

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE TRANSMISSÃO MECÂNICA  
BASEADO EM ENGRENAGENS CÔNICAS E FACIAIS

por

Kleber Eduardo Bianchi

Tese para obtenção do Título de  
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Agosto de 2009

DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA DE TRANSMISSÃO MECÂNICA  
BASEADO EM ENGRENAGENS CÔNICAS E FACIAIS

por

**Kleber Eduardo Bianchi**  
Mestre em Engenharia Mecânica

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Projeto Mecânico

Orientador: **Prof. Wilson João Batista**, Dr. Eng.  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Comissão de Avaliação:

**Prof. Cleiton Rodrigues Teixeira**, Dr. Eng.  
Fundação Universidade de Rio Grande – FURG

**Prof. Fernando Antônio Forcellini**, Dr. Eng.  
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

**Prof. Flávio José Lorini**, Dr. Eng.  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

**Prof. Horácio Antonio Vielmo**, Dr. Eng.  
Coordenador do PROMEC/EE/UFRGS

Porto Alegre, 14 de agosto de 2009.

Para Adriana, Angelo e Marcelo.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. Vilson João Batista, pela orientação dedicada e pela sábias colocações nos vários processos decisórios ocorridos ao longo do trabalho.

Aos membros da Comissão de Avaliação do Exame de Qualificação e do Trabalho de Tese final, Prof. Dr. Eng. Cleiton Rodrigues Teixeira, da Fundação Universidade de Rio Grande, Prof. Dr. Eng. Fernando Antônio Forcellini, da Universidade Federal de Santa Catarina, Prof. Dr. Eng. Franco Giuseppe Dedini, da Universidade Estadual de Campinas, e Prof. Dr. Eng. Flávio José Lorini, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul; pela gentileza de fornecerem suas significativas contribuições. A este último, em especial, gostaria de agradecer pela orientação no período inicial, de definição do tema.

Ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, pela oportunidade e pela estrutura disponibilizada para este trabalho. Também agradeço aos colegas e funcionários, em especial ao Sr. Paulo Kutter e ao Eng. Carlos A. Kern Thomas.

Ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade de Caxias do Sul, pelo apoio na confecção do protótipo. Um especial agradecimento aos colegas M. Eng. Mec. Gerson Luiz Nicola e M. Eng. Mec. Deives Roberto Bareta, pelo auxílio na modelagem em CAD/CAM e usinagem.

À empresa Autotravi, na pessoa do Sr. Marcos A. Pacheco, pela doação dos materiais poliméricos para a confecção do protótipo. À empresa NSK, na pessoa do Eng. Kleber Gomes, pela doação das guias lineares. As contribuições destas empresas foram preciosas em momentos críticos do desenvolvimento do trabalho.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro do projeto.

Aos meus familiares e amigos, pelo apoio e paciência. Ninguém chega a lugar algum sozinho.

A todas as pessoas que contribuíram, de forma direta ou indireta, para a conclusão deste trabalho.

## RESUMO

O presente trabalho foi desenvolvido com o intuito de propor um sistema de transmissão mecânica baseado em engrenagens cônicas e faciais, de razões de velocidades escalonadas, para uso industrial e no setor da mobilidade. Em virtude do grande desenvolvimento das transmissões compostas por engrenagens faciais nos últimos anos, implementado por centros de pesquisa da área e por indústrias do setor aeronáutico, um dos objetivos deste trabalho foi estender o campo de aplicação dessas engrenagens para outros campos da engenharia. Inicialmente, mostra-se um estudo dos principais tipos de transmissões mecânicas presentes na indústria e, principalmente, no setor da mobilidade; área em que, usualmente, encontram-se os requisitos mais elevados de operação. Além disso, foi realizada uma revisão bibliográfica abordando tópicos importantes relacionados às engrenagens em geral e, mais especificamente, às transmissões cônicas e faciais. Esta revisão serviu de base para a implementação dos algoritmos para modelagem das engrenagens do sistema proposto. Para validar o conceito, um protótipo foi construído e testado, tendo como principal objetivo a comprovação da viabilidade e eficácia do sistema proposto, tanto na transmissão do movimento como na alteração da razão de velocidades. Realizados os testes, observou-se que, efetivamente, o sistema atendeu aos atributos funcionais especificados. Para a construção desse protótipo, as engrenagens envolvidas passaram por um processo de modelagem matemática, seguida pela modelagem sólida em software de CAD e pela fabricação em centro de usinagem. Para complementar o estudo, foi implementada uma rotina baseada nas normas AGMA, com foco na determinação das dimensões do pinhão, componente mais crítico do sistema. Desta forma, este trabalho permitiu avaliar os aspectos funcionais e elaborar um procedimento de projeto das engrenagens que compõem a transmissão proposta, concluindo que esta apresenta características herdadas das engrenagens faciais – facilidade de fabricação com custos competitivos – bem como características que a tornam adequada para operação automática em aplicações com alta taxa de flutuação da carga de trabalho, quais sejam: pequena variação da relação de transmissão e simplicidade do mecanismo de alteração da relação de velocidades.

**Palavras-chave:** transmissão mecânica, engrenagens faciais, engrenagens cônicas, projeto de produto, desenvolvimento de produto.

## **ABSTRACT**

This work was developed with the aim of propose a multi-speed mechanical gear drive based on face and bevel gears, for industrial and mobility field applications. Because of the recent great development of face gears, implemented by gear research centers and by aeronautical industry, one of the present work objectives was the extension of the application of these gears to other areas. The text begins with a brief review of the most used mechanical transmissions in the industry and, mainly, in the mobility field, where usually are found the higher loading and operation requirements. Also, important topics related to all gear transmissions and, more specifically, to bevel and face gears are presented. This review gave support for the algorithms implemented for the gears modeling. In sequence, for concept validation, a prototype was constructed and tested. The main objective of this prototype was proving that the original concept was viable and effective to transmit motion and change the ratio of velocities. After the tests, it was observed that, effectively, the system attended to specified functional attributes. For prototype construction, the related gears have been mathematically modeled, which was followed by the solid modeling in a CAD software and, finally, by the manufacturing process in a CNC milling machine. To extend the knowledge about the proposed transmission, an algorithm based on AGMA standards was implemented to assist in the analysis process related to the pinions, which are the most critical components of the system. As a result, this work allowed to validate the functional aspects and to elaborate a gear design procedure for the proposed system. Such system presents features inherited from face gears – constructive and manufacturing simplicity, meaning competitive costs – as well as features that make it adequate for automatic operation in high working load floating rates, which are: small ratio of velocities variation and mechanical simplicity of gears changing mechanism.

**Keywords:** mechanical gear drive, face gears, bevel gears, product design, product development.



3.4	Atividades Relacionadas ao Projeto Conceitual.....	55
3.4.1	Diagrama de Funções e Fluxograma de Funcionamento.....	56
3.4.2	Matriz Morfológica e Apresentação do Conceito do Protótipo.....	58
3.5	Atividades Relacionadas ao Projeto Preliminar do Protótipo.....	61
3.6	Atividades Relacionadas ao Projeto Detalhado do Protótipo.....	63
3.6.1	Modelagem das Coroas e Pinhões.....	63
3.6.1.1	Definição do Envelope do Perfil dos Dentes da Coroa Facial...	63
3.6.1.2	Modelagem Sólida dos Dentes da Coroa Facial em Software de CAD.....	70
3.6.1.3	Definição do Envelope do Perfil dos Dentes da Coroa Cônica Externa.....	71
3.6.1.4	Definição do Envelope do Perfil dos Dentes da Coroa Cônica Interna.....	77
3.6.2	Procedimento para Determinar a Altura Total do Pinhão.....	82
3.6.3	Esquema Eletro-Pneumático do Protótipo.....	83
3.7	Aspectos Relacionados à Construção do Protótipo.....	86
3.8	Testes Funcionais.....	88
3.9	Avaliação das Características da Transmissão Mecânica Proposta.....	89
4	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros.....	97
4.1	Trabalhos Futuros.....	99
	Referências Bibliográficas.....	101
	Apêndice A - Rotina para Obtenção dos Pontos de Contato e Forma Final do Dente de uma Coroa Facial.....	106
	Apêndice B - Rotina para Obtenção dos Pontos de Contato e Forma Final do Dente de Faixas Externas Cônicas da Transmissão Proposta.....	109
	Apêndice C - Rotina para Obtenção dos Pontos de Contato e Forma Final do Dente de Faixas Internas Cônicas da Transmissão Proposta.....	111
	Apêndice D - Rotina de Dimensionamento dos Pinhões Cilíndricos para Engrenamentos Faciais.....	114
	Apêndice E - Rotina para Obtenção da Altura da Faixa de Trabalho Próxima e do Deslocamento Axial em Função do Ângulo de Nutação .....	122
	Apêndice F - Análise do Modelo de Transmissão Proposta num Trator de Baixa Potência	124

## LISTA DE SÍMBOLOS

$m_G$	razão de velocidades ou relação de transmissão $\left[ \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} \right]$
$r_b$	raio de base de uma curva evolvente
$r_s$	vetor posição de um ponto <b>p</b> sobre o perfil evolvente do pinhão ou da ferramenta de corte
$r_2$	vetor posição de um ponto <b>p</b> sobre o perfil do dente da engrenagem sendo gerada (coroa)
$u, v$	coordenadas que definem uma superfície
$z, \theta$	coordenadas curvilíneas de uma curva evolvente
$E$	distância entre centros de rotação das engrenagens (módulo do vetor $\vec{E}$ )
$E_{as}$	distância, para as faixas de dentes cônicos, entre origens dos sistemas de coordenadas $S_s$ e $S_a$ , correspondentemente, da faixa cônica e da faixa central do pinhão.
$E_{cs}$	distância, para as faixas de dentes cônicos, entre origens dos sistemas de coordenadas $S_c$ e $S_s$ , correspondentemente, sobre o plano transversal ao cone primitivo no ponto em análise e transversal ao eixo de giro do pinhão.
$E_{tc}$	distância, para as faixas de dentes cônicos, entre origens dos sistemas de coordenadas $S_t$ e $S_c$ , correspondentemente, sobre o plano transversal ao eixo de giro do pinhão no ponto em análise e sobre o plano transversal ao cone primitivo.
$E_{ma}$	distância, para as faixas de dentes cônicos, entre origens dos sistemas de coordenadas $S_a$ e $S_m$ , correspondentemente, da faixa central do pinhão e da coroa (e não girante com esta)
$H_c$	largura da faixa de dentes cônicos
$I$	ponto primitivo do engrenamento
$N_{ce}$	Número de dentes da coroa de entrada
$N_{cs}$	Número de dentes da coroa de saída
$N_p$	Número de dentes do pinhão
$N_{pc}$	Número de dentes da faixa cônica do pinhão
$N_{pv}$	Número de dentes virtual da faixa cônica do pinhão
$N_s$	número de dentes da ferramenta de geração ( <i>shaper</i> )
$N_1$	número de dentes da engrenagem motriz
$N_2$	número de dentes da engrenagem movida
$P$	ponto instantâneo de contato das faces dos dentes de duas engrenagens em movimento
$R_{pc}$	raio primitivo sobre o plano transversal ao cone primitivo do pinhão cônico
$R_{pp}$	raio primitivo sobre o plano transversal ao eixo de giro do pinhão, onde está posicionada a origem do sistema de coordenadas $S_s$

$R_{pt}$	raio primitivo sobre o plano transversal ao eixo de giro do pinhão cônico
$S_f$	sistema fixo (ou global), solidário à estrutura de suporte das engrenagens
$S_1$	sistema que, num redutor, gira com o pinhão
$S_2$	sistema de coordenadas que, num redutor, gira com a segunda engrenagem
$\alpha$	ângulo de pressão
$\alpha_c$	ângulo de pressão do engrenamento cônico
$\gamma$	ângulo entre eixos de pinhão e coroa
$\gamma_c$	ângulo de cone da faixa de dentes cônicos do pinhão da transmissão proposta
$\delta$	deslocamento axial relativo das coroas do sistema proposto
$\psi$	parâmetro geral do engrenamento, correspondente ao deslocamento angular do pinhão ou da ferramenta de corte
$\psi_s$	ângulo de giro da ferramenta de geração ( <i>shaper</i> )
$\psi_1$	ângulo de giro do pinhão
$\psi_2$	ângulo de giro da engrenagem gerada, ou no engrenamento, da coroa.
$\theta$	ângulo de natação dos pinhões intermediários da transmissão proposta
$\theta_{0s}$	ângulo correspondente ao início do perfil evolvente sobre o círculo de base
$\omega_s$	velocidade angular da ferramenta de geração ( <i>shaper</i> )
$\omega_1$	módulo da velocidade angular do pinhão
$\omega_2$	módulo da velocidade angular da coroa
$\Sigma_1$	superfície do dente da engrenagem 1
$\Sigma_2$	superfície do dente da engrenagem 2

## Matrizes e vetores

$L_{nm}$	sub-matriz 3x3 de $M_{nm}$ correspondente à aplicação de uma rotação no vetor posição
$M_{nm}$	matriz de transformação de coordenadas de um vetor posição definido em $S_m$ para o sistema de coordenadas $S_n$
$\vec{E}$	vetor que representa a menor distância entre as origens de dois sistemas de coordenadas
$\vec{n}$	vetor normal a uma superfície no ponto em análise
$\vec{r}_m$	vetor posição referenciado ao sistema de coordenadas $S_m$
$\vec{r}_n$	vetor posição referenciado ao sistema de coordenadas $S_n$
$\vec{r}_s$	vetor posição de $P$ em relação ao sistema de coordenadas $S_s$ da ferramenta de corte

- $\vec{r}_u$  vetor tangente a uma curva *u-linha* sobre a superfície, no ponto em análise
- $\vec{r}_v$  vetor tangente a uma curva *v-linha* sobre a superfície, no ponto em análise
- $\vec{r}_1$  vetor posição de *P* em relação ao sistema de coordenadas do pinhão  $S_1$
- $\vec{r}_2$  vetor posição de *P* em relação ao sistema de coordenadas do pinhão  $S_2$
- $\vec{v}_r$  vetor velocidade instantânea
- $\vec{v}_1$  vetor velocidade instantânea do ponto *P* em relação ao sistema de coordenadas  $S_1$  do pinhão
- $\vec{v}_2$  vetor velocidade instantânea do ponto *P* em relação ao sistema de coordenadas  $S_2$  da coroa
- $\vec{v}_{12}$  vetor velocidade relativa (ou de deslizamento) no ponto *P*
- $\vec{v}_{abs1} = \vec{v}_{abs2}$  vetores de velocidade instantânea na direção da linha de pressão.
- $\vec{v}_{r1}$  componente da velocidade instantânea  $\vec{v}_{abs1}$  sobre o plano tangente.
- $\vec{v}_{r2}$  componente da velocidade instantânea  $\vec{v}_{abs2}$  sobre o plano tangente.
- $\vec{\omega}_1$  vetor velocidade angular da engrenagem de entrada (pinhão)
- $\vec{\omega}_2$  vetor velocidade angular da engrenagem de saída (coroa)

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 – IVT Epilogics .....	9
Figura 2.2 – CVT Conitorque .....	10
Figura 2.3 – Transmissão por engrenagens Rockwell .....	11
Figura 2.4 – Conversor de torque Allison .....	12
Figura 2.5 – Transmissão hidromecânica .....	13
Figura 2.6 – CVT por polias variadoras ou expansivas: a) redução da velocidade e b) ampliação da velocidade.....	14
Figura 2.7 – Elementos de transmissão: a) corrente, produzida pela empresa LUK, b) correia segmentada, da VDT.....	15
Figura 2.8 – Transmissão CVT do automóvel Suzuki Cultus .....	16
Figura 2.9 – CVT Milner: a) razão de velocidades elevada e b) razão de velocidades baixa .....	18
Figura 2.10 – CVT de rolamento .....	18
Figura 2.11 – CVT Toroidal Buick 1928-1934 .....	19
Figura 2.12 – CVT meio-toroidal: a) vista em perspectiva, b) relação de transmissão unitária, c) redução de velocidade e d) ampliação de velocidade.....	20
Figura 2.13 – Núcleo da transmissão meio-toroidal <i>Powertrons</i> <sup>TM</sup> .....	21
Figura 2.14 – Componentes do IVT toroidal Torotrak .....	22
Figura 2.15 – Princípio de operação do IVT toroidal Torotrak .....	22
Figura 2.16 – Par pinhão e coroa facial .....	23
Figura 2.17 – Vistas de transmissões cônica e facial .....	24
Figura 2.18 – Faces dos dentes de uma engrenagem facial .....	24
Figura 2.19 – Transmissão facial usada em rotor de helicóptero .....	25
Figura 2.20 – Geração de uma coroa facial por pinhão de corte .....	26
Figura 2.21 – Retificação de uma engrenagem facial por reboło helicoidal .....	27
Figura 2.22 – Ferramentas para fabricação de engrenagens faciais .....	27
Figura 2.23 – Perfis de dentes sem e com interferência .....	28
Figura 2.24 – Parâmetros geométricos de uma superfície ou casca.....	30
Figura 2.25 – Sistemas de coordenadas de um par de engrenagens .....	32
Figura 2.26 – Visualização de um engrenamento e vetores velocidade instantânea .....	34
Figura 2.27 – Parâmetros geométricos que definem uma curva evolvente.....	38
Figura 3.1 – Princípio funcional de uma transmissão mecânica tipo CVT.....	41
Figura 3.2 – Detalhe esquemático de uma coroa e um pinhão intermediário engrenados.....	41

Figura 3.3 – Vista geral dos principais componentes do sistema proposto .....	42
Figura 3.4 – Alteração da relação por meio da natação dos pinhões .....	42
Figura 3.5 – Desenho esquemático de uma transmissão de dois estágios modulares.....	44
Figura 3.6 – Vista dos movimentos de natação e afastamento axial relativo das engrenagens. ...	49
Figura 3.7 – Linhas radiais a 45° onde há alinhamento dos dentes das faixas.....	49
Figura 3.8 – Disposição dos dentes sobre o pinhão. ....	50
Figura 3.9 – Engrenagens da transmissão proposta: a) pinhão e b) coroa. ....	53
Figura 3.10 – Função total do sistema de transmissão mecânica proposto.....	56
Figura 3.11 – Fluxograma de funcionamento do sistema de transmissão mecânica proposto.....	56
Figura 3.12 – Deslocamento axial da coroa de saída e do suporte dos pinhões: a) 2ª relação e b) 1ª e 3ª relações.....	59
Figura 3.13 – Conceito final do protótipo .....	61
Figura 3.14 – Subsistema de natação dos pinhões. ....	62
Figura 3.15 – Vista do sistema final após a etapa de projeto preliminar. ....	62
Figura 3.16 – Sistemas de coordenadas e vetores do pinhão cilíndrico e coroa facial. ....	63
Figura 3.17 – Perfil evolvente da face do dente do pinhão .....	67
Figura 3.18 – Fluxograma para cálculo dos sucessivos pontos de contato.....	69
Figura 3.19 – Modelo sólido do dente da coroa facial: a) curvas de contato.....	70
b) modelo sólido final para o dente. ....	70
Figura 3.20 – Sistemas de coordenadas e vetores do pinhão e coroa cônicos externos.....	71
Figura 3.21 – Modelo sólido do dente da coroa cônica externa: a) curvas de contato sobre a superfície do dente e b) modelo final. ....	77
Figura 3.22 – Sistemas de coordenadas e vetores do pinhão e coroa cônicos internos. ....	78
Figura 3.23 – Modelo sólido do dente da coroa cônica interna: a) curvas de contato sobre a face do dente e b) modelo final do dente. ....	81
Figura 3.24 – Movimentos do pinhão: a) engrenagens acopladas, b) deslocamento axial e c) natação.....	82
Figura 3.25 – Geometria para $\theta = 15^\circ$ e $\delta/2 = 6,5$ mm: a) engrenagens acopladas, b) deslocamento axial e c) natação.....	83
Figura 3.26 – Esquema eletro-pneumático do protótipo.....	84
Figura 3.27 – Modelo virtual do protótipo.....	87
Figura 3.28 – Vista geral do conjunto do protótipo durante os testes experimentais. ....	87

Figura 3.29 – Pinhão e coroa: a) $\alpha = 14,5^\circ$ , b) $\alpha = 20^\circ$ , c) $\alpha = 25^\circ$ .....	94
Figura 3.30 – Forma e comprimento do dente facial: a) $\alpha = 14,5^\circ$ , b) $\alpha = 20^\circ$ , c) $\alpha = 25^\circ$ .....	94
Figura 3.31 – Influência do tamanho: a) dentes maiores e b) dentes menores. ....	95
Figura F.1 – Transmissão mecânica de seis relações de um trator comercial .....	125
Figura F.2 – Aspecto final das coroas e pinhões para a transmissão a ser aplicada no trator.....	130
Figura F.3 – Componentes internos da transmissão projetada.....	131
Figura F.4 – Vista de montagem dos principais componentes da transmissão.....	132

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1 – Lista de Decisões Preliminares.....	55
Tabela 3.2 – Lista de Requisitos de Projeto do Protótipo.....	56
Tabela 3.3 – Matriz Morfológica.....	60
Tabela 3.4 – Matriz de Decisão sobre o Sistema para Nutação dos Pinhões.....	61
Tabela 3.5 – Estado dos Sinais de Entrada para Cada Relação de Velocidades.....	86
Tabela 3.6 – Lógica de Acionamento das Saídas do CLP.....	86
Tabela 3.7 – Variação do Ângulo de Cone do Pinhão e Forma Resultante nos Dentes da Coroa.....	94
Tabela F.1 – Dados de Entrada para Dimensionamento do Pinhão na Faixa Intermediária.....	129
Tabela F.2 – Valores de Razão de Velocidades Obtidos.....	130
Tabela F.3 – Estudo Comparativo dos Valores de Razão de Velocidades Obtidos.....	130

## **CAPÍTULO 1**

### **INTRODUÇÃO**

Os sistemas de transmissão de potência – mais conhecidos por redutores ou ampliadores de velocidade – são amplamente utilizados em equipamentos mecânicos devido à necessidade de adequação do torque e velocidade fornecidos por um motor, em relação ao demandado para realização de um trabalho, tanto em períodos de transiente como de regime permanente. Em função da sua importância no desempenho das máquinas e equipamentos, tais sistemas têm sido objeto de estudo contínuo para ampliação da eficiência, flexibilidade de operação e redução dos custos de fabricação.

Apesar dos inúmeros princípios construtivos presentes no mercado, as transmissões mecânicas pertencem a duas grandes famílias: de relação de transmissão fixa e variável. O maior exemplo de aplicação de transmissões com relação variável está no campo da mobilidade: setores naval, automotivo, ferroviário, aeronáutico e espacial. Nestas aplicações, as variações na carga são elevadas, sendo os motores relativamente otimizados quanto ao peso e a potência.

Na indústria automotiva, os sistemas de transmissão de acionamento manual permitem um número limitado de razões de velocidades – usualmente na ordem de 4 a 7 em veículos de pequeno e médio porte – podendo atingir valores acima de 20 em veículos pesados. A principal vantagem destes sistemas é o uso de engrenagens, o que permite obter alta eficiência de operação com baixo custo de fabricação. Contudo, a desaceleração do veículo, durante os intervalos de tempo necessários para realização das trocas de razão de velocidades, ocasiona um consumo maior de combustível e uma variação no torque de carga sobre o motor, o que contribui para diminuir sua vida útil.

Apesar das preferências do mercado consumidor não se relacionarem estritamente aos requisitos técnicos, há uma tendência cada vez maior pelo uso de transmissões em que a alteração da relação de transmissão se dá de forma automática, ou seja, sem a interferência do

usuário. Até o momento, a transmissão automática mais difundida comercialmente é a hidromecânica, composta por um conversor de torque hidráulico e um redutor por engrenagens de vários estágios. Esta redução é necessária pois o conversor não possui uma faixa de ampliação de torque elevada. Desta forma, uma transmissão hidromecânica adequada ao uso em veículos implica em grande número de peças e custo. Além disso, tal transmissão pode proporcionar consumo elevado de combustível sob regimes de operação severos, compostos por grande número de períodos de aceleração e desaceleração (tráfego urbano ou estradas irregulares e não pavimentadas, por exemplo).

Por outro lado, as atividades de pesquisa e desenvolvimento de sistemas com variação contínua da relação de transmissão, conhecidos por CVT's (*Continuous Variable Transmission*) e IVT's (*Infinite Variable Transmission*), têm sido constantes e intensas no setor da mobilidade e, em especial, na indústria automotiva. Os princípios construtivos em que se baseiam estes sistemas são relativamente simples e há muito conhecidos. Por este motivo, os CVT's foram os primeiros sistemas de transmissão usados em veículos, porém, aos poucos, foram perdendo espaço para as transmissões por engrenagens, que apresentavam maior durabilidade e capacidade de operação em altas cargas. Os problemas mais comuns dos sistemas de transmissão variável eram a tendência ao escorregamento nas altas velocidades e o rápido desgaste das superfícies em contato. Com o recente desenvolvimento de componentes, materiais e lubrificantes especiais, bem como de complexos sistemas de controle, foi possível obter CVT's e IVT's apropriados às demandas do setor automotivo, porém, com custos relativamente elevados. Os sistemas atualmente mais difundidos são as polias variadoras e a transmissão toroidal. Apesar do menor rendimento destes sistemas em relação às transmissões por engrenagens, principalmente em altas velocidades de operação, a variação contínua da relação de transmissão permite uma adequação instantânea do torque e velocidade fornecidos pelo motor em face a alterações da carga, o que resulta em economia de combustível e menor desgaste do motor; além de conforto ao dirigir.

O presente trabalho propõe um sistema de transmissão mecânica que utiliza engrenagens faciais e cônicas, com eixos de entrada e saída alinhados e que permite a alteração da razão de velocidades. Os processos de fabricação atualmente empregados nas engrenagens faciais permitem obter transmissões de alta eficiência com custos relativamente baixos, em comparação com as engrenagens convencionalmente aplicadas, como as hipoidais, por exemplo. Além disso, a transmissão proposta apresenta a possibilidade de implementação de um sistema de alteração da razão de velocidades de forma construtiva simples e composto por poucos componentes, o que a habilita para uso automático ou semi-automático. Desta forma, tal sistema pode vir a substituir as transmissões continuamente variáveis em algumas aplicações. Assim,

busca-se a confiabilidade e custo baixo proporcionados pelas engrenagens, em detrimento da flexibilidade de operação, ponto forte dos sistemas CVT's.

