo possui distribuição α-Estável, que será definida a seguir.

A distribuição α-Estável simétrica tem função característica definida da seguinte forma:

$$\varphi(x) = \exp(j\beta x - \sigma|x|^\alpha),$$

Onde os parâmetros locais são  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $-\infty < \beta < +\infty$  e o coeficiente de dispersão  $\sigma > 0$ . Para valores de  $\alpha \in (1, 2]$  o parâmetro  $\beta$  corresponde a média da distribuição α-Estável, já quando  $\alpha \in (0, 1]$  o parâmetro  $\beta$  corresponde a mediana da distribuição α-Estável.

A função densidade de probabilidade da α-Estável possui diferentes formatos dependendo do α utilizado. Dois casos especiais são quando  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$ . Nesses casos a α-Estável se torna, respectivamente, uma distribuição Cauchy-padrão e uma distribuição Normal(0, 2).

➤ Funções densidade de probabilidade da α-Estável quando  $\beta=0$  e  $\sigma=1$ :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma(\alpha k + 1) x^{-\alpha k} \sin\left(\frac{k\alpha\pi}{2}\right), & \text{para } 0 < \alpha < 1, \\ \frac{1}{\pi(x^2+1)}, & \text{para } \alpha = 1, \\ \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) x^{2k}, & \text{para } 1 < \alpha < 2, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), & \text{para } \alpha = 2. \end{cases}$$

A Figura 1, a seguir, apresenta alguns exemplos de processos SARFIMA(p, d, q) x (P, D, Q)<sub>s</sub> onde P=p=0=q=Q, com processo de inovação α-Estável.

