

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE FÍSICA

Produção de Fotinos e Gluínos nas Extensões Supersimétricas da Eletrodinâmica Quântica e da Cromodinâmica Quântica *

Danusa Bueno Espíndola

Dissertação de Mestrado realizada sob orientação do Prof. Dr. Marcos Cardoso Rodriguez e co-orientação do Prof. Dr. Cristiano Brenner Mariotto apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento de requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

Porto Alegre
2011

* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente aos professores Marcos Cardoso Rodriguez, orientador desta dissertação, e Cristiano Brenner Mariotto, co-orientador, pela sugestão do tema, dedicação e disposição que tornaram possível a realização e conclusão deste trabalho. Ao professor Marcos agradeço também pelas diversas vezes em que fez longas viagens a Porto Alegre para ministrar a disciplina de SUSY, a qual foi fundamental para realização da dissertação e também muito importante para minha formação, e por ter muitas vezes viajado somente para discutirmos o trabalho. Um agradecimento também especial ao professor Cristiano, que trabalhou comigo como orientador na graduação, por ter me incentivado a continuar na área de física de partículas, e por que sua participação como co-orientador deste trabalho foi imprescindível para o estudo fenomenológico realizado.

Gostaria também de agradecer aos professores da UFRGS com os quais cursei as disciplinas, os quais foram fundamentais para meu aprendizado e desenvolvimento acadêmico, e também aos professores que de alguma forma me ajudaram para conclusão do curso de mestrado.

Agradeço aos colegas que estudaram junto comigo para as provas e trabalhos e em especial ao colega Leandro, pois devido a sua ajuda no trabalho final de Mecânica Clássica, eu consegui concluir a disciplina. Não poderia deixar de agradecer também aos colegas e amigos queridos Cecília e Diego pelas nossas conversas que me ajudaram muito nos momentos difíceis e também pelos momentos de descontração.

À minha família um agradecimento especial, principalmente ao meu pai João Carlos e minha mãe Ângela pelo apoio e incentivo que me deram durante todo o curso de mestrado, graduação e todas as outras etapas da minha vida. Agradeço também às minhas queridas irmãs Danúbia e Dandara que cederam os quartos, internet, computador e impressora, nas diversas vezes que estive estudando em Rio Grande para finalização da dissertação.

Um agradecimento muito especial ao meu marido Wagner por ter sido meu companheiro e melhor amigo durante todos estes anos. Obrigada pela compreensão e por apoiar minhas escolhas e decisões durante todos os anos da minha vida acadêmica, e em especial nestes três anos de casados.

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo sobre a produção de gluínos no LHC. Os gluínos são partículas de Majorana, e sua existência é predita pelos modelos supersimétricos de física de partículas, como o MSSM.

Inicialmente, motivamos o estudo sobre supersimetria mostrando algumas soluções de problemas usando esta teoria e que não são possíveis de explicar a partir do Modelo Padrão de física de partículas. Trabalhamos também os conceitos fundamentais para a construção de extensões supersimétricas, como a definição de superespaço e supercampos. Com a introdução do conceito de supercampos, mostramos que o espectro de partículas do Modelo Padrão é duplicado, com a inclusão dos parceiros supersimétricos aos campos usuais.

Demonstramos como são construídos dois importantes exemplos de teorias supersimétricas, a Eletrodinâmica Quântica Supersimétrica (super QED ou SQED), e a Cromodinâmica Quântica Supersimétrica (super QCD ou SQCD). Para isso, construímos as lagrangeanas destas teorias e obtivemos as regras de Feynman, em ordem dominante (LO), para os principais vértices da SQED e SQCD. Mostramos também como são introduzidos os superparceiros das partículas usuais da QED, ou seja, o selétron (superparceiro do elétron) e o fotino (superparceiro do fóton), e da QCD, ou seja, o squark (superparceiro do quark) e o gluíno (superparceiro do glúon).

Como o fotino e o gluíno são partículas de Majorana, mostramos um conjunto de regras que tratam de partículas de Majorana e de Dirac de forma simples e análoga. Com estas regras, vimos como é possível fazer os cálculos para espalhamentos do tipo $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$ e para os canais básicos da produção de gluínos a partir de colisões próton-próton (pp).

Na última parte do trabalho, analisamos a produção de gluínos em colisões pp, bem como em colisões próton-núcleo (pA) e núcleo-núcleo (AA) no LHC, onde obtivemos que, em colisões nucleares, a produção de gluínos pode ser enaltecida ou suprimida dependendo da magnitude dos efeitos nucleares, e do cenário para quebra de SUSY.

Abstract

In this work we perform a study about gluino production at the LHC. The gluinos are Majorana particles and their existence is predicted by supersymmetric models of particle physics, such as the MSSM.

Initially, we motivate the study about supersymmetry by showing how it solves some problems that could not be explained by the Standard Model of particle physics. We also work the fundamental concepts such as the definition of superspace and superfields in order to construct supersymmetric extensions. With the introduction of superfields, we show that the particle spectrum of the Standard Model is duplicated, with the inclusion of the supersymmetric partners of usual fields.

We demonstrate how to build two important examples of supersymmetric theories, namely the Supersymmetric Quantum Electrodynamics (super QED or SQED), and the Supersymmetric Quantum Chromodynamics (super QCD or SQCD). To do this, we build the lagrangians of these theories and obtain the Feynman rules, in leading order (LO), of the main vertices of SQED and SQCD. We also show how to introduce the superpartners of the usual particles - in SQED, one has the seletron (electron superpartner) and the photino (photon superpartner), and in SQCD, one has the squark (quark superpartner) and the gluino (gluon superpartner).

Since the photino and the gluino are Majorana particles, we show a set of rules that deal with Majorana and Dirac particles in a simple and analogous way. By using these rules, we make a full calculation of the processes $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$ and of the basic channels of gluino production in proton-proton (pp) collisions.

In the last part of this work, we analyse the gluino production in proton-proton, proton-nucleus (pA) and nucleus-nucleus (AA) collisions at the LHC, and show that in the collisions involving nuclei, the production of gluinos might be enhanced or suppressed depending on the magnitude of the nuclear effects and on the scenarios for the SUSY breaking mechanism.

Conteúdo

Introdução	1
1. Teoria de Campos de Gauge	4
1.1 Equações de Campos Livres e Quantização	5
1.1.1 Campo Escalar de Klein-Gordon	6
1.1.2 Campo Eletromagnético	8
1.1.3 Campo Espinorial de Dirac	10
1.1.4 Campo Espinorial de Majorana	12
1.2 Eletrodinâmica Quântica (QED)	14
1.2.1 Lagrangeana da QED	14
1.2.2 Constante de acoplamento variável da QED	15
1.3 Cromodinâmica Quântica (QCD)	17
1.3.1 Lagrangeana da QCD	17
1.3.2 Constante de acoplamento variável da QCD	20
1.4 Teoria de unificação das constantes de gauge	23
2. Supersimetria	26
2.1 Introdução	26
2.2 Motivações	27
2.3 Superespaço e Geradores	29
2.4 Supercampo	32
2.4.1 Supercampo Quiral	33
2.4.2 Supercampo real	36
2.4.3 Definindo partículas em SUSY a partir dos supercampos	38
2.5 Lagrangeanas Supersimétricas	39
3. Teorias Supersimétricas	43
3.1 Eletrodinâmica Quântica Supersimétrica (SQED)	43
3.2 Cromodinâmica Quântica Supersimétrica (SQCD)	49
4. Regras de Feynman para Partículas do tipo Majorana	55
4.1 Introdução	55
4.2 O Conjunto das Regras	59

5. Produção de Fotinos e Gluínos	61
5.1 Produção de Fotinos	62
5.2 Produção de Gluínos	67
5.2.1 Produção de Gluínos em Colisões pp	67
5.2.2 Produção de Gluínos no LHC	75
6. Produção de Gluínos em Colisões Nucleares no LHC	78
6.1 Efeitos Nucleares de Sombreamento	78
6.2 Produção de Gluínos em Colisões Nucleares	80
6.3 Conclusão	83
Conclusões e Perspectivas	86
A. Álgebras	88
A.1 Álgebra de Poincaré	88
A.2 Super Álgebra de Poincaré ou Álgebra Supersimétrica	89
B. Notação Espinorial e Convenções	90
B.1 Notação espinorial de Weyl	90
B.2 Identidades envolvendo variáveis de Grassmann	93
B.2.1 Derivação de variáveis de Grassmann	93
B.2.2 Integração de variáveis de Grassmann	94
C. Demonstrações capítulo 3	96
C.1 Análogo F^{mn} da SQED	96
C.2 Termo $\Phi^\dagger e^{2qV} \Phi$ da Lagrangeana da SQED	99
C.3 Definindo espinores de Dirac de 4 componentes	100
C.4 Análogo $F_{mn}^a (F^a)^{mn}$ da SQCD	102
D. Demonstrações capítulo 5	108
D.1 Cálculo da amplitude de probabilidade total do processo $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$	108
Referências	112

Introdução

O Modelo Padrão (SM) [1–5] da física de partículas é uma teoria das interações forte, fraca e eletromagnética. Embora esta seja uma teoria que explica todos os dados experimentais obtidos até agora, exceto para massa dos neutrinos [6], há muitos motivos que levam a não se tratar de uma teoria final para física de partículas. Entre estes motivos estão questões como: há um bóson de Higgs? Por que há somente seis quarks e seis léptons? Podem diferentes interações serem unificadas? Surge então a necessidade de uma física além do Modelo Padrão. Um dos principais candidatos a “nova física” é a extensão supersimétrica do Modelo Padrão, na qual o número das partículas conhecidas é duplicado, introduzindo parceiros supersimétricos às partículas usuais, com os mesmos números quânticos, mas com estatística oposta, ou seja, para cada férmion do Modelo Padrão há um parceiro bosônico, e vice-versa.

Um aspecto interessante da supersimetria (SUSY) [7–11], é o fato de que, para muitos físicos, ela resolve vários problemas para os quais não foi introduzida para resolver [12]. Exemplos destes problemas resolvidos em SUSY são

- o problema de hierarquia [13–15],
- a unificação da constante de acoplamento [16–19],
- a existência de um candidato para a matéria escura [20, 21],
- previsão nos anos 1980 de que o quark top seria pesado [22, 23],
- SUSY gera massa para os neutrinos [20, 21],

e muitos outros [12, 20, 21]. Portanto, apesar de não haver hoje nenhuma indicação direta da existência de SUSY, acreditamos que SUSY realmente faz parte da descrição da natureza.

Uma das principais motivações dos experimentos no Large Hadron Collider (LHC) é a descoberta das partículas supersimétricas. Até hoje nenhuma das partículas previstas por SUSY foi encontrada em experimentos. Nos colisores como Fermilab Tevatron collider [24–26], CERN Sp \bar{p} S [27, 28], HERA [29, 30] e LEP [31], estão sendo realizadas pesquisas extensivas por sinais de SUSY. Com sinais negativos, limites inferiores sobre as massas das partículas de SUSY são tomados.

O LHC foi desenvolvido para operar com energia máxima do centro de massa de 14 TeV em colisões próton-próton. Acredita-se que o glúino seja uma das partículas supersimétricas mais pesadas, com previsão de massa, por modelos de quebra de SUSY, que não deve ser menor que aproximadamente 0.5 TeV. Logo, se estas partículas existirem, elas podem ser encontradas no LHC. O LHC ainda não opera com energia máxima, mas recentes dados

para energia do centro de massa de 7 TeV [32] foram analisados com objetivo de encontrar sinais para glúinos e squarks, e, nestas análises, os dados foram consistentes com o Modelo Padrão.

O glúino é um férmion de Majorana superparceiro do glúon (bóson de gauge da QCD). Assim como o glúon, o glúino é um octeto de cor. O superparceiro do fóton, bóson de gauge da QED, é conhecido como fotino e também é um férmion de Majorana. Como os superparceiros possuem mesmos números quânticos das partículas usuais, eles são eletricamente neutros. Estes dois férmions são conhecidos como gauginos. Outro superparceiro fermiônico previsto em SUSY é o higgsino, superparceiro do bóson de Higgs. A mais simples extensão supersimétrica do SM é o Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM) [33–36]. Neste modelo, a quebra espontânea de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ implica que estados com mesma carga elétrica, cor e spin se misturam. Logo, o fotino se mistura com os higgsinos neutros formando os neutralinos [20, 21, 37]. Na maioria das discussões fenomenológicas do MSSM, o neutralino mais leve $\tilde{\chi}_1^0$ é assumido como sendo a partícula supersimétrica mais leve (LSP) [20]. Como $SU(3)_C$ não é quebrada, o glúino não pode se misturar com qualquer outro férmion, e deve ser um autoestado de massa.

Neste trabalho, nós analisamos a produção de glúinos no LHC, para colisões próton-próton (pp) com $\sqrt{s} = 14$ TeV. Motivados pelo fato de que se os glúinos forem produzidos em colisões próton-próton no LHC, também serão produzidos em colisões próton-núcleo (pA, $\sqrt{s} = 8.8$ TeV) e núcleo-núcleo (AA, $\sqrt{s} = 5.5$ TeV) no LHC, no último capítulo realizaremos uma análise inédita da influência de efeitos nucleares na produção de glúinos em colisões pA e AA.

Para chegarmos no objetivo principal do trabalho, que é a análise fenomenológica da produção de glúinos (capítulos 5 e 6), faremos no capítulo 1 uma revisão da teoria quântica de campos, principalmente dos aspectos das teorias da Eletrodinâmica Quântica (QED) e da Cromodinâmica Quântica (QCD). No final do capítulo 1, como motivação à SUSY, mostraremos como ocorre a unificação da constante de acoplamento em SUSY. No capítulo 2, iremos introduzir conceitos básicos de teorias supersimétricas como a definição de superespaço e supercampos. Encontraremos também a forma mais geral de uma lagrangeana invariante sob transformações supersimétricas. A partir da definição de supercampos e da lagrangeana de SUSY, no capítulo 3 demonstraremos a construção da extensão supersimétrica da QED (super QED ou SQED) e da QCD (super QCD ou SQCD). Também mostraremos como os superparceiros selétron (superparceiro do elétron), e fotino (do fóton) são introduzidos à SQED e os superparceiros squark (quark) e glúinos (glúon) são introduzidos à SQCD. Finalmente, mostraremos as lagrangeanas das teorias. Com estas lagrangeanas, iremos obter as regras de Feynman (em mais baixa ordem) para os principais vértices resultantes destas teorias.

No capítulo 4, definiremos um conjunto de regras de Feynman para tratar de partículas do tipo Dirac e Majorana de maneira análoga. Com este conjunto de regras e termos de vértice definidos no capítulo 3, realizaremos no capítulo 5, no contexto da SQED, o cálculo completo das amplitudes de probabilidade para criação de fotinos em processos $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$ com troca de selétrons. Historicamente a produção de fotinos no processo $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$ foi um dos primeiros estudos fenomenológicos realizados sobre partículas supersimétricas [38]. Em alguns cenários do modelo mSUGRA (modelo de quebra de SUSY) [39–42] a LSP pode ser o fotino leve [43–45], com aceitável abundância cosmológica [46]. Definindo a

massa do fotinos como sendo a dos neutralinos mais leves, de acordo com [43–45], nós analisaremos a produção de fotinos em colisões e^-e^+ para o International Linear Collider (ILC). Introduziremos também no capítulo 5 o cálculo das amplitudes de probabilidade para produção de gluínos em colisões pp no LHC, considerando os subprocessos básicos $q\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$, $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ e $qg \rightarrow \tilde{q}\tilde{g}$. Comparamos os cálculos com aqueles fornecidos pelo programa FeynArts [47], com o código em MSSM [48]. Os resultados das seções de choque diferencial dos subprocessos da produção de gluínos foram usados em concordância com os resultados apresentados em [21]. Na seção 5.2.2, mostraremos resultados numéricos (obtidos de [49]) para o comportamento da seção de choque diferencial usando os diferentes valores de massa preditos por modelos de quebra de SUSY para os gluínos e squarks.

No capítulo 6, analisaremos a influência de efeitos nucleares na produção de gluínos no LHC. Demonstramos que dependendo da magnitude dos efeitos nucleares, a produção de gluínos pode ser enaltecida ou suprimida comparada com a produção em colisões próton-próton. Os resultados obtidos no capítulo 6 são inéditos e estão submetidos para publicação [50].

Capítulo 1

Teoria de Campos de Gauge

O Modelo Padrão (SM) [1–5] para física de partículas é formado pelo conjunto de partículas elementares e forças fundamentais (excluindo a gravitacional). Pode-se dizer que o Modelo Padrão é construído baseado em três pilares: teoria quântica de campos, simetrias de gauge e quebra espontânea de simetria.

A teoria quântica de campos é a aplicação da mecânica quântica para sistemas de campos dinâmicos relativísticos. Através desta abordagem, temos a possibilidade de partir de uma determinada lagrangeana, derivar as regras de Feynman correspondentes e calcular a seção de choque para diferentes processos. As simetrias de gauge são princípios fundamentais do Modelo Padrão que nos guiam a escrever a lagrangeana que caracteriza o modelo, pois são elas que ditam a forma das interações. Finalmente, o mecanismo de quebra espontânea de simetria é responsável por introduzir massa para as diferentes partículas.

O grupo de simetria de gauge no qual é baseado o Modelo Padrão é $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, onde os índices subscritos C, L, Y se referem respectivamente a cor, quiralidade de mão esquerda e hipercarga fraca. Esta estrutura do modelo é dividida em duas partes que são a Teoria Eletrofraca e a Cromodinâmica Quântica (QCD). A Teoria Eletrofraca é descrita pelo grupo de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ e unifica (parcialmente¹) as forças fracas e eletromagnéticas. A Cromodinâmica Quântica (grupo $SU(3)_C$) é a teoria que descreve as interações fortes.

A lagrangeana do Modelo Padrão \mathcal{L}_{SM} reúne as interações forte e eletrofraca, e contém como graus de liberdade fundamentais os campos dos quarks e léptons de spin 1/2, dos bósons de gauge de spin 1 e o campo do bóson de Higgs de spin zero. O bóson de Higgs é considerado como responsável pela geração de massa dos férmions no Modelo Padrão [51–53]. Ele não foi encontrado experimentalmente, e sua descoberta é o principal objetivo do Large Hadron Collider (LHC).

Neste capítulo não faremos um estudo detalhado sobre a construção do Modelo Padrão, e aspectos como o mecanismo de quebra de simetria. Para um estudo mais completo sobre o assunto ver [54–56]. Nosso objetivo aqui é fazer uma breve revisão de conceitos básicos dentro da teoria quântica de campos, e descrever duas teorias de gauge, fundamentais na construção do SM, que são a Eletrodinâmica Quântica (QED) e Cromodinâmica Quântica (QCD).

Neste trabalho, os índices de Lorentz são representados por letras latinas (m, n, \dots).

¹ Não houve uma verdadeira unificação porque ainda existem duas constantes de acoplamento, uma para o eletromagnetismo e outra para interação fraca, em vez de uma como esperamos de uma teoria unificadora.

1.1 Equações de Campos Livres e Quantização

Em física de partículas elementares estamos interessados em estudar processos em escalas muito pequenas (mecânica quântica) e com altas energias (relatividade). A primeira equação de onda para partículas relativísticas foi escrita em 1926 por Klein e Gordon, para descrever uma única partícula de spin 0

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \phi(x) = 0 \quad (1.1)$$

onde $\square = \partial_m \partial^m$ é o operador D'Alembertiano, $\phi(x)$ é uma função de $x = (\vec{x}, t)$ e m é a massa da partícula. A interpretação da equação (1.1) como uma equação de onda para uma única partícula apresenta alguns problemas. Estes estão relacionados à possibilidade da existência de estados com energia negativa e também ao fato de que para $E < 0$ a densidade de probabilidade ρ seria negativa, o que é incompatível com a interpretação estatística de ψ , a qual diz que $\rho = |\psi|^2$ é a probabilidade de encontrar uma partícula no ponto (x, y, z) .

Em 1927, na tentativa de resolver esses problemas, Dirac apresentou uma equação de onda relativística linear em $\partial/\partial t$ e ∇ para partículas de spin 1/2

$$(i\hbar\gamma^m \partial_m - mc) \psi(x) = 0 \quad (1.2)$$

Com esta equação, Dirac solucionou o problema das densidades de probabilidade negativa [57], e em 1930 postulou a existência de anti-partículas (partículas com cargas opostas) para explicar o aparecimento das soluções com energia negativa.

Embora a equação de onda de Dirac para uma única partícula relativística não apresente os problemas encontrados com a equação de Klein-Gordon, não podemos assumir que qualquer processo relativístico possa ser explicado em termos de uma única partícula. Isto porque quanto mais energia é colocada no sistema mais graus de liberdade podem ser excitados. Por exemplo, para qualquer processo de espalhamento em QED, durante o espalhamento pode haver criação de pares $e^- e^+$, que não são partículas iniciais do processo. Logo, os sistemas físicos relativísticos devem ser descritos pela teoria quântica de campos (sistemas contínuos com infinitos graus de liberdade).

Nesta abordagem, as equações de Klein-Gordon e de Dirac não são equações de ondas relativísticas, mas sim equações de campos para campos escalares e espinoriais. Estes campos devem ser quantizados e seus mais baixos estados de excitação comportam-se como partículas massivas com spin 0 (para campo escalar) e spin 1/2 (para campo espinorial).

Para começarmos nossa discussão sobre equações de campos é importante salientar que os sistemas dinâmicos devem ser descritos por equações de campos locais, ou seja, por equações que relacionem as funções de campos $\psi_\alpha(\vec{x}, t)$ (α : índice discreto e \vec{x} : índice contínuo) e suas variações ponto a ponto. Também devemos requerer a macrocausalidade, a qual significa que se conhecermos as funções de campos (e suas derivadas) em determinado instante nós podemos determinar o campo em todos os pontos em qualquer instante posterior.

Além destas imposições para a determinação das equações de campos, outras restrições sobre os campos são impostas por considerações de simetria. Uma simetria é um grupo de

transformações que levam as equações de campos a serem invariantes². A simetria fundamental que sempre deve ser assumida é a invariância de Poincaré (ver apêndice A).

Neste seção vamos estudar algumas características dos campos para partícula escalar real, para partícula escalar complexa (campo de Klein Gordon complexo que descreve um campo com carga elétrica), para o fóton (campo eletromagnético), campo espinorial de Dirac e de Majorana.

Neste estudo, trabalharemos em unidades naturais, onde $c = 1$ e $\hbar = 1$.

1.1.1 Campo Escalar de Klein-Gordon

Campo Escalar Real

Campos escalares são descritos por uma função de campo $\phi(x)$ com uma única componente. A equação de Klein-Gordon (1.1) é a equação de movimento para o campo $\phi(x)$. Ela é uma equação invariante sobre transformações de Lorentz, e sua derivação segue da densidade lagrangeana³

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_m \phi) (\partial^m \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (1.3)$$

onde ϕ e seu conjugado $\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$ satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] &= i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \\ [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] &= [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

O conjunto completo de soluções da equação de Klein-Gordon é

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \quad (1.5)$$

onde

$$\phi^+ = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} a(\vec{k}) e^{-ikx} \quad (\text{soluções de frequência positiva}) \quad (1.6)$$

$$\phi^- = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} a^\dagger(\vec{k}) e^{ikx} \quad (\text{soluções de frequência negativa}) \quad (1.7)$$

onde $\omega_{\vec{k}}$ é a frequência de um oscilador linear

$$\omega_{\vec{k}} = \left(m^2 + \vec{k}^2 \right)^{1/2} = k^0; \quad (1.8)$$

k é o quadri-vetor da onda de uma partícula de massa m e momento \vec{k} .

² Por exemplo, se ϕ é um campo ou uma coleção de campos e \mathcal{D} é algum operador diferencial, então a afirmação “ $\mathcal{D}\phi = 0$ é relativisticamente invariante” significa que se $\phi(x)$ satisfaz esta equação, e nós realizarmos uma rotação ou translação para um sistema de referência diferente, então o campo transformado, no novo sistema de referência, satisfaz a mesma equação.

³ A equação de campos é automaticamente invariante de Lorentz se ela segue de uma lagrangeana que é um escalar de Lorentz. Isto é consequência direta do princípio de mínima ação. Para mais detalhes ver [59].

Substituindo (1.6) e (1.7) em (1.4), obtemos as relações de comutação entre os operadores a^\dagger e a .

$$\begin{aligned} \left[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}') \right] &= \delta_{k,k'}, \\ \left[a(\vec{k}), a(\vec{k}') \right] &= \left[a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}') \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

As relações de comutação acima (1.9) correspondem à estatística de Bose-Einstein para partículas de spin 0. Os operadores a^\dagger e a são, respectivamente, operadores de criação e aniquilação de partículas de massa m e momento \vec{k} .

O propagador do campo escalar $\Delta_F(x-x')$ é definido como sendo o valor esperado no vácuo do produto ordenado no tempo

$$T\phi(x)\phi(x') = \theta(t-t')\phi(x)\phi(x') + \theta(t'-t)\phi(x')\phi(x), \quad (1.10)$$

onde

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Logo,

$$\Delta_F(x-x') \equiv \langle 0|T\{\phi(x)\phi(x')\}|0\rangle \quad (1.12)$$

Vamos visualizar o significado de Δ_F , usando a equação acima (1.12). Se $t > t'$, este valor esperado no vácuo se torna $\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle$. Nós podemos pensar que esta é a expressão para uma partícula escalar criada em x' , que viaja para x , e é aniquilada em x . A expressão correspondente para $t' > t$, $\langle 0|\phi(x')\phi(x)|0\rangle$, admite uma interpretação similar como uma partícula escalar criada em x' , e se propaga para x onde é absorvida.

Frequentemente, nós precisamos da representação do propagador no espaço de momento. Para isso, usamos da definição para Δ_F como

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k e^{-ikx}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (1.13)$$

Logo, a partir da transformada de Fourier de Δ_F obtemos

$$\Delta_F(k) = \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (1.14)$$

Campo Escalar Complexo

O campos escalar complexo $\phi(x)$ descreve partículas carregadas [58,59]. Ele é muito parecido com o campo escalar real. Vamos mostrar aqui suas principais características.

A lagrangeana para o campo escalar complexo é

$$\mathcal{L} = (\partial_m \phi^\dagger) (\partial^m \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \quad (1.15)$$

O campo ϕ e seu adjunto ϕ^\dagger são tratados como campos independentes. Da lagrangeana, seguem as equações de Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0, \quad (\square + m^2) \phi^\dagger(x) = 0. \quad (1.16)$$

Os conjugados dos campos para ϕ e ϕ^\dagger são

$$\pi(x) = \dot{\phi}^\dagger(x), \quad \pi^\dagger(x) = \dot{\phi}(x), \quad (1.17)$$

e as relações de comutação entre ϕ e π são

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = [\phi^\dagger(\vec{x}, t), \pi^\dagger(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (1.18)$$

com todas as outras relações nulas.

Analogamente a (1.6) e (1.7), nós escrevemos a expansão de Fourier dos campos como

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} \left[a(\vec{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right] \quad (1.19)$$

e

$$\phi^\dagger(x) = \phi^{\dagger+}(x) + \phi^{\dagger-}(x) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{2V\omega_{\vec{k}}} \right)^{1/2} \left[b(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx} \right] \quad (1.20)$$

As relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação são

$$\left[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}') \right] = \left[b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}') \right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (1.21)$$

e os comutadores de todos os outros pares de operadores são nulos.

O propagador do campo escalar complexo no espaço de momento é o mesmo do campo escalar real Eq. (1.14).

1.1.2 Campo Eletromagnético

A primeira quantização do campo eletromagnético foi realizada em 1926 por Born, Heisenberg e Jordan. Eles representaram a radiação do campo eletromagnético como um infinito conjunto de osciladores harmônicos e quantizaram estes osciladores. Dos resultados, eles fundamentaram que as excitações dos osciladores se comportavam como uma partícula livre sem massa (os fótons). O número de fótons não era fixo, ou seja, estes eram criados e destruídos por partículas carregadas. A idéia física dos fótons como o quanta do campo eletromagnético foi introduzida por Einstein vinte anos antes deste artigo, quando da análise estatística da lei da radiação de Planck e das energias do efeito fotoelétrico ele concluiu que não era meramente o mecanismo atômico de emissão e absorção da radiação que era quantizado, mas a própria radiação eletromagnética consistia de fótons.

A densidade lagrangeana para o campo eletromagnético pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{mn}(x)F^{mn}(x) - j^m(x)A_m(x), \quad (1.22)$$

onde o tensor eletromagnético é dado por $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$. A lagrangeana acima foi escrita com a condição de gauge $\partial_m A^m = 0$. Desta lagrangeana podemos obter as equações de Maxwell não homogêneas

$$\square A^m = j^m \quad (1.23)$$

Para $j^m = 0$, podemos notar que a equação acima se reduz a equação de Klein-Gordon para um campo de massa nula, neste caso o fóton.

Uma forma mais geral da equação de Klein-Gordon vetorial para um campo vetorial qualquer $v_m(x)$ com massa m pode ser escrita como

$$(\square + m^2) v_m(x) = 0, \quad (1.24)$$

onde $m = 0, 1, 2, 3$.

O campo eletromagnético $A_m(\vec{x}, t)$ e seu conjugado $\pi_m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_m}$ satisfazem as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} [\pi_m(\vec{x}', t), A_n(\vec{x}, t)] &= ig_{mn} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\ [A_m(\vec{x}, t), A_n(\vec{x}', t)] &= [\pi_m(\vec{x}, t), \pi_n(\vec{x}', t)] = 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

A expansão de Fourier para campo vetorial $A_m(x)$ em termos dos operadores de criação $a^\dagger(k)$ do fóton e aniquilação $a(k)$ pode ser escrita como

$$A_m(x) \sim \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=0}^3 \left[a^{(\lambda)}(\vec{k}) \varepsilon_m^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) \varepsilon_m^{(\lambda)*}(\vec{k}) e^{ik \cdot x} \right], \quad (1.26)$$

onde $\varepsilon_m^{(\lambda)}$ são os quadrivetores de polarização [60, 61].

As relações de comutação entre os operadores a^\dagger e a , são análogas as do campo escalar (1.9).

Concluindo, o campo eletromagnético é constituído por fótons, que são bóson de spin 1 (para argumentação sobre spin do fóton ver por exemplo [58]).

Para obtermos o propagador do fóton, uma escolha de gauge é requerida [54]. Devemos então adicionar à lagrangeana um termo de “gauge fixo” $(-1/2\xi)(\partial_m A^m)^2$, ou seja,

$$\mathcal{L}_{\text{fóton}} = -\frac{1}{4} F_{mn}(x) F^{mn}(x) - \left(\frac{1}{2\xi} \right) (\partial_m A^m)^2 \quad (1.27)$$

Desta lagrangeana obtemos a equação de movimento

$$\square A^n - (1 - \xi^{-1}) \partial^n (\partial_m A^m) = j^n \quad (1.28)$$

O propagador do fóton fica definido como [54, 60].

$$\frac{-i [g^{mn} + (\xi - 1) q^m q^n / (q^2 + i\varepsilon)]}{q^2 + i\varepsilon} \quad (1.29)$$

Temos então o gauge de Feynman (ou Lorentz) para $\xi = 1$ e o gauge de Landau para $\xi = 0$.

1.1.3 Campo Espinorial de Dirac

O campo espinorial de Dirac é denotado por ψ_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), sendo definido pela propriedade de transformação de Lorentz

$$\psi'(x') = L\psi(x), \quad (1.30)$$

onde L é uma matriz 4×4 determinada como a solução de

$$L^{-1}\gamma^m L = \omega_n^m \gamma^n \quad (\omega_n^m : \text{coeficiente de transformação de Lorentz}) \quad (1.31)$$

Um férmion livre é descrito pela lagrangeana

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i\bar{\psi}_D \gamma^m \partial_m \psi_D - m\bar{\psi}_D \psi_D \quad (1.32)$$

A equação de campo correspondente é a equação de Dirac

$$(i\gamma^m \partial_m - m)\psi(x) = 0, \quad m = 0, 1, 2, 3, \quad (1.33)$$

onde γ^m são matrizes 4×4 que obedecem as relações de comutação

$$[\gamma^m, \gamma^n] = 2g^{mn}. \quad (1.34)$$

A equação de Dirac possui 4 soluções independentes. Elas podem ser escritas como

$$u_r(\vec{p}) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}}, \quad v_r(\vec{p}) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}}, \quad r = 1, 2 \quad (1.35)$$

onde $u_r(\vec{p})$ e $v_r(\vec{p})$ são espinores que satisfazem as equações

$$(\not{p} - m)u_r(\vec{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v_r(\vec{p}) = 0, \quad r = 1, 2 \quad (1.36)$$

onde

$$\not{p} = \gamma^m p_m \quad (1.37)$$

Podemos expandir o campo de Dirac em termos do conjunto completo de estados de onda plana:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &= \psi^+(x) + \psi^-(x) \\ &= \sum_{rp} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^2 [c_r(\vec{p})u_r(\vec{p})e^{-ipx} + d_r^\dagger(\vec{p})v_r(\vec{p})e^{ipx}], \end{aligned} \quad (1.38)$$

e o campo conjugado $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\vec{x}, t) &= \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) \\ &= \sum_{rp} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^2 [d_r(\vec{p})\bar{v}_r(\vec{p})e^{-ipx} + c_r^\dagger(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p})e^{ipx}], \end{aligned} \quad (1.39)$$

onde $\bar{u}_r = u_r^\dagger \gamma^0$, \vec{p} é o momento, r classifica o spin (ou helicidade) e $E_{\vec{p}} = (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2}$.

A equação de Dirac descreve partículas de spin $\frac{1}{2}$, tal como os elétrons, os quais obedecem estatísticas de Fermi-Dirac. Devemos, então, impor as seguintes relações de anti-comutação aos coeficientes da expansão

$$\{c_r(\vec{p}), c_s^\dagger(\vec{p}')\} = \{d_r(\vec{p}), d_s^\dagger(\vec{p}')\} = \delta(\vec{p} - \vec{p}')\delta_{rs} \quad (1.40)$$

e todas os outros anticomutadores são nulos

$$\{c_r(\vec{p}), c_s(\vec{p}')\} = \{c_r^\dagger(\vec{p}), c_s^\dagger(\vec{p}')\} = \dots = 0 \quad (1.41)$$

$c_r(\vec{p})$ é interpretado como sendo um operador que destroi uma partícula de quadri-momento p e spin s e $d_s^\dagger(\vec{p})$ cria a partícula correspondente.

De acordo com (1.38) e (1.39) e com as relações de anti-comutação definidas acima, temos que as relações de anti-comutação dos campo ψ e $\bar{\psi}$ são

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = 0 \quad (1.42)$$

e

$$\{\psi_\alpha^\pm(x), \bar{\psi}_\beta^\mp(x')\} = (i \not{p} + m)_{\alpha\beta} \Delta^\pm(x - x'), \quad (1.43)$$

onde Δ^\pm , vem da definição

$$\Delta_F(x) = \pm \Delta^\pm(x), \quad \text{se } t \geq 0, \quad (1.44)$$

ver Eq. (1.12).

O propagador do campo de Dirac é definido pelo valor esperado no vácuo do produto ordenado no tempo

$$\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\}|0\rangle = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(x'), & \text{se } t > t' \\ -\bar{\psi}(x')\psi(x), & \text{se } t' > t \end{cases} \quad (1.45)$$

Logo, podemos escrever

$$\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(x')\}|0\rangle = S_F(x - x'), \quad (1.46)$$

onde S_F é definida por

$$S_F(x) = (i \not{p} + m) \Delta^\pm(x), \quad (1.47)$$

ou na forma integral

$$S_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.48)$$

Fazendo a transformada de Fourier, temos o propagador no espaço de momento, como mostra o diagrama abaixo

$$\begin{array}{c} x' \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ x \end{array} \quad \rightarrow \quad S_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.49)$$

Vamos interpretar $S_F(x)$. Para $t' < t$, a contribuição para o propagador fermiônico (1.46) toma a forma $\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(x')|0\rangle$ que é interpretado como a criação de um elétron em x' , que se propaga para x e é aniquilado em x . Já para $t' > t$ temos a contribuição $\langle 0|\bar{\psi}(x')\psi(x)|0\rangle$ que é interpretado como a emissão de um pósitron em x , e sua propagação para x' onde é aniquilado.

1.1.4 Campo Espinorial de Majorana

Como mencionamos anteriormente, a equação de Dirac foi a primeira que levou ao conceito de partículas e anti-partículas, sendo o pósitron (elétron de carga positiva) o primeiro candidato à anti-partícula. Os pósitrons são claramente distintos dos elétrons pelas suas propriedades eletromagnéticas, no entanto não é óbvio que partículas neutras sejam diferentes de suas anti-partículas. O pión neutro, por exemplo, foi encontrado como sendo idêntico à sua anti-partícula.

O conceito de partículas que são idênticas as suas anti-partículas foi introduzido formalmente por Majorana em 1937 [62]. Assim, nos referimos a tais partículas como partículas de Majorana. As partículas que são distintas das suas anti-partículas são chamadas de partículas de Dirac.

Devido a esta característica do campo de Majorana, ψ_M deve satisfazer:

$$\psi_M = \psi_M^c \equiv C\bar{\psi}_M^T, \quad (1.50)$$

onde ψ^c é o conjugado de carga do campo ψ (ver apêndice B) e a matriz conjugação de carga C satisfaz as seguintes propriedades

$$C^\dagger = C^{-1}, \quad (1.51)$$

$$C^T = -C, \quad (1.52)$$

e

$$C^{-1}\Gamma_i C = \eta_i \Gamma_i^T, \quad \text{para } \Gamma_i = 1, i\gamma_5, \gamma_m \gamma_5, \gamma_m, \sigma_{mn} = \frac{1}{2}i[\gamma_m, \gamma_n], \quad (1.53)$$

onde $\eta_i = +1$ para as seis primeiras Γ_i e $\eta_i = -1$ para as dez últimas Γ_i .

Os espiniores u e v são relacionados via

$$u(k, \lambda) = C\bar{v}^T(k, \lambda), \quad v(k, \lambda) = C\bar{u}^T(k, \lambda) \quad (1.54)$$

e o conjugado de carga do campo de Dirac (1.38) pode ser escrito como

$$\psi_c(\vec{x}, t) = \sum_{r\vec{p}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{1/2} [d_r(\vec{p})u_r(\vec{p})e^{-ipx} + c_r^\dagger(\vec{p})v_r(\vec{p})e^{ipx}] \quad (1.55)$$

Como para o campo de Majorana as partículas e anti-partículas são indistinguíveis, temos que $d_r^\dagger = c_r^\dagger$ (e $d_r = c_r$). Podemos então, usando (1.38), escrever a expansão do campo de Majorana em ondas planas como

$$\psi_M(\vec{x}, t) = \sum_{r\vec{p}} \left(\frac{m}{VE_{\vec{p}}} \right)^{1/2} [c_r(\vec{p})u_r(\vec{p})e^{-ipx} + c_r^\dagger(\vec{p})v_r(\vec{p})e^{ipx}], \quad (1.56)$$

que satisfaz (1.50). Os operadores c e c^\dagger satisfazem relações usuais de anti-comutação (1.40) e (1.41).

Como vimos anteriormente o propagador de um campo escalar real $\phi(x)$ é dado por $\langle 0|T\{\phi(x)\phi(x')\}|0\rangle$, e para um campo de Dirac $\psi(x)$ $\langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\}|0\rangle$. Pode-se dizer

que um campo de Majorana comporta-se como um campo de Dirac, por ser um campo espinorial, e também como um campo escalar, porque neste caso também não há distinção entre partículas e anti-partículas. A consequência disto é que há três expressões para o propagador: em adição a do propagador tipo Dirac $\langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\}|0\rangle$, há também $\langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')\}|0\rangle$ e $\langle 0|T\{\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\}|0\rangle$.

Podemos escrever as duas últimas relações em função da primeira. Para isso vamos reescrever (1.50) como

$$\begin{aligned}\psi_M &= C(\psi^\dagger\gamma^0)^T \\ &= C\gamma^0\psi_M^{\dagger T}\end{aligned}\quad (1.57)$$

Em termos dos componentes

$$\begin{aligned}\psi_{M\delta} &= C_{\delta\alpha}\gamma_{\alpha\beta}^0\psi_{M\beta}^\dagger \\ &= \psi_{M\beta}^\dagger\gamma_{\beta\alpha}^0C_{\alpha\delta}^T \\ &= \bar{\psi}_{M\alpha}C_{\alpha\delta}^T\end{aligned}\quad (1.58)$$

Logo, podemos escrever

$$\langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')\}|0\rangle = \langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\delta(x')\}|0\rangle C_{\delta\beta}^T = S_{\alpha\delta}(x-x')C_{\delta\beta}^T, \quad (1.59)$$

onde usamos o resultado (1.46).

Podemos interpretar este resultado como: para $t' < t$ a contribuição para o propagador $\langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')\}|0\rangle$ é $\langle 0|\psi_\alpha(x)\psi_\beta(x')|0\rangle$, há criação de um pósitron (ou elétron) em x' , que se propaga para x e é aniquilado em x . Podemos representar diagramaticamente como

$$\begin{array}{c} x' \qquad \qquad x \\ \bullet \longleftarrow \longrightarrow \bullet \end{array} = \frac{-i(\not{k} + m)C}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.60)$$

onde usamos (1.52).

Analogamente, podemos escrever

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_M C^T &= \psi_M^T \\ \bar{\psi}_M C^{-1} &= \psi_M^T \\ \bar{\psi}_M &= \psi_M^T C,\end{aligned}\quad (1.61)$$

escrevendo em termos das componentes

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_{M\delta} &= \psi_{M\delta}C_{\delta\gamma} \\ &= C_{\gamma\delta}^T\psi_{M\delta} = C_{\gamma\delta}^{-1}\psi_{M\delta}\end{aligned}\quad (1.62)$$

Logo, podemos escrever

$$\langle 0|T\{\bar{\psi}_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\}|0\rangle = C_{\alpha\delta}^{-1}\langle 0|T\{\psi_\delta(x)\bar{\psi}_\beta(x')\}|0\rangle = C_{\alpha\delta}^{-1}S_{\alpha\delta}(x-x') \quad (1.63)$$

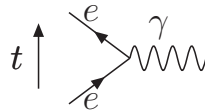
De forma diagramática

$$\begin{array}{c} x' \qquad \qquad x \\ \bullet \longrightarrow \longleftarrow \bullet \end{array} = \frac{iC^{-1}(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.64)$$

Podemos perceber que os dois últimos propagadores não conservam o número fermiônico (carga).

1.2 Eletrodinâmica Quântica (QED)

A eletrodinâmica quântica é a teoria que descreve a interação eletromagnética dos quarks e léptons, sendo o fóton o quantum, ou mediador, do campo eletromagnético. Ela é considerada a teoria de campos de gauge mais simples e mais familiar, e foi primeiramente usada para descrever a interação entre elétrons e fótons. Esta interação é a mais fundamental da teoria e é representada diagramaticamente por



Nesta seção vamos estudar algumas das principais características da QED. Mais detalhes sobre o assunto podem ser encontrados, por exemplo, em [61].

1.2.1 Lagrangeana da QED

Como já mencionamos, a partir de princípios de simetria de gauge nós podemos definir qual a forma das interações e determinar a dinâmica de uma teoria.

Usando este princípio vamos analisar agora a eletrodinâmica para férmions de Dirac. Como vimos na seção anterior, a lagrangeana para um férmion livre de Dirac é

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(x)\gamma^m\partial_m\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (1.65)$$

É trivial mostrar que a lagrangeana acima é invariante sobre transformação de fase global

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x), \quad (1.66)$$

onde α não depende do espaço-tempo x .

A família de transformações de fase $U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}$, onde um único parâmetro α pode ser contínuo sobre números reais, forma um grupo abeliano unitário conhecido como o grupo $U(1)$. O grupo é abeliano pelo fato de possuir propriedade comutativa, ou seja, $U(\alpha_1)U(\alpha_2) = U(\alpha_2)U(\alpha_1)$.

Estamos interessados aqui em analisar a Eq. (1.65) sob uma transformação de fase local, onde $\alpha(x)$ agora depende do espaço-tempo x , ou seja,

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) \quad (1.67)$$

Sobre esta transformação a derivada parcial $\partial_m\psi(x)$ da lagrangeana se torna

$$\partial_m\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} [\partial_m\psi(x) + i(\partial_m\alpha(x))\psi(x)], \quad (1.68)$$

Logo, sob a transformação dada pela Eq. (1.67) a lagrangeana da Eq. (1.65) transforma-se em

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}\gamma^m(\partial_m + i\partial_m\alpha(x))\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (1.69)$$

Podemos perceber que o termo $\partial_m \alpha(x)$ quebra a invariância, portanto a lagrangeana para um férmion livre de Dirac não é invariante sob transformação de gauge local (1.67). Para impor esta invariância, vamos introduzir o campo eletromagnético $A_m(x)$, substituindo o gradiente ∂_m pela derivada covariante de gauge

$$\mathcal{D}_m = \partial_m - ieA_m, \quad (1.70)$$

onde e é a carga em unidades naturais da partícula descrita por ψ e o campo A_m se transforma como

$$A_m \rightarrow A_m + \frac{1}{e} \partial_m \alpha, \quad (1.71)$$

de maneira que o termo indesejado da equação (1.69) desapareça.

Logo, podemos escrever a lagrangeana invariante como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^m \mathcal{D}_m \psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^m \partial_m - m) \psi + e\bar{\psi}\gamma^m \psi A_m \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^m \partial_m - m) \psi - j^m A_m, \end{aligned} \quad (1.72)$$

onde j^m é a densidade de corrente.

Como podemos notar, se nós requerermos que a densidade lagrangeana seja invariante sob transformações de gauge local, nós somos forçados a introduzir um campo vetorial A_m , conhecido como campo de gauge, o qual acopla-se ao campo de Dirac. O campo vetorial A_m descreve os fótons livres.

Para encontrarmos a lagrangeana completa para QED resta somente adicionar um termo de energia cinética para o campo vetorial A_m . A lagrangeana (1.22) que leva às equações de Maxwell é invariante sob a transformação de gauge local (1.67).

Logo, podemos escrever a Lagrangeana da QED como

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi} (i\gamma^m \partial_m - m) \psi + e\bar{\psi}\gamma^m \psi A_m - \frac{1}{4} F_{mn} F^{mn}, \quad (1.73)$$

onde $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$. O termo de massa do fóton teria a forma $\frac{1}{2} m^2 A^m A_m$, a qual violaria a invariância de gauge local pois

$$A^m A_m \rightarrow (A^m - \partial^m \alpha) (A_m - \partial_m \alpha) \neq A^m A_m \quad (1.74)$$

Assim, nós concluímos que a invariância de gauge local leva à existência de um fóton sem massa.

Um resumo das regras de Feynman para QED é mostrado na Fig. (1.1).