Considerando-se que todos os sistemas mecânicos apresentam limitações, além de descrever o conceito da transmissão proposta, o presente trabalho recomenda um procedimento para dimensionamento das engrenagens que a compõem, procedimento este baseado na norma AGMA. Desta forma, um projetista pode realizar um dimensionamento prévio e estudar a aplicabilidade do sistema para sua necessidade específica.

Por fim, apresentam-se os passos adotados para a elaboração de um protótipo simples, com três relações de velocidades apenas, que foi submetido a testes para avaliação da funcionalidade dos sub-sistemas que o integram.

## **1.1 Objetivos e Justificativa do Trabalho**

### ***Objetivo geral***

Descrever o conceito, avaliar a funcionalidade e mostrar o procedimento de dimensionamento preliminar das engrenagens intermediárias de um sistema de transmissão mecânica baseado em engrenamentos faciais e cônicos, com troca das relações de transmissão.

### ***Objetivos específicos***

- Revisão bibliográfica: estudo do histórico e estado da técnica em transmissões automotivas, campo onde se insere o sistema proposto.
- Elaboração de roteiros e procedimentos para dimensionamento de uma transmissão desse tipo, o que inclui:
  - elaboração de algoritmos que permitam a modelagem sólida das engrenagens por meio de software de CAD 3D;
  - elaboração de um procedimento para dimensionamento das engrenagens intermediárias, baseado na norma AGMA;
- Projeto e fabricação de um protótipo para estudo de uma transmissão de simples estágio, com três relações de transmissão, para avaliação da funcionalidade do sistema proposto.

### ***Justificativa***

As várias formas construtivas das transmissões mecânicas atualmente presentes em máquinas e equipamentos apresentam sua aplicabilidade relacionada a vários fatores: faixa de relações de transmissão, capacidade de torque e velocidade de operação, espaço físico, eficiência mecânica, custo, etc. Isto torna alguns tipos de transmissão adequados em determinadas aplicações e inadequados em outras.

A proposta de um novo sistema de transmissão baseado em engrenagens cônicas e faciais visa fornecer uma alternativa viável em aplicações onde seja necessária a alteração da razão de velocidades com relativa frequência. Além disso, o desenvolvimento tecnológico dos materiais e respectivos processos de fabricação relacionados às engrenagens faciais, ocorrido nas últimas décadas, conferiram a estes componentes altos rendimentos mecânicos, com elevada capacidade de carga e baixo custo. Tais características se traduzem em melhor eficiência de transmissão e custos competitivos, o que, neste período de discussão sobre o impacto produzido por sistemas mecânicos ao meio-ambiente, potencializa ganhos adicionais.

## **1.2 Organização do Trabalho**

O presente trabalho inicia com uma abordagem do estado da técnica no campo das transmissões mecânicas, com enfoque especial no setor automotivo. Tal estudo visa, em primeiro lugar, confrontar diferentes formas construtivas, ressaltando pontos positivos e negativos, o que permite delimitar o campo de aplicação de cada sistema. Em segundo lugar, este estudo permitirá, ao término do trabalho, situar o sistema de transmissão proposto dentro da grande área das transmissões mecânicas.

Em seqüência, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre temas importantes para o desenvolvimento do trabalho, como as engrenagens faciais e a modelagem matemática da forma dos dentes destas engrenagens e respectivas áreas de contato. Para tal, são associadas informações de cinemática das engrenagens, transformação de coordenadas e geometria diferencial.

No capítulo seguinte, apresenta-se o sistema e seus componentes principais, bem como os movimentos necessários para a alteração da razão de velocidades. Segue-se a explicação do modelo de referência e das etapas de projeto implementadas para a construção de um protótipo, cuja função foi testar o atributo operacional do conceito proposto. Por fim, os resultados dos testes funcionais são apresentados e discutidos.

Com um foco proposital de uma aplicação industrial, o estudo foi estendido para o desenvolvimento do projeto preliminar, para uma aplicação real, num trator de pequeno porte. Para tal, foram necessários algoritmos de apoio ao processo de decisão sobre materiais, tratamentos térmicos e dimensões das engrenagens envolvidas. Tais algoritmos são apresentados, bem como o resultado preliminar desta etapa de projeto do produto.

Ao final do trabalho são discutidos os resultados gerais e também, de forma resumida, indica-se o campo de aplicação do sistema de transmissão proposto.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo aborda temas importantes, relacionados às transmissões mecânicas, que propiciaram o desenvolvimento do sistema proposto. Inicialmente, mostra-se um histórico recente sobre o tema das transmissões mecânicas, seguido pela descrição das engrenagens cônicas e faciais. Na seqüência, apresentam-se relações cinemáticas e os conceitos básicos de geometria diferencial, necessários para construir os modelos sólidos das engrenagens do presente estudo.

#### 2.1 Histórico Recente das Transmissões Automotivas – Estado da Técnica

Apesar de, a rigor, a palavra *transmissão* se relacionar a todos os componentes presentes no fluxo de potência entre motor e rodas, no setor automotivo tal palavra é associada especificamente ao sistema que altera o torque e a velocidade do motor em função da variação da carga. Tal sistema é comumente conhecido por caixa (de câmbio, automática, hidromecânica, etc.), ou simplesmente transmissão. Assim, componentes como semi-eixos, cardãs e juntas homocinéticas não fazem parte da transmissão, mas do chamado trem de potência (*powertrain*) [Gott, 1991].

É usual classificar os elementos de máquinas em famílias, segundo critérios como princípio construtivo, forma de operação ou outros. No caso de transmissões mecânicas, três princípios construtivos e operacionais se distinguem: *i*) os sistemas com relação de transmissão fixa, *ii*) os sistemas com número limitado e escalonado de relações de transmissão e *iii*) os sistemas com variação contínua da velocidade, dentro de uma faixa de operação. Essa última família é sub-dividida em sistemas de transmissão por tração (*traction drives*, como, por exemplo, o sistema toroidal) e por fricção (*friction drives*, tendo como exemplo as transmissões

por correias poliméricas e polias variadoras). Ressalta-se que as transmissões por engrenagens também apresentam movimento de deslizamento relativo entre as faces dos dentes e, portanto, há uma componente de força decorrente do atrito; porém, neste caso, esta força não é essencial para o movimento; ao contrário, sua presença nas transmissões representa uma dissipação de energia. Já nas transmissões ditas “por fricção”, este é o elemento sem o qual não há a transmissão do movimento. Tais sistemas apresentam dispositivos que proporcionam um nível mínimo de força de fricção, como os esticadores, por exemplo [Shigley,2004; Collins, 2006; Litvin et al., 2004].

Nos sistemas que utilizam o princípio de tração, o fluido lubrificante possui a função de transmitir as forças sem que haja contato entre as faces dos elementos metálicos. Tais fluidos se caracterizam pelo fato de apresentar maior viscosidade quando submetidos a altos valores de pressão. Desta forma, na região de interface entre elementos em movimento, uma pequena lâmina de fluido é responsável por transmitir a força entre tais elementos. Nesse caso, diz-se que há um processo de lubrificação elasto-hidro-dinâmica.

Portanto, de forma simplificada, os sistemas de transmissão atualmente utilizados em veículos podem ser classificados com relação aos seguintes parâmetros [Gott, 1991; Bosch, 2004; Forti, 2003]:

1) Quanto ao princípio de transmissão de torque:

- Por meio de engrenagens: sistemas robustos, de baixo custo e longa vida útil.
- Transmissões por fricção: como exemplo há as correias planas e polias expansivas, muito comuns em veículos de pequeno porte: motocicletas, quadriciclos, veículos para neve, etc.
- Transmissões por tração:
  - são exemplo os sistemas toroidal, meio-toroidal e a transmissão por esferas: o princípio funcional é simples, porém, implica no uso de materiais e componentes de alto desempenho, bem como um lubrificante de características especiais.
- Transmissões hidrostáticas: apresentam motores hidráulicos alimentados por uma bomba de vazão variável. São mais comuns em aplicações de alta carga, como em veículos para transporte de minério, retroescavadeiras de grande porte e aplicações afins. Apesar da baixa eficiência, os sistemas hidráulicos proporcionam valores elevados de torque e força, com atuadores de pequenas dimensões. Além disso, o controle da velocidade pode ser obtido de forma efetiva em toda a faixa de operação.

2) Quanto às relações de transmissão:

- Relação única: a relação de transmissão não pode ser alterada. Estão presentes restrições geométricas do tipo:
  - face-a-face: engrenagens.
  - encaixe: polias sincronizadas e correntes/engrenagens.

- Relações fixas e escalonadas (*step-by-step*): a alteração do torque e velocidade é obtida por meio de dispositivos mecânicos que incluem anéis sincronizadores, cames, embreagens e outros.
  - Continuamente variáveis: sistemas que podem atingir qualquer relação de transmissão dentro de uma faixa de trabalho.
    - CVT (*Continuously Variable Transmission*): a velocidade de saída só é nula para velocidade de entrada também nula.
    - IVT (*Infinitely Variable Transmission*): possui uma faixa de variação como nos demais CVT's, porém, um dispositivo permite colocar a transmissão em posição neutra. Neste caso, a velocidade do eixo de saída pode ser nula para qualquer valor de velocidade do motor.
- 3) Quanto à forma de alterar as relações de transmissão (no caso de transmissões por engrenagens):
- Acionamento manual: sistema que inclui uma embreagem, dispositivos para deslocamento de acoplamentos ou das próprias engrenagens e, em boa parte dos casos, mecanismos para sincronizar as velocidades dos eixos primário e secundário. Os movimentos necessários para troca da razão de velocidades são realizados diretamente pelo usuário, que determina o momento em que isto deve ocorrer.
  - Semi-automática ou automatizada: o usuário determina o momento da troca da razão de velocidades, porém, o trabalho de movimentação dos componentes internos de troca é realizado por atuadores, comandados eletronicamente. O principal objetivo deste tipo de transmissão é proporcionar conforto ao usuário e uma troca suave da razão de velocidades. Apesar dos veículos que apresentam este tipo de transmissão não possuírem pedal de embreagem, este componente faz parte da transmissão e seu acionamento é comandado eletronicamente. Isto significa que há interrupção do fluxo de potência entre motor e rodas durante o período de alteração da relação de transmissão.
  - Automática: a operação de troca da razão de velocidades não é de responsabilidade do usuário, mas do sistema de controle da transmissão, o qual, ao perceber alteração na carga de trabalho, envia sinais a atuadores internos. Em algumas transmissões desse tipo, os algoritmos de controle são robustos e complexos, proporcionando grande conforto e opções de dirigibilidade (esportiva, econômica, em presença de neve, etc...). Tais algoritmos também permitem corrigir enganos cometidos pelo usuário (por exemplo: acelerar, após parada, sem efetuar a alteração correta da relação de transmissão). Em outros casos, como por exemplo na transmissão *Audi-Tiptronic*, o usuário tem a opção de efetuar manualmente os comandos para troca da razão de velocidades, se esta for sua preferência.

Tal tipo de transmissão apresenta diferentes versões, utilizadas em vários veículos, inclusive de outras empresas montadoras. Contudo, esta é uma característica desenvolvida para atender às necessidades e desejos dos usuários, não deixando a transmissão de ser completamente automática (e podendo operar desta forma). Um sistema semelhante, que apresenta a opção de operação manual ou automática, é a transmissão *Porsche Doppelkupplungsgetriebe* (PDK), com duas embreagens úmidas e 7 razões de velocidades. Uma característica importante das transmissões automáticas é o fato do fluxo de potência entre motor e rodas não ser interrompido durante a alteração da razão de velocidades. Tal característica se traduz em menores perdas e consumo de combustível, bem como num menor desgaste do motor e melhor desempenho em períodos de aceleração.

Nessa classificação se encontram os mais diversos sistemas de transmissão para os setores industriais e da mobilidade, cada qual com vantagens, desvantagens e características específicas, que os tornam adequados para determinadas aplicações e faixas de operação.

É difícil prever qual sistema virá a ser o mais utilizado no setor da mobilidade nos próximos anos. Sabe-se que os sistemas de transmissão atuais, em sua maior parte relacionados ao uso de engrenagens, apresentam alta confiabilidade e vida útil, com custos compatíveis com as expectativas do mercado. Por outro lado, por questões econômicas e ambientais, observa-se a necessidade de atingir um nível de desempenho mais elevado nas transmissões e, como consequência, obter um menor consumo de combustível. Nesse sentido, os sistemas CVT's parecem ser vantajosos (porém, acompanhados de perto por algumas transmissões automáticas). Além disso, os sistemas de controle atualmente utilizados nestas transmissões permitem grande conforto ao usuário. Por outro lado, os requisitos mecânicos dos componentes em contato, bem como a complexidade dos sub-sistemas acessórios de controle da relação de transmissão, refrigeração e lubrificação; faz com que o custo dos CVT's ainda seja proibitivo em algumas linhas de produtos.

Tarefa igualmente árdua é determinar de forma precisa às expectativas dos consumidores e usuários. Os adeptos da direção esportiva defendem as transmissões manuais, seqüenciais (*up and down shift*) ou semi-automáticas, dando como uma das justificativas o fato de que nas competições automotivas é o piloto quem define o melhor momento de alterar a razão de velocidades. Contudo, o sucesso das transmissões automáticas e CVT's em carros esportivos e de luxo presentes no mercado, tem causado mudanças de opinião até mesmo nesse público. Além disso, o impacto das freqüentes crises do petróleo, com consequente elevação dos custos dos combustíveis e derivados, pode alterar rapidamente a opinião dos consumidores a respeito da transmissão mais adequada às suas necessidades.

### 2.1.1 Sistemas de Transmissão Utilizando Engrenagens

As transmissões por engrenagens apresentam grande confiabilidade e capacidade de transmissão de torque, o que permite seu uso nas mais variadas aplicações. Na área industrial é muito comum o uso de redutores com razão de velocidades fixa, associados a motores elétricos. Já no setor da mobilidade há a necessidade de variação desta razão de velocidades, a qual pode ser obtida de forma escalonada ou por variação contínua. Nas transmissões continuamente variáveis por engrenagens, a alteração da relação de transmissão pode ser obtida por dois princípios: pelo princípio biela-manivela ou por deslocamento de engrenagens intermediárias.

Fitz e Pires, 1991, da empresa americana Epilogics, apresentaram um IVT baseado em engrenagens, testado em 1989 num caminhão pesado Navistar classe VII. Os elementos internos desse sistema podem ser vistos na figura 2.1.

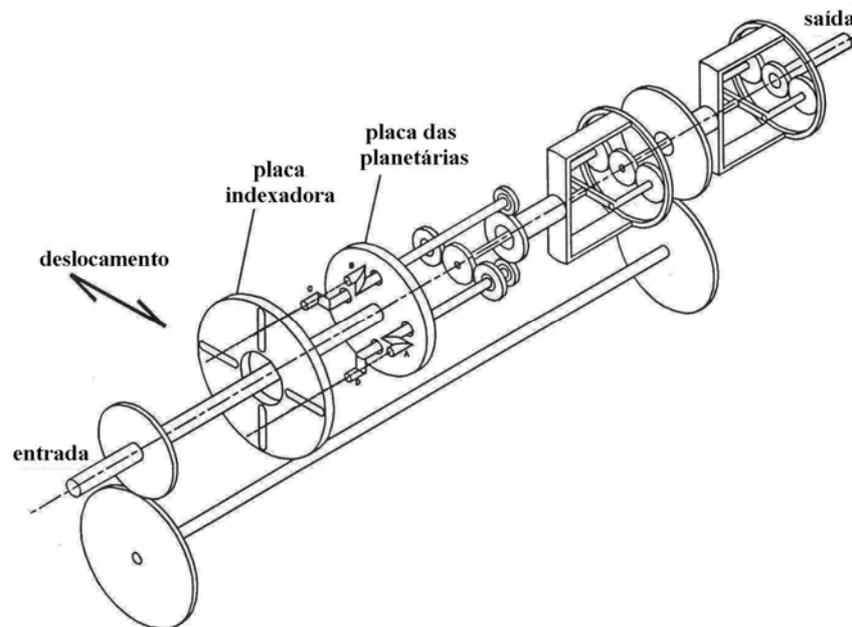


Figura 2.1 – IVT Epilogics [Fitz e Pires, 1991].

A variação da relação de transmissão é obtida por meio do deslocamento lateral da placa indexadora, deslocamento esse que causa uma excentricidade em relação ao eixo de giro da placa das planetárias. Essa excentricidade faz com que a velocidade de giro das engrenagens planetárias, movidas por esta placa, flutue segundo uma função senoidal.

Os testes demonstraram que este sistema suporta níveis elevados de torque, com eficiência global próxima a 90%. Contudo, tal IVT apresenta os problemas comuns a todos os sistemas baseados no princípio biela-manivela: a flutuação da velocidade de saída (função senoidal por partes) e a necessidade de retificar a velocidade em algum ponto do mecanismo

interno. No sistema visto na figura 2.1, as engrenagens acopladas à placa das planetárias são conectadas aos eixos por meio de embreagens unidirecionais ou rodas livres. Isso elimina a parte negativa da velocidade, sendo, nesse instante, mantido o movimento de giro por meio dos outros eixos/engrenagens atuantes. A flutuação da velocidade não causa problema apenas no movimento do veículo, mas os autores relatam a necessidade de isolamento de vibrações no eixo de conexão do motor à transmissão. Além disso, apesar dos componentes mecânicos serem simples, esse IVT apresenta complexidade mecânica (não estão representadas na figura as rodas-livres, o sistema de deslocamento da placa indexadora, bem como outras engrenagens intermediárias necessárias para o funcionamento). Como último problema, cita-se a fadiga das rodas-livres, sujeitas a grande número de ciclos (períodos repetitivos de carga). Devido a esses fatores, o IVT Epilogics nunca veio a ser usado em produtos seriados.

Um segundo sistema CVT baseado em engrenagens, chamado Conitorque, é mostrado na figura 2.2, o qual apresenta números de patente WO9533146 e US4630495 [Clunne, 1995].

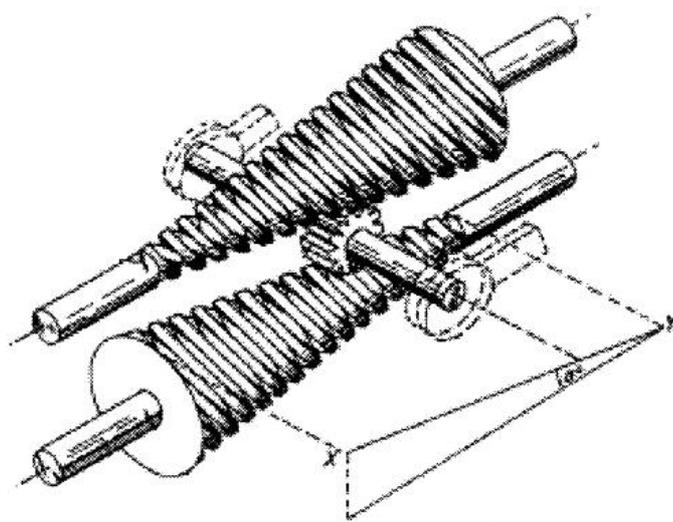


Figura 2.2 – CVT Conitorque [European Patent Office, 2007].

Os princípios de funcionamento e de controle são extremamente simples, contudo, a eficiência tende a ser baixa devido ao deslizamento e fricção entre os dentes (os cones possuem as características de um parafuso sem-fim).

Desta forma, as transmissões automotivas baseadas puramente em engrenagens presentes no mercado apresentam relações escalonadas, possuindo como principais características a grande confiabilidade, vida útil e custos relativamente baixos.

A figura 2.3 mostra uma transmissão manual para caminhões, produzida pela empresa *Rockwell*, com 9 razões de velocidades.

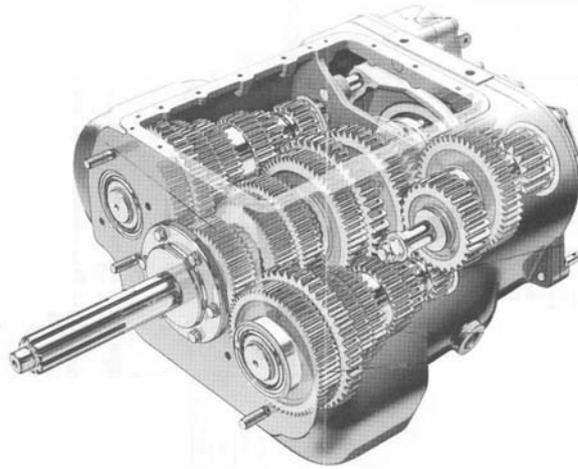


Figura 2.3 – Transmissão por engrenagens Rockwell [Fitch, 1993].

Tais transmissões podem apresentar número de razões de velocidades ainda maior (15 a 20). Nesses casos, devido à superposição parcial das faixas de trabalho correspondentes a cada relação de transmissão, a operação econômica do veículo apenas pode ser obtida por meio de motoristas bem treinados. A troca das razões de velocidades pode ser realizada de forma manual ou semi-automática.

### 2.1.2 Sistemas Hidromecânicos

Segundo Gott, 1991, a invenção do acoplamento hidráulico, principal componente das transmissões conhecidas por Hidramáticas (ou *Hydra-Matic*<sup>TM</sup> GM), é creditada a Hermann Foettinger, engenheiro eletricitista da empresa alemã Vulcan, o qual aplicou pela primeira vez esse princípio em 1905, em turbinas navais. Na realidade, o sistema funciona como um acoplamento hidráulico (relação de transmissão 1) ou conversor/amplificador de torque (relação de transmissão de até 3,5), dependendo da ausência ou presença do estator interno. Fitch, 1993, descreve o funcionamento de um conversor de torque da empresa Allison Transmissions, cujos elementos internos são vistos na figura 2.4.

Tanto num acoplamento como num conversor de torque, as palhetas da bomba (a qual é conectada ao motor), direcionam o fluido hidráulico para as palhetas da turbina. O fluido entra na turbina pelo diâmetro externo e sai pela parte interna do rotor. No caso de um acoplamento hidráulico, quando da partida do motor, a turbina inicia um regime de aceleração até atingir a velocidade da bomba. Isso proporciona, além do acoplamento em si, um isolamento hidráulico contra choques e sobrecargas.

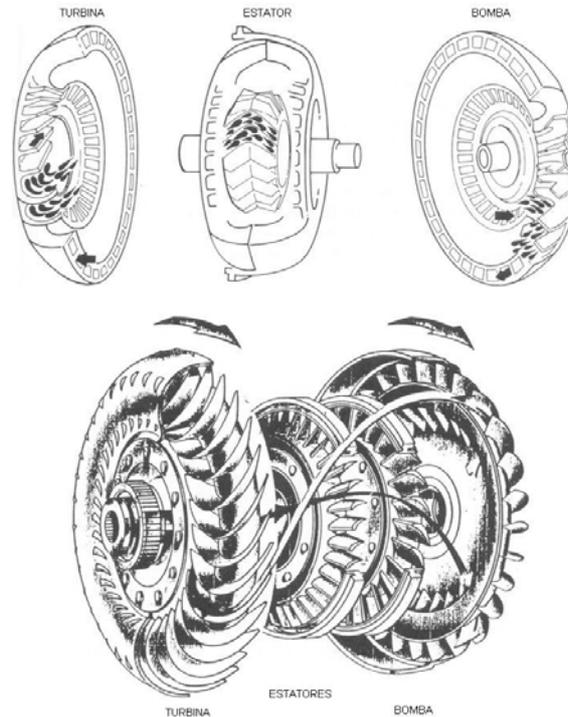


Figura 2.4 – Conversor de torque Allison [Fitch, 1993].

O estator tem por função redirecionar o fluido que sai da turbina, no sentido de acionamento da bomba. Tal redirecionamento do fluido efetivamente eleva o torque fornecido pelo conversor, auxiliando o motor a vencer as cargas. Portanto, por meio desse sistema relativamente simples, pode-se obter relações de transmissão próximas a 3,5.

Os conversores atuais possuem no estator uma embreagem unidirecional ou roda livre, acionada a partir de uma velocidade específica. Em outras palavras, até determinado valor de velocidade, o estator é fixo, permitindo a recirculação do óleo e, efetivamente, ampliando o torque. A partir desta velocidade, o estator começa a girar com a turbina, passando o sistema a atuar como um acoplamento (relação de transmissão unitária). Como o conversor de torque não apresenta a faixa de transmissão suficiente para a maior parte das aplicações, o sistema é complementado por redutores baseados em engrenagens. Nesse caso, frequentemente é utilizado um redutor epicicloidial, por sua forma compacta e pela possibilidade de fácil alteração entre as configurações solar, estrela e planetária [Dudley, 1994; Litvin e Fuentes, 2004; Shigley et al. 2005]. Além disso, dispositivos para o controle do ângulo das palhetas do estator e o uso de dois ou mais estágios no estator, permitem a obtenção de maior eficiência e desempenho em regimes específicos.

A figura 2.5 apresenta um sistema de transmissão hidromecânica usado em veículos comerciais.

