UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ZETA-MEDIDAS E PRINCÍPIO DOS GRANDES DESVIOS

JAIRO KRÁS MENGUE

Porto Alegre, agosto de 2010.

Tese submetida por Jairo Krás Mengue[1] como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática pelo Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Professor Orientador:

Dr. Artur Oscar Lopes

Banca Examinadora:

Dr. Elismar da Rosa Oliveira (PPG-MAT/UFRGS)

Dr. Rafael Rigão Souza (PPG-MAT/UFRGS)

Dr. Eduardo Garibaldi (UNICAMP)

Dr. José Afonso Barrionuevo (PPG-MAP/UFRGS)

Data da Defesa: 20 de agosto de 2010.

[1]Bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

Resumo

Seguindo os trabalhos de William Parry e Mark Pollicott, analisamos expressões de funções zeta dinâmicas e construímos probabilidades envolvendo somas em órbitas periódicas, que chamamos de zeta-medidas. Mostramos que as zeta-medidas são ferramentas úteis para aproximar o equilíbrio de um potencial Hölder e que podem ser usadas para aproximar a probabilidade maximizante. Para alguns casos, mostramos que esta convergência satisfaz um princípio dos grandes desvios sem assumir unicidade da probabilidade maximizante.

Como as iterações do Operador de Ruelle podem ser usadas para aproximar o equilíbrio de um potencial Hölder, tomando um limite em duas variáveis, mostramos que elas podem ser usadas para aproximar a probabilidade maximizante. Supondo a unicidade da probabilidade maximizante, mostramos que esta convergência satisfaz um princípio dos grandes desvios com o mesmo funcional obtido por Baraviera-Lopes-Thieullen, para as medidas de equilíbrio. Mostramos antes que este funcional difere do obtido para zeta-medidas.

Em uma seção independente, construímos um ponto cujo ω-limite não contém pontos periódicos. Este ω-limite pode ser aproximado exponencialmente em N por órbitas periódicas de tamanho menor ou igual a N.

Abstract

We follow the works of William Parry and Mark Pollicott considering expressions of dinamical zeta functions and construct probabilities over sum on periodic orbits, that we call zeta-measures. We show that zeta-measures are useful tools to approximate the equilibrium measure of a Hölder potential and also they can be used to approximate the maximizing measure. In some cases, we show that this convergence satisfies a Large Deviation Principle (LDP) without assuming unicity of the maximizing measure.

The Ruelle Operator can be used to approximate the equilibrium measure of a Hölder potential, so taking a limit on two variables, we show that they can be used to aproximate the maximizing measure. When there is a unique maximizing measure, we show that this convergence satisfies a LDP with the same functional given by Baraviera-Lopes-Thieullen, for equilibrium measures. We have shown before that this functional isn't the same for zeta-measures.

In a independent section we construct a point such that the ω-limit set doesn't have periodic points. This ω-limit set can be approximate exponencialy in N by periocic orbits with period smaller than N.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente contribuiram para a realização deste trabalho. Em especial ao professor Artur Oscar Lopes que se fez presente com orientações e conselhos. Além disso agradeço sua paciência para tratar de assuntos diversos e compreender minhas limitações que muitas vezes foram além de questões matemáticas. Um agradecimento especial é devido também aos membros da banca examinadora pelas sugestões de correção do texto.

Gostaria também de agradecer minha querida esposa Andreia que exerceu um papel fundamental em momentos delicados, ajudando a manter meu equilíbrio emocional.

O autor expressa também sua gratidão ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo auxílio financeiro.

Sumário

1 Introdução

Em todo este trabalho X denotará um subshift do tipo finito contido em $\{1, ..., d\}^{\mathbb{N}}$, dado por uma matriz ($A_{d\times d}$, $a_{ij} \in \{0,1\}$) irredutível e aperiódica, ou seja, existe uma potência de A com todas as entradas positivas. Um ponto $x = x_1x_2...$ está em X se $a_{x_ix_{i+1}} = 1$, $i = 1, 2, 3, ...$.
Fixado $\theta \in (0,1)$, colocamos em X a métrica $d = d_\theta$ dada por:

$$d(x,y) = \theta^N, \;\; x = (x_1x_2...), y = (y_1y_2...) \;\; x_{N+1} \neq y_{N+1} \;\; e \;\; x_j = y_j, j = 1, ..., N.$$

Denotamos por F_θ o conjunto dos potenciais $f : X \to R$ lipschitz com as notações:

$$|f|_\theta := \sup_{x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}, \quad |f|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|, \quad \|f\|_\theta = |f|_\theta + |f|_\infty.$$

Como observado em [18], $(F_\theta, \|\|_\theta)$ é um espaço de Banach e um potencial f é α-Hölder ($\alpha \in (0,1)$) para a métrica d_θ se e somente se f é lipschitz para a métrica d_{θ^α}. Neste trabalho, quando dizemos f é Hölder, estamos considerando $\alpha = 1$.

Consideramos a sigma-álgebra de Borel em X e denotamos por $\mathcal{M}$ o conjunto das probabilidades invariantes para o shift σ. Usaremos as notações

$$\beta(f) := \max_{\mu\in\mathcal{M}} \mu(f),$$

$$M_{max}(f) := \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(f) = \beta(f)\}.$$

Para $\mu \in \mathcal{M}$, denotamos[2] por $h(\mu)$ sua entropia. A pressão de um potencial f é definida por

$$P(f) := \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \left(h(\mu) + \mu(f)\right).$$

[2]Denotando por C_n um cilindro qualquer de tamanho n, pelo Teorema de Kolmogorov-Sinai $h(\mu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{C_n} \mu(C_n) \log(\mu(C_n))$.

Para $f \in F_\theta$ existe uma única $\mu_f \in \mathcal{M}$, chamada o **equilíbrio de** f que atinge este supremo (ver [18]).

O trabalho que vamos desenvolver está contido no que chamamos "Formalismo Termodinâmico no caso de temperatura zero". Uma introdução ao Formalismo Termodinâmico pode ser encontrada em [18]. Fixado um potencial $f \in F_\theta$, para cada $c > 0$ consideramos o potencial cf. Em seguida tratamos de questões relativas ao formalismo termodinâmico, considerando o parâmetro c em direção a $+\infty$. O parâmetro c é interpretado como o inverso a temperatura $c = \frac{1}{T}$. Um dos mais conhecidos resultados neste contexto afirma que quando $c \to +\infty$, todo ponto de acumulação do equilíbrio μ_{cf} na topologia Fraca* está em $M_{max}(f)$ (ver [9]). Assim obtemos uma primeira relação entre o Formalismo Termodinâmico e a Otimização Ergódica (ver [8], [9]).

Na primeira parte deste trabalho, fixado um potencial $f > 0$ em F_θ vamos analisar a expressão da função zeta dinâmica (ver [18])

$$\zeta(s,z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{x \in Fix_n} e^{c\,s\,f^n(x) - n\,P(c\,f) + zk^n(x)}\right),$$

onde $c > 0$, $s \in (0,1)$, $z \approx 0$, $f, k \in F_\theta$, $f^n = f + f \circ \sigma + ... + f \circ \sigma^{n-1}$ (analogamente k^n) e $Fix_n := \{x \in X : \sigma^n(x) = x\}$. Em seguida vamos derivar desta a seguinte probabilidade invariante, que chamaremos uma zeta-medida:

$$\int k\, d\mu_{c,s} := \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in Fix_n} e^{c\,s\,f^n(x) - n\,P(c\,f)} \frac{k^n(x)}{n}}{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in Fix_n} e^{c\,s\,f^n(x) - n\,P(c\,f)}}.$$

Mostraremos que quando $s \to 1$ as probabilidades $\mu_{c,s}$ convergem para o equilíbrio de cf na topologia Fraca*. Além disso, quando $c \to \infty$ e $s \to 1$ todo ponto de acumulação de $\mu_{c,s}$ na topologia Fraca* é uma probabilidade maximizante para f. Em seguida vamos analisar o comportamento desta convergência, mostrando que é satisfeito (quando $c(1-s) \to L > 0$) um

Princípio dos Grandes Desvios onde o funcional de desvio é finito nos pontos periódicos:

$$I(x) = n_x\beta(f) - f^{n_x}(x),\ x \in PER,\ n_x := \min_n \sigma^n(x) = x.$$

Também estudaremos as zeta-medidas definidas por

$$\int kd\pi_{c,N} := \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in Fix_n} e^{c\,f^n(x)-n\,P(c\,f)}\frac{k^n(x)}{n}}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in Fix_n} e^{c\,f^n(x)-n\,P(c\,f)}}$$

e

$$\int kd\eta_{c,N} := \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in Fix_n} e^{c\,f^n(x)}\frac{k^n(x)}{n}}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in Fix_n} e^{c\,f^n(x)}},$$

onde $c > 0$, $N \in \mathbb{N}$.

Podemos ainda tomar aproximações f_λ para f quando trabalhamos com zeta-medidas. Como aplicação, vamos mostrar que se $f_\lambda \to f$ $(\lambda \to \infty)$ uniformemente então todo ponto de acumulação de μ_{cf_λ} $(c, \lambda \to \infty)$ na topologia Fraca* é uma probabilidade maximizante para f.

Na segunda parte deste trabalho vamos estudar o operador de Ruelle $L_f : F_\theta \to F_\theta$ definido por:

$$(L_f w)(x) := \sum_{\sigma y = x} e^{f(y)} w(y).$$

Vamos mostrar que para g_c, a normalizada de cf, e $x \in X$ fixado, todo ponto de acumulação de

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(L_{g_c}^n(.))(x), \quad c, N \to \infty,$$

na topologia Fraca* é uma probabilidade maximizante para f (o mesmo vale para aproximações f_λ de f na norma $\|\|_\theta$). Além disso, supondo a unicidade da probabilidade maximizante vamos mostrar que essa convergência satisfaz um Princípio dos Grandes Desvios com o mesmo funcional obtido por Baraviera-Lopes-Thieullen em [2]. Este funcional difere do obtido para zeta-medidas.

Na parte final vamos tratar de um assunto um pouco diferente e apresentar um exemplo "concreto" de ponto $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ cujo ω-limite não contém pontos periódicos. Vamos mostrar que este ω-limite pode ser aproximado exponencialmente por órbitas periódicas, no seguinte sentido:
existe uma sequência de órbitas periódicas $X_1, X_2, ...$ irredutíveis, com períodos $n_1 < n_2 < ...$ tal que para cada j existe $x_j \in X_j$ satisfazendo

$$d(x_j, \omega(x)) < \theta^{2n_j}.$$

Essa aproximação está relacionada com a questão de aproximar um potencial Hölder por potenciais com maximizante suportada em órbita periódica (ver [5], [11], [16]).

Os pesquisadores de áreas mais aplicadas, que tentam estimar alguma propriedade de um sistema dinâmico via o uso de um software, costumam afirmar que a informação básica para se obter algo prático e útil é obtida quase sempre através da análise das órbitas periódicas, ou seja, daquelas órbitas finitamente determinadas. Desta forma, as zeta-medidas possuem um interesse especial, podendo aproximar tanto estados de Gibbs a temperatura finita, quanto medidas maximizantes.

Destacamos ainda que o resultado acima mencionado, em que uma função f é aproximada por uma outra f_λ, além das propriedades de aproximação por zeta-medidas, também é muito útil do ponto de vista computacional em aplicações. Um potencial f que depende de infinitas coordenadas pode ser aproximado por um f_n que depende de finitas coordenadas no shift. Para este último tipo de potencial o Teorema de Ruelle é apenas o Teorema de Perron para matrizes positivas, facilitando o cálculo do maior autovalor e consequentemente da pressão, que aparece nas zeta-medidas. Assim, as questões relativas ao cálculo das medidas que aproximam a medida de Gibbs ou a maximizante recaem num problema de Álgebra Linear.

Ainda, um funcional de desvio que pode ser calculado a partir de informação contida apenas em órbitas periódicas (será o caso das zeta-medidas) é mais prático do ponto de vista operacional.

2 Zeta-medidas

Em todas as seções deste capítulo estará fixado um potencial $f > 0$ em F_θ. Em várias provas e até algumas definições a hipótese $f > 0$ será de extrema importância.

2.1 Resultados auxiliares sobre funções zeta dinâmicas

Nesta seção apresentamos alguns resultados e ideias contidos em [18], entretanto algumas expressões e provas são diferentes.

Poderíamos inicialmente tentar associar a f o número

$$\zeta(f) = exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{x \in Fix_n} e^{f^n(x)}\right).$$

No entanto é conhecido (ver [18] pag. 74) que

$$\frac{1}{n} \log \sum_{x \in Fix_n} e^{f^n(x)} \to P(f) \qquad (n \to \infty),$$

seguindo pelo teste da raiz que $\zeta(f) < \infty$ se $P(f) < 0$ e $\zeta(f) = \infty$ se $P(f) > 0$. Ainda para $P(f) = 0$ podemos fazer uso do seguinte lema:

Lema 1 *Considere $g_0 \in F_\theta$ um potencial fixado.*
a) Se $P(g_0) < 0$, então, para g próximo de g_0 (na norma Lipschitz)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{x \in Fix_n} e^{g^n(x)} < \infty.$$

b) Se $P(g_0) = 0$, então, para g próximo de g_0 (na norma Lipschitz)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{x \in Fix_n} e^{g^n(x)} - e^{nP(g)} \right| < \infty.$$

Prova: Para a) ver pag. 80, Teo 5.4 [18] e para b) ver pag. 81 Teo. 5.5 (ii) [18].

Note que para um potencial real g temos que o raio espectral do operador de Ruelle é dado por $\rho(L_g) = e^{P(g)}$ (ver [18]). $\blacksquare$

Observação: Decorre também deste lema que $\zeta(f) = \infty$ se $P(f) = 0$. Além disso, como a prova do ítem a) deste lema é feita pelo teste da raiz e $(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \to 1$, concluímos também que se $P(g) < 0$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in \mathrm{Fix}_n} e^{g^n(x)} < \infty.$$

Agora consideramos, para cada $c > 0$, o potencial cf. Para $s \in (0,1)$ temos $P(csf - P(cf)) < 0$, além disso, para $k \in F_\theta$ fixado

$$(s,z) \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{Fix_n} e^{csf^n + zk^n - P(cf)n},$$

é analítica para $s \in (0,1)$ e $|z|$ pequeno (em uma pequena região que depende de s e c).

Segue que a função

$$\zeta(s,z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{Fix_n} e^{csf^n + zk^n - P(cf)n} \right)$$

é não nula em $z = 0$, e analítica para $s \in (0,1)$ e $|z|$ pequeno (em uma região que depende de s e c).

Lema 2 *Denotando por ζ_2 a derivada parcial de $\zeta(s,z)$ na variável z temos:*

$$\frac{\zeta_2(s,0)}{\zeta(s,0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in Fix_n} e^{csf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n}$$

é analítica para $s \in (0,1)$.

Lema 3 *Para cada $c > 0$:*

i) A função

$$\alpha(s,z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{Fix_n} e^{csf^n + zk^n - P(cf)n} \right) - e^{nP(csf + zk - P(cf))} \right] \right)$$

é analítica para $s \in (0,1]$ e z em uma pequena região que depende de s e c.

ii) Para $s \in (0,1)$ e z em uma pequena região que depende de s e c

$$\alpha(s,z) = \zeta(s,z)(1 - e^{P(csf+zk-P(cf))}).$$

Prova: Para ii) usamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = -\log(1-z), |z| < 1.$$

Além disso, para $s \in (0,1)$ temos $P(csf + zk - P(cf)) < 0$, (z pequeno). Em particular, $e^{P(csf+zk-P(cf))} < 1$ e podemos escrever

$$\log(1 - e^{P(csf+zk-P(cf))}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{nP(csf+zk-P(cf))}.$$

Decorre que:

$$\begin{aligned}
\alpha(s,z) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{Fix_n} e^{csf^n+zk^n-P(cf)n}\right) - e^{nP(csf+zk-P(cf))}\right]\right) \\
&= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{Fix_n} e^{csf^n+zk^n-P(cf)n}\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{nP(csf+zk-P(cf))}\right) \\
&= \zeta(s,z)\, e^{\log(1-e^{P(csf+zk-P(cf))}} \\
&= \zeta(s,z)\,(1 - e^{P(csf+zk-P(cf))}).
\end{aligned}$$

Prova de i):

Quando $s \in (0,1)$, usamos ii) e que P é analítica. Quando $s = 1$ usamos o Lema 1 (b) e que exp é analítica. ■

Como $\alpha(s,0) \neq 0$, podemos calcular $\frac{\alpha_2(s,0)}{\alpha(s,0)}$:

Lema 4 *A função $\frac{\alpha_2(s,0)}{\alpha(s,0)}$ é analítica para $s \in (0,1]$.*

Para $s \in (0,1)$

$$\frac{\alpha_2(s,0)}{\alpha(s,0)} = \frac{\zeta_2(s,0)}{\zeta(s,0)} - \frac{e^{P(csf)-P(cf)}}{1 - e^{P(csf)-P(cf)}} \int k \, d\mu_{csf},$$

onde μ_{csf} é o equilíbrio de csf.

Prova: Iniciamos observando que $\left.\frac{\partial P(csf+zk)}{\partial z}\right|_{z=0} = \int k \, d\mu_{csf}$ (ver [18] pag. 60).

Para $s \in (0,1)$ temos

$$\alpha(s,z) = \zeta(s,z)(1 - e^{P(csf+zk-P(cf))}),$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_2(s,0)}{\alpha(s,0)} &= \frac{\zeta_2(s,0)(1 - e^{P(csf)-P(cf)}) - \zeta(s,0)e^{P(csf)-P(cf)} \left.\frac{\partial P(csf+zk)}{\partial z}\right|_{z=0}}{\zeta(s,0)(1 - e^{P(csf)-P(cf)})} \\
&= \frac{\zeta_2(s,0)}{\zeta(s,0)} - \frac{e^{P(csf)-P(cf)}}{1 - e^{P(csf)-P(cf)}} \left.\frac{\partial P(csf+zk)}{\partial z}\right|_{z=0} \\
&= \frac{\zeta_2(s,0)}{\zeta(s,0)} - \frac{e^{P(csf)-P(cf)}}{1 - e^{P(csf)-P(cf)}} \int k \, d\mu_{csf}.
\end{aligned}$$

■

Observações:

Em [18] é considerado um potencial $f > 0$, no entanto aparecem expressões do tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{Fix_n} e^{-csf^n + zk^n + g^n},$$

onde $s > 1$ e $P(g - cf) = 0$. Em tal contexto c é obtido a partir de g pela relação $P(g - cf) = 0$. Aqui, queremos fazer $c \to \infty$ e então a função g precisa ser colocada em função de c. Uma forma simples é tomando $g = P(cf)$, de onde decorre $g^n = nP(cf)$. Também em tal contexto é importante a forma como estão dispostos os sinais para garantir que quando $s > 1$ a expressão é analítica, uma vez que os autores estão interessados em construir uma função analítica em $Re(s) > 1$ e com mais argumentos envolvidos poder aplicar um Teorema Tauberiano. Aqui não teremos tal necessidade de onde podemos nos permitir a troca de sinais e considerar $s < 1$, como acima.

2.2 Aproximando o equilíbrio por zeta-medidas

Nesta seção aplicamos os resultados obtidos na seção anterior para construir medidas que aproximam o equilíbrio de cf, $c > 0$ fixado.

Proposição 5 *Quando $s \to 1$, as probabilidades invariantes $\mu_{c,s}$ definidas por*

$$\int k\, d\mu_{c,s} := \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in Fix_n} e^{c\, s\, f^n(x) - n\, P(c\, f)} \frac{k^n(x)}{n}}{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in Fix_n} e^{c\, s\, f^n(x) - n\, P(c\, f)}},$$

convergem para o equilíbrio μ_{cf} de cf na topologia Fraca.*

Prova: Iniciamos observando que as expressões acima estão bem definidas devido ao Lema 2.

Fixada uma função $k \in F_\theta$, sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in Fix_n} e^{csf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} = \frac{\zeta_2(s,0)}{\zeta(s,0)}$$
$$= \frac{\alpha_2(s,0)}{\alpha(s,0)} + \frac{e^{P(csf)-P(cf)}}{1 - e^{P(csf)-P(cf)}} \int k d\mu_{csf}.$$

Assim

$$\frac{1 - e^{P(csf)-P(cf)}}{e^{P(csf)-P(cf)}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in Fix_n} e^{csf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} = \frac{1 - e^{P(csf)-P(cf)}}{e^{P(csf)-P(cf)}} \frac{\alpha_2(s,0)}{\alpha(s,0)} + \int k d\mu_{csf}.$$

Podemos também considerar $k \equiv 1$. Tomando o quociente temos:

$$\mu_{c,s}(k) = \frac{\frac{1 - e^{P(csf)-P(cf)}}{e^{P(csf)-P(cf)}} \frac{\alpha_2(s,0)}{\alpha(s,0)} + \int k d\mu_{csf}}{\frac{1 - e^{P(csf)-P(cf)}}{e^{P(csf)-P(cf)}} \frac{\beta_2(s,0)}{\beta(s,0)} + 1}, \tag{1}$$

onde β representa a função α quando $k \equiv 1$.