1.2.2 Constante de acoplamento variável da QED

Para processos em QED de ordem mais baixa, a constante de acoplamento é assumida como sendo constante e pequena. Para processos de ordens mais altas, outros diagramas de Feynman devem ser considerados, como por exemplo, para o propagador do fóton; considerando processos de segunda ordem, temos que levar em conta a correção de um loop como mostra a Fig. (1.2).

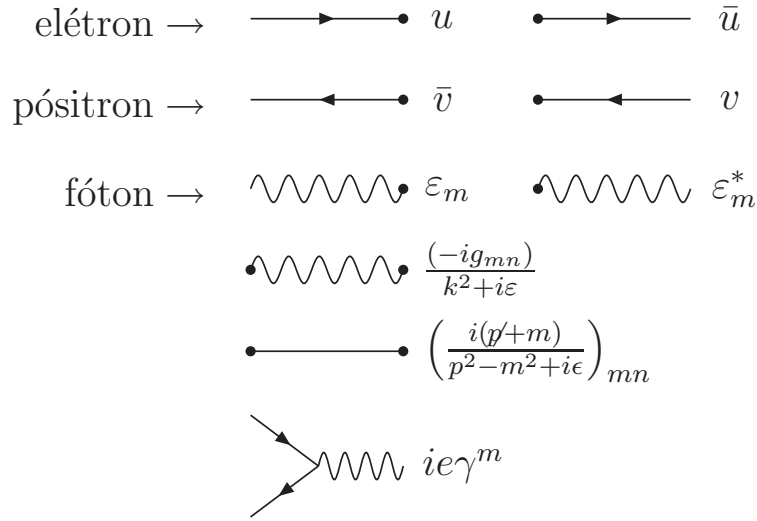


Fig. 1.1: Regras de Feynman da QED.

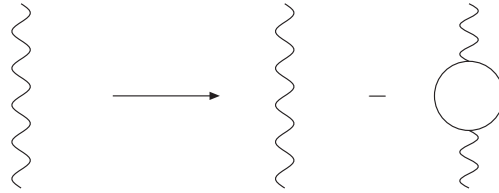


Fig. 1.2: Correção de segunda ordem para o fóton.

Ocorre que para o segundo diagrama a direita desta figura, os cálculos levam à integrais divergentes. Estas divergências podem ser eliminadas incorporando a este processo propriedades do elétron físico. Este processo é chamado de renormalização [58].

Com o processo de renormalização, a constante de acoplamento da QED é dada por [54]:

$$\alpha_R(q^2) = \alpha_R(m^2) \left[1 + \frac{\alpha_R(m^2)}{3\pi} \log \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) + \mathcal{O}(\alpha_R^2) \right] \quad (1.75)$$

De acordo com a equação (1.75) podemos perceber que a carga elétrica efetiva aumenta logaritmicamente com $-q^2$.

A carga elétrica efetiva também aumenta a pequenas distâncias. Isto ocorre devido à polarização do meio, como mostra a Fig. (1.3). Este efeito é conhecido como blindagem de carga.

Veremos na próxima seção que o comportamento da constante de acoplamento na QCD é diferente, resultando no que chamamos de liberdade assintótica dos quarks e glúons.

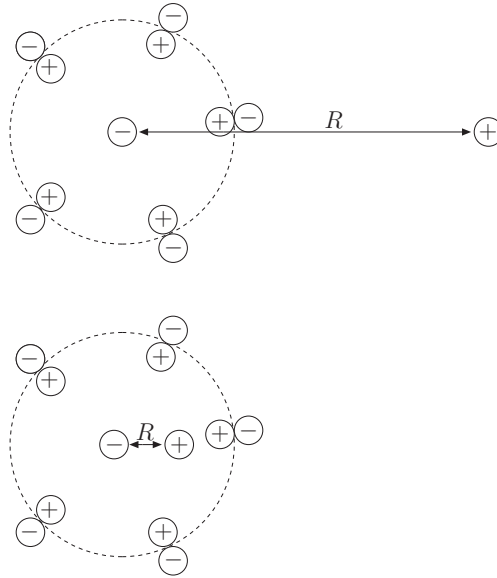


Fig. 1.3: Blindagem da carga do elétron.

1.3 Cromodinâmica Quântica (QCD)

A cromodinâmica quântica é a teoria das interações fortes entre quarks e glúons (mediadores da força forte entre quarks). Assim como a QED, esta é uma teoria de gauge e a forma das interações é ditada por princípios de simetria. Das propriedades físicas dos quarks, os quais diferenciam-se dos léptons por possuírem número quântico de cor (ou carga de cor), a construção da teoria das interações fortes é baseada no grupo simetria de gauge de cor local $SU(N)$, com $N = 3$ (número de cores) pois os quarks são tripletos de cor.

Vamos estudar aqui alguns aspectos importantes sobre a QCD. Um estudo mais completo pode ser encontrado, por exemplo, em [63].

1.3.1 Lagrangeana da QCD

Analogamente ao que fizemos na QED, a construção da QCD segue da imposição de que a lagrangeana para o campo de quarks livres seja invariante sobre transformação de gauge $SU(3)$. Este grupo é não-abeliano e a teoria de gauge baseada em um grupo não-abeliano é conhecida como teoria de gauge de Yang-Mills. Não faremos a demonstração detalhada da construção desta teoria (para mais detalhes, ver, por exemplo, Cap. 4 de [54]).

O campo de quark será denotado por $\psi_j(x)^i$, onde j é o índice de sabor e i é o índice de cor. Usa-se também “vermelho”, “azul” e “verde” (red, blue e green) para denotar as três diferentes cargas de cor. Logo, podemos escrever a Lagrangeana para o quark livre como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_j(x) (i\gamma^m \partial_m - m) \psi_k(x) \tag{1.76}$$

e o espinor para quarks triplete de cor

$$\psi = \begin{pmatrix} q_{red} \\ q_{blue} \\ q_{green} \end{pmatrix}. \quad (1.77)$$

A forma de transformação de fase local do campo do quark é

$$\psi(x) \rightarrow e^{i \sum_{a=1}^{N^2-1} (\alpha_a(x) T_a)} \psi(x) \quad (1.78)$$

onde T_a é um conjunto de matrizes 3×3 linearmente independentes (geradores do grupo) e α_a são os parâmetros do grupo. Como na QCD $N = 3$, temos que $a = 1, \dots, 8$. Uma escolha conveniente para T_a são as matrizes $\lambda_a/2$, onde λ_a são as matrizes de Gell-Mann [54], que possuem as seguintes propriedades

$$Tr(\lambda^a) = 0 \quad (1.79)$$

$$Tr(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab} \quad (1.80)$$

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc} \lambda^c, \quad (1.81)$$

onde f^{abc} são constantes reais, conhecidas como constantes de estrutura do grupo.

Com a imposição de que a lagrangeana (1.76) seja invariante sob (1.78), nós introduzimos à teoria o campo de gauge octeto de cor, A_m^a , conhecido como glúon. Analogamente ao campo do fóton na QED, podemos escrever para os glúons a seguinte lei de transformação

$$A_m^a \rightarrow A_m^a - \frac{1}{g} \partial_m \alpha_a \quad (1.82)$$

e uma derivada covariante

$$\mathcal{D}_m = \partial_m + igT_a A_m^a \quad (1.83)$$

Devido ao grupo de transformação ser não abeliano (geradores λ não comutam) a componente do tensor campo de força é dada por

$$F_{mn}^a = \partial_m A_n^a - \partial_n A_m^a + gf^{abc} A_m^b A_n^c \quad (1.84)$$

Logo, a lagrangeana da QCD é

$$\mathcal{L}_{invar} = \bar{\psi}_j(x) (i\gamma^m \mathcal{D}_m - m) \psi_k(x) - \frac{1}{4} F_{mn}^a F_a^{mn}, \quad (1.85)$$

O tensor de força do campo F_{mn}^a , ($l = a, \dots, 8$), tem uma nova propriedade devido ao termo extra em (1.84). Devido ao aparecimento deste termo (que se deve a necessidade de que a lagrangeana seja invariante sob transformação de gauge local), o termo de energia cinética da lagrangeana (1.85) não é mais puramente cinético como na QED, mas inclui interações entre bósons de gauge, como mostramos em forma de diagramas na Fig. (1.4).

Podemos ver que os termos da primeira linha e o primeiro termo da segunda linha na Fig. (1.4) são análogos aos da QED. Eles descrevem o propagador livre dos quarks e glúons e a interação quark-glúon. Os últimos dois termos na segunda linha representam a interação

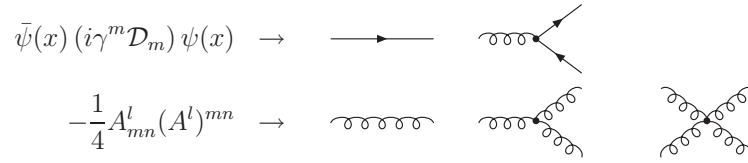


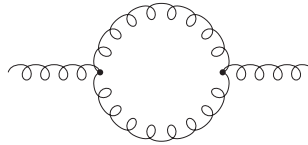
Fig. 1.4: Termos da lagrangeana da QCD

entre 3 e 4 glúons na QCD e refletem o fato dos glúons carregarem carga de cor. Esta nova característica surge devido ao grupo de gauge da QCD ser não-abeliano.

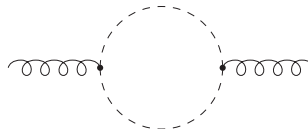
Para definir o propagador do glúon, nós temos que especificar um gauge. Devemos então adicionar à densidade lagrangeana um termo $\mathcal{L}_{f.g}$. Vamos defini-lo de forma análoga ao termos de gauge fixo para o fóton (1.27)

$$\mathcal{L}_{f.g} = -\frac{1}{2\lambda}(\partial^m A_m^a) \tag{1.86}$$

A escolha do gauge covariante introduz graus de liberdade não-físicos [54, 64], que contribuem para os laços fechados. Isto ocorre pois em QCD temos vértices adicionais (ver Fig. (1.4)), resultando em laços adicionais, como por exemplo o da figura abaixo



Para cancelar o aparecimento destas contribuições gluônicas não-físicas é introduzido um campo complexo χ^a chamado de fantasma de Faddeev-Popov. Como exemplo de um gráfico que contém um campo fantasma, mostramos na figura abaixo um gráfico que cancela a contribuição gluônica não-física mostrada na figura acima.



O termo de contribuição dos campos fantasmas de Faddeev-Popov é

$$\mathcal{L}_{f.p} = (\partial_m \chi^{a*}) (\partial^m \delta_c^q - g f^{abc} A_m^b) \chi^c \tag{1.87}$$

Logo, a lagrangeana efetiva da QCD pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{QCD}^{eff} = \mathcal{L}_{invar} + \mathcal{L}_{f.g} + \mathcal{L}_{F.P} \tag{1.88}$$

A regras de Feynman da QCD são apresentadas na figura (1.5).

$$\begin{aligned}
 \text{a, } \alpha \text{ } \overset{p}{\text{-----}} \text{ b, } \beta &= \delta^{ab} \left[-g^{\alpha\beta} + (1-\lambda) \frac{p^\alpha p^\beta}{p^2 + i\epsilon} \right] \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \\
 \text{a} \text{ } \overset{p}{\text{-----}} \text{ b} &= \delta^{ab} \frac{i}{p^2 + i\epsilon} \\
 \text{i, n} \text{ } \overset{p}{\text{-----}} \text{ k, m} &= \delta^{ik} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \Big|_{mn} \\
 \begin{array}{c} \text{b, } \beta \\ \text{q} \\ \text{a, } \alpha \text{ } \overset{p}{\text{-----}} \text{ c, } \gamma \end{array} &= -g_s f^{abc} \left[g^{\alpha\beta} (p-q)^\gamma + g^{\beta\gamma} (q-r)^\alpha + g^{\gamma\alpha} (r-p)^\beta \right] \\
 \begin{array}{c} \text{a, } \alpha \text{ } \overset{p}{\text{-----}} \text{ b, } \beta \\ \text{c, } \gamma \text{ } \overset{q}{\text{-----}} \text{ d, } \delta \end{array} &= -i g_s^2 f^{xac} f^{xbd} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \\
 &\quad -i g_s^2 f^{xad} f^{xbc} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}) \\
 &\quad -i g_s^2 f^{xab} f^{xcd} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \\
 \begin{array}{c} \text{a, } \alpha \\ \text{q} \\ \text{b} \text{ } \text{-----} \text{ c} \end{array} &= g_s f^{abc} q^\alpha \\
 \begin{array}{c} \text{a, } \alpha \\ \text{q} \\ \text{i, n} \text{ } \text{-----} \text{ k, m} \end{array} &= -i g_s t_{ki}^a \gamma_{mn}^\alpha
 \end{aligned}$$

Fig. 1.5: Regras de Feynman para a QCD em um gauge covariante. Os glúons são representados por espirais, férmions por linhas sólidas e fantasmas por linhas tracejadas. Nesta figura os índices de Lorentz estão representados por letras gregas.

1.3.2 Constante de acoplamento variável da QCD

Assim como na QED, a constante de acoplamento em processos na QCD de ordem mais baixa é assumida como sendo constante e pequena.

Em processos de segunda ordem na QCD, temos as correções mostradas na Fig. (1.6) para o propagador do glúon e do quark.

A constante de acoplamento é dada por [54]

$$\alpha_s(q^2) = \alpha_s(\mu^2) \left[1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi} \log \left(\frac{-q^2}{\mu^2} \right) (2n_f - 11N) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right] \quad (1.89)$$

onde n_f é o número de sabores de quarks e N é o número de cores.

De acordo com (1.89) a contribuição de um laço de férmions tem qualitativamente o mesmo efeito que na QED, ou seja, um termo de polarização do vácuo que tende a aumentar a constante de acoplamento efetiva a pequenas distâncias ou grandes valores de q^2 . A contribuição devido à interação de três glúons é de sinal oposta e, conseqüentemente, a

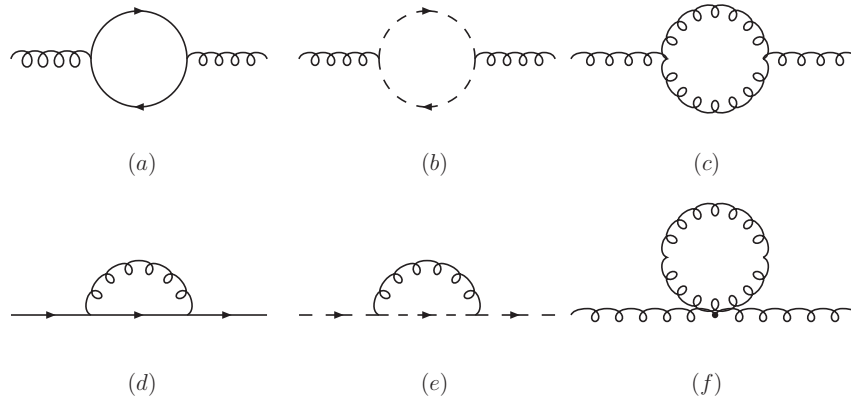


Fig. 1.6: Diagramas contribuindo para as auto-energias do glúon (a,b,c,f), quark (d) e campos fantasmas (e).

força de interação à pequenas distâncias tende a decrescer devido a propriedade de anti-blindagem da carga de cor. Para explicar este processo, vamos pensar em uma carga teste como sendo um quark de cor azul na origem do sistema (ver Fig. (1.7)) e em uma sonda (que medirá a carga) como sendo um glúon de cor vermelha anti-azul. Pode acontecer que na medida em que a sonda se aproxima da origem, o quark azul irradie um glúon virtual azul-antiverde, e assim flutue em um quark verde. Logo, em vez de ficar concentrado na origem, a carga ponto de cor se dispersará ao redor da núvem de glúons. Assim, somente a inspeção à grandes distâncias é capaz de medir o efeito completamente. A combinação do efeito de laços de quarks e laços de glúons resulta em uma competição entre blindagem e anti-blindagem. Logo, como $11N$ é maior que $2n_f$ a anti-blindagem tem contribuição dominante e a constante de acoplamento se torna menor em pequenas distâncias, ou em grandes valores de q^2 .

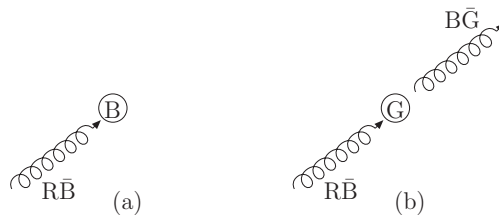


Fig. 1.7: Em (a) um glúon $R\bar{B}$ (sonda) incidente sobre um quark azul pode encontrar (b) uma carga verde dispersada como resultado das flutuações do vácuo.

Na QCD ($N = 3$) podemos escrever (1.89) como

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + (b_1/4\pi)\alpha_s(\mu^2) \log(-q^2/\mu^2)} \quad (\text{ordem mais baixa}), \quad (1.90)$$

onde definimos

$$b_1 = (33 - 2n_f)/3 \quad (\text{ordem mais baixa}) \quad (1.91)$$

Ou em termos de uma única variável

$$\alpha_s(q^2) = \frac{4\pi}{b_1 \log(-q^2/\Lambda^2)}, \quad (1.92)$$

onde $\Lambda = \mu e^{-2\pi/(b_1\alpha_s(\mu))}$ é um parâmetro da ordem de umas centenas de MeV. Para colisões com altas energias definimos a variável cinemática $Q^2 = -q^2$. Logo,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b_1 \log(Q^2/\Lambda^2)} \quad (1.93)$$

A dependência da constante de acoplamento com Q^2 pode ser vista na Fig. (1.8) para diferentes escolhas do parâmetro Λ , definidas de acordo com [65].

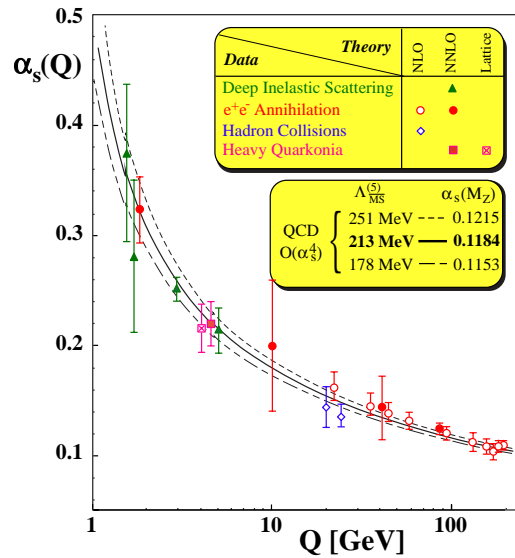


Fig. 1.8: Comparação entre dados para o acoplamento forte extraídos de vários processos (espalhamento profundamente inelástico (DIS), e^+e^- , colisões hadrônicas) e a evolução da constante de acoplamento $\alpha_s(-q^2 = Q^2)$ [65].

A Fig. (1.8) mostra que a constante de acoplamento decresce com o aumento da energia. Para grandes valores de energia Q , temos um regime em que $\alpha_s(Q^2) \ll 1$, implicando em um domínio no qual a teoria perturbativa da QCD é válida. Esta propriedade das teorias de gauge não-abelianas é conhecida como liberdade assintótica [66,67]. Podemos ver no gráfico também que para valores baixos de energia a constante de acoplamento cresce, o que impossibilita tratar os quarks e glúons como livres. Este regime é conhecido como confinamento, e o método da QCD perturbativa não pode mais ser aplicado.

Vamos escrever (1.92) de forma mais geral usando a definição da função $\beta(g)$ [68]

$$\beta(g) = -g \left[\frac{\alpha_s}{4\pi} b_1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 b_2 + \dots \right], \quad (1.94)$$

com b_1 para mais baixa ordem (LO), b_2 próxima ordem mais baixa (NLO), etc e $\alpha_s = g_s^2/4\pi$. Por exemplo, para QCD, b_1 é dado pela Eq. (1.91).

Logo,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{b_i \log(Q^2/\Lambda^2)}, \quad (1.95)$$

com

$$\beta_i = \frac{g_i^3}{16\pi^2} b_i \quad (1.96)$$

Em LO, para o grupo $SU(N)$ $\beta(g)$ [21] pode ser escrita como

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left[\frac{11}{3}N - \frac{1}{3}n_F - \frac{1}{6}n_H \right], \quad (1.97)$$

onde n_F é o número de espécies de férmions e n_H é o número de escalares complexos. Para o grupo $U(1)_Y$, temos [21]

$$\beta(g) = \frac{g^3}{16\pi^2} \left[\frac{2}{3} \sum_F \left(\frac{Y_F}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \sum_H \left(\frac{Y_H}{2} \right)^2 \right], \quad (1.98)$$

onde Y é a hipercarga, \sum_F é a soma sobre todos os férmions e \sum_H sobre todos os escalares.

Para o Modelo Padrão, em um laço, há 3 constantes de acoplamento g_s ($SU(3)_C$), g ($SU(2)_L$) e g' ($U(1)_Y$). Os coeficientes b são dados por

$$\begin{pmatrix} b_{g'} \\ b_g \\ b_{g_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -22/3 \\ -11 \end{pmatrix} + n_G \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + n_H \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.99)$$

onde n_G é o número de gerações (ou famílias) e n_H é o número de dubletos de Higgs ($n_H = 1$ no SM). Logo,

$$\begin{aligned} b_{g'} &= \frac{12}{3} + \frac{1}{10} = \frac{41}{6} \\ b_g &= -\frac{22}{3} + \frac{12}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{19}{6} \\ b_{g_s} &= -11 + \frac{12}{3} + 0 = -7 \end{aligned}$$

A evolução $1/\alpha(Q^2)$, para cada uma das constantes de acoplamento do Modelo Padrão (usando escalas de referência Λ definidas de acordo com [69]) é mostrada na Fig. (1.9), onde podemos perceber que na escala de grande unificação (10^{15} GeV) não há convergência das constantes de acoplamento.

1.4 Teoria de unificação das constantes de gauge

A filosofia da Grande Unificação é baseada na *hipótese* de que todas as interações conhecidas são as ramificações de uma única interação associada a um único grupo de gauge [70]. Vimos que, de acordo com as equações do grupo de renormalização, no Modelo Padrão não há uma unificação da constante de acoplamento.

Unification of the Coupling Constants in the SM and the minimal MSSM

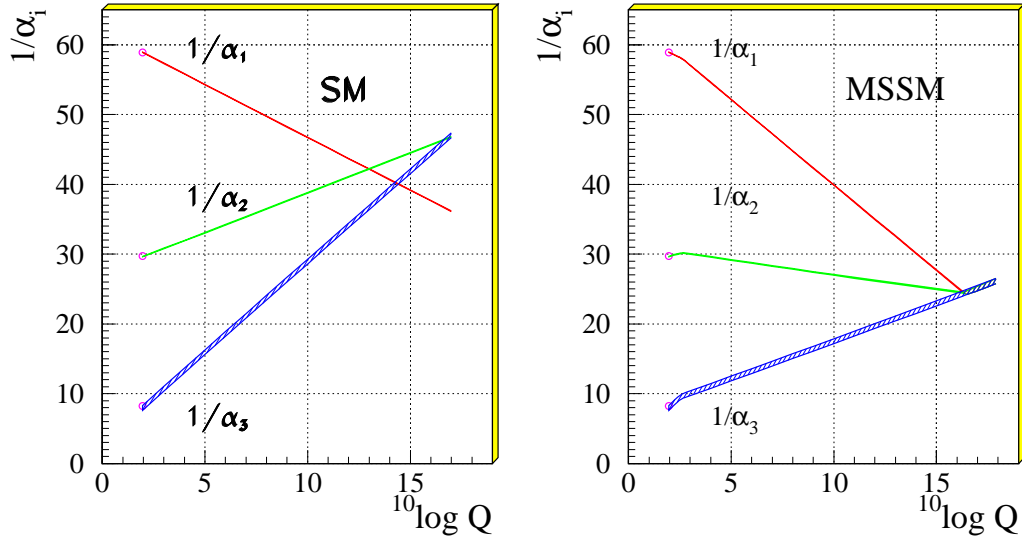


Fig. 1.9: *Evolução dos inversos das três constantes de acoplamentos no Modelo Padrão (esquerda) e no Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (direita) [69].*

Como veremos no próximo capítulo, em teorias supersimétrica associamos a cada partícula usual um superparceiro com os mesmos números quânticos destas partículas, mas com estatística oposta. No modelo de extensão supersimétrica mínima do SM, conhecido como Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM), também baseado nos grupos $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, são adicionados ao espectro de partículas do Modelo Padrão os gluínos, squarks, charginos e neutralinos. Logo, neste modelo, as funções β são modificadas pelas contribuições destes superparceiros.

No MSSM, em LO, as expressões para os b 's são dadas a partir de [21]

$$\begin{pmatrix} b_{g'} \\ b_g \\ b_{g_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} + n_g \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + n_H \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.100)$$

Como no MSSM $n_g = 3$ e $n_{Higgs} = 2$, temos $b_{g'} = 33/5$, $b_g = 1$ e $b_{g_s} = -3$.

Um gráfico com a evolução $1/\alpha_s(Q)$, no MSSM, é mostrado na Fig. (1.9). Este gráfico mostra uma convergência do valor das constantes de acoplamento em $\sim 2 \times 10^{16}$ GeV. Isto indica que no MSSM ocorre, em altas energias, a unificação das constantes de gauge.

Conclusão

Neste capítulo fizemos uma breve revisão de teoria de campos. Estudamos exemplos de campos e falamos sobre QED e QCD. Mostramos também o comportamento das constantes de acoplamento do Modelo Padrão em função da energia e como ocorre a unificação das

constantes de acoplamento no MSSM. A unificação das constantes de acoplamento é um dos principais exemplos de problemas solucionados em SUSY.

Os conceitos lembrados neste capítulo serão necessários para o entendimento dos capítulos 2, onde mostraremos algumas idéias fundamentais para construção de teorias supersimétricas, e 3, onde estudaremos a extensão supersimétrica da QED (SQED) e da QCD (SQCD).

Capítulo 2

Supersimetria

2.1 Introdução

Acredita-se que o Modelo Padrão, aumentado pela massa dos neutrinos, descreve com sucesso a física nas energias acessíveis hoje, mas para maiores escalas de energia uma nova física é necessária. Um dos candidatos a física além do Modelo Padrão é a supersimetria (SUSY).

A supersimetria é a simetria que relaciona os férmions e bósons da física de partículas elementares. O operador que gera a transformação de estados bosônicos em fermiônicos, e vice-versa, é um espinor anti-comutante Q , com

$$Q_\alpha|\text{bos}\rangle = |\text{ferm}\rangle_\alpha; \quad Q_\alpha|\text{ferm}\rangle^\alpha = |\text{bos}\rangle; \quad (2.1)$$

Os espinores são objetos intrinsecamente complexos, logo o conjugado hermitiano de Q_α , $(Q_\alpha)^\dagger = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^1$, também é um gerador de supersimetria. Como os geradores Q e \bar{Q} trocam o estado de spin por $1/2$, eles são operadores fermiônicos. Com estes novos geradores temos uma extensão supersimétrica da álgebra de Poincaré² conhecida como super álgebra de Poincaré. As relações de comutação e anticomutação da super álgebra de Poincaré para $N = 1$ (número de geradores Q_α de supersimetria) estão no apêndice (A).

Como consequências da álgebra de SUSY [20, 71] temos:

- Cada supermultiplete³ contém o mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos

$$n_B = n_F \quad (2.2)$$

- As massas de todos os estados em um supermultiplete são degeneradas, logo as massas dos bósons e férmions pertencentes ao mesmo supermultiplete são iguais.
- Em uma teoria supersimétrica, qualquer estado possui energia definida como sendo positiva.

¹ Usaremos a notação em que $(Q_\alpha)^\dagger = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, onde $\alpha, \dot{\alpha} \in \{1, 2\}$, o operador Q apresenta índice sem ponto e seu complexo conjugado \bar{Q} apresenta índice com ponto.

² Esta extensão não trivial da álgebra de Poincaré é permitida a partir do teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius [72], o qual é uma extensão do teorema de Coleman-Mandula [73]

³ Como veremos neste capítulo os supermultipletos contém estados fermiônicos e bosônicos usuais mais seus correspondentes superparceiros com estatística oposta.

Como resultado da segunda consequência da álgebra listada acima, as massas das partículas usuais do Modelo Padrão deveriam ser iguais as de seus superparceiros supersimétricos, o que é incompatível com a realidade pois os superparceiros já teriam sido detectados experimentalmente. Isto indica que se supersimetria for a teoria apropriada para descrever a física de partículas ela deve ser uma simetria quebrada [74].

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos de supersimetria, como superespaço e supercampos. Veremos que a partir da definição dos supercampos surge, em SUSY, para cada partícula usual do Modelo Padrão um parceiro supersimétrico com estatística oposta. Também mostraremos a forma mais geral de uma lagrangeana supersimétrica.

Nos cálculos usamos a notação do livro Wess-Bagger [71], onde os índices de Lorentz são denotados pelas letras latinas (m, n, \dots), os índices espinoriais são denotados pelas letras gregas (α, β, \dots) e a métrica é definida por $\eta^{mn} = \eta_{mn} = \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$.

2.2 Motivações

Existem muitas motivações teóricas para a supersimetria. Uma destas motivações foi abordada no capítulo 1, onde mostramos que SUSY prevê uma unificação das constantes de acoplamento em $\sim 10^{16}$ GeV. Outro importante resultado de SUSY é a solução do problema da hierarquia, ou seja, o fato da escala eletrofraca ser extremamente menor que a escala de Planck (escala da gravidade) e da grande unificação

$$\frac{m_W}{m_{\text{Planck}}} \sim \frac{10^2}{10^{19}} = \mathcal{O}(10^{-17}) \quad \frac{m_W}{m_{\text{GUT}}} \sim \mathcal{O}(10^{-13}) \quad (2.3)$$

$$m_{\text{Planck}} = c^2(\hbar c/G_{\text{Newton}})^{1/2} \approx 10^{19} \text{ GeV} \quad (2.4)$$

Este problema se torna claro quando analisamos as correções radioativas das massas das partículas escalares (bóson de Higgs) de altas ordens em teoria de perturbações.

As correções radioativas de um laço para massas escalares (ver Fig. 2.1) são quadraticamente divergentes e dadas por [75]

$$\delta m_H^2 = \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right) \int^\Lambda d^4k \frac{1}{k^2} = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \Lambda^2 \quad (2.5)$$

onde o “cutoff” Λ na integral representa a escala na qual o Modelo Padrão permanece válido. Se nós pensarmos em $\Lambda \simeq m_{\text{Planck}}$ ou na escala da grande unificação, as correções quânticas (2.5) são muito maiores que o valor físico de $m_H \sim 100$ GeV.

No entanto, a escala de Planck m_{Planck} é a única candidata que nós temos para escala de massa fundamental em física, pois nesta escala esperamos que a gravidade se torne tão forte como as outras interações das partículas, ou seja, a troca do gráviton (quanta do campos gravitacional) em 10^{19} GeV seria comparável a troca de γ ou Z^0 .

Uma estratégia para resolver este problema é usar o fato de que as correções envolvendo férmions tem sinal oposto ao das correções envolvendo bósons. Em supersimetria, podemos usar esta característica já que para cada bóson e férmion há um superparceiro, e a partícula e o superparceiro possuem acoplamentos idênticos, logo as divergências quadráticas em (2.5)

se cancelariam (ver Fig. 2.1). Diferentemente das correções de um laço para partículas escalares, as correções para um férmion são proporcionais a própria massa do fermion m_f e logarithmicamente divergentes [75]

$$\delta m_f = \mathcal{O}\left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right) m_f \int^\Lambda d^4k \frac{1}{k^4} = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right) m_f \ln \frac{\Lambda}{m_f} \quad (2.6)$$

Esta correção não é numericamente muito maior que o valor físico, para qualquer $\Lambda \lesssim m_{Planck}$. Logo, usando supersimetria podemos assegurar que a massa natural dos bósons (bóson de Higgs ou bósons W^\pm e Z^0) seja pequena $\delta m_{H,W}^2 \lesssim m_{H,W}^2$. Podemos então escrever as correções quânticas para a massa do bóson de Higgs em SUSY como

$$\delta m_H^2 = -\left(\frac{g_F^2}{16\pi^2}\right) (\Lambda^2 + M_F^2) + \left(\frac{g_B^2}{16\pi^2}\right) (\Lambda^2 + M_B^2) = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) |m_B^2 - m_f^2| \quad (2.7)$$

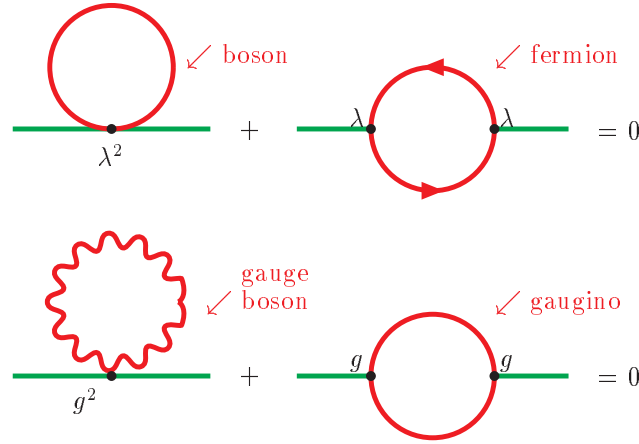


Fig. 2.1: Cancelamento de divergências quadráticas.

Visto que $m_h \sim 10^2$ GeV e $g \sim 10^{-1}$, de acordo com (2.7), devemos ter

$$|m_B^2 - m_f^2| \lesssim 1 \text{ TeV}^2 \quad (2.8)$$

Logo, concluímos que a escala de massa de SUSY deve ser $M_{SUSY} \sim 10^3$ GeV.

Este resultado mostra que a partir de 1 TeV o Modelo Padrão falha e uma nova física é necessária, sendo SUSY uma boa candidata.

Os modelos supersimétricos possuem várias outras predições e explicações para algumas falhas do Modelo Padrão, as quais hoje costuma-se dizer que são evidências indiretas de supersimetria, tais como:

- Previu no começo dos anos de 1980 que o quark top é pesado;
- Gera massas para os neutrinos;
- Possui candidato para matéria escura;

- Pode explicar a assimetria matéria-antimatéria no universo, e muitas outras [12, 20, 21].

Um dos argumentos experimentais que indicam que o Modelo Padrão é incompleto são as observações (que tiveram início em 1933) de flutuações no espectro de relíquias de microondas do Big Bang, que têm estabelecido a existência de matéria escura no universo para a qual não há candidato no Modelo Padrão.

Em extensões supersimétricas do Modelo Padrão existe uma partícula massiva, neutra e estável que é excelente candidata à matéria escura observada no universo. Esta partícula é estável por consequência da introdução do número quântico de simetria R^4 .

A simetria R é introduzida para eliminar os termos que violam número leptônico (L) e bariônico (B). A paridade R de um estado está relacionado ao spin (S), a L e B de uma dada partícula, através da seguinte relação:

$$R_p = (-1)^{2S} (-1)^{3B+L}. \quad (2.9)$$

Uma consequência imediata da expressão acima é que todas as partículas do Modelo Padrão (incluindo os bósons de Higgs) são de paridade R par, enquanto seus superparceiros são de paridade R ímpar. Como resultado as “novas” partículas supersimétricas podem ser produzidas apenas em pares, e todo decaimento tem que conter um número ímpar de partículas supersimétricas. Isto implica que a partícula supersimétrica mais leve, conhecida como “Lightest Supersymmetric Particle” (LSP), tem que ser estável, pois ela não tem canal de decaimento permitido. Esta partícula é candidata a matéria escura.

2.3 Superespaço e Geradores

Como vimos no capítulo anterior, em teoria quântica de campos nós escrevemos uma lagrangeana para um determinado sistema como uma função dos campos $\phi(x)$. Estes campos possuem certas propriedades de transformação sobre transformações de Poincaré [59], mostradas no apêndice A. Nós impomos que as lagrangeanas devem ser invariantes sobre estas transformações.

Em teorias supersimétricas nós devemos aumentar o grupo de simetria com a introdução de geradores fermiônicos Q e \bar{Q} . Logo, é conveniente introduzir coordenadas fermiônicas que variem de certa maneira sobre as transformações de SUSY. Estas novas coordenadas fermiônicas são denotadas por θ^α e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. A inclusão destas novas coordenadas implica em ampliar o espaço de coordenadas para $Z = (x^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})^5$. Este é conhecido como superespaço e os campos que dependem dessas coordenadas são chamados de supercampos $\Omega(x^m, \theta, \bar{\theta})$.

Nós tomaremos aqui que as coordenadas θ^α transformam-se como um espinor de Weyl de duas componentes⁶, e que $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = (\theta^\alpha)^*$. Logo

$$\theta^\alpha = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} \bar{\theta}^1 \\ \bar{\theta}^2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

⁴ Em extensões supersimétricas do SM surgem teorias que violam número leptônico e bariônico [74].

⁵ Como $\alpha = 1, 2$ ($\dot{\alpha} = 1, 2$), a introdução dessas variáveis espinoriais aumenta a dimensão do espaço-tempo de 4 para 8 dimensões.

⁶ Por conveniência, já que trabalharemos com espinores de Dirac e Majorana como espinores de Weyl de 2 componentes.

As componentes dos espinores fermiônicos de Dirac são anti-comutantes, logo as componentes dos espinores acima são números de Grassmann anti-comutantes, ou seja,

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (2.11)$$

Outra importante característica dos números de Grassmann é o fato deles também anti-comutarem com operadores fermiônicos (ex. $\{\theta^\alpha, \xi\} = 0$, $\{\theta^\alpha, Q^\alpha\} = 0$), mas comutarem com operadores bosônicos (ex. $[\theta^\alpha, \phi] = 0$ e $[\theta^\alpha, P^m] = 0$). Identidades envolvendo variáveis de Grassmann estão no apêndice B.2.

Usando os espinores de Grassmann nós podemos escrever a álgebra de super Poincaré em função apenas de comutadores. Para isto, vamos escrever

$$[\theta Q, \bar{\theta} \bar{Q}] \equiv [\theta^\alpha Q_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = \theta^\alpha Q_\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} - \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \theta^\alpha Q_\alpha, \quad (2.12)$$

onde Q e \bar{Q} são os geradores da álgebra de SUSY (ver apêndice A).

Como as variáveis de Grassmann comutam com variáveis fermiônicas, temos

$$\begin{aligned} [\theta Q, \bar{\theta} \bar{Q}] &= \theta^\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha \bar{Q}^{\dot{\alpha}} - \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \theta^\alpha \bar{Q}^{\dot{\alpha}} Q_\alpha = \theta^\alpha \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}} - \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \theta^\alpha \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}} Q_\alpha \\ &= \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\beta}} Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\beta}} - \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \theta^\alpha \bar{Q}_{\dot{\beta}} Q_\alpha \end{aligned} \quad (2.13)$$

Usando $\{\bar{\theta}^{\dot{\beta}}, \theta^\alpha\} = 0$ e $\{\bar{Q}_{\dot{\beta}}, Q_\alpha\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m P_m$, podemos escrever

$$[\theta Q, \bar{\theta} \bar{Q}] = 2\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \bar{\theta}^{\dot{\beta}} P_m \equiv 2\theta \sigma^m \bar{\theta} P_m, \quad (2.14)$$

logo temos um resultado somente em função de termos que comutam.

Em analogia com a teoria quântica de campos, em teorias supersimétricas os campos devem possuir certas propriedades de transformação sobre transformações de super-Poincaré.

Lembramos que o operador $P_m = i\partial_m$ gera um deslocamento a no argumento espaço-tempo de ϕ , ou seja,

$$\phi(x) \rightarrow U(a)\phi(x)U^{-1}(a) = e^{ia^m P_m}\phi(x)e^{-ia^m P_m} = \phi(x+a) \quad (2.15)$$

Em SUSY nós devemos construir operadores unitários análogos para Q e \bar{Q} , os quais teriam efeito de deslocamento similar sobre os argumentos espinoriais dos campos. Devido a relação algébrica entre geradores de SUSY e o gerador de translação no espaço-tempo P_m (Eq. (A.9)), vamos escrever um operador unitário S para uma transformação de SUSY da forma

$$S(a, \varepsilon, \bar{\varepsilon}) \equiv e^{i(a^m P_m + \varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}})}, \quad (2.16)$$

Vamos combinar duas transformações de SUSY e analisar quais transformações são induzidas nas coordenadas espaço-tempo e nas coordenadas espinoriais. Temos que

$$S(a, \varepsilon, \bar{\varepsilon}) S(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i(a^m P_m + \varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}})} e^{i(x^m P_m + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}})} \quad (2.17)$$

Definindo $A = i(a^m P_m + \varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}})$ e $B = i(x^m P_m + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}})$, e usando as relações de comutação (A.9), temos que

$$[A, B] = -[a^m P_m + \varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}, x^m P_m + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] \quad (2.18)$$

$$= -[\varepsilon Q, \bar{\theta} \bar{Q}] + [\theta Q, \bar{\varepsilon} \bar{Q}], \quad (2.19)$$

Usando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff⁷, e o fato de que $[A, B]$ comuta com A e B , podemos escrever

$$S(a, \varepsilon, \bar{\varepsilon}) S(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{i\{(x^m + a^m)P_m + (\varepsilon^\alpha + \theta^\alpha)Q_\alpha + (\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})\bar{Q}^{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}[\varepsilon^\alpha Q_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] - \frac{i}{2}[\theta^\alpha Q_\alpha, \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}]\}} \quad (2.20)$$

De acordo com (2.14), podemos escrever

$$[\varepsilon^\alpha Q_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = 2\varepsilon\sigma^m \bar{\theta} P_m \quad \text{e} \quad [\theta^\alpha Q_\alpha, \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = 2\theta\sigma^m \bar{\varepsilon} P_m, \quad (2.21)$$

portanto

$$S(a, \varepsilon, \bar{\varepsilon}) S(x, \theta, \bar{\theta}) = S(x^m + a^m + i\varepsilon\sigma^m \bar{\theta} - i\theta\sigma^m \bar{\varepsilon}, \theta + \varepsilon, \bar{\theta} + \bar{\varepsilon}) \quad (2.22)$$

Como resultado de $S(a, \varepsilon, \bar{\varepsilon})S(x, \theta, \bar{\theta})$, são induzidas as seguintes transformações

$$x^m \rightarrow x^m + a^m + i\varepsilon\sigma^m \bar{\theta} - i\theta\sigma^m \bar{\varepsilon} \quad (2.23)$$

$$\theta \rightarrow \theta + \varepsilon \quad (2.24)$$

$$\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \bar{\varepsilon} \quad (2.25)$$

Como podemos ver, as transformações no espaço-tempo ocorrem mesmo se $a^m = x^m = 0$.

Finalmente, para um supercampo $\Omega(x, \theta, \bar{\theta})$ no superspaço, sobre uma transformação de SUSY $S(a^m, \varepsilon, \bar{\varepsilon})$ resulta em

$$\Omega(x^m, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \Omega(x^m + a^m + i\varepsilon\sigma^m \bar{\theta} - i\theta\sigma^m \bar{\varepsilon}, \theta + \varepsilon, \bar{\theta} + \bar{\varepsilon}) \quad (2.26)$$

Para manipular as propriedades de transformação dos campos é conveniente conhecer qual a representação diferencial dos geradores de SUSY. Vamos então fazer uma transformação infinitesimal sobre o supercampo

$$\Omega \rightarrow \Omega' = \Omega + \delta\Omega. \quad (2.27)$$

Sendo $\Omega' = e^{-i(\varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} + a^m P_m)} \Omega$ infinitesimal, temos

$$\Omega \rightarrow \Omega' = \Omega - i(\varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} + a^m P_m) \Omega \quad (2.28)$$

Se a , ε e $\bar{\varepsilon}$ forem infinitesimalmente pequenos, podemos expandir (2.26) em série de Taylor⁸ para obter

$$\Omega' = \Omega + (a^m + i\varepsilon^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}) \partial_m \Omega + \varepsilon^\alpha \partial_\alpha \Omega + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \Omega \quad (2.29)$$

⁷ Na expressão $e^A e^B = e^C$, se A e B são operadores, o operador C é dado por: $C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [[A, B], B]) + \dots$

⁸ Série de Taylor na forma vetorial: $\xi(\vec{r} + \vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{a} \cdot \nabla)^n \xi(\vec{r})$.

Comparando (2.28) e (2.29)

$$-ia^m P_m \Omega = a^m \partial_m \Omega \quad (2.30)$$

$$-i\varepsilon^\alpha Q_\alpha \Omega = (\varepsilon^\alpha \partial_\alpha + i\varepsilon^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m) \Omega \quad (2.31)$$

$$-i\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} \Omega = (\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \partial_m) \Omega = (\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}} \sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^{mT} \theta^\alpha \partial_m) \Omega \quad (2.32)$$

Da Eq. (2.32) verificamos que uma das contribuições para \bar{Q} é

$$\bar{Q}^{\dot{\alpha}} = i\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}, \quad (2.33)$$

a qual, usando $\varepsilon_{\beta\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_\beta$ (ver identidades envolvendo derivadas de variáveis de Grassmann no apêndice B), pode ser escrita como

$$\bar{Q}_{\dot{\beta}} = -i\bar{\partial}_{\dot{\beta}}. \quad (2.34)$$

A segunda contribuição é dada por:

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = \sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^{mT} \theta^\alpha \partial_m = \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m, \quad (2.35)$$

já que $\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = -\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}$.

Logo, de (2.30), (2.31), (2.32), (2.34) e (2.35), podemos escrever

$$P_m = i\partial_m \quad (2.36)$$

$$Q_\alpha = i\partial_\alpha - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \quad (2.37)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \quad (2.38)$$

As equações acima nos fornecem a forma diferencial para os geradores da álgebra de SUSY, P_m , Q e \bar{Q} . É possível verificar que estes operadores satisfazem a álgebra supersimétrica (A.9).

Como veremos na próxima seção é conveniente introduzirmos também derivadas covariantes, as quais anticomutam com os geradores de SUSY Q e \bar{Q} . Estas, podem ser escritas como:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m, \quad (2.39)$$

onde $\partial_\alpha = \partial/\partial\theta^\alpha$ e $\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} = \partial/\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$.

2.4 Supercampo

Como mencionamos anteriormente, uma transformação supersimétrica sobre um campo altera seu spin. É conveniente combinar campos de diferente spins (fermiônicos e bosônicos) em um único “supercampo”. Este supercampo deve ser invariante sob transformações supersimétricas. No entanto, não é possível simplesmente adicionarmos campos fermiônicos e bosônicos pois estes se transformam diferentemente sob transformações de Lorentz. Logo, vamos introduzir ao supercampo os espinores fermiônicos θ^α e $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$, de modo que possamos combiná-los com campos fermiônicos e bosônicos como mostraremos a seguir.