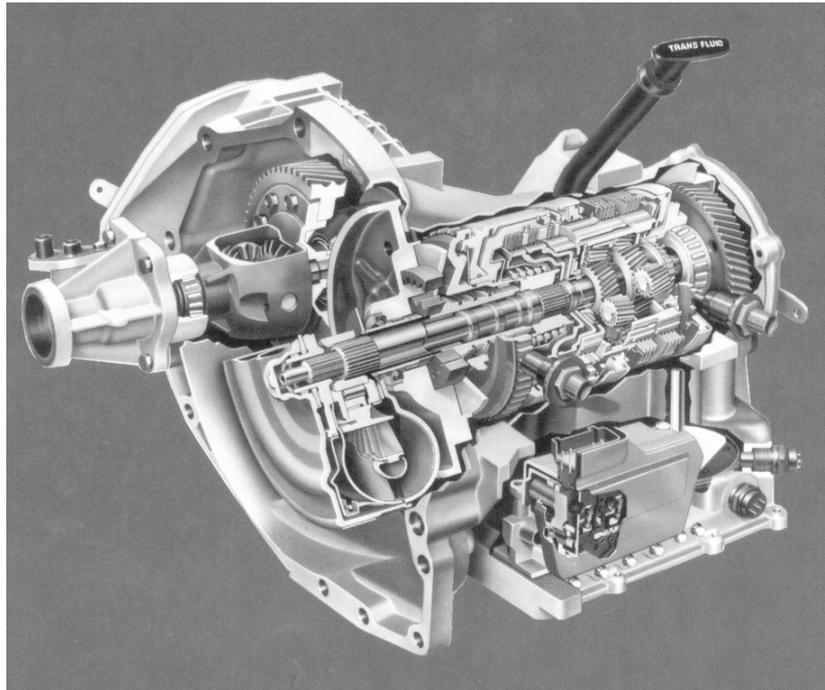


Figura 2.5 – Transmissão hidromecânica [Gott, 1991].

### 2.1.3 Sistemas CVT de Transmissão da Potência por Fricção e por Tração

Há um grande número de sistemas CVT's baseados nos princípios de fricção e de tração. Essas transmissões foram usadas nos primeiros automóveis, tendo a indústria automobilística se debruçado sobre o tema desde então. A partir de determinado período, por questões relacionadas principalmente à durabilidade, essas transmissões perderam espaço para as engrenagens [Gott, 1991].

A distinção entre os princípios de transmissão de potência por fricção e por tração está na descrição tribológica dos fenômenos que ocorrem na região de interface entre os elementos móveis do sistema. De forma resumida, pode-se afirmar que as transmissões por fricção operam a seco (ou com lubrificação deficiente) enquanto que os sistemas de tração utilizam um fluido com características especiais, responsável pela transmissão do movimento e por evitar o contato entre as faces dos elementos móveis. Na realidade, em algumas transmissões CVT's que operam pelo princípio de tração, dependendo das condições de carregamento e lubrificação, pode haver contato seco entre as partes. Portanto, a diferenciação entre um e outro princípio de transmissão de movimento nem sempre é muito clara.

Serão descritos a seguir os sistemas já consolidados ou, aparentemente, com boa possibilidade de sucesso comercial.

### 2.1.3.1 CVT por Polias Variadoras ou Expansivas (*Belt CVT Drive, Chain CVT Drive*)

Trata-se de uma transmissão mecânica muito versátil, cujo princípio, desenvolvido no final do século XIX, é baseado no uso de uma correia (ou corrente) e duas polias cônicas bipartidas. O deslocamento axial relativo das semi-peças de cada polia faz com que o raio de contato com a correia seja alterado. Quando as semi-peças de uma polia se afastam, as da polia oposta se aproximam. O resultado é uma variação contínua da relação de transmissão ao longo de uma faixa de trabalho. A figura 2.6 mostra o sistema em duas condições de operação diferentes: considerando-se a polia da esquerda como a de entrada, na figura 2.6(a) há uma redução da velocidade, enquanto que, na condição representada pela figura 2.6(b), há uma ampliação da velocidade.



Figura 2.6 – CVT por polias variadoras ou expansivas: a) redução da velocidade e b) ampliação da velocidade.

Trata-se de um sistema muito utilizado em motocicletas, quadriciclos (ATV – *All Terrain Vehicle*), veículos para neve, equipamentos agrícolas e industriais; usualmente com correias poliméricas reforçadas. Apesar disso, seu uso comercial em automóveis é relativamente recente, pois, nesse caso, os requisitos de vida útil dos componentes e os valores de torque a serem transmitidos são elevados. Como a capacidade de transmitir potência está relacionada ao coeficiente de atrito entre os componentes, ocorrem problemas de deslizamento, aquecimento e degradação das propriedades (e da própria integridade) do material da correia, nos regimes de operação usualmente severos da área da mobilidade [Gott, 1991].

Diante de requisitos operacionais tão elevados, as correias poliméricas foram substituídas por elementos de transmissão de potência metálicos. Dois sistemas se consolidaram no mercado: *i*) a corrente (*chain*), desenvolvida em paralelo pelas empresas LUK (Alemanha) e Borg-Warner (USA) e *ii*) a correia segmentada (*metal V-belt* ou *push-belt*) desenvolvida pela Van-Doorne Transmisie – VDT (Holanda), hoje uma divisão da Bosch alemã. A figura 2.7 mostra os componentes fabricados pela LUK e pela VDT.

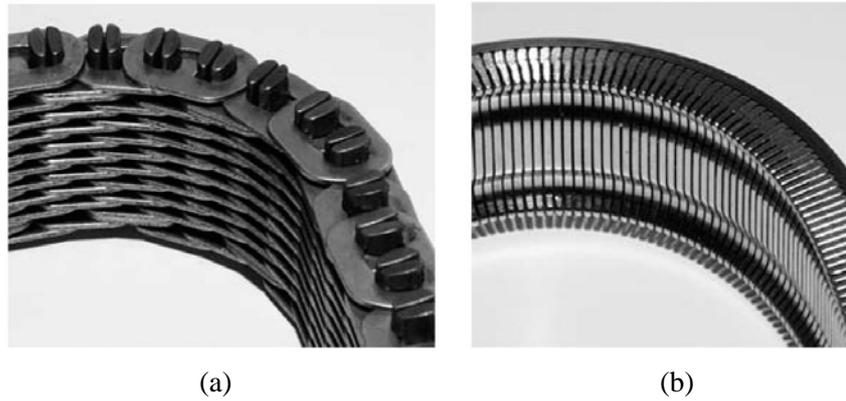


Figura 2.7 - Elementos de transmissão: a) corrente, produzida pela empresa LUK, b) correia segmentada, da VDT [Pfeiffer et al., 2004].

Tais elementos metálicos de transmissão atualmente são utilizados por diversos fabricantes de automóveis, com os mais diversos nomes comerciais. Porém, inicialmente, as correias segmentadas e correntes foram empregadas apenas em automóveis de valor elevado. No caso específico da corrente, o sistema *Multitronic*, da empresa *Audi*, lançado no ano 2000, foi responsável por uma grande divulgação deste novo conceito de transmissão no mercado mundial. Por outro lado, vários trabalhos foram realizados no sentido de adaptar estes sistemas a automóveis de menor porte [Hirano et al., 1991; Pelizzari, 2003; Albuquerque, 2003]. Como resultado, alguns fabricantes de veículos já oferecem este tipo de transmissão, tanto como item de série como opcional, em veículos pequenos e médios.

Apesar de operarem com lubrificação, Srivastava e Haque, 2009a e b, denominam os CVT's baseados em corrente e em correia segmentada como transmissões de fricção limitada (*friction-limited drives*). Esta idéia está de acordo com os experimentos realizados por Pfeiffer et al., 2004, que mostram que, principalmente no caso das correntes de transmissão, devido às cargas e deformações que ocorrem nas semi-peças das polias e na própria correia, o filme de fluido elasto-hidrodinâmico é expulso da região de interface dos elementos. Desta forma, o resultado é um princípio de lubrificação intermediário entre as zonas elasto-hidrodinâmica e de contorno da curva de Stribeck.

Além disso, Srivastava e Haque, 2009b, ressaltam que as metas de melhor desempenho e menor consumo de combustível até o momento não foram atingidas, pelo menos de forma significativa, em veículos comerciais equipados com CVT's de corrente ou correia segmentada. Muitos efeitos indesejáveis e perdas surgem da interação dinâmica entre polias e correias/correntes, como o *stick-slip* e as vibrações auto-excitadas (principalmente no caso das correntes, devido aos impactos sucessivos dos pinos com as polias). Portanto, os algoritmos de controle desses CVT's devem estar preparados para evitar tais perdas e fenômenos dinâmicos.

Por outro lado, apesar da simplicidade de operação da transmissão por polias expansivas, o mesmo não pode ser dito sobre os dispositivos usados para afastar e aproximar as semi-peças das polias. Os sistemas de controle menos sofisticados, utilizados em motocicletas e em veículos de recreação, baseiam-se no balanço das forças dinâmicas e de molas. Quando a demanda por torque é maior, a velocidade do motor diminui, o que faz com que as semi-partes componentes da polia movida se aproximem, por força de uma ou mais molas. Isto causa uma ampliação da relação de transmissão. Já nas velocidades maiores, ocorre o efeito inverso. Observa-se grande atraso da resposta perante a variação do torque de carga. Para melhorar o desempenho do CVT em veículos comerciais maiores, os mecanismos de controle são bem mais complexos [Srivastava e Haque, 2009a e b; Pfeiffer et al., 2004; Lebrecht et al. 2004; Hirano et al., 1991].

Num resumo, devido aos efeitos indesejáveis provenientes da interação dinâmica entre correia/corrente e polias, bem como à quantidade de sinais que deve ser monitorada para um funcionamento eficaz e eficiente da transmissão, os algoritmos de controle devem apresentar robustez elevada. Desta forma, o sistema de controle é parte crucial do desenvolvimento de uma transmissão CVT por polias expansivas, sendo que boa parcela de seu custo final se deve a tal sub-sistema.

A figura 2.8 mostra um CVT baseado em corrente, desenvolvido pelas empresas Borg-Warner Automotive e Suzuki Motor Co., para equipar o veículo Suzuki Cultus, de motorização 1.0 e 1.3 [Hirano et al., 1991].

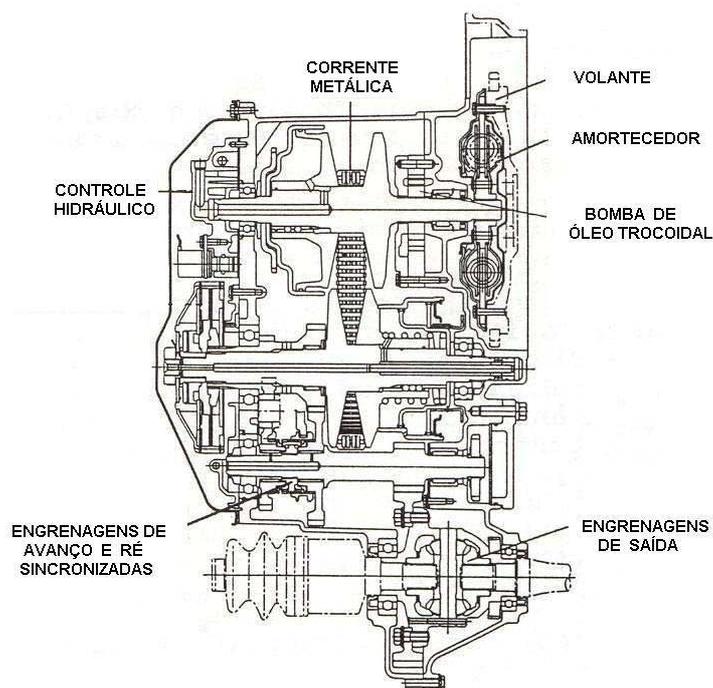


Figura 2.8 – Transmissão CVT do automóvel Suzuki Cultus [Hirano et al., 1991].

Na figura 2.8, observa-se a presença de um amortecedor hidráulico na entrada da transmissão, sem o qual podem ocorrer vibrações torcionais de grande magnitude no eixo primário. As polias expansivas desse eixo são atuadas hidráulicamente, com controle por servo-válvula, enquanto as polias do eixo secundário apresentam um controle de abertura por molas. O controlador eletrônico do sistema hidráulico monitora os sinais de pressão da linha hidráulica, da admissão do motor e da velocidade do volante do motor, bem como o sinal enviado por um sensor localizado no pedal do acelerador. As malhas utilizam controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) e *Feed Forward*, sendo as funções de transferência de ordem elevada.

Segundo Huston et al., 1999, os lubrificantes utilizados neste tipo de transmissão mecânica são semelhantes aos encontrados nas transmissões automáticas, tratando-se dos lubrificantes automotivos mais complexos. Alguns dos requisitos para estes fluidos são a estabilidade térmica e à oxidação, bem como a manutenção da viscosidade apropriada numa faixa de variação de temperatura de operação de -40 a 150°C. Segundo Wienecke e Bartz, 2001, a eficiência global de um sistema de transmissão mecânica está diretamente relacionada com o desempenho do fluido lubrificante. A solução ótima para casos específicos é obtida pela escolha correta do óleo de base e dos aditivos (por exemplo, para ampliação do índice de viscosidade, para operação de extrema pressão, para melhorar a resistência à oxidação, etc.).

### **2.1.3.2 CVT's de Tração (Traction Drives)**

Tratam-se de sistemas em que o meio de transmissão da potência é a película de fluido presente entre os elementos mecânicos de movimentação, ou seja, o contato entre as faces metálicas desses elementos é substituído por um contato dito tribológico. A condição de lubrificação na região de interface é dita elasto-hidrodinâmica. Devido aos níveis extremos de pressão na região de interface, há considerável aquecimento local e, em consequência, a viscosidade do fluido sofre grande variação. A habilidade de um lubrificante em transmitir potência através do filme elasto-hidrodinâmico é determinada pela propriedade chamada coeficiente de tração; sendo esta propriedade dependente da estrutura molecular e da interação entre moléculas perante variações na pressão e temperatura. Infelizmente, os processos físicos de interação molecular que proporcionam uma relação de dependência da viscosidade com a pressão e, portanto, um elevado coeficiente de tração ao fluido, também são responsáveis por uma forte correlação entre a viscosidade e a temperatura. Desta forma, estes fluidos apresentam viscosidade elevada em baixas temperaturas de operação [Huston et al., 1999; Murakami et al. 1999]. Isto representa um forte limitante de mercado, pois, atualmente, os veículos são voltados para o mercado global, ou seja, para operação nas mais diversas condições de temperatura.

### 2.1.3.2.1 CVT por Rolamento (Rolling Traction CVT)

Neste sistema, o torque é transmitido por meio do contato entre dois anéis e esferas intermediárias [Akehurst et al., 2001; Milner, 2000; Orbital Traction, 2009]. A figura 2.9 mostra uma das formas construtivas deste tipo de transmissão, conhecida por CVT *Milner*, tendo número de patente GB2342130 [Milner, 2000]. Pelo deslocamento axial do anel externo, os pontos de contato das esferas são alterados, bem como o anel interno (cujo movimento axial é livre). A presença de uma mola mantém o contato entre esferas e anel interno. O sistema possui semelhança com os rolamentos de contato angular, porém, sua função é transmitir torque por meio do giro de esferas e anéis. Portanto, o deslocamento axial do anel externo faz com que o ângulo de contato entre esferas e anéis seja alterado, o que causa modificação da relação de transmissão.

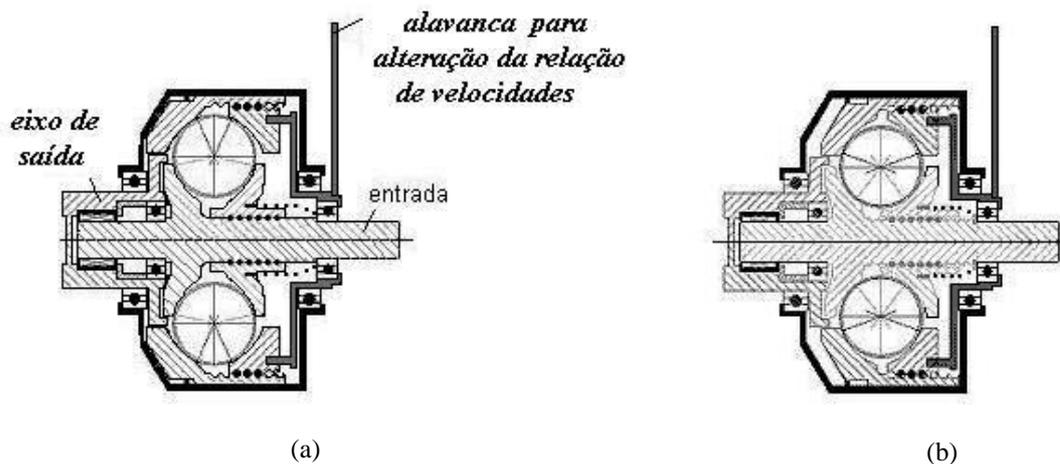


Figura 2.9 – CVT Milner: a) razão de velocidades elevada e b) razão de velocidades baixa [Orbital Traction, 2009].

A figura 2.10 mostra os componentes internos de um CVT Milner.

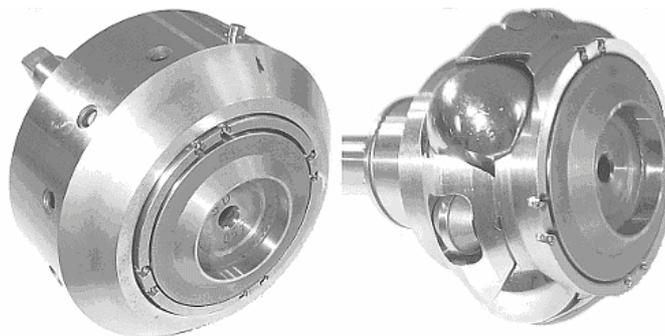


Figura 2.10 – CVT de rolamento [Akehurst et al., 2001].

Testes de desempenho sobre um CVT Milner realizados por Akehurst et al., 2001, mostraram que o sistema apresenta alta capacidade de carga. Contudo, devido à elevada massa das esferas, o que resulta em altos valores de pressão na região de contato durante o movimento; a vida útil decaiu sensivelmente com o incremento da velocidade. Por outro lado, o desenvolvimento de novos materiais e a otimização do projeto dos componentes principais pode trazer resultados expressivos no futuro.

#### 2.1.3.2.2 CVT Toroidal

Na década de 1920 a empresa Citroën apresentou, no Salão do Automóvel de Paris, o protótipo de uma transmissão toroidal utilizando discos. Na época, a General Motors adquiriu os direitos de patente e incumbiu a divisão Buick de implementar um CVT baseado nesse princípio. A figura 2.11 apresenta este CVT Buick, desenvolvido entre 1928 e 1934 [Gott, 1991].

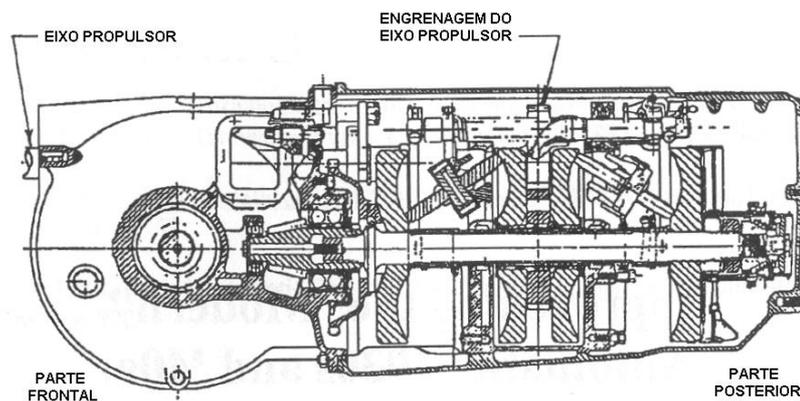


Figura 2.11 – CVT Toroidal Buick 1928-1934 [Gott, 1991].

Nesse período, o setor de desenvolvimento da Buick aprofundou tópicos importantes para a operação dos CVT's, principalmente no que diz respeito ao sistema de controle e ao desenvolvimento de aços de elevada resistência à fadiga de contato. Prontamente, esses aços passaram a ser usados por outros setores (por exemplo: fabricantes de rolamentos). Já o sistema de controle, até então inédito, baseava-se na medição da velocidade do motor e na abertura da admissão, a qual está diretamente relacionada com a demanda de potência. Tal princípio é a base dos controladores encontrados em CVT's atuais [Gott, 1991].

Contudo, o lançamento precipitado de um CVT toroidal pela Austin inglesa, o qual apresentou baixa durabilidade e capacidade de torque, causou impacto negativo no mercado. Além disso, o CVT Buick apresentava peso e custos elevados, o que era incompatível com o

período da Grande Depressão pelo qual passava a economia americana e mundial. Em função disso, o sistema não foi lançado comercialmente. O trabalho de desenvolvimento desse tipo de transmissão teve continuidade até o início da década de 1960, sendo então definitivamente abandonado, em função do sucesso de outros tipos de transmissões [Gott, 1991].

Em 1978, a empresa NSK, fabricante de mancais de rolamento e componentes automotivos, iniciou o desenvolvimento de um CVT toroidal de alto desempenho para uso automotivo. Segundo Machida et al., 1995, tal sistema era baseado no princípio “meio-toroidal”, desenvolvido por Charles Kraus na década de 1950, o qual é visto na figura 2.12.

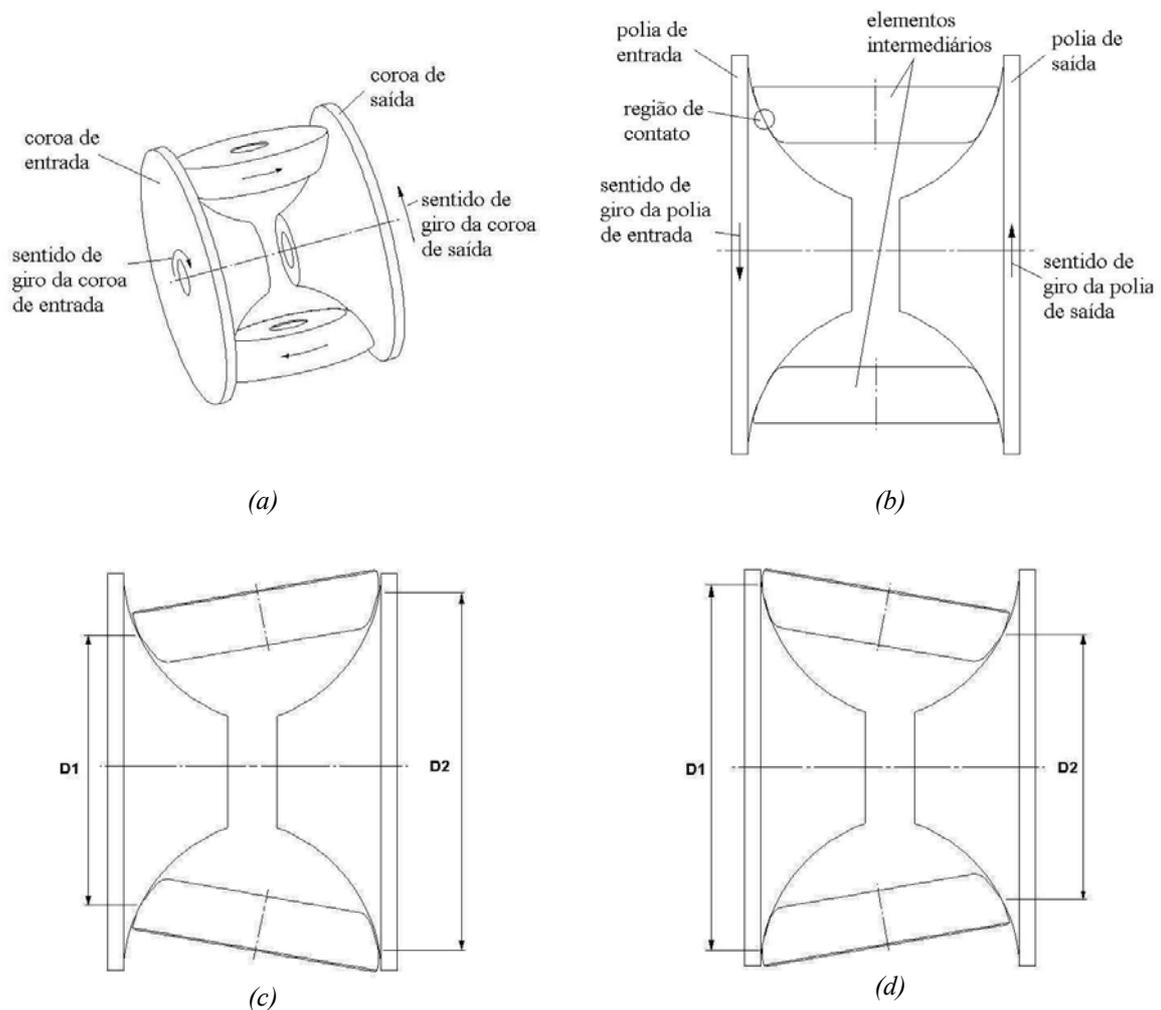


Figura 2.12 – CVT meio-toroidal: a) vista em perspectiva, b) relação de transmissão unitária, c) redução de velocidade e d) ampliação de velocidade.

Segundo Machida et al., 1995, a vantagem do “meio-toroidal” em relação ao sistema anterior é o fato de proporcionar forças de contato entre rolos e discos menores. No sistema original, quando as relações de transmissão eram elevadas, o nível da pressão na região de contato era extremo, o que causava uma baixa vida em fadiga. O trabalho desenvolvido pela

NSK, bem como por outros fabricantes e centros de pesquisa, avançou a fronteira do conhecimento em vários campos, com a participação de várias empresas e pesquisadores em setores específicos [Shinojima et al., 2004; Tanaka et al., 2004]. Para citar um exemplo, neste período houve um maior desenvolvimento de fluidos de tração, inicialmente elaborados para uso em engrenagens, mancais de rolamentos e outras aplicações de alta carga, por empresas como a Monsanto – USA (hoje SantoLubes), fabricante dos fluidos Santotrac [Green e Wygant, 1974]. Neste sentido, entre outras empresas, merece destaque o trabalho desenvolvido pela japonesa Idemitsu Kosan [Tsubouchi et al., 1992; Murakami et al., 1999]. Também foram desenvolvidos processos para obtenção de um aço de altíssima pureza (talvez o mais puro produzido atualmente) para confecção dos discos e rolos.

Em 1986, a fabricante de automóveis Nissan tornou-se parceira no processo de desenvolvimento, com a condição de que o sistema pudesse ser aplicado em carros médios e grandes. No entanto, apenas em 1999 esta empresa pode lançar no mercado dois modelos de veículos com CVT toroidal: o Cedric e o Gloria. Estes CVT's Nissan passaram a ser fabricados pela subsidiária Jacto, com o nome comercial de transmissão *Extroid*. Atualmente, estes veículos não são mais fabricados, e seus sucessores não mais apresentaram o CVT toroidal, nem mesmo como item opcional. Segundo informações da Nissan, divulgadas na imprensa, três fatos contribuíram para isso: *i)* o alto custo do sistema, *ii)* a perda das propriedades lubrificantes do fluido em baixas temperaturas e *iii)* o avanço das transmissões com correias ou correntes e polias expansivas.