É conhecido que fixado c, o valor $\int k d\mu_{csf}$ depende continuamente de s (é a derivada em $z = 0$ de $P(c\, s\, f + z\, k)$). Então fazendo $s \to 1$ em (1) temos

$$\lim_{s \to 1} \mu_{c,s}(k) = \mu_{cf}(k).$$

Por fim se k é uma função contínua, como X é compacto, dado $\varepsilon > 0$ existem funções $k_1, k_2 \in F_\theta$ (da forma combinações lineares de característica de cilindros) tal que

$$k_1 \leq k \leq k_2 \leq k_1 + \varepsilon.$$

Segue que

$$\mu_{cf}(k) - \varepsilon \leq \mu_{cf}(k_1) \leq \liminf_{s \to 1} \mu_{c,s}(k) \leq \limsup_{s \to 1} \mu_{c,s}(k) \leq \mu_{cf}(k_2) \leq \mu_{cf}(k) + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos o desejado. ■

As zeta-medidas acima serão de nosso interesse ainda nas próximas seções. No entanto apresentamos aqui outras formas de aproximar o equilíbrio com expressões que envolvem somas em órbitas periódicas. Explicitamente, apresentamos também as zeta-medidas $\pi_{c,N}$ e $\eta_{c,N}$, $c \in \mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$, dadas por

$$\pi_{c,N}(k) := \frac{\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{c\, f^n(x) - n\, P(c\, f)} \frac{k^n(x)}{n}}{\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{c\, f^n(x) - n\, P(c\, f)}}$$

e

$$\eta_{c,N}(k) := \frac{\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{c\, f^n(x)} \frac{k^n(x)}{n}}{\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{c\, f^n(x)}}.$$

Vamos provar:

Proposição 6 *Fixado $c > 0$, para toda função contínua $k : X \to \mathbb{R}$:*

$$\lim_{N \to \infty} \pi_{c,N}(k) = \lim_{N \to \infty} \eta_{c,N}(k) = \mu_{c\,f}(k),$$

onde $\mu_{c\,f}$ é o equilíbrio de cf.

Prova: Começamos fixando $k \in F_\theta$, $k > 0$. Pelo Lema 4 a função

$$\frac{\alpha_2(s,0)}{\alpha(s,0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{Fix_n} e^{csf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} \right) - e^{nP(csf) - nP(cf)} \int k d\mu_{csf} \right]$$

é analítica em $s = 1$.

Então:

$$-\infty < \frac{\alpha_2(1,0)}{\alpha(1,0)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)}\frac{k^n}{n}\right) - \int k d\mu_{cf}\right] < \infty.$$

Assim

$$\left(\sum_{Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)}\frac{k^n}{n}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int k d\mu_{cf}. \qquad (2)$$

Então,

$$\frac{\sum_{Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)}\frac{k^n}{n}}{\sum_{Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int k d\mu_{cf},$$

e

$$\frac{\sum_{Fix_n} e^{cf^n}\frac{k^n}{n}}{\sum_{Fix_n} e^{cf^n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int k d\mu_{cf}.$$

Agora usamos o seguinte resultado de análise:

"Sejam a_n e b_n sequências de números reais ≥ 0. Suponhamos que $\frac{a_n}{b_n} \to L$, e que existe $\varepsilon > 0$ tal que $a_n > \varepsilon$ e $b_n > \varepsilon$, $n >> 0$. Então $\frac{\sum_{n=1}^N a_n}{\sum_{n=1}^N b_n} \to L$ quando $N \to \infty$."

Temos que (usando (2) para obter a hipótese $> \varepsilon$) para $k > 0$:

$$\lim_{N\to\infty} \pi_{c,N}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)}\frac{k^n}{n}}{\sum_{n=1}^N \sum_{Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)}} = \int k d\mu_{cf},$$

e

$$\lim_{N\to\infty} \eta_{c,N}(k) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{Fix_n} e^{cf^n}\frac{k^n}{n}}{\sum_{n=1}^N \sum_{Fix_n} e^{cf^n}} = \int k d\mu_{cf}.$$

Somando uma constante a k o resultado final continua válido. Segue que o resultado vale para toda $k \in F_\theta$. Quando $k : X \to \mathbb{R}$ é contínua, podemos usar argumentos de aproximação, como na proposição anterior. ■

2.3 Aproximando probabilidades maximizantes

Iniciamos definindo uma função I em pontos periódicos. Essa função estará relacionada com o princípio dos grandes desvios das zeta-medidas em algumas situações.

Definição 7 *Definimos a função $I(x)$ em pontos periódicos $x \in PER$ por:*

$$I(x) := n_x \left(\beta(f) - \frac{f^{n_x}(x)}{n_x} \right),$$

onde n_x é o menor período de x.

Inicialmente vamos mostrar que

Lema 8

$$\inf_{x \in PER} I(x) = 0.$$

Para isso vamos fazer uso do seguinte resultado (ver [1], [15]):

Lema 9 *Dado um conjunto mensurável (Borel) A, uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$, e uma probabilidade ergódica ν, com $\nu(A) > 0$, existe $p \in A$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $N > 0$ satisfazendo $\sigma^N(p) \in A$ e*

$$\left| \sum_{i=0}^{N-1} f(\sigma^i(p)) - N \int f d\nu \right| < \varepsilon.$$

O conjunto de tais $p \in A$ possui a medida de A.

Agora apresentamos a prova do Lema 8

Prova:

$M_{max}(f)$ é um compacto e convexo que contém pelo menos uma probabilidade ergódica ν (ver [9]).

Então,

$$\beta(f) = \int f d\nu \quad \text{e} \quad I(x) = |f^{n_x}(x) - n_x \int f d\nu|.$$

Assim é suficiente mostrar que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $x \in \text{PER}$ tal que

$$I(x) = |f^{n_x}(x) - n_x \int f d\nu| < \varepsilon.$$

Como $f \in F_\theta$, existe uma constante $C > 0$ tal que para $x, y \in X$:

$$|f(x) - f(y)| < Cd(x, y).$$

Fixamos j tal que

$$C\theta^j \frac{\theta}{1-\theta} < \varepsilon/2.$$

Existe um cilindro k_j de tamanho j tal que $\nu(k_j) > 0$. Usando o lema anterior com $A = k_j$ obtemos um ponto $p \in k_j$ e um inteiro $N > 0$ tal que $\sigma^N(p) \in k_j$ e

$$\left|\sum_{i=0}^{N-1} f(\sigma^i(p)) - N \int f d\nu\right| < \varepsilon/2.$$

Então p é da forma $p = p_1 ... p_N p_1 ... p_j ...$. Consideramos o ponto periódico x dado por repetições da palavra

$$x = \overline{p_1 ... p_N}.$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=0}^{N-1} f(\sigma^i(p)) - \sum_{i=0}^{N-1} f(\sigma^i(x))\right| \quad &\leq \quad \sum_{i=0}^{N-1} \left|f(\sigma^i(p)) - f(\sigma^i(x))\right| \\
\leq \quad C(d_\theta(p, x) + ... + d_\theta(\sigma^{N-1}(p), \sigma^{N-1}(x))) \quad &\leq \quad C(\theta^{N+j} + ... + \theta^j) \\
< \quad C\theta^j(1 + \theta + ...) \quad = \quad C\theta^j \frac{\theta}{1-\theta} \quad &< \quad \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
I(x) = \left|\sum_{i=0}^{n_x-1} f(\sigma^i(x)) - n_x \int f d\nu\right| &\leq \left|\sum_{i=0}^{N-1} f(\sigma^i(x)) - N \int f d\nu\right| \\
&\leq \left|\sum_{i=0}^{N-1} f(\sigma^i(p)) - \sum_{i=0}^{N-1} f(\sigma^i(x))\right| + \left|\sum_{i=0}^{N-1} f(\sigma^i(p)) - N \int f d\nu\right| \\
&\leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

como desejado. ■

Notação: Denotamos por $h_f := sup_{\mu \in M_{max}(f)} h(\mu)$.

O próximo resultado, pode ser encontrado em [9], [19].

Lema 10

$$P(cf) = c\beta(f) + \varepsilon_c,$$

onde ε_c é monótona não crescente e converge a h_f quando $c \to \infty$.
Quando $c \to \infty$, todo ponto de acumulação do equilíbrio μ_{cf}, na topologia Fraca, está em $M_{max}(f)$ e possui entropia igual a h_f.*

Lema 11 *Seja μ_λ uma família de probabilidades. Suponhamos que para toda função contínua $g : X \to \mathbb{R}$*

$$\lim_{\lambda \to \infty} (\mu_\lambda(g) - \mu_\lambda(g \circ \sigma)) = 0$$

e

$$\liminf_{\lambda \to \infty} \mu_\lambda(f) \geq \beta(f).$$

Então, quando $\lambda \to \infty$, todo ponto de acumulação de μ_λ na topologia Fraca está em $M_{max}(f)$.*

Prova: Seja μ um ponto de acumulação de μ_λ ($\lambda \to \infty$) na topologia Fraca*. Então μ é linear, $\mu(1) = 1$ e $\mu(g) \geq 0$ para toda função contínua $g \geq 0$. Além disso para toda função contínua g:

$$\mu(g) - \mu(g \circ \sigma) = \lim_{\lambda \to \infty} (\mu_\lambda(g) - \mu_\lambda(g \circ \sigma)) = 0.$$

Então μ é uma probabilidade invariante. Por fim,

$$\mu(f) \geq \liminf_{\lambda \to \infty} \mu_\lambda(f) \geq \beta(f).$$

Então $\mu \in M_{max}(f)$. ■

Agora estamos em condições de apresentar o seguinte

Teorema 12 *Quando $c \to \infty$ e $s \to 1$, todo ponto de acumulação de $\mu_{c,s}$ na topologia Fraca* está em $M_{max}(f)$.*

Prova: Como $\mu_{c,s}$ são probabilidades invariantes, pelo Lema 11 basta provar a

Afirmação:

$$\liminf_{c\to\infty, s\to 1} \mu_{c,s}(f) \geq \beta(f). \tag{3}$$

Para isso, fixamos $\varepsilon > 0$ e definimos

$$A_n = \{x \in Fix_n : \frac{f^n(x)}{n} < \beta(f) - \varepsilon\},$$

$$B_n = \{x \in Fix_n : \frac{f^n(x)}{n} \geq \beta(f) - \varepsilon\}.$$

Segue que para $c >> 0$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in A_n} e^{csf^n - nP(cf)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in A_n} e^{csn(\beta(f)-\varepsilon) - nc\beta(f) - n\varepsilon_c} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in A_n} e^{nc(s-1)\beta(f) - ncs\varepsilon - n\varepsilon_c} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in A_n} e^{-ncs\varepsilon} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ncs\varepsilon + n\log(d)} = \frac{e^{-cs\varepsilon + \log(d)}}{1 - e^{-cs\varepsilon + \log(d)}},
\end{aligned}$$

e com argumentos análogos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x \in A_n} e^{csf^n - nP(cf)} \frac{f^n}{n} \leq \frac{e^{-cs\varepsilon + \log(d)}}{1 - e^{-cs\varepsilon + \log(d)}} \left(\beta(f) - \varepsilon\right).$$

Por outro lado, pelo Lema 8, existe um ponto periódico x tal que:

$$I(x) = n_x \left(\beta(f) - \frac{f^{n_x}(x)}{n_x}\right) < \varepsilon/2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in B_n} e^{csf^n-nP(cf)} &\geq e^{csf^{n_x}(x)-n_xP(cf)} \\
&= e^{csf^{n_x}(x)-n_xc\beta(f)-n_x\varepsilon_c} &(4)\\
&= e^{-csn_x\left(\beta(f)-\frac{f^{n_x}(x)}{n_x}\right)+c(s-1)n_x\beta(f)-n_x\varepsilon_c} &(5)\\
&= e^{-csI(x)+c(s-1)n_x\beta(f)-n_x\varepsilon_c} &(6)\\
&\geq e^{-cs\varepsilon/2+c(s-1)n_x\beta(f)-n_x\varepsilon_c},
\end{aligned}$$

e analogamente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in B_n} e^{csf^n-nP(cf)}\frac{f^n}{n} \geq e^{-cs\varepsilon/2+c(s-1)n_x\beta(f)-n_x\varepsilon_c}\left(\beta(f)-\varepsilon\right).$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in A_n} e^{csf^n-nP(cf)}\frac{f^n}{n}}{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in B_n} e^{csf^n-nP(cf)}\frac{f^n}{n}} &\leq \frac{e^{-cs\varepsilon+\log(d)}}{1-e^{-cs\varepsilon+\log(d)}}\frac{1}{e^{-cs\varepsilon/2+c(s-1)n_x\beta(f)-n_x\varepsilon_c}}\\
&= \frac{e^{-cs\varepsilon+\log(d)+cs\varepsilon/2-c(s-1)n_x\beta(f)+n_x\varepsilon_c}}{1-e^{-cs\varepsilon+\log(d)}}\\
&= \frac{e^{-c(s\varepsilon/2+(s-1)n_x\beta(f))+\log(d)+n_x\varepsilon_c}}{1-e^{-cs\varepsilon+\log(d)}} \overset{s\to1,c\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\lim_{c\to\infty,s\to1}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in A_n} e^{csf^n-nP(cf)}}{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in B_n} e^{csf^n-nP(cf)}} = 0.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\liminf_{c\to\infty,s\to1}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in Fix_n} e^{csf^n-nP(cf)}\frac{f^n}{n}}{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in Fix_n} e^{csf^n-nP(cf)}} &= \liminf_{c\to\infty,s\to1}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in B_n} e^{csf^n-nP(cf)}\frac{f^n}{n}}{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in B_n} e^{csf^n-nP(cf)}}\\
&\geq \beta(f)-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é qualquer, obtemos

$$\liminf_{c\to\infty,s\to1}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in Fix_n} e^{csf^n-nP(cf)}\frac{f^n}{n}}{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in Fix_n} e^{csf^n-nP(cf)}} \geq \beta(f),$$

provando a afirmação. ■

Teorema 13 *Quando $c, N \to \infty$, todo ponto de acumulação de $\pi_{c,N}$ e $\eta_{c,N}$ na topologia Fraca* estão em $M_{max}(f)$.*

Prova:

Começamos com $\pi_{c,N}$. Pelo Lemma 11 basta mostrar que

$$\liminf_{c,N\to\infty} \pi_{c,N}(f) \geq \beta(f).$$

Usando as mesmas notações e ideias do teorema anterior, apenas precisamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in A_n} e^{cf^n - nP(cf)}}{\sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in B_n} e^{cf^n - nP(cf)}} \stackrel{c,N\to\infty}{\to} 0.$$

Para $c >> 0$:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in A_n} e^{cf^n - nP(cf)} \leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in A_n} e^{cn(\beta(f)-\varepsilon) - nc\beta(f) - n\varepsilon_c}$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in A_n} e^{-nc\varepsilon - n\varepsilon_c} \leq \sum_{n=1}^{N} e^{-nc\varepsilon + n\log(d)} \leq \frac{e^{-c\varepsilon+\log(d)}}{1 - e^{-c\varepsilon+\log(d)}}.$$

Por outro lado, pelo Lema 8, existe um ponto periódico x tal que:

$$I(x) = n_x\left(\beta(f) - \frac{f^{n_x}(x)}{n_x}\right) < \varepsilon/2.$$

Além disso, se $N > n_x$

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in B_n} e^{cf^n - nP(cf)} \geq e^{cf^{n_x}(x) - n_x P(cf)} = e^{-cI(x) - n_x\varepsilon_c} \geq e^{-c\varepsilon/2 - n_x\varepsilon_c}.$$

Segue que

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in A_n} e^{cf^n - nP(cf)}}{\sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in B_n} e^{cf^n - nP(cf)}} \leq \frac{e^{-c\varepsilon+\log(d)}}{e^{-c\varepsilon/2 - n_x\varepsilon_c}} \frac{1}{1 - e^{-c\varepsilon+\log(d)}} \to 0.$$

Consideramos agora $\eta_{c,N}$:

Seguindo os mesmos argumentos, notações e ideias, basta mostrarmos que para $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in A_n} e^{cf^n}}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in B_n} e^{cf^n}} \stackrel{c,N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Temos

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in A_n} e^{cf^n} \leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in A_n} e^{cn(\beta(f)-\varepsilon)} \leq \sum_{n=1}^{N} e^{cn(\beta(f)-\varepsilon)+n\log(d)}$$
$$= e^{c(\beta(f)-\varepsilon)+\log(d)}\frac{e^{cN(\beta(f)-\varepsilon)+N\log(d)}-1}{e^{c(\beta(f)-\varepsilon)+\log(d)}-1}.$$

Por outro lado existe um ponto periódico x tal que:

$$\frac{f^{n_x}(x)}{n_x} > \beta(f) - \varepsilon/2.$$

Além disso, se $N > n_x$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in B_n} e^{cf^n} \geq \sum_{j=1}^{[N/n_x]} e^{cjf^{n_x}(x)} \geq \sum_{j=1}^{[N/n_x]} e^{cjn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}$$
$$\geq e^{cn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}\frac{e^{c[N/n_x]n_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}-1}{e^{cn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}-1}.$$

Segue que

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in A_n} e^{cf^n}}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in B_n} e^{cf^n}} \leq \frac{e^{c(\beta(f)-\varepsilon)+\log(d)}\frac{e^{cN(\beta(f)-\varepsilon)+N\log(d)}-1}{e^{c(\beta(f)-\varepsilon)+\log(d)}-1}}{e^{cn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}\frac{e^{c[N/n_x]n_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}-1}{e^{cn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}-1}}$$
$$= \frac{e^{cN(\beta(f)-\varepsilon)+N\log(d)}-1}{e^{c[N/n_x]n_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}-1}\frac{e^{c(\beta(f)-\varepsilon)+\log(d)}}{e^{c(\beta(f)-\varepsilon)+\log(d)}-1}\frac{e^{cn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}-1}{e^{cn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}}.$$

Como

$$\lim_{c,N\to\infty}\frac{e^{cn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}-1}{e^{cn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{c,N\to\infty}\frac{e^{c(\beta(f)-\varepsilon)+\log(d)}}{e^{c(\beta(f)-\varepsilon)+\log(d)}-1} = 1,$$

resta mostrar que

$$\frac{e^{cN(\beta(f)-\varepsilon)+N\log(d)}-1}{e^{c[N/n_x]n_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}-1} \to 0.$$

Temos:

$$0 \le \liminf_{c,N\to\infty} \frac{e^{cN(\beta(f)-\varepsilon)+N\log(d)}-1}{e^{c[N/n_x]n_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}-1} \le \limsup_{c,N\to\infty} \frac{e^{cN(\beta(f)-\varepsilon)+N\log(d)}}{e^{c[N/n_x]n_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}}$$
$$\le \limsup_{c,N\to\infty} \frac{e^{cN(\beta(f)-\varepsilon)+N\log(d)}}{e^{c(N/n_x-1)n_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}} \le \limsup_{c,N\to\infty} \frac{e^{cN(\beta(f)-\varepsilon)+N\log(d)}}{e^{cN(\beta(f)-\varepsilon/2)-cn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)}}$$
$$\le \limsup_{c,N\to\infty} e^{-cN\varepsilon/2+N\log(d)+cn_x(\beta(f)-\varepsilon/2)} = 0,$$

concluindo o desejado. ■

2.4 Princípio dos Grandes Desvios para zeta-medidas

Seguindo [2], dizemos que uma família de probabilidades μ_c satisfaz um **Princípio dos Grandes Desvios** com **função de desvio** I, se para todo cilindro $k \subseteq X$

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{c}\log\mu_c(k) = -\inf_{x\in k} I(x),$$

para alguma função $I \ge 0$ semicontínua inferiormente.

Uma referência para Princípio dos Grandes Desvios em contextos gerais é [10].

Observação: Aqui estaremos considerando famílias de probabilidades que dependem de dois parâmetros c e s. Os resultados que seguem também podem ser interpretados como um Princípio dos Grandes Desvios sobre caminhos $(c, s(c))$, que dependem apenas de um parâmetro c.

Lema 14 *Fixado $L > 0$, para todo cilindro $k \subset X$*

$$\lim_{c\to\infty, s\to 1, c(1-s)\to L} \frac{1}{c}\log(\mu_{c,s}(k)) = -\inf_{x\in k,\, x\in PER} I(x),$$

onde $I(x) = n_x\beta(f) - f^{n_x}(x)$, $\quad x \in PER$.

O mesmo se verifica supondo:

$$\liminf_{c\to\infty,\, s\to 1} c(1-s) = L > 0.$$

Prova: Denotaremos por k um cilindro fixado e também sua função característica. Aplicando o Lema 8 é suficiente mostrarmos que

$$\lim_{c(1-s)\to L} \frac{1}{C} \log \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{csf^n(y)-nP(cf)} \frac{k^n(y)}{n} = -\inf_{x\in k,\, x\in \mathrm{PER}} I(x).$$

Iniciamos mostrando a desigualdade:

$$\liminf_{c(1-s)\to L} \frac{1}{C} \log \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{csf^n-nP(cf)} \frac{k^n}{n} \geq -\inf_{x\in k\,,\, x\in \mathrm{PER}} I(x).$$

(Para esta parte podemos tomar livremente $c \to \infty$ e $s \to 1$.)
Consideramos um ponto qualquer $x \in k$ que pertence a uma órbita periódica $\{x, ..., \sigma^{(n_x-1)}x\}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{csf^n(y)-nP(cf)} \frac{k^n(y)}{n} \quad &\geq \quad \sum_{\{x,...,\sigma^{(n_x-1)}x\}} e^{csf^{n_x}-n_xP(cf)} \frac{k^{n_x}}{n_x} \\
\geq \quad e^{csf^{n_x}(x)-n_xP(cf)} k^{n_x}(x) \quad &\geq \quad e^{csf^{n_x}(x)-n_xP(cf)} \\
= \quad e^{-csI(x)+n_xc(s-1)\beta(f)-n_x\varepsilon_c} \quad &(\text{por} \quad (4), (5), (6)).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{c(1-s)\to L} \frac{1}{C} \log \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{csf^n-nP(cf)} \frac{k^n}{n} \\
&\qquad \geq \quad \liminf_{c(1-s)\to L} \frac{1}{C} \log \left(e^{-csI(x)+n_xc(s-1)\beta(f)-n_x\varepsilon_c}\right) \\
&\qquad \geq \quad \liminf_{c(1-s)\to L} -sI(x) + n_x(s-1)\beta(f) - \frac{n_x\varepsilon_c}{c} \quad = \quad -I(x).
\end{aligned}$$

Como x é um ponto periódico qualquer em k:

$$\liminf_{c(1-s)\to L} \frac{1}{C} \log \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{csf^n-nP(cf)} \frac{k^n}{n} \geq -\inf_{x\in k,\, x\in \mathrm{PER}} I(x).$$

Agora vamos mostrar a segunda desigualdade:

$$\limsup_{c(1-s)\to L} \frac{1}{C} \log \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{csf^n-nP(cf)} \frac{k^n}{n} \leq -\inf_{x\in k,\, x\in \mathrm{PER}} I(x).$$

Para isso vamos denotar $\inf\limits_{x\in k,\, x\in \mathrm{PER}} I(x)$ por I.