O supercampo será escrito como uma expansão de Taylor em potências de θ e $\bar{\theta}$. Como já havíamos definido, os θ são espinores de Weyl de 2 componentes, logo $\theta\theta = -2\theta_1\theta_2$ e

$$\theta\theta\theta^\alpha = -2\theta_1\theta_2\theta^\alpha = -2\theta_1\theta_2\epsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta = -2\theta_1\theta_2\epsilon^{21}\theta_1 - 2\theta_1\theta_2\epsilon^{12}\theta_2 = 0, \quad (2.40)$$

onde usamos $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21}$. O mesmo ocorre para $\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Logo, a expansão de Taylor incluirá somente termos proporcionais à $\theta\theta$ e $\bar{\theta}\bar{\theta}$. Portanto, definiremos⁹ o supercampo como

$$\begin{aligned} \Omega(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \sqrt{2}\theta\xi(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}n(x) + \\ & \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\zeta(x) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Os coeficientes foram colocados por conveniência. O supercampo Ω contém espinores de Weyl de mão esquerda $\xi(x)$ e $\zeta(x)$, espinores de Weyl de mão direita $\bar{\chi}(x)$ e $\bar{\lambda}(x)$, campos escalares $f(x)$, $m(x)$, $n(x)$ e $d(x)$ e um campo vetorial v_m . Se considerarmos que todos os campos são complexos, temos que o supercampo Ω possui oito graus de liberdade fermiônicos e oito graus de liberdade bosônicos. Pelo fato do supercampo conter uma coleção de campos componentes, ele é chamado de supermultiplete.

Da Eq. (2.41), podemos notar que a dimensão de massa das coordenadas Grassmannianas é $[\theta] = [\bar{\theta}] = -1/2$.

Representações irredutíveis do supercampo (2.41) são as menores coleções possíveis de componentes dos campos que se transformam neles próprios sob transformações supersimétricas. Estes são blocos de construção mais simples, e são obtidos impondo vínculos, como veremos nas próximas subseções.

2.4.1 Supercampo Quiral

Vamos definir aqui a forma do supercampo quiral de mão esquerda, que denotaremos por Φ e de mão direita (Φ^\dagger), que são blocos de construção irredutível do supercampo (2.41).

Ficará claro a seguir que o supercampo quiral de mão esquerda satisfaz a seguinte relação de vínculo

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad (2.42)$$

Vamos encontrar a solução para esta equação de vínculo. Para isto é conveniente definirmos coordenadas no superespaço quirais de mão esquerda como

$$y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta} \quad (2.43)$$

Nestas novas variáveis os operadores Q e \bar{Q} são escritos como:

$$Q_\alpha = i\partial_\alpha \quad (2.44)$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + 2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\partial_m \quad (2.45)$$

Usando a Eq. (2.39) e a definição (2.43), temos

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta^\alpha = 0 \quad (2.46)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}y^m = (\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\partial_m)y^m = i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\partial_mx^m = 0 \quad (2.47)$$

⁹ Como usado em [20].

Logo, para satisfazer (2.42), Φ deve ser função de y^m e θ^α . Podemos escrever $\Phi(y, \theta)$ como

$$\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\xi(y) + \theta\theta F(y), \quad (2.48)$$

onde $\phi(y)$, $F(y)$ são campos escalares complexos e $\xi(y)$ é um espinor de Weyl complexo de mão esquerda. A dimensão de massa de Φ é $[\Phi] = 1$. Logo, as dimensões de massa dos campos componentes de (2.48) são $[\phi] = 1$, $[\xi] = 3/2$ e $[F] = 2$. Podemos notar que ϕ e ξ possuem a dimensão de massa esperada, mas F não. O campo F é conhecido como campo auxiliar e sua introdução é apenas para garantir que $n_B = n_F$.

Podemos expandir o supercampo (2.48) em termos das coordenadas do super-espaco $(x, \theta, \bar{\theta})$. Para isso, vamos fazer uma expansão de Taylor¹⁰ de $\phi(y)$ em torno do ponto x

$$\phi(y) = \phi(x) + (y^m - x^m)\partial_m\phi(x) + \frac{(y^m - x^m)(y^n - x^n)}{2}\partial_m\partial_n\phi(x) + \dots \quad (2.49)$$

Como $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\bar{\theta}$, temos:

$$\phi(y) = \phi(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\phi(x) + \frac{1}{2}(i\theta\sigma^m\bar{\theta})(i\theta\sigma^n\bar{\theta})\partial_m\partial_n\phi(x) + \dots \quad (2.50)$$

Usando $\theta\sigma^m\bar{\theta}\theta\sigma^n\bar{\theta} = -(1/2)\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{mn}$, temos:

$$\phi(y) = \phi(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\partial^m\phi(x) + \dots \quad (2.51)$$

Fazendo a expansão para $\xi(y)$ e $F(x)$ temos

$$\xi(y) = \xi(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\xi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\partial^m\xi(x) + \dots \quad (2.52)$$

$$F(y) = F(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m F(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\partial^m F(x) + \dots \quad (2.53)$$

Substituindo (2.51), (2.52) e (2.53) em (2.48), e mantendo somente os termos até $\theta\theta$ e $\bar{\theta}\bar{\theta}$, temos:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\phi(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\partial^m\phi(x) + \sqrt{2}\theta\xi(x) \\ &+ i\sqrt{2}\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\xi(x) + \theta\theta F(x), \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde

$$\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\xi(x) = \theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\lambda\partial_m\xi_\lambda. \quad (2.55)$$

Como

$$\theta^\alpha\theta^\lambda = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\lambda}\theta\theta, \quad (2.56)$$

$$\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\lambda\partial_m\xi_\lambda = -\frac{1}{2}\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\epsilon^{\alpha\lambda}\partial_m\xi_\lambda = -\frac{1}{2}\theta\theta\partial_m\xi^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}\theta\theta\partial_m\xi(x)\sigma^m\bar{\theta}, \quad (2.57)$$

¹⁰ Expansão de Taylor: $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots$

podemos escrever (2.54) como:

$$\begin{aligned}\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi(x) + \sqrt{2}\theta\xi(x) + \theta\theta F(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\phi(x) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\xi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_m\partial^m\phi(x).\end{aligned}\quad (2.58)$$

Este campo satisfaz a equação de vínculo (2.42). Devido ao fato deste supercampo ser escrito somente em termos de um espinor de Weyl $\xi(x)$ de mão esquerda (ver apêndice B), ele é conhecido como supercampo quiral de mão esquerda.

Vamos aplicar uma transformação de supersimetria infinitesimal $\delta\Phi = -i(\varepsilon Q + \bar{\varepsilon}\bar{Q})\Phi$ no supercampo acima. Usando (2.45)

$$\begin{aligned}\delta\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) &= -i(\varepsilon^\alpha Q_\alpha + \bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}})\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = -i(\varepsilon^\alpha Q_\alpha - \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}})\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= (\varepsilon^\alpha\partial_\alpha + \bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + 2i\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\partial_m)\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ &= \sqrt{2}\varepsilon^\alpha\partial_\alpha\theta^\beta\xi_\beta + \varepsilon^\alpha\partial_\alpha(\theta\theta)F(x) + i\varepsilon^\alpha\partial_\alpha\theta^\beta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_m\phi(x) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon^\alpha\partial_\alpha(\theta\theta)\partial_m\xi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \frac{1}{4}\varepsilon^\alpha\partial_\alpha(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_m\partial^m\phi(x) \\ &\quad + i\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\theta^\beta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_m\phi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}(\theta\theta)\partial_m\xi^\beta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \\ &\quad + \frac{1}{4}\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_m\partial^m\phi(x) + \dots \\ &= \sqrt{2}\varepsilon\xi + 2\varepsilon\theta F(x) + i\varepsilon\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\phi(x) - \frac{2i}{\sqrt{2}}\varepsilon\theta\partial_m\xi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \frac{1}{2}\varepsilon\theta(\bar{\theta}\bar{\theta})\square\phi(x) \\ &\quad + i\theta\sigma^m\bar{\varepsilon}\partial_m\phi(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}^m\partial_m\xi(x) - \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\bar{\theta}(\theta\theta)\square\phi(x) + \dots\end{aligned}\quad (2.59)$$

Comparando com

$$\delta\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \delta\phi(y) + \sqrt{2}\theta\delta\xi(y) + \theta\theta\delta F(y) + \dots\quad (2.60)$$

temos as seguintes variações:

$$\delta_\varepsilon\phi = \sqrt{2}\varepsilon\xi\quad (2.61)$$

$$\delta_\varepsilon\xi = \sqrt{2}\varepsilon F + i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\varepsilon}\partial_m\phi\quad (2.62)$$

$$\delta_\varepsilon F = i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}^m\partial_m\xi\quad (2.63)$$

Como esperávamos, a troca na componente bosônica (fermiônica) é proporcional ao campo fermiônico (bosônico). Outra característica importante que podemos observar é que a variação de F sob transformações supersimétricas corresponde a um divergente total. Veremos na seção (2.5) que esta característica é importante na construção das lagrangeanas supersimétricas.

Podemos também obter um supercampo de mão direita a partir do vínculo

$$D_\alpha\Phi^\dagger(\bar{y}, \bar{\theta}) = 0.\quad (2.64)$$

Este supercampo pode ser definido por

$$\Phi^\dagger(\bar{y}, \bar{\theta}) = \phi^*(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi}(\bar{y}) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(\bar{y}); \quad \bar{y} = x^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}, \quad (2.65)$$

e, em termos das variáveis x , θ e $\bar{\theta}$, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi} + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\phi^*(x) \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^m\partial_m\bar{\xi} + \frac{1}{4}(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\theta)\square\phi^*(x). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Podemos perceber que o campo acima é escrito em termo de espinores de Weyl $\bar{\xi}$ de mão direita (ver apêndice B).

Estes supercampos quirais podem ser usados para descrever bósons de spin 0 e férmions de spin 1/2, como por exemplo o bóson de Higgs e os quarks e léptons do Modelo Padrão.

2.4.2 Supercampo real

Os supercampos definidos na seção anterior não possuem como componentes um campo vetorial. Logo, vamos introduzir aqui um supercampo, chamado de supercampo vetorial, que contém um campo vetorial como componente para descrever bósons de spin 1. Este supercampo é definido a partir do vínculo

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.67)$$

Tomando o complexo conjugado de (2.41), temos

$$\begin{aligned} \Omega^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) &= f^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi}(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}m^*(x) + \theta\theta n^*(x) \\ &+ \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m^*(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\zeta}(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d^*(x) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Comparando (2.41) com (2.68), notamos que para (2.67) ser satisfeita é necessário que $f(x) = f^*(x) \equiv C$, $\chi(x) = \xi(x)$, $m(x) = n^*(x)$, $v_m(x) = v_m^*(x)$, $\bar{\lambda}(x) = \bar{\zeta}(x)$ e $d(x) = d^*(x) \equiv D(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) &\sim C(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\chi(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}m^*(x) \\ &+ \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x), \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde $C(x)$, $v_m(x)$ e $D(x)$ são campos reais, $m(x)$ é um campo escalar complexo e λ e χ são campos espinoriais complexos.

Para definir completamente a forma do supercampo, vamos usar o fato deste poder ser construído a partir de $\Phi + \Phi^\dagger$, onde Φ é um supercampo quiral.

Usando (2.58) e (2.66), temos

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi^\dagger &= \phi(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\xi(x) + \theta\theta F(x) + i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\phi(x) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_m\xi(x)\sigma^m\bar{\theta} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square\phi(x) \\ &+ \phi^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi} + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x) - i\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\phi^*(x) \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^m\partial_m\bar{\xi} + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square\phi^*(x) \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde $\phi(x) = \Re\phi(x) + i\Im\phi(x)$ e $\phi^*(x) = \Re\phi(x) - i\Im\phi(x)$. Logo,

$$\begin{aligned} \Phi + \Phi^\dagger &= 2\Re\phi(x) + \sqrt{2}\theta\xi(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi} + \theta\theta F(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x) - 2\theta\sigma^m\bar{\theta}\partial_m\Im\phi(x) \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\sigma}^m\partial_m\xi(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\sigma^m\partial_m\bar{\xi} + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\square\Re\phi(x) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Comparando (2.69) com (2.71), identificamos C com $2\Re\phi(x)$, χ com ξ , $m(x)$ com $F(x)$, v_m com $-2\partial_m\Im\phi(x)$. Também podemos ver que D está vinculado com o termo $\Re\phi(x)$ e λ com ε . Fazendo as substituições $\lambda + i\sigma^m\partial_m\bar{\chi}/\sqrt{2} \rightarrow \lambda$, $\bar{\lambda} + i\bar{\sigma}^m\partial_m\chi/\sqrt{2} \rightarrow \bar{\lambda}$ e $D + (1/2)\square C \rightarrow D$, o supercampo vetorial pode ser escrito de uma forma mais geral como:

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) &= C(x) + \sqrt{2}\theta\chi(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\chi}(x) \\ &\quad + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}M^*(x) + \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + \theta\theta\bar{\theta}\left[\bar{\lambda} + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}^m\partial_m\chi\right] \\ &\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\left[\lambda + \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^m\partial_m\bar{\chi}\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right] \end{aligned} \quad (2.72)$$

Podemos ver que $\Phi + \Phi^\dagger$ (eq. 2.71) é um caso especial de (2.72), ou seja, também é um supercampo vetorial, com D e λ iguais a zero.

Na forma como está escrito o supercampo vetorial, Eq. (2.72), podemos notar que além do campo vetorial (bosônico) v_m , o qual nós desejávamos encontrar, o supercampo vetorial possui também dois campos componentes espinoriais (fermiônicos) com quiralidades misturadas. Analisando a dimensão de massa de todos os campos componentes, $[C] = 0$, $[\chi] = 1/2$, $[v] = [N] = 1$, $[\lambda] = 3/2$ e $[D] = 2$, percebemos que somente v_m e λ possuem a dimensão de massa esperada. Logo concluímos que todos os outros campos componentes de V são não físicos. Um campo usual que possui quiralidade misturada é o campo de Majorana (um campo de Majorana de mão esquerda é igual ao de mão direita, como mostrado no apêndice (B)). Logo o campo espinorial físico λ , componente espinorial do supercampo V , deve ser uma férmion de Majorana.

Como v_m descreve um bóson de gauge, postulamos então que V deve ser invariante sobre uma transformação de gauge abeliana, e definimos a generalização supersimétrica desta transformação como:

$$V \rightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger, \quad (2.73)$$

visto que esta resulta nas seguintes transformação da componente vetorial:

$$v_m \rightarrow v_m - \partial_m\Lambda \quad \text{onde } \Lambda = i(\phi - \phi^*), \quad (2.74)$$

que é a invariância de gauge usual, e usando (2.71) e (2.72) a transformação das outras componentes fica

$$\begin{aligned} C &\rightarrow C + \phi + \phi^* \\ \chi &\rightarrow \chi + \varepsilon \\ M &\rightarrow M + F \\ \lambda &\rightarrow \lambda \\ D &\rightarrow D \end{aligned} \quad (2.75)$$

Como a maioria dos campos são não físicos, vamos analisar aqui somente a transformação do campo componente D (da Eq. (2.72)) sobre transformações de SUSY (2.28). Temos o seguinte resultado:

$$\delta_\varepsilon D = \bar{\varepsilon}\bar{\sigma}\partial_m\lambda - \varepsilon\sigma^m\partial_m\bar{\lambda} = \partial_m(\varepsilon\sigma^m\bar{\lambda} + \lambda\sigma^m\bar{\varepsilon}), \quad (2.76)$$

o qual mostra que a componente D do supercampo vetorial transforma-se em uma derivada total, tal como o campo F do supercampo quiral. Este resultado junto ao resultado (2.63) é de fundamental importância para construção das lagrangeanas supersimétricas, como veremos na seção (2.5).

Gauge de Wess-Zumino

Escolhendo C , χ , M como nulos, a Eq. (2.75) se reduz a um gauge especial, chamado gauge de Wess-Zumino. Neste gauge o supercampo vetorial pode ser escrito como:

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \quad (2.77)$$

Com o campo não físico D o supercampo V_{WZ} satisfaz $n_F = n_B$. Neste gauge, podemos escrever também

$$V_{WZ}^2 = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v^mv_m, \quad (2.78)$$

$$V_{WZ}^n = 0, \quad (2.79)$$

onde $n \geq 3$.

2.4.3 Definindo partículas em SUSY a partir dos supercampos

Nas Eqs. (2.4.2) e (2.4.1), mostramos três supercampos básicos: supercampo quiral de mão esquerda, supercampo quiral de mão direita e o supercampo vetorial. Estes são formados por mais graus de liberdade do que os campos usuais do Modelo Padrão. Os campos usuais dependem somente de x_m (por exemplo, o elétron). Na extensão supersimétrica do Modelo Padrão os campos usuais são apenas campos componentes dos supercampos, assim como os campos que não dependem somente x_m , mas também de θ^α e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$.

O supercampo quiral de mão esquerda é constituído por um escalar ϕ e um férmion de mão esquerda ξ e o supercampo quiral de mão direita por um escalar ϕ^* e um férmion de mão direita $\bar{\xi}$. O supercampo vetorial consiste de um bóson vetorial v_m , um espinor de Weyl λ e seu conjugado $\bar{\lambda}$. Não falamos dos campo F e D , porque não são campos físicos.

Resumindo, no Modelo Padrão temos: férmions de mão esquerda ξ_f , que é uma componente do supercampo $\Phi = (\phi, \xi_f)$, férmions de mão direita $\bar{\xi}_f$, que é um campo componente do supercampo $\Phi^\dagger = (\phi^*, \bar{\xi}_f)$, bósons de Higgs ϕ_h ($\Phi_h = (\phi_h, \xi_h)$) e ϕ_h^* ($\Phi_h^* = (\phi_h^*, \xi_h^*)$) e bósons de gauge v_m , que pertence a $V = (v_m, \lambda, \bar{\lambda})$.

Na extensão supersimétrica da física de partículas, temos que os léptons e quarks (ξ_f e $\bar{\xi}_f$) serão parte de um supercampo quiral (Φ e Φ^\dagger) assim como seus parceiros escalares, denominados de sléptons e squarks (ϕ_f e ϕ_f^*). Os bósons de gauge v_m serão uma parte

do supercampo vetorial V e também seus parceiros, conhecidos como gauginos (λ e $\bar{\lambda}$). Finalmente, os bósons de Higgs (ϕ_h e ϕ_h^*) serão a parte escalar de um supercampo quirial (Φ_h e Φ_h^\dagger) assim como seus parceiros fermiônicos, os higgsinos (ξ_h e ξ_h^\dagger). Veremos exemplos desta extensão no próximo capítulo, onde trataremos da SQED e SQCD.

2.5 Lagrangeanas Supersimétricas

Vamos agora construir a lagrangeana da teoria de campos supersimétrica. Nós queremos que a ação seja invariante sob transformações supersimétricas, ou seja,

$$\delta_\varepsilon \int d^4x \mathcal{L}(x) = 0 \quad (2.80)$$

Se a lagrangeana variar por uma derivada total, a ação é invariante. Como vimos os termos F do supercampo quirial (componente $\theta\theta$ do supercampo quirial de mão esquerda ou $\bar{\theta}\bar{\theta}$ do supercampo quirialidade de mão direita) e os termos D do supercampo vetorial (componente $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$) são candidatos para densidade lagrangeana supersimétrica já que sob transformações de SUSY eles se transformam como divergentes totais. Logo, podemos escrever a ação como:

$$S = \int d^4x \left(\int d^2\theta \mathcal{L}_F + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \mathcal{L}_D \right), \quad (2.81)$$

onde \mathcal{L}_F é constituído de termos F do supercampo quirial e \mathcal{L}_D de termos D do supercampo vetorial.

Como veremos no próximo capítulo, as lagrangeanas das teorias supersimétricas são construídas em termos de produtos de supercampos quirais. Vamos agora analisar alguns destes produtos que usaremos no próximo capítulo. Para dois supercampos quirais de mão esquerda Φ_i e Φ_j temos:

$$\begin{aligned} \Phi_i(y, \theta)\Phi_j(y, \theta) &= \left(\phi_i(y) + \sqrt{2}\theta\xi_i(y) + \theta\theta F_i(y) \right) \left(\phi_j(y) + \sqrt{2}\theta\xi_j(y) + \theta\theta F_j(y) \right) \\ &= \phi_i(y)\phi_j(y) + \sqrt{2}\theta \left(\phi_i(y)\xi_j(y) + \xi_i(y)\phi_j(y) \right) \\ &+ \theta\theta \left(\phi_i(y)F_j(y) + F_i(y)\phi_j(y) - \xi_i(y)\xi_j(y) \right), \end{aligned} \quad (2.82)$$

onde usamos $\theta^\alpha\xi_\alpha\theta^\beta\xi_\beta = \theta^\alpha\theta^\beta\xi_\alpha\xi_\beta = -(1/2)\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta\xi_\alpha\xi_\beta = -(1/2)\theta\theta\xi\xi$.

Podemos notar que o último termo em $\theta\theta$ na expressão (2.82) parece com um termo de massa dos férmions, tal como em Eq. (1.65).

Para três supercampos quirais de mão esquerda Φ_i , Φ_j e Φ_k :

$$\begin{aligned} \Phi_i(y, \theta)\Phi_j(y, \theta)\Phi_k(y, \theta) &= \phi_i(y)\phi_j(y)\phi_k(y) \\ &+ \sqrt{2}\theta \left[\phi_i(y)\phi_j(y)\xi_k(y) + \phi_i(y)\xi_j(y)\phi_k(y) + \xi_i(y)\phi_j(y)\phi_k(y) \right] \\ &+ \theta\theta \left[\phi_i(y)\phi_j(y)F_k(y) + \phi_i(y)F_j(y)\phi_k(y) + F_i(y)\phi_j(y)\phi_k(y) \right. \\ &- \left. \phi_i(y)\xi_j(y)\xi_k(y) - \xi_i(y)\xi_j(y)\phi_k(y) - \xi_i(y)\phi_j(y)\xi_k(y) \right] \end{aligned} \quad (2.83)$$

Notamos que os três últimos termos na equação acima descrevem interações de Yukawa [58] entre um escalar e dois férmions. Não podemos multiplicar mais do que três

supercampos quirais, pois a lagrangeana resultante teria dimensão de massa maior que 4, e seria não renormalizável.

Dos produtos de 2 e 3 supercampos quirais de mão esquerda encontramos termos que podem ser relacionados a massas dos férmions e interações de Yukawa. Precisamos agora encontrar termos de energia cinética para os campos ϕ e ξ . Para encontrarmos estes termos vamos analisar o produto $\Phi_i^\dagger \Phi_j$, onde usaremos $\Phi_j(x, \theta, \bar{\theta})$ (Eq. 2.58) e $\Phi_i^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})$ (Eq. 2.66).

$$\begin{aligned}
 \Phi_i^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})\Phi_j(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi_i^* \phi_j + \sqrt{2}\theta\xi_j \phi_i^* + \theta\theta \phi_i^* F_j + i\theta\sigma^m \bar{\theta} \phi_i^* \partial_m \phi_j - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta \phi_i^* \partial_m \xi_j \sigma^m \bar{\theta} \\
 &+ \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \phi_i^* \square \phi_j + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi}_i \phi_j + 2\bar{\theta}\bar{\xi}_i \theta \xi_j + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi}_i \theta\theta F_j + i\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi}_i \theta \sigma^m \bar{\theta} \partial_m \phi_j \\
 &- i\bar{\theta}\bar{\xi}_i \theta\theta \partial_m \xi_j \sigma^m \bar{\theta} + \bar{\theta}\bar{\theta} F_i^* \phi_j + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\theta} F_i^* \theta \xi_j + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta F_i^* F_j \\
 &- i\theta\sigma^m \bar{\theta} \partial_m \phi_i^* \phi_j - i\sqrt{2}\theta\sigma^m \bar{\theta} \partial_m \phi_i^* \theta \xi_j + \theta\sigma^m \bar{\theta} \partial_m \phi_i^* \theta \sigma^m \bar{\theta} \partial_m \phi_j \\
 &+ \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m \partial_m \bar{\xi}_i \phi_j + i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m \partial_m \bar{\xi}_i \theta \xi_j + \frac{1}{4}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta \square \phi_i^* \phi_j. \tag{2.84}
 \end{aligned}$$

Vamos escrever o primeiro termo da segunda linha da expressão acima como

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta \phi_i^* \partial_m \xi_j \sigma^m \bar{\theta} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta \phi_i^* \partial_m \xi_j^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^{mT} \phi_i^* \partial_m \xi_j^\alpha, \tag{2.85}$$

logo

$$-\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta \phi_i^* \partial_m \xi \sigma^m \bar{\theta} = \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^m \phi_i^* \partial_m \xi^\alpha. \tag{2.86}$$

O segundo termo da quarta linha da expressão (2.84) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 -i\sqrt{2}\theta\sigma^m \bar{\theta} \partial_m \phi_i^* \theta \xi_j &= -i\sqrt{2}\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \phi_i^* \theta^\beta \xi_{j\beta} = \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta \partial_m \phi_i^* \xi_j^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\
 &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^{mT} \partial_m \phi_i^* \xi_j^\alpha, \tag{2.87}
 \end{aligned}$$

portanto

$$-i\sqrt{2}\theta\sigma^m \bar{\theta} \partial_m \phi_i^* \theta \xi_j = -\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \sigma_{\dot{\alpha}\alpha}^m \partial_m \phi_i^* \xi_j^\alpha. \tag{2.88}$$

Também podemos reescrever o primeiro e o segundo termo da terceira linha de (2.84) como

$$i\sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\xi}_i \theta \sigma^m \bar{\theta} \partial_m \phi_j = i\sqrt{2} \left(-\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \bar{\xi}_{i\dot{\beta}} \right) \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m \phi_j = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta} \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\xi}_i^{\dot{\alpha}} \partial_m \phi_j \tag{2.89}$$

$$-i\bar{\theta}\bar{\xi}_i \theta\theta \partial_m \xi_j \sigma^m \bar{\theta} = -i\theta\theta \left(-\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \bar{\xi}_{i\dot{\beta}} \right) \partial_m \xi_j^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \partial_m \xi_j^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\xi}_i^{\dot{\alpha}} = -\frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \bar{\xi}_i^{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^m \partial_m \xi_j \tag{2.90}$$

E reescrevemos o segundo termo da quinta linha como:

$$i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^m \partial_m \bar{\xi}_i \theta \xi_j = i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\xi}_i^{\dot{\alpha}} \theta^\beta \xi_{j\beta} = -\frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta \xi_j^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\xi}_i^{\dot{\alpha}} = \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta \partial_m \bar{\xi}_i^{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^m \xi_j \tag{2.91}$$

Substituindo (2.86), (2.88), (2.89), (2.90) e (2.91) na expressão (2.84):

$$\begin{aligned}
 \Phi_i^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi_j(x, \theta, \bar{\theta}) &= \phi_i^* \phi_j + \sqrt{2} \theta \xi_j \phi_i^* + \sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\xi}_i \phi_j + \theta \theta \phi_i^* F_j + \bar{\theta} \bar{\theta} F_i^* \phi_j \\
 &\quad + \theta^\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} [i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\phi_i^* \partial_m \phi_j - \partial_m \phi_i^* \phi_j) - 2 \bar{\xi}_{i\dot{\alpha}} \xi_{j\alpha}] \\
 &\quad + \theta \theta \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \left[\frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\phi_i^* \partial_m \xi_j^\alpha - \partial_m \phi_i^* \xi_j^\alpha) - \sqrt{2} F_j \bar{\xi}_{i\dot{\alpha}} \right] \\
 &\quad + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta^\alpha \left[-\frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\xi}_i^{\dot{\alpha}} \partial_m \phi_j - \partial_m \bar{\xi}_i^{\dot{\alpha}} \phi_j) + \sqrt{2} F_i^* \xi_{j\alpha} \right] \\
 &+ \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \left[F_i^* F_j + \frac{1}{4} \phi_i^* \square \phi_j + \frac{1}{4} \square \phi_i^* \phi_j - \frac{1}{2} \partial_m \phi_i^* \partial^m \phi_j + \frac{i}{2} \partial_m \bar{\xi}_i \bar{\sigma}^m \xi_j - \frac{i}{2} \bar{\xi}_i \bar{\sigma}^m \partial_m \xi_j \right]. \quad (2.92)
 \end{aligned}$$

Podemos notar que nos coeficientes de $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$, há termos de energia cinética para a componente escalar ϕ e para componente fermiônica ξ .

Concluindo, para construirmos a lagrangeana supersimétrica estamos interessados nos coeficientes de $\theta\theta$, que aparecem em (2.82) e (2.83), e nos referimos como termos F , assim como nos coeficientes de $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$, que aparecem em (2.92), e nos referimos como termos D . Logo, usando (2.51), (2.52) e (2.53) podemos escrever:

$$[\Phi_i(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi_j(x, \theta, \bar{\theta})]_F = \phi_i(x) F_j(x) + F_i(x) \phi_j(x) - \xi_i(x) \xi_j(x) \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned}
 [\Phi_i(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi_j(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi_k(x, \theta, \bar{\theta})]_F &= \phi_i(y) \phi_j(y) F_k(y) + \phi_i(y) F_j(y) \phi_k(y) \\
 &+ F_i(y) \phi_j(y) \phi_k(y) - \phi_i(y) \xi_j(y) \xi_k(y) - \xi_i(y) \xi_j(y) \phi_k(y) - \xi_i(y) \phi_j(y) \xi_k(y) \quad (2.94)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta})]_D &= F_i^*(x) F_j(x) + \frac{1}{4} \phi_i^*(x) \square \phi_j(x) + \frac{1}{4} \square \phi_i^*(x) \phi_j(x) \\
 &- \frac{1}{2} \partial_m \phi_i^*(x) \partial^m \phi_j(x) + \frac{i}{2} \partial_m \bar{\xi}_i(x) \bar{\sigma}^m \xi_j(x) - \frac{i}{2} \bar{\xi}_i(x) \bar{\sigma}^m \partial_m \xi_j(x), \quad (2.95)
 \end{aligned}$$

onde na última equação usamos $\bar{\xi} \bar{\zeta} \chi \tau = \frac{1}{2} \bar{\xi} \bar{\sigma}^\mu \chi \bar{\zeta} \bar{\sigma}_\mu \bar{\tau}$.

A Eq. (2.95) pode ser escrita também como:

$$[\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta})]_D = F_i^*(x) F_j(x) + \phi_i^*(x) \square \phi_j(x) + i \partial_m \bar{\xi}_i(x) \bar{\sigma}^m \xi_j(x), \quad (2.96)$$

onde usamos

$$\begin{aligned}
 \partial_m (\bar{\xi}_i \bar{\sigma}^m \xi_j) &= \partial_m \bar{\xi}_i \bar{\sigma}^m \xi_j + \bar{\xi}_i \bar{\sigma}^m \partial_m \xi_j, \\
 \partial_m (\partial^m \phi_i^* \phi_j) &= \square \phi_i^* \phi_j + \partial_m \phi_i^* \partial^m \phi_j, \\
 \partial_m (\phi_i^* \partial^m \phi_j) &= \phi_i^* \square \phi_j + \partial_m \phi_i^* \partial^m \phi_j, \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

e desprezamos o termos de superfície $\partial_m (\bar{\xi}_i \bar{\sigma}^m \xi_j)$ e $\partial_m (\partial^m \phi_i^* \phi_j)$.

Vamos definir então uma lagrangeana supersimétrica de uma forma geral como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_D, \quad (2.98)$$

sendo

$$\mathcal{L}_F = [W(\Phi_i) + h.c.]_F, \quad \mathcal{L}_D = \left[\Phi_i^\dagger \Phi_i \right]_D \quad (2.99)$$

onde $W(\Phi_i)$ é o superpotencial definido por:

$$W(\Phi_i) \equiv a_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3!} f_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \quad (2.100)$$

com os Φ_i sendo todos supercampos quirais de mão direita e as a_i , m_{ij} e f_{ijk} são constantes com dimensões de massa 2, 1, 0, respectivamente.

Conclusão

Neste capítulo vimos conceitos de SUSY como o superespaço e os supercampos. Mostramos como são introduzidos os superparceiros ao espectro de partículas usuais do Modelo Padrão. Definimos também qual é a forma de uma lagrangeana invariante sobre transformações supersimétricas. Mostramos que esta lagrangeana é construída em termos de produtos de supercampos quirais.

No próximo capítulo usaremos as definições de supercampo quiral e vetorial para construirmos as extensões supersimétricas da QED e da QCD. Encontraremos também as lagrangeanas invariantes sobre SUSY e sobre transformações de gauge destas teorias.

Capítulo 3

Teorias Supersimétricas

Como vimos no capítulo anterior, a lagrangeana invariante sob transformações supersimétricas deve possuir a forma dada pela Eq. (2.98), a qual é escrita em termos de produtos de supercampos quirais. Como resultado destes produtos (Eqs. (2.93), (2.94) e (2.96)), aparecem campos espinoriais ξ , campos escalares ϕ e campos vetoriais v_m .

Na extensão supersimétrica da física de partículas usual, associamos a cada partícula conhecida um superparceiro com estatística diferente. Por exemplo, ao elétron (férmion) introduzimos o selétron \tilde{e} (bóson).

Neste capítulo vamos estudar a versão supersimétrica da eletrodinâmica quântica (SQED) e da Cromodinâmica Quântica (SQCD), que são ingredientes fundamentais do Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM) [33,34,36]. Mostraremos como surgem as partículas e seus parceiros supersimétricos. Encontraremos as lagrangeanas destas teorias e suas respectivas regras de Feynman.

Como a SQED é uma extensão supersimétrica da QED, o supercampo quiral usado para construirmos a lagrangeana terá como um de seus componentes um campo espinorial de Weyl que descreverá o elétron (férmion usual da QED) assim como um campo escalar componente ϕ que descreverá um selétron (bóson). O campo vetorial v_m , componente do supercampo vetorial, descreverá o fóton (bóson de gauge da QED) e a componente espinorial do campo descreverá o fotino, que é o campo fermiônico superparceiro do fóton.

Analogamente, na SQCD o supercampo quiral conterà como componente um campo espinorial que descreverá o quark (férmion) assim como um campo escalar para o squark (bóson). O supercampo vetorial será constituído pelo campo vetorial v_m que descreverá o glúon (bóson de gauge da QCD) e um campo espinorial que descreverá o superparceiro do glúon, conhecido como glúíno.

3.1 Eletrodinâmica Quântica Supersimétrica (SQED)

Para uma extensão supersimétrica da QED, é necessário combinar a simetria de gauge $U(1)$ (seção (1.2)) com supersimetria.

Da definição (Eq. (2.98)) para uma lagrangeana supersimétrica, \mathcal{L}_D possui termos de energia cinética para os campos espinorial ξ e escalar ϕ . Estes dois campos são componentes de um supercampo quiral de mão esquerda Φ . Na extensão supersimétrica da QED, o campo espinorial ξ deve representar um elétron e o campo escalar ϕ o selétron (superparceiro do elétron). Devemos encontrar agora os termos de energia cinética para os campos

vetorial v_m ¹ e espinorial λ , que são componentes do supercampo vetorial V e, em SQED, representam o fóton e fotino (superpáreço do fóton), respectivamente. Vamos encontrar este termo de energia cinética da lagrangeana da SQED em função de um tensor de campo eletromagnético, em analogia à $F_{mn}F^{mn}$ da QED (seção (1.2)). Devemos lembrar que este deve ser invariante sob uma transformação de supergauge abeliana.

Para um supercampo vetorial $V(x, \theta, \bar{\theta})$, vamos definir

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V, \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}}V \quad (3.1)$$

Como $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}\bar{D} = 0$, temos que $\bar{D}_{\dot{\alpha}}W_{\dot{\alpha}} = 0$, logo W_α é um supercampo quirral de mão esquerda. Similarmente, $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ é um supercampo quirral de mão direita. Podemos mostrar que W_α e $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ são invariantes sob a transformação de gauge abeliana (2.73), ou seja,

$$W_\alpha \rightarrow -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha(V + \Phi + \Phi^\dagger) = W_\alpha - \frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha(\Phi) \quad \text{pois } D_\alpha\Phi^\dagger = 0 \quad (3.2)$$

Podemos escrever

$$\bar{D}\bar{D}D_\alpha\Phi = \bar{D}_{\dot{\beta}}\bar{D}^{\dot{\beta}}D_\alpha\Phi = -\bar{D}^{\dot{\beta}}\bar{D}_{\dot{\beta}}D_\alpha\Phi = -\bar{D}^{\dot{\beta}}(\bar{D}_{\dot{\beta}}D_\alpha + D_\alpha\bar{D}_{\dot{\beta}})\Phi \quad \text{pois } \bar{D}_{\dot{\beta}}\Phi = 0 \quad (3.3)$$

Logo (3.2) fica

$$\begin{aligned} W_\alpha &\rightarrow W_\alpha + \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\beta}}\{\bar{D}_{\dot{\beta}}, D_\alpha\}\Phi \\ &= W_\alpha + \frac{1}{4}\bar{D}^{\dot{\beta}}(-2(\sigma^m)_{\dot{\beta}\dot{\beta}}P_m)\Phi \\ &= W_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma^m)_{\dot{\beta}\dot{\beta}}(\bar{D}^{\dot{\beta}}P_m - P_m\bar{D}^{\dot{\beta}})\Phi \\ &= W_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma^m)_{\dot{\beta}\dot{\beta}}[\bar{D}^{\dot{\beta}}, P_m]\Phi \\ &= W_\alpha, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde usamos $[\bar{D}^{\dot{\beta}}, P_m] = 0$, pois $\{\bar{D}_{\dot{\beta}}, D_\alpha\} = -2(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}}P_m$.

A partir da definição (3.1), é possível encontrar expressões para W_α e $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ como demonstrado no apêndice C.

Usando as expressões (C.19) e (C.20) do apêndice C, podemos escrever o termo de energia cinética para o supercampo vetorial v_m , construído a partir dos supercampos espinoriais de mão esquerda W_α e de mão direita $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$, como

$$\frac{1}{4}[W^\alpha W_\alpha + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}]_F = \frac{1}{2}D^2(x) - \frac{1}{4}F_{mn}(x)F^{mn}(x) - i\lambda(x)\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}(x), \quad (3.5)$$

onde $F_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m$. Podemos ver que os dois últimos termos desta equação representam os termos de energia cinética para o fóton v_m e para um férmion de Majorana λ . Como vimos anteriormente, o campo D não é um campo físico, ele é introduzido para garantir a igualdade de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos.

¹ O campo vetorial que descreve o fóton foi definido no capítulo 1 como A_m . Aqui, vamos usar a notação do Wess-Bagger [71] e definir o campo vetorial do fóton como v_m .

Continuaremos nossa procura por uma expressão para a lagrangeana supersimétrica invariante sob transformações de gauge local $U(1)$. Como fizemos na QED, vamos primeiramente analisar a seguinte transformação de gauge global sobre um supercampo quiral de mão esquerda:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\Lambda}\phi, \quad (3.6)$$

onde Λ é constante e real. Nós podemos promover Λ a um supercampo quiral, com propriedade $\Lambda = \Lambda^\dagger$ (supercampo quiral de mão esquerda igual ao de mão direita). Este seria um caso especial de supercampo quiral, já que ele satisfaz o vínculo $\bar{D}_\alpha\Lambda = D_\alpha\Lambda = 0$, que é a condição de quiralidade. Assim, teríamos uma transformação de mão esquerda como

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\Lambda}\phi, \quad (3.7)$$

e uma transformação de mão direita

$$\phi^\dagger \rightarrow \phi'^\dagger = e^{i\Lambda^\dagger}\phi^\dagger = e^{i\Lambda}\phi^\dagger. \quad (3.8)$$

Logo

$$\phi'^\dagger\phi' = \phi^\dagger e^{i\Lambda} e^{-i\Lambda}\phi = \phi^\dagger\phi \quad (3.9)$$

Concluimos então que $\phi^\dagger\phi$ é invariante sob uma transformação de gauge global.

Se pretendemos tratar com a invariância de gauge local, Λ deve ser função de x . Vamos também definir Λ como sendo uma supercampo quiral de mão esquerda e Λ^\dagger de mão direita, assim como ϕ' e ϕ'^\dagger . Como neste caso Λ depende de x , é impossível que o supercampo quiral de mão esquerda seja igual ao de mão direita ($\Lambda \neq \Lambda^\dagger$), logo

$$\phi'^\dagger\phi' = \phi^\dagger e^{i\Lambda^\dagger} e^{-i\Lambda}\phi \neq \phi^\dagger\phi \quad (3.10)$$

Percebemos então que $\phi'^\dagger\phi'$ não é invariante sob transformação de gauge local. Como vimos na seção (1.2), a lagrangeana de Dirac também não é invariante sob transformações de gauge local. Para obtermos a lagrangeana invariante da QED, foi necessário introduzir um campo de gauge, A_m . Vamos então realizar um procedimento análogo e introduzir o supercampo vetorial de gauge, V , que se transforma como:

$$e^V \rightarrow e^{-i\Lambda^\dagger(x)} e^V e^{i\Lambda(x)} \quad (3.11)$$

No caso abeliano todos os supercampos comutam; logo, de acordo com a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, podemos escrever

$$V \rightarrow V' = V - i\Lambda^\dagger(x) + i\Lambda(x) \quad (3.12)$$

Temos então que

$$\phi'^\dagger e^{V'} \phi' \rightarrow \phi'^\dagger e^{V'} \phi' = \phi^\dagger e^{i\Lambda^\dagger(x)} e^{-i\Lambda^\dagger(x)} e^V e^{i\Lambda(x)} e^{-i\Lambda(x)} \phi = \phi^\dagger e^V \phi \quad (3.13)$$

Finalmente, o produto de supercampos quirais definido por $\phi'^\dagger e^V \phi$ é invariante sob transformações de gauge local.

No espectro de partículas da SQED temos o elétron. Podemos pensar no elétron como uma combinação linear complexa de 2 espinores de Weyl. Devemos então construir a lagrangeana da SQED em termos de dois supercampos quirais de mão esquerda Φ_+ e Φ_- com respectivas cargas q , $-q$ e que se transformam sob transformações de gauge como

$$\Phi'_+ = e^{-2iq\Lambda(x)}\Phi_+, \quad \Phi'_- = e^{2iq\Lambda(x)}\Phi_- \quad (3.14)$$

Aqui Φ_+ contém a componente quiral de mão esquerda do campo fermiônico e Φ_- e a do campo anti-fermiônico, enquanto Φ_+^\dagger contém a componente de mão direita do campo fermiônico e Φ_-^\dagger a do campo anti-fermiônico. Com as transformações de gauge sobre os campos definidas em (3.14), vamos agora encontrar quais os termos da expressão geral para a lagrangeana de teorias supersimétricas (ver Eq. (2.98)), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} \left(\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha + \int d^2\bar{\theta} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \right) + \int d^4\theta \bar{\Phi}_i e^{2gt_i V} \Phi_i \\ & + \left[\int d^2\theta \left(h_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3!} f_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

são invariantes sob transformações de gauge.