A figura 2.13 mostra o núcleo do sistema NSK, denominado *Powertoros*<sup>TM</sup>.



Figura 2.13 – Núcleo da transmissão meio-toroidal *Powertoros*<sup>TM</sup> [NSK, 2006].

Um sistema cada vez mais empregado na área da mobilidade é o IVT toroidal da empresa inglesa Torotrak, mostrado na figura 2.14. Esta transmissão é composta por um variador toroidal associado a um redutor epicicloidial, o qual trabalha como um elemento de subtração das velocidades de saída do variador e do motor.

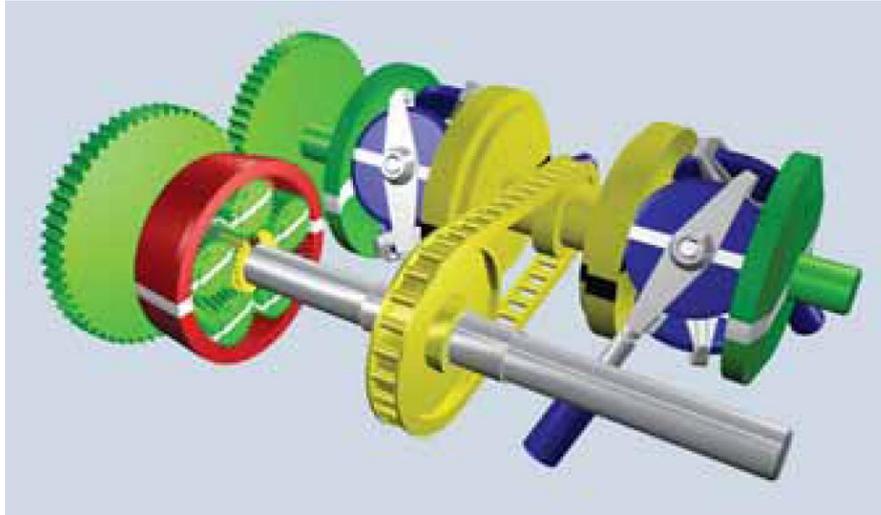


Figura 2.14 – Componentes do IVT toroidal Torotrak [Torotrak, 2009].

Na figura 2.14, os discos azuis correspondem aos elementos internos da transmissão toroidal, os componentes acoplados ao motor (e com a velocidade deste) estão em verde (incluindo o suporte das planetárias), enquanto que os componentes acoplados à saída do variador toroidal estão em amarelo.

A figura 2.15 mostra o princípio de operação da transmissão Torotrak por meio de uma vista superior.

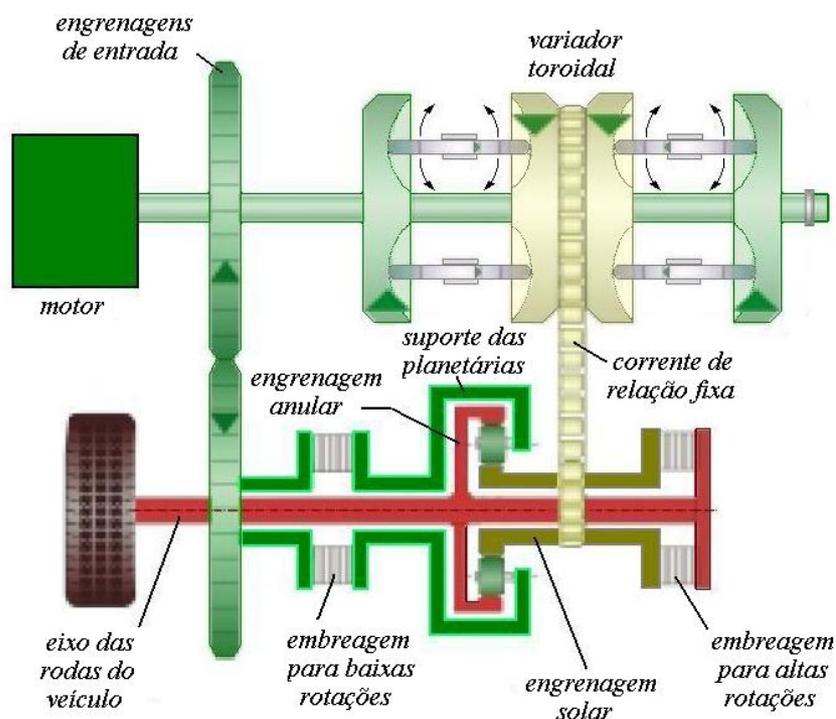


Figura 2.15 – Princípio de operação do IVT toroidal Torotrak [Torotrak, 2009].

Observa-se que a saída do variador toroidal aciona a engrenagem sol do redutor epicicloidial, enquanto que o suporte das planetárias é acionado pelo motor do veículo (por meio de engrenagens de relação 1:1). Por fim, a engrenagem anelar é responsável por acionar o eixo (ou os semi-eixos) das rodas do veículo. O resultado da subtração das velocidades no redutor epicicloidial é uma operação extremamente flexível, ou seja, mantendo-se uma velocidade constante no eixo do motor, por meio da variação da velocidade da engrenagem sol, as rodas do veículo podem girar para frente, para trás ou se manterem estacionárias.

O sistema possui ainda duas embreagens para regimes de baixa e alta velocidade. Nos períodos em que é necessário fornecer às rodas um torque elevado, a embreagem de baixa velocidade mantém o redutor epicicloidial operante. Já nas altas velocidades, esta embreagem é desativada, enquanto que a segunda embreagem passa a operar, transmitindo a potência diretamente do variador toroidal para as rodas.

Além do IVT, a empresa Torotrak também produz CVT's toroidais para vários campos da mobilidade, desde pequenos veículos até tratores.

## 2.2 Engrenagens Faciais

Um sistema de transmissão facial é composto por um pinhão cilíndrico de dentes retos ou helicoidais, de perfil evolvente, e uma coroa facial conjugada [Dudley, 1994; Litvin et al., 1994, 2004 e 2005; Heath et al., 2002; Guingand et al., 2005; Barone et al., 2004]. A figura 2.16 mostra um par de engrenagens de uma transmissão facial.

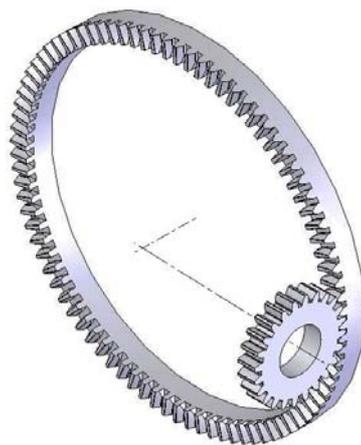


Figura 2.16 – Par pinhão e coroa facial.

Quando os eixos se interceptam, a transmissão é dita centrada ou de eixos interceptantes (*on center*) e, caso contrário, fora de centro (*off center*). Usualmente o ângulo entre eixos destas transmissões é próximo a  $90^\circ$ , sendo muito freqüente o uso de eixos cruzados.

Desta forma, este tipo de transmissão é, funcionalmente, semelhante ao engrenamento cônico. A figura 2.17 mostra as superfícies primitivas de duas transmissões – cônica e facial – ambas com o mesmo ângulo entre eixos  $\gamma$ .

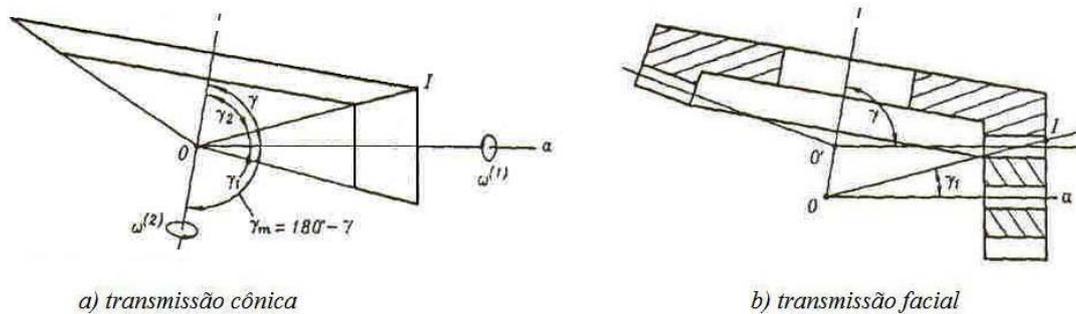


Figura 2.17 – Vistas de transmissões cônica e facial [Litvin et al., 1994 e 2004].

O eixo de rotação instantâneo  $OI$ , presente em ambas as transmissões da figura 2.17, representa a linha de tangência dos cones primitivos. Nas engrenagens cônicas, as proporções dos dentes são definidas com base neste eixo, enquanto que, na transmissão facial, os dentes são definidos sobre a linha  $O'I$ , ou seja, o cilindro primitivo do pinhão. Este desvio da linha  $O'I$  em relação à linha  $OI$  ocasiona uma forma de dente relativamente complexa na coroa. Tais dentes apresentam tendência à formação de uma aresta pontiaguda na região mais externa (diâmetro maior) e interferência na região interna, correspondente ao diâmetro menor. Litvin, 1994 e 2004, e Zhang e Wu, 1997, recomendam que a largura dos dentes da coroa esteja compreendida entre as distâncias  $L_1$  e  $L_2$ , correspondentes, respectivamente, ao raio interno no qual começa a surgir a interferência e ao raio externo no qual as faces opostas de um dente se encontram, formando uma aresta no topo deste dente. A figura 2.18 mostra as faces que formam um dente de uma coroa facial, apresentando uma família de sucessivas linhas de contato, bem como os raios limítrofes de singularidade  $L_1$  e  $L_2$  [Litvin e Fuentes, 2004].

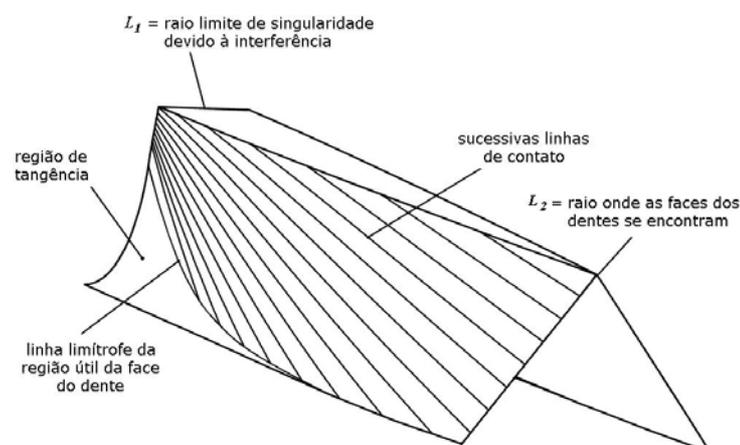


Figura 2.18 – Faces dos dentes de uma engrenagem facial [Litvin e Fuentes, 2004].

Estes autores colocam que, caso a ferramenta de geração (*shaper*) usada na fabricação da coroa facial apresente o mesmo número de dentes do pinhão, o contato entre os dentes se dá sobre uma linha. Contudo, durante o movimento, devido aos erros de fabricação e montagem da transmissão, esta linha de contato é modificada. O erro no ângulo  $\gamma$  entre eixos é particularmente danoso para a transmissão, por causar contato na região da borda dos dentes e, conseqüentemente, elevada concentração de tensões. Desta forma, para que a região de contato seja concentrada numa região, a ferramenta de corte deve apresentar número maior de dentes (de 1 a 3) que o pinhão. Guingand et al., 2005, comparam vários casos de carregamento, com contato linear e localizado, com e sem desalinhamentos, concluindo que, numa transmissão sem erros, o contato linear é vantajoso. Nos casos em que um erro de ângulo foi propositalmente inserido nos experimentos, o uso de um pinhão de menor número de dentes do que a ferramenta resultou em tensões elevadas na região de contato. Segundo estes autores, a solução ótima seria o uso de um pinhão com o mesmo número de dentes da ferramenta de corte, porém, com dentes coroados.

Estes resultados estão de acordo com recentes trabalhos na área de transmissões por engrenagens, os quais se baseiam em procedimentos experimentais e equações analíticas para determinar a região de contato (*TCA = Tooth Contact Analysis*). Desta forma, por meio da análise de elementos finitos, são observadas as tensões e deformações na região de contato, com o objetivo final de especificar alterações micro-geométricas na forma do dente, as quais resultam em maior região de contato, distribuição da carga entre dentes e menor variação na relação de transmissão durante o movimento [Barone et al., 2004; Litvin et al., 2005; Mao, 2006; Kawalec et al., 2006].

Segundo Flinn, 1997 e Litvin e Fuentes, 2004; um exemplo de uso de engrenagens faciais está no acionamento de rotores de helicóptero, como pode ser visto na figura 2.19.

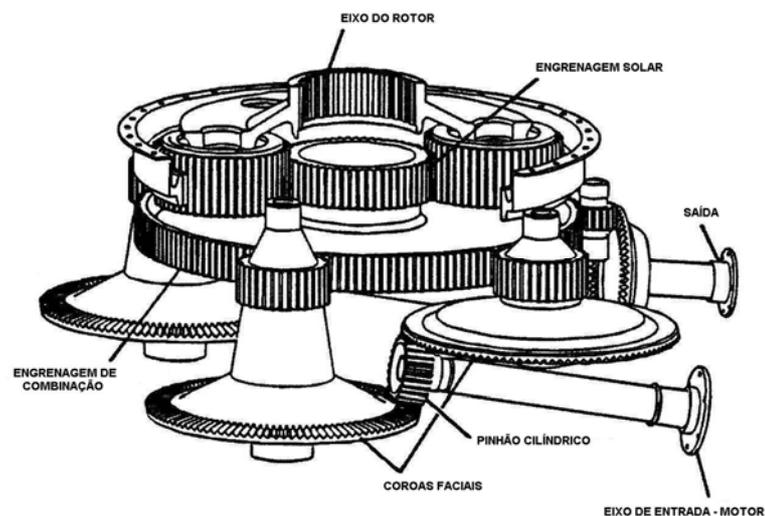


Figura 2.19 – Transmissão facial usada em rotor de helicóptero [Litvin e Fuentes, 2004].

Segundo Flinn, 1997, engrenagens faciais endurecidas por tratamento térmico e retificadas pelo processo contínuo desenvolvido por Litvin et al., 2000, permitem a produção de transmissões para o setor aeroespacial até 40% mais leves. O surgimento deste processo de retificação foi de grande importância, pois ampliou consideravelmente o campo de aplicação das transmissões faciais; haja vista que, os processos de corte (*hobbing*) e de acabamento dos dentes (*shaving*), anteriormente empregados, não permitiam o trabalho sobre materiais de elevada dureza. Desta forma, atualmente estão sendo empregadas engrenagens menores, mais resistentes e silenciosas do que as anteriores. A transmissão mostrada anteriormente na figura 2.19 apresenta um pinhão cilíndrico movendo duas engrenagens faciais, as quais acionam uma engrenagem de combinação, ou seja, o torque é dividido entre as coroas faciais e somado nesta última engrenagem. Isto só é possível por meio de engrenagens de exatidão elevada.

O processo de fabricação de engrenagens faciais apresenta custo consideravelmente menor do que o das transmissões similares, como as engrenagens espirais. Isto porque, pelo fato de apresentarem uma geometria mais simples, são fabricadas em máquinas menos complexas [Flinn, 1997].

A figura 2.20 apresenta o sistema de geração por pinhão de corte, tradicionalmente conhecido por processo *Fellows*. Este processo de fabricação proporciona engrenagens de boa qualidade, porém, não é adequado para o trabalho em materiais de alta dureza e apresenta uma baixa produtividade.

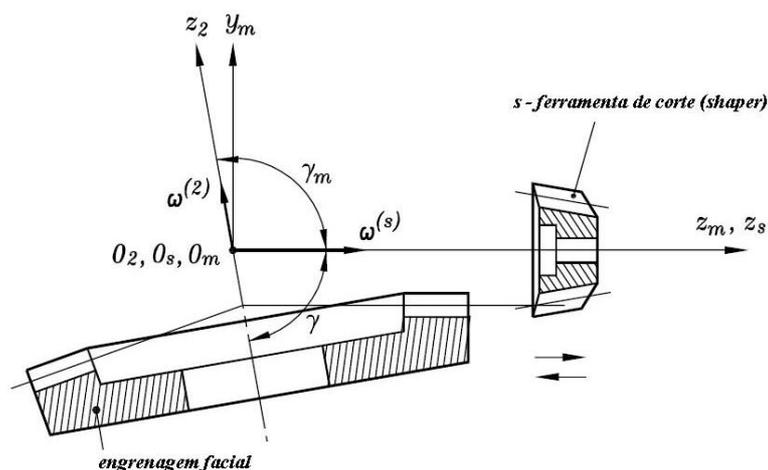


Figura 2.20 – Geração de uma coroa facial por pinhão de corte [Litvin e Fuentes, 2004].

O processo desenvolvido por Litvin et al., 2000, é baseado em ferramentas de corte e retificação helicoidais. A ferramenta apresenta uma operação semelhante a um sem-fim, gerando ou retificando o perfil dos dentes com exatidão e com produtividade elevada.

A figura 2.21 mostra uma engrenagem em processo de retificação do perfil dos dentes. O pinhão, que irá operar com esta engrenagem, está desenhado em linhas tracejadas. A forma dos sulcos do rebolo é diferente do perfil dos dentes do pinhão, porém, ao longo do movimento indexado do rebolo e da engrenagem, o envelope das curvas que formam os dentes da coroa é idêntico ao que seria formado pelo pinhão. À direita do rebolo é mostrada a ferramenta de dressagem, empregada para dar forma a este rebolo.

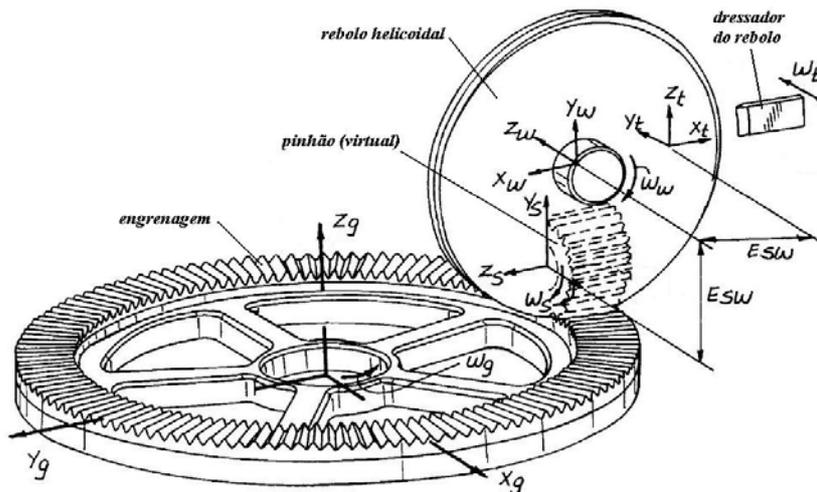


Figura 2.21 – Retificação de uma engrenagem facial por rebolo helicoidal [Litvin et al., 2000].

A figura 2.22 mostra as ferramentas helicoidais atualmente utilizadas no processo de fabricação de engrenagens faciais: (a) para geração e (b) para retificação (rebolo).



Figura 2.22 – Ferramentas para fabricação de engrenagens faciais [Litvin et al., 2000].

Segundo Flinn, 1997, os custos menores de fabricação não implicam numa transmissão de menor qualidade. As engrenagens faciais apresentam uma grande faixa de

relações de transmissão possíveis, o que dá flexibilidade durante a atividade de projeto, e, além disso, apresentam boa tolerância a erros de posicionamento axial do pinhão.

Nenhuma das publicações consultadas apresenta uma comparação do rendimento de transmissões faciais em relação às cônicas de dentes retos, espirais ou hipoidais. Contudo, pelos exposto nos trabalhos apresentados, duas alternativas podem ser levantadas: a) a retificação dos dentes proporciona operação silenciosa e exatidão, o que significa que o rendimento das engrenagens faciais é semelhante ou até maior do que o das engrenagens cônicas; ou b) o rendimento das engrenagens faciais é menor (porém não a ponto de comprometer seu uso) mas as outras vantagens associadas à flexibilidade de projeto e facilidade de fabricação suplantam esta desvantagem.

### 2.3 Álgebra Linear e Geometria Diferencial Aplicadas às Transmissões por Engrenagens

Um dente de uma engrenagem, produzida por processo de geração, pode ser modelado por meio do envelope (ou envoltório) da família de curvas que surge durante o movimento relativo da engrenagem geradora [Litvin e Fuentes, 2004]. A figura 2.23 mostra o perfil que surge do processo de geração de uma engrenagem cilíndrica de dentes retos em duas situações: (a) sem interferência e (b) com o característico estreitamento da base.

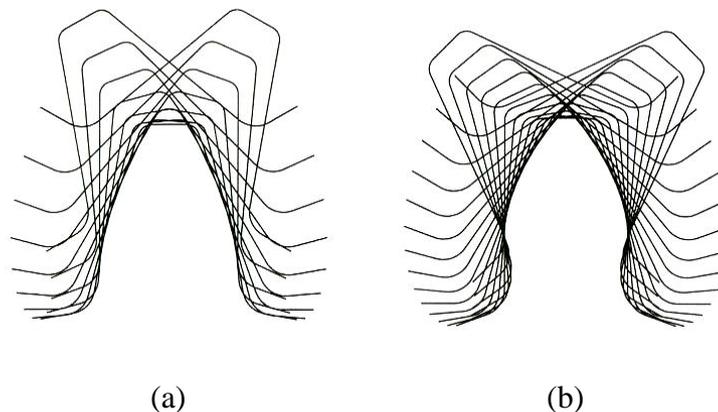


Figura 2.23 – Perfis de dentes sem e com interferência [Litvin e Fuentes, 2004].

Para obter uma família de curvas como a mostrada na figura 2.23, é preciso definir o perfil dos dentes da ferramenta de geração, bem como os movimentos relativos entre o par de engrenagens. Estes movimentos relativos se tratam de deslocamentos e rotações entre três sistemas de coordenadas: *i*) fixo à estrutura (também dito sistema global), *ii*) fixo à ferramenta de corte (e girando com esta) e *iii*) solidário à coroa e girando com esta. Tais deslocamentos e

rotações correspondem a transformações lineares aplicadas sobre vetores de posição, sendo estas transformações descritas pelas chamadas matrizes de transformação de coordenadas.

### 2.3.1 Matrizes de Transformação de Coordenadas

Sejam  $S_m$  e  $S_n$  dois sistemas de coordenadas com posição e orientação distintos e seja um ponto definido em  $S_m$  por meio do vetor [Litvin e Fuentes 2004, Litvin et al. 2005]:

$$r_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

A matriz que representa a transformação linear de  $r_m$  para o sistema  $S_n$  é:

$$M_{nm} = \begin{bmatrix} (i_n \cdot i_m) & (i_n \cdot j_m) & (i_n \cdot k_m) & (O_n O_m \cdot i_n) \\ (j_n \cdot i_m) & (j_n \cdot j_m) & (j_n \cdot k_m) & (O_n O_m \cdot j_n) \\ (k_n \cdot i_m) & (k_n \cdot j_m) & (k_n \cdot k_m) & (O_n O_m \cdot k_n) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Ou seja:  $r_n = M_{nm} r_m \quad (2.3)$

Tais matrizes de transformação de coordenadas homogêneas foram propostas por Denavit e Hartenberg e, simultaneamente, por Litvin, em 1955 [Litvin e Fuentes, 2004].

Os elementos das três primeiras linhas e colunas de  $M_{nm}$  formam a submatriz (3x3)  $L_{nm}$ , a qual representa a rotação (ou orientação) do sistema  $S_n$  em relação a  $S_m$ . Já os três primeiros elementos da última coluna representam o deslocamento ou distância entre as origens dos sistemas de coordenadas. O elemento (4,4) representa um fator de escala. No caso de transformações de coordenadas diretas, como as necessárias para determinação do perfil dos dentes de engrenagens, este elemento é unitário.

A submatriz  $L_{nm}$  apresenta uma propriedade importante:

$$L_{mn} = L_{nm}^{-1} = L_{nm}^T \quad (2.4)$$

Ou seja, a inversa da submatriz  $L_{nm}$  é sua transposta. Além disso, tomando-se apenas os três primeiros elementos de  $r_n$ , que representam as coordenadas do ponto, a matriz  $L_{mn}$  aplica a transformação linear sobre esses componentes como se o vetor fosse livre (deslizante), ou seja:

$$r_{m(3 \times 1)} = L_{mn} r_{n(3 \times 1)} \quad (2.5)$$

Para a determinação do perfil dos dentes de engrenagens frequentemente é necessário transformar ou deslizar vetores entre sistemas de coordenadas sucessivos. Esta é a forma mais simples de obter curvas geométricas associadas a engrenagens, como as curvas cicloidais ou epicycloidais.

### 2.3.2 Plano Tangente, Vetor Normal e de Velocidade sobre uma Superfície

Segundo Litvin e Fuentes, 2004, uma superfície é completamente definida por uma função posição de duas variáveis (ou seja, bidimensional) do tipo  $\vec{r} = f(u, v)$ . Fixando-se a variável  $u$  é obtida uma curva chamada *v-linha* e, da mesma forma, fixando-se a variável  $v$  é obtida a curva *u-linha*. Portanto uma superfície se trata da composição de curvas *u-linha* e *v-linha*.

A figura 2.24 mostra um vetor posição para um ponto específico sobre uma superfície. Observa-se que, no ponto instantâneo em análise, as tangentes às curvas *u-linha* e *v-linha*, obtidas pelas derivadas  $\vec{r}_u = \partial \vec{r} / \partial u$  e  $\vec{r}_v = \partial \vec{r} / \partial v$ , formam o plano tangente à superfície. Já o vetor normal é obtido pelo produto vetorial de  $\vec{r}_u$  e  $\vec{r}_v$ .