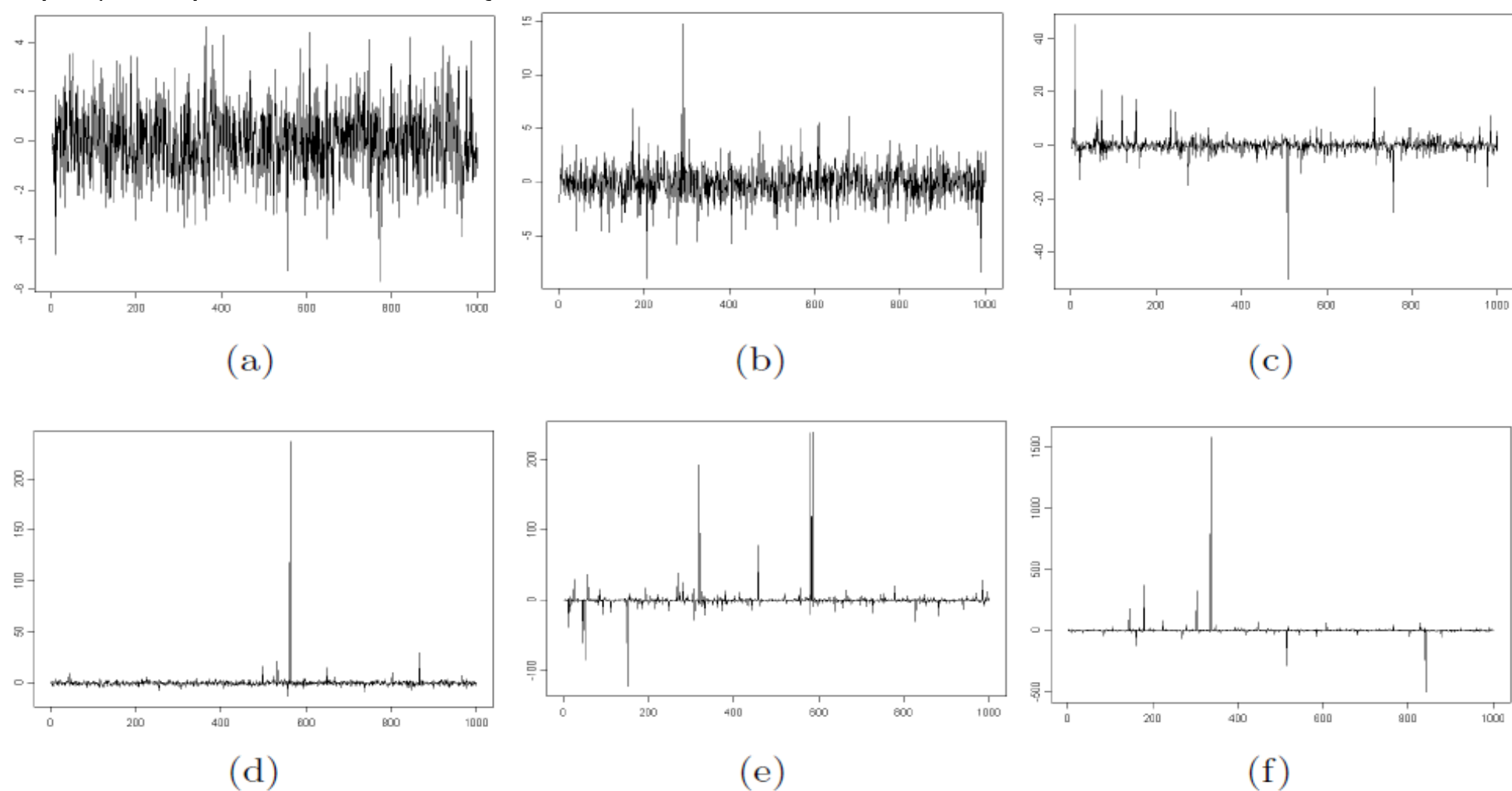


Figura 1. Processos SARFIMA(p, d, q) x (P, D, Q)<sub>s</sub> onde P=p=0=q=Q, com processo de inovação α-Estável, onde  $\sigma = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $s = 2$ ,  $d = 0.2$  e  $D = 0.2$ : (a)  $\alpha = 2$ ; (b)  $\alpha = 1.8$ ; (c)  $\alpha = 1.7$ ; (d)  $\alpha = 1.5$ ; (e)  $\alpha = 1.2$ ; (f)  $\alpha = 1$ .

Após intensa pesquisa bibliográfica, foram encontradas várias propriedades e definições para os processos ARFIMA(p, d, q). *Estendemos essas propriedades e definições para os processos SARFIMA(p, d, q) x (P, D, Q)<sub>s</sub> quando possuem processos de inovação  $\{\varepsilon_t\}_{t \in Z}$  com distribuições α-Estáveis:*

➤ Função de Autocovariância amostral:

$$\hat{\gamma}_X(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} X_t X_{t+|h|}$$

➤ Função de Autocorrelção amostral:

$$\hat{\rho}_X(h) = \left( \sum_{t=1}^n X_t^2 \right)^{-1} \left( \sum_{t=1}^{n-|h|} X_t X_{t+|h|} \right) = (\hat{\gamma}_X(0))^{-1} \hat{\gamma}_X(h)$$

As propriedades, a seguir, seguem as seguintes condições:  $|d+d| < 1 - \frac{1}{\alpha}$  e  $|D| < 1 - \frac{1}{\alpha}$  com  $1 < \alpha \leq 2$ .

➤ Representação média móvel infinita:

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{n-j}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = (1-z)^d (1-Z^*)^{-D}, \text{ para } |z| < 1$$

No caso de processos com variância infinita, não existe função densidade espectral. Neste caso, apresentamos a chamada função de transferência. Esta função inicialmente foi definida para os processos ARFIMA(p, d, q) em Kokoszka e Taqqu (1995). Para os processos SARFIMA(p, d, q) x (P, D, Q)<sub>s</sub> onde P=p=0=q=Q, a função de transferência é dada por:

$$f_X(\lambda) = |(1 - e^{-i\lambda})^{-d} (1 - e^{-is\lambda})^{-D}|^2 = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{-ij\lambda} \right|^2$$