Temos que

$$\Phi_i^\dagger e^{2qV} \Phi_i \rightarrow \Phi_+^\dagger e^{2iq\Lambda} e^{2qV} e^{-2iq\Lambda} \Phi_+ = \Phi_+^\dagger e^{2qV} \Phi_+ \quad \text{para } g = q \text{ e } t = 1 \quad (3.16)$$

$$\Phi_i^\dagger e^{-2qV} \Phi_i \rightarrow \Phi_-^\dagger e^{-2iq\Lambda} e^{-2qV} e^{2iq\Lambda} \Phi_- = \Phi_-^\dagger e^{-2qV} \Phi_- \quad \text{para } g = q \text{ e } t = -1 \quad (3.17)$$

$$\Phi_i \Phi_j = \Phi_+ e^{-2iq\Lambda} e^{2iq\Lambda} \Phi_- = \Phi_+ \Phi_- \quad (3.18)$$

$$\Phi_i \Phi_j = \Phi_- e^{2iq\Lambda} e^{-2iq\Lambda} \Phi_+ = \Phi_- \Phi_+ \quad (3.19)$$

Como Φ_i e $\Phi_i \Phi_j \Phi_k$ não são invariantes, a lagrangeana da SQED é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQED} = & \frac{1}{4} \left(\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha + \int d^2\bar{\theta} \bar{W}^{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \right) + \int d^4\theta \Phi_+^\dagger e^{2qV} \Phi_+ \\ & + \int d^4\theta \Phi_-^\dagger e^{-2qV} \Phi_- + \frac{1}{2} M \left(\int d^2\theta \Phi_+ \Phi_- + \int d^2\bar{\theta} \Phi_+^\dagger \Phi_-^\dagger \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como demonstrado no apêndice (C.2), podemos escrever

$$\begin{aligned} [\Phi^\dagger e^{2qV} \Phi]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = & F^* F + \phi^* \square \phi - i\xi \sigma^m \partial_m \bar{\xi} - qv^m (\bar{\xi} \bar{\sigma}^m \xi + i\phi^* \partial_m \phi - i\partial_m \phi^* \phi) \\ & - \sqrt{2}q \bar{\lambda} \bar{\xi} \phi - \sqrt{2}q \lambda \xi \phi^* + q(D - qv_m v^m) \phi^* \phi \end{aligned} \quad (3.21)$$

Os supercampos quirais de mão esquerda Φ_+ e Φ_- , constituintes da lagrangeana da SQED (3.20), podem ser definidos como

$$\begin{aligned} \Phi_+(y, \theta) &= \phi_+(y) + \sqrt{2}\theta \xi_+(y) + \theta\theta F_+(y) \\ \Phi_-(y, \theta) &= \phi_-(y) + \sqrt{2}\theta \xi_-(y) + \theta\theta F_-(y) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \left[\Phi_+^\dagger e^{2qV} \Phi_+ \right]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= F_+^* F_+ + \phi_+^* \partial_m \partial^m \phi_+ - i \xi_+ \sigma^m \partial_m \bar{\xi}_+ \\
 &- qv^m (\bar{\xi}_+ \bar{\sigma}^m \xi_+ + i \phi_+^* \partial_m \phi_+ - i \partial_m \phi_+^* \phi_+) \\
 &- \sqrt{2} q \lambda \bar{\xi}_+ \phi_+ - \sqrt{2} q \lambda \xi_+ \phi_+^* + q (D - qv_m v^m) \phi_+^* \phi_+ \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\Phi_-^\dagger e^{-2qV} \Phi_- \right]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= F_-^* F_- + \phi_-^* \partial_m \partial^m \phi_- - i \xi_- \sigma^m \partial_m \bar{\xi}_- \\
 &+ qv^m (\bar{\xi}_- \bar{\sigma}^m \xi_- + i \phi_-^* \partial_m \phi_- - i \partial_m \phi_-^* \phi_-) \\
 &+ \sqrt{2} q \lambda \bar{\xi}_- \phi_- + \sqrt{2} q \lambda \xi_- \phi_-^* - q (D + qv_m v^m) \phi_-^* \phi_- \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Em analogia à Eq. (2.93), podemos escrever também

$$[\Phi_+ \Phi_-]_{\theta\theta} = \phi_+ F_- + F_+ \phi_- - \xi_+ \xi_- \quad (3.25)$$

$$[\Phi_+^\dagger \Phi_-^\dagger]_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = \phi_+^* F_-^* + F_+^* \phi_-^* - \bar{\xi}_+ \bar{\xi}_- \quad (3.26)$$

Substituindo (3.5), (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26) em (3.20), temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{SQED} &= \frac{1}{2} D^2(x) - \frac{1}{4} F_{mn}(x) F^{mn}(x) - i \lambda(x) \sigma^m \partial_m \bar{\lambda}(x) + F_+^* F_+ + F_-^* F_- \\
 &+ \phi_+^* \partial_m \partial^m \phi_+ + \phi_-^* \partial_m \partial^m \phi_- - i (\xi_+ \sigma^m \partial_m \bar{\xi}_+ + \xi_- \sigma^m \partial_m \bar{\xi}_-) \\
 &- qv^m (\bar{\xi}_+ \bar{\sigma}^m \xi_+ - \bar{\xi}_- \bar{\sigma}^m \xi_- + i \phi_+^* \partial_m \phi_+ - i \phi_-^* \partial_m \phi_- + i \partial_m \phi_-^* \phi_- - i \partial_m \phi_+^* \phi_+) \\
 &- \sqrt{2} q (\lambda \bar{\xi}_+ \phi_+ - \lambda \bar{\xi}_- \phi_- + \lambda \xi_+ \phi_+^* - \lambda \xi_- \phi_-^*) \\
 &+ qD (\phi_+^* \phi_+ - \phi_-^* \phi_-) - q^2 v_m v^m (\phi_+^* \phi_+ + \phi_-^* \phi_-) \\
 &+ m (\phi_+ F_- + F_+ \phi_- - \xi_+ \xi_- + \phi_+^* F_-^* + F_+^* \phi_-^* - \bar{\xi}_+ \bar{\xi}_-). \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Os campos auxiliares podem ser eliminados usando as equações de vínculo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_+} = 0 \rightarrow F_+^* + m \phi_- = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_-} = 0 \rightarrow F_-^* + m \phi_+ = 0, \quad (3.29)$$

logo

$$F_{+,-}^* = -m \phi_{-,+}. \quad (3.30)$$

Também podemos obter, através de equações de vínculo, que:

$$F_{+,-} = -m \phi_{-,+}^* \quad (3.31)$$

$$D = -q (\phi_+^* \phi_+ - \phi_-^* \phi_-) \quad (3.32)$$

Logo, a Eq. (3.27) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{SQED} &= -\frac{1}{4}F_{mn}(x)F^{mn}(x) - i\lambda(x)\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}(x) - m^2(|\phi_+|^2 + |\phi_-|^2) \\
 &+ \phi_+^*(\partial_m + iqv_m)(\partial^m + iqv^m)\phi_+ + \phi_-^*(\partial_m - iqv_m)(\partial^m - iqv^m)\phi_- \\
 &- i\xi_+\sigma^m(\partial_m + iqv_m)\bar{\xi}_+ - i\xi_-\sigma^m(\partial_m - iqv_m)\bar{\xi}_- \\
 &- \sqrt{2}q(\bar{\lambda}\bar{\xi}_+\phi_+ - \bar{\lambda}\bar{\xi}_-\phi_- + \lambda\xi_+\phi_+^* - \lambda\xi_-\phi_-^*) \\
 &- \frac{q^2}{2}(|\phi_+|^2 - |\phi_-|^2)^2 - m(\xi_+\xi_- + \bar{\xi}_+\bar{\xi}_-), \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

onde usamos

$$\begin{aligned}
 \phi_+^*(\partial_m + iqv_m)(\partial^m + iqv^m)\phi_+ &= \phi_+^*(\partial_m\partial^m + iq\partial_m v^m + iqv_m\partial^m - q^2v_mv^m)\phi_+ \\
 &= \phi_+^*(\partial_m\partial^m - iqv^m\partial_m + iqv_m\partial^m - q^2v_mv^m), \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

pois $\partial_m(\phi_+^*v^m\phi_+) = v^m\phi_+\partial_m\phi_+^* + \phi_+^*\partial_m(v^m\phi_+)$ e consideramos o termo de superfície $\partial^m(\phi_+^*v_m\phi_+)$ nulo.

Vamos definir o espinor de Dirac de quatro componentes como

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_{+\alpha} \\ \bar{\xi}_{-\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = - \begin{pmatrix} \xi_{-}^{\beta} & \bar{\xi}_{+\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \tag{3.35}$$

e para campos de gauginos definimos

$$\lambda_M = \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha} \\ \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda}_M = - \begin{pmatrix} \lambda^{\beta} & \bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

No apêndice (C.3) encontram-se as equações necessárias para reescrevermos a lagrangeana (3.33) em termos destes espinores.

Usando as Eqs. (C.39), (C.41) e (C.44) podemos escrever (3.33) como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{SQED} &= -\frac{1}{4}F_{mn}(x)F^{mn}(x) - \frac{i}{2}\bar{\lambda}_M\gamma^m\partial_m\lambda_M - m^2(|\phi_-|^2 + |\phi_+|^2) \\
 &+ \phi_+^*\mathcal{D}_m\mathcal{D}^m\phi_+ + \phi_-^*\mathcal{D}_m^{\dagger}\mathcal{D}^{m\dagger}\phi_- + i\bar{\psi}\gamma^m\mathcal{D}_m\psi \\
 &+ \sqrt{2}q(\bar{\psi}P_R\lambda_M\phi_+ - \bar{\lambda}_MP_R\psi\phi_- + \bar{\lambda}_MP_L\psi\phi_+^* - \bar{\psi}P_L\lambda_M\phi_-^*) \\
 &- \frac{q^2}{2}(|\phi_+|^2 - |\phi_-|^2)^2 + m\bar{\psi}\psi, \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{D}_m = \partial_m + iqv_m$ e os operadores P_L e P_R são operadores projeção definidos conforme mostra o apêndice B (Eqs. (B.7) e (B.8)). A lagrangeana acima, Eq. (3.37), descreve a eletrodinâmica quântica supersimétrica. Comparando com a lagrangeana da QED (seção 1.2) podemos perceber que os campos ψ , ϕ possuem massa e carga elétrica, enquanto os campos λ e v_m não são massivos. A teoria consiste então de férmions de Dirac descritos por um campo ψ , de sférmions de quiralidade esquerda descritos por um campo escalar complexo ϕ_+ (e ϕ_+^*), de sférmions de quiralidade direita descritos por um campo escalar complexo ϕ_- (e ϕ_-^*), de fótons γ descritos pelo campo vetorial v_m e de fotinos $\tilde{\gamma}$ descritos por um campo Majorana de quatro componentes λ_M .

Da lagrangeana da SQED (3.37) podemos escrever as regras de Feynman para os vértices ($i\mathcal{L}_{int}$). Na figura (3.1), mostramos as regras de Feynman para alguns vértices da SQED. Para um conjunto mais completo de regras dos termos de vértice ver [20, 76].

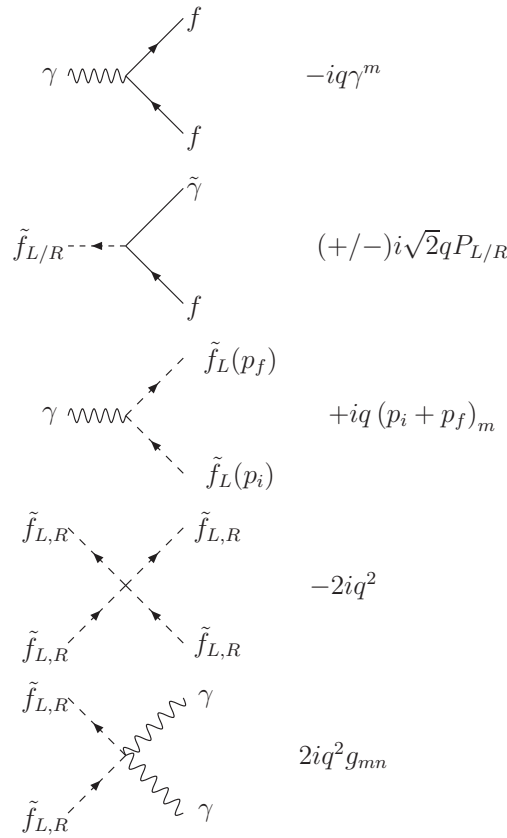


Fig. 3.1: Regras de Feynman da SQED. Usamos linhas contínuas para férmions de Dirac e de Majorana e linhas tracejadas para os superparceiros bosônicos. Para mais detalhes sobre a convenção usada nesta figura, ver capítulo 4.

3.2 Cromodinâmica Quântica Supersimétrica (SQCD)

Assim como a QCD, a super QCD é uma teoria de gauge não-abeliana. Para construirmos a super QCD nós temos que combinar a simetria de gauge $SU(3)$ com supersimetria. Aqui vamos considerar uma representação fundamental do grupo $SU(3)$ com oito geradores T^a e seus correspondentes supercampos V^a (que contém o glúons v_m^a ² como componente). A transformação de gauge é dada como na equação (3.11) para o caso abeliano

$$\begin{aligned}
 e^V &\rightarrow e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} \\
 e^{-V} &\rightarrow e^{-V'} = e^{-i\Lambda} e^{-V} e^{i\Lambda^\dagger}.
 \end{aligned}
 \tag{3.38}$$

² O campo vetorial que descreve o glúon foi definido no capítulo 1 como A_m^a . Aqui, vamos seguir usando notação do Wess-Bagger [71] e definir o campo vetorial do glúon como v_m^a .

Fazemos as seguintes generalizações para o caso não abeliano

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V^a T^a \\ \Lambda &\rightarrow T^a \Lambda^a \\ [T^a, T^b] &= if^{abc} T^c \end{aligned} \quad (3.39)$$

Não é possível usarmos a Eq. (3.12), pois neste caso temos termos que não comutam na fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Aplicando esta fórmula na Eq. (3.38), podemos encontrar a transformação não-abeliana

$$\begin{aligned} e^{-i\Lambda^\dagger} e^{V'} e^{i\Lambda} &= e^{-i\Lambda^\dagger(x)} e^{V+i\Lambda+\frac{i}{2}[V,\Lambda]} \\ &= e^{-i\Lambda^\dagger+V+i\Lambda+\frac{i}{2}[V,\Lambda]+\frac{1}{2}[-i\Lambda^\dagger, V+i\Lambda+\frac{i}{2}[V,\Lambda]]} \\ &= e^{-i\Lambda^\dagger+V+i\Lambda+\frac{i}{2}[V,\Lambda]+\frac{i}{2}[V,\Lambda^\dagger]} \\ &= e^{V+i(\Lambda-\Lambda^\dagger)+\frac{i}{2}[V,\Lambda+\Lambda^\dagger]}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde consideramos o gauge de Wess-Zumino. Logo, podemos escrever

$$V' - V = i(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \frac{i}{2}[V, \Lambda + \Lambda^\dagger]. \quad (3.41)$$

Na SQCD o supercampo vetorial é formado pelo campo vetorial do glúon v_m^a e pelo campo espinorial λ^a , que representa o gluíno. Assim como na SQED, temos que encontrar os termos de energia cinética da lagrangeana para estes campos e estes termos devem ser invariantes sob transformações de gauge não-abelianas. Os supercampos dados pelas Eqs. (3.1) não são invariantes no caso não-abeliano. Vamos definir o supercampo análogo para o caso não-abeliano como

$$W_\alpha \equiv -\frac{1}{8g} \bar{D}\bar{D}e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV}, \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} \equiv \frac{1}{8g} DDe^{2gV} \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-2gV} \quad (3.42)$$

Para demonstrar que estas equações são invariantes sob transformações de gauge, vamos usar a Eq. (3.38), ou seja, vamos escrever

$$W'_\alpha = -\frac{1}{8g} \bar{D}\bar{D}e^{-2ig\Lambda} e^{-2gV} e^{2ig\Lambda^\dagger} D_\alpha e^{-2ig\Lambda^\dagger} e^{2gV} e^{2ig\Lambda} \quad (3.43)$$

Das propriedades quirais de Λ e Λ^\dagger ($\bar{D}\Lambda = D\Lambda^\dagger = 0$), temos que

$$\begin{aligned} W'_\alpha &= -\frac{1}{8g} e^{-2ig\Lambda} \bar{D}\bar{D}e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV} e^{2ig\Lambda} \\ &= -\frac{1}{8g} e^{-2ig\Lambda} \bar{D}\bar{D}e^{-2gV} \{ [D_\alpha e^{2gV}] + e^{2gV} D_\alpha \} e^{2ig\Lambda} \\ &= e^{-2ig\Lambda} W_\alpha e^{2ig\Lambda} - \frac{1}{8g} e^{-2ig\Lambda} \bar{D}\bar{D}D_\alpha e^{2ig\Lambda} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Vamos agora demonstrar que o último termo da equação acima é nulo. Podemos reescrevê-lo como:

$$\begin{aligned}
 \bar{D}\bar{D}D_\alpha e^{2ig\Lambda} &= \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}D_\alpha e^{2ig\Lambda} = -\bar{D}^{\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}D_\alpha e^{2ig\Lambda} \\
 &= -\bar{D}^{\dot{\alpha}}\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha\}e^{2ig\Lambda} + \bar{D}^{\dot{\alpha}}D_\alpha\bar{D}_{\dot{\alpha}}e^{2ig\Lambda} \\
 &= 2(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{D}^{\dot{\alpha}}P_m e^{2ig\Lambda} \\
 &= 2(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}}P_m\bar{D}^{\dot{\alpha}}e^{2ig\Lambda} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Na segunda linha usamos $\{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, D_\alpha\} = 2(\sigma^m)_{\alpha\dot{\alpha}}P_m$ e $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda = 0$. Na terceira usamos $[\bar{D}^{\dot{\alpha}}, P_m] = 0$. Logo, os supercampos W_α e $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ transformam-se como

$$W'_\alpha = e^{-2ig\Lambda}W_\alpha e^{2ig\Lambda} \quad \text{e} \quad \bar{W}'^{\dot{\alpha}} = e^{2ig\Lambda}\bar{W}^{\dot{\alpha}}e^{-2ig\Lambda} \tag{3.46}$$

No apêndice C.4 demonstramos como chegar nas expressões para W_α^a e $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$. A partir das expressões (C.77) e (C.78) obtidas no apêndice C.4, podemos escrever, para o caso não-abeliano, o termos de energia cinética para os campos v_m^a e λ^a

$$\frac{1}{4} [W^{\alpha a}W_\alpha^a + \bar{W}_{\dot{\alpha}}^a\bar{W}^{\dot{\alpha} a}]_F = \frac{1}{2}D^a D^a(x) - \frac{1}{4}F_{mn}^a(x)F^{mna}(x) - i\lambda^a\sigma^m D_m\bar{\lambda}^c, \tag{3.47}$$

onde $F_{mn}^a = \partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a - gf^{abc}v_m^b v_n^c$.

Assim como introduzimos supercampos quirais Φ_+ e Φ_- para SQED, vamos introduzir dois supercampos quirais Φ_+ e Φ_- de mão esquerda, que se transformam como um tripleto e anti-tripletto de cor $SU(3)$ respectivamente, para descrever um quark. Estes supercampos transformam-se sob transformações de gauge não-abelianas como

$$\Phi'_+ = e^{-2ig_s T^a \Lambda^a} \Phi_+, \quad \Phi'_- = e^{2ig_s \bar{T}^a \Lambda^a} \Phi_-, \tag{3.48}$$

onde g_s é o acoplamento da QCD.

A lagrangeana invariante é dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{4} \left(\int d^2 W^{\alpha a} W_\alpha^a + \int d^2 \bar{\theta} \bar{W}^{\dot{\alpha} a} \bar{W}_{\dot{\alpha}}^a \right) + \int d^4 \theta \Phi_+^\dagger e^{2g_s(T^a V^a)} \Phi_+ \\
 &+ \int d^4 \theta \Phi_-^\dagger e^{-2g_s(T^a V^a)} \Phi_- + \frac{1}{2} M \left(\int d^2 \theta \Phi_-^T \Phi_+ + \int d^2 \bar{\theta} \Phi_+^T \Phi_- \right)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Podemos escrever os termos da lagrangeana acima, usando (C.36), como

$$\begin{aligned}
 \left[\Phi_+^\dagger e^{2g_s(T^a V^a)} \Phi_+ \right]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= F_+^* F_+ + \phi_+^\dagger \partial_m \partial^m \phi_+ - i\xi_+ \sigma^m \partial_m \bar{\xi}_+ \\
 &- g_s T^a v^{ma} \left(\bar{\xi}_+ \bar{\sigma}^m \xi_+ + i\phi_+^\dagger \partial_m \phi_+ - i\partial_m \phi_+^\dagger \phi_+ \right) \\
 &- \sqrt{2} g_s T^a \bar{\lambda}^a \bar{\xi}_+ \phi_+ - \sqrt{2} g_s T^a \lambda^a \xi_+ \phi_+^\dagger \\
 &+ (g_s T^a D - g_s^2 T^a T^b v_{ma} v^{mb}) \phi_+^\dagger \phi_+
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\Phi_-^\dagger e^{-2g_s(T^a V^a)} \Phi_- \right]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= F_-^* F_- + \phi_-^\dagger \partial_m \partial^m \phi_- - i\xi_- \sigma^m \partial_m \bar{\xi}_- \\
 &+ g_s T^a v^{ma} \left(\bar{\xi}_- \bar{\sigma}^m \xi_- + i\phi_-^\dagger \partial_m \phi_- - i\partial_m \phi_-^\dagger \phi_- \right) \\
 &+ \sqrt{2} g_s T^a \bar{\lambda}^a \bar{\xi}_- \phi_- + \sqrt{2} g_s T^a \lambda^a \xi_- \phi_-^\dagger \\
 &- \left(g_s T^a D + g_s^2 T^a T^b v_{ma} v^{mb} \right) \phi_-^\dagger \phi_-
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\left[\Phi_-^T \Phi_+ \right]_{\theta\theta} = \phi_-^T F_+ + F_-^T \phi_+ - \xi_- \xi_+ \tag{3.52}$$

$$\left[\Phi_-^* \Phi_+^\dagger \right]_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = \phi_-^* F_+^\dagger + F_-^* \phi_+^\dagger - \bar{\xi}_- \bar{\xi}_+ \tag{3.53}$$

A lagrangeana para SQCD pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{SQCD} &= \frac{1}{2} D^a D^a(x) - \frac{1}{4} F_{mn}^a(x) F^{mna}(x) - i\lambda^a \sigma^m \mathcal{D}_m \bar{\lambda}^c + F_+^* F_+ + F_-^* F_- + \\
 &+ \phi_+^\dagger \partial_m \partial^m \phi_+ + \phi_-^\dagger \partial_m \partial^m \phi_- - i \left(\xi_+ \sigma^m \partial_m \bar{\xi}_+ + \xi_- \sigma^m \partial_m \bar{\xi}_- \right) \\
 &- g_s T^a v^{ma} \left(\bar{\xi}_+ \bar{\sigma}^m \xi_+ - \bar{\xi}_- \bar{\sigma}^m \xi_- + i\phi_+^\dagger \partial_m \phi_+ - i\phi_-^\dagger \partial_m \phi_- + i\partial_m \phi_-^\dagger \phi_- - i\partial_m \phi_+^\dagger \phi_+ \right) \\
 &- \sqrt{2} g_s T^a \left(\bar{\lambda}^a \bar{\xi}_+ \phi_+ - \bar{\lambda}^a \bar{\xi}_- \phi_- + \lambda^a \xi_+ \phi_+^\dagger - \lambda^a \xi_- \phi_-^\dagger \right) \\
 &+ g_s T^a D^a \left(\phi_+^\dagger \phi_+ - \phi_-^\dagger \phi_- \right) - g_s^2 v_m^a v^{mb} T^a T^b \left(\phi_+^\dagger \phi_+ + \phi_-^\dagger \phi_- \right) \\
 &+ m \left(\phi_-^T F_+ + F_-^T \phi_+ - \xi_- \xi_+ + \phi_-^* F_+^\dagger + F_-^* \phi_+^\dagger - \bar{\xi}_- \bar{\xi}_+ \right)
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Das equações de vínculo

$$F_+^* = -m\phi_-^T \quad F_-^* = -m\phi_+ \tag{3.55}$$

$$F_+ = -m\phi_-^* \quad F_- = -m\phi_+^\dagger \tag{3.56}$$

$$D^a = -g_s T^a \left(\phi_+^\dagger \phi_+ - \phi_-^\dagger \phi_- \right), \tag{3.57}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{SQCD} &= -\frac{1}{4} F_{mn}^a(x) F^{mna}(x) - i\lambda^a \sigma^m \mathcal{D}_m \bar{\lambda}^c - m^2 \left(\phi_+^\dagger \phi_+ + \phi_-^\dagger \phi_- \right) \\
 &+ (\mathcal{D}_m \phi_+)^\dagger (\mathcal{D}^m \phi_+) + (\mathcal{D}_m \phi_-)^\dagger (\mathcal{D}^m \phi_-) \\
 &- i\xi_+ \sigma^m (\partial_m + ig_s v_m^a T^a) \bar{\xi}_+ - i\xi_- \sigma^m (\partial_m - ig_s v_m^a T^a) \bar{\xi}_- \\
 &- \sqrt{2} g_s T^a \left(\bar{\lambda}^a \bar{\xi}_+ \phi_+ - \bar{\lambda}^a \bar{\xi}_- \phi_- + \lambda^a \xi_+ \phi_+^\dagger - \lambda^a \xi_- \phi_-^\dagger \right) \\
 &- \frac{1}{2} g_s^2 \sum_a \left(\phi_+^\dagger T^a \phi_+ - \phi_-^\dagger T^a \phi_- \right) - m \left(\xi_- \xi_+ + \bar{\xi}_- \bar{\xi}_+ \right),
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

onde usamos

$$(\mathcal{D}_m \varphi)^\dagger (\mathcal{D}^m \varphi) = -\varphi^\dagger \partial_m \partial^m \varphi - g_s T^a v^{ma} \left(i\varphi^\dagger \partial_m \varphi - i\partial_m \varphi^\dagger \varphi \right) + g_s^2 T^a T^b v_m^a v^{bm} \varphi^\dagger \varphi \tag{3.59}$$

Vamos definir o espinor de Dirac de quatro componentes para o quark como

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_{+\alpha} \\ \bar{\xi}_{-\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = - \begin{pmatrix} \xi_-^\beta & \bar{\xi}_{+\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \tag{3.60}$$

e para campos de glúinos definimos

$$\lambda_M^a = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha^a \\ \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}a} \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda}_M^b = - \begin{pmatrix} \lambda^{\beta b} & \bar{\lambda}_\beta^b \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

De maneira análoga a como procedemos na SQED, podemos reescrever (3.58) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQCD} &= -\frac{1}{4}F_{mn}^a(x)F^{mna}(x) - i\lambda^a\sigma^m\mathcal{D}_m\bar{\lambda}^c - m^2\left(\phi_+^\dagger\phi_+ + \phi_-^\dagger\phi_-\right) \\ &+ (\mathcal{D}_m\phi_+)^\dagger(\mathcal{D}^m\phi_+) + (\mathcal{D}_m\phi_-)^\dagger(\mathcal{D}^m\phi_-) + i\bar{\psi}\gamma^m\mathcal{D}_m\psi \\ &+ \sqrt{2}g_s\left(\bar{\psi}P_RT^a\lambda_M^a\phi_+ - \bar{\lambda}_M^aT^aP_R\psi\phi_- + \bar{\lambda}_M^aT^aP_L\psi\phi_+^\dagger - \bar{\psi}P_L\lambda_M^aT^a\phi_-^*\right) \\ &- \frac{1}{2}g_s^2\sum_a\left(\phi_+^\dagger T^a\phi_+ - \phi_-^\dagger T^a\phi_-\right) - m\bar{\psi}\psi, \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde as derivadas covariantes atuam como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m\lambda^a &= \partial_m\lambda^a - g_s f^{abc}v_m^b\lambda^c \\ \mathcal{D}_m\psi &= \partial_m\psi + ig_s v_m^a T^a\psi \\ \mathcal{D}_m\phi &= \partial_m\phi + ig_s v_m^a T^a\phi \end{aligned} \quad (3.63)$$

Esta lagrangeana descreve a SQCD para um único sabor. O quark q (e anti-quark \bar{q}) é descrito por um campo de Dirac triplete de cor ψ , o squark de mão esquerda \tilde{q}_L é descrito pelo campo complexo triplete de cor ϕ_+ (e ϕ_+^*) e o squark de mão esquerda \tilde{q}_R é denotado pelo campo ϕ_-^* (e ϕ_-). Os glúons octetos de cor são descritos pelo campo v_m^a , e seus parceiros supersimétricos, os glúinos, são denotados pelos campos de Majorana λ_M^a .

Da lagrangeana (3.62), podemos obter as regras de Feynman para os vértices da SQCD. Como esta lagrangeana possui termos análogos aos da lagrangeana da QCD, temos os vértices usuais da Fig. (1.5) e também vértices das interações entre as partículas usuais e os superparceiros glúino e squark. Mostramos alguns destes vértices na Fig. (3.2). Para um conjunto completo das regras de Feynman para os termos de vértices da SQCD, ver [20].

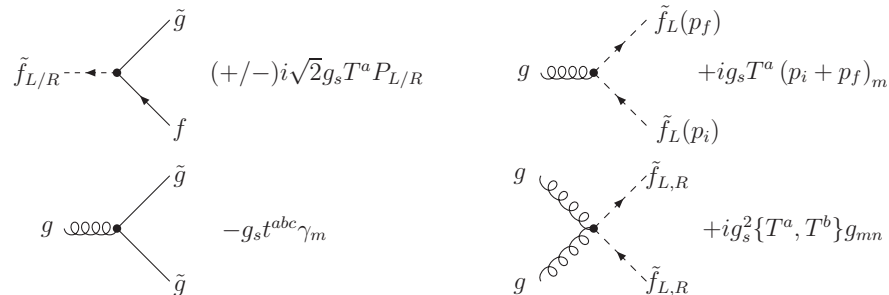


Fig. 3.2: Regras de Feynman da SQCD. Usamos linhas contínuas para férmions de Dirac e de Majorana e linhas tracejadas para os superparceiros bosônicos. Para mais detalhes sobre a convenção usada nesta figura, ver capítulo 4.

Conclusão

Vimos neste capítulo como são introduzidos na SQED e SQCD os superparceiros do elétron e do fóton (campos usuais da QED), e do quark e glúon (campos usuais da QCD). Os superparceiros dos elétrons e quarks são conhecidos como selétrons e squarks e os superparceiros do fóton e glúon são o fotino e gluíno.

Encontramos as lagrangeanas que descrevem a SQED e SQCD, bem como as regras de Feynman para os principais vértices de interação das teorias. Usaremos estas regras para calcular as seções de choque para produção de fotinos e gluínos no próximo capítulo.

Capítulo 4

Regras de Feynman para Partículas do tipo Majorana

Como vimos no capítulo anterior, no espectro de partículas da SQED e SQCD ocorre o aparecimento de espinores de Majorana que descrevem por exemplo o fotino e o glúino. No entanto, na maioria dos livros de teoria quântica de campos estuda-se mais sistematicamente regras de Feynman para férmions do tipo Dirac. Antes de procedermos com os cálculos das seções de choque no próximo capítulo, vamos estabelecer um conjunto de regras de Feynman para teorias superimétricas de forma diagramática que tratem de férmions do tipo Dirac e Majorana de forma simples e análoga.

Para aplicação destas regras, na seção (5.1) do próximo capítulo e no apêndice D mostramos o cálculo completo da amplitude de probabilidade do processo $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$ com troca de slétrons. Na seção (5.2) introduzimos também os cálculos para produção de glúinos em colisões pp. Usaremos resultados do capítulo anterior para os termos de vértice da SQED e SQCD.

4.1 Introdução

Para construirmos as regras de Feynman vamos considerar aqui a seguinte lagrangeana [81]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\bar{\lambda}_a (i\gamma^m \partial_m - M_a) \lambda_a + \bar{\psi}_a (i\gamma^m \partial_m - m_a) \psi_a + \frac{1}{2}g_{abc}^i \bar{\lambda}_a \Gamma_i \lambda_b \Phi_c + \frac{1}{2}g_{abc}^{i*} \bar{\lambda}_b \Gamma_i \lambda_a \Phi_c^* \\ & + \kappa_{abc}^i \bar{\lambda}_a \Gamma_i \psi_b \Phi_c^* + \kappa_{abc}^{i*} \bar{\psi}_b \Gamma_i \lambda_a \Phi_c + h_{abc}^i \bar{\psi}_a \Gamma_i \psi_b \Phi_c, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $\Gamma_i = 1, i\gamma_5, \gamma_m \gamma_5, \gamma_m, \sigma_{mn}$, e obedecem $C_{-1}\Gamma_i C = \eta_i \Gamma_i^T$. As $g_{abc}^i, \kappa_{abc}^i$ e h_{abc}^i são constantes de acoplamento.

A expressão acima contém a lagrangeana livre para férmions de Majorana λ e de Dirac ψ (primeiro e segundo termos, respectivamente), termos de interação puro entre férmions do tipo Majorana, termos de interação entre férmions do tipo Majorana e de Dirac e um termo de interação puro entre férmions do tipo Dirac. O campo Φ caracteriza um campo bosônico de spin 0 (escalar) ou spin 1 (vetorial) os quais podem ou não ser complexos.

Na seção (1.1.4), vimos que o campo de Majorana satisfaz

$$\psi_M = \psi_M^c \equiv C\bar{\psi}_M^T, \quad (4.2)$$

ou seja, para campos de Majorana não há distinção entre partículas e anti-partículas. Vimos também que para campos de Majorana há três expressões para propagadores: uma igual ao

propagador do campo tipo Dirac $\langle 0|T(\Psi_M(x_1)\bar{\Psi}_M(x_2))|0\rangle$, e também $\langle 0|T(\Psi_M(x_1)\Psi_M(x_2))|0\rangle$ e $\langle 0|T(\bar{\Psi}_M(x_1)\bar{\Psi}_M(x_2))|0\rangle$, sendo que os dois últimos propagadores violam a conservação do número fermiônico (carga). As expressões para os propagadores do tipo Majorana são mostradas na Fig. (4.1).

$$\begin{aligned} \beta \bullet \longrightarrow \bullet \alpha & \left(\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{\alpha\beta} \\ \beta \bullet \xrightarrow{p} \bullet \alpha & \left(\frac{iC^{-1}(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{\alpha\beta} \\ \beta \bullet \xleftarrow{p} \bullet \alpha & \left(\frac{-i(\not{p} + m)C}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Fig. 4.1: Regras de Feynman para propagadores fermiônicos de Majorana.

Seguindo a referência [80], vamos primeiramente atribuir a todos os férmions externos uma linha sólida com uma seta. Para férmions de Dirac a seta indicará o fluxo do número fermiônico e para férmions de Majorana, que não conservam número fermiônico, a direção será arbitrária.

Para encontrarmos as regras de Feynman para interações de um campos bosônico (escalar ou vetorial) com férmions de Majorana (λ), vamos usar o terceiro e o quarto termo da lagrangeana (4.1). Os termos de interação das regras de Feynman são iguais a $i\mathcal{L}_{int}$, como mostra a Fig. (4.2).

Nos diagramas (a) e (d) (igual ao complexo conjugado de (a)) desta figura, as regras são obtidas da mesma forma que para férmions do tipo Dirac. Para encontrarmos a regra mostrada em (b) nós reescrevemos

$$g_{abc}^i \bar{\lambda}_a \Gamma_i \lambda_b \Phi_c^* = -g_{abc}^i \lambda_a^T (C^{-1} \Gamma_i) \lambda_b \Phi_c^* \quad (4.3)$$

onde usamos as propriedades (4.2) e (B.29). Em analogia, podemos encontrar a regra (e) fazendo

$$g_{abc}^{i*} \bar{\lambda}_b \Gamma_i \lambda_a \Phi_c = g_{abc}^{i*} \bar{\lambda}_b (\Gamma_i C) \bar{\lambda}_a^T \Phi_c, \quad (4.4)$$

ou calculando o conjugado hermitiano de (4.3).

Em resumo, podemos concluir, a partir das Figs. (4.1) e (4.2), que as regras de Feynman para partículas de Majorana incluem propagadores e combinações de vértices nos quais linhas se cruzam (violando o fluxo do número fermiônico) resultando no aparecimento de matrizes conjugação de carga C . No entanto, podemos perceber que há uma ambiguidade nas regras de Feynman mostradas na Fig. (4.2). Por exemplo, para o vértice mostrado em (c), é possível escrever

$$\begin{aligned} ig_{abc}^i (\Gamma_i C)_{\alpha\beta} &= ig_{abc}^i (\Gamma_i C)_{\beta\alpha}^T = -ig_{abc}^i (C \Gamma_i^T)_{\beta\alpha} = -i\eta_i g_{abc}^i (\Gamma_i C)_{\beta\alpha} \\ ig_{abc}^i (\Gamma_i C)_{\alpha\beta} &= -ig_{bac}^i (\Gamma_i C)_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

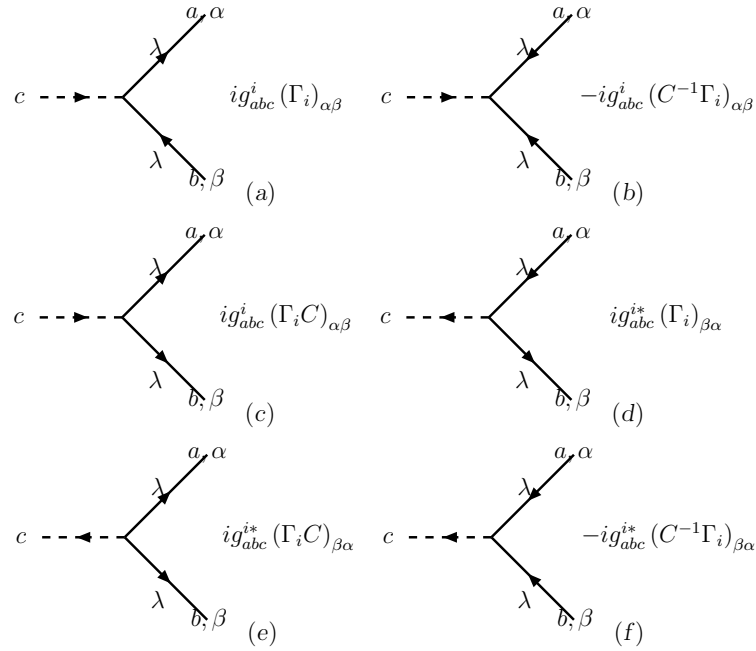


Fig. 4.2: Regras de Feynman para interação de um campo scalar ou vetorial (Φ_c) com dois campos fermiônicos de Majorana (λ).

onde usamos $C^T = -C$ e $\eta_i \Gamma_i C = C \Gamma_i^T$. Esta ambiguidade nas regras de Feynman resulta em uma ambiguidade no sinal dos elementos de matriz \mathcal{M} [80]. Nesta referência também se demonstra que definindo no início do cálculo qual a partícula de Majorana será escolhida como sendo a e qual será b , o sinal do elemento de matriz será ambíguo, mas o sinal relativo entre os diagramas de interferência será bem definido. Deste modo, não há problemas no cálculo das amplitudes de espalhamento. As regras de Feynman obtidas em [80] são consideradas como as convencionais para férmions de Majorana.

Outro método utilizado para calcular as amplitudes de espalhamento de processos envolvendo partículas de Majorana pode ser encontrado em [81, 82]. Nesta abordagem, foi estabelecido um conjunto de regras de Feynman muito semelhantes às regras padrão para férmions de Dirac encontradas na maioria dos livros de teoria quântica de campos. Nesta seção vamos descrever rapidamente o conjunto de regras obtidas em [81, 82], as quais usaremos na próxima seção para calcular o processo $e^- e^+ \rightarrow \tilde{\gamma} \tilde{\gamma}$.

Este método tem como idéia básica manter um fluxo contínuo de férmions. Convencionase que todos os férmions são denotados por linhas sólidas, sendo que férmions de Dirac carregam uma seta que indica o fluxo de carga e férmions de Majorana não carregam seta. Logo, podemos escrever os vértices das interações previstos na lagrangeana (4.1) como mostra a coluna (a) da Fig. (4.3).

É possível escrever uma lagrangeana reversa para cada termo de interação. Para demonstrar isto, vamos usar um termo de interação geral $\bar{\chi} \Gamma \chi$, onde χ pode representar um

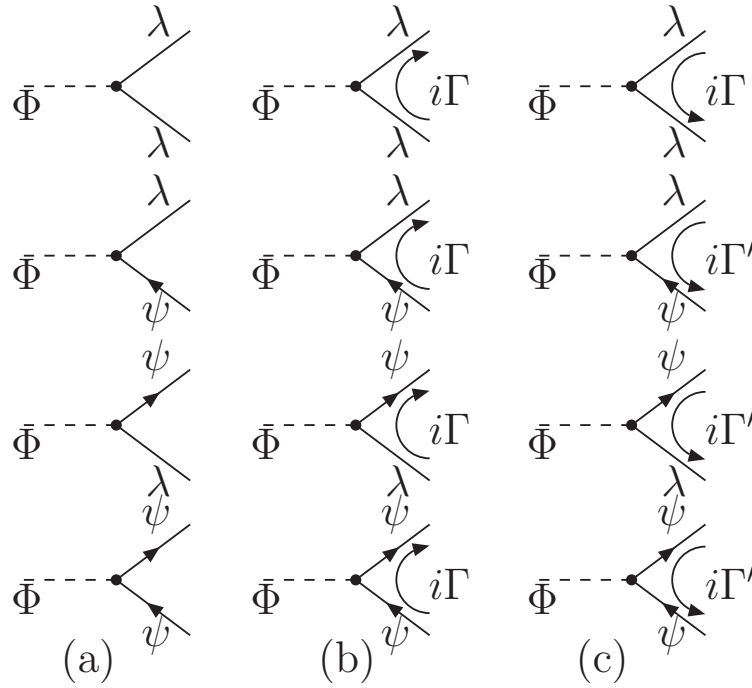


Fig. 4.3: Regras de Feynman para os vértices de interação.

campo de Dirac ou de Majorana.

$$\begin{aligned}
 \bar{\chi}\Gamma\chi &= g_{abc}^i \Phi_c \bar{\chi}_a \Gamma \chi_b = -g_{abc}^i \Phi_c \chi_b^T \Gamma_i^T \bar{\chi}_a = g_{abc}^i \Phi_c \bar{\chi}_b^c C \Gamma_i^T C^{-1} \chi_a^c \\
 &= g_{abc}^i \Phi_c \bar{\chi}_b^c \eta_i \Gamma_i \chi_a^c = \bar{\chi}^c \Gamma' \chi^c
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Para todos os vértices, deverá haver uma direção do fluxo de carga e uma direção do fluxo de férmions sobre um canal. Quando o fluxo de férmions for paralelo ao fluxo de carga, ou quando não há fluxo de carga (tratando somente de férmions de Majorana) o termo do vértice é $i\Gamma$ (ver Eq. 4.6). Se o fluxo de cargas for anti-paralelo ao fluxo de férmions, o termo do vértice será $i\Gamma'$. Denotamos com uma linha ao longo do canal fermiônico aos possíveis sentidos do fluxo fermiônico como mostramos nas colunas (b) e (c) da Fig. (4.3).

O propagador também será escolhido determinando se o fluxo fermiônico é paralelo ao fluxo de carga (se houver fluxo de carga) ou anti-paralelo, de acordo com a Fig. (4.4), onde $S(p)$ é o propagador de uma partícula do tipo Dirac definido no capítulo 1.

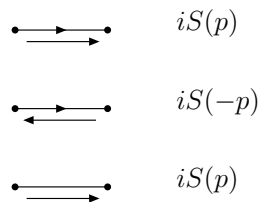


Fig. 4.4: Regras de Feynman para os propagadores.

A expressão analítica para cada fluxo externo de férmions será determinada em cada cadeia de reação de acordo com a convenção mostrada na Fig. (4.5). Podemos ver que os espinores relacionados a cada linha de férmions externa são determinados baseados somente na direção do fluxo de férmions e independente do tipo de férmion. Esta é a mesma convenção usada na Ref. [83].

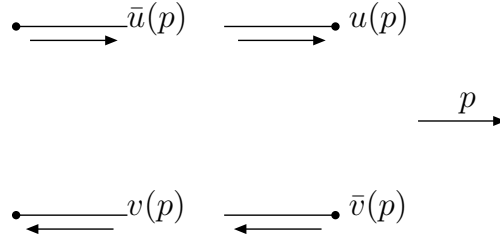


Fig. 4.5: Regras de Feynman para as linhas de férmions externas.

4.2 O Conjunto das Regras

Dos ingredientes da seção anterior, as amplitudes de Feynman são obtidas da seguinte maneira:

- Desenha-se todos os possíveis diagramas de Feynman para um dado processo;
- Fixa-se uma orientação arbitrária (fluxo de férmion) para cada canal de férmions;
- Começa-se a escrever as amplitudes no sentido oposto ao escolhido para o fluxo de férmions. Escreve-se os termos de espinor externo, o termo de vértice e o propagador de acordo com as convenções das Figs. (4.3), (4.4) e (4.5).

Se mais de um diagrama contribuir para um determinado processo, por exemplo, canal s e t , temos que a matriz S correspondente a amplitudes destes canais é

$$\mathcal{M}_s \rightarrow \langle \chi_c \chi_d | \chi_c \chi_d \chi_b \chi_a | \chi_a \chi_b \rangle \rightarrow +1 \quad (4.7)$$

$$\mathcal{M}_t \rightarrow \langle \chi_c \chi_d | \chi_c \chi_a \chi_b \chi_d | \chi_a \chi_b \rangle \rightarrow -1 \quad (4.8)$$

Podemos perceber que o sinal de menos surge devido a permutação ímpar dos campos fermiônicos (que anti-comutam). Logo,

- Para processos com mais de um diagrama de contribuição, escolhe-se um diagrama cuja ordem dos espinores seja adotada como referência, e para todas as outras contribuições que apresentem ordem com permutação ímpar da ordem de referência, adiciona-se um fator -1 à amplitude.

Conclusão

Neste capítulo, nós mostramos um conjunto de regras de Feynman para tratar, além de partículas de Dirac, das partículas de Majorana as quais estão presentes no espectro de partículas de modelos supersimétricos, como MSSM.

Este conjunto de regras de Feynman apresenta vantagens com relação ao método usado em [80] já que não há aparecimento de matrizes conjugação de carga nos termos de vértice e dos propagadores. Além disto, o sinal relativo entre diferentes diagramas correspondentes ao mesmo processo é determinado de forma simples, pois as amplitudes obtidas são independentes da orientação do fluxo de férmions escolhida. Este conjunto de regras foi desenvolvido para incorporar o modelo padrão supersimétrico ao programa FeynArts [47], o qual é um gerador de amplitudes e regras de Feynman. Nós usamos este programa para verificar os cálculos das amplitudes de processos de produção de fotinos e gluínos.

Capítulo 5

Produção de Fotinos e Gluínos

A SQED e SQCD, estudadas no capítulo anterior, são ingredientes fundamentais para se construir uma extensão supersimétrica do Modelo Padrão. Há diferentes versões supersimétricas do Modelo Padrão. Uma destas é conhecida como Modelo Padrão Supersimétrico Mínimo (MSSM). O nome mínimo, se deve a este ser formado pelo número mínimo de campos e parâmetros necessários para construir um modelo realístico de quarks e léptons.

O grupo de simetria de gauge do MSSM é o mesmo do Modelo Padrão, $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. A quebra espontânea de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ implica que estados com a mesma carga elétrica, cor, e spin se misturem. Isto significa que os gauginos e higgsinos não podem ser partículas físicas com massa definida. Ao contrário, os campos fermiônicos neutros se misturam formando autoestados de massa fermiônicos neutros, os neutralinos, enquanto os campos carregados positivamente (negativamente) e combinações lineares $\bar{\lambda}^{\pm 1}$ se misturam formando os charginos positivos (negativos). Como vimos na seção (2.4.3), o fotino e os higgsinos são férmions neutros, logo, no MSSM, eles se misturam formando os neutralinos. Como $SU(3)_C$ não é quebrado, o gluíno (octeto de cor) não se mistura com nenhum outro férmion, logo é um autoestado de massa.

Há diferentes mecanismos de quebra de SUSY [20, 21]. Os mais populares são supergravidade mínima (mSUGRA) [39–42], quebra de SUSY mediada por gauge (GMSB) [77], e quebra de SUSY mediada por anomalia (AMSB) [78, 79]. Estes mecanismos reduzem drasticamente o número de parâmetros comparados aos do MSSM. Os “Snowmass Points and Slopes” (SPS) [43] são uma série de pontos de referência e linhas de parâmetros no espaço de parâmetros do MSSM que correspondem a vários cenários de quebra de supersimetria (Veja [44] para mais detalhes). Os diferentes cenários correspondem aos três diferentes tipos de modelos de quebra de SUSY citados. Os pontos conhecidos como SPS 1-6 correspondem aos cenários que usam o modelo mSUGRA, SPS 7-8 correspondem ao modelo GMSB e SPS 9 ao modelo de quebra de simetria mAMSB ([43–45]).

O objetivo principal deste trabalho é fazer um estudo fenomenológico da produção de gluínos, portanto não entraremos em maiores detalhes sobre os mecanismos de quebra de SUSY e a construção do MSSM, ou de outros modelos supersimétricos.

Neste capítulo faremos primeiramente (seção (5.1)) um cálculo detalhado da produção de fotinos a partir do processo $e^+e^- \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$. Também faremos uma análise gráfica da produção dos fotinos. Na seção (5.2) introduziremos os cálculos das amplitudes de probabilidade para produção de gluínos em colisões pp. No final do capítulo, mostraremos resultados [49] para

¹ Definição de um campo gaugino carregado: $\lambda^\pm = \frac{(\lambda_1 \mp i\lambda_2)}{\sqrt{2}}$, ver [20, 21]

o comportamento da seção de choque de produção de gluínos no LHC ($\sqrt{s} = 14$ TeV).

5.1 Produção de Fotinos

O fotino, $\tilde{\gamma}$, parceiro supersimétrico do fóton, é uma partícula do tipo Majorana que pode ser produzida a partir do espalhamento e^+e^- , como mostra a Fig. (5.1).