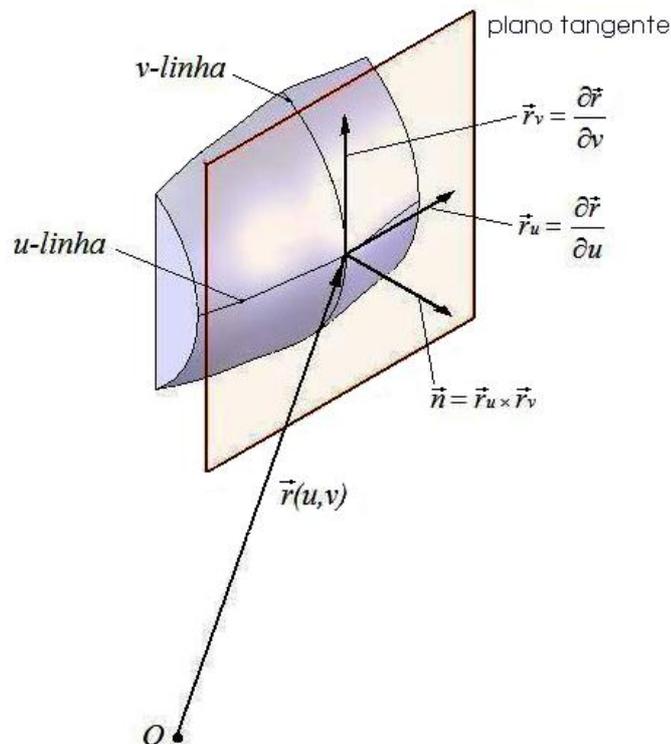


Figura 2.24 – Parâmetros geométricos de uma superfície ou casca.

Portanto, a equação do vetor normal à curva no ponto em análise é:

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \quad (2.6)$$

Na qual:

$\vec{n}$  = vetor normal ao ponto definido por  $\vec{r}(u, v)$ .

$\vec{r}_u$  = vetor tangente à curva  $u$ -linha que passa pelo ponto.

$\vec{r}_v$  = vetor tangente à curva  $v$ -linha que passa pelo ponto.

As condições para que esta equação possa ser aplicada são:  $\vec{r}_u \neq 0$  e  $\vec{r}_v \neq 0$  (vetores não nulos) e  $\vec{r}_u$  e  $\vec{r}_v$  linearmente independentes, ou seja  $\vec{n} \neq 0$ . Um ponto sobre uma superfície em que o plano tangente não existe é dito singular; neste caso,  $\vec{n} = 0$ . Assim, uma superfície pode ser completamente definida por uma função de duas variáveis. Contudo, usualmente essa superfície deve ser representada num sistema de coordenadas tridimensional. Para isso, é preciso obter o sistema de equações paramétricas que define as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ou seja:

$$x = f_1(u, v) \quad (2.7a)$$

$$y = f_2(u, v) \quad (2.7b)$$

$$z = f_3(u, v) \quad (2.7c)$$

Sendo  $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$  e  $\vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$ , então  $\vec{n}$  será:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} k \quad (2.8)$$

Considerando-se que uma superfície é formada por  $u$  e  $v$ -linhas, ou seja, esta superfície é o resultado da varredura das variáveis  $(u, v)$  dentro de intervalos especificados e, analisando-se novamente a figura 2.24, pode-se imaginar o vetor  $\vec{r}$  movimentando-se sobre a superfície para formá-la.

Derivando-se no tempo o vetor posição, obtém-se o vetor velocidade instantânea:

$$\vec{v}_r = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad (2.9)$$

Pela equação que define  $\vec{v}_r$ , observa-se que este vetor está sobre o plano tangente no instante em análise. Esta propriedade será utilizada mais adiante, para definir conjuntos de pontos instantâneos de contato entre faces de dentes de engrenagens.

### 2.3.3 Vetores de Velocidade numa Transmissão por Engrenagens

A figura 2.25 mostra dois cilindros primitivos que representam uma transmissão por engrenagens de eixos transversais.

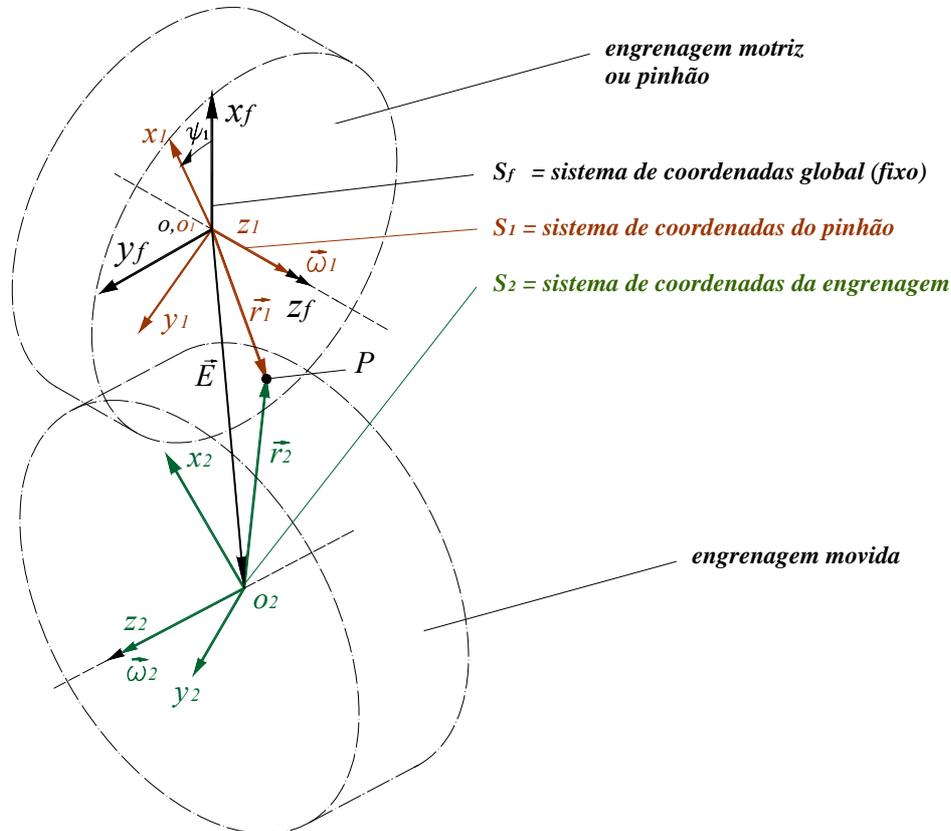


Figura 2.25 – Sistemas de coordenadas de um par de engrenagens.

Na transmissão da figura 2.25 estão indicados três sistemas de coordenadas:

- i)  $S_f$  – sistema fixo (ou global), solidário à estrutura de suporte das engrenagens,
- ii)  $S_1$  – sistema que gira com o pinhão e,
- iii)  $S_2$  – sistema de coordenadas que gira com a segunda engrenagem.

O eixo  $z_1$  do sistema  $S_1$  é o eixo em que está posicionado o vetor velocidade  $\vec{\omega}_1$ , da engrenagem motriz enquanto a segunda engrenagem gira em torno do eixo  $z_2$ , sobre o qual está o vetor velocidade  $\vec{\omega}_2$ . Já  $P$  representa um ponto instantâneo de contato das faces dos dentes das engrenagens motriz e movida, sendo que os vetores  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  representam a posição deste ponto nos respectivos sistemas de coordenadas  $S_1$  e  $S_2$ . O vetor  $\vec{E}$  representa a menor distância entre as origens  $O$  e  $O_2$  dos sistemas de coordenadas.

As equações de velocidade são:

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 \quad (2.10)$$

e:

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 \quad (2.11)$$

Nas quais:

$\vec{v}_1$  = vetor velocidade instantânea do ponto  $P$  devido ao giro em torno do eixo  $z$  do sistema  $S_f$ .

$\vec{v}_2$  = vetor velocidade instantânea do ponto  $P$  devido ao giro em torno do eixo  $z_2$  do sistema  $S_2$ .

$\vec{\omega}_1$  = vetor velocidade angular da engrenagem motriz (pinhão).

$\vec{\omega}_2$  = vetor velocidade angular da engrenagem movida.

A velocidade relativa é definida pela equação:

$$\vec{v}_{12} = -\vec{v}_{21} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad (2.12)$$

Esta equação pode ser entendida da seguinte forma: supondo que o ponto  $P$  da figura 2.25 represente o encontro instantâneo do ponto  $P_1$  sobre  $S_1$  (engrenagem motriz) e do ponto  $P_2$  sobre  $S_2$  (engrenagem movida); a velocidade  $\vec{v}_{12}$  é aquela que um observador, posicionado sobre o ponto  $P_2$  e observando o movimento de  $P_1$ , vê no instante de contato. Em outras palavras, o vetor  $\vec{v}_{12}$  representa uma velocidade de deslizamento no instante de contato. Já a velocidade  $\vec{v}_{21}$  é aquela que um observador, posicionado sobre o ponto  $P_1$  e observando o movimento de  $P_2$ , vê no instante de contato.

Substituindo (2.10) e (2.11) em (2.12), resulta:

$$\vec{v}_{12} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 - \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 \quad (2.13)$$

Por meio da figura 2.25, observa-se outra relação:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{E} \quad (2.14)$$

Na qual:

$\vec{E}$  = vetor que representa a menor distância entre os centros  $O$  e  $O_2$ .

Aplicando-se (2.14) em (2.13), obtém-se:

$$\vec{v}_{12} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 - \vec{\omega}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{E}) \quad \text{ou} \quad \vec{v}_{12} = (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2) \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{E} \quad (2.15)$$

Esta equação pode ser representada em qualquer um dos três sistemas de coordenadas. Para obter o vetor da velocidade relativa, por exemplo, em relação a  $S_f$ , todos os vetores que compõem a equação 2.15 devem estar referenciados a este sistema de coordenadas.

A figura 2.26 mostra duas engrenagens, representadas por seus diâmetros de base e primitivos (mostrados em linha traço-ponto). Vê-se ainda o ponto  $P$ , sobre um perfil evolvente,

que representa o contato entre dois dentes em determinado instante; a linha de pressão, representada em verde e, por fim, o ponto primitivo  $I$ , que representa a intersecção entre a linha de ação e a linha entre centros das engrenagens.

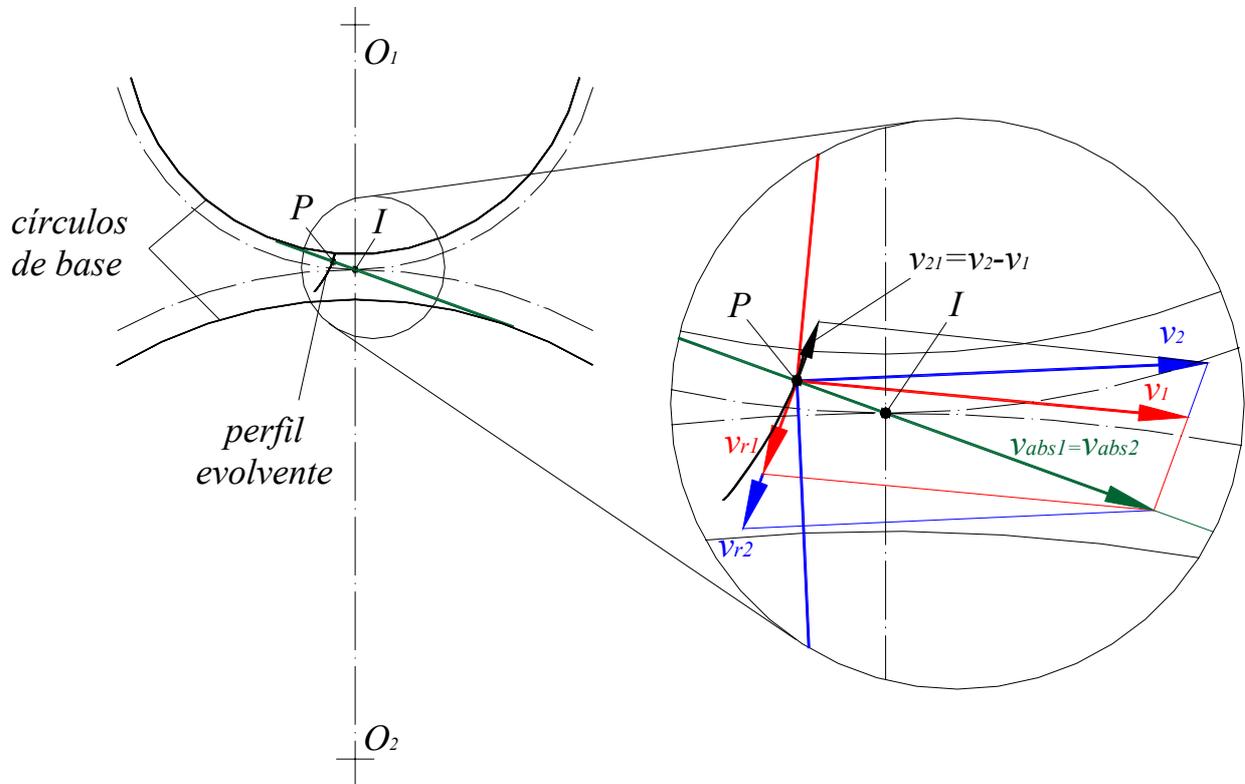


Figura 2.26 – Visualização de um engrenamento e vetores velocidade instantânea.

O teorema de Lewis estabelece que [Litvin e Fuentes, 2004]:

“*Perfis de dentes conjugados devem ser tais que sua normal comum, num ponto de tangência, intercepte a linha  $O_1O_2$ , que contém os centros de rotação, dividindo esta linha em dois segmentos  $O_1I$  e  $O_2I$ , os quais se relacionam da seguinte forma*”:

$$\frac{O_2I}{O_1I} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = m_G \quad (2.16)$$

sendo:

$$O_1I + O_2I = E \quad (2.17)$$

Nas quais:

$E$  = distância entre centros de rotação das engrenagens (módulo de  $\vec{E}$ ).

$m_G$  = razão de velocidades

$\omega_1$  = módulo da velocidade angular da engrenagem motriz (pinhão).

$\omega_2$  = módulo da velocidade angular da engrenagem movida.

Vê-se ainda, na figura 2.26, a ampliação da região em torno do ponto  $I$ , onde estão representados os vetores de velocidades  $\vec{v}_1$  (vermelho) e  $\vec{v}_2$  (azul), que correspondem, respectivamente, à velocidade instantânea do ponto  $P$  sobre as superfícies dos dentes das engrenagens 1 e 2. Observa-se que estes vetores não possuem a mesma direção e, portanto, a diferença entre eles gera o vetor de velocidade relativa  $\vec{v}_{21}$ , representado matematicamente pelas equações 2.12 e 2.15. Esta diferença de velocidades mostra que, ao longo da linha de ação, há tendência ao deslizamento relativo entre as superfícies dos dentes em contato. O único ponto no qual há rolamento puro é o ponto  $I$ , por estar sobre os círculos primitivos.

Esta figura mostra ainda algumas relações importantes:

$$\vec{v}_{abs1} = \vec{v}_1 + \vec{v}_{r1} = \vec{v}_{abs2} = \vec{v}_2 + \vec{v}_{r2} \quad (2.18)$$

Na qual:

$\vec{v}_{abs1} = \vec{v}_{abs2} =$  vetores de velocidade instantânea na direção da linha de pressão.

$\vec{v}_{r1} =$  componente da velocidade instantânea  $\vec{v}_{abs1}$  sobre o plano tangente.

$\vec{v}_{r2} =$  componente da velocidade instantânea  $\vec{v}_{abs2}$  sobre o plano tangente.

$$\vec{v}_{r2} = \vec{v}_{r1} + \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{r1} + \vec{v}_{12} \quad (2.19)$$

Observa-se que o vetor  $\vec{v}_{r1}$  é tangente à superfície no ponto  $P$ , sendo representado pela equação 2.9. Assim, substituindo a equação 2.9 em 2.18, resulta:

$$\vec{v}_{r2} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \vec{v}_{12} \quad (2.20)$$

Portanto, o vetor de velocidade relativa  $\vec{v}_{12}$  pode ser obtido a partir de  $\vec{v}_{r1}$  e  $\vec{v}_{r2}$ , quando isto for conveniente. A propriedade de estar localizado sobre o plano tangente comum aos perfis dos dentes em contato instantâneo, torna o vetor velocidade relativa  $\vec{v}_{12}$  um parâmetro importante, utilizado para montar a equação do movimento engrenado.

### 2.3.4 Envelope para uma Família de Curvas

Considera-se novamente os sistemas de coordenadas  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_f$ , representados na figura 2.25. Na seção 2.3.2 mostrou-se que a face de um dente de engrenagem, como o pinhão por exemplo, sendo uma superfície  $\Sigma_1$  regular (sem pontos de singularidade), pode ser representada em  $S_1$  da seguinte forma [Litvin e Fuentes, 2004]:

$$\vec{r}_1 = f(u, v) \quad (2.21)$$

e:

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v} \neq 0 \quad (2.22)$$

As engrenagens devem realizar movimentos de rotação em torno de seus eixos e estar em contato a cada instante. Isto significa que a rotação da engrenagem 2 é função da rotação da engrenagem 1, ou seja:

$$\psi_2 = f(\psi_1) \quad (2.23)$$

Na qual:

$\psi_1$  = ângulo de rotação da engrenagem 1 (motriz).

$\psi_2$  = ângulo de rotação da engrenagem 2 (movida).

Num movimento engrenado, a superfície  $\Sigma_2$ , do dente da engrenagem 2, é obtida pelo envelope da família de superfícies  $\Sigma_\psi$ , gerada em  $S_2$  pela superfície  $\Sigma_1$ , ao longo do movimento incremental de  $\psi_1$ . A condição necessária, porém não suficiente, para a existência de  $\Sigma_2$  é que esta esteja em tangência com  $\Sigma_1$ . A segunda condição é que ela seja uma superfície regular.

A determinação de  $\Sigma_\psi$  é baseada na seguinte equação matricial:

$$\vec{r}_2 = M_{21} \vec{r}_1 = M_{2f} M_{f1} \vec{r}_1 \quad (2.24)$$

Da relação 2.23 resulta que os elementos das matrizes de transformação  $M_{2f}$  e  $M_{f1}$  são funções relacionadas à rotação  $\psi_1$  da engrenagem 1. Como este é o parâmetro que define o movimento, pode ser chamado de parâmetro global, ou seja:  $\psi_1 \equiv \psi$ . Portanto:

$$\vec{r}_2 = f(u, v, \psi) \quad (2.25)$$

As derivadas parciais  $\partial \vec{r}_2 / \partial u$  e  $\partial \vec{r}_2 / \partial v$  representam em  $S_2$  as tangentes às curvas *u-linha* e *v-linha* da superfície  $\Sigma_1$ . Porém, como  $\Sigma_1$  pertence à família  $\Sigma_\psi$ , sua localização e orientação em  $S_2$  depende do parâmetro  $\psi$ .

O vetor normal à superfície  $\Sigma_1$  é representado em  $S_2$  da seguinte forma:

$$\vec{n}_{1(2)} = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v} \quad (2.26)$$

A equação que representa a condição de tangência (condição necessária para a existência de  $\Sigma_2$ ) é a seguinte:

$$\left( \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \psi} = 0 \quad (2.27)$$

Como esta equação relaciona as coordenadas curvilíneas  $(u, v)$  com o parâmetro geral do movimento  $\psi$ , é chamada de equação do movimento engrenado. Em outras palavras, para um determinado valor de  $\psi$ , há um ponto sobre  $\Sigma_1$ , definido por  $\vec{r}_1 = f(u, v)$ , que respeita esta equação; tratando-se, portanto, do ponto instantâneo de contato entre as superfícies  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . Para efetivamente desenhar esta superfície  $\Sigma_2$ , é necessário converter para  $S_2$  (equação 2.24) os sucessivos pontos obtidos pelo incremento de  $\psi$  e pela aplicação da equação do movimento engrenado. Portanto, as equações 2.24 e 2.27 não apenas representam uma condição para a existência de  $\Sigma_2$ , mas são a maneira de, efetivamente, obter o envelope.

O vetor  $\partial \vec{r}_2 / \partial \psi$  apresenta a mesma direção do vetor velocidade relativa  $\vec{v}_{12(2)}$ . Como visto na seção 2.3.3, esse vetor representa a velocidade de um ponto  $P_1$  sobre a superfície  $\Sigma_1$ , em relação a um ponto  $P_2$  sobre a superfície  $\Sigma_2$ , no momento em que estes se encontram. O sub-índice (2) na equação 2.26 significa que este vetor está representado no sistema  $S_2$ . Desta forma, a equação 2.27 pode ser novamente escrita na forma:

$$\left( \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v} \right) \cdot \vec{v}_{12(2)} = \left( \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial v} \right) \cdot \vec{v}_{21(2)} = 0 \quad (2.28)$$

ou:

$$\vec{n}_{1(2)} \cdot \vec{v}_{12(2)} = \vec{n}_{1(2)} \cdot \vec{v}_{21(2)} = 0$$

Esta equação do movimento engrenado independe do sistema de coordenadas escolhido, ou seja, os sistemas  $S_I$  e  $S_f$  podem ser utilizados.

### 2.3.5 Equação do Perfil Evolvente e Vetor Normal

Na seção anterior mostrou-se que, para obter os pontos que definem a superfície do dente da engrenagem gerada, deve-se conhecer o perfil do dente da engrenagem ou ferramenta geradora. Neste trabalho foi adotado o perfil evolvente, mostrado na figura 2.27.

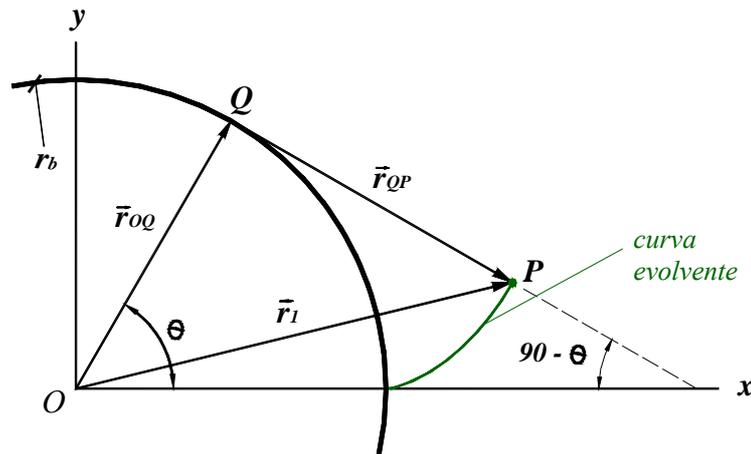


Figura 2.27 – Parâmetros geométricos que definem uma curva evolvente.

Na qual:

$r_b$  = raio do círculo de base

$\vec{r}_1$  = vetor posição que define as coordenadas de  $P$ .

$\vec{r}_{QP}$  = vetor tangente ao círculo de base no ponto  $Q$  e que passa por  $P$ .

$\vec{r}_{OQ}$  = vetor  $OQ$ .

$\theta$  = ângulo que define a evolvente sobre o plano.

Para obter as coordenadas do ponto  $P$  são usadas as seguintes relações:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{OQ} + \vec{r}_{QP} \quad (2.29)$$

$$|\vec{r}_{QP}| = r_b \theta \quad (2.30)$$

$$\vec{r}_{OQ} = r_b \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\vec{r}_{QP} = |\vec{r}_{QP}| \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{bmatrix} = r_b \theta \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Aplicando-se (2.31) e (2.32) em (2.29), resulta:

$$\vec{r}_1 = r_b \begin{bmatrix} \cos \theta + \theta \sin \theta \\ \sin \theta - \theta \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

No caso de um dente reto, este é obtido pela extrusão, na direção do eixo  $z$ , do perfil da figura 2.27. Fica então evidente que os parâmetros  $u$  e  $v$ , que definem a função posição  $\vec{r}_1(u, v)$  dos pontos sobre a superfície evolvente, são  $\theta$  e  $z$ , ou seja:  $\vec{r}_1(\theta, z)$ .

Portanto, para uma coordenada  $z$  fixa, tem-se uma curva  $\theta$ -linha com perfil evolvente, cuja derivada é:

$$\vec{r}_{1\theta} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} r_b \theta \cos \theta \\ r_b \theta \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Em dentes retos, a derivada da curva  $z$ -linha é o vetor  $\vec{k} = (0,0,1)$ . Desta forma, o vetor normal ao dente, no ponto em análise, será dado por:

$$\vec{n} = \vec{r}_\theta \times \vec{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_b \theta \cos \theta & -r_b \theta \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} r_b \theta \sin \theta \\ -r_b \theta \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Normalizando:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Este vetor normal à curva evolvente no ponto em análise é, no caso plano, função apenas de  $\theta$ . Neste caso, a equação de movimento engrenado 2.28 é relativamente simples e pode ser resolvida de forma direta, ou seja, para cada incremento no parâmetro de movimento  $\psi$ , obtém-se um valor correspondente de  $\theta$ , o qual determina de forma inequívoca o ponto instantâneo de contato. Em outros casos, como nas engrenagens faciais, a equação do movimento engrenado inclui o parâmetro  $z$ . Isso significa que, para cada incremento em  $\psi$ , as duas variáveis  $\theta$  e  $z$  devem ser determinadas. Para auxílio nesta tarefa, algum procedimento numérico ou geométrico simples pode ser útil, como por exemplo, a determinação o intervalo de variação de  $z$ . Desta forma, para um determinado valor de  $\psi$ , varre-se o intervalo de  $z$  para então obter os correspondentes valores de  $\theta$ .

## **CAPÍTULO 3**

### **DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DA TRANSMISSÃO PROPOSTA**

O presente capítulo descreve uma transmissão mecânica de um ou mais estágios, baseada em engrenagens cônicas e faciais, voltada às aplicações em que a alteração da razão de velocidades deve ser efetuada com frequência elevada. Inicialmente, o princípio de operação e os mecanismos elementares são mostrados de forma genérica, com o objetivo de esclarecer o conceito original. Em seqüência, apresentam-se as atividades realizadas no projeto e construção de um protótipo, bem como o modelo de referência de projeto adotado.