Neste trabalho, utilizaremos a função periodograma normalizado (ver Klüppelberg e Mikosch, 1994), disposto a seguir:

$$\tilde{I}(\omega) = \left( \sum_{t=1}^n X_t^2 \right)^{-1} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-i\omega t} \right|^2 = \sum_{|t| < n} \rho(t) e^{i\omega t}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

## REFERÊNCIAS:

- [1] Kokoszka, P. e M.S. Taqqu (1995). "Parameter Estimation for Infinite Variance Fractional ARIMA".
- [2] Kokoszka, P. e T. Mikosch (1995). "The integrate periodogram for long-memory processes with infinite variance". Stochastic processes and their applications Vol.66, pp. 55-78.
- [3] Kokoszka, P. e M.S. Taqqu (1996). "Infinite variance stable moving averages with long memory". Journal of Econometrics Vol.73, pp. 79-99.
- [4] Klüppelberg, C. e Mikosch, T. (1994). "Some limit theory for the normalized periodogram of p-stable moving average processes".
- [5] Klüppelberg, C. e Mikosch, T. (1994). "Spectral estimates and stable processes". Stochastic Processes and their applications, Vol. 47, pp. 323-344.
- [6] Mikosch, T. e Klüppelberg, C. (1995). "On strong consistency of estimators for infinite variance time series".
- [7] Rousseeuw, P.J. (1984). "Least Median of Square Regression". Journal of the American Statistical Association, Vol. 79, pp. 871-880.

## ESTIMADORES:

Para estimação dos parâmetros de diferenciação d e diferenciação sazonal D dos processos SARFIMA(p, d, q) x (P, D, Q)<sub>s</sub>, onde P=p=0=q=Q, utilizamos cinco estimadores semiparamétricos e três paramétricos. Os estimadores semiparamétricos possuem uma versão clássica LM e duas robustas MM (Yohai, 1987) e LTS (Rousseeuw, 1984).

➤ Estimadores Semiparamétricos:

• GPH - Proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983), o qual baseia-se no método de regressão utilizando a função periodograma (neste trabalho utilizaremos a função periodograma normalizado).

• R - Proposto por Robinson (1995), é baseado na função periodograma normalizado.

• SR - É obtido substituindo-se a função periodograma pela função periodograma suavizado de covariâncias no estimador R proposto por Robinson (1995).

• BA - Similar ao GPH, entretanto ele usa a função periodograma suavizado de covariâncias (Robinson, 1995) em vez da função periodograma no estimador proposto por Geweke e Porter-Hudak (1983).

• GPHT - Proposto por Hurvich e Ray (1995) e Velasco (1999) que é um estimador semiparamétrico baseado na função periodograma modificado, maiores detalhes em Hurvich e Ray (1995) e Velasco (1999).

➤ Estimadores Paramétricos:

• FT (Máxima verossimilhança, proposto por Fox e Taqqu (1986)) - Utiliza uma aproximação para a matriz de autocovariância sugerida por Whittle (1951) e o periodograma normalizado.

• BERAN - Minimiza a função de máxima verossimilhança do processo e também utiliza a função periodograma normalizado.

• MCMC - Utiliza o algoritmo Metropolis-Hastings para a seleção das frequências do periodograma necessária para realizar a estimação dos parâmetros.

## SIMULAÇÃO E RESULTADOS:

Nas simulações de Monte Carlo utilizamos três estimadores paramétricos e cinco estimadores semiparamétricos nas suas versões clássica LM e robustas MM (Yohai, 1987) e LTS (Rousseeuw, 1984). Os resultados são baseados em 10000 replicações, com séries geradas utilizando a representação média móvel infinita, com ponto de truncamento em 10000.

Foram geradas séries temporais a partir do processo SARFIMA(p, d, q) x (P, D, Q)<sub>s</sub> onde P=p=0=q=Q, n = 1000, s=2 e d=0.2=D e  $\alpha \in \{1.2, 1.5, 1.75, 2\}$ .