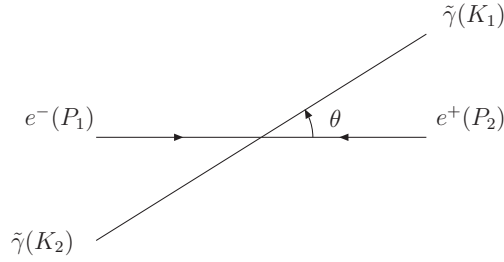


Fig. 5.1: Cinemática do processo $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$ no referencial do centro de massa. Os quadrimomenta estão especificados entre parênteses.

Usaremos o método descrito no capítulo 4 para calcular a seção de choque diferencial deste processo ($e^+e^- \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$), no contexto da SQED. O espalhamento $e^+e^- \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$ ocorre via os canais t e u com a troca de selétrons \tilde{e}_L e \tilde{e}_R como mostra a Fig. (5.2).

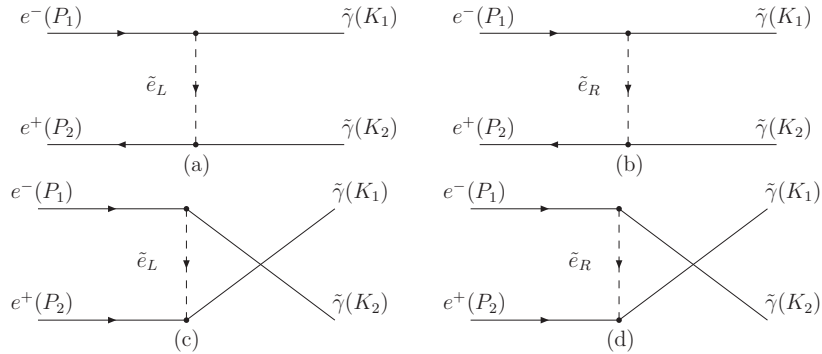


Fig. 5.2: Diagramas de Feynman para o processo $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$. Fixamos a orientação do fluxo fermiônico como sendo a mesma dada pelo elétron.

Como vimos na seção (3.1), as regras de Feynman para interações entre campos do tipo Dirac-Majorana-bóson escalar são escritas, de acordo com a Eq. (3.37), a partir da lagrangeana de interação

$$\mathcal{L}_{int} = \sqrt{2}q (\bar{\lambda}_M P_L \psi \phi_+^* - \bar{\lambda}_M P_R \psi \phi_- + \text{h.c.}) + \dots \quad (5.1)$$

Para o processo $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$, o termo ψ da lagrangeana descreve o elétron (e^-) e o pósitron (e^+) (férmions de Dirac), o λ os fotinos (férmions de Majorana), ϕ_+^* descreve o

selétron de mão esquerda \tilde{e}_L (bóson escalar) e ϕ_- o selétron de mão direita \tilde{e}_R (bóson escalar), que são as partículas de troca do processo de espalhamento.

As regras de Feynman (usando [81,82]) para os vértices de interação, $i\mathcal{L}_{int}$, são mostradas na Fig. (5.3).

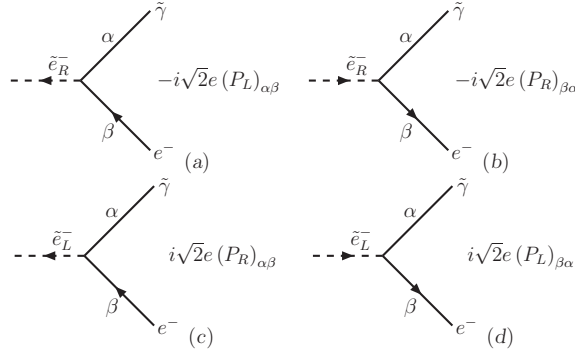


Fig. 5.3: Regras de Feynman para interação de um campos escalar (ϕ) com um férmion de Majorana (λ) e um férmion de Dirac (ψ) na SQED.

Usando as regras de Feynman descritas no capítulo 4, com os termos de vértice definidos na Fig. (5.3) e a definição do propagador para um campo escalar (1.14), podemos escrever as amplitudes de probabilidade para os diagramas da Fig. (5.2) como:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_a &= -\frac{e^2}{2}\bar{u}(K_1)(1-\gamma_5)u(P_1)\frac{1}{t-M_{\tilde{e}_L}^2}\bar{v}(P_2)(1+\gamma_5)v(K_2), \\ \mathcal{M}_b &= -\frac{e^2}{2}\bar{u}(K_1)(1+\gamma_5)u(P_1)\frac{1}{t-M_{\tilde{e}_R}^2}\bar{v}(P_2)(1-\gamma_5)v(K_2), \\ \mathcal{M}_c &= \frac{e^2}{2}\bar{u}(K_2)(1-\gamma_5)u(P_1)\frac{1}{u-M_{\tilde{e}_L}^2}\bar{v}(P_2)(1+\gamma_5)v(K_1), \\ \mathcal{M}_d &= \frac{e^2}{2}\bar{u}(K_2)(1+\gamma_5)u(P_1)\frac{1}{u-M_{\tilde{e}_R}^2}\bar{v}(P_2)(1-\gamma_5)v(K_1).\end{aligned}\quad (5.2)$$

As expressões para as amplitudes \mathcal{M}_b e \mathcal{M}_d são as mesmas que aquelas obtidas no apêndice E de [80]. Aqui usamos a notação onde t, u são variáveis de Mandelstam [84], definidas pelas seguintes relações

$$\begin{aligned}t &= (P_1 - K_1)^2 = (P_2 - K_2)^2, \\ u &= (P_1 - K_2)^2 = (P_2 - K_1)^2.\end{aligned}\quad (5.3)$$

A amplitude total do processo $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma})|^2 &= \frac{1}{8}\sum_{spin}\{|\mathcal{M}_a|^2 + \mathcal{M}_a^\dagger\mathcal{M}_b + \mathcal{M}_a^\dagger\mathcal{M}_c + \mathcal{M}_a^\dagger\mathcal{M}_d + \mathcal{M}_b^\dagger\mathcal{M}_a + |\mathcal{M}_b|^2 \\ &+ \mathcal{M}_b^\dagger\mathcal{M}_c + \mathcal{M}_b^\dagger\mathcal{M}_d + \mathcal{M}_c^\dagger\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_c^\dagger\mathcal{M}_b + |\mathcal{M}_c|^2 + \mathcal{M}_c^\dagger\mathcal{M}_d \\ &+ \mathcal{M}_d^\dagger\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_d^\dagger\mathcal{M}_b + \mathcal{M}_d^\dagger\mathcal{M}_c + |\mathcal{M}_d|^2\},\end{aligned}\quad (5.4)$$

onde o fator $(1/8)$ corresponde a média sobre os spins iniciais $(1/4)$ e ao fato das partículas no estado final serem idênticas $(1/2)$.

O cálculo dos termos da Eq. (5.4) estão demonstrados em detalhes no apêndice D. A fórmula geral para a seção de choque diferencial de um espalhamento como o mostrado na Fig. (5.1) é dada por [60]

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{|\vec{K}_1|}{|\vec{P}_1|} \frac{1}{64\pi^2 s} |\mathcal{M}|^2 \quad (5.5)$$

Substituindo as amplitudes de (D.10), obtidas no apêndice D, na equação da amplitude total (5.4) e usando o resultado na equação acima, temos que a seção de choque diferencial, no limite de $M_{\tilde{e}_L}^2 = M_{\tilde{e}_R}^2 = M_{\tilde{e}}^2$, para o espalhamento $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$ é dado por

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}) &= \frac{\alpha^2}{4s} \sqrt{\frac{s - 4M_{\tilde{\gamma}}^2}{s - 4m_e^2}} \left[\left(\frac{t - M_{\tilde{\gamma}}^2 - m_e^2}{t - M_{\tilde{e}}^2} \right)^2 + \left(\frac{u - M_{\tilde{\gamma}}^2 - m_e^2}{u - M_{\tilde{e}}^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2m_e M_{\tilde{\gamma}}}{t - M_{\tilde{e}}^2} \right)^2 + \left(\frac{2m_e M_{\tilde{\gamma}}}{u - M_{\tilde{e}}^2} \right)^2 + \left(\frac{16m_e^2 M_{\tilde{\gamma}}^2 - 2s(m_e^2 + M_{\tilde{\gamma}}^2)}{(t - M_{\tilde{e}}^2)(u - M_{\tilde{e}}^2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para analisarmos este resultado, atribuímos às massas dos fotinos os valores de massas dados nos cenários SPS [43] para os neutralinos, como mostra a Tab. (5.1). Esta tabela também apresenta valores para as massas dos selétrons.

Cenário	$m_{\tilde{\gamma}}$ (GeV)	$m_{\tilde{e}}$ (GeV)
SPS1	96	202
SPS2	79	1456
SPS3	160	287
SPS4	118	448
SPS5	119	256
SPS6	189	264
SPS7	161	261
SPS8	137	356
SPS9	175	319

Tab. 5.1: Os valores das massas dos fotinos e selétrons nos cenários SPS.

Definimos as variáveis de Mandelstam (usando [84]) em função do ângulo de espalhamento θ como

$$s = E_{cm}^2 \quad (5.7)$$

$$t = m_e^2 + m_{\tilde{\gamma}}^2 - 2E^2 + 2E [E^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2]^{1/2} \cos \theta \quad (5.8)$$

$$u = m_e^2 + m_{\tilde{\gamma}}^2 - 2E^2 - 2E [E^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2]^{1/2} \cos \theta, \quad (5.9)$$

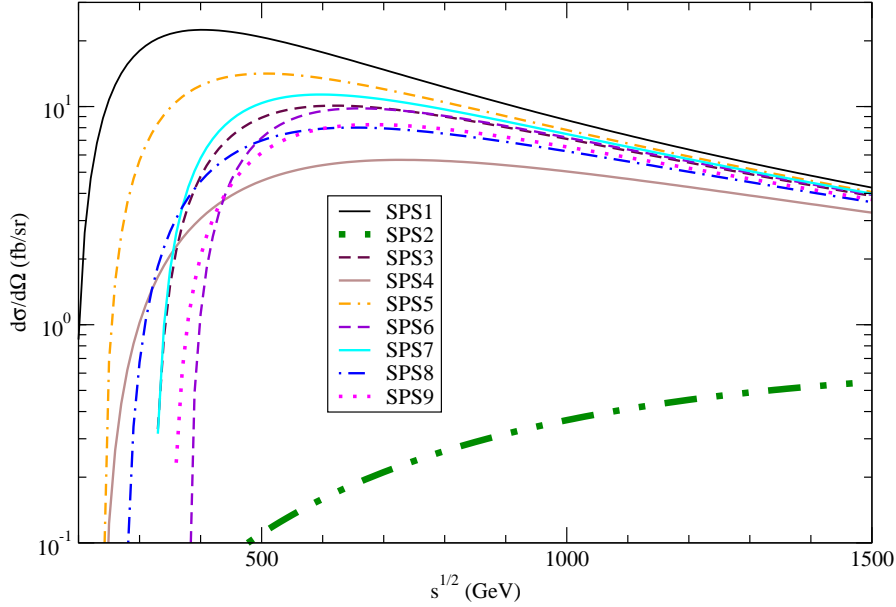


Fig. 5.4: Seção de choque diferencial para produção de fotinos ($\eta = 0$) em função da energia do centro de massa, nos diferentes cenários SPS.

onde E é a energia do elétron e do fotino ($E_e = E_{\tilde{\gamma}} = \frac{\sqrt{s}}{2} = E$).

O ângulo θ com relação ao centro de massa e a seção de choque diferencial podem ser escritos em termos da variável pseudorapidez $\eta = -\ln \tan(\theta/2)$, a qual é uma observável experimental.

Mostramos na Fig. (5.4), o comportamento da seção de choque diferencial para produção de fotinos em função da energia do centro de massa do sistema. Faremos a análise para até 1.5 TeV de energia de centro de massa, de acordo com o projeto do ILC, e em diferentes cenários SPS. Podemos ver que a seção de choque diferencial apresenta um comportamento análogo nos diferentes cenários SPS, exceto para o cenário SPS2, no qual notamos uma grande diferença de magnitude em relação aos outros cenários SPS, ou seja, a seção de choque diferencial possui valores muito menores que nos outros cenários. Isto se explica pelo fato de a massa do selétron no cenário SPS2 ser muito maior que nos outros cenários, como mostra a Tab. (5.1).

Na Fig. (5.5), mostramos (gráfico à esquerda) como a seção de choque varia com a massa do fotino, atribuindo $m_{\tilde{e}} = 200$ GeV para massa do selétron. No gráfico à direita, fixamos uma massa de 79 GeV para o fotino e analisamos a variação da seção de choque diferencial com a massa do selétron. Nos dois gráficos escolhemos fazer a análise para os valores de 0.5 TeV, 1 TeV e 1.5 TeV de energia do centro de massa e para $\eta = 0$ ($\theta = \pi/2$). Podemos perceber que a seção de choque diferencial em função da massa do fotino é praticamente constante para os valores mais altos da energia do centro de massa (1 e 1.5 TeV), como mostra o gráfico à esquerda. Para energia do centro de massa de 0.5 TeV a seção de choque diferencial diminui com valores maiores para massa do fotino, como se esperava. Isto ocorre

porque o valor de 0.5 TeV para energia do centro de massa é mais próximo dos valores de massa atribuídos ao fotino (ver Tab. 5.1). Logo o comportamento da seção de choque para esta energia é mais sensível à variações dos valores das massas dos fotinos. Na figura à direita, podemos ver que a seção de choque decresce (mais abruptamente para 0.5 e 1 TeV) com a massa do selétron para os três valores de energia do centro de massa estipulados. Para grandes valores da massa do selétron (próximos a 1.5 TeV) a seção de choque tende à valores constantes. Novamente vemos uma maior sensibilidade do comportamento da seção de choque diferencial para energias mais próximas aos valores esperados para massa do selétron (ver Tab. 5.1).

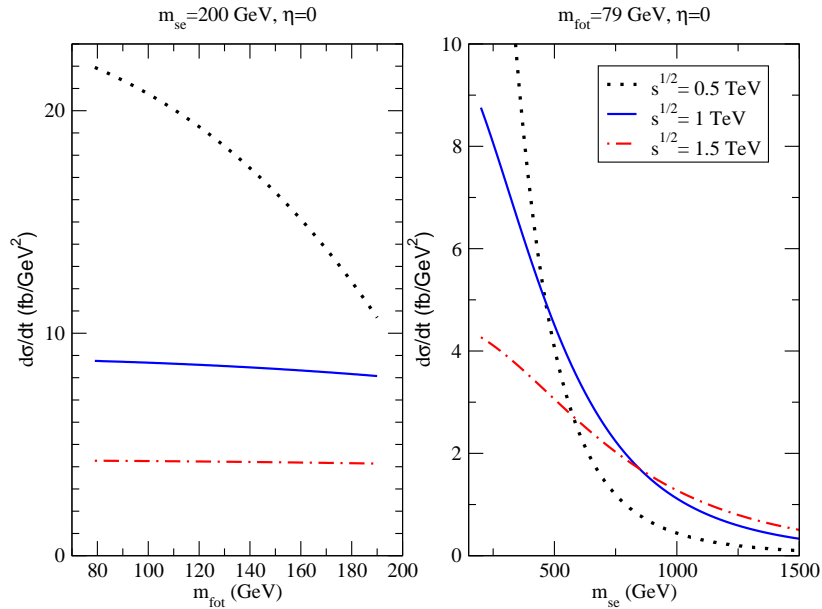


Fig. 5.5: Seção de choque diferencial para produção de fotinos em função da: (a) massa do fotino, (b) massa do selétron.

Se desprezarmos a massa do elétron na Eq. (5.6), obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}) &= \frac{\alpha^2}{4s} \sqrt{1 - \left(\frac{2M_{\tilde{\gamma}}}{\sqrt{s}}\right)^2} \left[\left(\frac{t - M_{\tilde{\gamma}}^2}{t - M_{\tilde{e}}^2}\right)^2 + \left(\frac{u - M_{\tilde{\gamma}}^2}{u - M_{\tilde{e}}^2}\right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2sM_{\tilde{\gamma}}^2}{(u - M_{\tilde{e}}^2)(t - M_{\tilde{e}}^2)} \right], \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

que é o resultado apresentado em [80, 90]. Fazendo também $M_{\tilde{\gamma}} = 0$ obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}) = \frac{\alpha^2 s}{16} \left[\frac{(1 - \cos^2 \theta)^2}{(M_{\tilde{e}L}^2 + \frac{s}{2}(1 - \cos^2 \theta))^2} + \frac{(1 + \cos^2 \theta)^2}{(M_{\tilde{e}R}^2 + \frac{s}{2}(1 + \cos^2 \theta))^2} \right]. \tag{5.11}$$

Este resultado é o mesmo apresentado por Fayet em 1982 na referência [38].

5.2 Produção de Glúinos

A produção de glúinos e de squarks em colisores hadrônicos ocorre predominantemente via interação forte. Assim, podemos esperar que suas taxas de produção sejam maiores em comparação a taxa de produção de spartículas via interação eletrofraca [20, 21].

Somente colisões hadrônicas resultam na produção primária de glúinos em mais baixa ordem (LO). Nesta seção, nós estudaremos a produção de glúinos, em LO, em colisões próton-próton no LHC (14 TeV).

5.2.1 Produção de Glúinos em Colisões pp

Em geral, os glúinos são as partículas supersimétricas previstas com o maior valor de massa no MSSM. Nos cenários SPS [43], a predição da massa do glúino vai de 595 GeV (cenário SPS1a) a 1.275 TeV (cenário SPS9), conforme mostrado na Tab. 5.2. Podemos ver também nesta tabela que os valores de massa esperados para os squarks são, na maioria dos cenários, próximos aos valores das massas dos glúinos. Logo, a produção de glúinos e squarks deverá ocorrer em processos em altas energias. Em colisores hadrônicos de altas energias a produção das partículas deverá ocorrer através de colisões entre os constituintes dos hádrons: os quarks, antiquarks e glúons. Para encontrar a seção de choque, vamos usar a abordagem da fatorização colinear [85], onde a seção de choque para o processo

$$a + b \rightarrow c + d + X, \quad (5.12)$$

no qual hádrons a e b interagem, produzindo as partículas supersimétricas c e d , mais um estado não identificado X , é dada por [86]

$$d\sigma(ab \rightarrow cdX) = \sum_{i,j} \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b f_i(x_a, Q^2) f_j(x_b, Q^2) d\hat{\sigma}(ij \rightarrow cd), \quad (5.13)$$

Na expressão acima, $f_i(x_a, Q^2)$ denota a densidade de probabilidade de encontrar um parton i com fração de momento x_a do hádron a , $f_j(x_b, Q^2)$ é a densidade de probabilidade de encontrar um parton j com fração de momento x_b do hádron b , Q^2 é a escala dura do processo e $d\hat{\sigma}(ij \rightarrow cd)$ é a seção de choque partônica da interação entre os constituintes i e j dos hádrons a e b ,

$$i + j \rightarrow c + d. \quad (5.14)$$

A escala dura Q^2 entra como parâmetro na constante de acoplamento da QCD, e as distribuições partônicas evoluem em Q^2 segundo as equações de evolução DGLAP [87–89].

Para cálculos da produção de glúinos via colisões pp, vamos considerar as seguintes reações

$$pp \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}, \tilde{g}\tilde{q} + X, \quad (5.15)$$

onde X representa diferentes tipos de fragmentos hadrônicos. Os subprocessos básicos para produção de um par de glúinos [20] são

$$q_i \bar{q}_i \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}, \quad (5.16)$$

$$gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}, \quad (5.17)$$

Cenário	$m_{\tilde{g}}$ (GeV)	$m_{\tilde{q}}$ (GeV)
SPS1a	595.2	539.9
SPS1b	916.1	836.2
SPS2	784.4	1533.6
SPS3	914.3	818.3
SPS4	721.0	732.2
SPS5	710.3	643.9
SPS6	708.5	641.3
SPS7	926.0	861.3
SPS8	820.5	1081.6
SPS9	1275.2	1219.2

Tab. 5.2: Os valores das massas dos glúinos e squarks nos cenários SPS.

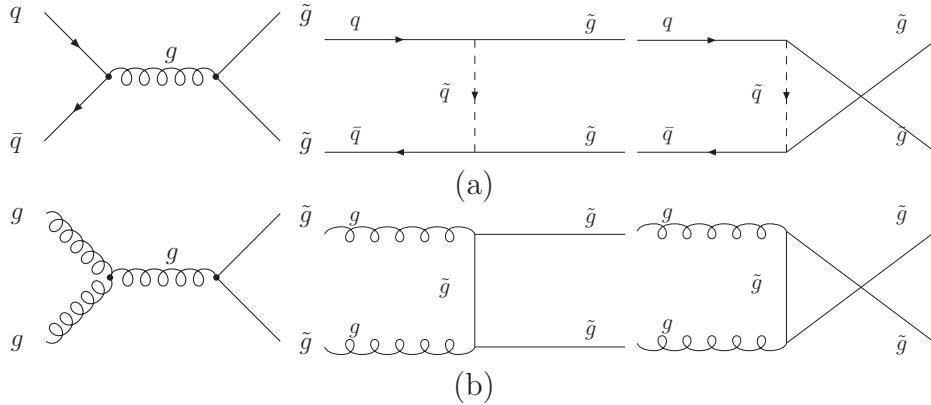


Fig. 5.6: Diagramas de Feynman para produção de um par de glúinos em LO: (a) estado inicial quark-antiquark, (b) estado inicial glúon-glúon.

onde i é o índice de sabor dos quarks. A produção de um único glúino associado a um squark ocorre via espalhamento

$$gq_i \rightarrow \tilde{g}\tilde{q}_i. \quad (5.18)$$

Para cada um dos subprocessos acima temos diagramas de contribuições para a amplitude no canal s , t e u , como mostram as Figs. (5.6) e (5.7).

Vamos escrever os subprocessos de produção de glúinos na forma geral

$$i + j \rightarrow c + d. \quad (5.19)$$

Consideramos $c = \tilde{g}$ como sendo o glúino e d como sendo um glúino ou um squark.

Logo, se o glúino produzido \tilde{g} é identificado no ângulo θ em relação ao referencial do centro de massa com momento transversal p_T , e $x_\perp = \frac{2p_T}{\sqrt{s}}$, a seção de choque invariante para

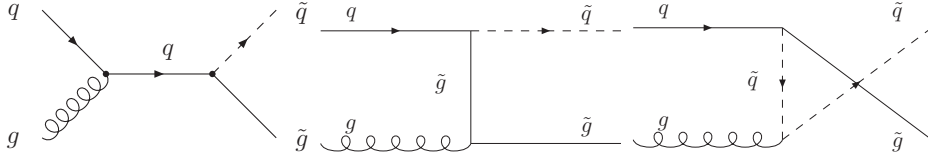


Fig. 5.7: Diagramas de Feynman para produção de squark-gluíno em LO.

a reação (5.15) pode ser escrita como [90]

$$E \frac{d\sigma}{d^3p} = \sum_{ij} \int_{x_{min}}^1 dx_a f_i^{(a)}(x_a, \mu) f_j^{(b)}(x_b, \mu) \frac{x_a x_b}{x_a - x_{\perp} \left(\frac{\zeta + \cos \theta}{2 \sin \theta} \right)} \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(ij \rightarrow \tilde{g}d), \quad (5.20)$$

onde $f_{i,j}$ são as distribuições partônicas dos prótons iniciais e $\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}$ é a seção de choque partônica em LO para os subprocessos envolvidos.

As grandezas cinemáticas invariantes da reação elementar (5.19) são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{s} &= x_a x_b s, \\ \hat{t} &= m_{\tilde{g}}^2 - x_a x_{\perp} s \left(\frac{\zeta - \cos \theta}{2 \sin \theta} \right), \\ \hat{u} &= m_{\tilde{g}}^2 - x_b x_{\perp} s \left(\frac{\zeta + \cos \theta}{2 \sin \theta} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

com

$$\begin{aligned} x_b &= \frac{2v + x_a x_{\perp} s \left(\frac{\zeta - \cos \theta}{\sin \theta} \right)}{2x_a s - x_{\perp} s \left(\frac{\zeta + \cos \theta}{\sin \theta} \right)}, \\ x_{min} &= \frac{2v + x_{\perp} s \left(\frac{\zeta + \cos \theta}{\sin \theta} \right)}{2s - x_{\perp} s \left(\frac{\zeta - \cos \theta}{\sin \theta} \right)}, \\ \zeta &= \left(1 + \frac{4m_{\tilde{g}}^2 \sin^2 \theta}{x_{\perp}^2 s} \right)^{1/2}, \\ v &= m_d^2 - m_{\tilde{g}}^2, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde $m_{\tilde{g}}$ e m_d são as massas das partículas supersimétricas produzidas.

Devemos lembrar que o ângulo θ com relação ao centro de massa e a seção de choque diferencial podem facilmente ser escritos em termos da variável pseudorapidez $\eta = -\ln \tan(\theta/2)$, a qual é uma observável experimental ².

A seguir apresentaremos os cálculos para cada subprocesso descritos acima. Na seção (5.2.2), vamos mostrar alguns resultados numéricos da seção de choque total e diferencial

² Como os gluínos são pesados, sua rapidez e pseudorapidez não são iguais.

para produção de gluínos. Nos cálculos dos subprocessos foi assumido que os quarks (incluindo o quark b) que interagem inicialmente são não massivos, de modo que restam $n_s = 5$ sabores leves. No estado final, considerou-se somente os squarks correspondentes aos sabores leves, e $m_{\tilde{q}}$ igual para todos os squarks³. Não foi considerada em detalhes a produção do squark top pois não podemos assegurar estas suposições.

Subprocesso $q\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$.

Os diagramas de Feynman que contribuem para a produção de um par de gluínos via o espalhamento $q\bar{q}$ são mostrados na Fig. (a) de (5.6). Vamos aqui usar a convenção adotada na seção (4.1), onde as partículas de Majorana (neste caso o gluíno) são representadas nos diagramas de Feynman por uma linha contínua e sem direção definida.

A cinemática da reação é idêntica a apresentada na Fig. (5.1) com as trocas: $e^- \rightarrow q$, $e^+ \rightarrow \bar{q}$ e $\tilde{\gamma} \rightarrow \tilde{g}$. Como para este processo temos contribuições nos três canais, o canal s , t e u , a amplitude total deste processo é dado por

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u. \quad (5.23)$$

As variáveis de Mandelstam satisfazem a seguinte relação

$$s + t + u = 2M_{\tilde{g}}^2, \quad (5.24)$$

onde desprezamos a massa dos pártons iniciais. Para o cálculo da seção de choque diferencial dos subprocessos, nós precisamos encontrar o quadrado da amplitude, ou seja

$$\frac{1}{8} \sum_{a,b,c,d,e} \frac{1}{2} \sum_{s_1,s_2} |\mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u|^2, \quad (5.25)$$

onde as frações $(1/2)$ e $(1/8)$ são devido a média sobre os spins e cores iniciais, respectivamente, e os somatórios são sobre os spins e cores finais.

De acordo com as regras de Feynman para os vértices na SQCD, mostradas na Fig. (3.2), nós desenhamos os diagramas de Feynman para o subprocesso $q\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$, com os seus respectivos termos de vértice, como mostra a Fig. (5.8).

Escolhemos o fluxo de férmions como sendo o mesmo fluxo de carga dos quarks. Para encontrar as amplitudes referentes aos diagramas de (5.8), vamos seguir as regras de Feynman descritas na seção (4.1). Lembrando que para especificar um estado fermiônico de quarks e gluínos nós devemos considerar, além dos espinores u e v (ver Fig. 4.5) (que carregam informações sobre momento e spin), a função de onda de cor $w(c)$, que especifica a cor c do quark, e $\Omega_a(c)$ ($a = 1, 2, \dots, 8$), que é a função de onda de cor para o gluíno. Também devemos usar a definição do propagador do glúon dada no capítulo (1) na Fig. (1.5) (para $\lambda = 1$) para o diagrama (a) e a definição do propagador escalar nos diagrams (b) e (c), dada em (1.14).

³ Os L-squarks e R-squarks podem ser degenerados em massa e experimentalmente indistinguíveis

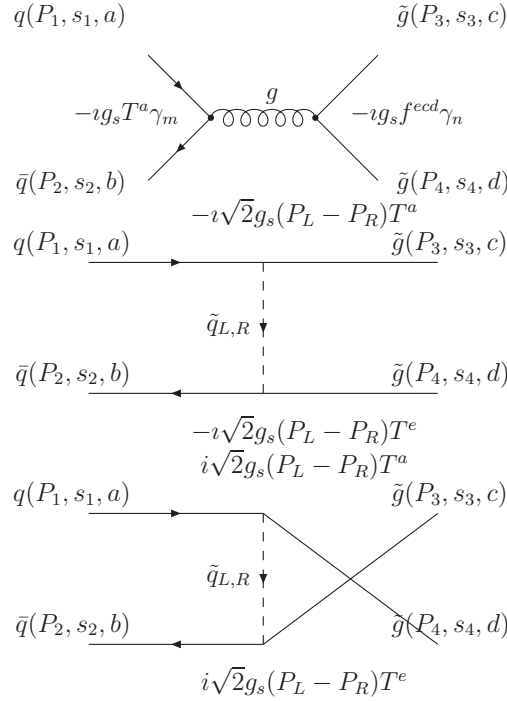


Fig. 5.8: Diagrama de Feynman para o processo $\bar{q}q \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$. Fixamos a orientação do fluxo fermiônico para cada diagrama nesta reação como sendo a mesma do fluxo de carga do quark q .

Logo, podemos escrever as expressões matemáticas para as amplitudes do processo $q\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_s &= (-ig_s) (w^\dagger(b)\bar{v}(P_2, s_2)T^a\gamma_m w(a)u(P_1, s_1)) \left(\frac{g^{mn}\delta^{ae}}{s} \right) (-ig_s) \cdot \\
 &\quad \cdot (\Omega^\dagger(d)\bar{u}(P_4, s_4)f^{ecd}\gamma_n\Omega(c)v(P_3, s_3)) \\
 &= -\frac{g_s^2}{s} (\bar{v}(P_2, s_2)\gamma_m u(P_1, s_1)) (\bar{u}(P_4, s_4)\gamma^m v(P_3, s_3)) (w^\dagger(b)T^a w(a)) f^{acd}\Omega^\dagger(d)\Omega(c). \\
 \mathcal{M}_t &= (i\sqrt{2}g_s(P_L - P_R)) (w^\dagger(a)\bar{v}(P_1, s_1)T^a\Omega(c)u(P_3, s_3)) \left(\frac{i\delta^{ae}}{t - M_{\tilde{q}}^2} \right) (i\sqrt{2}g_s(P_L - P_R)) \cdot \\
 &\quad \cdot (\Omega^\dagger(d)\bar{u}(P_4, s_4)T^e w(b)u(P_2, s_2)) \\
 \mathcal{M}_t &= -\frac{4ig_s^2}{t - M_{\tilde{q}}^2} (\bar{v}(P_2, s_2)u(P_3, s_3)) (\bar{u}(P_4, s_4)u(P_1, s_1)) w^\dagger(b)w(a)\Omega^\dagger(d)T^a\Omega(c) \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_u &= (i\sqrt{2}g_s(P_L - P_R)) (w^\dagger(b)\bar{v}(P_2, s_2)T^a\Omega(c)u(P_3, s_3)) \left(\frac{i\delta^{ae}}{u - M_{\tilde{q}}^2} \right) (i\sqrt{2}g_s(P_L - P_R)) \cdot \\
 &\quad \cdot (\Omega^\dagger(d)\bar{u}(P_4, s_4)T^e w(a)u(P_1, s_1)) \\
 &= -\frac{4ig_s^2}{u - M_{\tilde{q}}^2} (\bar{v}(P_2, s_2)u(P_3, s_3)) (\bar{u}(P_4, s_4)u(P_1, s_1)) w^\dagger(b)w(a)\Omega^\dagger(c)T^a\Omega(d) \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Checamos estes resultados com os fornecidos usando o programa FeynArts [47], com o código no MSSM [48]. Como resultado final nós usamos:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{dt}(\bar{q}q \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}) &= \frac{8\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^2} \left\{ \frac{4}{3} \left(\frac{M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t}}{M_{\tilde{q}}^2 - \hat{t}} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u}}{M_{\tilde{q}}^2 - \hat{u}} \right)^2 + \frac{3}{\hat{s}^2} [(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})^2 + (M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u})^2 + 2M_{\tilde{g}}^2\hat{s}] \right. \\
 &\quad \left. - 3 \left[\frac{(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})^2 + M_{\tilde{g}}^2\hat{s}}{\hat{s}(M_{\tilde{q}}^2 - \hat{t})} \right] - 3 \left[\frac{(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u})^2 + M_{\tilde{g}}^2\hat{s}}{\hat{s}(M_{\tilde{q}}^2 - \hat{u})} \right] + \frac{1}{3} \frac{M_{\tilde{g}}^2\hat{s}}{(M_{\tilde{q}}^2 - \hat{t})(M_{\tilde{q}}^2 - \hat{u})} \right\}, \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

que estão de acordo com os apresentados em [21, 90].

Subprocesso $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$.

Os diagrams de Feynman para produção de glúinos a partir da fusão de glúons, e os termos de interação dos vértices (de acordo com a SQCD), estão desenhados na Fig. (5.9).

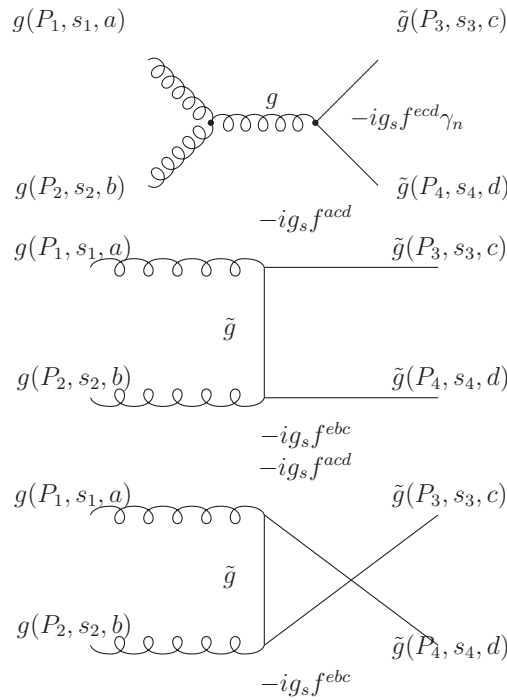


Fig. 5.9: Diagrama de Feynman para produção de um par de glúinos produzidos a partir do estado inicial glúon-glúon.

A amplitude total é dada por

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u, \quad (5.29)$$

e as variáveis de Mandelstam estão relacionadas como na Eq. (5.24).

Logo, temos as seguintes amplitudes para os diagramas de (5.9)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_s &= (-ig_s f^{abe}) (\epsilon_m(P_1) a^a(c) \epsilon_n^* a^b(c)) \left(\frac{g^{mn} \delta^{ef}}{t} \right) (-ig_s f^{cdf}) (\Omega^\dagger(c) \bar{u}(P_3) \Omega(d) u(P_4)) \\
 &\quad \cdot [g_{mn}(P_1 - P_2)_r + g_{nr}(P_2 + Q)_m - g_{rm}(Q + P_1)_r] \\
 \mathcal{M}_t &= (-ig_s f^{bde}) (\epsilon_m(P_2) a^b(c) u(P_4) \Omega(d)) \left(\frac{i(\not{H} + M_{\tilde{g}})}{t - M_{\tilde{g}}^2} \delta^{de} g^{mn} \right) (-ig_s f^{bcf}) \\
 &\quad \cdot (\epsilon_n(P_1) a^a(c) u(P_3) \Omega(c)) \\
 \mathcal{M}_u &= (-ig_s f^{bce}) (\epsilon_m(P_2) a^b(c) u(P_3) \Omega(c)) \left(\frac{i(\not{H} + M_{\tilde{g}})}{t - M_{\tilde{g}}^2} \delta^{de} g^{mn} \right) (-ig_s f^{bdf}) \\
 &\quad \cdot (\epsilon_n(P_1) a^a(c) u(P_4) \Omega(d)), \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

onde usamos a definição do propagador de Majorana conforme dada na figura (4.4).

A seção de choque final é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}) &= \frac{9\pi\alpha_s^2}{4\hat{s}^2} \left\{ \frac{2(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u})}{\hat{s}^2} + \frac{(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u}) + 2M_{\tilde{g}}^2(M_{\tilde{g}}^2 + \hat{t})}{(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})^2} \right. \\
 &+ \frac{(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u}) + 2M_{\tilde{g}}^2(M_{\tilde{g}}^2 + \hat{u})}{(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u})^2} + \frac{M_{\tilde{g}}^2(\hat{s} - 4M_{\tilde{g}}^2)}{(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u})} \\
 &\left. + \frac{(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u}) + M_{\tilde{g}}^2(\hat{u} - \hat{t})}{\hat{s}(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})} + \frac{(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u}) + M_{\tilde{g}}^2(\hat{u} - \hat{t})}{\hat{s}(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u})} \right\}, \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

conforme apresentado em Ref. [21, 90].

Subprocesso $qg \rightarrow \tilde{q}\tilde{g}$.

As regras de Feynman para produção de gluínos a partir do espalhamento Compton qg estão desenhadas em Fig. (5.10).

Neste caso as variáveis de Mandelstam satisfazem:

$$s + t + u = M_{\tilde{g}}^2 + M_{\tilde{q}}^2. \tag{5.32}$$

A amplitude de probabilidade total é

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_t + \mathcal{M}_u, \tag{5.33}$$

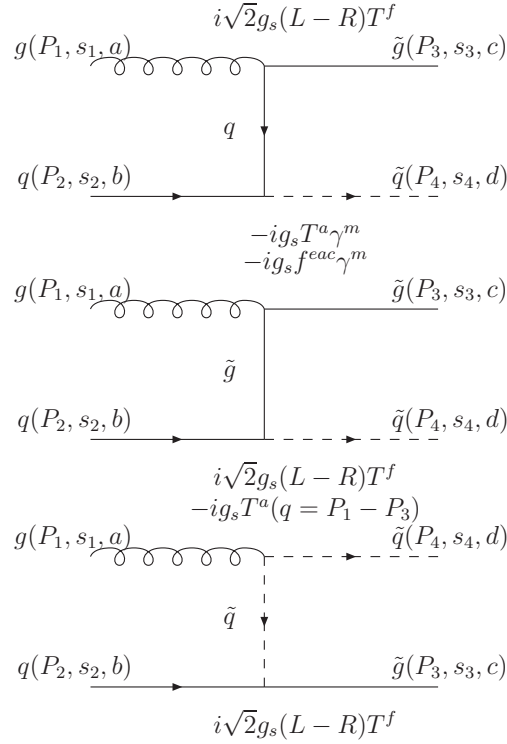


Fig. 5.10: Diagramas de Feynman para produção de squark–gluínio.

onde

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_s &= i\sqrt{2}g_s(P_L - P_R) (w^\dagger(d)T^f w(c)u(P_3, s_3)) \left(\frac{i(\not{H} + M_{\tilde{g}})}{s} \delta f^e \right) (-ig_s f^{eac}) \cdot \\
 &\quad \cdot (\Omega^\dagger(a)\bar{u}(P_1, s_1))T^e \gamma^m \epsilon^n(P_2) a^e(b)) \\
 \mathcal{M}_t &= i\sqrt{2}g_s(P_L - P_R) (w^\dagger(d)T^f w(b)u(P_2, s_2)) \left(\frac{i(\not{H} + M_{\tilde{g}})}{t - M_{\tilde{g}}^2} \delta f^e \right) (-ig_s f^{eac}) \cdot \\
 &\quad \cdot (\epsilon^\mu(P_1) a^e(a) \gamma^\mu u(P_3, s_3)) \Omega(c)) \\
 \mathcal{M}_u &= i\sqrt{2}g_s(P_L - P_R) (w^\dagger(d)T^f w(b)u(P_3, s_3)) \left(\frac{i(\not{H} + M_{\tilde{g}})}{t - M_{\tilde{g}}^2} \delta f^e \right) (-ig_s f^{eac}) \cdot \\
 &\quad \cdot (\epsilon^\mu(P_1) a^e(a) \gamma^\mu u(P_4, s_4)) \Omega(c)). \tag{5.34}
 \end{aligned}$$

A seção de choque diferencial para esta reação é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\hat{t}}(qg \rightarrow \tilde{q}\tilde{g}) &= \frac{\pi\alpha_s^2}{24\hat{s}^2} \left\{ \left[\frac{\frac{16}{3}(\hat{s}^2 + (M_{\tilde{q}}^2 - \hat{u})^2) + \frac{4}{3}\hat{s}(M_{\tilde{q}}^2 - \hat{u})}{\hat{s}(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u})} \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \left((M_{\tilde{g}}^2 - \hat{u})^2 + (M_{\tilde{q}}^2 - M_{\tilde{g}}^2)^2 + \frac{2\hat{s}M_{\tilde{g}}^2(M_{\tilde{q}}^2 - M_{\tilde{g}}^2)}{(M_{\tilde{g}}^2 - \hat{t})} \right) \right\}, \tag{5.35}
 \end{aligned}$$

de acordo com a Ref. [21, 90].

5.2.2 Produção de Gluínos no LHC

Como mencionamos anteriormente, o gluíno é um dos superparceiros que espera-se possuir a maior massa do MSSM; logo, sua produção só é viável em colisores de altas energias como o LHC. As massas dos gluínos e squarks (ver Tab. (5.2)) não são ainda parâmetros conhecidos, mas elas não podem ser menores que aproximadamente 0.5 TeV, como predito por vários modelos de quebra de SUSY (cenários SPS) [45].

O canal de produção dominante de partículas supersimétricas com carga de cor no LHC é a produção de pares squark-squark, squark-gluíno e gluíno-gluíno. Com as primeiras operações do LHC em colisões pp com energia do centro de massa de 7 TeV, já foram realizadas pesquisas por estas partículas supersimétricas [32]. No entanto, até o momento, estas partículas não foram encontradas, sendo a análise dos dados consistentes com os resultados esperados do Modelo Padrão [32]. Em breve o LHC rodará em operação completa com energia de 14 TeV, com o objetivo principal de encontrar a partícula de Higgs, e as buscas por partículas supersimétricas serão ampliadas.

Nesta seção, vamos analisar algumas previsões para produção de gluínos em colisões pp no LHC, com energia do centro de massa de 14 TeV [49].

Na Fig. (5.11), temos a seção de choque total (que inclui todos os subprocessos $gg \rightarrow \tilde{g} + \tilde{g}$, $q\bar{q} \rightarrow \tilde{g} + \tilde{g}$ e $qg \rightarrow \tilde{g} + \tilde{q}$) em LO para produção de gluínos no LHC ($\sqrt{s} = 14$ TeV). Esta seção de choque total foi obtida a partir da integração numérica da Eq. (5.20), onde foram usadas as densidades partônicas CTEQ6L1 [91]. Os resultados foram apresentados para duas suposições sobre a massa dos squarks e escolha da escala dura μ (curvas). A figura também mostra (pontos) os resultados numéricos para seção de choque total dos gluínos em LO fixando as massas de acordo com os valores fornecidos pelos cenários SPS (ver Tab. (5.2)).

A partir da Fig. (5.11) podemos perceber que a seção de choque total de produção de gluínos apresenta uma forte dependência com as massas dos gluínos e squarks. Vemos também que para valores degenerados em massa ($m_{\tilde{q}} = m_{\tilde{g}}$) a seção de choque é maior (resultado que está de acordo com [21]). A maioria dos pontos SPS estão próximos da curva de linha contínua ($m_{\tilde{q}} = m_{\tilde{g}}$, $\mu = m_{\tilde{g}}$).

A produção de gluínos e squarks, assim como suas possibilidades de detecção, dependerá dos valores reais das massas destas partículas. Logo, é importante analisarmos o comportamento das distribuições diferenciais nos diferentes cenários SPS.

Na Fig. (5.12), mostramos as distribuições em função do momento transversal p_T do gluíno para produção dupla de gluínos (consideramos os subprocessos $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ e $q\bar{q} \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$), nos diferentes cenários SPS. Escolhemos $\mu^2 = m_{\tilde{g}}^2 + p_T^2$ como uma escala dura. Podemos ver um comportamento similar das distribuições diferenciais nos diferentes cenários SPS com o momento transversal p_T , mas há uma enorme diferença de magnitude entre, por exemplo, o cenário SPS1a (mSUGRA), que fornece os maiores valores, e o cenário SPS9 (AMSB), com os menores valores. Em alguns cenários nós encontramos valores muito próximos das distribuições diferenciais, como para SPS1b (mSUGRA), SPS3 (mSUGRA) e SPS7 (GMSB), o que torna difícil discriminar os modelos mSUGRA e GMSB. O mesmo ocorre para SPS5 e SPS 6, ambos baseados no modelo mSUGRA.

Através deste estudo notamos que a análise da produção de gluínos pode ser útil para determinação do cenário correto de quebra de SUSY, embora não seja um bom processo

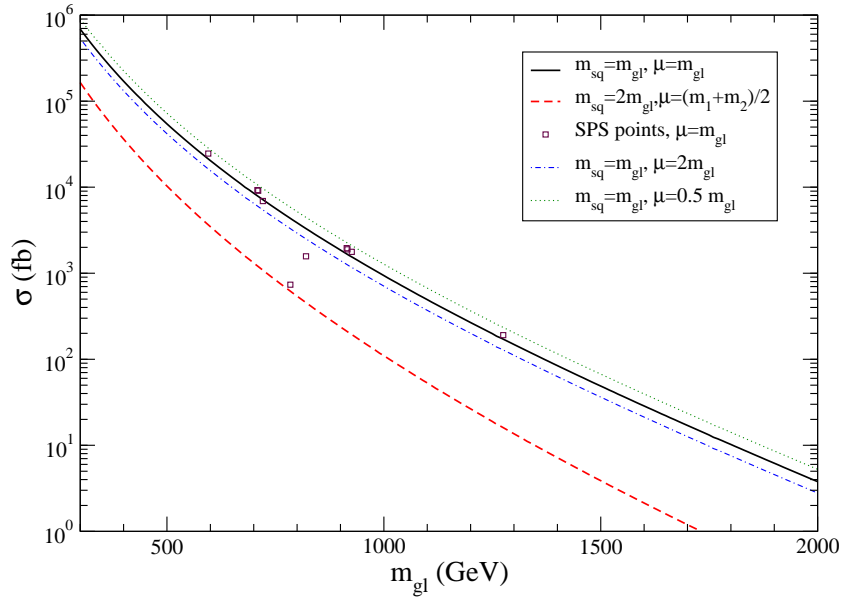


Fig. 5.11: *Seção de choque para produção de gluínos no LHC em função das massas dos gluínos. Densidade partônica: CTEQ6L1, com duas suposições sobre as massas dos squarks e escolhas da escala dura (curvas). A sensibilidade com a escala dura é presente também no caso $m_{\tilde{q}} = m_{\tilde{g}}$. Os pontos são resultados numéricos para pontos SPS como explica o texto [49].*

para discriminar os modelos supersimétricos [49].