Como as funções ou atributos relacionados a um produto mercável são muito amplos, no protótipo foram contemplados apenas os aspectos principais de funcionamento do sistema. A justificativa para tal restrição de projeto está no fato de que a transmissão proposta representa uma novidade e, portanto, boa parcela do trabalho realizado teve como objetivo validar o conceito inicial e dar o primeiro passo no sentido de avaliar sua aplicabilidade nos setores industrial e automotivo.

#### **3.1 Conceito Descritivo do Sistema de Transmissão**

A idéia da transmissão proposta neste trabalho surgiu inicialmente como um CVT, composto por discos girantes de entrada e de saída, com elementos intermediários em forma de troncos de elipses, responsáveis pela transmissão do movimento entre os discos. A figura 3.1 mostra como é obtida a variação da relação de transmissão, por meio da alteração da inclinação dos elementos intermediários. Segundo a representação de Euler, para matrizes de rotação de corpos rígidos, a inclinação dos elementos intermediários corresponde ao movimento de nutação, termo empregado neste trabalho [Fu et al., 1987].

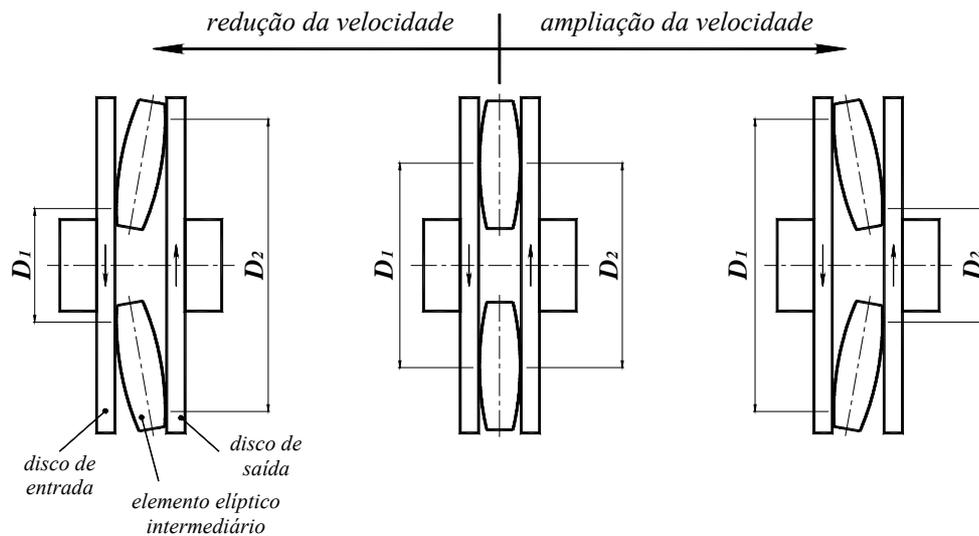


Figura 3.1 – Princípio funcional de uma transmissão mecânica tipo CVT.

Após uma avaliação inicial, verificou-se que esta idéia não traria vantagens sobre os sistemas CVT's que hoje estão presentes no mercado, os quais são resultado de décadas de desenvolvimento e testes. Mesmo apresentando uma configuração não usual e uma forma construtiva simples, este sistema teria como limitante os elevados valores de pressão na região de interface dos componentes móveis, característica comum a outras formas construtivas de CVT's.

Porém, a extensão da idéia para o uso de engrenagens pareceu, a princípio, bastante interessante. Pela forma dos elementos intermediários, percebeu-se que estes poderiam ser substituídos por engrenagens, divididas em faixas faciais e, eventualmente, cônicas. Desta forma, os avanços recentes, ocorridos nestas transmissões faciais, permitiriam obter um sistema de alto desempenho e capacidade de carga, com custo relativamente baixo, indicando sua aplicabilidade no setor da mobilidade. A figura 3.2 mostra uma coroa (em corte), engrenada com um pinhão intermediário, na faixa central de trabalho. Observa-se que ambas as engrenagens são divididas, neste caso, em nove faixas, o que corresponde a nove valores diferentes de razão de velocidades. Este número de faixas e relações de transmissão poderia ser qualquer número maior que 1.

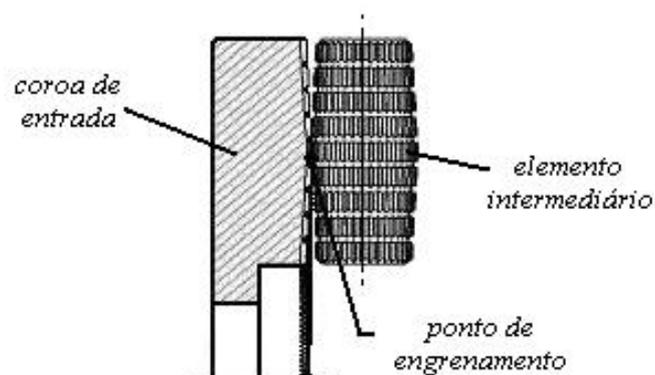


Figura 3.2 – Detalhe esquemático de uma coroa e um pinhão intermediário engrenados.

A figura 3.3 mostra os componentes principais do sistema proposto: engrenagens intermediárias (ou pinhões) e coroas de entrada e de saída. Observa-se que os pinhões estão solidários ao “elemento de deslocamento das engrenagens intermediárias”, representado de forma ilustrativa apenas, pois a inclinação destes pinhões pode ser efetuada de diferentes formas.

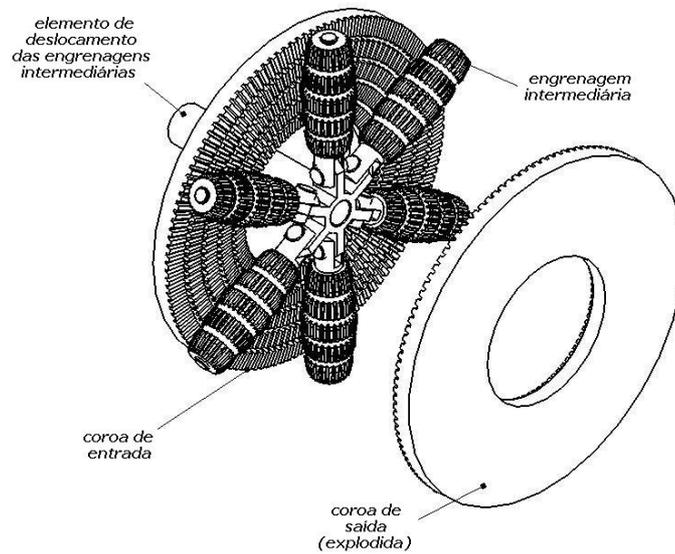


Figura 3.3 – Vista geral dos principais componentes do sistema proposto.

O sistema descrito é objeto do pedido de patente PI0505836-8 junto ao INPI (Instituto Nacional de Propriedade Intelectual) [Bianchi, 2005].

A figura 3.4 mostra, por meio de engrenagens com cinco faixas de trabalho, a variação da razão de velocidades em função do ângulo de nutação dos pinhões intermediários. Neste caso, por questões de simplicidade e clareza, são mostrados apenas dois pinhões e, tanto esses pinhões como as coroas, são representados por suas superfícies primitivas.

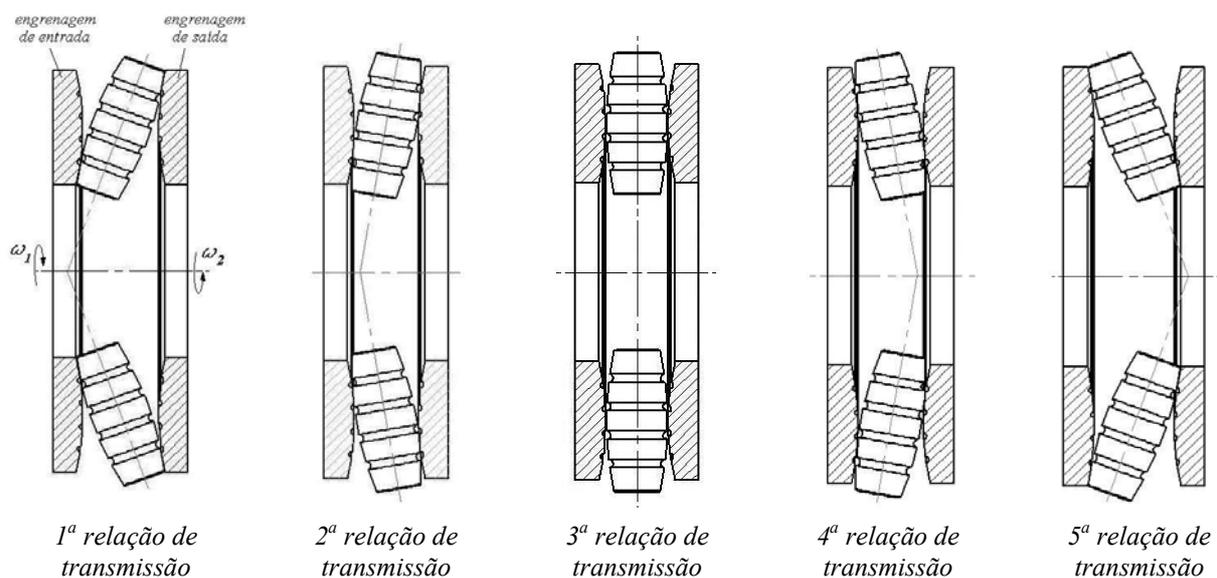


Figura 3.4 – Alteração da relação por meio da nutação dos pinhões [Bianchi e Batista, 2008].

No caso da primeira relação de transmissão, considerando que a coroa de entrada é a da esquerda, observa-se a inversão e a redução da velocidade (o diâmetro de contato da coroa de entrada é menor do que o da coroa de saída). Com a alteração do ângulo de nutação dos pinhões, é estabelecida a segunda relação de transmissão, a qual apresenta um menor valor de redução da velocidade. Uma nova alteração da inclinação leva à terceira posição, onde o fator de transmissão é unitário. Os outros desenhos mostram a 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> relações de transmissão, onde há ampliação da velocidade. Como no primeiro caso, nas demais faixas de trabalho há a inversão do sentido de giro da entrada para a saída da transmissão.

Os pinhões têm função de engrenagens intermediárias, ou seja, transmitir o movimento da coroa de entrada para a de saída. Como o número de dentes é o mesmo em todas as faixas do pinhão, a relação de transmissão (ou fator de ampliação do torque e redução da velocidade) é dada por:

$$m_G = \frac{N_p}{N_{ce}} \frac{N_{cs}}{N_p} = \frac{N_{cs}}{N_{ce}} \quad (3.1)$$

Na qual:

$m_G$  = razão de velocidades ou relação de transmissão

$N_p$  = número de dentes do pinhão

$N_{ce}$  = número de dentes da coroa de entrada

$N_{cs}$  = número de dentes da coroa de saída

A descrição do princípio de operação do sistema permite extrair algumas conclusões preliminares:

- O funcionamento da transmissão proposta é tanto mais próximo ao de um CVT, correspondente à primeira idéia, quanto maior for o número de faixas de trabalho.
- O torque que pode ser transmitido é proporcional ao raio da faixa atuante da coroa de entrada, ao tamanho dos dentes e ao número de pinhões intermediários que compartilham a carga. Isso possibilita grande flexibilidade no processo de dimensionamento, porém, raios pequenos nas coroas implicam em geometria de dente distorcida (aresta pontiaguda nas faixas mais externas), enquanto raios muito grandes significam momentos de inércia elevados, o que pode inviabilizar o uso da transmissão em algumas aplicações.
- Ao contrário dos sistemas tradicionais de transmissão mecânica, que fazem uso de acoplamentos ou engrenagens deslizantes, a variação da relação de transmissão pode ser implementada por mecanismos bastante simples, por meio da nutação dos pinhões. Contudo, é importante observar que o número de dentes varia nas faixas das coroas (quanto mais externa a faixa, maior o número de dentes). Desta forma, os dentes de uma faixa das coroas

não estão alinhados radialmente com os dentes das demais faixas de trabalho. Portanto, não é possível alterar a razão de velocidades em qualquer ponto e instante, pois, o movimento de nutação dos pinhões pode gerar uma colisão entre os dentes do par pinhão/coroa, na mudança para uma nova faixa de trabalho. A solução para este problema é abordada na seção 3.3.1.

Para finalizar a descrição conceitual do sistema, observa-se que a montagem em série de vários conjuntos de coroas e pinhões permite a ampliação do número de relações de transmissão, que é obtido pelo resultado da multiplicação dos números de faixas de trabalho de cada estágio. A figura 3.5 apresenta uma vista geral esquemática de uma transmissão composta por dois estágios modulares, com 5 faixas de trabalho cada um, o que resultaria em vinte e cinco valores de relação de velocidades.

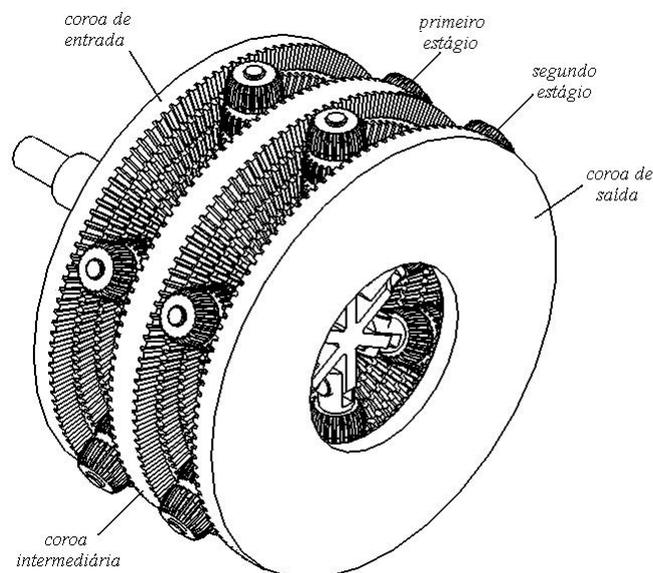


Figura 3.5 – Desenho esquemático de uma transmissão de dois estágios modulares.

Portanto, num resumo, observa-se que o conceito proposto apresenta uma faixa de trabalho dividida em múltiplos segmentos, correspondentes a diferentes valores de razão de velocidades. Esta propriedade, em conjunto com a simplicidade do mecanismo responsável pela alteração da relação de transmissão, torna tal conceito aplicável em operações onde haja flutuação da carga de trabalho no tempo.

Para dar o primeiro passo no sentido de avaliar a funcionalidade do conceito proposto, foi necessário projetar e construir um protótipo, que permitisse averiguar os principais movimentos necessários para a operação do sistema. Nas atividades relacionadas à implementação deste protótipo, foi utilizado um modelo de referência de processo de desenvolvimento, o qual, devido à sua importância, é descrito a seguir.

### 3.2 Modelo de Referência Adotado para o Projeto do Protótipo

Rozenfeld et al., 2006, apresentam um modelo de referência do processo de desenvolvimento de produto composto por três macro-fases:

- Pré-desenvolvimento – fase relacionada principalmente ao planejamento estratégico dos produtos de uma empresa.
- Desenvolvimento – relacionado às atividades de projeto em si.
- Pós-desenvolvimento – relacionado às atividades de acompanhamento do produto em operação e da interrupção de sua fabricação.

As atividades pertinentes à macro-fase de desenvolvimento de produto são ordenadas nas seguintes etapas [Rozenfeld et al., 2006; Ulrich e Eppinger, 2004; Blanchard e Fabrycky, 1998; Pahl e Beitz, 1996]:

- Projeto informacional
- Projeto conceitual
- Projeto detalhado
- Preparação para a produção
- Lançamento do produto

Apesar das etapas do modelo de referência serem intuitivamente compreensíveis, esta apresentação seqüencial não condiz com o que usualmente ocorre no desenvolvimento de um novo produto. Como as etapas iniciais envolvem processos de decisão baseados em informações por vezes vagas, insuficientes ou contraditórias; algumas das metas preliminarmente estabelecidas serão comprovadas, corrigidas ou refutadas ao longo do trabalho e, portanto, laços de retorno para fases anteriores deverão ocorrer. Este processo formal de averiguação e correção é parte importante do modelo de referência e, para tal, as pessoas envolvidas no desenvolvimento de um novo produto frequentemente se utilizam de modelos (matemáticos, virtuais ou físicos) e protótipos ao longo das etapas de trabalho. Por exemplo, nas fases iniciais é comum a construção de modelos virtuais ou físicos, para determinar as proporções totais e a aparência do produto. Na fase de detalhamento do projeto, modelos matemáticos são utilizados para determinar os materiais e dimensões finais dos componentes e subsistemas e, frequentemente, protótipos detalhados são construídos e testados. Muitas vezes os modelos matemáticos também servem de apoio ao processo de decisão sobre diferentes alternativas construtivas, durante a fase de projeto do conceito. Desta forma, dependendo do produto em desenvolvimento, o processo de síntese ocorre concomitantemente ao processo de análise dos componentes e subsistemas, com o objetivo de, efetivamente, permitir uma determinação mais exata da configuração final do sistema.

Portanto, modelos e protótipos são construídos e testados com o objetivo de validar uma etapa do desenvolvimento de um novo produto. Validada uma etapa, diz-se que esta está congelada, ocorrendo então uma transição de fase. Isso significa que as pessoas envolvidas nas etapas posteriores podem trabalhar sobre os resultados da etapa anterior, mas não modificá-los, a menos que haja a anuência de toda a equipe envolvida. O congelamento de uma transição de fase é importante e necessário, pois significa que uma meta intermediária do cronograma foi atingida satisfatoriamente. Sem esta definição clara, o desenvolvimento pode se tornar um laço infundável, composto pelo projeto, construção de modelos e protótipos, testes e otimização.

A implementação do protótipo envolveu as etapas de projeto informacional, modelagem funcional (ou do conceito deste protótipo), detalhamento e construção. Tal desenvolvimento teve como meta a averiguação dos principais aspectos relacionados ao funcionamento da transmissão mecânica proposta. Desta forma, almejou-se a validação da idéia conceitual do sistema proposto, averiguando sua eficácia na transmissão do movimento e na alteração da razão de velocidades.

Para facilitar o entendimento sobre as atividades implementadas, estas foram descritas de uma forma que não corresponde à ordem cronológica adotada. Um exemplo está na modelagem matemática e virtual das engrenagens, apresentada, neste trabalho, na etapa de detalhamento do projeto. Na realidade, tais modelos foram necessários ainda na etapa conceitual, para dar suporte aos processos de tomada de decisão e na elaboração de esboços preliminares.

### **3.3 Atividades Relacionadas ao Projeto Informacional**

No desenvolvimento de um produto, a etapa informacional produz como resultado uma lista de requisitos de projeto e de metas mensuráveis, obtidas a partir de uma lista de especificações dos clientes internos, externos e intermediários. Portanto, esta etapa tem como dados de entrada os estudos realizados pela empresa, ou pelo grupo de trabalho responsável pela fase de pré-desenvolvimento. Desta forma, são comuns especificações de custo final do produto e de seu desenvolvimento, aparência e tamanho, características do nicho de mercado, etc.

O modelo de referência adotado deve conter uma lista de funções ou atributos genéricos que sirva de base, para a equipe envolvida na etapa de projeto informacional, em todo e qualquer processo de desenvolvimento. Como usualmente as pessoas responsáveis pela fase de pré-desenvolvimento do produto têm forte visão empresarial e de mercado, questões importantes para as atividades de projeto muitas vezes não são especificadas ou o são de forma imprecisa.

Segundo Blanchard e Fabrycky, 1998, os atributos que usualmente um produto deve atender são classificados da seguinte forma:

### 1) Função e operação

- especificação do ambiente de operação
  - regiões onde o produto será ofertado
  - número de usuários e potenciais compradores
  - características geográficas: temperatura, umidade, altitude ...
- definição clara da missão do produto (o que o produto deve fazer?)
- características de desempenho: potência, torque, consumo de energia, eficiência...

### 2) Uso

- acionamentos: sistema operado manualmente, pelos pés, por voz...
- forma de controle: pelo próprio usuário, automático, semi-automático...
- interface, ergonomia e acessibilidade (dimensões da população local, peso...)
- aspectos culturais dos usuários (preferência por produtos maiores e extremamente resistentes, ou então por produtos de pequenas dimensões, desmontáveis, etc.)

### 3) Normas e legislação

### 4) Segurança dos usuários

### 5) Produção

- Quantidade a ser produzida
- Qualidade das peças e sub-sistemas
- Tempo de permanência do produto no mercado (vendas e reposição)
- Previsão de alterações e novas versões do produto

### 6) Manutenção

- número de horas até a primeira falha
- tempo médio entre as falhas...

### 7) Custo

- de desenvolvimento
- de produção
- de venda
- de manutenção do produto
- outros

### 8) Logística e transporte

- Locais onde os produtos serão produzidos e estocados
- Forma de transporte (que influi no tamanho, na forma construtiva e no custo do sistema)

### 9) Meio ambiente

Como a transmissão mecânica, objeto deste trabalho, inicialmente se tratava apenas de uma idéia, ainda não comprovada, deu-se prioridade à validação de alguns atributos de função, operação, uso e fabricação apenas. Ou seja, no início do trabalho, a primeira pergunta a ser respondida era: “*a transmissão proposta é eficaz ao transmitir potência e ao variar a relação de velocidades?*”. Desta forma, aspectos importantes para o êxito desta transmissão, vista como um produto, não puderam ser aprofundados, como por exemplo, as questões legais, de custos de produção e venda, de manutenção, de produção seriada e requisitos ambientais. Por outro lado, a partir da idéia original, foram estabelecidos aspectos relacionados à fabricação dos principais componentes do protótipo, bem como os movimentos necessários para sua operação. Da mesma forma, na etapa de projeto informacional foram determinadas as ferramentas de projeto e algoritmos, que deveriam ser implementados, para que o projeto, construção e os testes sobre o protótipo fossem levados a termo.

Com base nessas considerações, no desenvolvimento do protótipo funcional, foram tomadas algumas decisões preliminares, descritas a seguir.

### **3.3.1 Atributos de Função e Operação Considerados no Desenvolvimento do Protótipo**

Por se tratar de um protótipo para validação do conceito proposto, os aspectos de eficiência mecânica e capacidade de transmissão de potência não foram relevantes. Tal consideração teve impacto positivo nos aspectos de custo e simplicidade construtiva do protótipo, permitindo a adoção de polímeros em boa parte dos componentes e, em especial, nas engrenagens. Desta forma, devido à característica de baixo coeficiente de fricção dos materiais poliméricos, as engrenagens podem operar a seco, sem a necessidade de um subsistema de lubrificação e resfriamento do fluido. Conseqüentemente, o protótipo pode apresentar uma configuração aberta.

Antes de especificar os atributos funcionais e operacionais é preciso esclarecer os deslocamentos necessários para a transmissão do movimento e para a alteração da razão de velocidades do sistema proposto.

A figura 3.6 mostra em corte as engrenagens de uma transmissão com três faixas de trabalho, permitindo salientar um aspecto que, por simplicidade, até o momento foi omitido: na primeira e terceira relações de transmissão, além da alteração do ângulo de nutação  $\theta$ , é necessário que as coroas se afastem axialmente de um valor  $\delta$ . Além disso, o elemento que suporta os pinhões deve ser deslocado axialmente de um valor  $\delta/2$ .

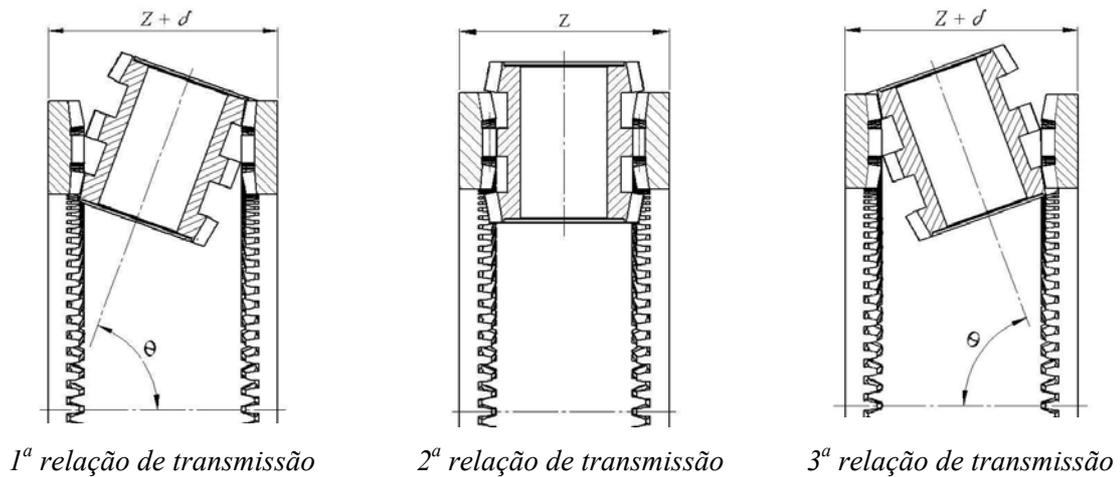


Figura 3.6 – Vista dos movimentos de natação e afastamento axial relativo das engrenagens.

Desta forma, o protótipo compreende os atuadores responsáveis pelos seguintes movimentos: *i)* rotação da coroa de entrada; *ii)* deslocamento axial relativo entre as coroas de entrada e saída (correspondente ao valor  $\delta$ ); *iii)* deslocamento axial relativo da peça de suporte dos pinhões intermediários (valor  $\delta/2$ ) e *iv)* movimento de natação dos pinhões ( $\theta$ ).

Outro aspecto relevante trata-se da necessidade de evitar a colisão entre os dentes das coroas e pinhões, durante o movimento de natação, para alteração da razão de velocidades. O primeiro passo para solução deste problema foi o alinhamento dos dentes das coroas de entrada e de saída em determinadas posições angulares pré-definidas. A figura 3.7 apresenta a vista frontal de uma coroa, sobre a qual foram dispostas oito linhas radiais. Nestas direções, os dentes das faixas que compõem a coroa foram propositalmente alinhados, sendo isto possível pois o número de dentes de cada faixa é, neste caso, múltiplo de oito.