Para os estimadores semiparamétricos o número de regressores utilizados é  $g(n) = n^{\kappa}$ , com  $\kappa \in \{0.8, 0.82, 0.85, 0.89\}$  o parâmetro  $\kappa$  se refere ao coeficiente para os polinômios de Gegenbauer.

Para os estimadores paramétricos FT, MCMC e BERAN não é utilizado o parâmetro  $\kappa$ , uma vez que não utilizam métodos de regressão para fazer as estimações. Comparamos a eficiência destes estimadores analisando seus erros quadráticos médios, vício e média. Os resultados das simulações estão no link: <https://sites.google.com/site/cleberbisognin/IBC>

➤ Os Boxplot's, abaixo, são referentes a estimações dos parâmetros d e D de processos SARFIMA(p, d, q) x (P, D, Q)<sub>s</sub> onde P=p=0=q=Q, n = 1000, s=2 e d=0.2=D,  $\kappa = 0.89$  e  $\alpha \in \{1.2, 1.5, 1.75, 2\}$ .

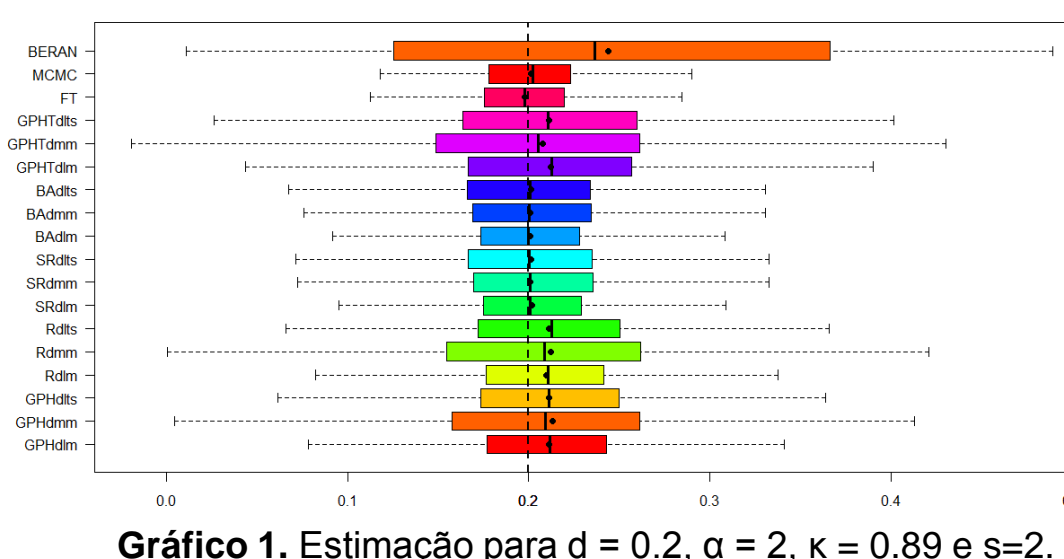


Gráfico 1. Estimação para d = 0.2,  $\alpha = 2$ ,  $\kappa = 0.89$  e s=2.