Iniciamos fixando um $\delta > 0$. Como $f > 0$ e f é contínua, existe uma constante $|f|_- > 0$ tal que $f > |f|_-$. Como $c(1-s) \to L > 0$ (ou considerando $\liminf c(1-s) = L > 0$) existe $\psi > 0$ tal que para c suficientemente grande, vale $c(1-s) > 2\psi$. Como $\varepsilon_c = P(cf) - c\beta(f)$ decresce para h_f, podemos também supor que c é tal que $\varepsilon_{c\delta} < h_f + \psi|f|_-$. Assim, existe c_0 tal que para $c \geq c_0$

$$c(1-s)|f|_- + h_f > h_f + 2\psi|f|_- > \varepsilon_{c_0\delta} + \psi|f|_-.$$

Então para $c \geq c_0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{csf^n - nP(cf)} \frac{k^n(y)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{cf^n(y)+c(s-1)f^n(y)-cn(\beta(f))-n\varepsilon_c} \frac{k^n(y)}{n}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{-cn\left(\beta(f)-\frac{f^n(y)}{n}\right)-c(1-s)n|f|_- - nh_f} \frac{k^n(y)}{n}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{-cn\left(\beta(f)-\frac{f^n(y)}{n}\right)((1-\delta)+\delta)-c(1-s)n|f|_- - nh_f} \frac{k^n(y)}{n}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{-cI(1-\delta)-cn\left(\beta(f)-\frac{f^n(y)}{n}\right)\delta-c(1-s)n|f|_- - nh_f} \frac{k^n(y)}{n}$$

$$\leq e^{-cI(1-\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{-nc\delta\left(\beta(f)-\frac{f^n(y)}{n}\right)-n\varepsilon_{c_0\delta}-n\psi|f|_-}$$

$$\leq e^{-cI(1-\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{-nc_0\delta\left(\beta(f)-\frac{f^n(y)}{n}\right)-n\varepsilon_{c_0\delta}-n\psi|f|_-}$$

$$\leq e^{-cI(1-\delta)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{c_0\delta f^n(y)-nP(c_0\delta f)-n\psi|f|_-}.$$

Como

$$P\left(c_0\delta f - P(c_0\delta f) - \psi|f|_-\right) = -\psi|f|_- < 0,$$

a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y\in Fix_n} e^{c_0\delta f^n(y)-nP(c_0\delta f)-n\psi|f|_-}$$

converge para uma constante $T < \infty$ (ver observação após o Lema 1). Segue que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{c(1-s)\to L} \left(\frac{1}{c} \log \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y \in Fix_n} e^{csf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} \right) \\
&\quad \leq \limsup_{c(1-s)\to L} \frac{1}{c} \log \left(e^{-cI(1-\delta)} T \right) \quad = \quad -I(1-\delta).
\end{aligned}$$

Agora fazendo $\delta \to 0$, concluímos o desejado. ■

No que segue, queremos mostrar que I pode ser estendida para uma função $\widetilde{I}$ definida em todo o X, não negativa, semicontínua inferiormente e com a propriedade

$$\inf_{x \in PER \cap k} I = \inf_{x \in k} \widetilde{I}.$$

Por definição $\widetilde{I} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é semicontínua inferiormente se para todo $x \in X$ e sequência $x_m \to x$,

$$\liminf_{m\to\infty} \widetilde{I}(x_m) \geq \widetilde{I}(x).$$

Definição 15 *Definimos* $\widetilde{I} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *por*

$$\widetilde{I}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf\{ I(y) : y \in PER, \quad d(y,x) \leq \varepsilon \} \right).$$

Como $I \geq 0$ e

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \Rightarrow \inf\{I(y) : d(y,x) \leq \varepsilon_1\} \geq \inf\{I(y) : d(y,x) \leq \varepsilon_2\},$$

garantimos que $\widetilde{I}$ está bem definida. Vamos inicialmente mostrar que $\widetilde{I}$ estende I, ou seja que as funções coincidem em pontos periódicos.

Lema 16 *Suponhamos* $x \in PER$ *e* $I(x) \neq 0$. *Então*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\inf\{ I(y) : 0 < d(y,x) \leq \varepsilon \} \right) = +\infty.$$

Como uma consequência:

$$I(x) = \widetilde{I}(x), \quad x \in PER.$$

Prova: Suponhamos $x \in PER$ e $I(x) \neq 0$. Fixado j, seja

$$Y_j := \{y \in PER : y \neq x \ \ e \ \ d(x,y) \leq \theta^j\}.$$

É suficiente mostrarmos que

$$\lim_{j\to\infty} \inf_{y\in Y_j} I(y) = +\infty.$$

Seja

$$Y_j^- := \{y \in Y_j : n_y \leq j\} \ \ e \ \ Y_j^+ := \{y \in Y_j : n_y > j\}.$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{j\to\infty} \inf_{y\in Y_j^-} I(y) = \lim_{j\to\infty} \inf_{y\in Y_j^+} I(y) = \infty.$$

Suponhamos inicialmente que $y \in Y_j^-$. Por hipótese $f \in F_\theta$, então existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} f^{n_y}(y) &= f(y) + f(\sigma(y)) + f(\sigma^2(y)) + ... + f(\sigma^{n_y-1}(y)) \\ &\leq (f(x) + C\theta^j) + (f(\sigma(x)) + C\theta^{j-1}) + ... + (f(\sigma^{n_y-1}(x)) + C\theta^{j-n_y+1}) \\ &\leq f^{n_y}(x) + C\frac{\theta}{1-\theta}. \end{aligned}$$

Escrevemos $n_y = a(y)n_x + b(y), \ \ 0 \leq b(y) < n_x$. Então

$$\begin{aligned} I(y) = n_y\beta(f) - f^{n_y}(y) &\geq n_y\beta(f) - f^{n_y}(x) - C\frac{\theta}{1-\theta} \\ &= (a(y)n_x + b(y))\beta(f) - f^{a(y)n_x+b(y)}(x) - C\frac{\theta}{1-\theta} \\ &= a(y)(n_x\beta(f) - f^{n_x}(x)) + b(y)\beta(f) - f^{b(y)}(x) - C\frac{\theta}{1-\theta} \\ &\geq a(y)I(x) - n_x|f|_\infty - C\frac{\theta}{1-\theta} \\ &= a(y)I(x) - C_1, \end{aligned}$$

onde C_1 não muda com y e j. Então

$$\lim_{j\to\infty} \inf_{y\in Y_j^-} I(y) \geq \lim_{j\to\infty} \inf_{y\in Y_j^-} a(y)I(x) - C_1 = \infty,$$

porque

$$\lim_{j \to \infty} \inf\{n_y : y \in Y_j^-\} = \infty.$$

Para o segundo caso, lembramos inicialmente que a matriz A que define o subshift X é irredutível e aperiódica. Seja n_0 tal que todas as entradas de A^{n_0} são positivas.

Suponhamos que $y \in Y_j^+$. Então $n_y = j + i, \quad i > 0$, e podemos escrever

$$y := \overline{y_1 ... y_j y_{j+1} ... y_{j+i}},$$

e definir

$$z := \overline{y_{j+1} ... y_{j+i} z_1 ... z_{n_0}},$$

onde $z_1 ... z_{n_0}$ é uma palavra admissível no subshift, de tamanho n_0, ligando y_{j+i} até y_{j+1}. Então,

$$\begin{aligned} f^i(\sigma^j(y)) &= f(\sigma^j(y)) + f(\sigma^{j+1}(y)) + ... + f(\sigma^{j+i-1}(y)) \\ &\leq (f(z) + C\theta^i) + (f(\sigma(z)) + C\theta^{i-1}) + ... + (f(\sigma^{i-1}(z)) + C\theta) \\ &\leq f^i(z) + C\frac{\theta}{1-\theta}, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} f^j(y) &= f(y) + f(\sigma(y)) + f(\sigma^2(y)) + ... + f(\sigma^{j-1}(y)) \\ &\leq (f(x) + C\theta^j) + (f(\sigma(x)) + C\theta^{j-1}) + ... + (f(\sigma^{j-1}(x)) + C\theta) \\ &\leq f^j(x) + C\frac{\theta}{1-\theta}. \end{aligned}$$

Assim

$$f^{j+i}(y) = f^j(y) + f^i(\sigma^j(y)) \leq f^j(x) + f^i(z) + 2C\frac{\theta}{1-\theta}.$$

Escrevemos $j = a(j)n_x + b(j), \quad 0 \leq b(j) < n_x$. Então

$$\begin{aligned}
I(y) &= (j+i)\beta(f) - f^{j+i}(y) \\
&\geq (j+i)\beta(f) - f^j(x) - f^i(z) - 2C\frac{\theta}{1-\theta} \\
&\geq i\beta(f) - f^i(z) + j\beta(f) - f^j(x) - 2C\frac{\theta}{1-\theta} \\
&\geq I(z) - (n_0\beta(f) + n_0|f|_\infty) + j\beta(f) - f^j(x) - 2C\frac{\theta}{1-\theta} \\
&\geq -(n_0\beta(f) + n_0|f|_\infty) + j\beta(f) - f^j(x) - 2C\frac{\theta}{1-\theta} \\
&\geq (a(j)n_x + b(j))\beta(f) - f^{a(j)n_x+b(j)}(x) - CTE \\
&\geq a(j)n_x\beta(f) - a(j)f^{n_x}(x) - CTE \\
&= a(j)I(x) - CTE,
\end{aligned}$$

onde CTE não muda com y e j. Então, finalmente

$$\lim_{j\to\infty} \inf_{y\in Y_j^+} I(y) \geq \lim_{j\to\infty} a(j)I(x) - CTE = \infty.$$

■

Lema 17 *A função $\widetilde{I} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é não negativa, semicontínua inferiormente e para todo cilindro k*

$$\inf_k \widetilde{I} = \inf_{k\cap PER} I.$$

Prova: Por definição $\widetilde{I} \geq 0$.

Vamos mostrar que $\widetilde{I}$ é semicontínua inferiormente. Para isso, suponhamos que x e $\{x_m\}$ em X são tais que $x_m \to x$. Se $\widetilde{I}(x) = 0$ não há o que provar. Suponhamos $\widetilde{I}(x) > 0$. Seja $\delta > 0$ tal que $\widetilde{I}(x) > \delta$. Por definição de $\widetilde{I}(x)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y \in$ PER com $d(x,y) < \varepsilon$, temos que $I(y) > \delta$. Se $m >> 0$, $d(x_m, x) < \varepsilon/2$. Segue que para $m >> 0$

$$\inf\{I(y) : d(y, x_m) \leq \varepsilon/2\} \geq \inf\{I(y) : d(y,x) \leq \varepsilon\} \geq \delta.$$

Assim, $\widetilde{I}(x_m) \geq \delta$, e então concluímos que $\liminf_{m\to\infty} \widetilde{I}(x_m) \geq \delta$. Como $\delta < \widetilde{I}(x)$ é qualquer, temos que $\liminf_{m\to\infty} \widetilde{I}(x_m) \geq \widetilde{I}(x)$, provando que $\widetilde{I}$ é semicontínua inferiormente.

Agora, fixado um cilindro k, vamos mostrar que:

$$\inf_k \widetilde{I} = \inf_{k\cap \mathrm{PER}} I.$$

Sabemos que para qualquer $y \in k \cap PER$, $\widetilde{I}(y) = I(y)$. Então

$$\inf_k \widetilde{I} \leq \inf_{k\cap PER} \widetilde{I} = \inf_{k\cap PER} I.$$

Resta mostrar que

$$\inf_k \widetilde{I} \geq \inf_{k\cap PER} I.$$

Considere x_m uma sequência de elementos em k tal que $\widetilde{I}(x_m) \to \inf_k \widetilde{I}$. Denotamos por $x \in k$ um ponto de acumulação de $\{x_m\}$. Então, como $\widetilde{I}$ é semicontínua inferiormente

$$\widetilde{I}(x) \leq \liminf_{m\to\infty} \widetilde{I}(x_m),$$

ou seja,

$$\widetilde{I}(x) = \inf_k \widetilde{I}.$$

Por definição de $\widetilde{I}(x)$, existe $\{y_m\}$ em $k\cap$PER tal que $y_m \to x$ e $I(y_m) \to \widetilde{I}(x)$. Segue que

$$\inf_k \widetilde{I} = \widetilde{I}(x) \geq \inf_{k\cap \mathrm{PER}} I.$$

■

Com este lema e com o Lema 14 finalmente concluímos que

Teorema 18 *As probabilidades $\mu_{c,s}$ satisfazem um Princípio dos Grandes Desvios com função de desvio $\widetilde{I}$: Fixado $L > 0$, para todo cilindro $k \subset X$*

$$\lim_{c\to\infty, s\to 1, c(1-s)\to L} \frac{1}{C} \log \mu_{c,s}(k) = -\inf_{x\in k} \widetilde{I}(x),$$

onde $\widetilde{I}$ é semicontínua inferiormente e não negativa.

O mesmo é verdade supondo:

$$\liminf_{c\to\infty,\, s\to 1} c(1-s) = L > 0.$$

Uma questão interessante é o que ocorre quando $c(1-s) \to 0$. Se tomarmos o limite $s \to 1$ e em seguida o limite $c \to 0$, obtemos o Princípio dos Grandes Desvios para as medidas de equilíbrio (devido a Proposição 5). Em [2] é provado, sob a hipótese de unicidade da probabilidade maximizante, que as medidas de equilíbrio satisfazem um Princípio dos Grandes Desvios com um funcional I_{BLT} diferente do obtido acima. De fato, exceto talvez em uma órbita periódica, $I_{BLT}(x) = +\infty$, $(x \in PER)$ (no próximo capítulo, vamos ver isso em detalhes). Assumindo isso momentaneamente obtemos:

Corolário 19 *Suponhamos f admite uma única probabilidade maximizante $\mu_\infty \in M_{max}(f)$. Quando $c \to \infty$,$s \to 1$, $c(1-s) \to L > 0$, as probabilidades $\mu_{c,s}$ satisfazem um Princípio dos Grandes Desvios com funcional de Desvio $\widetilde{I}$ diferente de I_{BLT}. Existe um cilindro k tal que*

$$\inf_{x\in k} \widetilde{I} < \inf_{x\in k} I_{BLT}.$$

Prova:

Seja $x \in PER$, $x = x_1x_2...$ tal que $I_{BLT}(x) = \infty$, e para cada m consideramos o cilindro $k_m = [x_1...x_m]$. Temos

$$\widetilde{I}(x) = I(x) < \infty \quad \text{e} \quad I_{BLT}(x) = \infty.$$

Como para cada m

$$\inf_{k_m} \widetilde{I} \leq \widetilde{I}(x),$$

basta provar a seguinte:

Afirmação: existe m tal que $\inf_{k_m} I_{BLT} > \widetilde{I}(x)$.

Para isso, por contradição, suponhamos que para todo m, temos $\inf_{k_m} I_{BLT} \leq \widetilde{I}(x)$. Para cada m seja $y_m \in (k_m)$ realizando $\inf_{k_m} I_{BLT}$. Claramente $y_m \to x$, e por hipótese

$$\liminf_{m\to\infty} I_{BLT}(y_m) \leq \widetilde{I}(x) < I_{BLT}(x),$$

contrariando o fato de I_{BLT} ser semicontínua inferiormente. ■

Podemos nos perguntar o que ocorre quando $c \to \infty$, $s \to 1$ e $c(1-s) \to 0$. Iniciamos observando que se a maximizante de f é única

$$\lim_{c\to\infty} \lim_{s\to 1} \frac{1}{c} \log(\mu_{c,s}(k)) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} \log(\mu_c(k)) = -\inf_{x\in k} I_{BLT}(x).$$

Temos ainda a seguinte

Proposição 20 *Suponhamos unicidade de $\mu_\infty \in M_{max}(f)$. Existe uma aplicação $c \to s_c$ tal que $s_c \stackrel{c\to\infty}{\to} 1$, $c(1-s_c) \stackrel{c\to\infty}{\to} 0$ e para todo cilindro*

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} \log(\mu_{c,s_c}(k)) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} \log(\mu_{c\,f}(k)) = -\inf_{x\in k} I_{BLT}(x).$$

O mesmo vale para aplicações $c \to s'_c$ satisfazendo $s_c \leq s'_c < 1 \ \ \forall c >> 0$.

Prova: Seja $k_1, k_2, ...$ uma enumeração de todos os cilindros. Fixamos inicialmente um cilindro k_i desta lista.

Fixado c, sabemos pela proposição 5 que $\mu_{c,s}(k_i) \to \mu_{cf}(k_i)$ quando $s \to 1$. Como μ_{cf} é Gibbs (ver [18]) temos $\mu_{cf}(k_i) > 0$. Logo existe s_c^i tal que para $1 > s \geq s_c^i$

$$\frac{1}{2}\mu_{cf}(k_i) \leq \mu_{c,s}(k_i) \leq 2\mu_{cf}(k_i).$$

Concluímos que para qualquer aplicação $c \to z_c^i$ tal que $1 > z_c^i > s_c^i \ \ \forall c >> 0$,

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} \log(\mu_{c,z_c^i}(k_i)) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} \log(\mu_{cf}(k_i)) = -\inf_{x\in k_i} I_{BLT}(x).$$

Este argumento foi para k_i fixado. Para cada k_i temos uma associação $c \to s_c^i$ como acima. Tomamos agora a associação $c \to z_c$, onde para cada inteiro $n > 0$:

$$c \in [n, n+1) \Rightarrow z_c = \sup_{i \in \{1,\ldots,n\}} s_c^i < 1.$$

Por fim tomamos a associação $c \to s_c$ onde $s_c := \max\{z_c, 1 - \frac{1}{c^2}\}$. Então $s_c \overset{c\to\infty}{\to} 1$ e $c(1 - s_c) \overset{c\to\infty}{\to} 0$. Além disso, para cada cilindro k_i temos que $c > i \Rightarrow s_c^i < s_c$, logo para todo cilindro k_i

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} \log(\mu_{c,s_c}(k_i)) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} \log(\mu_c(k_i)) = -\inf_{x\in k_i} I_{BLT}(x).$$

Claramente o mesmo vale para qualquer aplicação $c \to s'_c$ tal que $s_c \leq s'_c < 1\ \ \forall c >> 0$. ■

Destes fatos podemos concluir que no caso $c(1-s) \to 0$, é complicado fazer um estudo completo do Princípio dos Grandes Desvios. De fato:

Corolário 21 *Suponhamos a unicidade de $\mu_\infty \in M_{max}(f)$. Seja k um cilindro satisfazendo*

$$\inf_{x\in k} \widetilde{I} < \inf_{x\in k} I_{BLT}.$$

Seja A um real entre os valores acima. Então existem $c_j \to \infty$, $s_j \to 1$ satisfazendo

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{c_j} \log(\mu_{c_j,s_j}(k)) = -A.$$

Prova: Por (1) (prova da Proposição 5) $\mu_{c,s}(k)$ é contínua como função de c, s. Então

$$\frac{1}{c} \log(\mu_{c,s}(k))$$

depende continuamente de c, s. Sejam A_1 e A_2 satisfazendo:

$$-\inf_{x\in k} I_{BLT} < A_1 < -A < A_2 < -\inf_{x\in k} \widetilde{I}.$$

Tomamos $c_j := j$. Pela Proposição 20 existe j_0 e sequência $s_j^* \to 1$ tal que para $j > j_0$

$$\frac{1}{c_j} \log(\mu_{c_j, s_j^*}(k)) < A_1.$$

Da mesma forma, pelo Teorema 18, existe j_1 e sequência $s_j^{**} \to 1$ tal que para $j > j_1$

$$\frac{1}{c_j} \log(\mu_{c_j, s_j^{**}}(k)) > A_2.$$

Da continuidade em s obtemos para cada $j > max\{j_1, j_2\}$ um s_j entre s_j^* e s_j^{**} (logo $s_j \to 1$) tal que

$$\frac{1}{c_j} \log(\mu_{c_j, s_j}(k)) = -A.$$

Então claramente

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{c_j} \log(\mu_{c_j, s_j}(k)) = -A.$$