Conclusão

Aplicamos as regras de Feynman obtidas no capítulo anterior para os processos $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$ com a troca de selétrons e para subprocessos da reação $pp \rightarrow \tilde{g}d$, onde d pode ser um gluíno ou um squark. Fizemos uma análise da seção das choque de produção de fotinos (para energias do ILC) e de gluínos (para o LHC) nestes processos.

Do comportamento da seção da choque diferencial para produção de gluínos nos diferentes cenários de quebra de SUSY, concluímos que a análise deste processo pode ser útil para se determinar o cenário correto de quebra de SUSY.

No próximo capítulo nós estudaremos os efeitos nucleares na produção de gluínos em colisões nucleares no LHC. Para isso, usaremos o resultado da seção de choque diferencial para produção de gluínos obtida a partir de (5.20), substituindo a distribuição partônica no próton f_i^P (usamos aqui a [91]) pela distribuição partônica nuclear f_i^A .

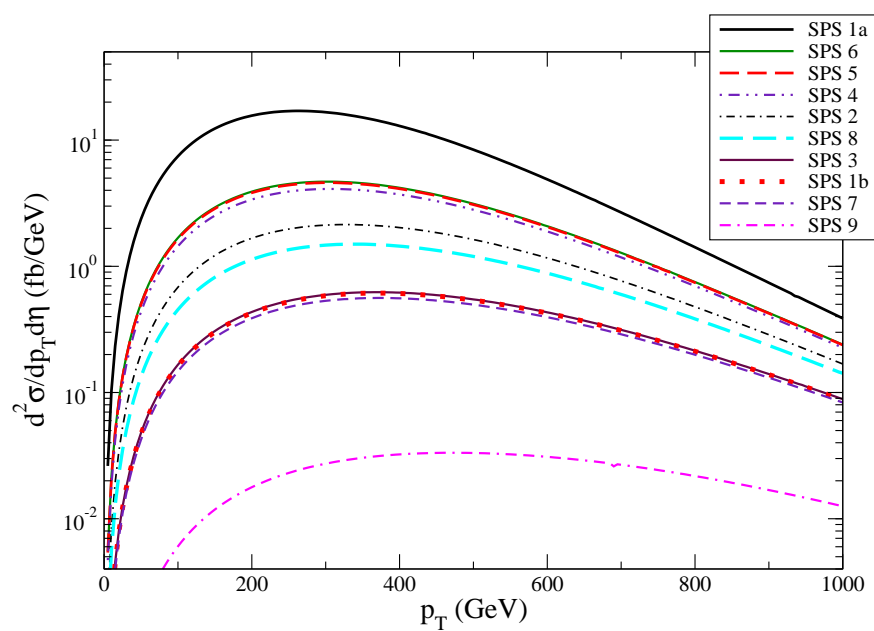


Fig. 5.12: *Produção de um par de gluínos no LHC ($\eta < 2.5$) para diferentes pontos SPS. Neste resultado foram usadas as densidades partônicas CTEQ6L1, e a escala dura como sendo $\mu^2 = m_{\tilde{g}}^2 + p_T^2$ [49].*

Capítulo 6

Produção de Glúinos em Colisões Nucleares no LHC

Como mencionamos na introdução, pesquisas extensivas por sinais de SUSY têm sido realizadas em colisores com altas energias. Recentemente, pesquisas por supersimetria com conservação de paridade R foram realizadas em colisões pp no LHC, com energia do centro de massa de 7 TeV [32], e, até o momento, nenhum sinal de SUSY foi encontrado.

A produção de pares squark-squark, glúino-squark e glúino-glúino são os canais de produção dominante das partículas supersimétricas com carga de cor e pesadas no LHC. O LHC em breve irá entrar em operação completa com energia de centro de massa na colisão de pp de 14 TeV. Como este valor é várias vezes maior que as massas dos glúinos e squarks, espera-se que estas partículas, se elas existem, sejam encontradas.

Se os squarks e glúinos forem encontrados em colisões próton-próton no LHC ($\sqrt{s} = 14$ TeV) e se suas massas não forem muito maiores que 1 TeV, elas poderão também ser produzidos em colisões envolvendo núcleos, ou seja, colisões do tipo próton-núcleo ($\sqrt{s} = 8.8$ TeV) e núcleo-núcleo ($\sqrt{s} = 5.5$ TeV), as quais também serão realizadas no LHC. Nestes casos, os efeitos nucleares devem ser considerados.

Neste capítulo, vamos analisar a influência dos efeitos nucleares na produção de glúinos em colisões no LHC, e demonstrar que dependendo da magnitude dos efeitos nucleares, a produção de glúinos pode ser enaltecida comparada à produção em colisões próton-próton.

6.1 Efeitos Nucleares de Sombreamento

O efeito nuclear de sombreamento é um dos efeitos de estado inicial (antes da colisão) sobre a distribuição dos pártons. Num núcleo constituído tipicamente por muitos nucleons (prótons e nêutrons), as distribuições dos quarks e glúons são modificadas devido a correlações e efeitos de alta densidade do meio nuclear. Assim, as funções de distribuição partônicas no núcleo (nPDF's) diferem das superposições das distribuições partônicas em seus nucleons.

As nPDF's são definidas por

$$f_i^A(x, Q_0^2) = R_i^A(x, Q_0^2) f_i^p(x, Q_0^2), \quad (6.1)$$

onde R_i^A são as razões de modificação nuclear, as quais parametrizam os efeitos nucleares.

Existem várias parametrizações das PDF's nucleares, baseadas em diferentes suposições e técnicas para uma análise global de diferentes conjuntos de dados experimentais usando

as equações de evolução DGLAP [87–89]: EKS98 [92, 93], DS [94], HKN [95], EPS08 [96] e EPS09 [97], onde as duas últimas incluem dados do RHIC pela primeira vez, e a EPS09 também inclui uma banda de incerteza ao redor do valor central. O comportamento típico em x das razões de modificação nuclear é o seguinte: uma supressão para $x \lesssim 10^{-2}$ (sombreamento), seguido por um enaltecimento ao redor de 10^{-1} (anti-sombreamento), novamente uma supressão para $x \gtrsim 0,3$ (efeito EMC), e um maior enaltecimento quando x se aproxima de 1 (movimento de Fermi). Ao todo o efeito é usualmente chamado de sombreamento.

Para ilustrar como o efeito de sombreamento pode influenciar na quantidade dos pártons no meio nuclear, nós mostramos na Fig. 6.1 os resultados para algumas razões de modificações nuclear para os glúons R_g , os quarks de valência (u_v, d_v) e do mar (u_s, d_s, s). A escala dura $Q = 595$ GeV é a massa do glúino (cenário SPS1a, mostrado na Tab. (5.2) do capítulo anterior), que é bem alta. Nós não incluímos a parametrização EKS em nossas análises, pois esta não é definida para valores tão altos de Q^2 . De acordo com o gráfico para R_g , o sombreamento usual (supressão) para x muito pequeno está presente em todas as parametrizações, sendo muito pequeno para DS (supressão de 5% em $x \simeq 10^{-5}$, comportamento aproximadamente constante), mais forte para EPS08 (supressão de 25% em $x \simeq 10^{-5}$) e moderado para HKN e EPS09 (supressão de 15% em $x \simeq 10^{-5}$). No entanto, para os processos considerados neste trabalho, a região de pequeno x não contribui devido a grande massa dos glúinos em comparação com a energia de centro de massa, logo nós só mostramos o domínio de x relevante. O sombreamento é muito pequeno para $x \gtrsim 10^{-3}$, a DS e EPS estando dentro da banda de erro da EPS na maioria das regiões de x (exceto para x muito alto). Por outro lado, para maiores valores de x , o antisombreamento (enaltecimento) está presente em EPS08, EPS09 ($x \leq 10^{-1}$) e HKN (grande x), mas não em DS. O comportamento com aumento de x é também diferente, tendo um crescimento mais acentuado para EPS08, e suavizado em EPS09. As razões de modificação nucleares são muito similares para todos os pártons, exceto no caso da HKN, a qual tem diferentes efeitos: para valores moderados de x , os quarks d de valência e os glúons são enaltecidos, o quark u de valência é suprimido, enquanto o quark u do mar tem um enaltecimento seguido de uma supressão.

O quark charme não está incluído na parametrização DS, e o quark bottom não está incluído nas parametrizações DS e HKN. Na Fig. (6.2), mostramos resultados para razões de distribuição nuclear para os quarks charme (para HKN, EPS08 e EPS09), e bottom (para EPS08 e EPS09). Podemos notar que o comportamento das parametrizações EPS08 e EPS09 é análogo ao comportamento dos quarks leves, enquanto que na parametrização HKN vemos um comportamento diferente em relação aos outros sabores de quarks.

Existe uma grande quantidade de estudos sobre produção inclusiva de quarks pesados, quarkonium (estado ligado de 2 quarks pesados) e produção de fótons em colisões centrais próton-núcleo e núcleo-núcleo (ver por ex. Refs. [98–107]), as quais tentam ajudar a limitar as nPDF's utilizando os vários observáveis. A variedade de efeitos nucleares pode também ser relevante para produção de glúinos, visto que os diagramas que contribuem apresentam (anti)quarks e glúons no estado inicial.

No caso da produção de glúinos, devido às grandes massas destas partículas, os valores sondados de x tendem a ser moderados ($x \gtrsim 10^{-2}$), e então o anti-sombreamento pode ser importante (dependendo da região cinemática e da PDF nuclear), enaltecendo a taxa de produção do glúino comparada com a obtida para a colisão de um único nucleon na mesma

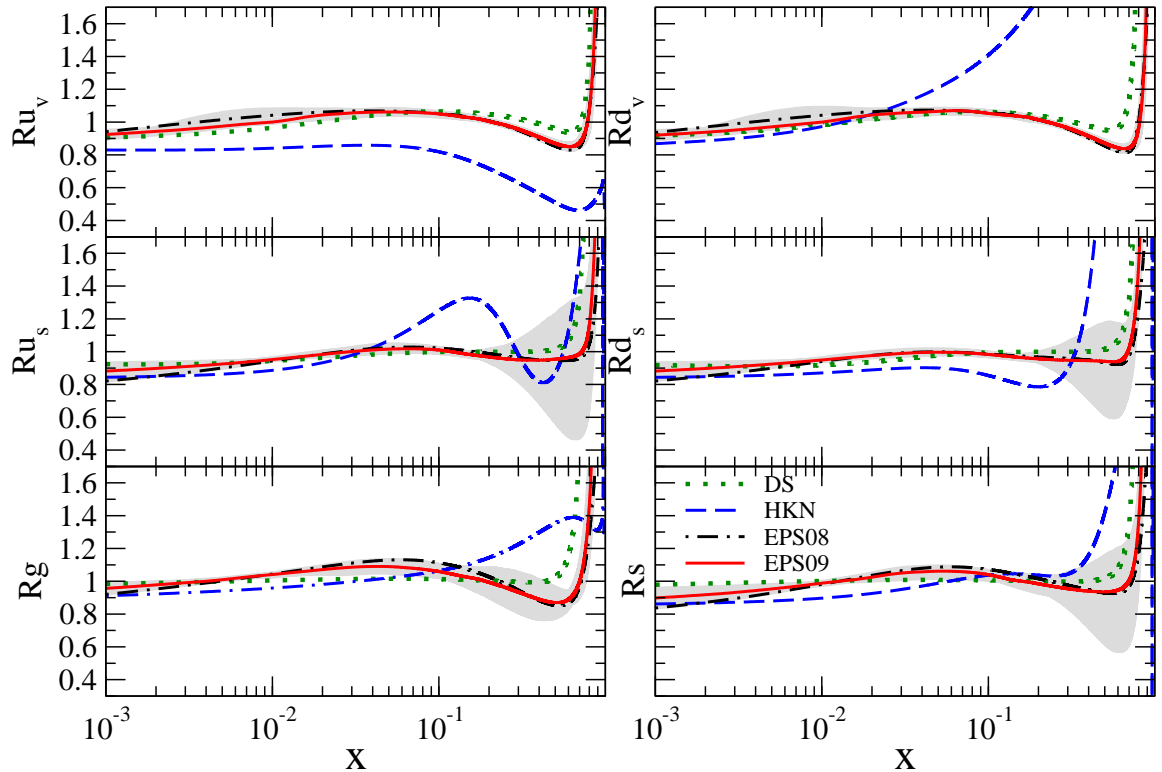


Fig. 6.1: Razões R_f para quarks do mar, de valência e glúons, previstas pelas parametrizações DS [94], HKN [95], EPS08 [96] e EPS09 [97] em $Q = 595 \text{ GeV}$ e $A = 208$ (massa atômica do chumbo). A banda de incerteza é mostrada para as nPDF's EPS09.

energia. Portanto, considerando que as menores energias do centro de massa (5.5 TeV (AA) e 8.8 TeV (pA)) reduzirá a taxa de produção de glúons (comparada a 14 TeV (pp)), poderá haver um enaltecimento devido a quantidade de quarks e glúons no meio nuclear comparada com a distribuição partônica de nucleons sobre um único próton, devido a efeitos da alta densidade nuclear. Neste trabalho, nós investigaremos se este enaltecimento (ou supressão) é presente ou não.

6.2 Produção de Glúons em Colisões Nucleares

Vamos agora analisar a produção de glúons em colisões nucleares. O cálculo da seção de choque diferencial é feito como explicado na seção (5.2.1), substituindo as distribuições partônicas do nucleon livre (f_i^p na Eq. (5.20)) pela correspondente distribuição partônica nuclear f_i^A (para a PDF do próton usamos a CTEQ6L1 [91]). Os efeitos nucleares são estudados comparando as diferentes nPDF's (por consistência, nós usamos a versão LO para todas as nPDF's). Para garantirmos que as nPDF's estão dentro da região de validade, nós usamos $Q = m_{\bar{g}}$ para escala dura (como feito em [20]). Outra escolha possível seria uma

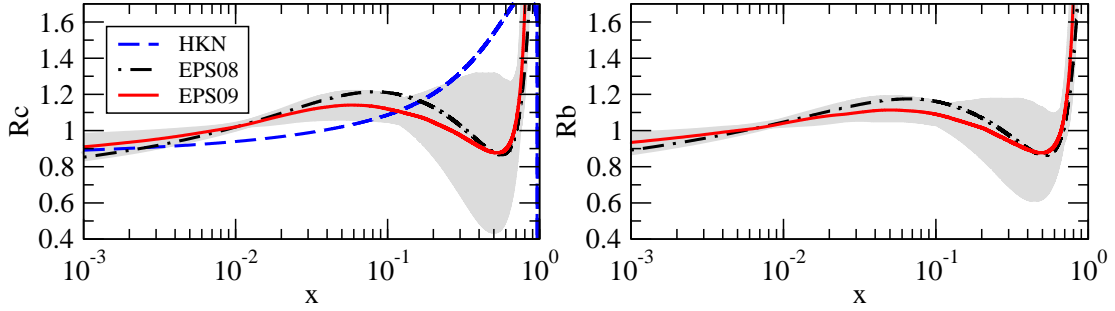


Fig. 6.2: Razões R_f para o quark charm, predita pelas parametrizações HKN [95], EPS08 [96] e EPS09 [97] e para o bottom, predita pelas parametrizações EPS08 [96] e EPS09 [97], em $Q = 595$ GeV e $A = 208$. A banda de incerteza é mostrada para as nPDF's EPS09.

escala variável com p_T , $Q = m_{\tilde{g}} + p_T$. Com esta escala algumas nPDF's saíam de suas regiões de validade (EPS08 e EPS09 são congeladas em $Q = 1000$ GeV para valores acima desta escala, ao passo que a DS não é válida nesta região). Por isso, não consideramos a parametrização DS no cenário SPS 9 (ver Tab. (5.2)), com massa do gluíno maior do que 1 TeV. Nós consideramos o cenário SPS1a como uma primeira (a mais otimista) escolha para as massas dos gluínos e squarks.

Na Fig. (6.3) nós mostramos nossos resultados para a dependência do momento transversal do fator de modificação nuclear definido por

$$R_{pA} \equiv \frac{d^2\sigma(pA)}{d\eta dp_T} / A \frac{d^2\sigma(pp)}{d\eta dp_T}, \quad (6.2)$$

para produção do gluíno nas colisões próton-núcleo no LHC ($\sqrt{s} = 8.8$ GeV). Nós notamos que para baixo p_T as nPDF's DS e EPS08 estão dentro da banda de incerteza de EPS09, com quase nenhum efeito nuclear, $R_{pA} \sim 1$. Para $p_T > 500$ GeV, as EPS's começam levemente suprimidos (aumentando com p_T), enquanto a DS começa levemente enaltecido (aumentando com p_T). Para a distribuição HKN, há um maior enaltecimento de 10%, aumentando lentamente com p_T . Isto significa que a quantidade correta de (anti)sombreamento é indefinida. De fato, como p_T cresce os valores sondados de x aumentam, e as nPDF's EPS entram na região EMC, enquanto que este efeito não aparece para as outras nPDF's.

Na Fig. (6.4) nós apresentamos uma análise similar para dependência do momento transversal do fator modificação nuclear definido por

$$R_{AA} = \frac{d^2\sigma(AA)}{d\eta dp_T} / A^2 \frac{d^2\sigma(pp)}{d\eta dp_T}, \quad (6.3)$$

para produção de gluínos em colisões núcleo-núcleo no LHC (5.5 TeV). Neste caso, os efeitos nucleares são amplificados pela presença de dois núcleos. Além disso, os valores de x sondados são muito mais altos devido a energia do centro de massa ser menor. De fato, a supressão para EPS aumenta com p_T de uma maneira mais forte que no caso pA (por

volta de 15% para p_T mais alto). A nPDF DS tem um enaltecimento padrão, aumentando com p_T . Notamos que esta distribuição alcança o efeito de movimento de Fermi no lado direito da Fig. (6.1). O enaltecimento é também maior para HKN, acima de 20% com um aumento muito pequeno com p_T . Nós podemos ver que, se a mais recente nPDF EPS09 é a mais correta distribuição, a produção de glúinos será levemente suprimida comparada com colisões pp na mesma energia, enquanto que a DS e HKN sugerem que haverá algum enaltecimento na produção de glúinos em colisões nucleares.

O possível aumento da taxa de produção de glúinos em colisões nucleares (comparado com colisões pp na mesma energia) mostrado nas Figs. (6.3) e (6.4) é de fato muito pequena para melhorar realmente a viabilidade da detecção de glúinos quando vamos de pp para pA e AA. De fato, a multiplicidade de partículas produzidas é consideravelmente maior em colisões nucleares, o que faz com que a detecção dos glúinos seja mais difícil. Além disso, as menores energias do centro de massa disponíveis produzem um número menor de glúinos comparado a colisões pp com 14 TeV. A luminosidade que espera-se ser alcançada em colisões AA ($\mathcal{L}_{NN} \approx 10^{27} A^2 \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$) [109] é sete ordens de magnitude menor que no modo pp ($\mathcal{L}_{pp} \approx 10^{34} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$), e esta é a principal limitação para detecção de glúinos nucleares. No modo pA, espera-se uma luminosidade de $\mathcal{L}_{pA} \approx 7.4 \times 10^{29} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$ [110], a qual se torna 7.4 pb^{-1} assumindo um ano inteiro (10^7 s) de funcionamento do LHC no modo íon (usualmente, considera-se a duração de um mês (10^6 s) para o modo íon). Somente com nossa estimativa em LO, e considerando a parametrização EPS09, mais suprimida, obteriamos então 31 glúinos produzidos no modo pA para todo espectro em p_T ; assim a estatística é realmente limitada. Existem sugestões de que a luminosidade pA poderia eventualmente ser aumentada para $\mathcal{L}_{pA} \approx 10^{31} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ [111], neste caso nossa estimativa aumentaria para 430 glúinos em um ano de funcionamento no modo íon. Para estimativas mais realistas, as correções em NLO ainda aumentariam a seção de choque dos vários subprocessos um fator menor do que 2 [112], e assim o para o número de glúinos detectados.

Não somente o sombreamento nuclear mas também os parâmetros de quebra de SUSY afetam as razões nucleares. Esta dependência é indireta, visto que as massas do glúino e squark ($m_{\tilde{g}}, m_{\tilde{q}}$) são os únicos parâmetros que realmente afetam os resultados, mas essas massas são consequências de diferentes parâmetros de quebra de SUSY em diferentes cenários SPS. Isto é mostrado na Fig. (6.5), onde diferentes cenários SPS fornecem diferentes valores absolutos para as taxas nucleares R_{AA} (isto pode ser visto comparando, por exemplo, os pontos iniciais de cada curva). O crescimento em p_T para a nPDF DS é igualmente mais profundo para o cenários SPS de maior massa (maior x). Para o cenário SPS 9, os resultados não são muito confiáveis, visto que a maioria das parametrizações não são válidas nesta região: o HKN prediz um enaltecimento essencialmente constante com p_T , e as EPSs (congelada acima de 1 TeV) predizem uma supressão decrescente com p_T . Devido a combinação das incertezas nos efeitos nucleares e nos cenários de quebra de SUSY, é necessário uma melhor determinação das PDF's nucleares antes de descrevermos precisamente a produção de glúinos em colisões nucleares. Além disso, a descoberta e medida das massas dos glúinos e squarks será importante nas pesquisas por spartículas produzidas em colisões nucleares, já que os efeitos nucleares também dependem dessas massas.

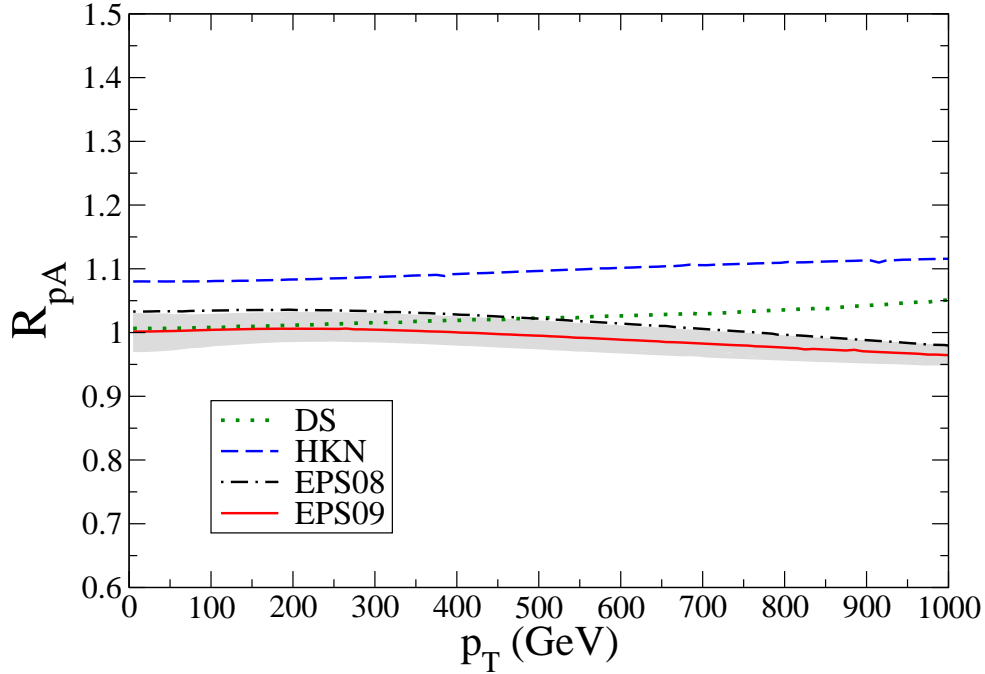


Fig. 6.3: Dependência com o momento transversal do fator de modificação nuclear R_{pA} para produção inclusiva de glúinos em colisões pA no LHC ($\sqrt{s} = 8.8$ TeV, $|\eta| \leq 2.5$), para distintas $nPDF$'s.

6.3 Conclusão

Neste capítulo estudamos efeitos nucleares na produção de glúinos em colisões pA e AA no LHC. Nós mostramos diferentes resultados de enaltecimento e supressão, dependendo das PDF 's nucleares. Vimos que os efeitos nucleares são menores em interações próton-núcleo e maiores em colisões entre núcleos. Provavelmente, os glúinos serão produzidos em grande quantidade em colisões pp a 14 TeV. Uma vez que os detalhes na produção forem conhecidos em interações pp , o estudo da produção de glúinos em colisões pA e AA poderia fornecer vínculos sobre as $nPDF$'s em regiões de Q^2 elevado, ainda não exploradas.

Incertezas sobre as $nPDF$'s (e efeitos de matéria fria em geral), e sobre as massas dos glúinos e squarks (cenários SPS) podem tornar a detecção dos glúinos nucleares muito difícil. Logo, é necessário desemaranhar estes dois tipos de efeitos em futuras pesquisas. Para colisões de núcleos pesados, onde é esperada a formação do plasma de quarks e glúons, podem aparecer outros canais onde o glúino é produzido. Aqui nós somente investigamos os efeitos de matéria fria conhecidos como sombreamento das distribuições nucleares. Por exemplo, não levamos em conta efeitos de perda de energia dos pártons ao atravessar o meio nuclear. No caso de os glúinos serem descobertos em colisões pp no LHC, eles também serão produzidos em colisões pA e AA . No entanto, a capacidade de detectá-los dependerá de um melhor entendimento dos efeitos nucleares corretos.

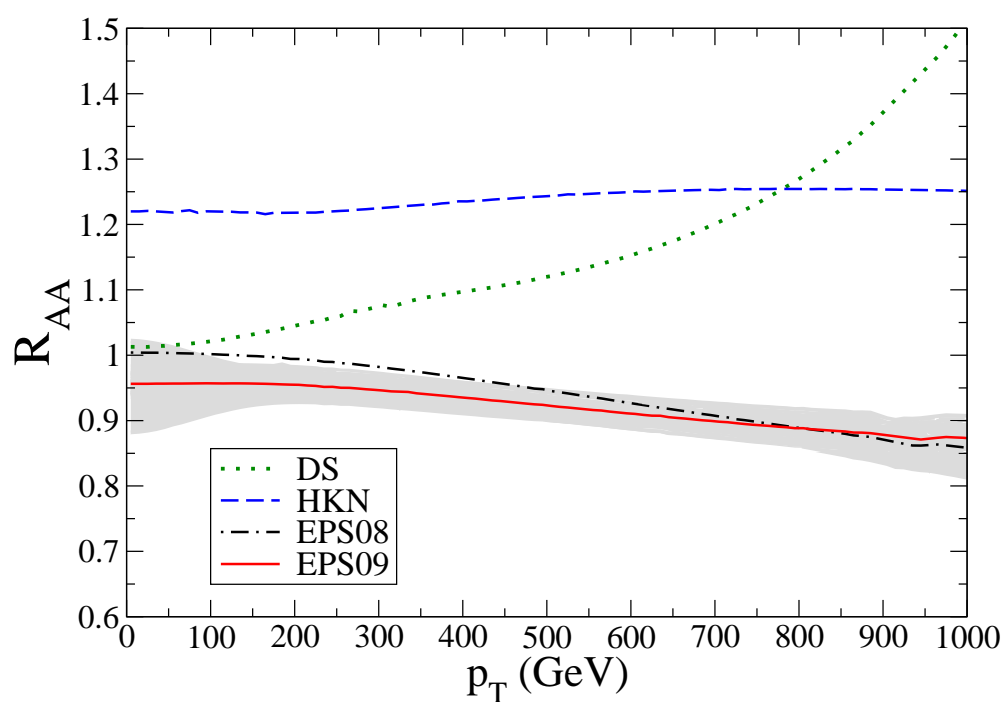


Fig. 6.4: Dependência do momento transverso do fator de modificação nuclear R_{AA} para produção inclusiva de glúinos em colisões AA no LHC ($\sqrt{s} = 5.5$ TeV, $|\eta| \leq 2.5$), para distintas nPDF's.

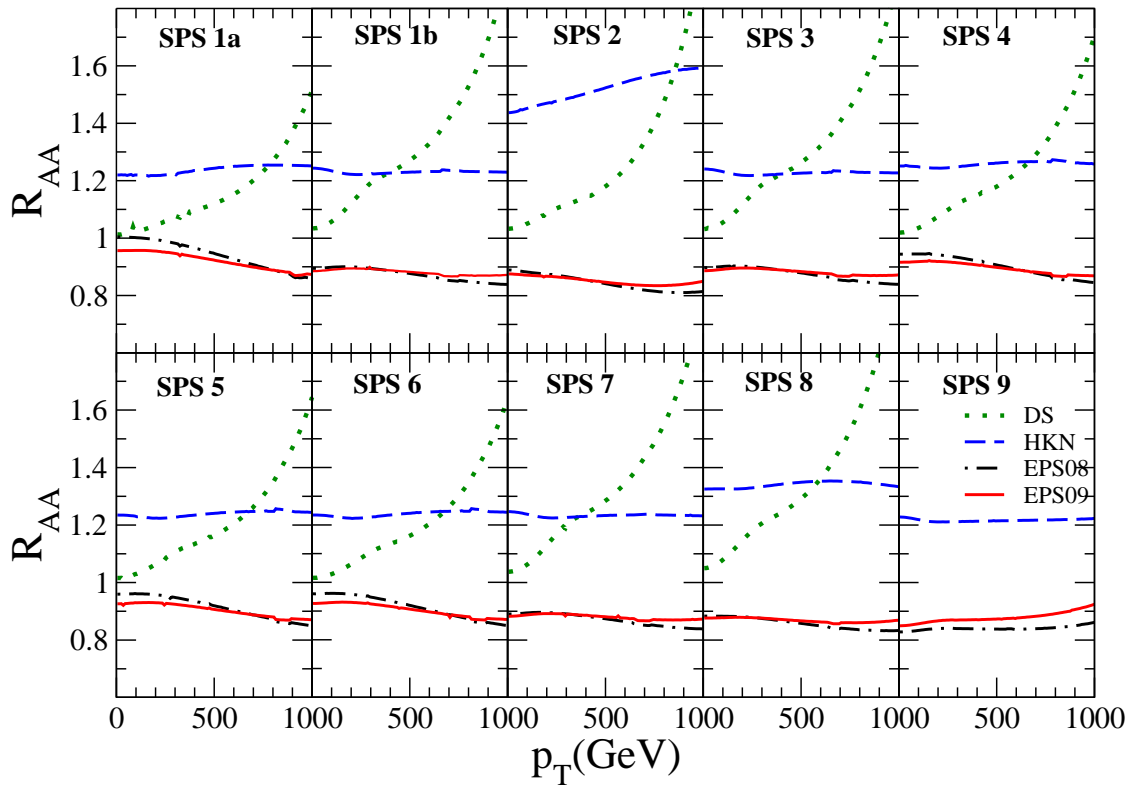


Fig. 6.5: Dependência do momento transversal da razão R_{AA} na produção de glúinos no LHC ($\sqrt{s} = 5.5 \text{ TeV}$), para diferentes escolhas das distribuições partônicas: DS [94], HKN [95], EPS08 [96] e EPS09 [97], em diferentes cenários SPS.

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho realizamos um estudo sobre a produção de glúinos no LHC, em colisões próton-próton ($\sqrt{s} = 14$ TeV), próton-núcleo ($\sqrt{s} = 8.8$ TeV) e núcleo-núcleo ($\sqrt{s} = 5.5$ TeV). No estudo sobre a produção de glúinos em colisões nucleares, investigamos a influência dos efeitos nucleares. Nós demonstramos que dependendo da magnitude dos efeitos nucleares, a produção de glúinos pode ser enaltecida ou suprimida comparada à produção em colisões próton-próton. Este estudo, foi uma contribuição inédita e nossos resultados estão apresentados no capítulo 6. Parte desta contribuição foi publicada em um proceedings [108], e um trabalho com o estudo completo do assunto foi publicado na Ref. [50].

O glúino é uma partícula do tipo Majorana, predita por modelos de extensão supersimétrica do Modelo Padrão, como o MSSM. Como tratamos de um parceiro supersimétrico, fizemos um estudo sobre ideias básicas de supersimetria no capítulo 2. Inicialmente motivamos o estudo sobre supersimetria mostrando algumas soluções de problemas usando esta teoria que não são possíveis de se explicar a partir do Modelo Padrão de física de partículas. Trabalhamos também neste capítulo os conceitos fundamentais para construção de extensões supersimétricas, como a definição de superespaço e supercampos. Com a introdução do conceito de supercampos, mostramos que o espectro de partículas do Modelo Padrão é duplicado, com a inclusão de parceiros supersimétricos aos campos usuais. Mostramos no capítulo 3 como são construídos exemplos de teorias supersimétrica. Para isso, construímos a lagrangeana da super QED e da super QCD. A partir das lagrangeanas da SQED e da SQCD obtidas no capítulo 3, encontramos as regras de Feynman, em LO, para os principais vértices da SQED e SQCD. Mostramos também, como são introduzidos os superparceiros das partículas usuais da QED, ou seja, o selétron (superparceiro do elétron), o fotino (superparceiro do fóton), e os superparceiros da QCD, o squark (superparceiro do quark) e o glúino (superparceiro do glúon). O fotinos, assim como os glúino, são partículas de Majorana.

Para calcular a produção de glúinos e fotinos, no capítulo 4 mostramos um conjunto de regras de Feynman, que se aplicam tanto para partículas do tipo Dirac como para partículas de Majorana, baseadas na Ref. [81]. Esta é uma importante contribuição deste trabalho já que a maioria dos livros de teoria de campos tratam somente de partículas do tipo Dirac. Com este conjunto de regras de Feynman e termos de vértice obtidos no capítulo 3 para SQED e SQCD, no capítulo 5 fizemos o cálculo completo da seção de choque para produção de fotinos no processo $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$, bem como o cálculo das amplitudes para produção de glúinos nos subprocessos da colisão pp , $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$, $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$ e $gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}$. Com auxílio do programa FeynArts confirmamos nossos resultados para as amplitudes.

Na seção (5.2.2) do capítulo 5, nós começamos os estudos fenomenológicos para produção

de glúinos. Fizemos a análise do comportamento da seção de choque nos diferentes cenários SPS, a partir de resultados obtidos na Ref. [49], e notamos que a magnitude na produção de glúinos depende fortemente da massa destas partículas nestes cenários.

No último capítulo, realizamos um estudo sobre a produção de glúinos em colisões pA e AA no LHC e notamos que, devido a magnitude dos efeitos nucleares, pode haver enaltecimento ou diminuição na produção de glúinos nestas colisões, comparando-se com colisões pp na mesma energia. Os efeitos nucleares podem dificultar na procura por glúinos produzidos em colisões pA e AA, e devem ser levados em conta em tais buscas. Além disso, as energias do centro de massa das colisões nucleares serão inferiores aos 14 TeV de colisões pp, o que diminui a taxa de produção de glúinos comparado ao modo pp. Concluimos então que os enaltecimentos indicados em alguns dos possíveis cenários não são suficientes para melhorar a viabilidade de se encontrar glúinos em colisões nucleares. Mas o fato é que se os glúinos existem, e suas massas não forem muito maiores que 1 TeV, eles também serão produzidos nestas colisões.

Para complementar este trabalho, pretendemos estendê-lo para o estudo da produção de squarks em colisões hadrônicas, bem como o de levar em conta as contribuições na próxima ordem de teoria de perturbação (NLO). Estudos de outras extensões do Modelo Padrão também são relevantes na busca de partículas supersimétricas no LHC e em colidores futuros.

Apêndice A

Álgebras

Os índices de Lorentz são representados por letras latinas (m, n, \dots) e os índices espinoriais são representados por letras gregas (α, β, \dots). Também trabalhamos com unidades naturais, onde $c = 1$ e $\hbar = 1$.

A.1 Álgebra de Poincaré

O grupo de Poincaré contém como subgrupo o grupo de Lorentz, com transformações definidas por

$$x^m \rightarrow x'^m = \omega^{mn} x_n, \quad (\text{A.1})$$

onde $x^m = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ são coordenadas no espaço de Minkowski. O grupo de Lorentz contém 6 parâmetros (3 parâmetros de *boost* e 3 ângulos de rotação), escritos em termos de um tensor anti-simétrico $\omega^{mn} = -\omega^{nm}$. Assim, as transformações de Lorentz envolvem 6 geradores, 3 para rotação e 3 para *boosts*. Para um campo espinorial de spin 1/2 podemos escrever os geradores do grupo de Lorentz em termos do tensor anti-simétrico $M^{mn} = -M^{nm}$ como

$$M^{mn} = i(x^m \partial^n - x^n \partial^m) + \frac{1}{4} [\gamma^m, \gamma^n], \quad (\text{A.2})$$

Se o campo for escalar o último termo (que corresponde ao spin) é nulo.

O grupo de translação também é um subgrupo do grupo de Poincaré, com 4 parâmetros, definido de acordo com a transformação

$$x^m \rightarrow x'^m = x^m + a^m, \quad (\text{A.3})$$

onde a^m são os parâmetros de translação. O grupo de translação requer 4 operadores P^m , um para cada direção. A forma de um gerador de translação é dada por

$$P^m = i\partial^m. \quad (\text{A.4})$$

Logo, o grupo de Poincaré consiste de transformações de Lorentz e translações:

$$\text{transformação de Poincaré : } x^m \rightarrow x'^m + \omega^{mn} x_n + a^m \quad (\text{A.5})$$

A transformação de um campo arbitrário Φ sobre (A.5) pode ser escrita como:

$$\text{translação : } \Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{ia^m P_m} \Phi(x) \quad (\text{A.6})$$

$$\text{transformação de Lorentz : } \Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{\frac{i}{2} \omega^{mn} M_{mn}} \Phi(x) \quad (\text{A.7})$$

Os geradores do grupo de Poincaré satisfazem a seguinte álgebra

$$\begin{aligned} [P^m, P^n] &= 0 , \\ [M^{mn}, P^r] &= i(\eta^{nr} P^m - \eta^{mr} P^n) , \\ [M^{mn}, M^{rs}] &= -i(\eta^{mr} M^{ns} - \eta^{ms} M^{nr} - \eta^{nr} M^{ms} + \eta^{ns} M^{mr}) . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A.2 Super Álgebra de Poincaré ou Álgebra Supersimétrica

A álgebra da supersimetria é uma extensão da álgebra de Poincaré, com a introdução de dois geradores espinoriais Q e \bar{Q} , conhecida como super álgebra de Poincaré. A extensão da álgebra de Poincaré é assegurada pelo teorema de Haag-Lopuszanski-Sohnius [72]. Considerando apenas um gerador de supersimetria Q_α ($N = 1$)¹, a álgebra é dada por

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m P_m , \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 , \\ [Q_\alpha, P_m] &= [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_m] = 0 , \\ [Q_\alpha, M^{mn}] &= \sigma_\alpha^{mn\beta} Q_\beta , \\ [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M^{mn}] &= \bar{\sigma}^{mn\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \bar{Q}_{\dot{\beta}} , \\ [P^m, P^n] &= 0 , \\ [M^{mn}, P^r] &= i(\eta^{nr} P^m - \eta^{mr} P^n) , \\ [M^{mn}, M^{rs}] &= -i(\eta^{mr} M^{ns} - \eta^{ms} M^{nr} - \eta^{nr} M^{ms} + \eta^{ns} M^{mr}) . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Como vimos no capítulo 2, considerando ω^{mn} como zero, obtemos as seguintes transformações supersimétricas no superspaço $Z = (x^m, \theta, \bar{\theta})$

$$x^m \rightarrow x^m + a^m + i\xi\sigma^m\bar{\theta} - i\theta\sigma^m\bar{\xi} \quad (\text{A.10})$$

$$\theta \rightarrow \theta + \xi \quad (\text{A.11})$$

$$\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \bar{\xi}, \quad (\text{A.12})$$

onde a^m , ξ e $\bar{\xi}$ são os parâmetros da álgebra de SUSY. Obtivemos também seguintes as definições para operadores de SUSY

$$P_m = i\partial_m \quad (\text{A.13})$$

$$Q_\alpha = i\partial_\alpha - \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \theta^{\dot{\alpha}} \partial_m \quad (\text{A.14})$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -i\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m. \quad (\text{A.15})$$

A partir da definição destes operadores é possível demonstrar algumas das relações de comutação de (A.9).

¹ Para um maior número de geradores $N > 1$ as teorias supersimétricas não admitem representações quirais que são cruciais para fenomenologia.

Apêndice B

Notação Espinorial e Convenções

B.1 Notação espinorial de Weyl

Para derivarmos as lagrangeanas supersimétricas, é conveniente utilizar espinores de Weyl de duas componentes. Vamos mostrar qual a correspondência entre espinores de Weyl de duas componentes e a notação espinorial de Dirac e de Majorana de quatro componentes.

Um fermion livre é descrito pela lagrangeana

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i\bar{\Psi}_D\gamma^m\partial_m\Psi_D - m\bar{\Psi}_D\Psi_D, \quad (\text{B.1})$$

Por conveniência vamos usar a seguinte representação para as matrizes γ^m [71]

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

onde

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

onde as matrizes σ^1 , σ^2 e σ^3 são as matrizes de Pauli.

Os espinores de Dirac Ψ_D podem ser construídos a partir de dois espinores de Weyl de duas componentes da seguinte maneira:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Logo, o espinor adjunto $\bar{\Psi}_D$ é dado por

$$\bar{\Psi}_D \equiv \Psi_D^\dagger \gamma^0 = (\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \ \chi^\alpha) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{\Psi}_D = -(\chi^\alpha \ \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}), \quad (\text{B.6})$$

onde $\chi^\alpha = [\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}]^\dagger$ e $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = [\xi_\alpha]^\dagger$.

Sabemos que para um férmion massivo nós definimos a projeção $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)\varphi$ como sendo as componentes de mão esquerda e mão direita de φ . Definimos os operadores projeção da seguinte forma

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$P_R \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Logo, usando espinores de Weyl, da Eq. (B.4) temos:

$$P_L \Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$P_R \Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Assim, ξ_α e $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ são chamados de espinores de Weyl de mão esquerda e mão direita, respectivamente.

Os índices espinoriais são levantados e abaixados com o seguinte tensor métrica

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma^2, \quad (\text{B.11})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^2. \quad (\text{B.12})$$

O levantamento e abaixamento dos índices ocorre da seguinte maneira:

$$\xi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \quad (\text{B.14})$$

Definimos então:

$$\xi\chi \equiv \xi^\alpha \chi_\alpha = -\xi_\alpha \chi^\alpha = \chi^\alpha \xi_\alpha \equiv \chi\xi \quad (\text{B.15})$$

$$\bar{\xi}\bar{\chi} \equiv \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \equiv \bar{\chi}\bar{\xi} \quad (\text{B.16})$$

Com essas definições podemos escrever

$$\bar{\Psi}_D \Psi_D = - \begin{pmatrix} \chi^\alpha & \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = -\chi^\alpha \xi_\alpha - \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -[\chi\xi + \bar{\xi}\bar{\chi}] \quad (\text{B.17})$$

$$\bar{\Psi}_D \Psi_D = -[\chi\xi + \bar{\chi}\bar{\xi}] \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_D \gamma^m \Psi_D &= - \begin{pmatrix} \chi^\alpha & \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \\ \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\beta \\ \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \chi^\alpha & \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \\ \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \xi_\beta \end{pmatrix} \\ &= -\chi^\alpha \bar{\sigma}_{\alpha\dot{\beta}}^m \bar{\chi}^{\dot{\beta}} - \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \sigma^{m\dot{\alpha}\beta} \xi_\beta = - \left[\chi^\alpha \bar{\sigma}_{\alpha\dot{\beta}}^m \bar{\chi}^{\dot{\beta}} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \epsilon_{\beta\alpha} \xi^\alpha \right] \\ &= - \left[\chi^\alpha \bar{\sigma}_{\alpha\dot{\beta}}^m \bar{\chi}^{\dot{\beta}} - \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \epsilon_{\beta\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \epsilon_{\beta\alpha} \xi^\alpha \right] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Como

$$\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\beta} \epsilon_{\beta\alpha} = \bar{\sigma}_{\beta\alpha}^m, \quad (\text{B.20})$$

logo

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_D \gamma^m \Psi_D &= - \left[\chi^\alpha \bar{\sigma}_{\alpha\dot{\beta}}^m \bar{\chi}^{\dot{\beta}} - \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \bar{\sigma}_{\dot{\beta}\alpha}^m \xi^\alpha \right] = - \left[\chi^\alpha \bar{\sigma}_{\alpha\dot{\beta}}^m \bar{\chi}^{\dot{\beta}} - \xi^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^m \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \right] \\ \bar{\Psi}_D \gamma^m \Psi_D &= - \left[\chi \bar{\sigma}^m \bar{\chi} - \xi \sigma^m \bar{\xi} \right].\end{aligned}\tag{B.21}$$

Usando (B.18) e (B.21) podemos escrever a lagrangeana (B.1) como:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -i\chi \bar{\sigma}^m \partial_m \bar{\chi} + i(\partial_m \xi) \sigma^m \bar{\xi} + m [\chi \xi + \bar{\chi} \bar{\xi}]\tag{B.22}$$

Podemos escrever

$$\partial_m (\xi \sigma^m \bar{\xi}) = (\partial_m \xi) \sigma^m \bar{\xi} + \xi \sigma^m (\partial_m \bar{\xi}),$$

logo,

$$(\partial_m \xi) \sigma^m \bar{\xi} = -\xi \sigma^m (\partial_m \bar{\xi}) + \partial_m (\xi \sigma^m \bar{\xi}).\tag{B.23}$$

Como a derivada total $\partial_m (\xi \sigma^m \bar{\xi})$ não afeta a ação, podemos escrever (B.22) como:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = -i\chi \bar{\sigma}^m \partial_m \bar{\chi} - i\xi \sigma^m \partial_m \bar{\xi} + m [\chi \xi + \bar{\chi} \bar{\xi}]\tag{B.24}$$

O espinor conjugado de carga é definido por

$$\Psi^c = C \bar{\Psi}^T\tag{B.25}$$

Na representação de Weyl, a matriz conjugação de carga é definida por

$$C = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix}\tag{B.26}$$

É possível demonstrar que nesta representação a matriz conjugação de carga satisfaz as seguintes propriedades

$$C^{-1} \gamma^m C = (-\gamma^m)^T\tag{B.27}$$

$$C^\dagger = C^{-1},\tag{B.28}$$

$$C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T\tag{B.29}$$

Usando (B.26), podemos escrever o espinor de conjugado de carga de Dirac como:

$$\begin{aligned}\Psi_D^c &= C \bar{\Psi}_D^T = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \left[- \begin{pmatrix} \chi^\alpha & \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \right]^T \\ &= - \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^\alpha \\ \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} \chi^\alpha \\ \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\epsilon_{\beta\alpha} \chi^\alpha \\ -\epsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{B.30}$$

$$\Psi_D^c = \begin{pmatrix} \chi_\beta \\ \bar{\xi}^{\dot{\beta}} \end{pmatrix}\tag{B.31}$$

Podemos perceber que o operador conjugação de carga na representação de Weyl dos espinores de Dirac troca ξ por χ e vice-versa.