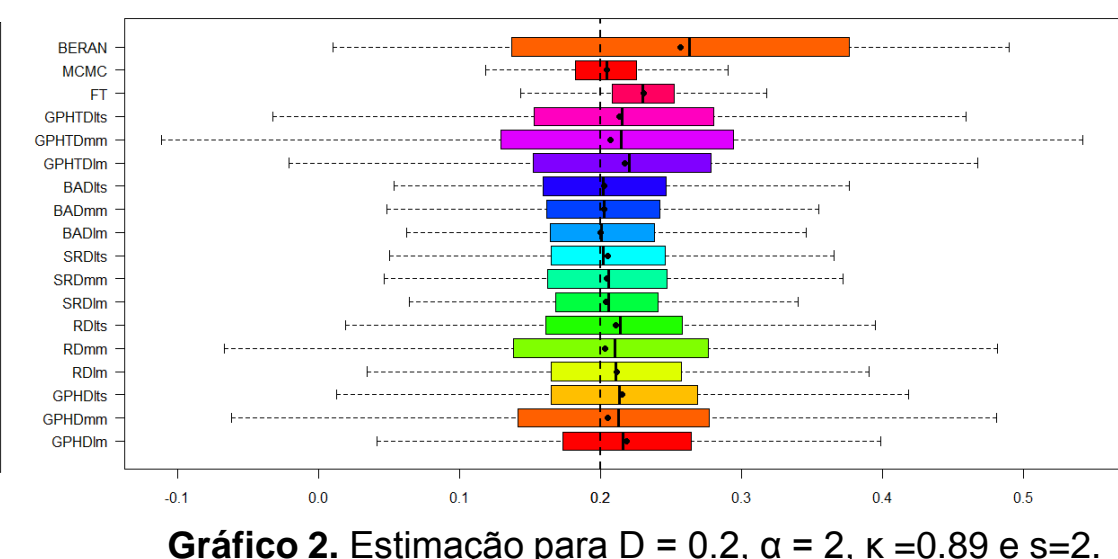


Gráfico 2. Estimação para D = 0.2,  $\alpha = 2$ ,  $\kappa = 0.89$  e s=2.

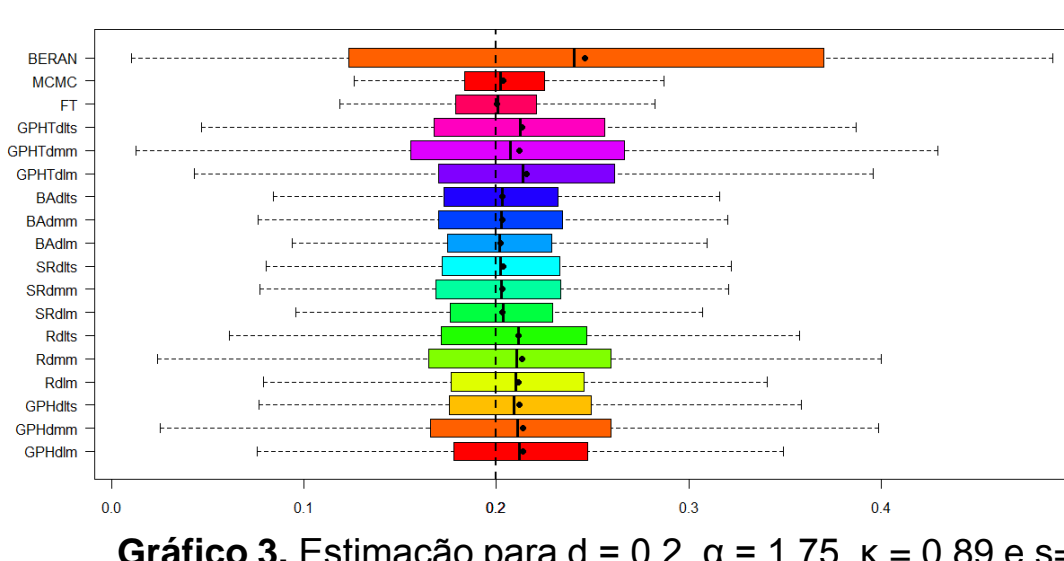


Gráfico 3. Estimação para d = 0.2,  $\alpha = 1.75$ ,  $\kappa = 0.89$  e s=2.