■

Podemos nos perguntar o que ocorre com as zeta-medidas $\pi_{c,N}$ e $\eta_{c,N}$ com relação ao Princípio dos Grandes Desvios. Quanto a $\pi_{c,N}$ podemos ainda mostrar

Proposição 22 *Para todo cilindro $k \subset X$*

$$\lim_{c,N \to \infty, \frac{N}{c} \to 0} \frac{1}{c} \log(\pi_{c,N}(k)) = - \inf_{x \in k, x \in PER} I(x) = - \inf_{x \in k} \widetilde{I}(x).$$

Prova: Vamos repetir as ideias usadas na prova do Lema 14. É suficiente mostrarmos que

$$\lim_{N/c \to 0} \frac{1}{c} \log \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} \right) = - \inf_{x \in k, x \in \text{PER}} I(x).$$

Iniciamos mostrando que

$$\liminf_{N/c \to 0} \frac{1}{c} \log \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} \right) \geq - \inf_{x \in k, x \in \text{PER}} I(x).$$

Fixamos um ponto periódico $x \in k$ pertencendo a uma órbita $\{x, ..., \sigma^{n_x - 1}x\}$. Para $N >> 1$ temos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} &\geq \sum_{\{x,...,\sigma^{(n_x-1)}x\}} e^{cf^{n_x} - n_x P(cf)} \frac{k^{n_x}}{n_x} \\ &= e^{cf^{n_x}(x) - n_x P(cf)} k^{n_x}(x) \\ &\geq e^{cf^{n_x}(x) - n_x P(cf)} \\ &= e^{-cI(x) - n_x \varepsilon_c}.\end{aligned}$$

Daí

$$\liminf_{c,N\to\infty} \frac{1}{c} \log \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} \right) \geq -I(x).$$

Agora vamos mostrar que

$$\limsup_{c,N\to\infty, N/c\to 0} \frac{1}{c} \log \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} \right) \leq - \inf_{x\in k,\, x\in \mathrm{PER}} I(x).$$

Denotamos $\inf_{x\in k,\, x\in \mathrm{PER}} I(x)$ por I. Então:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{-cn\left(\beta(f) - \frac{f^n}{n}\right) - n\varepsilon_c} \frac{k^n}{n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{-cI - n\varepsilon_c} \frac{k^n}{n} \leq \sum_{n=1}^{N} e^{-cI - n\varepsilon_c + n\log(d)} \leq e^{-cI} N e^{-\varepsilon_c + N\log(d)}.\end{aligned}$$

Segue que

$$\limsup_{N/c\to 0} \frac{1}{c} \log \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{x \in Fix_n} e^{cf^n - nP(cf)} \frac{k^n}{n} \right) \leq -I,$$

concluindo a prova. ■

Vamos fazer uma última observação sobre a função $\widetilde{I}$: como vimos, $\widetilde{I}(x) < +\infty$ para $x \in PER$. Podemos afirmar que $\widetilde{I}$ é sempre finita? Segue abaixo um contra-exemplo:

Consideramos $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $f \in F_\theta$ positiva. Denotamos $0^\infty := 0000...$, a sequência formada por zeros. Suponhamos $I(0^\infty) := \beta(f) - f(0^\infty) > 0$. Seja n_j uma sequencia crescente tal que $S_j := (n_1 + ... + n_j) + j$ satisfaz $\frac{S_j}{n_{j+1}} \to 0$. Defina

$$y = 1\,\underbrace{0...0}_{n_1}\,1\,\underbrace{0...0}_{n_2}\,1\,\underbrace{0...0}_{n_3}\,1\,...$$

Afirmação:

$$\widetilde{I}(y) = +\infty.$$

Prova: Seja $x \in PER$ tal que $d(x,y) < \theta^{S_j}$. Observamos que pela construção de y é garantido que $n_x \geq S_j$. Escrevemos $n_x = S_j + a$. Seja z a órbita periódica de tamanho a que coincide com $\sigma^{S_j}(x)$ em a letras. Temos:

$$\begin{aligned} f^{n_x}(x) = f^{S_j}(x) + f^a(\sigma^{S_j}(x)) &\leq f^{S_j}(x) + f^a(z) + \frac{1}{1-\theta}|f|_\theta \\ &\leq (S_{j-1}+1)|f|_\infty + f^{n_j}(\sigma^{S_{j-1}+1}(x)) + f^a(z) + \frac{1}{1-\theta}|f|_\theta \\ &\leq (S_{j-1}+1)|f|_\infty + f^{n_j}(0^\infty) + f^a(z) + \frac{2}{1-\theta}|f|_\theta. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} I(x) &= n_x\beta(f) - f^{n_x}(x) \\ &\geq (S_{j-1}+1+n_j+a)\beta(f) - (S_{j-1}+1)|f|_\infty - f^{n_j}(0^\infty) - f^a(z) - \frac{2}{1-\theta}|f|_\theta \\ &= (S_{j-1}+1)(\beta(f) - |f|_\infty) + n_j(\beta(f) - f(0^\infty)) + I(z) - \frac{2}{1-\theta}|f|_\theta \\ &\geq n_j\left(\frac{(S_{j-1}+1)(\beta(f)-|f|_\infty)}{n_j} + (\beta(f) - f(0^\infty)) - \frac{2|f|_\theta}{(1-\theta)n_j}\right). \end{aligned}$$

Como isso vale para todo $x \in PER$ tal que $d(x,y) < \theta^{S_j}$, temos:

$$\begin{aligned} \widetilde{I}(x) &:= \lim_{j\to\infty} \inf\{I(x) : x \in PER\,,\ d(x,y) < \theta^{S_j}\} \\ &\geq \lim_{j\to\infty} n_j\left(\frac{(S_{j-1}+1)(\beta(f)-|f|_\infty)}{n_j} + (\beta(f) - f(0^\infty)) - \frac{2|f|_\theta}{(1-\theta)n_j}\right) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

■

2.5 O caso $f_\lambda \to f$ uniformemente

Nas seções anteriores, mostramos formas de aproximar o equilíbrio e a probabilidade maximizante por expressões aparentemente "mais simples", por envolver somas em órbitas periódicas. Um problema que podemos encontrar é a estimativa da pressão que aparece em algumas zeta-medidas. Uma outra questão para análise é a tentativa de aproximar f por funções mais simples. Em aplicações muitas vezes é útil considerar aproximações e analisar se as propriedades fundamentais passam ao limite. Vamos explorar um pouco mais esta ideia nesta seção.

Nesta seção tomamos uma família de funções $f_\lambda > 0$ em F_θ.

Proposição 23 *Suponhamos que f_λ converge a f em norma lipschitz. Então $\mu_{f_\lambda} \to \mu_f$ na topologia Fraca*.*

Prova: A função $P : F_\theta \to R$ é analítica[3] (ver cap. 4 e apêndice V em [18]). Segue que, para $k \in F_\theta$

$$\frac{dP(f+zk)}{dz} = \mu_f(k)$$

é contínua em f. Então

$$\mu_{f_\lambda}(k) = \frac{\partial P(f_\lambda + zk)}{\partial z} \to \frac{\partial P(f+zk)}{\partial z} = \mu_f(k).$$

Por fim, se k é uma função contínua, tomando aproximações por funções lipschitz obtemos o desejado (ver final da prova do Lema 5). $\blacksquare$

Podemos tomar aproximações de f quando utilizamos zeta-medidas para aproximar a probabilidade maximizante, como vemos abaixo:

[3]Seja V um espaço de Banach complexo. $\phi : \mathbb{C} \to V$ é analítica se $\psi \circ \phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é analítica para todo funcional linear limitado $\psi : V \to \mathbb{C}$. $\eta : V \to \mathbb{C}$ é analítica se $\eta \circ \phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é analítica para toda $\phi : \mathbb{C} \to V$ analítica.

Lema 24 *Fixadas f, $f_\lambda \in F_\theta$ com $f_\lambda \overset{\lambda\to\infty}{\to} f$ uniformemente, definimos*

$$\pi_{c,N,f_\lambda}(k) := \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in Fix_n} e^{c\,f_\lambda^n(x)-nP(cf_\lambda)}\frac{k^n(x)}{n}}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in Fix_n} e^{c\,f_\lambda^n(x)-nP(cf_\lambda)}}.$$

Quando $\lambda, c, N \to \infty$, todo ponto de acumulação de π_{c,N,f_λ} na topologia Fraca está em $M_{max}(f)$.*

Prova:

Vamos usar as mesmas ideias da prova do Teorema 49 . Em particular, fixamos $\varepsilon > 0$ e definimos

$$A_n = \{x \in Fix_n : \frac{f^n(x)}{n} < \beta(f) - \varepsilon\},$$

$$B_n = \{x \in Fix_n : \frac{f^n(x)}{n} \geq \beta(f) - \varepsilon\}.$$

Queremos mostrar que

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in A_n} e^{cf_\lambda^n - nP(cf_\lambda)}}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in B_n} e^{cf_\lambda^n - nP(cf_\lambda)}} \overset{c,N,\lambda\to\infty}{\to} 0.$$

Para isso, inicialmente observamos que podemos escrever $f_\lambda = f + g_\lambda$ com $|g_\lambda|_\infty \to 0$. Segue que

$$f - |g_\lambda|_\infty \leq f_\lambda \leq f + |g_\lambda|_\infty, \qquad |g_\lambda|_\infty \to 0.$$

Logo é suficiente mostrar que

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in A_n} e^{cf^n - nP(cf) + 2cn|g_\lambda|_\infty}}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in B_n} e^{cf^n - nP(cf) - 2cn|g_\lambda|_\infty}} \overset{c,N,\lambda\to\infty}{\to} 0.$$

Lembramos que $P(cf) = c\beta(f) + \varepsilon_c$, onde $\varepsilon_c \to h_f$. Iniciamos com uma estimativa para A_n: Para $c, \lambda >> 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in A_n} e^{cf^n - nP(cf)+2cn|g_\lambda|_\infty} &\leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in A_n} e^{cn(\beta(f)-\varepsilon)-nc\beta(f)-n\varepsilon_c+2cn|g_\lambda|_\infty}\\
&\leq \sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in A_n} e^{-cn\varepsilon-n\varepsilon_c+2cn|g_\lambda|_\infty}\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-cn\varepsilon+n\log(d)+2cn|g_\lambda|_\infty}\\
&= \frac{e^{-c\varepsilon+2c|g_\lambda|_\infty+\log(d)}}{1-e^{-c\varepsilon+2c|g_\lambda|_\infty+\log(d)}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, existe um ponto periódico x de período n_x tal que:

$$n_x\left(\beta(f)-\frac{f^{n_x}(x)}{n_x}\right) < \varepsilon/2.$$

Assim, para $N >> 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in B_n} e^{cf^n - nP(cf)-2cn|g_\lambda|_\infty} &\geq e^{cf^{n_x}(x)-n_xP(cf)-2cn_x|g_\lambda|_\infty}\\
&\geq e^{c(n_x\beta(f)-\varepsilon/2)-cn_x\beta(f)-n_x\varepsilon_c-2cn_x|g_\lambda|_\infty}\\
&\geq e^{-c\varepsilon/2-n_x\varepsilon_c-2cn_x|g_\lambda|_\infty}.
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in A_n} e^{cf^n-nP(cf)+2cn|g_\lambda|_\infty}}{\sum_{n=1}^{N}\sum_{x\in B_n} e^{cf^n-nP(cf)-cn|g_\lambda|_\infty}} \leq \frac{e^{-c\varepsilon+2c|g_\lambda|_\infty+\log(d)}}{1-e^{-c\varepsilon+2c|g_\lambda|_\infty+\log(d)}}\frac{1}{e^{-c\varepsilon/2-n_x\varepsilon_c-2cn_x|g_\lambda|_\infty}}$$
$$\leq \frac{e^{-c\varepsilon+2c|g_\lambda|_\infty+\log(d)}}{e^{-c\varepsilon/2-n_x\varepsilon_c-2cn_x|g_\lambda|_\infty}}\frac{1}{1-e^{-c\varepsilon+2c|g_\lambda|_\infty+\log(d)}} \overset{c,N,\lambda\to\infty}{\to} 0.$$

■

Corolário 25 *Se* $f_\lambda \overset{\lambda\to\infty}{\to} f$ ***uniformemente****, então quando* $\lambda, c \to \infty$*, todo ponto de acumulação de* μ_{cf_λ} *na topologia Fraca* está em* $M_{max}(f)$*.*

Observação: Podemos utilizar argumentos análogos no estudo das zeta-medidas $\mu_{c,s}$ e $\eta_{c,s}$.

Cabe ainda a pergunta: Se $\mu_{cf} \to \nu$ quando $c \to \infty$, ocorre que $\mu_{cf_\lambda} \to \nu$ quando $c, \lambda \to \infty$?
A resposta é negativa, como pode ser observado em [3].

3 O Operador de Ruelle

3.1 Construindo sub-ações calibradas

A prova do próximo Teorema pode ser encontrada no capítulo 2 em [18].

Teorema 26 *(Ruelle - Perron - Frobenius):*
Dado um potencial $f \in F_\theta$, o Operador de Ruelle $L_f : C(X) \to C(X)$ definido por

$$L_f(k)(x) = \sum_{\sigma(y)=x} e^{f(y)} k(y)$$

possui um autovalor maximal $\beta > 0$ associado a uma autofunção $h > 0$ em F_θ. O resto do espectro de $L_f : F_\theta \to F_\theta$ está contido em um disco de raio menor que β (Isso não vale para o espectro de $L_f : C(X) \to C(X)$, ver cap. 10 em [18]).
Além disso existe uma única probabilidade (que chamamos a medida de Gibbs de f) ν tal que para toda função contínua k, $\nu(L_f(k)) = \beta\nu(k)$. Se "normalizarmos" h por $\nu(h) = 1$ (vamos sempre considerar esta situação) temos também que para qualquer k contínua

$$\frac{1}{\beta^n} L_f^n(k)(x) \overset{n\to\infty}{\to} h(x)\nu(k)$$

uniformemente.

Além disso, o potencial $g := f + \log(h) - \log(h \circ \sigma) - \log(\beta)$ (a normalizada de f) possui o autovalor maximal 1, associado a autofunção constante igual a 1. O Gibbs de g é dado por μ onde $\mu(k) = \nu(h.k)$. μ é uma probabilidade invariante e o equilíbrio de f e g.

Além disso: para qualquer ponto $x \in X$

$$L_g^n(k)(x) \overset{n\to\infty}{\to} \mu(k).$$

Concluímos então que fixado qualquer ponto $x \in X$, a sequência de probabilidades

$$L_g^n(.)(x)$$

converge (quando $n \to \infty$) para o equilíbrio de f na topologia Fraca*.

Consideramos uma família de funções $f_\lambda \in F_\theta$ convergindo a f (quando $\lambda \to \infty$) na norma lipschitz. Para cada c, consideramos o potencial cf_λ. Sejam $\beta_{c,\lambda}$, $h_{c,\lambda}$, $\nu_{c,\lambda}$, $g_{c,\lambda}$, $\mu_{c,\lambda}$ definidas como acima. Estamos interessados em entender o que acontece com os elementos da equação

$$g_{c,\lambda} = cf_\lambda + \log(h_{c,\lambda}) - \log(h_{c,\lambda} \circ \sigma) - \log(\beta_{c,\lambda})$$

quando $c, \lambda \to \infty$.

Vamos seguir as ideias da Proposição 29 de [8]. No entanto nosso potencial não estará fixado, ou seja vamos trabalhar com $f_\lambda \to f$ em $\|\|_\theta$. Além disso aqui estamos trabalhando com um subshift, diferentemente de [8]. Em um subshift, dois pontos $x, y \in X$ podem ter um número diferente de pré-imagens, quando $d(x, y) = 1$. Vamos fazer as devidas modificações da prova original, para contemplar o caso do subshift. Além disso vamos apresentar mais detalhes da prova.

Definição 27 *$V \in F_\theta$ é chamada uma **sub-ação calibrada** para f se satisfaz:*

1) $R_f := f + V - V \circ \sigma - \beta(f) \leq 0$.

2) para todo $z \in X$ existe $y \in \sigma^{-1}(z)$ tal que $R_f(y) = 0$.

Observação: Tradicionalmente, os sinais na definição de R_f são contrários e $R_f \geq 0$. Aqui sempre vamos considerar $R_f \leq 0$ dada pela definição acima.

Lema 28 *Defina* $V_{c,\lambda} := \frac{1}{c}\log h_{c,\lambda}$. *Então existe uma constante* $M > 0$, *tal que para* $c, \lambda >> 0$, $V_{c,\lambda}$ *estão contidos no conjunto*

$$K := \{v \in F_\theta : |v|_\infty \leq M \quad e \quad |v|_\theta \leq M\}$$

que é fechado, convexo e sequencialmente compacto para a topologia da convergência uniforme.
Além disso, todo ponto de acumulação de $V_{c,\lambda}$ *na topologia da convergência uniforme define uma sub-ação calibrada para* f.

Prova: Definimos $L_{c,\lambda}$ o operador de Ruelle sobre $cf_\lambda - \log(\beta_{c,\lambda})$. Como X é um subshift do tipo finito dado por uma matriz A irredutível e aperiódica, existe n_0 tal que (A^{n_0}) possui todas as entradas positivas.

Seja $C_{c,\lambda}$ o conjunto das funções $h \in C(X)$ satisfazendo:
1) $\int h\, d\nu_{c,\lambda} = 1$,
2) Para quaisquer $x, y \in X$ com $d(x, y) < 1$:

$$h(x) \leq h(y)e^{c|f_\lambda|_\theta \frac{\theta}{1-\theta} d(x,y)}$$

3) Para quaisquer $x, y \in X$ com $d(x, y) = 1$:

$$h(x) \leq h(y)e^{(n_0-1)\log d + 2(n_0-1)c|f_\lambda|_\infty + c|f_\lambda|_\theta \frac{\theta}{1-\theta}}.$$

Denotamos por $a_{c,\lambda} := (n_0 - 1)\log d + 2(n_0 - 1)c|f_\lambda|_\infty + c|f_\lambda|_\theta \frac{\theta}{1-\theta}$.

Afirmação 1: Se $h \in C_{c,\lambda}$ então $e^{-a_{c,\lambda}} \leq h \leq e^{a_{c,\lambda}}$.

De fato:
Fixado $\varepsilon > 0$, como $\int h\, d\nu_{c,\lambda} = 1$, existe $x \in X$ tal que $h(x) > 1 - \varepsilon$. Seja $y \in X$ tal que $d(x, y) < 1$. Então

$$(1 - \varepsilon) < h(x) \leq h(y)e^{c|f_\lambda|_\theta \frac{\theta}{1-\theta} d(x,y)} \leq h(y)e^{c|f_\lambda|_\theta \frac{\theta}{1-\theta}} \leq h(y)e^{a_{c,\lambda}}.$$

O mesmo para o caso $d(x,y) = 1$. Segue que para todo $y \in X$:

$$h(y) > (1 - \varepsilon)e^{-a_{c,\lambda}}.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ concluímos a primeira desigualdade. A segunda segue argumentos análogos.

Afirmação 2: $C_{c,\lambda}$ é fechado na topologia da convergência uniforme.
De fato: Seja $h_n \to h$ uniformemente com $h_n \in C_{c,\lambda}$.
1) Dado ε existe n tal que $h_n - \varepsilon < h < h_n + \varepsilon$. Então $1 - \varepsilon < \int h \, d\nu_{c,\lambda} < 1 + \varepsilon$.
Logo $\int h \, d\nu_{c,\lambda} = 1$.
2) Se $d(x,y) < 1$ então

$$h(x) = \lim h_n(x) \leq \lim h_n(y) e^{c|f_\lambda|_\theta \frac{\theta}{1-\theta} d(x,y)} = h(y) e^{c|f_\lambda|_\theta \frac{\theta}{1-\theta} d(x,y)}.$$

3) é análoga.