Como vimos na seção (1.1.4) para campos de Majorana temos que as partículas e as anti-partículas são indistinguíveis. Logo, o espinor de Majorana Ψ_M possui a seguinte condição

$$\Psi_M = \Psi_M^c \quad (\text{B.32})$$

Para que isto ocorra é necessário que $\xi_\alpha = \chi_\alpha$ e $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$. Logo, podemos escrever o espinor de Majorana Ψ_M como:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{B.33})$$

Fazendo uma comparação entre Ψ_D e Ψ_M , podemos notar que há quatro modos fisicamente distinguíveis em um campo de Dirac, ou seja, elétrons de mão direita e esquerda e pósitrons de mão direita e esquerda, e para campos de Majorana temos somente dois modos distinguíveis, já que as partículas são iguais as suas anti-partículas.

A lagrangeana para um férmion do tipo Majorana é dada por

$$\mathcal{L}_{Majorana} = \frac{i}{2} \bar{\Psi}_M \gamma^m \partial_m \Psi_M - \frac{1}{2} m \bar{\Psi}_M \Psi_M \quad (\text{B.34})$$

Usando notação de Weyl podemos escrever

$$\mathcal{L}_{Majorana} = -i \bar{\xi} \bar{\sigma}^m \partial_m \xi + \frac{1}{2} m (\xi \xi + \bar{\xi} \bar{\xi}) \quad (\text{B.35})$$

Ao contrário dos espinores de Dirac, necessitamos de apenas um espinor de Weyl de duas componentes para construir um espinor de Majorana de quatro componentes.

B.2 Identidades envolvendo variáveis de Grassmann

B.2.1 Derivação de variáveis de Grassmann

Consideraremos os espinores de Weyl de duas componentes θ e $\bar{\theta}$ e definiremos

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &\equiv \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}, & \partial^\alpha &\equiv \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \\ \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} &\equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}}, & \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} &\equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

A diferenciação com relação a θ é definida como

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \theta^\beta &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \\ \partial^\alpha \theta_\beta &= \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \theta_\beta = \delta_\beta^\alpha, \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

e para $\bar{\theta}$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \\ \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Usando o tensor métrico para levantar ou abaixar índices, podemos escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta &= -\partial^\alpha, \\
 \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\partial}^{\dot{\beta}} &= -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \\
 \partial_\alpha &= -\epsilon_{\alpha\beta} \bar{\partial}^\beta, \\
 \{\partial_\alpha, \partial_\beta\} &= 0, \\
 \{\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \bar{\partial}_{\dot{\beta}}\} &= 0, \\
 \{\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \theta^\beta\} &= 0, \\
 \{\partial_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} &= 0, \\
 \partial_\alpha (\theta\theta) &= 2\theta_\alpha, \\
 \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} (\bar{\theta}\bar{\theta}) &= 2\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \\
 \partial^2 (\theta\theta) &= 4, \\
 \bar{\partial}^2 (\bar{\theta}\bar{\theta}) &= 4.
 \end{aligned} \tag{B.39}$$

B.2.2 Integração de variáveis de Grassmann

As integrações envolvendo variáveis de Grassmann obedecem às seguintes identidades

$$\begin{aligned}
 \int d\theta_1 \int d\theta_2 1 &= 0, \\
 \int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_1 &= 0, \\
 \int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_2 &= 0, \\
 \int d\theta_1 \int d\theta_2 \theta_1 \theta_2 &= -1.
 \end{aligned} \tag{B.40}$$

Para mais detalhes ver [20].

Aqui usamos a seguinte notação para integrais de funções que definem os supercampos

$$\int \phi(\theta) d^2\theta = [\phi(\theta)]_{\theta\theta} = f \tag{B.41}$$

$$\int \Omega(\theta, \bar{\theta}) d^2\theta d^2\bar{\theta} = [\Omega(\theta, \bar{\theta})]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = d, \tag{B.42}$$

onde f é o termo proporcional a $\theta\theta$ em uma função $\phi(\theta)$ e d é o termo proporcional a $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ em uma função $\Omega(\theta, \bar{\theta})$.

Algumas identidades espinoriais úteis são listadas abaixo:

$$\begin{aligned}
 \theta^\alpha \theta^\beta &= -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \theta\theta \\
 \theta_\alpha \theta_\beta &= \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \theta\theta \\
 \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}\bar{\theta} \\
 \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\theta}\bar{\theta} \\
 (\theta\chi)(\theta\psi) &= -\frac{1}{2} (\theta\theta)(\chi\psi) \\
 (\bar{\theta}\bar{\chi})(\bar{\theta}\bar{\psi}) &= -\frac{1}{2} (\bar{\chi}\bar{\psi})(\bar{\theta}\bar{\theta}) \\
 \chi\sigma^m\bar{\psi} &= -\bar{\psi}\bar{\sigma}^m\chi \\
 (\theta\sigma^m\bar{\theta})(\theta\sigma^n\bar{\theta}) &= -\frac{1}{2} \eta^{mn}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})
 \end{aligned} \tag{B.43}$$

Um conjunto mais completo de idêntidades envolvendo variáveis de Grassmann e notação espinorial pode ser encontrado, por exemplo, no apêndice A de [71].

Apêndice C

Demonstrações capítulo 3

C.1 Análogo F^{mn} da SQED

Vamos encontrar uma expressão para W_A computando seus componentes no gauge de Wess Zumino $V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta})$. Como W_A é um supercampo quirral de mão esquerda, temos que $W_A = W_A(y, \theta)$. Logo, para escrever W_A no gauge de Wess Zumino devemos fazer a seguinte substituição de coordenadas $x^m = y^m - i\theta\sigma^m\bar{\theta}$ em $V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta})$, ou seja,

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = V_{WZ}(y - i\theta\sigma^m\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) \quad (\text{C.1})$$

Fazendo esta substituição em (2.77), usando (2.51), (2.52), (2.53) e a expansão $v_m(x) = v_m(y) - i\theta\sigma^n\bar{\theta}\partial_n v_m(y) + \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_n\partial^n v_m(y)$, temos

$$V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta}) = \theta\sigma^m\bar{\theta}v_m(y) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\{D(y) + i\eta^{mn}\partial_n^{(y)}v_m(y)\}, \quad (\text{C.2})$$

onde usamos $(\theta\sigma^m\bar{\theta})(\theta\sigma^n\bar{\theta}) = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{mn}$.

W_α pode ser encontrado substituindo a expressão acima em (3.1). Primeiramente vamos calcular $D_\alpha^{(y)}V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta})$ onde $D_\alpha^{(y)} = \partial_\alpha + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m$

$$\begin{aligned} D_\alpha^{(y)}V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta}) &= (\partial_\alpha + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_n)V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta}) \\ &= \delta_\alpha^\beta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\bar{\theta}^{\dot{\beta}}v_m + 2\theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\lambda}(y) + \bar{\theta}\bar{\theta}\delta_\alpha^\beta\lambda_\beta + \bar{\theta}\bar{\theta}\{D(y) + i\partial^m v_m\}\theta_\alpha \\ &\quad + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\beta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_n v_m + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta\theta\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\partial_n\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Podemos escrever os dois últimos termos como:

$$\begin{aligned} 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\beta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_n v_m &= -2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\theta^\beta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\partial_n v_m \\ &= -i\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\theta^\beta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\partial_n v_m = -i\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\beta\lambda}\theta_\lambda\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\partial_n v_m \\ &= i\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\lambda\beta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m\theta_\lambda\partial_n v_m = i\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\lambda}\theta_\lambda\partial_n v_m \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} 2i\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\partial_n\bar{\lambda}^{\dot{\beta}} &= 2i\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\lambda}}\bar{\theta}^{\dot{\lambda}}\partial_n\bar{\lambda}^{\dot{\beta}} \\ &= i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\lambda}}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\lambda}}\partial_n\bar{\lambda}^{\dot{\beta}} = i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\lambda}}(-\epsilon^{\dot{\lambda}\dot{\alpha}})\partial_n\bar{\lambda}^{\dot{\beta}} \\ &= -i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}\partial_n\bar{\lambda}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 D_\alpha^{(y)} V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta}) &= \sigma_{\alpha\beta}^m \bar{\theta}^\beta v_m + 2\theta_\alpha \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + \bar{\theta} \bar{\theta} \lambda_\alpha + \bar{\theta} \bar{\theta} \{D(y) + i\partial^m v_m\} \theta_\alpha \\
 &+ i\bar{\theta} \bar{\theta} \sigma_{\alpha\beta}^n \bar{\sigma}^{m\beta\beta} \theta_\beta \partial_n v_m - i\theta \bar{\theta} \bar{\theta} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \partial_n \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

Juntando os termos $\bar{\theta} \bar{\theta} \theta_\beta$, temos:

$$\bar{\theta} \bar{\theta} \{ \delta_\alpha^\beta D(y) + i\delta_\alpha^\beta \eta^{mn} \partial_n v_m + i(\sigma^n \bar{\sigma}^m)_\alpha^\beta \partial_n v_m \} \theta_\beta \tag{C.7}$$

Usando $(\sigma^m \bar{\sigma}^n + \sigma^n \bar{\sigma}^m)_\alpha^\beta = -2\eta^{mn} \delta_\alpha^\beta$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta} \bar{\theta} \{ \delta_\alpha^\beta D(y) - \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n + \sigma^n \bar{\sigma}^m)_\alpha^\beta \partial_n v_m + i(\sigma^n \bar{\sigma}^m)_\alpha^\beta \partial_n v_m \} \theta_\beta \\
 = \bar{\theta} \bar{\theta} \{ \delta_\alpha^\beta D(y) - \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta \partial_n v_m + \frac{i}{2} (\sigma^n \bar{\sigma}^m)_\alpha^\beta \partial_n v_m \} \theta_\beta
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Fazendo $n \leftrightarrow m$ no último termo,

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta} \bar{\theta} \{ \delta_\alpha^\beta D(y) - \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta \partial_n v_m + \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta \partial_m v_n \} \theta_\beta \\
 = \bar{\theta} \bar{\theta} \{ \delta_\alpha^\beta D(y) + \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta (\partial_m v_n - \partial_n v_m) \} \theta_\beta
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

Substituindo (C.9) em (C.6), temos

$$\begin{aligned}
 D_\alpha^{(y)} V_{WZ}(y, \theta, \bar{\theta}) &= \sigma_{\alpha\beta}^m \bar{\theta}^\beta v_m + 2\theta_\alpha \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + \bar{\theta} \bar{\theta} \lambda_\alpha(y) \\
 &+ \bar{\theta} \bar{\theta} \{ \delta_\alpha^\beta D(y) + \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta F_{mn} \} \theta_\beta - i\theta \bar{\theta} \bar{\theta} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \partial_n \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}},
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

onde $F_{mn} = (\partial_m v_n - \partial_n v_m)$ é o tensor do campo eletromagnético como na seção (1.2).

Aplicando $-\frac{1}{4} \bar{D}^{(y)} \bar{D}^{(y)}$, temos

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4} \bar{\partial}_\alpha \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} W_\alpha &= -\frac{1}{4} \bar{\partial}_\alpha \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \{ \sigma_{\alpha\beta}^m \bar{\theta}^\beta v_m + 2\theta_\alpha \bar{\theta} \bar{\lambda}(y) + \bar{\theta} \bar{\theta} \lambda_\alpha(y) \\
 &+ \bar{\theta} \bar{\theta} \left[\delta_\alpha^\beta D(y) + \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta F_{mn} \right] \theta_\beta - i\theta \bar{\theta} \bar{\theta} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \partial_n \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \} = \\
 &- \frac{1}{4} \{ -4\lambda_\alpha(y) - 4 \left[\delta_\alpha^\beta D(y) + \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta F_{mn} \right] \theta_\beta \\
 &+ 4i\theta \bar{\theta} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \},
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

pois $\bar{\partial}_\alpha \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} (\bar{\theta} \bar{\theta}) = -4$.

Logo,

$$W_\alpha = \lambda_\alpha(y) + \left[\delta_\alpha^\beta D(y) + \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\beta F_{mn} \right] \theta_\beta - i\theta \bar{\theta} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \tag{C.12}$$

Como W_α é quiral, a componente $\theta\theta$ de $W^\alpha W_\alpha$ será quiral e escalar. Vamos então encontrar a expressão $W^\alpha W_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} W_\beta W_\alpha$,

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{\alpha\beta} W_\beta W_\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta} \left\{ \lambda_\beta + \theta_\beta D + \frac{i}{2} (\sigma^p \bar{\sigma}^q)^\gamma_{\beta} F_{pq} \theta_\gamma - i\theta\theta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^p \partial_p \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} \right\} \\
 &\times \left\{ \lambda_\alpha + \theta_\alpha D + \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\delta_{\alpha} F_{mn} \theta_\delta - i\theta\theta \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \right\} \\
 &= \epsilon^{\alpha\beta} \left\{ -i\theta\theta \lambda_\beta \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + D^2 \theta_\beta \theta_\alpha \right. \\
 &+ \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\delta_{\alpha} \theta_\beta \theta_\delta D F_{mn} + \frac{i}{2} (\sigma^p \bar{\sigma}^q)^\gamma_{\beta} \theta_\gamma \theta_\alpha D F_{pq} \\
 &- \frac{1}{4} (\sigma^p \bar{\sigma}^q)^\gamma_{\beta} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\delta_{\alpha} \theta_\gamma \theta_\delta F_{pq} F_{mn} - i\theta\theta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^p \partial_p \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} \lambda_\alpha \\
 &\left. + \text{termos não proporcionais à } \theta\theta \right\} \tag{C.13}
 \end{aligned}$$

Considerando somente termos proporcionais à $\theta\theta$

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{\alpha\beta} W_\beta W_\alpha &= -i\theta\theta \lambda_\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + D^2 \theta^\alpha \theta_\alpha + i\theta\theta (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\delta_{\alpha} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\delta} D F_{mn} \\
 &+ i\theta\theta (\sigma^p \bar{\sigma}^q)^\gamma_{\beta} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\alpha} D F_{pq} - \frac{1}{2} \theta\theta (\sigma^p \bar{\sigma}^q)^\gamma_{\beta} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\delta_{\alpha} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} F_{pq} F_{mn} + i\theta\theta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^p \partial_p \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} \epsilon^{\beta\alpha} \lambda_\alpha \\
 &= -i\theta\theta \lambda_\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + D^2 \theta\theta + i\theta\theta (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\delta_{\alpha} \delta_\delta^\alpha D F_{mn} \\
 &+ i\theta\theta (\sigma^p \bar{\sigma}^q)^\gamma_{\beta} \delta_\gamma^\beta D F_{pq} - \frac{1}{8} \theta\theta (\sigma^p \bar{\sigma}^q)^\gamma_{\beta} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\delta_{\alpha} \left(\delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta - \delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta \right) F_{pq} F_{mn} - i\theta\theta \lambda^\beta \sigma_{\beta\dot{\beta}}^p \partial_p \bar{\lambda}^{\dot{\beta}} \tag{C.14}
 \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$(\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\delta_{\alpha} \delta_\delta^\alpha F_{mn} = (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\alpha_{\alpha} = Tr (\sigma^m \bar{\sigma}^n) F_{mn} = 2\eta^{mn} F_{mn} = 0 \tag{C.15}$$

e

$$\begin{aligned}
 (\sigma^p \bar{\sigma}^q)^\gamma_{\beta} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\delta_{\alpha} \left(\delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta - \delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta \right) F_{pq} F_{mn} &= \left((\sigma^p \bar{\sigma}^q)^\beta_{\beta} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\alpha_{\alpha} - (\sigma^p \bar{\sigma}^q)^\alpha_{\beta} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)^\beta_{\alpha} \right) F_{pq} F_{mn} \\
 &= (Tr (\sigma^p \bar{\sigma}^q) Tr (\sigma^m \bar{\sigma}^n) - Tr (\sigma^p \bar{\sigma}^q \sigma^m \bar{\sigma}^n)) F_{pq} F_{mn} \\
 &= -2 (-\eta^{pm} \eta^{qn} + \eta^{pn} \eta^{qm} + i\epsilon^{pqmn}) F_{pq} F_{mn} \\
 &= 2F^{mn} F_{mn} - 2F^{nm} F_{mn} - 2i\epsilon^{pqmn} F_{pq} F_{mn} \\
 &= 4F^{mn} F_{mn} - 2i\epsilon^{pqmn} F_{pq} F_{mn}, \tag{C.16}
 \end{aligned}$$

onde usamos as propriedades

$$Tr (\sigma^m \bar{\sigma}^n) = 2\eta^{mn} \tag{C.17}$$

$$Tr (\sigma^p \bar{\sigma}^q \sigma^m \bar{\sigma}^n) = 2 (\eta^{pq} \eta^{mn} - \eta^{pm} \eta^{qn} + \eta^{pn} \eta^{qm} + i\epsilon^{pqmn}), \tag{C.18}$$

e o fato de F^{mn} ser antisimétrico sobre a troca $m \leftrightarrow n$.

Logo (C.14) fica

$$W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} = -2i\lambda^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + D^2 - \frac{1}{2} F^{mn} F_{mn} + \frac{i}{4} \epsilon^{pqmn} F_{pq} F_{mn} \tag{C.19}$$

Analogamente, chegamos em

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = 2i\partial_m\lambda^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} + D^2 - \frac{1}{2}F^{mn}F_{mn} - \frac{i}{4}\epsilon^{pqmn}F_{pq}F_{mn} \quad (\text{C.20})$$

Logo, o termo de energia cinética da lagrangeana da SQED para o fóton e o fotino pode ser escrito como

$$\frac{1}{4} [W^\alpha W_\alpha + \bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}}]_F = \frac{1}{2}D^2(x) - \frac{1}{4}F_{mn}(x)F^{mn}(x) - i\lambda(x)\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}(x) \quad (\text{C.21})$$

C.2 Termo $\Phi^\dagger e^{2qV}\Phi$ da Lagrangeana da SQED

Como $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \dots$, temos que

$$\Phi^\dagger e^{2qV}\Phi = \Phi^\dagger\Phi + 2q\Phi^\dagger V\Phi + \frac{(2q)^2}{2}\Phi^\dagger V^2\Phi \quad (\text{C.22})$$

Usando V no gauge de Wess-Zumino

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger e^{2qV}\Phi &= \Phi^\dagger\Phi + 2q\Phi^\dagger V\Phi + (2q)^2\Phi^\dagger V^2\Phi \\ &= \Phi^\dagger\left\{1 + 2q\left[\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D\right] + \frac{4q^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_mv^m\right)\right\}\Phi \\ &= \Phi^\dagger\Phi + 2q(\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m)\Phi^\dagger\Phi + 2q(\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda})\Phi^\dagger\Phi + 2q(\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda)\Phi^\dagger\Phi \\ &\quad + q\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(D - qv_mv^m)\Phi^\dagger\Phi \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Queremos as componentes em $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$. Usando (2.96), podemos escrever o primeiro termo como

$$[\Phi^\dagger\Phi]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = F^*(x)F(x) + \phi^*(x)\square\phi(x) - i\xi(x)\sigma^m\partial_m\bar{\xi}(x) \quad (\text{C.24})$$

Como queremos termos em $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$, vamos usar o termo proporcional a $\theta\bar{\theta}$ de $\Phi^\dagger\Phi$ (Eq. (2.92)) no segundo termo de (2.92). Logo

$$2q(\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m)\Phi^\dagger\Phi = 2q\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}v_m\theta^\beta\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\left[i\sigma_{\beta\dot{\beta}}^n(\phi_i^*\partial_n\phi_j - \partial_n\phi_i^*\phi_j) - 2\bar{\xi}_{i\dot{\beta}}\xi_{j\dot{\beta}}\right] \quad (\text{C.25})$$

Usando

$$\theta^\alpha\theta^\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta, \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta} \quad \text{e} \quad \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \theta^\beta\} = 0, \quad (\text{C.26})$$

escrevemos (C.25) como:

$$\begin{aligned} 2q(\theta\sigma^m\bar{\theta}v_m)\Phi^\dagger\Phi &= \frac{q}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_m\left[i\sigma_{\beta\dot{\beta}}^n(\phi_i^*\partial_n\phi_j - \partial_n\phi_i^*\phi_j) - 2\bar{\xi}_{i\dot{\beta}}\xi_{j\dot{\beta}}\right] \\ &= \frac{q}{2}i\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\sigma_{\beta\dot{\beta}}^n\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_m(\phi_i^*\partial_n\phi_j - \partial_n\phi_i^*\phi_j) - q\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_m\bar{\xi}_{i\dot{\beta}}\xi_{j\dot{\beta}} \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Usando

$$\bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{aligned}
 2q (\theta \sigma^m \bar{\theta} v_m) \Phi^\dagger \Phi &= \frac{q}{2} i \bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\beta} \sigma_{\beta\dot{\beta}}^n \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} v_m (\phi_i^* \partial_n \phi_j - \partial_n \phi_i^* \phi_j) - q \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} v_m \bar{\xi}_{i\dot{\beta}} \bar{\sigma}^{m\dot{\beta}\beta} \xi_{j\beta} \\
 &= \frac{q}{2} i \text{Tr} (\bar{\sigma}^m \sigma^n) \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} v_m (\phi_i^* \partial_n \phi_j - \partial_n \phi_i^* \phi_j) - q \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{\xi}_i \bar{\sigma}^m \xi_j v_m \\
 &= -iq (\eta^{mn}) \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} v_m (\phi_i^* \partial_n \phi_j - \partial_n \phi_i^* \phi_j) - q \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{\xi}_i \bar{\sigma}^m \xi_j v_m \quad (\text{C.29})
 \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$[2q (\theta \sigma^m \bar{\theta} v_m) \Phi^\dagger \Phi]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = -qv^n (\bar{\xi}_i \bar{\sigma}^n \xi_j + i \phi_i^* \partial_n \phi_j - i \partial_n \phi_i^* \phi_j) \quad (\text{C.30})$$

No terceiro termo de (C.23) temos que encontrar $\Phi^\dagger \Phi$ proporcional a $\bar{\theta}$. De (2.92) podemos perceber que este termo é $\sqrt{2} \bar{\theta} \bar{\xi} \phi$, logo

$$\begin{aligned}
 2q (\theta \theta \bar{\theta} \bar{\lambda}) \Phi^\dagger \Phi &= 2\sqrt{2} q (\theta \theta \bar{\theta} \bar{\lambda}) (\bar{\theta} \bar{\xi} \phi) = 2\sqrt{2} q \theta \theta (\bar{\theta}_\alpha \bar{\lambda}^\alpha) (\bar{\theta}_\beta \bar{\xi}^{\dot{\beta}}) \phi = -2\sqrt{2} q \theta \theta (\bar{\theta}_\alpha \bar{\theta}_\beta \bar{\lambda}^\alpha \bar{\xi}^{\dot{\beta}}) \phi \\
 &= \sqrt{2} q \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} (\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\lambda}^\alpha \bar{\xi}^{\dot{\beta}}) \phi = \sqrt{2} q \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} (-\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}} \bar{\lambda}^\alpha \bar{\xi}^{\dot{\beta}}) \phi. \quad (\text{C.31})
 \end{aligned}$$

Logo,

$$[2q (\theta \theta \bar{\theta} \bar{\lambda}) \Phi^\dagger \Phi]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = -\sqrt{2} q \bar{\lambda} \bar{\xi} \phi \quad (\text{C.32})$$

Analogamente, o quarto termo de (C.23), pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 2q (\bar{\theta} \bar{\theta} \theta \lambda) \Phi^\dagger \Phi &= 2\sqrt{2} q (\bar{\theta} \bar{\theta} \theta \lambda) \theta \xi \phi^* = 2\sqrt{2} q \bar{\theta} \bar{\theta} (\theta^\alpha \lambda_\alpha) (\theta^\beta \xi_\beta) \phi^* = \sqrt{2} q \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \theta (\epsilon^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \xi_\beta) \phi^* \\
 &= \sqrt{2} i q \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \theta (-\epsilon^{\beta\alpha} \lambda_\alpha \xi_\beta) \phi^* = -\sqrt{2} i q \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \theta (\lambda^\alpha \xi_\alpha) \phi^*. \quad (\text{C.33})
 \end{aligned}$$

Logo,

$$[2q (\bar{\theta} \bar{\theta} \theta \lambda) \Phi^\dagger \Phi]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = -\sqrt{2} q \lambda \xi \phi^* \quad (\text{C.34})$$

No quinto termo de (C.23), é necessário que $\Phi^\dagger \Phi$ seja independente das variáveis de Grassmann. Logo, de (2.92) temos que

$$[q \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} (D - q v_m v^m) \Phi^\dagger \Phi]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = q (D - q v_m v^m) \phi^* \phi \quad (\text{C.35})$$

Usando (C.24), (C.30), (C.32), (C.34) e (C.35) podemos escrever (C.23) como

$$\begin{aligned}
 [\Phi^\dagger e^{2qV} \Phi]_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= F^* F + \phi^* \square \phi - i \xi \sigma^m \partial_m \bar{\xi} - q v^m (\bar{\xi} \bar{\sigma}^m \xi + i \phi^* \partial_m \phi - i \partial_m \phi^* \phi) \\
 &\quad - \sqrt{2} q \bar{\lambda} \bar{\xi} \phi - \sqrt{2} q \lambda \xi \phi^* + q (D - q v_m v^m) \phi^* \phi \quad (\text{C.36})
 \end{aligned}$$

C.3 Definindo espinores de Dirac de 4 componentes

Vamos definir o espinor de Dirac de quatro componentes como

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_{+\alpha} \\ \bar{\xi}_{-\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = - \begin{pmatrix} \xi_{-}^{\beta} & \bar{\xi}_{+\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.37})$$

e para campos de gauginos definimos

$$\lambda_M = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda}_M = - \begin{pmatrix} \lambda^\beta & \bar{\lambda}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.38})$$

Para reescrevermos a lagrangeana (3.33) em termos destes espinores, vamos usar

$$\begin{aligned}
 i\lambda\sigma^m[\partial_m]\bar{\lambda} &= \frac{i}{2}\lambda\sigma^m(\partial_m\bar{\lambda}) - \frac{i}{2}(\partial_m\lambda)\sigma^m\bar{\lambda} \\
 &= \frac{i}{2}\lambda\sigma^m(\partial_m\bar{\lambda}) + \frac{i}{2}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^m(\partial_m\lambda) \\
 &= \frac{i}{2}\lambda^B\sigma_{BA}^m\partial_m\bar{\lambda}^A + \frac{i}{2}\bar{\lambda}_{\dot{B}}\bar{\sigma}^{m\dot{B}A}\partial_m\lambda_A \\
 &= -\frac{i}{2}\bar{\lambda}_M\gamma^m\partial_m\lambda_M,
 \end{aligned} \tag{C.39}$$

pois

$$\gamma^m = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^m \\ \bar{\sigma}^m & 0 \end{pmatrix} \tag{C.40}$$

Com $\mathcal{D}_m = \partial_m + iqv_m$, também podemos escrever

$$\begin{aligned}
 -i\bar{\xi}_+\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m\xi_+ - i\bar{\xi}_-\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m^\dagger\xi_- &= -i\bar{\xi}_+\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m\xi_+ - i\bar{\xi}_-\bar{\sigma}^m\partial_m\xi_- + q\bar{\xi}_-\bar{\sigma}^mv_m\xi_- \\
 &= -i\bar{\xi}_+\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m\xi_+ + i\partial_m\xi_-\sigma^m\bar{\xi}_- - q\xi_-\sigma^mv_m\bar{\xi}_- \\
 &= -i\bar{\xi}_+\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m\xi_+ - i\xi_-\sigma^m\partial_m\bar{\xi}_- - q\xi_-\sigma^mv_m\bar{\xi}_- \\
 &= -i\bar{\xi}_+\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m\xi_+ - i\xi_-\sigma^m\mathcal{D}_m\bar{\xi}_- \\
 &= -i\left(\bar{\xi}_{\dot{B}+}\bar{\sigma}^{m\dot{B}A}\mathcal{D}_m\xi_{A+} + \xi_{-}^B\sigma_{BA}^m\mathcal{D}_m\bar{\xi}_{\dot{A}-}\right) \\
 &= i\bar{\psi}\gamma^m\mathcal{D}_m\psi
 \end{aligned} \tag{C.41}$$

Definindo

$$\psi_L \equiv P_L\psi = \begin{pmatrix} \xi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R \equiv P_R\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi}_- \end{pmatrix}, \tag{C.42}$$

e

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger\gamma^0 &= \begin{pmatrix} \bar{\xi}_+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \bar{\xi}_+ \end{pmatrix}, \\
 \bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \xi_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \xi_- & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{C.43}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_M\psi_L &= -\begin{pmatrix} \lambda & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_+ \\ 0 \end{pmatrix} = -\lambda\xi_+ = \bar{\lambda}_MP_L\psi \\
 \bar{\lambda}_M\psi_R &= -\begin{pmatrix} \lambda & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\xi}_- \end{pmatrix} = -\bar{\lambda}\bar{\xi}_- = \bar{\lambda}_MP_R\psi \\
 \bar{\psi}_L\lambda_M &= -\begin{pmatrix} 0 & \bar{\xi}_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} = -\bar{\xi}_+\bar{\lambda} = \bar{\psi}_LP_R\lambda_M \\
 \bar{\psi}_R\lambda_M &= -\begin{pmatrix} \xi_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} = -\xi_-\lambda = \bar{\psi}_R\lambda_M
 \end{aligned} \tag{C.44}$$

C.4 Análogo $F_{mn}^a (F^a)^{mn}$ da SQCD

Expandindo os expoentes em (3.42), considerando o gauge de Wess-Zumino temos

$$\begin{aligned} e^{-2gV_{WZ}} D_\alpha e^{2gV_{WZ}} &= (1 - 2gV_{WZ} + 2g^2V_{WZ}^2) D_\alpha (1 + 2gV_{WZ} + 2g^2V_{WZ}^2) \\ &= 2gD_\alpha V_{WZ} + 2g^2D_\alpha V_{WZ}^2 - 4g^3V_{WZ}D_\alpha V_{WZ} - 4g^3V_{WZ}D_\alpha V_{WZ}^2 \\ &\quad + 4g^3V_{WZ}^2D_\alpha V_{WZ} + 4g^4V_{WZ}^2D_\alpha V_{WZ}^2 \end{aligned} \quad (C.45)$$

Como $V_{WZ}^3 = V_{WZ}D_\alpha V_{WZ}^2 = V_{WZ}^2D_\alpha V_{WZ} = V_{WZ}^2D_\alpha V_{WZ}^2 = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} e^{-2gV_{WZ}} D_\alpha e^{2gV_{WZ}} &= 2gD_\alpha V_{WZ} + 2g^2D_\alpha V_{WZ}^2 - 4g^2V_{WZ}D_\alpha V_{WZ} \\ &= 2gD_\alpha V_{WZ} + 2g^2V_{WZ}D_\alpha V_{WZ} + 2g^2(D_\alpha V_{WZ})V_{WZ} - 4g^2V_{WZ}D_\alpha V_{WZ} \\ &= 2gD_\alpha V_{WZ} + 2g^2(D_\alpha V_{WZ})V_{WZ} - 2g^2V_{WZ}D_\alpha V_{WZ} \\ &= 2gD_\alpha V_{WZ} + 2g^2[D_\alpha V_{WZ}, V_{WZ}] \end{aligned} \quad (C.46)$$

Temos uma equação análoga para

$$e^{2gV_{WZ}} \bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-2gV_{WZ}} = -2gD_\alpha V_{WZ} + 2g^2[\bar{D}_{\dot{\alpha}} V_{WZ}, V_{WZ}] \quad (C.47)$$

Logo, podemos reescrever (3.42) como:

$$W_\alpha \equiv -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}(D_\alpha V + g[D_\alpha V, V]), \quad \bar{W}_{\dot{\alpha}} \equiv -\frac{1}{4}DD(\bar{D}_{\dot{\alpha}} V - g[\bar{D}_{\dot{\alpha}} V, V]) \quad (C.48)$$

Portanto, no caso abeliano as Eqs. (3.42) se reduzem a (3.1).

Vamos agora encontrar a expressão para W_α no caso não-abeliano. Para isso vamos definir W_α^a a partir de

$$W_\alpha = W_\alpha^a = W_\alpha^a T^a \quad (C.49)$$

Vamos também expandir o termo $e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV}$ da Eq. (3.42) com $V = V_{WZ}$

$$\begin{aligned} e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV} &= \left(1 - 2gT^a V^a + \frac{(-2g)^2}{2} T^a T^b V^a V^b\right) D_\alpha \left(1 + 2gT^c V^c + \frac{(2g)^2}{2} T^c T^d V^c V^d\right) \\ &= (1 - 2gT^a V^a + 2g^2 T^a T^b V^a V^b) (2gT^c D_\alpha V^c + 2g^2 T^c T^d D_\alpha V^c V^d) \\ &= 2gT^c D_\alpha V^c + 2g^2 T^c T^d D_\alpha V^c V^d - 4g^2 T^a T^c V^a D_\alpha V^c - 4g^3 T^a T^c T^d V^a D_\alpha V^c V^d \\ &\quad + 4g^3 T^a T^b T^c V^a V^b D_\alpha V^c + 4g^4 T^a T^b T^c T^d V^a V^b D_\alpha V^c V^d \end{aligned} \quad (C.50)$$

Como $VD_\alpha V^2 = V^2 D_\alpha V = V^2 D_\alpha V^2 = 0$, temos

$$\begin{aligned} e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV} &= 2gT^c D_\alpha V^c + 2g^2 T^c T^d D_\alpha V^c V^d - 4g^2 T^a T^c V^a D_\alpha V^c \\ &= 2gT^a D_\alpha V^a + 2g^2 T^a T^b D_\alpha V^a V^b - 4g^2 T^a T^b V^a D_\alpha V^b \\ &= 2gT^a D_\alpha V^a + 2g^2 T^a T^b [D_\alpha (V^a V^b) - 2V^a D_\alpha V^b] \end{aligned} \quad (C.51)$$

Podemos escrever o primeiro termo do lado direito da equação acima em analogia a Eq. (C.10) para o caso não-abeliano como:

$$\begin{aligned} D_\alpha V^a &= -\sigma_{\alpha\beta}^m \bar{\theta}^{\dot{\beta}} v_m^a(y) + 2i\theta_\alpha \bar{\theta} \bar{\lambda}^a(y) - i\bar{\theta}\bar{\theta} \lambda_\alpha^a(y) \\ &\quad + \bar{\theta}\bar{\theta} \{ \delta_\alpha^\gamma D^a(y) - \frac{i}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\gamma (\partial_m v_n^a(y) - \partial_n v_m^a(y)) \} \theta_\gamma \\ &\quad + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \partial_n \bar{\lambda}^{a\dot{\alpha}}(y) \end{aligned} \quad (C.52)$$

E, de acordo com (2.79), temos para o caso não-abeliano que

$$V^a = V^a V^b = -\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_m^a(y)v^{bm}(y), \quad (\text{C.53})$$

logo

$$\begin{aligned} D_\alpha V^a V^b &= (\partial_\alpha + 2i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_m) \left(-\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}v_m^a(y)v^{bm}(y) \right) \\ &= -\theta_\alpha \bar{\theta}\bar{\theta}v_m^a(y)v^{bm}(y) \end{aligned} \quad (\text{C.54})$$

O último termo é dado por

$$\begin{aligned} V^a D_\alpha V^b &= -\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta_\alpha v_m^a(y)v^{bm}(y) + \bar{\theta}\bar{\theta}(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma v_m^a(y)v_n^b(y) \\ &\quad -\frac{i}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}b}(y)v_m^a(y) - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}a}(y)v_m^b(y)). \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

Usando (C.52), (C.54) e (C.55), podemos reescrever (C.51) como

$$\begin{aligned} e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV} &= -2ig\bar{\theta}\bar{\theta}T^a \lambda_\alpha^a + 2g\bar{\theta}\bar{\theta}T^a \left[\delta_\alpha^\gamma D^a - \frac{i}{2}(\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\gamma (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a) \right] \theta_\gamma \\ + 2g^2 T^a T^b & \left[-\theta_\alpha \bar{\theta}\bar{\theta}v_m^a v^{bm} + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta_\alpha v_m^a v^{bm} - 2\bar{\theta}\bar{\theta}(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma v_m^a v_n^b + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}b}v_m^a - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}a}v_m^b) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

onde mantivemos somente os termos em $\bar{\theta}\bar{\theta}$ pois em seguida iremos calcular $\bar{D}\bar{D}$. Podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV} &= 2g\bar{\theta}\bar{\theta} \left\{ -iT^a \lambda_\alpha^a + T^a \left[\delta_\alpha^\gamma D^a - \frac{i}{2}(\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\alpha^\gamma (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a) \right] \theta_\gamma \right. \\ &\quad \left. + \theta\theta T^a \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \partial_n \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}a} + gT^a T^b \left[-2(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma v_m^a v_n^b + i\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}b}v_m^a - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}a}v_m^b) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

Vamos escrever o último termo usando $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$

$$\begin{aligned} &T^a T^b \left[-2(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma v_m^a v_n^b + i\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}b}v_m^a - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}a}v_m^b) \right] \\ &= if^{abc}T^c \left[-2(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma v_m^a v_n^b + i\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}b}v_m^a - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}a}v_m^b) \right] \\ &\quad + T^a T^b \left[-2(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma v_m^a v_n^b + i\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}b}v_m^a - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}a}v_m^b) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Podemos perceber que o último termo é anti-simétrico sob as transformações $m \leftrightarrow n$ e $a \leftrightarrow b$, pois $\sigma^{nm} = -\sigma^{mn}$, logo podemos reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned} &2T^a T^b \left[-2(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma v_m^a v_n^b + i\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}b}v_m^a - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}a}v_m^b) \right] \\ &= if^{abc}T^c \left[-2(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma v_m^a v_n^b + i\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}b}v_m^a - \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}a}v_m^b) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

Podemos reescrever o primeiro termo do lado direito da equação acima como

$$\begin{aligned} -2i(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma f^{abc}T^c v_m^a v_n^b &= -2i(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma (f^{cab}) T^c v_m^a v_n^b \\ &= -2i(\sigma^{nm})_\alpha^\gamma \theta_\gamma f^{abc}T^a v_m^b v_n^c, \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

onde na última linha fizemos $c \rightarrow a$, $a \rightarrow b$ e $b \rightarrow c$. E o último termo do lado direito da equação (C.59) fica:

$$\begin{aligned}
 -\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m f^{abc} T^c (\bar{\lambda}^{\dot{a}b} v_m^a - \bar{\lambda}^{\dot{a}a} v_m^b) &= -\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m [(f^{cab}) T^c \bar{\lambda}^{\dot{a}b} v_m^a - (-f^{cba}) T^c \bar{\lambda}^{\dot{a}a} v_m^b] \\
 &= -\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m [(f^{abc}) T^a v_m^b \bar{\lambda}^{\dot{a}c} + (f^{abc}) T^a v_m^b \bar{\lambda}^{\dot{a}c}] \\
 &= -2\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m f^{abc} T^a v_m^b \bar{\lambda}^{\dot{a}c}
 \end{aligned} \tag{C.61}$$

Substituindo (C.60) e (C.61) em (C.59), temos

$$\begin{aligned}
 T^a T^b [-2(\sigma^{nm})_{\alpha}^{\gamma} \theta_{\gamma} v_m^a v_n^b + i\theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\bar{\lambda}^{\dot{a}b} v_m^a - \bar{\lambda}^{\dot{a}a} v_m^b)] \\
 = T^a [-i(\sigma^{nm})_{\alpha}^{\gamma} \theta_{\gamma} f^{abc} v_m^b v_n^c - \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m f^{abc} v_m^b \bar{\lambda}^{\dot{a}c}] \\
 = T^a [i(\sigma^{mn})_{\alpha}^{\gamma} \theta_{\gamma} f^{abc} v_m^b v_n^c - \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m f^{abc} v_m^b \bar{\lambda}^{\dot{a}c}].
 \end{aligned} \tag{C.62}$$

Usando este resultado na Eq. (C.57), temos

$$\begin{aligned}
 e^{-2gV} D_{\alpha} e^{2gV} &= 2g\bar{\theta}\bar{\theta}\{-iT^a \lambda_{\alpha}^a + T^a [\delta_{\alpha}^{\gamma} D^a - \frac{i}{2}(\sigma^m \bar{\sigma}^n)_{\alpha}^{\gamma} (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a)] \theta_{\gamma} \\
 &\quad + \theta\theta T^a \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^n \partial_n \bar{\lambda}^{\dot{a}a} + gT^a [i(\sigma^{mn})_{\alpha}^{\gamma} \theta_{\gamma} f^{abc} v_m^b v_n^c - \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m f^{abc} v_m^b \bar{\lambda}^{\dot{a}c}]\}.
 \end{aligned} \tag{C.63}$$

Vamos usar

$$\begin{aligned}
 (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_{\alpha}^{\gamma} (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a) &= (-\eta^{mn} \delta_{\alpha}^{\gamma} + 2(\sigma^{mn})_{\alpha}^{\gamma}) (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a) \\
 &= -\eta^{mn} (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a) \delta_{\alpha}^{\gamma} + 2(\sigma^{mn})_{\alpha}^{\gamma} (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a) \\
 &= 2(\sigma^{mn})_{\alpha}^{\gamma} (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a),
 \end{aligned} \tag{C.64}$$

pois $(\partial_m v^m - \partial^m v_m = 0)$. Logo, podemos reescrever (C.63) como

$$\begin{aligned}
 e^{-2gV} D_{\alpha} e^{2gV} &= 2g\bar{\theta}\bar{\theta}\{-iT^a \lambda_{\alpha}^a + T^a [\delta_{\alpha}^{\gamma} D^a - i(\sigma^{mn})_{\alpha}^{\gamma} (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a)] \theta_{\gamma} \\
 &\quad + \theta\theta T^a \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{a}a} + gT^a [i(\sigma^{mn})_{\alpha}^{\gamma} \theta_{\gamma} f^{abc} v_m^b v_n^c - \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m f^{abc} v_m^b \bar{\lambda}^{\dot{a}c}]\} \\
 &= 2g\bar{\theta}\bar{\theta}\{-iT^a \lambda_{\alpha}^a + T^a [\delta_{\alpha}^{\gamma} D^a - i(\sigma^{mn})_{\alpha}^{\gamma} (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a - g f^{abc} v_m^b v_n^c)] \theta_{\gamma} \\
 &\quad + \theta\theta T^a \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (\partial_m \bar{\lambda}^{\dot{a}a} - g f^{abc} v_m^b \bar{\lambda}^{\dot{a}c})\}
 \end{aligned} \tag{C.65}$$

Definindo

$$F_{mn}^a(y) = \partial_m v_n^a(y) - \partial_n v_m^a - g f^{abc} v_m^b v_n^c(y), \tag{C.66}$$

e

$$(D_m \bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}} = \partial_m \bar{\lambda}^{\dot{a}a} - g f^{abc} v_m^b \bar{\lambda}^{\dot{a}c}, \tag{C.67}$$

temos

$$\begin{aligned}
 e^{-2gV} D_{\alpha} e^{2gV} |_{\bar{\theta}\bar{\theta}} &= 2gT^a \{-i\lambda_{\alpha}^a(y) + [\delta_{\alpha}^{\gamma} D^a(y) - i(\sigma^{mn})_{\alpha}^{\gamma} F_{mn}^a(y)] \theta_{\gamma} \\
 &\quad + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (D_m \bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}}\}
 \end{aligned} \tag{C.68}$$

Usando a definição (C.49) e substituindo o resultado acima em (3.42), temos

$$\begin{aligned}
 W_\alpha^a T^a &= -\frac{2g}{8g} T^a \bar{D}\bar{D}\{\bar{\theta}\bar{\theta}\{-i\lambda_\alpha^a(y) + [\delta_\alpha^\gamma D^a(y) - i(\sigma^{mn})_\alpha^\gamma F_{mn}^a(y)]\theta_\gamma \\
 &\quad + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (D_m \bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}}\}\} \\
 &= -\frac{1}{4} T^a \{-4\{-i\lambda_\alpha^a(y) + [\delta_\alpha^\gamma D^a(y) - i(\sigma^{mn})_\alpha^\gamma F_{mn}^a(y)]\theta_\gamma \\
 &\quad + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (D_m \bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}}\}\} \quad (C.69)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 W_\alpha^a &= -i\lambda_\alpha^a(y) + [\delta_\alpha^\gamma D^a(y) - i(\sigma^{mn})_\alpha^\gamma F_{mn}^a(y)]\theta_\gamma \\
 &\quad + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m (D_m \bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}}, \quad (C.70)
 \end{aligned}$$

pois $\bar{D}\bar{D}\bar{\theta}\bar{\theta} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}\bar{\theta} = -4$.