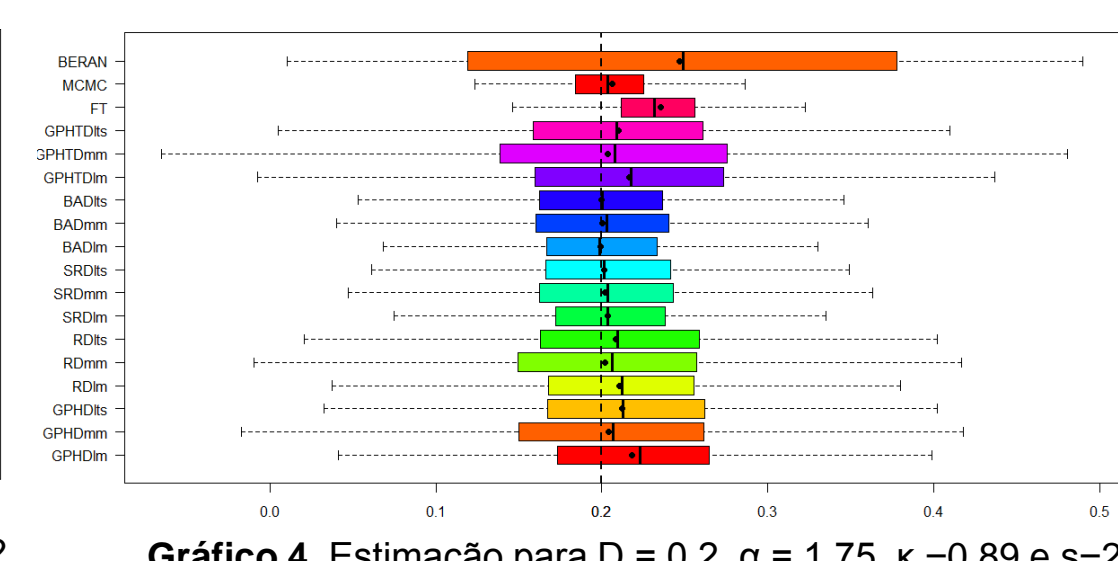


Gráfico 4. Estimação para D = 0.2,  $\alpha = 1.75$ ,  $\kappa = 0.89$  e s=2.

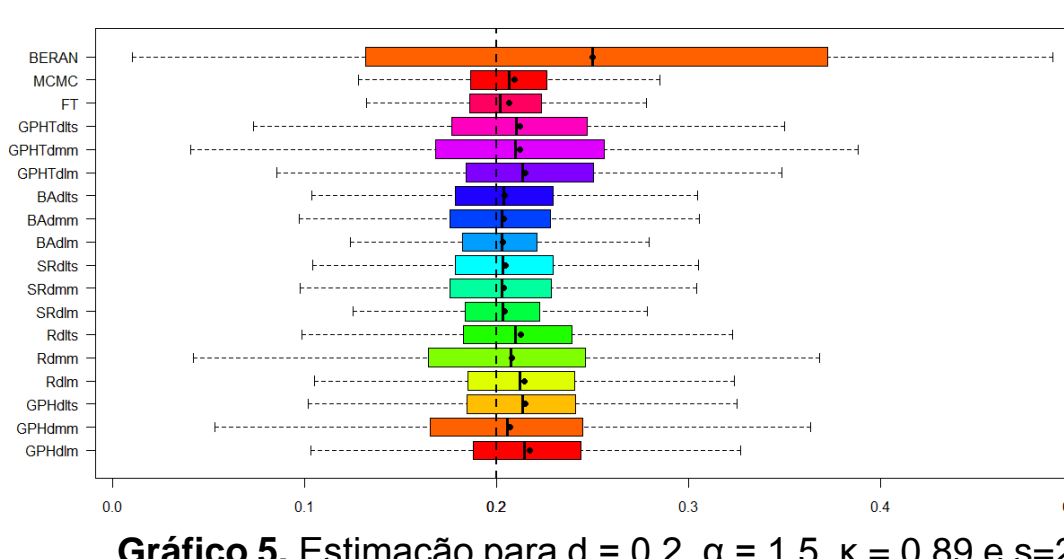


Gráfico 5. Estimação para d = 0.2,  $\alpha = 1.5$ ,  $\kappa = 0.89$  e s=2.