Afirmação 3: $L_{c,\lambda}^{n_0}(C_{c,\lambda}) \subseteq C_{c,\lambda}$.
De fato, fixada $h \in C_{c,\lambda}$:
1)
Como $\nu_{c,\lambda}$ é o Gibbs de cf_λ, pelo Teorema 26 temos

$$\int L_{c,\lambda} h \, d\nu_{c,\lambda} = \int h \, d\nu_{c,\lambda} = 1.$$

O mesmo vale para $L_{c,\lambda}^{n_0}$.
2)
Para $x, y \in X$, com $d(x,y) < 1$ temos uma correspondência biunívoca entre $\sigma^{-n_0}(x)$ e $\sigma^{-n_0}(y)$, tal que dois pontos z e z' associados iniciam pelas mesmas

n_0 letras. Usando isso temos:

$$\begin{aligned}
L_{c,\lambda}^{n_0}h(x) &= \sum_{\sigma^{n_0}(z)=x} e^{cf_\lambda^{n_0}(z)-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(z)\\
&\leq \sum_{\sigma^{n_0}(z')=y} e^{cf_\lambda^{n_0}(z')+c|f_\lambda|_\theta(\theta^{n_0}+...+\theta)d(x,y)-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(z')e^{c|f_\lambda|_\theta\frac{\theta}{1-\theta}(\theta^{n_0}d(x,y))}\\
&= \sum_{\sigma^{n_0}(z')=y} e^{cf_\lambda^{n_0}(z')-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(z')e^{c|f_\lambda|_\theta(\frac{\theta(1-\theta^{n_0})}{1-\theta})d(x,y)}e^{c|f_\lambda|_\theta\frac{\theta}{1-\theta}(\theta^{n_0}d(x,y))}\\
&= (L_{c,\lambda}^{n_0}(h)(y))e^{c|f_\lambda|_\theta d(x,y)\left(\frac{\theta(1-\theta^{n_0})}{1-\theta}+\frac{\theta^{n_0+1}}{1-\theta}\right)}\\
&= (L_{c,\lambda}^{n_0}(h)(y))e^{c|f_\lambda|_\theta d(x,y)\frac{\theta}{1-\theta}}.
\end{aligned}$$

3)

Sejam $x, y \in X$, com $d(x,y) = 1$. Por I_i denotamos uma palavra de tamanho $n_0 - 1$ ligando i a x. Por J_i denotamos uma palavra de tamanho $n_0 - 1$ ligando i a y. Por $(i...)$ denotamos qualquer ponto de X iniciando por i. Temos:

$$L_{c,\lambda}^{n_0}h(x) = \sum_{\sigma^{n_0}(z)=x} e^{cf_\lambda^{n_0}(z)-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(z)$$

$$= \sum_{i=1}^{d}\sum_{I_i} e^{cf_\lambda^{n_0}(iI_ix)-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(iI_ix)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{d}\sum_{I_i} e^{cf_\lambda(iI_ix)+(n_0-1)c|f_\lambda|_\infty-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(iI_ix)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{d} d^{n_0-1}e^{cf_\lambda(i...)+\theta c|f_\lambda|_\theta+(n_0-1)c|f_\lambda|_\infty-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(i...)e^{c|f_\lambda|_\theta\frac{\theta^2}{1-\theta}}$$

$$\leq e^{(n_0-1)\log d+\theta c|f_\lambda|_\theta+(n_0-1)c|f_\lambda|_\infty+c|f_\lambda|_\theta\frac{\theta^2}{1-\theta}}\sum_{i=1}^{d} e^{cf_\lambda(i...)-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(i...)$$

$$= e^{a_{c,\lambda}-(n_0-1)c|f_\lambda|_\infty}\sum_{i=1}^{d} e^{cf_\lambda(i...)-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(i...)$$

$$\leq e^{a_{c,\lambda}-(n_0-1)c|f_\lambda|_\infty}\sum_{i=1}^{d}\sum_{J_i}e^{cf_\lambda(iJ_iy)-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(iJ_iy)$$

$$\leq e^{a_{c,\lambda}}\sum_{i=1}^{d}\sum_{J_i}e^{cf_\lambda^{n_0}(iJ_iy)-n_0\log(\beta_{c,\lambda})}h(iJ_iy)$$

$$= L_{c,\lambda}^{n_0}h(y)e^{a_{c,\lambda}}.$$

Afirmação 4: A autofunção $h_{c,\lambda}$ de cf_λ está em $C_{c,\lambda}$.

De fato, a função constante 1 está em $C_{c,\lambda}$. Pela Afirmação 3, para cada n temos que $L_{c,\lambda}^{nn_0}1$ está em $C_{c\lambda}$. Pelo Teorema 26 temos que $L_{c,\lambda}^{nn_0}1 \to h_{c,\lambda}$. Pela Afirmação 2, concluímos o desejado.

Definimos $V_{c,\lambda} := \frac{1}{c}\log h_{c,\lambda}$.

Afirmação 5: Para $c, \lambda >> 0$, existe $M > 0$ tal que os $V_{c,\lambda}$ estão contidos no conjunto

$$K := \{v \in F_\theta : |v|_\infty, |v|_\theta \leq M\}.$$

De fato:

Usando as Afirmações 1 e 4 temos:

$$V_{c,\lambda} \geq \frac{1}{c}\log e^{-a_{c,\lambda}} = -\left(\frac{(n_0-1)\log d}{c} + 2(n_0-1)|f_\lambda|_\infty + |f_\lambda|_\theta\frac{\theta}{1-\theta}\right).$$

Então, como $f_\lambda \to f$ em $\|\|_\theta$, dado $\varepsilon > 0$, para $c, \lambda >> 0$

$$V_{c,\lambda} \geq -\left(2(n_0-1)|f|_\infty + |f|_\theta\frac{\theta}{1-\theta}\right) - \varepsilon = CTE.$$

Usando a segunda desigualdade da Afirmação 1 obtemos também

$$V_{c,\lambda} \leq \left(\frac{(n_0-1)\log d}{c} + 2(n_0-1)|f_\lambda|_\infty + |f_\lambda|_\theta\frac{\theta}{1-\theta}\right).$$

Daí para $c, \lambda >> 0$

$$V_{c,\lambda} \leq CTE.$$

Sejam $x, y \in X$. Se $d(x,y) < 1$:

$$V_{c,\lambda}(x) = \frac{1}{c}\log h_{c,\lambda}(x) \leq \frac{1}{c}\log(h_{c,\lambda}(y)e^{c|f_\lambda|_\theta \frac{\theta}{1-\theta}d(x,y)}) = V_{c,\lambda}(y) + |f_\lambda|_\theta \frac{\theta}{1-\theta}d(x,y),$$

logo, se $c, \lambda >> 0$

$$\frac{|V_{c,\lambda}(x) - V_{c,\lambda}(y)|}{d(x,y)} \leq |f_\lambda|_\theta \frac{\theta}{1-\theta} = CTE.$$

Analogamente, se $d(x,y) = 1$ e $c, \lambda >> 0$ então

$$\frac{|V_{c,\lambda}(x) - V_{c,\lambda}(y)|}{d(x,y)} = |V_{c,\lambda}(x) - V_{c,\lambda}(y)| \leq CTE.$$

Tomando M maior que as constantes acima, obtemos o desejado.

Afirmação 6: K é fechado, convexo e sequencialmente compacto para a topologia da convergência uniforme.

De fato, ser fechado e convexo são verificações imediatas. Ser sequencialmente compacto é consequência do Teorema de Arzela-Ascoli[4].

Afirmação 7: Todo ponto de acumulação de $V_{c,\lambda}$ na topologia da convergência uniforme define uma sub-ação calibrada para f.

De fato, iniciamos definindo a normalizada

$$g_{c,\lambda} := cf_\lambda + \log h_{c,\lambda} - \log(h_{c,\lambda} \circ \sigma) - \log \beta_{c,\lambda}.$$

Lembramos que $L_{g_{c,\lambda}} 1 = 1$ e então $g_{c,\lambda} \leq 0$. Além disso para todo $x \in X$

$$\sum_{\sigma(y)=x} e^{g_{c,\lambda}(y)} = 1.$$

[4]Se $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma família de funções satisfazendo:

i. para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon, \forall n$

ii. $|f_n|_\infty \leq CTE$,

então f_n possui uma subsequência que converge uniformemente.

Segue que para pelo menos um y temos $\log(1/d) \leq g_{c,\lambda}(y) \leq 0$.

Seja V um ponto de acumulação de $V_{c,\lambda}$ na topologia da convergência uniforme. Então, $V \in F_\theta$, e existe sequência c_j, λ_j tal que

$$\frac{1}{c_j} \log h_{c_j,\lambda_j} \to V.$$

Como

$$\frac{1}{c} P(cf) - |f - f_\lambda|_\infty \leq \frac{1}{c} P(cf_\lambda) \leq \frac{1}{c} P(cf) + |f - f_\lambda|_\infty,$$

garantimos que

$$\frac{1}{c_j} \log \beta_{c_j,\lambda_j} \to \beta(f).$$

Então $\frac{1}{c_j} g_{c_j,\lambda_j} \to R$ satisfazendo:

$$R = f + V - V \circ \sigma - \beta(f).$$

Claramente $R \leq 0$. Resta mostrar que dado $x \in X$ existe $y \in \sigma^{-1}(x)$ tal que $R(y) = 0$.

Pelo que vimos acima, para cada j existe um $y_j \in \sigma^{-1}(x)$ tal que $\frac{\log(1/d)}{c_j} \leq \frac{g_{c_j,\lambda_j}(y_j)}{c_j} \leq 0$. Como $\sigma^{-1}(x)$ é finito, algum y aparece infinitas vezes como y_j. Então para uma subsequência j_i temos $\frac{\log(1/d)}{c_{j_i}} \leq \frac{g_{c_{j_i},\lambda_{j_i}}(y)}{c_{j_i}} \leq 0$. Segue que

$$R(y) = \lim_{j \to \infty} \frac{g_{c_j,\lambda_j}(y)}{c_j} = \lim_{j_i \to \infty} \frac{g_{c_{j_i},\lambda_{j_i}}(y)}{c_{j_i}} = 0.$$

■

3.2 Aproximando a probabilidade maximizante usando o Operador de Ruelle

Dada uma família $f_\lambda \in F_\theta$, definimos, como no início da seção anterior, $\beta_{c,\lambda}$, $h_{c,\lambda}$, $\nu_{c,\lambda}$, $g_{c,\lambda}$, e $\mu_{c,\lambda}$ para cf_λ.

Pelo que vimos no início da seção anterior, dados $f_\lambda \in F_\theta$, para cada c fixado temos que: fixado qualquer ponto $x \in X$, a sequência de probabilidades

$$L^n_{g_{c,\lambda}}(.)(x)$$

converge (quando $n \to \infty$) para o equilíbrio de cf_λ na topologia Fraca*.

Teorema 29 *Fixamos $f, f_\lambda \in F_\theta$, com $\|f_\lambda - f\|_\theta \to 0$ ($\lambda \to \infty$) e definimos as probabilidades $\psi_{c,n,\lambda,x}$ por*

$$\psi_{c,n,\lambda,x}(k) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} L^j_{g_{c,\lambda}}(k)(x).$$

Então, quando $c, n, \lambda \to \infty$, todo ponto de acumulação de $\psi_{c,n,\lambda,x}$ na topologia Fraca está em $M_{max}(f)$.*

O resto desta seção é dedicado a prova deste teorema.

Lema 30 *Para toda função contínua k:*

$$\lim_{c,n,\lambda\to\infty} \psi_{c,n,\lambda,x}(k \circ \sigma - k) = 0.$$

Prova: Temos

$$\begin{aligned}
\psi_{c,n,\lambda,x}(k \circ \sigma - k) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} L^j_{g_{c,\lambda}}(k \circ \sigma - k)(x) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} L^j_{g_{c,\lambda}}(k \circ \sigma)(x) - \sum_{j=1}^{n} L^j_{g_{c,\lambda}}(k)(x)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1} L^j_{g_{c,\lambda}}(k)(x) - \sum_{j=1}^{n} L^j_{g_{c,\lambda}}(k)(x)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(k(x) - L^n_{g_{c,\lambda}}(k)(x)\right).
\end{aligned}$$

Segue que

$$\lim_{c,n,\lambda\to\infty} |\psi_{c,n,\lambda,x}(k\circ\sigma-k)| = \lim_{c,n,\lambda\to\infty} \frac{1}{n}|k(x)-L^n_{g_{c,\lambda}}(k)(x)| \leq \lim_{c,n,\lambda\to\infty} \frac{2|k|_\infty}{n} = 0.$$

■

Prova do Teorema

Seja ν um ponto de acumulação de $\psi_{c,n,\lambda,x}$. Então ν é linear, $\nu(1) = 1$ e $\nu(k) \geq 0$ para toda função contínua $k \geq 0$. Segue do lema anterior que ν é uma probabilidade invariante. Fixamos sequências c_j, n_j, λ_j tais que

$$\lim_{j\to\infty} \psi_{c_j,n_j,\lambda_j,x}(f) = \nu(f).$$

Para uma subsequência c_i, n_i, λ_i de c_j, n_j, λ_j, temos que $\frac{1}{c_i}\log h_{c_i,\lambda_i}$ converge uniformemente para uma função V. Esta função V é uma sub-ação calibrada para f. Fixamos a função $R_f := f + V - V\circ\sigma - \beta(f)$. Pelo Lema anterior

$$\lim_{i\to\infty} \psi_{c_i,n_i,\lambda_i,x}(R_f) = \nu(f) - \beta(f).$$

Vamos mostrar que

$$\liminf_{i\to\infty} \psi_{c_i,n_i,\lambda_i,x}(R_f) \geq 0,$$

decorrendo $\nu(f) \geq \beta(f)$, ou seja $\nu \in M_{max}(f)$.

Resta então mostrar que

$$\liminf_{i\to\infty} \psi_{c_i,n_i,\lambda_i,x}(R_f) \geq 0.$$

Como

$$\psi_{c_i,n_i,\lambda_i,x}(R_f) = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} L^j_{g_{c_i,\lambda_i}}(R_f)(x),$$

basta mostrarmos que

$$\liminf_{i,n\to\infty} L^n_{g_{c_i,\lambda_i}}(R_f)(x) \geq 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{i\to\infty} \psi_{c_i,n_i,\lambda_i,x}(R_f) \\
&= \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{\lfloor \log(n_i)\rfloor} L^j_{g_{c_i,\lambda_i}}(R_f)(x) + \sum_{\lfloor \log(n_i)\rfloor+1}^{n_i} L^j_{g_{c_i,\lambda_i}}(R_f)(x)\right) \\
&\geq \liminf_{i\to\infty} \frac{1}{n_i}\left(\lfloor \log(n_i)\rfloor\, |R_f|_\infty + \sum_{\lfloor \log(n_i)\rfloor+1}^{n_i} L^j_{g_{c_i,\lambda_i}}(R_f)(x)\right) \\
&\geq \liminf_{i\to\infty} \inf_{\log(n_i)\leq n\leq n_i} \left(L^n_{g_{c_i,\lambda_i}}(R_f)(x)\right) \\
&\geq \liminf_{i,n\to\infty} L^n_{g_{c_i,\lambda_i}}(R_f)(x).
\end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que

$$\liminf_{i,n\to\infty} L^n_{g_{c_i,\lambda_i}}(R_f)(x) \geq 0.$$

Escrevemos $\log h_{c_i,\lambda_i} = c_i V + \delta_i$ e $f_{\lambda_i} = f + s_i$ onde

$$\frac{|\delta_i|_\infty}{c_i} \to 0 \quad e \quad |s_i|_\infty \to 0.$$

Em seguida escrevemos

$$\begin{aligned}
L^n_{g_{c_i,\lambda_i}}(k)(x) &= \sum_{\sigma^n y=x} e^{g^n_{c_i,\lambda_i}(y)} k(y) = \frac{\sum_{\sigma^n y=x} e^{c_i f^n_{\lambda_i}(y)+\log(h_{c_i,\lambda_i}(y))-\log(h_{c_i,\lambda_i}(x))} k(y)}{\sum_{\sigma^n y=x} e^{c_i f^n_{\lambda_i}(y)+\log(h_{c_i,\lambda_i}(y))-\log(h_{c_i,\lambda_i}(x))}} \\
&= \frac{\sum_{\sigma^n y=x} e^{c_i f^n_{\lambda_i}(y)+\log(h_{c_i,\lambda_i}(y))} k(y)}{\sum_{\sigma^n y=x} e^{c_i f^n_{\lambda_i}(y)+\log(h_{c_i,\lambda_i}(y))}} \\
&= \frac{\sum_{\sigma^n y=x} e^{c_i f^n_{\lambda_i}(y)+c_iV(y)+\delta_i(y)-c_iV(x)-c_i\beta(f)} k(y)}{\sum_{\sigma^n y=x} e^{c_i f^n_{\lambda_i}(y)+c_iV(y)+\delta_i(y)-c_iV(x)-c_i\beta(f)}} \\
&= \frac{\sum_{\sigma^n y=x} e^{c_i R^n_f(y)+\delta_i(y)+c_i s^n_i(y)} k(y)}{\sum_{\sigma^n y=x} e^{c_i R^n_f(y)+\delta_i(y)+c_i s^n_i(y)}}.
\end{aligned}$$

Fixamos $\varepsilon > 0$ e definimos os conjuntos:

$$
\begin{aligned}
H_n &:= \{y \in X : \sigma^n(y) = x\},\\
A_n &:= \{y \in H_n : R_f(y) < -\varepsilon\},\\
B_n &:= \{y \in H_n : R_f(y) \geq -\varepsilon\},\\
C_n &:= \{y \in H_n : R_f(y) = 0\}.
\end{aligned}
$$

É claro que $C_n \subseteq B_n$.
Como a sub-ação V é calibrada, dado $z \in X$ existe pelo menos um $y \in \sigma^{-1}z$ tal que $R_f(y) = 0$. Observamos que $A_n \cup B_n = \sigma^{-1}H_{n-1}$ e que para cada $z \in H_{n-1}$ existe pelo menos um elemento $y \in C_n$ tal que $\sigma(y) = z$. Como $X \subseteq \{1, ..., d\}^{\mathbb{N}}$ concluímos que cada elemento possui no máximo d pré-imagens. Segue que

$$
\#A_n \leq (d-1)\#H_{n-1} \qquad e \qquad \#C_n \geq \#H_{n-1}.
$$

Então:

$$
\begin{aligned}
\sum_{y\in A_n} e^{c_i R_f^n(y) + c_i s_i^n(y) + \delta_i(y)} &= \sum_{y \in A_n} e^{c_i R_f(y) + c_i s_i(y) + \delta_i(y)} e^{c_i R_f^{n-1}(\sigma(y)) + c_i s_i^{n-1}(\sigma(y))}\\
&\leq \sum_{y\in A_n} e^{-c_i\varepsilon + c_i|s_i|_\infty + |\delta_i|_\infty} e^{c_i R_f^{n-1}(\sigma(y)) + c_i s_i^{n-1}(\sigma(y))}\\
&\leq e^{-c_i\varepsilon + c_i|s_i|_\infty + |\delta_i|_\infty} \sum_{y\in A_n} e^{c_i R_f^{n-1}(\sigma(y)) + c_i s_i^{n-1}(\sigma(y))}\\
&\leq e^{-c_i\varepsilon + c_i|s_i|_\infty + |\delta_i|_\infty}(d-1) \sum_{z\in H_{n-1}} e^{c_i R_f^{n-1}(z) + c_i s_i^{n-1}(z)}
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{y\in B_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)} &= \sum_{y\in B_n} e^{c_iR_f(y)+c_is_i(y)+\delta_i(y)} e^{c_iR_f^{n-1}(\sigma(y))+c_is_i^{n-1}(\sigma(y))}\\ &\geq \sum_{y\in C_n} e^{c_iR_f(y)+c_is_i(y)+\delta_i(y)} e^{c_iR_f^{n-1}(\sigma(y))+c_is_i^{n-1}(\sigma(y))}\\ &\geq \sum_{y\in C_n} e^{-c_i|s_i|_\infty-|\delta_i|_\infty} e^{c_iR_f^{n-1}(\sigma(y))+c_is_i^{n-1}(\sigma(y))}\\ &\geq e^{-c_i|s_i|_\infty-|\delta_i|_\infty}\sum_{y\in C_n} e^{c_iR_f^{n-1}(\sigma(y))+c_is_i^{n-1}(\sigma(y))}\\ &\geq e^{-c_i|s_i|_\infty-|\delta_i|_\infty}\sum_{z\in H_{n-1}} e^{c_iR_f^{n-1}(z)+c_is_i^{n-1}(z)}.\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}0 &\leq \liminf_{i,n\to\infty} \frac{\sum_{y\in A_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}}{\sum_{y\in B_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}} \leq \limsup_{i,n\to\infty} \frac{\sum_{y\in A_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}}{\sum_{y\in B_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}}\\ &\leq \limsup_{i,n\to\infty}(d-1)\frac{e^{-c_i\varepsilon+c_i|s_i|_\infty+|\delta_i|_\infty}}{e^{-c_i|s_i|_\infty-|\delta_i|_\infty}} \leq (d-1)\limsup_{i,n\to\infty} e^{-c_i\varepsilon+2c_i|s_i|_\infty+2|\delta_{c_i}|_\infty}\\ &= (d-1)\limsup_{i,n\to\infty} e^{c_i(-\varepsilon+2|s_i|_\infty+2\frac{|\delta_{c_i}|_\infty}{c_i})} = 0,\end{aligned}$$

e da mesma forma

$$\begin{aligned}0 &\leq \liminf_{i,n\to\infty} \frac{\sum_{y\in A_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}R_f(y)}{\sum_{y\in B_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}(-\varepsilon)}\\ &\leq \limsup_{i,n\to\infty} \frac{\sum_{y\in A_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}R_f(y)}{\sum_{y\in B_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}(-\varepsilon)}\\ &\leq \limsup_{i,n\to\infty} \frac{\sum_{y\in A_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}(-|R_f|_\infty)}{\sum_{y\in B_n} e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}(-\varepsilon)} = 0.\end{aligned}$$

Usando estes limites e denotando

$$W_{i,n}(y) := e^{c_iR_f^n(y)+c_is_i^n(y)+\delta_i(y)}$$

temos:

$$
\begin{aligned}
\liminf_{i,n\to\infty} L^n_{g_{c_i},\lambda_i} R_f(x) &= \liminf_{i,n\to\infty} \frac{\sum_{\sigma^n y=x} W_{i,n}(y) R_f(y)}{\sum_{\sigma^n y=x} W_{i,n}(y)} \\
&\geq \liminf_{i,n\to\infty} \frac{\sum_{y\in A_n} W_{i,n}(y) R_f(y) + \sum_{y\in B_n} W_{i,n}(y)(-\varepsilon)}{\sum_{y\in A_n} W_{i,n}(y) + \sum_{y\in B_n} W_{i,n}(y)} \\
&= \liminf_{i,n\to\infty} \frac{\sum_{y\in B_n} W_{i,n}(y)(-\varepsilon)}{\sum_{y\in B_n} W_{i,n}(y)} \frac{\frac{\sum_{y\in A_n} W_{i,n}(y)R_f(y)}{\sum_{y\in B_n} W_{i,n}(y)(-\varepsilon)} + 1}{\frac{\sum_{y\in A_n} W_{i,n}(y)}{\sum_{y\in B_n} W_{i,n}(y)} + 1} \\
&= \liminf_{i,n\to\infty} \frac{\sum_{y\in B_n} W_{i,n}(y)(-\varepsilon)}{\sum_{y\in B_n} W_{i,n}(y)} \\
&= -\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como ε é arbitrário, concluímos o desejado. ■

3.3 Princípio dos Grandes Desvios

Vamos supor nesta seção que a probabilidade maximizante de f é única e denotá-la por μ_∞. k vai denotar um cilindro e sua função característica.