Em analogia com a QCD, em SQCD o traço $Tr W^\alpha W_\alpha = 1/2 (W^a)^\alpha W_\alpha^a$ é invariante de gauge. Logo, para encontrarmos a lagrangeana da SQCD vamos encontrar a expressão para $1/2 (W^a)^\alpha W_\alpha^a = 1/2 \epsilon^{\alpha\beta} W_\beta^a W_\alpha^a$

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{\alpha\beta} W_\beta^a W_\alpha^a &= \epsilon^{\alpha\beta} \{-i\lambda_\beta^a + \theta_\beta D^a - i\theta_\gamma (\sigma^{mn})_\beta^\gamma F_{mn}^a + \theta\theta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m (D_m \bar{\lambda}^a)^{\dot{\beta}}\} \times \\
 &\quad \{ -i\lambda_\alpha^a + \theta_\alpha D^a - i\theta_\delta (\sigma^{pq})_\alpha^\delta F_{pq}^a + \theta\theta\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^p (D_p \bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}} \} \\
 &= \epsilon^{\alpha\beta} \{-i\theta\theta\lambda_\beta^a \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^p (D_p \bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}} - i\theta\theta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m (D_m \bar{\lambda}^a)^{\dot{\beta}} \lambda_\alpha^a \\
 &\quad + \theta_\beta \theta_\alpha D^a D^a - i\theta_\beta \theta_\delta D^a (\sigma^{pq})_\alpha^\delta F_{pq}^a - i\theta_\gamma \theta_\alpha (\sigma^{mn})_\beta^\gamma F_{mn}^a D^a \\
 &\quad - \theta_\gamma \theta_\delta (\sigma^{mn})_\beta^\gamma (\sigma^{pq})_\alpha^\delta F_{mn}^a F_{pq}^a + \text{termos não proporcionais à } \theta\theta\} \quad (C.71)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{\alpha\beta} W_\beta^a W_\alpha^a &= -i\theta\theta\epsilon^{\alpha\beta}\lambda_\beta^a \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^p (D_p \bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}} + i\theta\theta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m (D_m \bar{\lambda}^a)^{\dot{\beta}} \epsilon^{\beta\alpha}\lambda_\alpha^a \\
 &\quad + \epsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta\theta_\alpha D^a D^a - i\epsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta\theta_\delta D^a (\sigma^{pq})_\alpha^\delta F_{pq}^a - i\epsilon^{\alpha\beta}\theta_\gamma\theta_\alpha (\sigma^{mn})_\beta^\gamma F_{mn}^a D^a \\
 &\quad - \epsilon^{\alpha\beta}\theta_\gamma\theta_\delta (\sigma^{mn})_\beta^\gamma (\sigma^{pq})_\alpha^\delta F_{mn}^a F_{pq}^a + \text{termos não proporcionais a } \theta\theta \quad (C.72)
 \end{aligned}$$

Podemos reescrever em termos de

$$\begin{aligned}
 (\sigma^{mn})_\beta^\gamma F_{mn}^a &= \frac{1}{4} (\sigma^m \bar{\sigma}^n - \sigma^n \bar{\sigma}^m)_\beta^\gamma F_{mn}^a \\
 (\sigma^n \bar{\sigma}^m)_\beta^\gamma F_{mn}^a &= (\sigma^n \bar{\sigma}^m)_\beta^\gamma (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a - g f^{abc} v_m^b v_n^c) \\
 &= (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\beta^\gamma (\partial_n v_m^a - \partial_m v_n^a + g f^{acb} v_n^b v_m^c) \quad (m \leftrightarrow n) \\
 &= -(\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\beta^\gamma (\partial_m v_n^a - \partial_n v_m^a - g f^{abc} v_m^b v_n^c) \quad (b \leftrightarrow c) \\
 &= -(\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\beta^\gamma F_{mn}^a \\
 (\sigma^{mn})_\beta^\gamma F_{mn}^a &= \frac{1}{2} (\sigma^m \bar{\sigma}^n)_\beta^\gamma F_{mn}^a \quad (C.73)
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{\alpha\beta} W_\beta^a W_\alpha^a &= -i\theta\theta\lambda^{\alpha a}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^p(D_p\bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}} + i\theta\theta\sigma_{\beta\dot{\beta}}^m(D_m\bar{\lambda}^a)^{\dot{\beta}}\lambda^{\beta a} \\
 &+ \theta\theta D^a D^a - \frac{i}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\delta}\theta\theta D^a(\sigma^p\bar{\sigma}^q)_\alpha^\delta F_{pq}^a - \frac{i}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\alpha}\theta\theta(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\beta^\gamma F_{mn}^a D^a \\
 &- \frac{1}{8}e^{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}\theta\theta(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\beta^\gamma(\sigma^p\bar{\sigma}^q)_\alpha^\delta F_{mn}^a F_{pq}^a + \dots \\
 &= -2i\theta\theta\lambda^{\alpha a}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m(D_m\bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}} \\
 &+ \theta\theta D^a D^a - \frac{i}{4}\delta_\delta^\alpha\theta\theta D^a(\sigma^p\bar{\sigma}^q)_\alpha^\delta F_{pq}^a - \frac{i}{4}\delta_\gamma^\beta\theta\theta(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\beta^\gamma F_{mn}^a D^a \\
 &- \frac{1}{8}\left(\delta_\delta^\alpha\delta_\gamma^\beta - \delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta\right)\theta\theta(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\beta^\gamma(\sigma^p\bar{\sigma}^q)_\alpha^\delta F_{mn}^a F_{pq}^a + \dots
 \end{aligned} \tag{C.74}$$

Escrevemos o último termo como:

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{8}\theta\theta\{\delta_\delta^\alpha\delta_\gamma^\beta(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\beta^\gamma(\sigma^p\bar{\sigma}^q)_\alpha^\delta - \delta_\gamma^\alpha\delta_\delta^\beta(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\beta^\gamma(\sigma^p\bar{\sigma}^q)_\alpha^\delta\}F_{mn}^a F_{pq}^a \\
 &= -\frac{1}{8}\theta\theta\{(\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\beta^\beta(\sigma^p\bar{\sigma}^q)_\alpha^\alpha - (\sigma^m\bar{\sigma}^n)_\delta^\gamma(\sigma^p\bar{\sigma}^q)_\gamma^\delta\}F_{mn}^a F_{pq}^a \\
 &= \frac{1}{8}\theta\theta\{Tr(\sigma^m\bar{\sigma}^n\sigma^p\bar{\sigma}^q) - Tr(\sigma^m\bar{\sigma}^n)Tr(\sigma^p\bar{\sigma}^q)\}F_{mn}^a F_{pq}^a \\
 &= \frac{1}{8}\theta\theta\{2(g^{mn}g^{pq} - g^{mp}g^{nq} + g^{mq}g^{np} + i\epsilon^{mnpq}) - 4g^{mn}g^{pq}\}F_{mn}^a F_{pq}^a \\
 &= \frac{1}{4}\theta\theta\{-g^{mp}g^{nq} + g^{mq}g^{np} + i\epsilon^{mnpq}\}F_{mn}^a F_{pq}^a \\
 &= \frac{1}{4}\theta\theta\{-F_{mn}^a(F^a)^{mn} + F_{mn}^a(F^a)^{nm} + i\epsilon^{mnpq}F_{mn}^a F_{pq}^a\} \\
 &= \frac{1}{4}\theta\theta\{-F_{mn}^a(F^a)^{mn} - F_{mn}^a(F^a)^{mn} + i\epsilon^{mnpq}F_{mn}^a F_{pq}^a\} \\
 &= -\frac{1}{2}\theta\theta F_{mn}^a(F^a)^{mn} + \frac{i}{4}\theta\theta\epsilon^{mnpq}F_{mn}^a F_{pq}^a,
 \end{aligned} \tag{C.75}$$

pois $g^{mn}F_{mn} = g^{pq}F_{pq} = 0$, já que g^{mn} é simétrico sobre $m \leftrightarrow n$ e F_{mn} é anti-simétrico. Podemos reescrever (C.74) como

$$\begin{aligned}
 \epsilon^{\alpha\beta} W_\beta^a W_\alpha^a &= -2i\theta\theta\lambda^{\alpha a}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m(D_m\bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}} \\
 &+ \theta\theta D^a D^a - \frac{i}{4}\theta\theta D^a(-2\eta^{pq})F_{pq}^a - \frac{i}{4}\theta\theta(-2\eta^{mn})F_{mn}^a D^a \\
 &- \frac{1}{2}\theta\theta F_{mn}^a(F^a)^{mn} + \frac{i}{4}\theta\theta\epsilon^{mnpq}F_{mn}^a F_{pq}^a \\
 &= -2i\theta\theta\lambda^{\alpha a}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m(D_m\bar{\lambda}^a)^{\dot{\alpha}} + \theta\theta D^a D^a \\
 &- \frac{1}{2}\theta\theta F_{mn}^a(F^a)^{mn} + \frac{i}{4}\theta\theta\epsilon^{mnpq}F_{mn}^a F_{pq}^a
 \end{aligned} \tag{C.76}$$

Logo

$$[W^a W^a]_{\theta\theta} = -2i\lambda^a\sigma^m D_m\bar{\lambda}^a + D^a D^a - \frac{1}{2}F_{mn}^a(F^a)^{mn} + \frac{i}{4}\epsilon^{mnpq}F_{mn}^a F_{pq}^a \tag{C.77}$$

A partir da equação acima podemos também escrever

$$[\bar{W}^a \bar{W}^a]_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = +2i D_m \lambda^a \sigma^m \bar{\lambda}^a + D^a D^a - \frac{1}{2} F_{mn}^a (F^a)^{mn} - \frac{i}{4} \epsilon^{mnpq} F_{mn}^a F_{pq}^a \quad (\text{C.78})$$

Logo,

$$\frac{1}{4} [W^{\alpha a} W_{\alpha}^a + \bar{W}_{\dot{\alpha}}^a \bar{W}^{\dot{\alpha} a}]_F = \frac{1}{2} D^a D^a(x) - \frac{1}{4} F_{mn}^a(x) F^{mna}(x) - i \lambda^a \sigma^m D_m \bar{\lambda}^a, \quad (\text{C.79})$$

Apêndice D

Demonstrações capítulo 5

D.1 Cálculo da amplitude de probabilidade total do processo $e^-e^+ \rightarrow \tilde{\gamma}\tilde{\gamma}$

Usando as seguintes relações

$$\begin{aligned} (\bar{u}(P_1)P_L u(P_2))^\dagger &= \bar{u}(P_2)P_R u(P_1), \\ (\bar{u}(P_1)P_R u(P_2))^\dagger &= \bar{u}(P_2)P_L u(P_1), \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

nas expressões para \mathcal{M}_a , \mathcal{M}_b , \mathcal{M}_c e \mathcal{M}_d (Eqs. (5.2)), obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_a|^2 &= \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)^2} \{Tr[u(P_1)\bar{u}(P_1)(1 + \gamma_5)u(K_1)\bar{u}(K_1)(1 - \gamma_5)] \\ &\quad \times Tr[v(K_2)\bar{v}(K_2)(1 - \gamma_5)v(P_2)\bar{v}(P_2)(1 + \gamma_5)]\}, \\ \mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b &= \mathcal{M}_b^\dagger \mathcal{M}_a = \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)(t - M_{\tilde{e}_R}^2)} \{Tr[u(P_1)\bar{u}(P_1)(1 + \gamma_5)u(K_1)\bar{u}(K_1)(1 + \gamma_5)] \\ &\quad \times Tr[v(K_2)\bar{v}(K_2)(1 - \gamma_5)v(P_2)\bar{v}(P_2)(1 - \gamma_5)]\}, \\ \mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_c &= \mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_a = \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)(u - M_{\tilde{e}_L}^2)} \{Tr[(1 - \gamma_5)u(P_1)\bar{u}(P_1)(1 + \gamma_5)u(K_1)v^T(K_1) \\ &\quad \cdot (1 + \gamma_5)^T \bar{v}^T(P_2)v^T(P_2)(1 - \gamma_5)^T \bar{v}^T(K_2)\bar{u}(K_2)]\}, \\ \mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_d &= \mathcal{M}_d^\dagger \mathcal{M}_a = \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)(u - M_{\tilde{e}_R}^2)} \{Tr[(1 + \gamma_5)u(P_1)\bar{u}(P_1)(1 + \gamma_5)u(K_1)v^T(K_1) \\ &\quad \cdot (1 - \gamma_5)^T \bar{v}^T(P_2)v^T(P_2)(1 - \gamma_5)^T \bar{v}^T(K_2)\bar{u}(K_2)]\}, \\ |\mathcal{M}_b|^2 &= \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_R}^2)^2} \{Tr[u(P_1)\bar{u}(P_1)(1 - \gamma_5)u(K_1)\bar{u}(K_1)(1 + \gamma_5)] \\ &\quad \times Tr[v(K_2)\bar{v}(K_2)(1 + \gamma_5)v(P_2)\bar{v}(P_2)(1 - \gamma_5)]\}, \\ \mathcal{M}_b^\dagger \mathcal{M}_c &= \mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_b = \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_R}^2)(u - M_{\tilde{e}_L}^2)} \{Tr[(1 - \gamma_5)u(P_1)\bar{u}(P_1)(1 - \gamma_5)u(K_1)v^T(K_1) \\ &\quad \cdot (1 + \gamma_5)^T \bar{v}^T(P_2)v^T(P_2)(1 + \gamma_5)^T \bar{v}^T(K_2)\bar{u}(K_2)]\}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_b^\dagger \mathcal{M}_d &= \mathcal{M}_d^\dagger \mathcal{M}_b = \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_R}^2)(u - M_{\tilde{e}_R}^2)} \left\{ \text{Tr}[(1 + \gamma_5)u(P_1)\bar{u}(P_1)(1 - \gamma_5)u(K_1)v^T(K_1) \right. \\
&\quad \cdot (1 - \gamma_5)^T \bar{v}^T(P_2)v^T(P_2)(1 + \gamma_5)^T \bar{v}^T(K_2)\bar{u}(K_2)] \left. \right\}, \\
|\mathcal{M}_c|^2 &= \frac{e^4}{4(u - M_{\tilde{e}_L}^2)^2} \left\{ \text{Tr}[u(P_1)\bar{u}(P_1)(1 + \gamma_5)u(K_2)\bar{u}(K_2)(1 - \gamma_5)] \right. \\
&\quad \times \left. \text{Tr}[v(K_1)\bar{v}(K_1)(1 - \gamma_5)v(P_2)\bar{v}(P_2)(1 + \gamma_5)] \right\}, \\
\mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_d &= \mathcal{M}_d^\dagger \mathcal{M}_c = \frac{e^4}{4(u - M_{\tilde{e}_R}^2)(u - M_{\tilde{e}_L}^2)} \left\{ \text{Tr}[u(P_1)\bar{u}(P_1)(1 + \gamma_5)u(K_2)\bar{u}(K_2)(1 + \gamma_5)] \right. \\
&\quad \times \left. \text{Tr}[v(K_1)\bar{v}(K_1)(1 - \gamma_5)v(P_2)\bar{v}(P_2)(1 - \gamma_5)] \right\}, \\
|\mathcal{M}_d|^2 &= \frac{e^4}{4(u - M_{\tilde{e}_R}^2)^2} \left\{ \text{Tr}[u(P_1)\bar{u}(P_1)(1 - \gamma_5)u(K_2)\bar{u}(K_2)(1 + \gamma_5)] \right. \\
&\quad \times \left. \text{Tr}[v(K_1)\bar{v}(K_1)(1 + \gamma_5)v(P_2)\bar{v}(P_2)(1 - \gamma_5)] \right\}. \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Os operadores de projeção satisfazem a seguinte álgebra (para mais detalhes ver [113]):

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{spins}} u^{(s)}(P)\bar{u}^{(s)}(P) &= \not{P} + m, \\
\sum_{\text{spins}} v^{(s)}(P)\bar{v}^{(s)}(P) &= \not{P} - m, \\
\sum_{\text{spins}} u^{(s)}(P)v^{(s)T}(P) &= (\not{P} + m)C^T, \\
\sum_{\text{spins}} \bar{v}^{(s)T}(P)\bar{u}^{(s)}(P) &= C^{-1}(\not{P} + m). \tag{D.4}
\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_a|^2 &= \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)^2} \left\{ \text{Tr}[(\not{P}_1 + m_e)(1 + \gamma_5)(\not{K}_1 + M_{\tilde{\gamma}})(1 - \gamma_5)] \right. \\
&\quad \cdot \left. \text{Tr}[(\not{K}_2 - M_{\tilde{\gamma}})(1 - \gamma_5)(\not{P}_2 - m_e)(1 + \gamma_5)] \right\}, \\
\mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b &= \mathcal{M}_b^\dagger \mathcal{M}_a = \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)(t - M_{\tilde{e}_R}^2)} \left\{ \text{Tr}[(\not{P}_1 + m_e)(1 + \gamma_5)(\not{K}_1 + M_{\tilde{\gamma}})(1 + \gamma_5)] \right. \\
&\quad \cdot \left. [(\not{K}_2 - M_{\tilde{\gamma}})(1 - \gamma_5)(\not{P}_2 - m_e)(1 - \gamma_5)] \right\}, \\
\mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_c &= \mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_a = \frac{e^4}{4(u - M_{\tilde{e}_L}^2)(t - M_{\tilde{e}_L}^2)} \left\{ \text{Tr}[(1 - \gamma_5)(\not{P}_1 + m_e)(1 + \gamma_5)(\not{K}_1 + M_{\tilde{\gamma}}) \right. \\
&\quad \cdot \left. C^T(1 - \gamma_5)^T(\not{P}_2 - m_e)^T(1 + \gamma_5)^T C^{-1}(\not{K}_2 + M_{\tilde{\gamma}})] \right\}, \\
\mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_d &= \mathcal{M}_d^\dagger \mathcal{M}_a = \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)(u - M_{\tilde{e}_R}^2)} \left\{ \text{Tr}[(1 + \gamma_5)(\not{P}_1 + m_e)(1 + \gamma_5)(\not{K}_1 + M_{\tilde{\gamma}}) \right. \\
&\quad \cdot \left. C^T(1 - \gamma_5)^T(\not{P}_2 - m_e)^T(1 - \gamma_5)^T C^{-1}(\not{K}_2 + M_{\tilde{\gamma}})] \right\}, \tag{D.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_b|^2 &= \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_R}^2)^2} \{ \text{Tr} [(\mathcal{P}_1 + m_e)(1 - \gamma_5)(\mathcal{K}_1 + M_{\tilde{\gamma}})(1 + \gamma_5)] \\
&\quad \cdot \text{Tr} [(\mathcal{K}_2 - M_{\tilde{\gamma}})(1 + \gamma_5)(\mathcal{P}_2 - m_e)(1 - \gamma_5)] \}, \\
\mathcal{M}_b^\dagger \mathcal{M}_c = \mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_b &= \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)(u - M_{\tilde{e}_R}^2)} \{ \text{Tr} [(1 - \gamma_5)(\mathcal{P}_1 + m_e)(1 - \gamma_5)(\mathcal{K}_1 + M_{\tilde{\gamma}}) \\
&\quad \cdot C^T(1 + \gamma_5)^T(\mathcal{P}_2 - m_e)^T(1 + \gamma_5)^T C^{-1}(\mathcal{K}_2 + M_{\tilde{\gamma}})] \}, \\
\mathcal{M}_b^\dagger \mathcal{M}_d = \mathcal{M}_d^\dagger \mathcal{M}_b &= \frac{e^4}{4(u - M_{\tilde{e}_R}^2)(t - M_{\tilde{e}_R}^2)} \{ \text{Tr} [(1 + \gamma_5)(\mathcal{P}_1 + m_e)(1 - \gamma_5)(\mathcal{K}_1 + M_{\tilde{\gamma}}) \\
&\quad \cdot C^T(1 - \gamma_5)^T(\mathcal{P}_2 - m_e)^T(1 + \gamma_5)^T C^{-1}(\mathcal{K}_2 + M_{\tilde{\gamma}})] \}, \\
|\mathcal{M}_c|^2 &= \frac{e^4}{4(u - M_{\tilde{e}_L}^2)^2} \{ \text{Tr} [(\mathcal{P}_1 + m_e)(1 + \gamma_5)(\mathcal{K}_2 + M_{\tilde{\gamma}})(1 - \gamma_5)] \\
&\quad \cdot \text{Tr} [(\mathcal{K}_1 + M_{\tilde{\gamma}})(1 - \gamma_5)(\mathcal{P}_2 - m_e)(1 + \gamma_5)] \},
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_d = \mathcal{M}_d^\dagger \mathcal{M}_c &= \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)(u - M_{\tilde{e}_R}^2)} \{ \text{Tr} [(\mathcal{P}_1 + m_e)(1 + \gamma_5)(\mathcal{K}_2 + M_{\tilde{\gamma}})(1 + \gamma_5)] \\
&\quad \cdot \text{Tr} [(\mathcal{K}_1 - M_{\tilde{\gamma}})(1 - \gamma_5)(\mathcal{P}_2 - m_e)(1 - \gamma_5)] \}, \\
|\mathcal{M}_d|^2 &= \frac{e^4}{4(u - M_{\tilde{e}_R}^2)^2} \{ \text{Tr} [(\mathcal{P}_1 + m_e)(1 - \gamma_5)(\mathcal{K}_2 + M_{\tilde{\gamma}})(1 + \gamma_5)] \\
&\quad \cdot \text{Tr} [(\mathcal{K}_1 - M_{\tilde{\gamma}})(1 + \gamma_5)(\mathcal{P}_2 - m_e)(1 - \gamma_5)] \},
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Usando as propriedades da matriz conjugação de carga

$$\begin{aligned}
C^T &= -C, \\
C^{-1} \gamma_m C &= -\gamma_m^T, \\
C^{-1} \gamma_5 C &= \gamma_5^T,
\end{aligned} \tag{D.8}$$

obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned}
C^T(1 + \gamma_5)^T(\mathcal{P}_2 - m_e)^T(1 - \gamma_5)^T C^{-1} &= (1 + \gamma_5)(\mathcal{P}_2 + m_e)(1 - \gamma_5), \\
C^T(1 - \gamma_5)^T(\mathcal{P}_2 - m_e)^T(1 - \gamma_5)^T C^{-1} &= (1 - \gamma_5)(\mathcal{P}_2 + m_e)(1 - \gamma_5), \\
C^T(1 + \gamma_5)^T(\mathcal{P}_2 - m_e)^T(1 + \gamma_5)^T C^{-1} &= (1 + \gamma_5)(\mathcal{P}_2 + m_e)(1 + \gamma_5), \\
C^T(1 - \gamma_5)^T(\mathcal{P}_2 - m_e)^T(1 + \gamma_5)^T C^{-1} &= (1 - \gamma_5)(\mathcal{P}_2 + m_e)(1 + \gamma_5).
\end{aligned} \tag{D.9}$$

A partir da técnica padrão do traço e das relações (D.9), podemos reescrever as amplitudes

como:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_a|^2 &= \frac{16e^4}{(t - M_{\tilde{e}_L}^2)^2} (P_1 \cdot K_1)(P_2 \cdot K_2) \\
&= \frac{4e^4}{(t - M_{\tilde{e}_L}^2)^2} (t - m_e^2 - M_{\tilde{\gamma}}^2)^2, \\
\mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_b &= \mathcal{M}_b^\dagger \mathcal{M}_a = \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)(t - M_{\tilde{e}_R}^2)} (8m_e M_{\tilde{\gamma}})^2, \\
\mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_c &= \mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_a = -\frac{8e^4 M_{\tilde{\gamma}}^2}{(u - M_{\tilde{e}_L}^2)(t - M_{\tilde{e}_L}^2)} (P_1 \cdot P_2) \\
&= -\frac{32e^4 M_{\tilde{\gamma}}^2}{4(u - M_{\tilde{e}_L}^2)(t - M_{\tilde{e}_L}^2)} \left(\frac{s}{2} - m_e^2\right), \\
\mathcal{M}_a^\dagger \mathcal{M}_d &= \mathcal{M}_d^\dagger \mathcal{M}_a = -\frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_L}^2)(u - M_{\tilde{e}_R}^2)} (8m_e M_{\tilde{\gamma}})^2, \\
|\mathcal{M}_b|^2 &= \frac{16e^4}{(t - M_{\tilde{e}_R}^2)^2} (P_1 \cdot K_1)(P_2 \cdot K_2) \\
&= \frac{16e^4}{(t - M_{\tilde{e}_R}^2)^2} (t - m_e^2 - M_{\tilde{\gamma}}^2)^2, \\
\mathcal{M}_b^\dagger \mathcal{M}_c &= \mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_b = \frac{e^4}{4(t - M_{\tilde{e}_R}^2)(u - M_{\tilde{e}_L}^2)} (8m_e M_{\tilde{\gamma}})^2, \\
\mathcal{M}_b^\dagger \mathcal{M}_d &= \mathcal{M}_d^\dagger \mathcal{M}_b = -\frac{8e^4 M_{\tilde{\gamma}}^2}{(u - M_{\tilde{e}_R}^2)(t - M_{\tilde{e}_R}^2)} (P_1 \cdot P_2) \\
&= -\frac{32e^4 M_{\tilde{\gamma}}^2}{8(u - M_{\tilde{e}_R}^2)(t - M_{\tilde{e}_R}^2)} \left(\frac{s}{2} - m_e^2\right), \\
|\mathcal{M}_c|^2 &= \frac{16e^4}{(u - M_{\tilde{e}_L}^2)^2} (P_1 \cdot K_2)(P_2 \cdot K_1) \\
&= \frac{4e^4}{(u - M_{\tilde{e}_L}^2)^2} (u - m_e^2 - M_{\tilde{\gamma}}^2)^2, \\
\mathcal{M}_c^\dagger \mathcal{M}_d &= \mathcal{M}_d^\dagger \mathcal{M}_c = \frac{e^4}{4(u - M_{\tilde{e}_R}^2)(u - M_{\tilde{e}_L}^2)} (8m_e M_{\tilde{\gamma}})^2, \\
|\mathcal{M}_d|^2 &= \frac{16e^4}{(u - M_{\tilde{e}_R}^2)^2} (P_1 \cdot K_2)(P_2 \cdot K_1) \\
&= \frac{4e^4}{(u - M_{\tilde{e}_R}^2)^2} (u - m_e^2 - M_{\tilde{\gamma}}^2)^2.
\end{aligned}$$

(D.10)

Bibliografia

- [1] GLASHOW, S. L. Partial symmetries of weak interactions. *Nucl. Phys.*, v. 22, n. 4, p. 579-588, Feb. 1961.
- [2] WEINBERG, S. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, v. 19, n. 21, p. 1264-1266, Nov. 1967.
- [3] WEINBERG, S. Physical processes in a convergent theory of the weak and electromagnetic interactions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 27, n. 24, p. 1688-1691, Dec. 1971.
- [4] SALAM, A.; WARD, J. C. Electromagnetic and weak interactions. *Phys. Lett. B*, v. 13, n. 2, p. 168-171, Nov. 1964.
- [5] SALAM, A. Gauge unification of fundamental forces. *Rev. Mod. Phys.*, v. 52, n. 3, p. 525-538, July 1980.
- [6] NAKAMURA, K. et al. (Particle Data Group). Review of particle physics. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, v. 37, n. 7A, 075021 1422p., July 2010.
- [7] GOL'FAND, Yu. A.; LIKHTMAN, E.P. Extension of the algebra of Poincare group generators and violation of P invariance. *ZhETF Pis. Red.*, v. 13, n. 8, p. 452-455, Apr. 1971; *JETP Lett.*, v. 13, n. 8, p. 323-326, Apr. 1971.
- [8] VOLKOV, D. V.; AKULOV, V. P. Is the neutrino a goldstone particle? *Phys. Lett. B*, v. 46, n. 1, p. 109-110, Sept. 1973.
- [9] WESS, J.; ZUMINO, B. Supergauge transformations in four-dimensions. *Nucl. Phys. B*, v. 70, n. 1, p. 39-50, Feb. 1974.
- [10] WESS, J.; ZUMINO, B. A lagrangian model invariant under supergauge transformations. *Phys. Lett. B*, v. 49, n. 1, p. 52-54, Mar. 1974.
- [11] WESS, J.; ZUMINO, B. Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics. *Nucl. Phys. B*, v. 78, n. 1, p. 1-13, Aug. 1974.
- [12] KANE, G. *Supersymmetry: squarks, photinos, and the unveiling of the ultimate laws of nature.* Perseus Pub., 2000.
- [13] KANE, G. L.; KOLDA, C. F.; WELLS, J. D. Calculable upper limit on the mass of the lightest Higgs boson in any perturbatively valid supersymmetric theory. *Phys. Rev. Lett.*, v. 70, n. 18, p. 2686-2689, May 1993.

- [14] ESPINOSA, J. R.; QUIROS, M. Upper bounds on the lightest Higgs boson mass in general supersymmetric standard models. *Phys. Lett. B*, v. 302, n. 1, p. 51-58, Mar. 1993.
- [15] LEP Electroweak Working Group, LEPEWWG/2001-01. Disponível em: <<http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG/stanmod/>>. Acesso em: 02 ago. 2010.
- [16] DIMOPOULOS, S.; RABY, S.; WILCZEK, F. Supersymmetry and the scale of unification. *Phys. Rev. D*, v. 24, n. 6, p. 1681-1683, Sept. 1981.
- [17] DIMOPOULOS, S.; GEORGI, H. Softly broken supersymmetry and SU(5). *Nucl. Phys. B*, v. 193, n. 1, p. 150-162, Dec. 1981.
- [18] IBAÑEZ, L. E.; ROSS, G. G. Low-energy predictions in supersymmetric grand unified theories. *Phys. Lett. B*, v. 105, n. 6, p. 439-442, Oct. 1981.
- [19] EINHORN, M. B.; JONES, D. R. T. The weak mixing angle and unification mass in supersymmetric SU(5). *Nucl. Phys. B*, v. 196, n. 3, p. 475-488, Mar. 1982.
- [20] DRESS, M.; GODBOLE, R. M.; ROYR, P. *Theory and Phenomenology of Sparticles*. World Scientific, 2004.
- [21] BAER, H. E.; TATA, X. *Weak Scale Supersymmetry*. Cambridge University Press, 2006.
- [22] IBAÑEZ, L. E.; ROSS, G. G. Towards a realistic SUGRA-GUT. *Phys. Lett. B*, v. 131, n. 4-6, p. 335-339, Nov. 1983.
- [23] PENDLETON, B.; ROSS, G. G. Mass and mixing angle predictions from infrared fixed points. *Phys. Lett. B*, v. 98, n. 4, p. 291-294, Jan. 1981.
- [24] AALTONEN, T. et al. CDF collaboration. Inclusive search for squark and gluino production in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.96$ -TeV. *Phys. Rev. Lett.*, v. 102, n. 12, 121801 7p., Mar. 2009.
- [25] ABAZOV, V.M. et al. D0 collaboration. Search for squarks and gluinos in events with jets and missing transverse energy using 2.1 fb⁻¹ of $p\bar{p}$ collision data at $\sqrt{s} = 1.96$ TeV. *Phys. Lett. B*, v. 660, n. 5, p. 449-457, Mar. 2008.
- [26] ABAZOV, V.M. et al. D0 collaboration. Search for associated production of charginos and neutralinos in the trilepton final state using 2.3 fb⁻¹ of data. *Phys. Lett. B*, v. 680, n. 1, p. 34-43, Sept. 2009.
- [27] ALBAJAR, C. et al. UA1 collaboration. Events with large missing transverse energy at the CERN collider. 3. Mass limits on supersymmetric particles. *Phys. Lett. B*, v. 198, n. 2, p. 261-270, Nov. 1987.
- [28] ANSARI, R. et al. UA2 collaboration. Search for exotic processes at the CERN $p\bar{p}$ collider. *Phys. Lett. B*, v. 195, n. 4, p. 613-622, Sept. 1987.

- [29] CHEKANOV, S. ZEUS collaboration. Search for stop production in R-parity-violating supersymmetry at HERA. *Eur. Phys. J. C*, v. 50, n. 2, p. 269-281, Feb. 2007.
- [30] AID, S. et al. H1 collaboration. A search for selectrons and squarks at HERA. *Phys. Lett. B*, v. 380, n. 3-4, p. 461-470, July 1996.
- [31] ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL Collaboration. LEPSUSYWG, Joint SUSY Working Group. LEPSUSYWG/02-06-2. Disponível em: <<http://lepsusy.web.cern.ch/lepsusy>>. Acesso em: 7 fev. 2011.
- [32] Khachatryan, V. et al. CMS collaboration. Search for supersymmetry in pp collisions at 7 TeV in events with jets and missing transverse energy. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1101.1628>>. Acesso em: 7 fev. 2011.
- [33] FAYET, P. Supergauge invariant extension of the Higgs mechanism and a model for the electron and its neutrino. *Nucl. Phys. B*, v. 90, n. [s.l.], p. 104-124, Dec. 1975.
- [34] FAYET, P. Supersymmetry and weak, electromagnetic and strong interactions. *Phys. Lett. B*, v. 64, n. 2, p. 159-162, Sept. 1976.
- [35] FAYET, P. Spontaneously broken supersymmetric theories of weak, electromagnetic and strong interactions. *Phys. Lett. B*, v. 69, n. 4, p. 489-494, Oct. 1977.
- [36] FAYET, P. Mixing between gravitational and weak interactions through the massive gravitino. *Phys. Lett. B*, v. 70, n. 4, p. 461-464, Oct. 1977.
- [37] BARTL, A.; FRAAS, H.; MAJEROTTO, W.; OSHIMO, N. The neutralino mass matrix in the minimal supersymmetric model. *Phys. Rev. D*, v. 40, n. 5, p. 1594-1605, Sept. 1989.
- [38] FAYET, P. Radiative production of gravitinos and photinos in $e^+ e^-$ annihilation. *Phys. Lett. B*, v. 117, n. 6, p. 460-466, Nov. 1982.
- [39] NILLES, H. P. Dynamically broken supergravity and the hierarchy problem. *Phys. Lett. B*, v. 115, n. 3, p. 193-196, Sept. 1982.
- [40] NILLES, H. P. Supergravity generates hierarchies. *Nucl. Phys. B*, v. 217, n. 2, p. 366-380, Oct. 1983.
- [41] CHAMSEDDINE, A. H.; ARNOWITT, R.; NATH, P. Locally supersymmetric grand unification. *Phys. Rev. Lett.*, v. 49, n. 14, p. 970-974, Oct. 1982.
- [42] BARBIERI, R.; FERRARA, S.; SAVOY, C. A. Gauge models with spontaneously broken local supersymmetry. *Phys. Lett. B*, v. 119, n. 4-6, p. 343-347, Dec. 1982.
- [43] ALLANACH B. C. et al. The Snowmass Points and Slopes: benchmarks for SUSY searches. *Eur. Phys. J. C*, v. 25, n. 1, p. 113-123, July 2002.

- [44] GHODBANE N.; MAERTYN, H. U. Compilation of SUSY particle spectra from Snowmass 2001 benchmark models. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/0201233v1>>. Acesso em: 20 nov. 2009
- [45] SPA Supersymmetry Parameter Analysis: <<http://spa.desy.de/spa/>>.
- [46] OLIVE K. A.; RUDAZ S. Light stops in the MSSM: Implications for photino dark matter and top quark decay. *Phys. Lett. B*, v. 340, n. 1-2, p. 74-80, Dec. 1994.
- [47] HAHN, T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3. *Comput. Phys. Commun.*, v. 140, n. 3, p. 418-431, Nov. 2001.
- [48] HAHN, T.; SCHAPPACHER, C. The implementation of the minimal supersymmetric standard model in FeynArts and FormCalc. *Comput. Phys. Commun.*, v. 143, n. 1, p. 54-68, Feb. 2002.
- [49] MARIOTTO, C. B.; RODRIGUEZ, M. C. Investigating gluino production at the LHC. *Braz. J. Phys.*, v. 38, n. 3B, p. 503-506, Sept. 2008.
- [50] MARIOTTO, C. B.; ESPINDOLA, D. B.; RODRIGUEZ, M. C. Gluino production in ultrarelativistic heavy ion collisions and nuclear shadowing. *Phys. Rev. C*, v. 83, n. 6, 064902 6p., June 2011.
- [51] ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, v. 13, n. 9, p. 321-323, Aug. 1964.
- [52] HIGGS, P. W. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Lett.*, v. 12, n. 2, p. 132-133, Sept. 1964.
- [53] HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, v. 13, n. 16, p. 508-509, Oct. 1964.
- [54] QUIGG, C. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*. Addison-Wesley Publishing Company, 1983.
- [55] DONOGHUE, J. F.; GOLOWICH, E.; HOLSTEIN, B. R. *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge University Press, 1996.
- [56] ROSENFELD, R. *Introduction to the Standard Model*. Lectures presented at XII Jorge André Swieca Summer School on Particles and Fields. Disponível em: <<http://satie.if.usp.br/Swieca2003/lectures/Rosenfeld/>>. Acesso em: 3 mar. 2011.
- [57] BJORKEN, J. D.; DRELL, S. D. *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 1964.
- [58] MANDL, F.; SHAW, G. *Quantum Field Theory*. 2 ed., John Wiley and Sons Ltd, 2010.
- [59] PESKIN M. E.; SCHROEDER D.V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books Publishing, L.L.C., 1995.

- [60] ITZYKSON, C.; ZUBER, J. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill Inc, 1980.
- [61] AICHISON, I. J. R.; HEY, A. J. G. *Gauge Theories In Particle Physics*. Vol. 1, 3 ed., UK:IOP, 2003.
- [62] BOEHM, F.; VOGEL, P. *Physics of Massive Neutrinos*. Cambridge University press, 1992.
- [63] AICHISON, I. J. R.; HEY, A. J. G. *Gauge Theories In Particle Physics* , Vol. 2, 3 ed., UK:IOP (2004).
- [64] GREINER W.; SCHRAMM, S.; STEIN, E. *Quantum Chromodynamics*. 2 ed., Springer, 2002.
- [65] BETHKE, S. Determination of the QCD coupling α_s . *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, v. 26, n. 7, p. R27-R66, July 2000.
- [66] GROSS, D.J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories *Phys. Rev. Lett.*, v 30, n. 26, p. 1343-1346, June 1973.
- [67] POLITZER, H.D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, v. 30, n. 26, p. 1346-1349, June 1973.
- [68] STERMAN, G. et al. Handbook of perturbative QCD. *Rev. Mod. Phys.*, v. 67, n. 1, p. 157-248, Jan. 1995.
- [69] AMALDI, U.; de BOER, W.; FURSTENAU, H. Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constants measured at LEP. *Phys. Lett. B*, v. 260, n. 3-4, p. 447-455, May 1991.
- [70] ROSS, G. G. *Grand Unified Theories*. Westview press, 1985.
- [71] WESS J.; BAGGER, J. *Supersymmetry and Supergravity*. 2 ed., Princeton University Press, 1992.
- [72] HAAG, R.; LOPUSZANSKI, J.T.; Sohnius, M. All possible generators of supersymmetries of the S matrix. *Nucl. Phys. B*, v. 88, n. 2, p. 257-274, Mar. 1975.
- [73] COLEMAN, S. R.; MANDULA, J. All possible symmetries of the S matrix. *Phys. Rev.*, v. 159, n. 5, p. 1251-1256, July 1967.
- [74] RODRIGUEZ, M. C. History of supersymmetric extensions of the standard model. *Int. J. Mod. Phys. A*, v. 25, n. 6, p. 1091-1121, Mar. 2010.
- [75] ELLIS, J. R. Beyond the standard model for hill walkers. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/9812235v1>>. Acesso em: 23 dez. 2009.
- [76] BAILIN, D. ; LOVE, A. *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*. Institute of Physics Publishing, 1994.

- [77] GIUDICE, G. F.; RATAZZI, R. Theories with gauge-mediated supersymmetry breaking. *Phys. Rep.*, v. 322, n. 6, p. 419-499, Dec. 1999.
- [78] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. Out of this world supersymmetry breaking. *Nucl. Phys. B*, v. 557, n. 1-2, p. 79-118, Sept. 1999.
- [79] GIUDICE, G. F.; LUTY, M. A.; MURAYAMA, H.; RATAZZI, R. Gaugino mass without singlets. *JHEP*, v. 9812, n. 12, p. 027-052, Apr. 1999.
- [80] HABER, H. E.; KANE, G. L. The search for supersymmetry: Probing physics beyond the standard model. *Phys. Rept.*, v. 117, n. 2-4, p. 75-263, Jan. 1985.
- [81] ECK, H.; HAHN, O.; KUBLDECK, J. Feynman rules for fermion number violating interactions. *Nucl. Phys. B*, v. 387, n. 2, p. 467-481, Nov. 1992.
- [82] DENNER, A.; ECK, H.; HAHN, O.; KUBLDECK, J. Compact Feynman rules for Majorana fermions. *Phys. Lett. B*, v. 291, n. 3, p. 278-280, Sept. 1992.
- [83] KNEGJENS, R. *Supersymmetric Single Top Production with a $U(1)_R$ Symmetry*. 2009. Master Thesis. Disponível em: <www.nikhef.nl/~robk/files/master/majorana.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2010.
- [84] BYCKING, E.; KAJANTIE, K. *Particle kinematics*. John Wiley & Sons, 1973.
- [85] COLLINS, J. C.; SOPER, D. E.; STERMAN, G. Factorization of hard processes in QCD. In: MULLER, A. H. (Ed.). *Perturbative quantum chromodynamics*. World Scientific, 1989. p. 1-91.
- [86] ELLIS, R. K.; STIRLING, W. J.; WEBBER, B. R. *QCD and collider physics*. Cambridge University Press, 1996.
- [87] DOKSHITZER, Y. L. Calculation of the structure functions for deep inelastic scattering and e^+e^- annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics. *Sov. Phys. JETP*, v. 46, n. 4, p. 641-653, Oct. 1977.
- [88] GRIBOV, V. N.; LIPATOV, L. N. Deep inelastic ep scattering in perturbation theory. *Sov. J. Nucl. Phys.*, v. 15, n. 4, p. 438-450, Oct. 1978.
- [89] ALTARELLI, G.; PARISI, G. Asymptotic freedom in parton language. *Nucl. Phys. B*, v. 126, n. 2, p. 298-318, Aug. 1977.
- [90] DAWSON, S.; EICHTEN, E.; QUIGG, C. Search for supersymmetric particles in hadron-hadron collisions. *Phys. Rev. D*, v. 31, n. 7, p. 1581-1637, Apr. 1985.
- [91] PUMPLIN, J.; STUMP, D. R.; HUSTON, J.; LAI, H. L.; NADOLSKY, P.; TUNG, W. K. New generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis. *JHEP*, v. 0207, n. 7, p. 012-064, Aug. 2002.
- [92] ESKOLA, K. J.; KOLHINEN, V. J.; RUUSKANEN, P. V. Scale evolution of nuclear parton distributions. *Nucl. Phys. B*, v. 535, n. 1-2, p. 351-371, Dec. 1998.

- [93] ESKOLA, K. J.; KOLHINEN, V. J.; SALGADO, C. A. The scale dependent nuclear effects in parton distributions for practical applications. *Eur. Phys. J. C*, v. 9, n. 1, p. 61-68, Apr. 1999.
- [94] de FLORIAN, D.; SASSOT, R. Nuclear parton distributions at next to leading order. *Phys. Rev. D*, v. 69, n. 7, 074028 9p., Apr. 2004.
- [95] HIRAI, M.; KUMANO, S.; NAGAI, S. H. Determination of nuclear parton distribution functions and their uncertainties at next-to-leading order. *Phys. Rev. C*, v. 76, n. 6, p. 065207 16p., Dec. 2007.
- [96] ESKOLA, K. J.; PAUKKUNEN, H.; SALGADO, C. A. An improved global analysis of nuclear parton distribution functions including RHIC data. *JHEP*, v. 0807, n. 7, p. 102-129, July 2008.
- [97] ESKOLA, K. J.; PAUKKUNEN, H.; SALGADO, C. A. EPS09 - a New Generation of NLO and LO Nuclear Parton Distribution Functions. *JHEP*, v. 0904, n. 4, p. 065-101, Apr. 2009.
- [98] EMEL'YANOV, V.; KKODINOV, A.; KLEIN, S. R.; VOGT, R. Spatial variation of nuclear structure functions and heavy quark production. *Phys. Rev. Lett.*, v. 81, n. 9, p. 1801-1804, Aug. 1998.
- [99] ESKOLA, K. J.; KOLHINEN, V. J.; VOGT, R. Obtaining the nuclear gluon distribution from heavy quark decays to lepton pairs in p A collisions. *Nucl. Phys. A*, v. 696, n. 3-4, p. 729-746, Dec. 2001.
- [100] KLEIN, S. R.; VOGT, R. Inhomogeneous shadowing effects on J/psi production in dA collisions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 91, n. 14, 142301 4p., Sept. 2003.
- [101] VOGT, R. Shadowing and absorption effects on J/psi production in dA collisions. *Phys. Rev. C*, v. 71, n. 5, 054902 11p., May 2005.
- [102] GAY DUCATI, M. B.; GONCALVES, V. P.; MACKEDANZ, L. F. Additional J/psi suppression from high density effects. *Eur. Phys. J. C*, v. 34, n. 2, p. 229-236, Feb. 2004.
- [103] GAY DUCATI, M. B.; GONCALVES, V. P.; MACKEDANZ, L. F. D-meson production in d+Au process using a perturbative approach. *Phys. Lett. B*, v. 605, n. 3-4, p. 279-286, Jan. 2005.
- [104] AYALA FILHO A.L.; MARIOTTO, C. B.; GONCALVES, V.P. Nuclear medium effects in J/psi production at HERA-B *Int. J. Mod. Phys. E*, v. 16, n. 6, p. 1701-1711, Jan. 2007.
- [105] MARIOTTO, C.B.; GONCALVES, V.P. Nuclear shadowing and prompt photons in hadronic collisions at ultrarelativistic energies. *Phys. Rev. C*, v. 78, n. 3, p. 037901 4p., Sept. 2008.

- [106] GAY DUCATI, M. B.; MACHADO, M. M.; MACHADO, M. V. T. Diffractive quarkonium production in association with a photon at the LHC. *Phys. Lett. B*, v. 683, n. 2-3, p. 150-153, Jan. 2010.
- [107] MARIOTTO, C. B.; MACHADO, M. V. T. Quarkonium plus prompt-photon associated hadroproduction and nuclear shadowing. *Eur. Phys. J. C*, v. 67, n. 3-4, p. 455-463, Apr. 2010.
- [108] ESPINDOLA D. B.; MARIOTTO, C. B.; RODRIGUEZ, M. C. Gluino production and nuclear shadowing at the LHC. *AIP Conf. Proc.*, v. 1296, n. 1, p. 262-265, Nov. 2010.
- [109] JOWETT, J. M. The LHC as a nucleus-nucleus collider. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, v. 35, n. 10, 104028 9p., Sept. 2008.
- [110] KLEIN, S. R.; NYSTRAND, J.; VOGT, R. Heavy quark photoproduction in ultra-peripheral heavy ion collisions. *Phys. Rev. C*, v. 66, n. 4, 044906 21p., Oct. 2002.
- [111] D'ENTERRIA, D.; LANSBERG, J. P. Study of Higgs boson production and its b anti-b decay in gamma-gamma processes in proton-nucleus collisions at the LHC. *Phys. Rev. D*, v. 81, n. 1, 014004 17p., Jan. 2010.
- [112] BEENAKKER, W.; HÖPKER, R.; SPIRA, M.; ZERWAS, P. M. Squark and gluino production at hadron colliders. *Nucl. Phys. B*, v. 492, n. 1, p. 51-103, [s.l.] 1997.
- [113] RODRIGUEZ, M. C.; ESPINDOLA, D. B.; MARIOTTO, C. B. Photino and gluino production in the SQED and SQCD. Será submetido para publicação.
- [114] NOVIKOV, V. Field theory and the standard model. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/9812496v1>>. Acesso em: 22 jan. 2010.
- [115] HALZEN, F.; MARTIN, A. D. *Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics*. John Wiley, 1984.
- [116] SAKURAI, J. J. *Advanced Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1967.
- [117] GRIFFITHS, D. *Introduction to Elementary Particles*. 2 ed., Wiley-VCH, c2004.
- [118] POKORSKI, S. *Gauge Field Theories*. 2 ed, Cambridge University press, 2000.
- [119] SIGNER, A. Abc of SUSY. *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.*, v. 36, n. 7, 073002 45p., May 2009.
- [120] AITCHISON, I. *Supersymmetry in Particle Physics: An Elementary Introduction*. Cambridge University Press, 2007.
- [121] MARTIN, S. P. A supersymmetry primer. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356v5>>. Acesso em: 28 nov. 2009.
- [122] DRESS, M. An introduction to supersymmetry. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-ph/9611409v1>>. Acesso em: 15 dez. 2009.