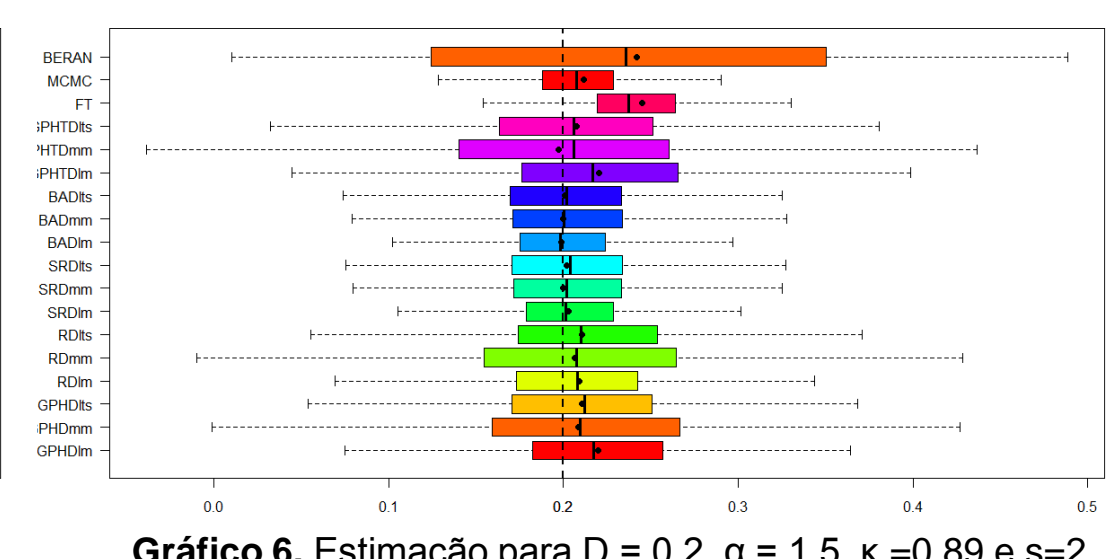


Gráfico 6. Estimação para D = 0.2,  $\alpha = 1.5$ ,  $\kappa = 0.89$  e s=2.

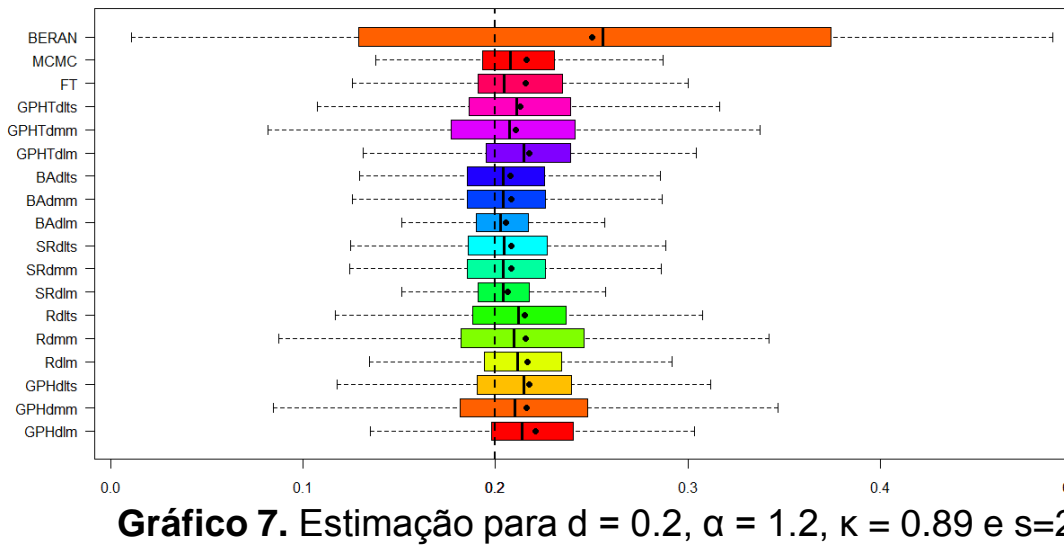


Gráfico 7. Estimação para d = 0.2,  $\alpha = 1.2$ ,  $\kappa = 0.89$  e s=2.