Como mostrado em [2], quando a probabilidade maximizante de f é única, duas sub-ações calibradas diferem por uma constante. Em particular existe uma única função $R = R_f$ associada. Temos $R \leq 0$ e denotamos $R^\infty = \sum_{j=0}^\infty R \circ \sigma^j$.

O objetivo desta seção é provar o seguinte

Teorema 31 *(Princípio dos Grandes Desvios)*

Fixado um ponto base x qualquer, para todo cilindro k temos:

$$
\lim_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log((L^n_{g_c} k)(x)) = \sup_{z\in k} R^\infty(z) = -\inf_{z\in k}(-R^\infty(z)),
$$

onde a função $-R^\infty$ é semicontínua inferiormente.

Como corolário obtemos o resultado contido em [2]:

Corolário 32 *Fazendo $n \to \infty$ e depois $c \to \infty$, para todo cilindro k:*

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} \log\Big(\int k d\mu_c\Big) = -\inf_{z\in k}(-R^\infty(z)),$$

onde a função $-R^\infty$ é semicontínua inferiormente.

Observação: Esta função $-R^\infty$ é a que chamamos por I_{BLT} no capítulo anterior.

Corolário 33 *Fixado um ponto base $x \in X$, e definindo as probabilidades $\psi_{c,n,x}(k) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} L_{g_c}^j k\,(x)$ temos: para todo cilindro k*

$$\lim_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log(\psi_{c,n,x}(k)) = -\inf_{z\in k}(-R^\infty(z)),$$

onde a função $-R^\infty$ é semicontínua inferiormente.

Prova:

$$\liminf_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log(\psi_{c,n,x}(k)) = \liminf_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} L_{g_c}^j k(x)\Big)$$
$$\geq \liminf_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log\Big(\inf_{\log(n)\leq j\leq n} L_{g_c}^j k(x)\Big) \overset{Teo}{=} -\inf_{z\in k}(-R^\infty(z)).$$

De forma análoga

$$\limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log(\psi_{c,n,x}(k)) \leq \limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log\Big(\sup_{\log(n)\leq j\leq n} L_{g_c}^j k(x)\Big) \overset{Teo}{=} -\inf_{z\in k}(-R^\infty(z)).$$

■

A prova do teorema será dividida em vários resultados:

Lema 34 *A função $-R^\infty$ é semicontínua inferiormente.*

Prova: Sejam $z, z_j \in X$ com $z_j \to z$. Queremos mostrar que

$$\liminf_{j\to\infty} -R^\infty(z_j) \geq -R^\infty(z).$$

O caso $-R^\infty(z) = 0$ é imediato.

Primeiro caso: $-R^\infty(z) = \infty$.
Dado $M > 0$, seja n tal que $-R^n(z) > 2M$. Fixamos n_1 tal que $\frac{(1-\theta)\theta^{n_1} M}{|R|_\theta} < 1$. Seja n_0 tal que para $j \geq n_0$ temos $d(z_j, z) < \frac{(1-\theta)\theta^{n_1} M \theta^n}{|R|_\theta}$. Daí para $j \geq n_0$:

$$\begin{aligned} -R^n(z_j) &\geq -R^n(z) - |R|_\theta (d(z_j, z) + ... + d(\sigma^{n-1}(z_j), \sigma^{n-1} z)) \\ &\geq 2M - |R|_\theta (\frac{\theta^{n_1} M}{|R|_\theta}) \geq M. \end{aligned}$$

Segue que

$$\liminf_{j \to \infty} -R^\infty(z_j) \geq M.$$

Como M é arbitrário, concluímos que

$$\liminf_{j \to \infty} -R^\infty(z_j) = +\infty.$$

Segundo caso: $-R^\infty(z) = M > 0$.
Fixado $\varepsilon > 0$, existe n tal que $-R^n(z) > M - \varepsilon/2$. Seja n_0 tal que para $j \geq n_0$ temos $d(z_j, z) < \frac{(1-\theta)\theta^n \varepsilon}{2|R|_\theta}$. Daí para $j \geq n_0$:

$$-R^n(z_j) \geq (M - \varepsilon/2) - |R|_\theta \left(\frac{\varepsilon}{2|R|_\theta} \right) = M - \varepsilon.$$

Segue que

$$\liminf_{j \to \infty} -R^\infty(z_j) \geq M - \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos que

$$\liminf_{j \to \infty} -R^\infty(z_j) \geq M.$$

■

Lembramos que pelo Lema 10, $P(cf) = c\beta(f) + \varepsilon_c$, onde $\varepsilon_c \to h(\mu_\infty)$.

Lema 35
$$\lim_{c,n\to\infty}\left(\frac{1}{c}\log((L_{cR}^{n}1)(x))-\frac{n.\varepsilon_c}{c}\right)=0,$$
em particular, fixado m
$$\lim_{c,n\to\infty}\frac{1}{c}\log((L_{cR}^{n}1)(x))-\frac{1}{c}\log((L_{cR}^{n+m}1)(x))=0.$$

Prova: Seja a um ponto de acumulação de $\frac{1}{c}\log((L_{cR}^{n}1)(x))-\frac{n.\varepsilon_c}{c}$, quando $c,n\to\infty$. Então existem $c_j,n_j\to\infty$ tal que
$$\lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{c_j}\log((L_{c_jR}^{n_j}1)(x))-\frac{n_j.\varepsilon_{c_j}}{c_j}\right)=a.$$
Pelo Lema 28, podemos tomar uma subsequência $\{j_i\}$ tal que $\dfrac{1}{c_{j_i}}\log(h_{c_{j_i}})$ converge uniformemente para uma função V. Ainda, pelo Lema 28, V é uma sub-ação calibrada para f. Garantimos então a existência de sequências $c_i,n_i\to\infty$ satisfazendo:
$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{c_i}\log((L_{c_iR}^{n_i}1)(x))-\frac{n_i.\varepsilon_{c_i}}{c_i}\right)=a \ \text{ e } \ \frac{1}{c_i}\log(h_{c_i})\to V.$$
Denotamos $\log(h_{c_i})=c_iV+\delta_{c_i}$ onde $|\delta_{c_i}|_\infty/c_i\to 0$. Temos:
$$\begin{aligned}
0&=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{c_i}\log((L_{g_{c_i}}^{n_i}1)(x))\\
&=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{c_i}\log(\sum_{\sigma^{n_i}(z)=x}e^{c_if^{n_i}(z)+\log(h_{c_i}(z))-\log(h_{c_i}(x))-n_iP(c_if)})\\
&=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{c_i}\log(\sum_{\sigma^{n_i}(z)=x}e^{c_if^{n_i}(z)+c_iV(z)-c_iV(x)-n_ic_i\beta(f)+\delta_{c_i}(z)-\delta_{c_i}(x)-n_i\varepsilon_{c_i}})\\
&=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{c_i}\log(\sum_{\sigma^{n_i}(z)=x}e^{c_iR^{n_i}(z)+\delta_{c_i}(z)-\delta_{c_i}(x)-n_i\varepsilon_{c_i}})\\
&=\lim_{i\to\infty}\frac{1}{c_i}\log(\sum_{\sigma^{n_i}(z)=x}e^{c_iR^{n_i}(z)-n_i\varepsilon_{c_i}})\\
&=\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{c_i}\log(\sum_{\sigma^{n_i}(z)=x}e^{c_iR^{n_i}(z)})-\frac{n_i\varepsilon_{c_i}}{c_i}\right)=a,
\end{aligned}$$
mostrando que todo ponto de acumulação é igual a zero. ■

Primeira desigualdade do Teorema 31:

Proposição 36

$$\limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log((L^n_{g_c} k)(x)) \leq \sup_{z\in k} R^{\infty}(z).$$

Prova: Fixamos inicialmente um m. Dai:

$$\limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log((L^{n+m}_{g_c} k)(x)) = \limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log(\frac{\sum_{\sigma^{n+m}(z)=x} e^{cR^{n+m}(z)} k(z)}{\sum_{\sigma^{n+m}(z)=x} e^{cR^{n+m}(z)}})$$

$$= \limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log(\frac{\sum_{\sigma^{n+m}(z)=x} e^{cR^{n+m}(z)} k(z)}{\sum_{\sigma^{n}(y)=x} e^{cR^{n}(y)}})$$

$$= \limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log(\frac{\sum_{\sigma^{n}(y)=x} e^{cR^{n}(y)} (\sum_{\sigma^{m}(z)=y} e^{cR^{m}(z)} k(z))}{\sum_{\sigma^{n}(y)=x} e^{cR^{n}(y)}}).$$

Agora

$$\sum_{\sigma^m(z)=y} e^{cR^m(z)} k(z) \leq d^m e^{c \sup_{z\in k} R^m(z)},$$

então

$$\limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log((L^n_{g_c} k)(x)) \leq \limsup_{c,n\to\infty} \left(\frac{m \log(d)}{c} + \sup_{z\in k} R^m(z) \right) = \sup_{z\in k} R^m(z).$$

Para cada m fixo temos que R^m é continua e então existe $y_m \in k$ tal que $\sup_{z\in k} R^m(z) = R^m(y_m)$. Definimos

$$Y_m := \{y \in k : \limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log((L^n_{g_c} k)(x)) \leq R^m(y)\}.$$

Então Y_m é fechado e não vazio pois $y_m \in Y_m$. Como $R \leq 0$ temos que

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq ...$$

Como são todos fechados e não vazios, existe algum $x_0 \in \bigcap_{m\geq 1} Y_m$. Então para todo m temos

$$\limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c} \log((L^n_{g_c} k)(x)) \leq R^m(x_0).$$

Como $R^m(x_0) \to R^\infty(x_0)$ concluímos que

$$\limsup_{c,n\to\infty} \frac{1}{c}\log((L^n_{g_c}k)(x)) \leq R^\infty(x_0) \leq \sup_{z\in k} R^\infty(z).$$

■

A segunda desigualdade do Teorema 31

É útil denotarmos por m_0 o tamanho do cilindro k somado a potência que faz a matriz A (que define o subshift) ter todas as entradas positivas.

Lema 37 *Para todo $m \geq m_0$ fixo, temos que*

$$\liminf_{c,n\to\infty} \frac{1}{c}\log((L^n_{g_c}k)(x)) \geq \inf_{y\in X}\left(\sup_{z\in k,\sigma^m(z)=y} R^m(z)\right).$$

Prova: Fixado $m \geq m_0$ temos:

$$\liminf_{c,n\to\infty} \frac{1}{c}\log((L^{n+m}_{g_c}k)(x)) = \liminf_{c,n\to\infty} \frac{1}{c}\log(\frac{\sum_{\sigma^n(y)=x} e^{cR^n(y)}(\sum_{\sigma^m(z)=y} e^{cR^m(z)}k(z))}{\sum_{\sigma^n(y)=x} e^{cR^n(y)}}).$$

Agora:

$$\sum_{\sigma^m(z)=y} e^{cR^m(z)}k(z) \geq \inf_{\sigma^n(y)=x} e^{c\sup_{z\in k,\sigma^m(z)=y} R^m(z)}.$$

Então

$$\liminf_{c,n\to\infty} \frac{1}{c}\log((L^{n+m}_{g_c}k)(x)) \geq \liminf_{n\to\infty} \inf_{\sigma^n(y)=x} \sup_{z\in k,\sigma^m(z)=y} R^m(z) \geq \inf_{y\in X} \sup_{z\in k,\sigma^m(z)=y} R^m(z).$$

■

Agora estudamos a sequência

$$F(m) := \inf_{y\in X}\left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y} R^m(z)\right).$$

Lema 38 $\{F(m)\}_{m\geq m_0}$ *é limitada (superiormente) por zero e não decrescente. Em particular é uma sequência convergente.*

Prova: Que é limitada por zero é decorrência imediata do fato de $R \leq 0$. Vamos mostrar que $F(m) \leq F(m+1)$:
Para todo $y_0 \in X$ fixado e y_1 sua pré-imagem anulando R (sub-ação calibrada) temos:

$$\begin{aligned}\sup_{z\in k:\sigma^{m+1}(z)=y_0} R^{m+1}(z) &\geq \sup_{z\in k:\sigma^{m}(z)=y_1} R^{m+1}(z) = \sup_{z\in k:\sigma^{m}(z)=y_1} R^{m}(z)\\ &\geq \inf_{y\in X}\left(\sup_{z\in k:\sigma^{m}(z)=y} R^{m}(z)\right) = F(m).\end{aligned}$$

Tomando o ínfimo em y_0 na expressão da esquerda obtemos o desejado. ∎

Corolário 39 *Seja $F = \lim_{m\to\infty} F(m)$. Então*

$$\liminf_{c,n\to\infty} \frac{1}{c}\log\big((L^n_{g_c}k)(x)\big) \geq F.$$

Pelo corolário acima é suficiente mostrarmos que $F \geq \sup_{z\in k} R^{\infty}(z)$, para concluirmos a desigualdade desejada do princípio dos grandes desvios.

Lema 40 *Existe y_0 tal que*

$$F := \lim_{m\to\infty}\inf_{y\in X}\left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y} R^m(z)\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_0} R^m(z)\right).$$

Em particular

$$\lim_{m\to\infty}\inf_{y\in X}\left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y} R^m(z)\right) = \inf_{y\in X}\lim_{m\to\infty}\left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y} R^m(z)\right).$$

Prova: Para cada m seja y_m satisfazendo:

$$F(m) = \inf_{y\in X}\left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y} R^m(z)\right) > \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_m} R^m(z)\right) - \frac{1}{m}.$$

Seja y_0 um ponto de acumulação de y_m. Temos que

$$F := \limsup_{m\to\infty} \inf_{y\in X} \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y} R^m(z) \right) \geq \limsup_{m\to\infty} \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_m} R^m(z) - \frac{1}{m} \right)$$

$$= \limsup_{m\to\infty} \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_m} R^m(z) \right) \geq \liminf_{m\to\infty} \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_m} R^m(z) \right)$$

$$\geq \liminf_{m\to\infty} \inf_{y\in X} \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y} R^m(z) \right) =: F.$$

Então

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_m} R^m(z) \right) = F. \qquad (*)$$

É claro que

$$F := \liminf_{m\to\infty} \inf_{y\in X} \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y} R^m(z) \right) \leq \liminf_{m\to\infty} \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_0} R^m(z) \right).$$

Usando (*) resta mostrar que

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_m} R^m(z) \right) \geq \limsup_{m\to\infty} \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_0} R^m(z) \right).$$

Como $\{\sigma^{-m}(y_0)\}$ é um conjunto finito, podemos fixar $z_m \in k$ tal que $\sigma^m(z_m) = y_0$ e

$$R^m(z_m) = \left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_0} R^m(z) \right).$$

Denotamos $z_m := i_1...i_m y_0$, onde $i_j \in \{1, ..., d\}$. Definimos $z_m^* := i_1...i_m y_m$. Temos então

$$R^m(z_m^*) \geq R^m(z_m) - |R|_\theta(\theta+\theta^2+...+\theta^m)d(y_m, y_0) \geq R^m(z_m) - \frac{|R|_\theta d(y_m, y_0)}{1-\theta}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\limsup_{m\to\infty}\left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_m} R^m(z)\right) &\geq \limsup_{m\to\infty} R^m(z_m^*) \\
&\geq \limsup_{m\to\infty}\left(R^m(z_m) - \frac{|R|_\theta d(y_m,y_0)}{1-\theta}\right) \\
&= \limsup_{m\to\infty} R^m(z_m) \\
&= \limsup_{m\to\infty}\left(\sup_{z\in k:\sigma^m(z)=y_0} R^m(z)\right).
\end{aligned}$$

■

A partir de agora vamos deixar fixo o ponto y_0 dado no lema acima. O próximo lema está contido em [2] prova da proposição 5.

Lema 41 *Seja p um ponto do suporte de μ_∞. Seja y_n uma sequência satisfazendo $\sigma(y_n) = y_{n-1}, n = 1, 2, ...$ e $0 = R(y_1) = R(y_2) = ...$ (sub-ação calibrada). Então p é um ponto de acumulação de $\{y_n\}$.*

Prova: Seja A o conjunto dos pontos de acumulação de $\{y_n\}$. Então A é fechado, e $\sigma(A) = A$. Então temos um sistema dinâmico $(A, \sigma : A \to A, d)$, com A compacto. Logo existe uma probabilidade invariante ν para este sistema. A inclusão de A em X garante que ν se estende a uma probabilidade invariante ν_2 para X pela regra: $\phi : X \to \mathbb{R}$ contínua então

$$\nu_2(\phi) := \nu(\phi|_A).$$

Como R é Lipschitz contínua e $R(y_n) = 0, n = 1, 2, ...$ garantimos que $R|_A = 0$. Em particular $\nu_2(R) = 0$ e então $\nu_2 = \mu_\infty$. Segue que o suporte de μ_∞ está contido em A. ■

Observação: Uma prova alternativa para este resultado consiste em mostrar que as probabilidades $\nu_n(k) := \frac{k(y_1)+...+k(y_n)}{n}$ convergem a μ_∞ na topologia Fraca*, que é consequência de $\nu_n(R) = 0, n = 1, 2, ...$

O próximo lema é baseado no Lema 18 de [13]:

Lema 42 *Se $R^\infty(z) > -\infty$ então as probabilidades ν_n definidas por $\phi \to \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\phi(\sigma^j(z))$ convergem a μ_∞ na topologia Fraca*.*

Prova: Observamos que todo ponto de acumulação de ν_n é uma probabilidade invariante, restando mostrar que

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^j(z)) \geq \mu_\infty(f).$$

Seja $M = R^\infty(z)$. Então, para todo n temos, $R^n(z) \geq M$, assim:

$$V(z) - V(\sigma^n(z)) - n\mu_\infty(f) + \sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^j(z)) = \sum_{j=0}^{n-1} R(\sigma^j(z)) = R^n(z) \geq M.$$

Então

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^j(z)) \geq \frac{M}{n} - \frac{2|V|_\infty}{n} + \mu_\infty(f).$$

Tomando $\liminf\limits_{n\to\infty}$ obtemos o desejado. ■

Corolário 43 *Se $R^\infty(z) > -\infty$ e $p \in supp(\mu_\infty)$ então p é um ponto de acumulação de $\sigma^n(z)$.*

Prova: Seja $p \in supp(\mu_\infty)$ e $\varepsilon > 0$. Consideramos $B(p,\varepsilon) := \{x \in X : d(x,p) < \varepsilon\}$. Como p está no suporte, garantimos que $\mu_\infty(B(p,\varepsilon)) > 0$. Segue do lema anterior que $\{\sigma^n(z)\}$ está na bola para infinitos valores n. ■

Lema 44

$$\sup_{z\in k} R^\infty(z) \leq F$$

Prova: Fixamos $p \in supp(\mu_\infty)$ e $z_0 \in k$ tal que $R^\infty(z_0) > -\infty$ e denotamos $z_0 = x_1x_2....$ Dado t seja $n(t)$ tal que $d(\sigma^{n(t)}(z_0), p) \leq \theta^t$ e tal que as coordenadas $x_1x_2...x_{n(t)}$ garantem que $z_0 \in k$. Assim, vamos denotar

também $z_0 := x_1...x_{n(t)}p_1p_2p_tx_{n(t)+t+1}...$, onde $p := p_1p_2....$
Pelo lema 41 existe uma pré-imagem de y_0 (o ponto $y_{t+l(t)}$) da forma

$$p_1...p_ta_{l(t)}...a_1(y_0),$$

tal que $R^{t+l(t)}(y_{t+l(t)}) = 0$. Definimos um ponto $z(t)$ por

$$z(t) := x_1...x_{n(t)}p_1...p_ta_{l(t)}...a_1(y_0).$$

Temos então:

$$\begin{aligned}\sup_{z\in k:\sigma^{t+l(t)+n(t)}(z)=y_0} R^{t+l(t)+n(t)}(z) &\geq R^{t+l(t)+n(t)}(z(t))\\ &= R^{n(t)}(z(t)) + R^{t+l(t)}(y_{t+l(t)}) = R^{n(t)}(z(t))\\ &\geq R^{n(t)}(z_0) - |R|_\theta(\theta^t + \theta^{t+1} + ... + \theta^{t+n(t)})\\ &\geq R^{n(t)}(z_0) - \frac{\theta^t|R|_\theta}{1-\theta} \geq R^\infty(z_0) - \frac{\theta^t|R|_\theta}{1-\theta}.\end{aligned}$$

Pelo Lema 40, quando $t \to \infty$ a expressão da esquerda converge a F (é uma subsequência de sequência que converge). Ao mesmo tempo, claramente a expressão da direita converge a $R^\infty(z_0)$. Então $F \geq R^\infty(z_0)$. Como z_0 é qualquer satisfazendo $R^\infty(z) > -\infty$, concluímos que

$$\sup_{z\in k} R^\infty(z) \leq F.$$

■

Juntando este lema com o Corolário 39 concluímos que

Proposição 45

$$\liminf_{c,n\to\infty} \frac{1}{c}\log((L^n_{g_c}k)(x)) \geq \sup_{z\in k} R^\infty(z).$$

Comentários:

Com a hipótese de unicidade da probabilidade maximizante para f existe uma única R e obtemos um Princípio dos Grandes Desvios. Sem a hipótese de unicidade da probabilidade maximizante não sabemos se existe o limite de g_c/c, onde g_c é a normalizada de $c.f$. Caso existam dois limites, podemos garantir que as medidas de equilíbrio não satisfazem um Princípio dos Grandes Desvios. De fato, isso é consequência dos resultados abaixo:

Fixamos um ponto $x \in X$, da forma $x = x_0 x_1 ....$

Lema 46 *Se $f \in F_\theta$ é normalizada e μ_{cf} é seu equilíbrio temos:*

$$\mu_{cf}([x_1...x_n]) = \int_{[x_0...x_n]} e^{-f}\, d\mu_{cf}.$$

Em particular

$$\left(\inf_{z\in[x_0...x_n]} e^{-f}\right)\mu_{cf}([x_0...x_n]) \leq \mu_{cf}([x_1...x_n]) \leq \left(\sup_{z\in[x_0...x_n]} e^{-f}\right)\mu_{cf}([x_0...x_n])$$

Prova: Ver Parry-Pollicott pag 37 prova da prop. 3.2. ∎

Denotamos por g_c a normalizada de cf, μ_c o equilíbrio de ambas e h_c a autofunção associada ao autovalor maximal do Operador de Ruelle associado a f.