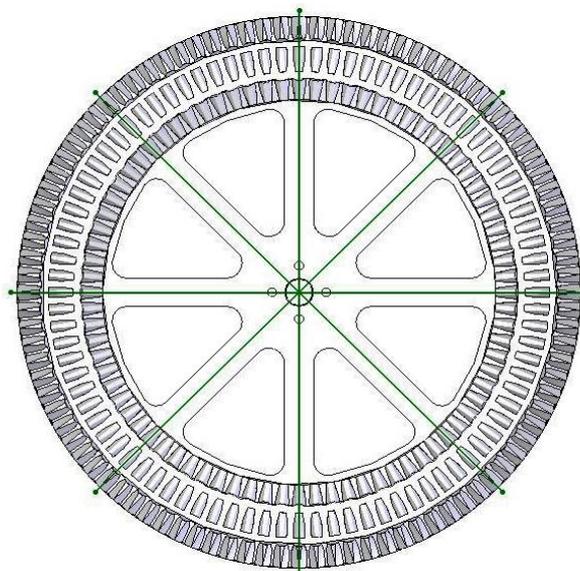


Figura 3.7 – Linhas radiais a  $45^\circ$  onde há alinhamento dos dentes das faixas.

Além disso, os pinhões apresentam o mesmo número de dentes em todas as faixas e, como o número de dentes é par (e há um alinhamento entre as várias faixas), há uma disposição diametralmente oposta de vãos entre dentes. A figura 3.8 mostra a vista frontal de um pinhão intermediário genérico.

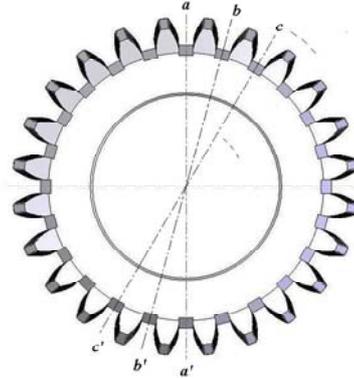


Figura 3.8 – Disposição dos dentes sobre o pinhão.

Por meio das figuras 3.7 e 3.8, observa-se que, nas posições em que os dentes das coroas estão alinhados, o pinhão pode sofrer alteração do ângulo de nutação, sem que haja colisão neste movimento. Desta forma, como as coroas de entrada e saída são idênticas e simétricas, sempre que qualquer faixa radial de uma coroa estiver alinhada com uma das faixas radiais da outra coroa, o pinhão pode ser movido para troca da razão de velocidades. Tal necessidade de alinhamento das coroas implica num lapso de tempo entre o sinal de comando para troca da relação de transmissão e sua efetiva realização.

Baseando-se novamente na figura 3.7, observa-se que cada uma das oito posições mostradas representam locais onde um pinhão pode ser instalado. Ou seja, uma transmissão com as coroas de entrada e saída com números de dentes, por exemplo, divisíveis por oito, poderia apresentar um número de um, dois, quatro ou oito pinhões intermediários. Desta forma, uma das decisões preliminares ao processo de dimensionamento de uma transmissão como a proposta é o número de elementos intermediários de transmissão.

Portanto, num resumo, para evitar a colisão dos dentes dos pinhões e das coroas, durante os deslocamentos necessários para alteração da razão de velocidades, para o projeto do protótipo foram estabelecidas algumas premissas: *i*) as posições angulares das coroas de entrada e de saída seriam monitoradas por sensores de posição (no caso, sensores indutivos de proximidade); *ii*) o número de dentes das faixas das coroas deveriam ser múltiplos de um número inteiro e *iii*) os pinhões intermediários deveriam apresentar número par de dentes, sendo estes dentes alinhados axialmente (o que implica no mesmo número de dentes em todas as faixas).

Estas definições dos deslocamentos e condições necessárias para a transmissão do movimento e para a alteração da relação de transmissão permitiram, de forma direta, determinar

alguns aspectos construtivos do protótipo. Para acionamento da coroa de entrada, optou-se por um motor elétrico, por ser compacto, eficiente e apresentar baixo ruído. Tal motor deveria operar em baixa velocidade, para permitir a verificação visual do engajamento dos dentes durante a operação de mudança da relação de transmissão e para permitir que os atuadores responsáveis pelos movimentos de natação e deslocamento axial relativo conseguissem realizar seus movimentos. Para tal, determinou-se o uso de um redutor acoplado a este motor elétrico, que proporcionasse uma taxa de rotação inferior a 180 rpm (3 ciclos/segundo).

Além disso, observando-se novamente a figura 3.6, constata-se que o afastamento axial das coroas pode se dar de três formas diferentes:

1. Mantendo a coroa de entrada fixa e afastando a coroa de saída e o suporte dos pinhões
2. Mantendo a coroa de saída fixa e afastando a coroa de entrada e o suporte dos pinhões
3. Mantendo o suporte dos pinhões fixo e afastando as coroas.

No protótipo, deu-se preferência à alternativa 1, pela facilidade de montagem da coroa de entrada sobre o motor de acionamento da transmissão, sendo esse fixado à estrutura.

### **3.3.2 Atributos de Uso e de Transporte do Protótipo**

Quanto aos atributos de uso, determinou-se preliminarmente que a solicitação para alteração da relação de velocidades, no protótipo, seria feita manualmente pelo operador, visando obter um sistema de controle mais simples.

Outro aspecto relacionado ao transporte foi a portabilidade, ou seja, o protótipo deveria apresentar um peso máximo que pudesse ser erguido por uma pessoa (no máximo um valor correspondente à massa de 40 kg), bem como as dimensões de largura máxima de 400 mm, profundidade de 1 m e altura de 600 mm. Porém, estes valores estabelecidos preliminarmente não representaram metas muito rígidas, mas orientações iniciais apenas.

### **3.3.3 Atributos de Produção do Protótipo**

Como observado na seção 3.3.1, a adoção de polímeros em boa parte dos componentes permitiu uma configuração mais simples do protótipo e, mais especificamente, das engrenagens. Os polímeros usualmente utilizados em engrenagens e em guias de deslizamento são a poliamida e o poliacetal. No caso do protótipo, foi especificado o Tranyl®, para fabricação das coroas e elementos móveis de suporte. Trata-se de uma poliamida com traços de MoS<sub>2</sub>, que apresenta baixo coeficiente de atrito e boa usinabilidade, se comparada a outros polímeros. Devido às dimensões dos componentes e à necessidade de propiciar a menor deformação possível durante o processo posterior de usinagem, este polímero foi fundido em moldes.

Por outro lado, a fabricação de engrenagens faciais e cônicas em aço implicaria na aquisição ou manufatura de ferramentas de geração e retificação, o que se mostrou inviável no início do projeto do protótipo. Além disso, como as engrenagens cônicas e faciais não podem ser fabricadas em máquinas universais, mas em máquinas de geração encontradas apenas em empresas especializadas, houve um estudo dos processos alternativos que possibilitariam a manufatura das coroas e pinhões do protótipo, sendo estes: a prototipagem rápida e a usinagem em máquina CNC. Devido à disponibilidade e domínio da técnica, optou-se pela fabricação em centro de usinagem. Para tal, foi necessário implementar o modelo matemático do perfil dos dentes, seguido pela modelagem em CAD e processamento em software de CAM. Nesse caso, as dimensões das ferramentas de usinagem obrigaram à adoção de engrenagens de dentes relativamente grandes, para que estas ferramentas pudessem ser movimentadas no vão entre os dentes, sem colisões, durante a remoção do material. Além disso, dentes menores implicariam no uso de ferramentas de pequenas dimensões, que exigiriam velocidades de eixo-árvore elevadas. Por outro lado, dentes grandes em faixas de raio pequeno nas coroas, resultam em dentes muito distorcidos. Assim, o procedimento adotado foi o seguinte:

- 1) baseando-se no requisito de portabilidade, foi estabelecido um valor em torno de 250 mm para o diâmetro de referência das coroas, na faixa intermediária de trabalho. Desta forma, estimava-se um diâmetro total das coroas (incluindo as faixas adicionais externas) de, no máximo, 350 mm.
- 2) utilizando o procedimento descrito na seção 3.6, foram elaborados modelos preliminares da faixa intermediária das coroas, com diferentes valores de módulo. O valor preliminar para a largura dos dentes desta faixa intermediária foi estabelecido entre 4 e 5 vezes o valor de módulo. Optou-se pelo menor valor de módulo que permitisse um processo de usinagem efetivo, no centro de usinagem disponível, e, ao mesmo tempo, proporcionasse dentes menos distorcidos nas coroas, sem a presença dos fenômenos de interferência no raio interno e encontro de faces opostas do dente no raio externo desta faixa facial. Observou-se que o módulo de 3 mm atenderia a estes requisitos com uma boa margem de segurança.

Como observado na seção 3.1, para uma melhor adequação ao regime de trabalho, a transmissão proposta deve apresentar grande número de faixas de trabalho. Por outro lado, um dos objetivos da construção do protótipo era avaliar a eficácia do sistema de alteração das relações de transmissão e, para tal, não havia necessidade de grande quantidade de faixas. Como as restrições geométricas e de fabricação se traduziram em dentes relativamente grandes, a opção por um grande número de faixas de trabalho resultaria em coroas de dimensões elevadas, o que impactaria negativamente na portabilidade da bancada. Por fim, quanto maior o número de faixas

de trabalho, maior quantidade ou complexidade dos atuadores responsáveis pela movimentação relativa dos elementos. Assim, optou-se pela adoção de três faixas de trabalho apenas.

Tomando-se os valores de referência previamente estabelecidos, para o diâmetro da faixa intermediária das coroas, em torno de 250 mm e módulo de 3 mm, o número de dentes desta faixa poderia ser de 83 (correspondente a um diâmetro nominal de 249 mm). Por tratar-se de um número primo, vê-se que a quantidade máxima de pinhões intermediários seria de 1 (um). Julgou-se adequado o uso de maior número de pinhões intermediários e de posições possíveis para realização do movimento de natação e, desta forma, determinou-se que as três faixas de trabalho das coroas apresentariam número de dentes divisível por 8. Portanto, este número, para a faixa intermediária, foi elevado para  $N_c = 88$  (correspondente a um diâmetro nominal de 264 mm). Na seqüência das atividades de modelagem, adotou-se o número de 96 dentes na faixa externa e 80 na faixa interna. Desta forma, o protótipo poderia apresentar até oito pinhões intermediários, porém, visando obter simplicidade construtiva e custos aceitáveis, optou-se pelo uso de apenas dois pinhões intermediários, dispostos simetricamente.

No sentido de obter uma forma dos pinhões aproximadamente elíptica, de acordo com a idéia inicial de sistema de transmissão, adotou-se uma faixa intermediária facial e faixas interna e externa com dentes cônicos. Para evitar o problema de estreitamento na base dos dentes do pinhão, decorrente do fenômeno de interferência, adotou-se um número de 24 dentes em todas as faixas.

Aplicando-se a fórmula 3.1, para os de números de dentes estabelecidos, observa-se que os valores de razão de velocidades são de  $m_G = -1,2$  (96/80), correspondente à primeira relação da figura 3.6,  $m_G = -1$  (88/88) para a segunda relação e  $m_G = -0,833$  (80/96) para a terceira. O sinal negativo representa uma inversão do sentido de giro da coroa de saída em relação à coroa de entrada.

A figura 3.9 apresenta o pinhão e coroa implementados. O procedimento adotado para modelar essas engrenagens é mostrado na seção 3.6.



Figura 3.9 – Engrenagens da transmissão proposta: a) pinhão e b) coroa.

### 3.3.4 Atributo de Custos de Implementação do Protótipo

O valor máximo para implementação, estabelecido para o protótipo, foi de R\$ 25.000,00 (vinte e cinco mil reais). Este valor engloba os materiais, componentes e ferramentas, bem como os processos de fabricação e montagem realizados por terceiros. Não estão incluídos os custos de aquisição de softwares, computadores e outros equipamentos, os quais, apesar de terem sido utilizados nas atividades de projeto, não fizeram parte do protótipo em si.

### 3.3.5 Resumo das Decisões Preliminares e Requisitos de Projeto

Observa-se que o estudo preliminar dos atributos que deveriam ser atendidos pelo protótipo permitiu algumas definições importantes, que permitiram delimitar o espaço de projeto, facilitando consideravelmente as etapas posteriores de desenvolvimento do projeto conceitual, detalhamento e fabricação. Tal estudo permitiu obter a lista de decisões preliminares, mostrada na tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Lista de Decisões Preliminares.

<i>Aspecto Considerado</i>	<i>Decisão Preliminar</i>
acionamento de rotação da coroa de entrada	motor elétrico associado a redutor, com taxa de rotação inferior a 180 rpm.
deslocamentos necessários para alteração da razão de velocidades	<ul style="list-style-type: none"> <li>– coroa de entrada fixa axialmente (solidária ao motor)</li> <li>– suporte dos pinhões se desloca um valor <math>\delta/2</math></li> <li>– suporte da coroa de saída se desloca de um valor <math>\delta</math></li> <li>– os pinhões sofrem nutação de um valor <math>\theta</math></li> </ul>
características geométricas das coroas e pinhões	<ul style="list-style-type: none"> <li>– coroas com três faixas de 80, 88 e 96 dentes</li> <li>– dentes das coroas alinhados a cada <math>45^\circ</math></li> <li>– 2 pinhões intermediários com 24 dentes nas três faixas</li> <li>– módulo 3 mm</li> </ul>
material das engrenagens	poliamida com $\text{MoS}_2$ , fundido em moldes
processo de fabricação das engrenagens	fresamento em centro de usinagem CNC
detecção da posição angular das coroas	sensores de proximidade indutivos
comando alteração da razão de velocidades	manual, pelo operador

A partir dos atributos e do elenco de decisões preliminares, foi possível estabelecer os requisitos de projeto e sua ordem de importância (valor máximo de 10), bem como as metas relacionadas, apresentados na tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Lista de Requisitos de Projeto do Protótipo.

<i>Requisito de Projeto</i>	<i>Grau de Importância</i>	<i>Meta</i>
Facilidade de fabricação das peças	10	– a totalidade dos processos de manufatura deve ser convencional (torneamento, fresamento, etc.). – não adotar processo de geração para fabricação das engrenagens.
Facilidade de montagem	10	evitar processos de ajustagem
Custo de fabricação das peças	7,5	no máximo 1/3 do custo total
Custo de montagem das peças	7,5	no máximo 1/3 do custo total
Custo de componentes comerciais	7,5	no máximo 1/3 do custo total
Dimensões máximas	5	400 mm x 600 mm x 1 m
Massa do protótipo (máxima)	2,5	40 kg
Eficácia de operação	10	100% (todas as peças e componentes devem realizar plenamente sua função. Descartar soluções duvidosas).

Observa-se que a implementação de um protótipo para verificação apenas do funcionamento da transmissão proposta, sem atributos relacionados à capacidade de transmissão de potência e vida útil, que implicariam na adoção de materiais metálicos e tratamentos térmicos para conferir elevada resistência mecânica, bem como no desenvolvimento de subsistemas de lubrificação, vedação e caixa de contenção; permitiram que as atividades de projeto fossem consideravelmente simplificadas.

### 3.4 Atividades Relacionadas ao Projeto Conceitual

Para elaborar o projeto conceitual do protótipo, foi estabelecida a função global (ou total) do sistema, tendo esta sido desmembrada em funções parciais. Por meio de uma matriz morfológica e uma matriz de decisão, foi possível escolher a melhor configuração para este protótipo.

### 3.4.1 Diagrama de Funções e Fluxograma de Funcionamento

A idéia de funcionamento de um sistema mecânico muitas vezes é expressa por meio de uma estrutura de funções, na qual tal sistema atua sobre um fluxo de materiais, energia e informações [Rozenfeld et al., 2006; Ulrich e Eppinger, 2004; Blanchard e Fabrycky, 1998; Pahl e Beitz, 1996]. A figura 3.10 mostra a função total (ou global) do sistema proposto.

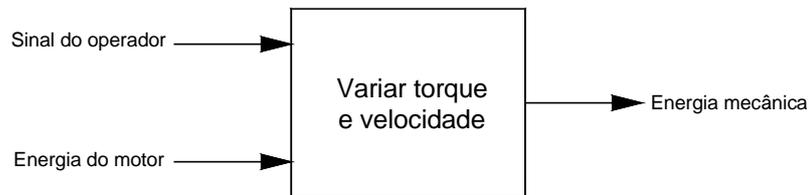


Figura 3.10 – Função total do sistema de transmissão mecânica proposto.

Posteriormente, a função total foi desmembrada numa estrutura de funções parciais, descrita pelo fluxograma da figura 3.11, que descreve o funcionamento do protótipo durante a alteração da relação de transmissão.

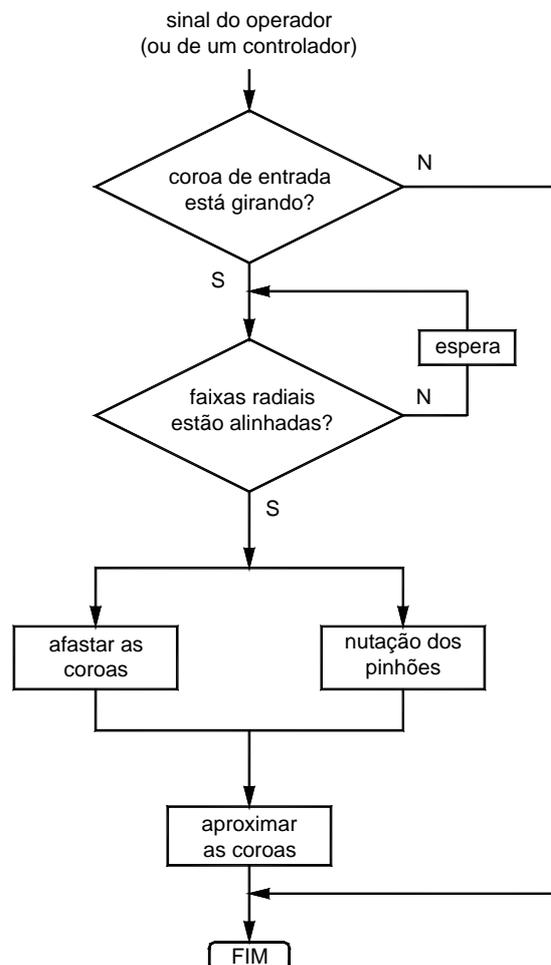


Figura 3.11 – Fluxograma de funcionamento do sistema de transmissão mecânica proposto.

Observa-se que o funcionamento da transmissão envolve dois subsistemas: um controlador e um atuador, cuja função é realizar os deslocamentos necessários para transmitir o movimento e alterar a relação de velocidades. Já o controlador deve monitorar, por meio de sensores, a posição angular das coroas de entrada e saída. Após receber do operador um sinal para alteração da relação de transmissão, o sistema de controle deve esperar até que as posições radiais das coroas de entrada e saída estejam alinhadas, para então enviar sinais para os atuadores. Já o subsistema de atuação envolve quatro movimentos (ou sub-funções): *i*) a rotação da coroa de entrada, sem a qual não há transmissão do movimento, *ii*) o deslocamento axial relativo entre as coroas de entrada e de saída, *iii*) o deslocamento axial do suporte dos pinhões e *iv*) o movimento de natação dos pinhões.

Num sistema de controle automático, o sinal que representa a necessidade de troca da relação de transmissão poderia vir do próprio veículo (são exemplos de grandezas frequentemente monitoradas nas transmissões automáticas: abertura da admissão, velocidade do volante do motor, velocidade de acionamento do acelerador, deslizamento nos discos de embreagens e outros). Isto significa que o funcionamento ótimo (e automático), da transmissão proposta, pode estar intimamente relacionado com a presença de um sistema de controle eficiente e robusto. Por outro lado, uma das vantagens desta transmissão é a simplicidade do mecanismo de troca das relações de velocidades. Desta forma, uma das metas principais estabelecidas para o desenvolvimento do protótipo foi a implementação de um sistema mecânico simples e confiável, que permitisse uma alteração eficaz da razão de velocidades. Dando prioridade, neste trabalho, aos mecanismos de atuação, o algoritmo de controle do protótipo foi consideravelmente simplificado pela adoção do comando pelo usuário, para alteração da relação de transmissão. Este sistema de controle é mostrado na seção 3.6.

Cabe ressaltar que também foi avaliado um diagrama de funções no qual as sub-funções parciais de afastamento das coroas e giro dos pinhões seriam realizadas simultaneamente, de forma integrada. Neste conceito, as coroas estariam sujeitas a uma força axial no sentido de aproximá-las (que as comprimiria contra os pinhões intermediários), o que poderia ser obtido, por exemplo, com o uso de molas de compressão. Ao ser executado o movimento de natação dos pinhões, estes afastariam axialmente as coroas. Desta forma, na 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> razões de velocidades, as coroas, estando mais afastadas, sofreriam um esforço axial maior do que na 2<sup>a</sup> relação.

Apesar desse sistema apresentar algumas vantagens, como uma leve pré-carga na região de contato das engrenagens e um sincronismo durante o movimento para troca da relação (ou seja, o período de interrupção do fluxo de energia seria exíguo), há uma grande desvantagem: o movimento engrenado durante a natação dos pinhões implica em complexidade

geométrica na forma dos dentes. Naturalmente, os movimentos simultâneos de giro dos componentes e de nutação dos pinhões, proporcionaria como resultado um perfil de dente complexo, com forma semelhante aos dentes coroados. Como resultado, a região de contato se tornaria pontual e a fabricação seriada das engrenagens seria mais difícil e onerosa. Além disso, tal sistema seria viável apenas para larguras de dentes muito pequenas, caso contrário, as novas faixas de trabalho, nos pinhões e coroas, poderiam ser atingidas sem que as faixas anteriores tivessem sido completamente desativadas. Por esses motivos, o sistema proposto neste trabalho, bem como o protótipo desenvolvido, apresenta dois subsistemas separados e independentes para efetuar os movimentos de nutação e afastamento axial das coroas e do suporte dos pinhões.

### **3.4.2 Matriz Morfológica e Apresentação do Conceito do Protótipo**

Tendo sido definidas as sub-funções do sistema proposto, mostradas na figura 3.11, foi possível estabelecer uma configuração para o protótipo a partir do estudo dos componentes (ou subsistemas) responsáveis pela execução de cada sub-função. Para tal, foi utilizada uma matriz morfológica, que compreende as diferentes possibilidades construtivas.

Na montagem desta matriz, foram consideradas as decisões preliminares, estabelecidas na etapa de projeto informacional. Como abordado nas subseções 3.3.1 a 3.3.4, no desenvolvimento do protótipo, optou-se pelo acionamento da coroa de entrada por um motoredutor elétrico com taxa de rotação inferior a 180 rpm (3 ciclos/segundo). Também foi definido preliminarmente que esta coroa de entrada seria montada sobre o eixo de saída do motoredutor, sendo esse componente fixado à estrutura do protótipo. Consequentemente, os atuadores responsáveis pelos deslocamentos axiais relativos, necessários para a alteração da razão de velocidades, deveriam deslocar a peça de suporte dos pinhões e o suporte da coroa de saída. Tais deslocamentos axiais relativos poderiam ser efetuados de forma independente ou indexada. No caso, deu-se preferência ao princípio da alavanca para afastamento simultâneo do suporte dos pinhões e da coroa de saída, por se tratar de um sistema compacto e apresentar menor número de componentes.

A figura 3.12 mostra o esboço conceitual do protótipo em duas posições de trabalho: a) correspondente à segunda relação de transmissão, ponto em que as coroas de entrada e saída estão mais próximas e b) posição axial correspondente à 1ª e 3ª razões de velocidades. Observa-se que as peças “suporte dos pinhões” e “suporte da coroa de saída” são movidas pela mesma alavanca, pivotada na extremidade superior. O avanço do “cilindro distanciador” acarreta um deslocamento axial da coroa de saída aproximadamente duas vezes maior em relação ao “suporte dos pinhões”.

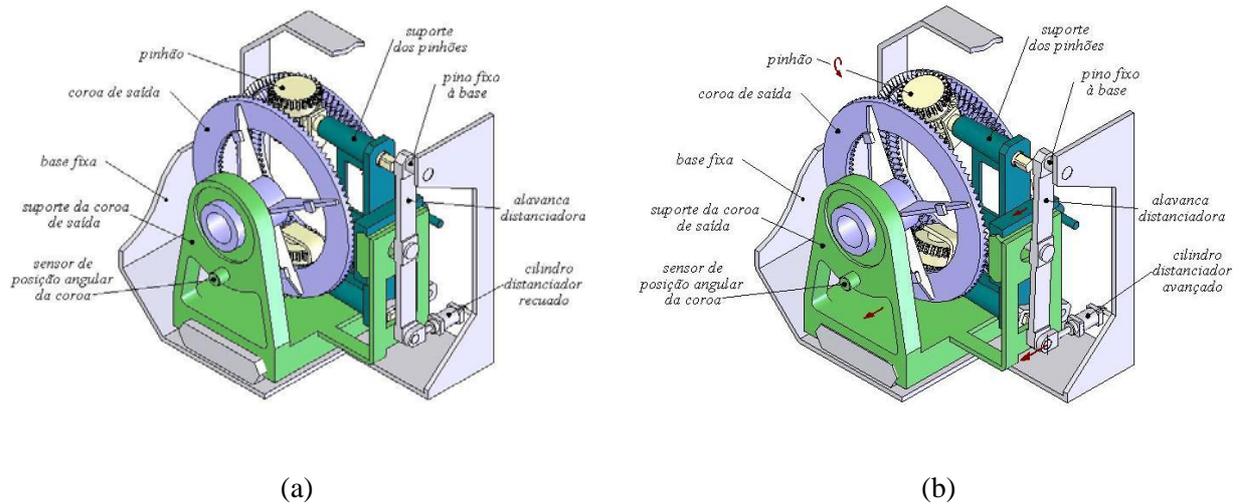
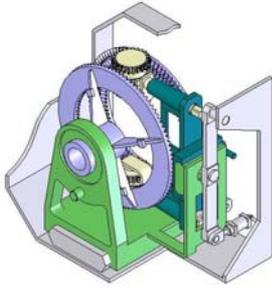
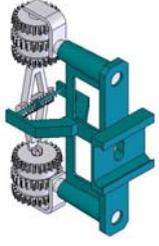
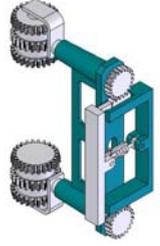
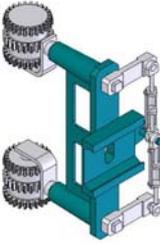


Figura 3.12 – Deslocamento axial da coroa de saída e do suporte dos pinhões: a) 2<sup>a</sup> relação e b) 1<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> relações.