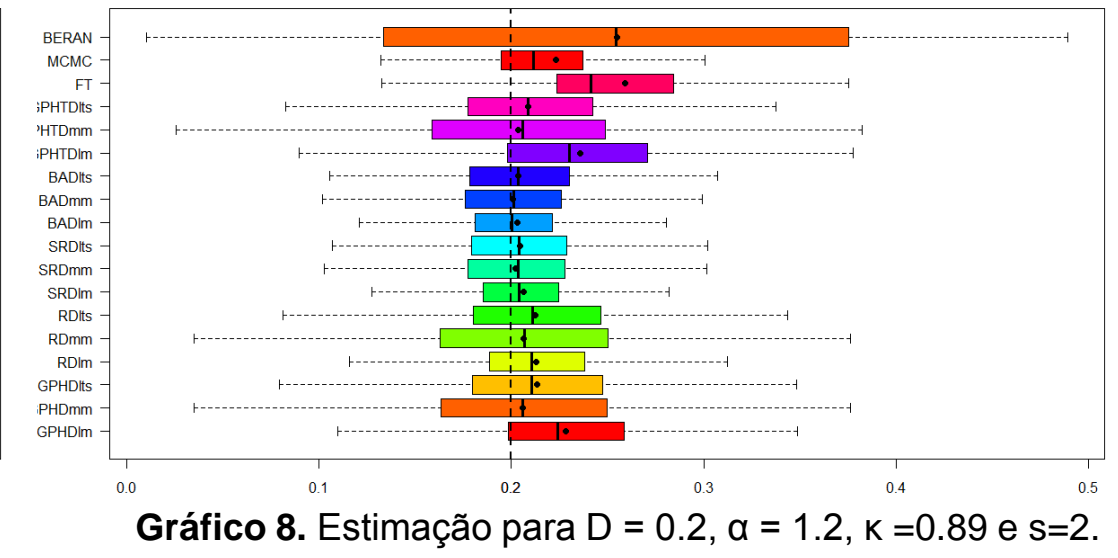


Gráfico 8. Estimação para D = 0.2,  $\alpha = 1.2$ ,  $\kappa = 0.89$  e s=2.

## CONCLUSÕES:

• Observou-se também que quanto maior o valor de  $\kappa$  (para os estimadores semiparamétricos) melhor será a estimação feita, destacando-se os estimadores BA, SR, R e GPH (na versão robusta MM).

• Destacaram-se os estimadores MCMC, BA e SR que tem estimações boas para d e D, tanto para  $\alpha$ 's pequenos quanto para grandes.

• O estimador MCMC é que melhor estima o d e o D, independentemente do valor de  $\alpha$  utilizado.

- [8] Bisognin, C. e S.R.C. Lopes (2007). "Estimating and Forecasting the Long Memory Parameter in the Presence of Periodicity". Journal of Forecasting Vol. 26(6), pp. 405-427.
- [9] Bisognin, C. (2007). "Estimação e Previsão em processo SARFIMA(p, d, q) x (P, D, Q)<sub>s</sub> na presença de outliers". Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFRGS, Porto Alegre.
- [10] Bisognin, C. e S.R.C. Lopes (2009). "Properties of seasonal long memory processes". Mathematical and Computer Modelling Vol. 49, pp. 1837-1851.
- [11] Fox, R. e M.S. Taqqu (1986). "Large-sample Properties of Parameter Estimates for Strongly Dependent Stationary Gaussian Time Series". The Annals of Statistics, Vol. 14, pp. 517-532.
- [12] Geweke, J. e S. Porter-Hudak (1983). "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Model". Journal of Time Series Analysis, Vol. 4(4), pp. 221-238.
- [13] Chung, C-F. (1996). "Estimating a Generalized Long Memory Process". Journal of Econometrics, Vol. 73, pp. 237-259.
- [14] Yohai, V. J. (1987). "High breakdown point and high efficiency robust estimates for regression". Annals of Statistics, Vol. 15, pp. 642-656.