Proposição 47 *Se $\frac{1}{c_i}\log(h_{c_i}) \to V_1$ quando $c_i \to \infty$, então chamando $R_1 := f + V_1 - V_1 \circ \sigma - \beta(f)$ temos:*

$$\lim_{c_i, n\to\infty} \frac{1}{c_i} \log \frac{\mu_{c_i}[x_0...x_n]}{\mu_{c_i}[x_1...x_n]} = R_1(x).$$

Prova: Pelo lemma anterior aplicado a g_c

$$\left(\inf_{z\in[x_0...x_n]} e^{-g_{c_i}}\right)\mu_{c_i}([x_0...x_n]) \leq \mu_{c_i}([x_1...x_n]) \leq \left(\sup_{z\in[x_0...x_n]} e^{-g_{c_i}}\right)\mu_{c_i}([x_0...x_n]).$$

Como log é crescente:

$$\inf_{z\in[x_0...x_n]} -\frac{g_{c_i}}{c_i} \leq \frac{1}{c_i}\log\frac{\mu_{c_i}[x_1...x_n]}{\mu_{c_i}[x_0...x_n]} \leq \sup_{z\in[x_0...x_n]} -\frac{g_{c_i}}{c_i}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, para $i >> 0$ temos:

$$|\frac{g_{c_i}}{c_i} - R_1|_\infty < \varepsilon.$$

Segue que para $c_i >> 0$

$$\inf_{z\in[x_0...x_n]} -R_1(z) - \varepsilon \leq \frac{1}{c_i} \log \frac{\mu_{c_i}[x_1...x_n]}{\mu_{c_i}[x_0...x_n]} \leq \sup_{z\in[x_0...x_n]} -R_1(z) + \varepsilon.$$

Como $R_1 \in F_\theta$ temos que

$$\inf_{z\in[x_0...x_n]} -R_1(z) > -R_1(x) - |R|_\theta \theta^n \quad e \quad \sup_{z\in[x_0...x_n]} -R_1(z) < -R_1(x) + |R|_\theta \theta^n$$

Segue que para $c_i >> 0$

$$-R_1(x) - |R|_\theta \theta^n - \varepsilon \leq \frac{1}{c_i} \log \frac{\mu_{c_i}[x_1...x_n]}{\mu_{c_i}[x_0...x_n]} \leq -R_1(x) + |R|_\theta \theta^n + \varepsilon.$$

Então

$$-R_1(x) - \varepsilon \leq \liminf_{c_i,n\to\infty} \frac{1}{c_i} \log \frac{\mu_{c_i}[x_1...x_n]}{\mu_{c_i}[x_0...x_n]} \leq \limsup_{c_i,n\to\infty} \frac{1}{c_i} \log \frac{\mu_{c_i}[x_1...x_n]}{\mu_{c_i}[x_0...x_n]} \leq -R_1(x) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário

$$\lim_{c_i,n\to\infty} \frac{1}{c_i} \log \frac{\mu_{c_i}[x_1...x_n]}{\mu_{c_i}[x_0...x_n]} = -R_1(x).$$

Isso equivale a

$$\lim_{c_i,n\to\infty} \frac{1}{c_i} \log \frac{\mu_{c_i}[x_0...x_n]}{\mu_{c_i}[x_1...x_n]} = R_1(x).$$

■

Corolário 48 *Se existem dois limites:*

$$\frac{g_{c_i}}{c_i} \to R_1 \quad e \quad \frac{g_{c_j}}{c_j} \to R_2$$

Com $R_1 \neq R_2$, não pode existir

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{c} \log(\mu_c(k))$$

para todo cilindro k.

Prova: Fixa x e ε tal que $R_1(x) + \varepsilon < R_2(x)$. Pela proposição anterior, existe $n >> 0$ tal que

$$\limsup_{c_i \to \infty} \frac{1}{c_i} \log \frac{\mu_{c_i}[x_0 ... x_n]}{\mu_{c_i}[x_1 ... x_n]} < R_1(x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\liminf_{c_j \to \infty} \frac{1}{c_j} \log \frac{\mu_{c_j}[x_0 ... x_n]}{\mu_{c_j}[x_1 ... x_n]} > R_2(x) - \frac{\varepsilon}{2} > R_1(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Isso mostra que não podem existir

$$\lim_{c \to \infty} \frac{1}{c} \log(\mu_c([x_0 ... x_n])) \quad e \quad \lim_{c \to \infty} \frac{1}{c} \log(\mu_c([x_1 ... x_n])).$$

$\blacksquare$

4 Sobre as maximizantes

Como mostrado em [11] as funções em F_θ que possuem uma probabilidade maximizante suportada em uma órbita periódica formam um conjunto aberto em F_θ. Além disso se $f \in F_\theta$ possui uma única maximizante μ_∞ com suporte não intersectando PER, então existe $f_n \to f$ em F_θ, onde $\mu_\infty(f_n) < \beta(f_n)$. Denotamos por $F_\theta(PER)$ o conjunto das funções em F_θ que possuem uma probabilidade maximizante suportada em uma órbita periódica. Uma questão aberta é a possibilidade de $F_\theta(PER)$ ser denso em F_θ com a norma $\|\|_\theta$ (ver [7], [16], [11], [8], [5]).

Em [8] é provado que se $f \in F_{\theta'}$ com $\theta' < \theta$, então f pode ser aproximada por funções de $F_\theta(PER)$ com a norma $\|\|_\theta$. No entanto existem funções $f \in F_\theta$ que não estão em $F_{\theta'}$, para escolha alguma de $\theta' < \theta$ (abaixo apresentamos um exemplo). Uma questão relacionada com o problema acima é a estimativa do erro da aproximação de $\beta(f)$ por integrais de f sobre medidas com suporte em órbitas periódicas (ver [11], [5], [7], [16].)

4.1 Um Teorema sobre aproximações

Nesta seção vamos apresentar o seguinte

Teorema 49 *Seja X_0 um conjunto fechado satisfazendo: $\sigma(X_0) = X_0$ e $X_0 \cap PER = \varnothing$. Suponha existir uma sequência de órbitas periódicas $X_1, X_2, ...$ irredutíveis, com períodos $n_1 < n_2 < ...$ satisfazendo:*
Existe $c > 2$ tal que, para cada j existe $x \in X_j$ tal que

$$d(x, X_0) < \theta^{cn_j}.$$

Então a função $h(.) := -d_\theta(., X_0)$ satisfaz:
1) $h \in F_\theta$ e $h \notin F_{\theta'}$, $\theta' < \theta$

2) $\beta(h) = 0$*,*

3) $\frac{h^n(x)}{n} < 0$ *para todo* $x \in Fix_n, \quad n = 1, 2, 3, ...$

4) h *pode ser aproximada por funções de* $F_\theta(PER)$ *com a norma* $\| \|_\theta$.

Na seção seguinte apresentamos um exemplo concreto e simples de ponto x tal que seu $\omega-$limite satisfaz o teorema acima. Vamos dedicar o resto desta seção a

Prova do Teorema 49

Como

$$\frac{|d(x, X_0) - d(y, X_0)|}{d(x, y)} \leq \frac{|d(x, y) + d(y, X_0) - d(y, X_0)|}{d(x, y)},$$

garantimos que $h \in F_\theta$. Se y_n é uma sequência de pontos periódicos que se aproximam de X_0, tomando uma sequência z_n de pontos em X_0 (fechado) satisfazendo $d(y_n, z_n) = d(y_n, X_0)$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|d_\theta(y_n, X_0) - d_\theta(z_n, X_0)|}{d_{\theta'}(y_n, z_n)} = \frac{d_\theta(y_n, z_n)}{d_{\theta'}(y_n, z_n)} = +\infty,$$

mostrando que $h \notin F_{\theta'}$ e concuíndo o primeiro item.

Como $X_0 \cap PER = \varnothing$, obtemos o terceiro item.
Por hipótese, para todo $x \in X_j$ temos $d_\theta(x, X_0) < \theta^{n_j}$. Então

$$\frac{h^{n_j}(X_j)}{n_j} > -\theta^{n_j} \stackrel{j\to\infty}{\to} 0,$$

de onde concluímos o segundo item do teorema.

Para provarmos o quarto ítem, iniciamos provando alguns lemas auxiliares:

Lema 50 *Dada uma órbita periódica irredutível* $\{x_1, ..., x_n\}$*,* $\sigma(x_i) = x_{i+1}$*, temos que para* $i \neq j$

$$d(x_i, x_j) \geq \theta^{n-2}.$$

Prova: É claro que se

$$d(x_i, x_j) \leq \theta^n,$$

então a órbita não seria irredutível. Vamos supor que

$$d(x_1, x_{k+1}) = \theta^{n-1}$$

e chegar a um absurdo.

Denotando por $a_1...a_n$ o período de x_1 temos que $a_{k+1}...a_n a_1...a_k$ é o período de x_{k+1}. Por hipótese, para $i < n$ temos que

$$a_i = a_{k+i\,(mod\, n)}$$

e

$$a_n \neq a_k.$$

Iniciamos agora uma série de igualdades iniciando por a_k:

$$a_k = a_{2k\,(mod\, n)} = ...$$

Essa série é indexada por $\{ik \pmod n\}_{i=1,2,3,...i_0}$, onde

$$i_0 = \inf\{i > 1 : ik \pmod n = n\} \leq n.$$

Temos então que

$$a_k = a_{2k\,(mod\, n)} = ... = a_{i_0 k\,(mod\, n)},$$

o que garante que

$$a_k = a_n.$$

Absurdo. ■

Lema 51 *Sejam $\{y_1, ..., y_n\}$ e $\{x_1, ..., x_m\}$ duas órbitas periódicas distintas e irredutíveis. Então para algum y_i temos que*

$$d(y_i, \{x_1, ..., x_m\}) > \theta^m.$$

Prova: Suponha o contrário. Então para algum x_j

$$d(y_1, x_j) \leq \theta^m.$$

Pelo Lema anterior x_j é único e por reordenação podemos supor $j = 1$. Vamos denotar por $a_1...a_m$ o período de x_1. Então fica claro que

$$y_1 = a_1...a_m...$$

Usando o Lema anterior e a hipótese de que

$$d(y_i, \{x_1, ..., x_m\}) \leq \theta^m \quad \forall i,$$

concluímos que

$$y_2 = a_2...a_m\, a_1...$$

e sucessivamente até chegar em

$$y_n = a_n...a_m\, a_1...a_{n-1}...,$$

onde estamos considerando os índices dos a_i's em congruência mod n. Mas daí obtemos

$$y_1 = a_{n+1}...a_m\, a_1...a_n...$$

Tomando as duas estimativas de y_1 garantimos que

$$a_{n+1}...a_m\, a_1...a_n$$

e

$$a_1...a_m$$

coincidem em todas as m letras. Pelo Lema anterior isso só é possível se n é múltiplo de m. Além disso, como para todo $j = 0, ..., n-1$

$$d(\sigma^j(y_1), \sigma^j(x_1)) \leq \theta^m,$$

garantimos que

$$d(y_1, x_1) \le \theta^n,$$

mostrando que $x_1 ... x_m ... x_1 ... x_m$ (n letras) é o período de y_1. Pela hipótese de irredutibilidade $y_1 = x_1$. ■

Agora podemos apresentar a prova do quarto item do teorema.

Queremos mostrar que a função

$$h(x) := -d_\theta(x, X_0).$$

pode ser aproximada por funções de $\mathbb{F}_\theta(PER)$ com a norma $\|\|_\theta$.

Tomamos as perturbações

$$g_j(x) = -\frac{1}{j} d(x, X_j).$$

Então claramente $f_j := h + g_j$ satisfaz:

$$\|f_j - h\|_\theta = \|g_j\|_\theta \le \frac{2}{j} \overset{j \to \infty}{\to} 0.$$

O próximo lema conclui a prova do Teorema 49.

Lema 52 *Com as hipóteses do teorema, se j é suficientemente grande então para qualquer órbita periódica $\{y_1, ..., y_n\}$ diferente de X_j temos que*

$$\frac{f_j^n(y_1)}{n} < \frac{f_j^{n_j}(X_j)}{n_j}.$$

Prova: Reordenando a órbita $\{y_1, ..., y_n\}$, podemos supor que $\sigma(y_i) = y_{i+1}$ e que

$$d(y_n, X_j) > \theta^{n_j}.$$

Ordenamos também a órbita $X_j = \{x_1, ..., x_{n_j}\}$, por $x_{i+1} = \sigma^i(x_i)$. Sejam

$$\alpha_j := \log_\theta \left(\inf_{x_i \in X_j} d(x_i, X_0) \right) > cn_j.$$

e

$$\beta_j := \log_\theta \left(\sup_{x_i \in X_j} d(x_i, X_0) \right).$$

É claro que

$$\beta_j \leq \alpha_j \leq \beta_j + n_j.$$

Tomamos inicialmente $s = 1$.

Inicio do Procedimento

Se $d(y_s, X_j) \leq \theta^{2\alpha_j}$ aplicamos o **procedimento A** abaixo, caso contrário aplicamos o **procedimento B** abaixo.

Procedimento A

Pelo Lema 50 existe um único x_i tal que $d(y_s, X_j) = d(y_s, x_i)$. Claramente, para $l = 0, 1, ..., n_j - 1$

$$d(y_{s+l}, x_{i+l}) \leq \frac{\theta^{2\alpha_j}}{\theta^l} \leq \theta^{\alpha_j + cn_j - n_j} \leq \theta^{\alpha_j + n_j}.$$

Segue que

$$d(y_{s+l}, X_0) = d(x_{i+l}, X_0).$$

Substituímos s por $s + n_j$.

Fim do Procedimento A

Procedimento B

Se $d(y_s, X_j) > \theta^{n_j}$, repassamos s por $s + 1$.

Se $\theta^{2\alpha_j} < d(y_s, X_j) \leq \theta^{n_j}$, então pelo Lema 50 existe um único x_i satisfazendo

$$d(y_s, x_i) = d(y_s, X_j).$$

Repito esse argumento para $y_{s+1}, ..., y_{s+k}$, onde k é o maior possível tal que $d(y_{s+l}, X_j) \leq \theta^{n_j}$ para $l \in \{0, ..., k\}$.
Repassamos s por $s + k + 1$.

Fim do Procedimento B

Se $s = n + 1$ paramos. Se $s \leq n$ Repetimos o procedimento acima. Em algum momento vamos chegar em $s = n + 1$ pela hipótese

$$d(y_n, X_j) > \theta^{n_j}.$$

Sejam $y_s, ..., y_{s+n_j-1}$ um dos grupos obtido no Procedimento A:
Temos então que

$$\begin{aligned}
f_j(y_s) + ... + f_j(y_{s+n_j-1}) &< h(y_s) + ... + h(y_{s+n_j-1}) \\
&= (n_j)\frac{h(y_s) + ... + h(y_{s+n_j-1})}{n_j} \\
&= (n_j)\frac{h^{n_j}(X_j)}{n_j} = (n_j)\frac{f_j^{n_j}(X_j)}{n_j}.
\end{aligned}$$

Sejam $y_s, ..., y_{s+k}$ um dos grupos obtido no Procedimento B.
Temos então que

$$\begin{aligned}
f_j(y_s) + ... + f_j(y_{s+k}) < g_j(y_s) + ... + g_j(y_{s+k}) &\leq -\frac{1}{j}\theta^{n_j} \\
&= -(k+1)\frac{\theta^{n_j}}{j(k+1)} \\
&\leq -(k+1)\frac{\theta^{n_j}}{2j\alpha_j}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que

$$\frac{f_j^{n_j}(X_j)}{n_j} \geq -\theta^{\beta_j} \geq -\theta^{\alpha_j - n_j}.$$

Pela hipótese do teorema sabemos que

$$\alpha_j = (2 + c_j)n_j, \quad c_j > \delta > 0.$$

Segue que para $j >> 0$

$$\theta^{\alpha_j - n_j} = \theta^{(1+c_j)n_j} \leq \frac{\theta^{n_j}}{2j\,(2+c_j)n_j} = \frac{\theta^{n_j}}{2j\alpha_j}.$$

Concluímos que também em $y_s, ..., y_{s+k}$, um dos grupos obtido no procedimento B, se $j >> 0$

$$f_j(y_s) + ... + f_j(y_{s+k}) < (k+1)\frac{f_j^{n_j}(X_j)}{n_j}.$$

Segue que

$$\frac{f_j(y_1) + ... + f_j(y_n)}{n} < \frac{f_j^{n_j}(X_j)}{n_j}.$$

■

4.2 Construindo um $\omega-$limite que não intersecta PER

Vamos apresentar um exemplo de conjunto X_0 com as propriedades do Teorema 49:

Considere a sequência de palavras a seguir:

$$0_0 := 0, \quad 1_0 := 1$$

$$0_{k+1} := 0_k 0_k 1_k, \quad 1_{k+1} := 0_k 1_k.$$

Em seguida definimos o ponto formado listando estas palavras:

$$\phi := 0_0 1_0 \;\; 0_1 1_1 \;\; 0_2 1_2 \;\; 0_3 1_3 ... = 0\,1 \;\; 001\,01 \;\; 00100101\,00101\,...$$

E o seu ω-limite:

$$X_0 := \omega(\phi) = \{x : \exists \;\; \sigma^{n_j}(\phi) \to x\}.$$

Proposição 53 *O conjunto X_0 definido acima satisfaz a hipótese do Teorema* 49.

Iniciamos mostrando o seguinte

Lema 54 $\phi \in \omega(\phi)$.

Prova: Por definição

$$\phi = 0_0 1_0\, 0_1 1_1\, 0_2 1_2 \ldots,$$

sendo suficiente provarmos a seguinte

Afirmação: Para cada n, a palavra $0_0 1_0\, 0_1 1_1\, 0_2 1_2 \ldots 0_n 1_n$ está contida no final da palavra $0_{n+1} 1_{n+1}$.

Vamos provar a afirmação acima por indução em n. Claramente $0\,1$ está contida no final de $001\ \ 01$. Suponhamos por indução que $0_0 1_0\, 0_1 1_1\, 0_2 1_2 \ldots 0_n 1_n$ está contida no final da palavra $0_{n+1} 1_{n+1}$. Segue que

$$0_0 1_0\, 0_1 1_1\, 0_2 1_2 \ldots 0_n 1_n\, 0_{n+1} 1_{n+1}$$

está contida no final de

$$0_{n+1} 1_{n+1}\, 0_{n+1} 1_{n+1}$$

que está contida no final de

$$0_{n+1} 0_{n+1} 1_{n+1}\, 0_{n+1} 1_{n+1} = 0_{n+2} 1_{n+2}.$$

■

Dedicamos o resto desta seção a prova da Proposição 53.

Resultados auxiliares

Lema 55 *Para* $j \geq 1$

$$\#0_j = \phi_{2j} \quad e \quad \#1_j = \phi_{2j-1},$$

onde

$$\phi_1 = 2, \phi_2 = 3 \quad e \quad \phi_{j+1} = \phi_j + \phi_{j-1}$$

é a sequência de Fibonacci.

Prova: Iniciamos observando que

$$\#0_1 = 3 = \phi_2 \quad e \quad \#1_1 = 2 = \phi_1.$$

Suponhamos agora por indução que

$$\#0_j = \phi_{2j} \quad e \quad \#1_j = \phi_{2j-1}.$$

Então

$$\#1_{j+1} = \#0_j + \#1_j = \phi_{2j-1} + \phi_{2j} = \phi_{2j+1} = \phi_{2(j+1)-1}.$$

e

$$\#0_{j+1} = \#0_j + \#0_j + \#1_j = \#0_j + \#1_{j+1} = \phi_{2j} + \phi_{2j+1} = \phi_{2(j+1)}.$$

■

Lema 56 -

1 - 0_j *e* 1_j *diferem apenas na última letra de* 1_j*.*

2 - $0_j 0_j 0_j$ *e* 0_{j+1} *diferem apenas na última letra de* 0_{j+1}*.*

3 - $0_j 0_j$ *e* 1_{j+1} *diferem apenas na última letra de* 1_{j+1}*.*

Prova:

Prova de 1 :

Iniciamos observando que

$$0_0 = 0, 1_0 = 1 \quad e \quad 0_1 = 001, 1_1 = 01,$$

então nestes casos a afirmação é verdadeira.

Por indução suponhamos que 0_{j-1} e 1_{j-1} diferem apenas no última letra de 1_{j-1}.

Temos agora que

$$0_j = 0_{j-1}0_{j-1}1_{j-1} \;\; e \;\; 1_j = 0_{j-1}1_{j-1}$$

e aplicando a hipótese de indução concluímos o desejado.

Prova de 2 : Basta escrever $0_{j+1} = 0_j0_j1_j$ e aplicar 1.

Prova de 3 : Basta escrever $1_{j+1} = 0_j1_j$ e aplicar 1. ■

Denotamos por 0_j^* a órbita periódica de período formado pela palavra 0_j. Analogamente para 1_j.

Fixado $1 \leq j \leq n$ e uma palavra $a_0...a_n$, denotamos por $\sigma^j a_0...a_n$ a palavra $a_j...a_n$.

Lema 57 *Para $j \geq 1$ e $0 < i < \#0_j$ temos que 0_j e $\sigma^i 0_j$ diferem antes ou exatamente na última letra de $\sigma^i 0_j$ (não coincidem em todas as letras de $\sigma^i 0_j$).*

Prova: Iniciamos com $0_1 = 001$. Neste caso o resultado é claro. Suponhamos agora que o resultado é válido para 0_j. Vamos provar sua validade para $0_{j+1} = 0_j0_j1_j$.

- Para $0 < i < \#0_j$ o resultado é válido por indução em j.
- Para $i = \#0_j$ temos que

$$\sigma^i 0_{j+1} = \sigma^{\#0_j} 0_{j+1} = 0_j 1_j$$

difere de $0_{j+1} = 0_j 0_j 1_j$ exatamente na última letra de $0_j 1_j$ (por 1 - do lema anterior).
- Para $\#0_j < i < 2(\#0_j)$, novamente o resultado é válido por indução em j.
- Para $i = 2(\#0_j)$ temos que $\sigma^i 0_{j+1} = 1_j$ difere de $0_{j+1} = 0_j 0_j 1_j$ exatamente na última letra de 1_j (por 1 - do lema anterior).
- Para $2(\#0_j) < i < \#0_{j+1}$ temos que $i = l + 2(\#0_j)$ com $0 < l < \#1_j$. Neste caso:

$$\sigma^i 0_{j+1} = \sigma^l 1_j = \sigma^l 0_{j-1} 1_{j-1} = \sigma^{l+\#0_{j-1}} 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1} = \sigma^{l+\#0_{j-1}} 0_j,$$

e por indução difere de 0_j (logo de $0_{j+1} = 0_j 0_j 1_j$) antes ou exatamente na última letra de $\sigma^{l+\#0_{j-1}} 0_j = \sigma^i 0_{j+1}$. ■

Corolário 58 *Para $0 \leq i < \#1_j$ temos que 0_j e $\sigma^i 1_j$ diferem antes ou exatamente na última letra de $\sigma^i 1_j$.*

Prova: Basta escrever

$$\sigma^i 1_j = \sigma^{i+\#0_{j-1}} 0_j$$

e aplicar o lema anterior. ■

Lema 59 *$0_j 0_j 0_j$ e $1_j 1_j 1_j$ não aparecem ao escrevermos qualquer elemento de X_0.*

Prova: Para $0_0 = 0$ e $1_0 = 1$ a prova decorre de uma verificação. Fixamos agora $0_j, j \geq 1$. Todo elemento de X_0 está no $\omega-$limite de

$$A_j := 0_{j+2} 1_{j+2}\, 0_{j+3} 1_{j+3} \ldots$$

e só precisamos verificar que $0_j 0_j 0_j$ não aparece em A_j. Primeiro observamos que $0_{j+2} = 0_j 0_j 1_j\, 0_j 0_j 1_j\, 0_j 1_j$ e $1_{j+2} = 0_j 0_j 1_j\, 0_j 1_j$ e que as demais palavras na construção de A_j envolvem repetições de 0_{j+2} e 1_{j+2}. Logo basta verificar que $0_j 0_j 0_j$ não ocorre em $0_{j+2} 0_{j+2}$, $0_{j+2} 1_{j+2}$ e $1_{j+2} 0_{j+2}$.

Pelo Lema 56 e pelo lema e corolário anteriores $0_j 0_j 0_j$ não ocorre em

$$0_{j+2} 0_{j+2} = 0_j 0_j 1_j\, 0_j 0_j 1_j\, 0_j 1_j \quad 0_j 0_j 1_j\, 0_j 0_j 1_j\, 0_j 1_j$$

ou

$$0_{j+2} 1_{j+2} = 0_j 0_j 1_j\, 0_j 0_j 1_j\, 0_j 1_j \quad 0_j 0_j 1_j\, 0_j 1_j$$

ou

$$1_{j+2} 0_{j+2} = 0_j 0_j 1_j\, 0_j 1_j \quad 0_j 0_j 1_j\, 0_j 0_j 1_j\, 0_j 1_j.$$

Agora passamos ao estudo de $1_j, j \geq 1$. Por um argumento análogo ao acima, só precisamos verificar que $1_j 1_j 1_j$ não aparece em $0_{j+1} 0_{j+1}$ ou $0_{j+1} 1_{j+1} 0_{j+1}$. Para isso escrevemos:

$$1_j 1_j 1_j = 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 1_{j-1},$$

$$0_{j+1} 0_{j+1} = 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 1_{j-1} \quad 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 1_{j-1}$$

e

$$\begin{aligned} 0_{j+1} 1_{j+1} 0_{j+1} = {} & 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 1_{j-1} \quad 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 1_{j-1} \\ & 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1}\, 0_{j-1} 1_{j-1}. \end{aligned}$$

■

Lema 60 *Seja $q \in X_0$. Suponha que em algum momento da expansão de q aparece 0_k ou 1_k. Então ela é seguida de 0_k ou 1_k. Além disso $0_k 1_k$ é seguido apenas por 0_k.*

Prova: É claro que 0 e 1 são seguidos por 0 ou 1. Da mesma forma 001 e 01 só podem ser seguido por 01 ou 001, pois 11 e 000 não ocorrem na expansão de q. Além disso 001 01 não pode ser seguido de 01 pelo Lema 59 aplicado em $1_1 1_1 1_1 = 01\,01\,01$. Logo 001 01 é seguido apenas por 001. Então o resultado é válido para $k = 0, 1$.

Suponhamos o resultado verdadeiro para $k = 0, 1, ..., j$ e vamos mostrar para $k = j + 1$. Iniciamos com $1_{j+1} = 0_j 1_j$. Por indução $0_j 1_j$ é seguido apenas por 0_j. Então em q aparece $0_j 1_j$ seguido por 0_j. Por sua vez $0_j 1_j 0_j$ não pode ser seguido por $0_j 0_j$ pois contraria o Lema 59. Segue que $0_j 1_j$ é seguido por $0_j 0_j 1_j$ ou $0_j 1_j$, ou seja:
1_{j+1} é seguido por 0_{j+1} ou 1_{j+1}.

Agora consideramos 0_{j+1}. Como $0_{j+1} = 0_j 1_{j+1}$ obtemos a mesma conclusão anterior:
0_{j+1} é seguido por 0_{j+1} ou 1_{j+1}.

Por fim vamos mostrar que $0_{j+1} 1_{j+1}$ só pode ser seguido de 0_{j+1}:
Para isso escrevemos $0_{j+1} 1_{j+1} = 0_j 1_{j+1} 1_{j+1}$. Do que já sabemos ele só pode ser seguido por 0_{j+1} ou 1_{j+1}, mas pelo Lema 59 ele não pode ser seguido de 1_{j+1}. Concluímos que $0_{j+1} 1_{j+1}$ só pode ser seguido de 0_{j+1}. ■

Lema 61 *Na ordem Lexicográfica temos:*

$$0_0^* < 0_1^* < 0_2^* < 0_3^* < ...$$

$$1_0^* > 1_1^* > 1_2^* > 1_3^* > ...$$

e para quaisquer i, j

$$0_i^* < 1_j^*.$$

Prova: Temos que $0_{j+1} = 0_j 0_j 1_j$. Pelo Lema 56 ele difere de $0_j 0_j 0_j$ apenas na última letra de 0_{j+1} que claramente é 1. Então na ordem lexicográfica

$$0_j 0_j 0_j < 0_{j+1}$$

o que garante que

$$0_j^* < 0_{j+1}^*.$$

Em seguida escrevemos $1_{j+1} = 0_j 1_j$ e novamente pelo Lema 56 sabemos que $0_j < 1_j$ ou seja $1_{j+1} < 1_j$, portanto

$$1_j^* > 1_{j+1}^*.$$

Por fim dados 0_i e 1_j, se $i < j$ temos que $0_i^* < 0_j^*$, se $i > j$ temos que $1_i^* < 1_j^*$. Logo podemos supor que $i = j$, sendo suficiente mostrar que

$$0_i^* < 1_i^*.$$

Mas isso é uma consequência imediata do Lema 56. ∎

Lema 62 *X_0 não intersecta PER*

Prova: Um ponto periódico está em X_0 se e somente se sua órbita está em X_0, assim dada uma órbita periódica $\{p_1, ..., p_n\}$ podemos supor que $p_1 = (x_1...x_n...)$ tem a menor expressão em ordem lexicográfica. Vamos mostrar que p_1 não está em X_0.

Dividimos a prova em alguns casos:

Primeiro caso:

Vamos trabalhar com a seguinte:

Hipótese: Existe j tal que

$$0_j^* < p_1 < 0_{j+1}^*.$$

Com isso vamos mostrar que $p_1 \notin X_0$.

Observamos que supor que $p_1 = 0_j^*$ para algum j garante que $p_1 \notin X_0$ pelo Lema 59.

Temos que $0_{j+1} = 0_j 0_j 1_j$. Pelo Lema 56 sabemos que as letras de 0_{j+1} coincidem com $0_j 0_j 0_j$ exceto na última letra de 0_{j+1}. Da desigualdade

$$0_j^* < p_1 < 0_{j+1}^*,$$

sabemos que p_1 se iguala a 0_{j+1} exceto talvez na última letra de 0_{j+1}.

Suponhamos que p_1 se iguala a 0_{j+1} também na última letra de 0_{j+1}. Como $p_1 < 0_{j+1}^*$, garantimos que para algum $j > 0$ temos:

$$\sigma^{j(\#0_{j+1})} p_1 < 0_{j+1}$$

na ordem lexicográfica. Isso garante que

$$\sigma^{j(\#0_{j+1})} p_1 < p_1$$

na ordem lexicográfica, o que é um absurdo, pois p_1 tem a menor expressão em ordem lexicográfica de sua órbita.

Concluímos que p_1 se iguala a 0_{j+1} exceto (com certeza) na última letra de 0_{j+1}.

Suponhamos inicialmente que $j = 0$. Neste caso, pelo que vimos, já sabemos as três primeiras letras de p_1:

$$p_1 = 000...$$

e pelo Lema 59 concluímos que $p_1 \notin X_0$.

Supondo também $j = 1$ vem que

$$001 \;\; 001 \;\; 001... < p_1 < 001 \;\; 001 \;\; 01...$$

ou seja

$$p_1 = 001 \;\; 001 \;\; 00...$$

Qualquer que seja a próxima letra de p_1 teremos que $p_1 \notin X_0$ pelo Lema 59.

Suponhamos agora que $j \geq 2$.

Temos

$$0_{j+1} = 0_j 0_j 1_j = 0_j 0_j \, 0_{j-1} 1_{j-1} = 0_j 0_j \, 0_{j-1} \;\; 0_{j-2} 1_{j-2}.$$

Suponhamos por absurdo que $p_1 \in X_0$. Então podemos aplicar o Lema 60: Como p_1 coincide com 0_{j+1} exceto na última letra de 0_{j+1} temos

$$p_1 = 0_j 0_j \, 0_{j-1} \;\; 0_{j-2}...$$

Pelo Lema 60 a expansão de p_1 continua com 0_{j-2} ou 1_{j-2}. Mas 1_{j-2} não é permitido pois coincidiria com 0_{j+1} inclusive na última letra de 0_{j+1}. Então

$$p_1 = 0_j 0_j \, 0_{j-1} \;\; 0_{j-2} 0_{j-2}...$$

Aplicando agora os Lemas 59 e 60 concluímos que

$$p_1 = 0_j 0_j \, 0_{j-1} \;\; 0_{j-2} 0_{j-2} \, 1_{j-2}...$$

Aplicando o Lema 60 em $0_{j-2} 1_{j-2}$ temos que

$$p_1 = 0_j 0_j \, 0_{j-1} \;\; 0_{j-2} 0_{j-2} \, 1_{j-2} \;\; 0_{j-2}...$$

ou seja

$$p_1 = 0_j 0_j \, 0_{j-1} \;\; 0_{j-1} \;\; 0_{j-2}...$$

Pelo Lema 59 esta expressão não pode ser seguida por $0_{j-2} 0_{j-2}$. Também não pode ser seguida por $0_{j-2} 1_{j-2}$ pois apareceria

$$0_{j-1} \;\; 0_{j-1} \;\; 0_{j-2} 0_{j-2} 1_{j-2} = 0_{j-1} 0_{j-1} 0_{j-1}.$$

Segue que

$$p_1 = 0_j 0_j \, 0_{j-1} \;\; 0_{j-1} \;\; 0_{j-2} \, 1_{j-2} ...$$

ou seja

$$p_1 = 0_j 0_j \, 0_{j-1} \;\; 0_{j-1} \;\; 1_{j-1} ... = 0_j 0_j 0_j$$

o que é um absurdo com o Lema 59 pois supomos que $p_1 \in X_0$.

Segundo caso:

Agora vamos trabalhar com a

Hipótese: existe j tal que

$$1^*_{j+1} < p_1 < 1^*_j.$$

Queremos mostrar que com esta hipótese $p_1 \notin X_0$.

Observamos que supor que $p_1 = 1^*_j$ para algum j garante que $p_1 \notin X_0$ pelo Lema 59.

Escrevemos $1_{j+1} = 0_j 1_j$. Pelo Lema 56 concluímos que 1_{j+1} coincide com 1_j exceto na última letra de 1_j. Então p_1 coincide com 1_j exceto (talvez) na última letra de 1_j.
Com o mesmo argumento da seção anterior garantimos que p_1 coincide com 1_j exceto na última letra de 1_j.

Suponhamos inicialmente que $j = 0$. Neste caso

$$111... > p_1 > 010101...$$

e pelo que vimos

$$p_1 = 0...$$

Como $p_1 > 01$ temos

$$p_1 = 01...$$

Suponhamos por absurdo $p_1 \in X_0$. Pelo Lema 60 garantimos que

$$p_1 = 010...$$

Usando que $p_1 > 0_1^*$ e o Lema 60 concluímos que

$$p_1 = 010101... = 0_1 0_1 0_1...$$

contrariando o Lema 59.

Suponhamos agora $j \geq 1$

Escrevendo

$$1_j = 0_{j-1} 1_{j-1}$$

concluímos que

$$p_1 = 0_{j-1}...$$

Suponhamos por absurdo que $p_1 \in X_0$. Então segue do Lema 60 que $p_1 = 0_{j-1} 0_{j-1}...$ ou $p_1 = 0_{j-1} 1_{j-1}....$ Como p_1 difere de 1_j garantimos que $p_1 = 0_{j-1} 0_{j-1}....$ Pelo Lema 59 garantimos que

$$p_1 = 0_{j-1} 0_{j-1} 1_{j-1} = 0_j...$$

Pelos lemas 59 e 60 garantimos que $p_1 = 0_j 0_j 1_j...$ ou $p_1 = 0_j 1_j 0_j....$ Como $1_{j+1}^* = 0_j 1_j... < p_1$ garantimos que

$$p_1 = 0_j 1_j 0_j...$$

Usando repetidamente o Lema 60 e que $1_{j+1}^* < p_1$ acabamos concluindo que

$$p_1 = 0_j 1_j 0_j 1_j 0_j 1_j... \quad = \quad 1_{j+1} 1_{j+1} 1_{j+1}$$

contrariando o Lema 59.

Terceiro caso:

Resta trabalharmos com a seguinte

Hipótese: $p_1 > 0_j^*$ e $p_1 < 1_j^*$ para todo j.

Consideramos os seguintes intervalos em ordem lexicográfica:

$$A_0 := [0_0, 1_0],$$

$$A_1 := [0_1, 1_1],$$

e em geral

$$A_k := [0_k, 1_k].$$

Temos que $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset ....$ Além disso $A_k = [0_{k-1}0_{k-1}1_{k-1}, 0_{k-1}1_{k-1}]$ está contido no cilindro $[0_{k-1}]$ que possui diâmetro $\frac{1}{\theta^{\phi_{2(k-1)}}} \to 0$. Segue que existe no máximo um ponto q na interseção

$$q = \bigcap_{k \geq 0} A_k.$$

Por hipótese este ponto é p_1. Vamos mostrar que isso contraria a periodicidade de p_1.

É fácil ver que para cada j as $2\phi_{2j}$ primeiras letras de q (ou seja p_1) coincidem com $0_j 0_j$. Pelo Lema 57 garantimos que p_1 não pode ter período menor que $\#0_j = \phi_{2j}$. Como j é qualquer concluímos que p_1 não é periódico, o que é um absurdo. ■

Lema 63 *Seja $c > 2$ uma constante tal que $c < (numero\,de\,ouro)^2$. Para $k >> 0$ e $0_k^* \in PER$ temos:*

$$d(0_k^*, X_0) \leq \theta^{\phi_{2k+2}-1} < \theta^{c\phi_{2k}}.$$

Prova: É claro que X_0 contém pontos da forma $q = 0_k 0_k 1_k ...$. Pelo Lema 56 fica claro também que para pontos desta forma temos:

$$d(0_k^*, q) = \theta^{\phi_{2k+2}-1},$$

pois $0_{k+1} = 0_k 0_k 1_k$ possui $\phi_{2(k+1)} = \phi_{2k+2}$ letras. Uma importante propriedade da sequência de Fibonacci afirma que,

$$\frac{\phi_{k+1}}{\phi_k} \to (numero\, de\, ouro),$$

de onde segue o desejado. ■

Prova da Proposição 53

É claro que X_0, o $\omega-$limite de ϕ é fechado e satisfaz $\sigma(X_0) = X_0$. Com isso, a conclusão da prova é consequência dos dois lemas anteriores.

Referências

[1] G. Atkinson, Recurrence of co-cycles and random walks, *The Journal of the London Mathematical Society* **13** (1976), 486-488.

[2] A. Baraviera, A. O. Lopes e P. Thieullen, A large deviation principle for equilibrium states of Hölder potencials: the zero temperature case, *Stochastics and Dynamics* **6** (2006), 77-96.

[3] A. Baraviera, R. Leplaideur e A. Lopes, Selection of measures for a potential with two maxima at the zero temperature limit, *preprint*, (2010)

[4] T. Bousch, Le poisson n'a pas d'arêtes, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, **36** (2000), 489-508.

[5] X. Bressaud e A. Quas, Rate of approximation of minimizing measures, *Nonlinearity* **20** no. 4, (2007), 845-853.

[6] J. R. Chazottes e M. Hochman, On the zero-temperature limit of Gibbs states, *preprint*, 2009.

[7] D. Collier e I. D. Morris, approximating the maximum ergodic average via periodic orbits, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **28**, (2008), 1081-1090

[8] G. Contreras, A. O. Lopes e Ph. Thieullen, Lyapunov minimizing measures for expanding maps of the circle, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **21** (2001), 1379-1409.

[9] J. P. Conze e Y. Guivarc'h, Croissance des sommes ergodiques et principe variationnel, manuscript circa 1993.

[10] A. Dembo e O. Zeitouni, Large Deviation Techniques and Applications, Springer Verlag, (1998).

[11] B. R. Hunt e G. C. Yuan, Optimal orbits of hyperbolic systems. *Nonlinearity* **12**, (1999), 1207-1224.

[12] O. Jenkinson, Ergodic optimization. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A* **15** (2006), 197-224.

[13] A. O. Lopes, J. Mohr, R. Souza e Ph. Thieullen, Negative Entropy, Pressure and Zero temperature: a L.D.P. for stationary Markov Chains on $[0, 1]$, *Bull. Soc. Bras. Math.* Vol 40 n. 1, (2009), 1-52

[14] A. O. Lopes e J. K. Mengue, Zeta measures and Thermodynamic Formalism for temperature zero, *Bull. Braz. Math. Soc.* preprint.

[15] R. Mañé, Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems, *Nonlinearity* **9** (1996), 273-310.

[16] I. D. Morris, Maximizing measures of generic Hölder functions have zero entropy, *Nonlinearity* **21**, 2008, 993-1000.

[17] W. Parry, Equilibrium states and weighted uniform distribution of closed orbits. Dynamical systems (College Park, MD, 1986–87), *Lecture Notes in Math*, 1342, Springer, Berlin, (1988), 617-625.

[18] W. Parry e M. Pollicott, Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics, *Astérisque* Vol 187-188 (1990).

[19] S. V. Savchenko, Cohomological inequalities for finite Markov chains, *Functional Analysis and Its Applications* 33 (1999), 236-238.