A matriz morfológica da tabela 3.3 apresenta as sub-funções do protótipo, com as respectivas alternativas de forma construtiva.

Tabela 3.3 – Matriz Morfológica.

<i>Sub-função</i>	<i>Forma construtiva</i>
Giro da coroa de entrada	motor elétrico (com inversor de frequências) + redutor
Verificação alinhamento das faixas radiais das coroas	1 sensor de proximidade indutivo em cada coroa.
Afastamento/aproximação das coroas e pinhões	 Coroa entrada fixa + alavanca distanciadora
Nutação dos pinhões	 cilindro interno  pinhão/cremalheira  alavanca

As alternativas de acionamento apresentadas para o movimento de natação dos pinhões proporcionam três configurações construtivas diferentes. Na primeira, observa-se que o uso de um cilindro interno permite uma construção compacta, porém, como um atuador de três posições apresenta grande comprimento, a alternativa é o uso de um cilindro com êmbolo centrado por molas. Este poderia não apresentar exatidão de posicionamento e estabilidade na posição centrada (referente à segunda relação de transmissão), havendo necessidade de um terceiro atuador para referenciar esta posição. Além disso, tais molas deveriam apresentar uma rigidez suficiente para mover os pinhões, o que implicaria em dimensões elevadas, o que se contrapõe à idéia inicial de um protótipo de pequenas proporções.

A tabela 3.4 apresenta uma matriz de decisão, baseada nos requisitos de projeto mostrados na tabela 3.2, montada para auxiliar na escolha da melhor configuração. Na primeira coluna estão os requisitos de projeto do protótipo, ao passo que, na segunda coluna estão colocados os pesos (ou graus de importância) de cada requisito.

Tabela 3.4 – Matriz de Decisão sobre o Sistema para Natação dos Pinhões

<b>Critério avaliado</b>	<b>Peso do critério</b>	<b>Alternativa 1</b> <i>“cilindro interno”</i> <b>PONTUAÇÃO (0 A 10)</b>	<b>Alternativa 2</b> <i>“pinhão e cremalheira”</i> <b>PONTUAÇÃO (0 A 10)</b>	<b>Alternativa 3</b> <i>“alavanca”</i> <b>PONTUAÇÃO (0 A 10)</b>
Facilidade de fabricação das peças	10	7,5	5	7,5
Facilidade de montagem	10	7,5	7,5	10
Custo de fabricação das peças	7,5	7,5	5	10
Custo de montagem das peças	7,5	7,5	10	10
Custo de componentes comerciais	7,5	5	7,5	10
Dimensões máximas	5	5	7,5	10
Massa do protótipo	2,5	5	7,5	10
Operação eficaz	10	7,5	10	10
Pontuação final - $\Sigma(\text{peso do critério} \times \text{nota})$		412 (3º)	450 (2º)	575 (1º)

Portanto, a terceira alternativa construtiva mostrou-se mais adequada. Tal alternativa apresenta, resumidamente, a seguinte forma de operação:

1. Deslocamento axial dos pinhões e da coroa de saída:

A peça “alavanca distanciadora” é movida por um atuador pneumático. Por meio da diferença dos braços de alavanca, o “suporte dos pinhões” é movido aproximadamente metade do valor do deslocamento do “suporte da coroa de saída”.

## 2. Movimento de nutação dos pinhões para troca da relação de transmissão:

O deslocamento simultâneo dos dois “cilindros de três posições” realiza o posicionamento angular dos pinhões para cada relação.

O aspecto final do projeto conceitual do protótipo é mostrado na figura 3.13.

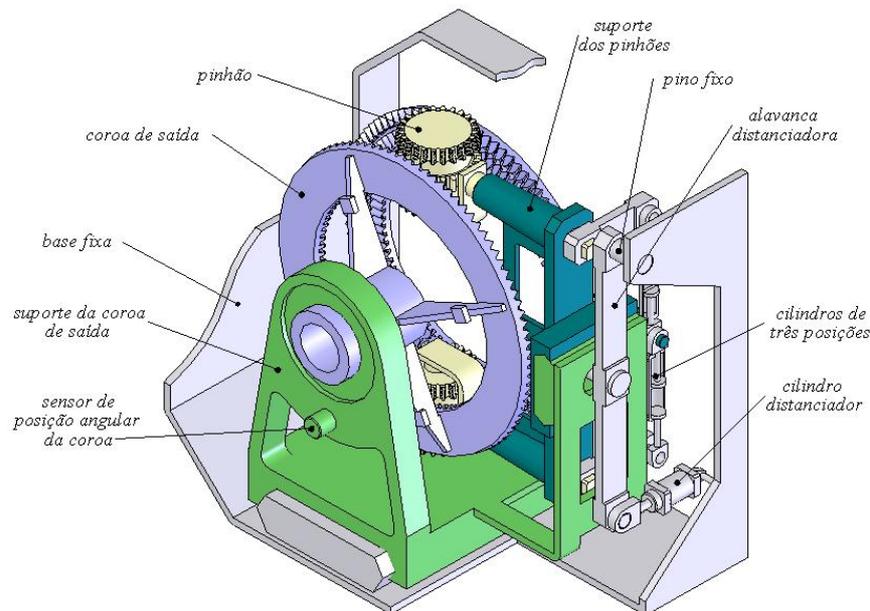


Figura 3.13 – Conceito final do protótipo.

Obtido o esboço conceitual do protótipo, foi possível dar início às etapas de projeto preliminar e de detalhamento. Ao longo destas atividades, os principais componentes do sistema sofreram modificações em sua forma, visando atender principalmente aos atributos de fabricação, montagem e de custos.

### 3.5 Atividades Relacionadas ao Projeto Preliminar do Protótipo

Nesta etapa foram determinadas as formas construtivas finais das principais peças e subsistemas do protótipo. Dando prioridade aos atributos de fabricação, montagem e de custos, por exemplo, foi especificado que o movimento de nutação seria efetuado por dois atuadores simples, montados opostamente, ao invés dos dois cilindros de três posições anteriormente imaginados. A figura 3.14 mostra estes dois cilindros pneumáticos, responsáveis pelo deslocamento da peça nominada “cursor”, a qual, por sua vez, desloca duas alavancas, responsáveis pelo movimento de nutação dos pinhões intermediários. Todo este subconjunto é solidário à peça de suporte dos pinhões e, portanto, desloca-se axialmente com ela, para alteração da razão de velocidades.

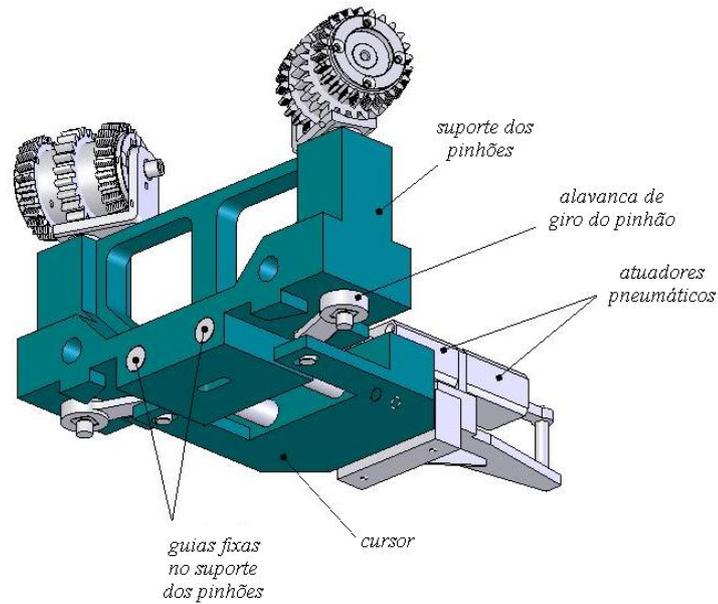


Figura 3.14 – Subsistema de nutação dos pinhões.

Também foram determinadas outras alterações geométricas, entre as quais, o posicionamento do cilindro e da alavanca distanciadora na região inferior, abaixo das coroas, e não mais na lateral, como mostrado na figura 3.13. Tais modificações propiciaram uma forma compacta e, ao mesmo tempo, de fabricação simples.

A figura 3.15 mostra o desenho de conjunto do sistema, ao término da etapa de projeto preliminar.

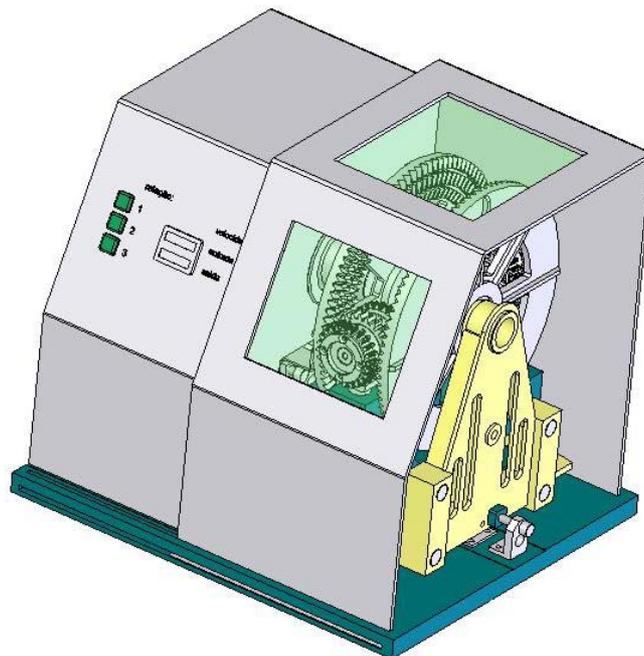


Figura 3.15 – Vista do sistema final após a etapa de projeto preliminar.

### 3.6 Atividades Relacionadas ao Projeto Detalhado do Protótipo

A etapa de detalhamento compreendeu: *i)* desenvolvimento dos algoritmos para modelagem das engrenagens e definições geométricas, *ii)* dimensionamento dos demais componentes do protótipo e *iii)* elaboração do esquema eletro-pneumático para os atuadores.

Procurando dar ênfase apenas aos aspectos mais relevantes do trabalho desenvolvido, o processo de detalhamento dos componentes acessórios não foi descrito. Por outro lado, os algoritmos implementados para a modelagem das engrenagens representam um passo adiante no conhecimento adquirido sobre a transmissão proposta e, portanto, são descritos a seguir. Em seqüência, é apresentado o esquema eletro-pneumático do protótipo.

#### 3.6.1 Modelagem das Coroas e Pinhões

##### 3.6.1.1 Definição do Envelope do Perfil dos Dentes da Coroa Facial

Como visto na seção 2.3, os parâmetros geométricos da transmissão permitem montar as matrizes de transformação que representam o movimento relativo do par pinhão/corona. A aplicação dessas matrizes, juntamente com as equações do perfil evolvente do pinhão e a equação de movimento engrenado, tornam possível obter o perfil do dente da coroa. Na figura 3.16 são mostrados os sistemas de coordenadas criados para representar este par de engrenagens.

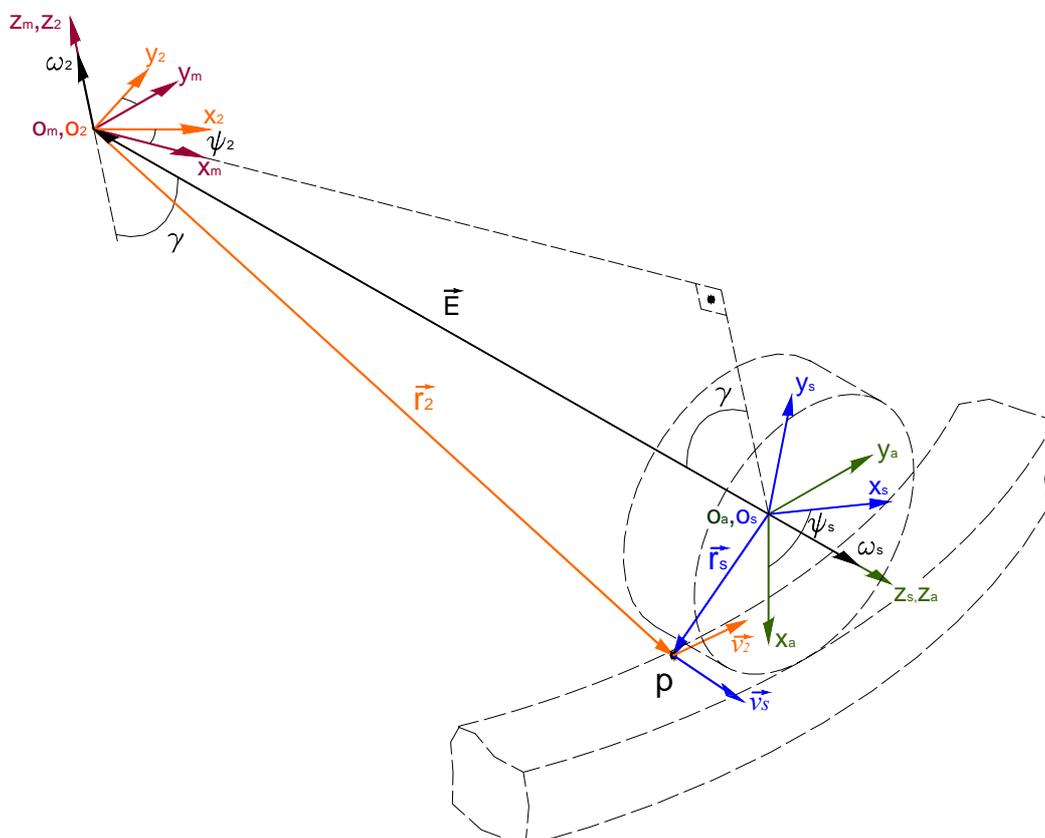


Figura 3.16 – Sistemas de coordenadas e vetores do pinhão cilíndrico e coroa facial.

Na qual:

$p$  = ponto de contato entre os dentes do pinhão e coroa.

$S_a$  = sistema de coordenadas, sobre o qual gira o pinhão (ou ferramenta *shaper*).

$S_s$  = sistema de coordenadas solidário ao pinhão (girante com este).

$S_m$  = sistema de coordenadas, sobre o qual gira a coroa.

$S_2$  = sistema de coordenadas solidário à coroa (girante com esta).

$\vec{r}_s$  = vetor de posição do ponto  $p$  – coordenadas em relação ao sistema  $S_s$ .

$\vec{r}_2$  = vetor de posição do ponto  $p$  – coordenadas em relação ao sistema  $S_2$ .

$\vec{E}$  = vetor distância entre origens  $O_aO_m$ .

$\gamma$  = ângulo entre eixos de pinhão e coroa

$\psi_s$  = ângulo de giro do pinhão ou da ferramenta de geração (*shaper*).

$\psi_2$  = ângulo de giro da engrenagem gerada ou da coroa, durante o movimento  $\left[ \psi_2 = \frac{\psi_s}{m_G} \right]$ .

Deseja-se obter o vetor da velocidade relativa, ou seja, a diferença entre os vetores velocidade do ponto  $p$ , sendo ambos esses vetores no sistema de coordenadas  $S_s$ . Como visto na seção 2.3, por estar situado sobre o plano tangente comum aos perfis no ponto instantâneo de contato, este vetor é usado para a montagem da equação do movimento engrenado. Como todos os vetores serão representados sobre o sistema de coordenadas  $S_s$ , omite-se o sub-subscrito “s” nas equações. Por exemplo, a equação (2.12), da velocidade relativa, é aqui reescrita na forma:

$$\vec{v}_{s2s} = \vec{v}_{s_s} - \vec{v}_{2s} \quad \text{e será representada} \quad \vec{v}_{s2} = \vec{v}_s - \vec{v}_2 \quad (3.2)$$

Reescrevendo esta equação na forma da equação (2.15), da seção 2.3:

$$\vec{v}_{s2} = \vec{\omega}_s \times \vec{r}_s - \vec{\omega}_2 \times (\vec{r}_s - \vec{E}) \quad \text{ou} \quad \vec{v}_{s2} = (\vec{\omega}_s - \vec{\omega}_2) \times \vec{r}_s + \vec{\omega}_2 \times \vec{E} \quad (3.3)$$

Os vetores que compõem a equação (3.3) são os seguintes:

$$\vec{\omega}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_s \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\vec{r}_s = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\vec{\omega}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Os três primeiros vetores já estão referenciados ao sistema de coordenadas  $S_s$  do pinhão. O sub-subscrito “2” da velocidade angular  $\vec{\omega}_{22}$  - equação (3.7) - significa que este vetor está definido em relação ao sistema de coordenadas  $S_2$  e, portanto, deverá ser transformado para o sistema  $S_s$ . As matrizes de transformação de coordenadas são:

$$M_{as} = \begin{bmatrix} \cos \psi_s & -\text{sen} \psi_s & 0 & 0 \\ \text{sen} \psi_s & \cos \psi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$M_{sa} = M_{as}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \psi_s & \text{sen} \psi_s & 0 & 0 \\ -\text{sen} \psi_s & \cos \psi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$M_{ma} = \begin{bmatrix} -\cos \gamma & 0 & \text{sen} \gamma & E \text{sen} \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \gamma & 0 & -\cos \gamma & -E \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$M_{am} = \begin{bmatrix} -\cos \gamma & 0 & -\text{sen} \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen} \gamma & 0 & -\cos \gamma & -E \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$M_{2m} = \begin{bmatrix} \cos \psi_2 & \text{sen} \psi_2 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \psi_2 & \cos \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$M_{m2} = \begin{bmatrix} \cos \psi_2 & -\sin \psi_2 & 0 & 0 \\ \sin \psi_2 & \cos \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Estas matrizes são aplicadas nas equações que transformam os vetores  $\vec{r}_s$  e  $\vec{r}_2$  (obtidas a partir da equação 2.24):

$$\vec{r}_2 = M_{2s} \vec{r}_s = M_{2m} M_{ma} M_{as} \vec{r}_s \quad (3.14)$$

$$\vec{r}_s = M_{s2} \vec{r}_2 = M_{sa} M_{am} M_{m2} \vec{r}_2 \quad (3.15)$$

Quando se faz necessário trabalhar apenas com a parte de rotação das matrizes, então é adotada a sub-matriz  $L(3 \times 3)$  das matrizes  $M$ , portanto:

$$L_{2s} = L_{2m} L_{ma} L_{as} \quad (3.16)$$

$$L_{s2} = L_{sa} L_{am} L_{m2} \quad (3.17)$$

Utiliza-se a matriz  $M$  quando é necessário obter o vetor posição no novo sistema de coordenadas. Este é o caso dos vetores  $\vec{r}_2$  e  $\vec{r}_s$  na figura 3.16 e nas equações (3.14) e (3.15). Já a matriz  $L$  é usada quando se deseja que o vetor translade de um sistema de coordenadas para outro (como um vetor deslizante).

A equação (3.7), que representa o vetor velocidade da coroa  $\omega_2$  em relação ao sistema de coordenadas  $S_2$ , agora pode ser transferido (como um vetor livre) para o sistema de coordenadas  $S_s$ , o que é obtido por meio da seguinte transformação:

$$\vec{\omega}_{2s} = L_{s2} \vec{\omega}_{22} = \begin{bmatrix} -\omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s \\ \omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s \\ -\omega_2 \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Aplicando-se (3.4), (3.5), (3.6) e (3.18) em (3.3), obtém-se:

$$\vec{v}_{s2} = \begin{bmatrix} -(\omega_s + \omega_2 \cos \gamma) y_s - (\omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s) z_s - E \omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s \\ (\omega_s + \omega_2 \cos \gamma) x_s - (\omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s) z_s - E \omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s \\ (\omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s) x_s + (\omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s) y_s \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

A figura 3.17 mostra o perfil evolvente que representa a face de um dente do pinhão.

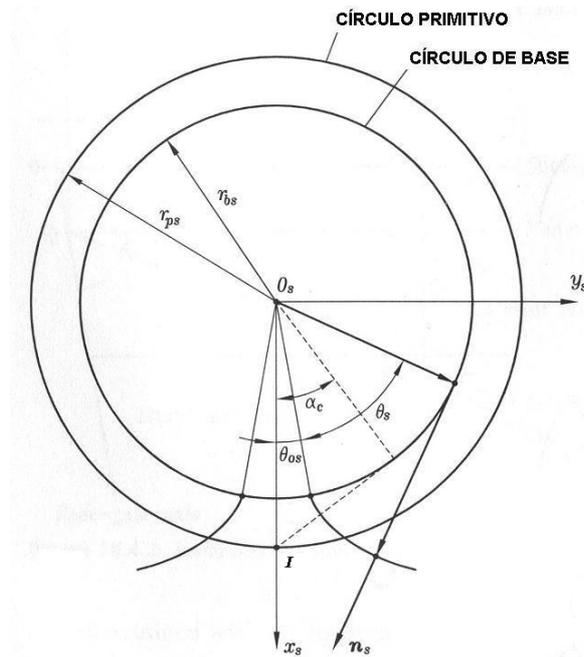


Figura 3.17 – Perfil evolvente da face do dente do pinhão [Litvin e Fuentes, 2004].

Para este perfil evolvente,  $\vec{r}_s$  é dado por:

$$\vec{r}_s = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{bs} [\cos(\theta_{os} + \theta_s) + \theta_s \operatorname{sen}(\theta_{os} + \theta_s)] \\ r_{bs} [\operatorname{sen}(\theta_{os} + \theta_s) - \theta_s \cos(\theta_{os} + \theta_s)] \\ z_s \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Na qual:

$\theta_{os}$  = ângulo correspondente ao início do perfil evolvente sobre o círculo de base.

Ou seja: 
$$\theta_{os} = \frac{\pi}{2 N_p} - \operatorname{inv}(\alpha) \quad (3.21)$$

sendo  $\alpha$  o ângulo de pressão e  $N_p$  o número de dentes do pinhão cilíndrico.

O vetor  $\vec{n}_s$ , normal à face do dente no ponto p da figura 3.16, é definido sobre o sistema de coordenadas  $\mathbf{S}_s$  como:

$$\vec{n}_s = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\theta_{os} + \theta_s) \\ -\cos(\theta_{os} + \theta_s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Na figura 3.16, sendo p um ponto de contato sobre a superfície dos dentes engrenados, tais superfícies apresentam, neste ponto, um vetor normal e um plano tangente comum. Sendo o vetor  $\vec{v}_{s2}$  paralelo ao plano tangente, este é, portanto, ortogonal ao vetor normal  $\vec{n}_s$ . Esta condição permite obter a equação do movimento (2.28), mostrada novamente aqui:

$$\vec{v}_{s2} \cdot \vec{n}_s = 0 \quad (3.23)$$

Aplicando-se os elementos de  $\vec{r}_s$  (eq.3.20) em (3.19), obtém-se a matriz (3.24):

$$\vec{v}_{s2} = \begin{bmatrix} -(\omega_s + \omega_2 \cos \gamma) r_{bs} [\sin(\theta_{0s} + \theta_s) - \theta_s \cos(\theta_{0s} + \theta_s)] - (\omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s) z_s - E \omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s \\ (\omega_s + \omega_2 \cos \gamma) r_{bs} [\cos(\theta_{0s} + \theta_s) + \theta_s \sin(\theta_{0s} + \theta_s)] - (\omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s) z_s - E \omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s \\ (\omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s) r_{bs} [\cos(\theta_{0s} + \theta_s) + \theta_s \sin(\theta_{0s} + \theta_s)] + (\omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s) r_{bs} [\sin(\theta_{0s} + \theta_s) - \theta_s \cos(\theta_{0s} + \theta_s)] \end{bmatrix}$$

Portanto, a equação do movimento engrenado é função dos parâmetros  $(\theta_s, \psi_s, Z_s)$ . O problema pode então ser formulado da seguinte forma: para um dado valor de giro  $\psi_s$  no pinhão (como se este pinhão fosse uma ferramenta para geração da coroa), deseja-se saber quais são os valores de  $\theta_s$  e  $Z_s$  que satisfazem a equação do movimento.

Aplicando (3.22) e (3.24) em (3.23), obtém-se a seguinte equação:

$$\beta = \arccos \left[ \frac{(m_G + \cos \gamma) r_{bs}}{\sin \gamma (z_s + E)} \right] \quad (3.25)$$

Na qual:  $\beta = \theta_{0s} + \theta_s + \psi_s$

A equação (3.25) possui solução real apenas se:

$$z_s \geq \frac{(m_G + \cos \gamma) r_{bs}}{\sin \gamma} - E \quad (3.26)$$

Portanto, um ponto de contato instantâneo, para um dado valor de  $\psi_s$ , é obtido arbitrando um valor de  $z_s$  maior ou igual ao gerado pela equação (3.26) e calculando, em seqüência,  $\beta$  e  $\theta_s$ . Desta forma, para um valor específico de  $\psi_s$  em análise, variando-se de forma iterativa  $z_s$  e calculando os respectivos valores de  $\theta_s$ , são gerados os pontos que formam uma linha de contato sobre a face do dente.

A equação (3.26) será novamente utilizada para definir a largura dos dentes de determinada faixa das coroas em análise. Em outras palavras, por meio desta equação, é possível determinar o raio mínimo da faixa de dentes das coroas.

A figura 3.18 mostra o fluxograma utilizado para obtenção das linhas de contato ao longo do movimento. Com base neste fluxograma, uma rotina de cálculo no software MATLAB foi implementada, cujos dados de saída são as coordenadas dos sucessivos pontos, no sistema  $S_2$ , que formam as linhas de contato, correspondentes a cada incremento de  $\psi_s$  e  $z_s$  (o número de pontos obtidos depende da resolução incremental adotada). Tal rotina é mostrada no apêndice A.

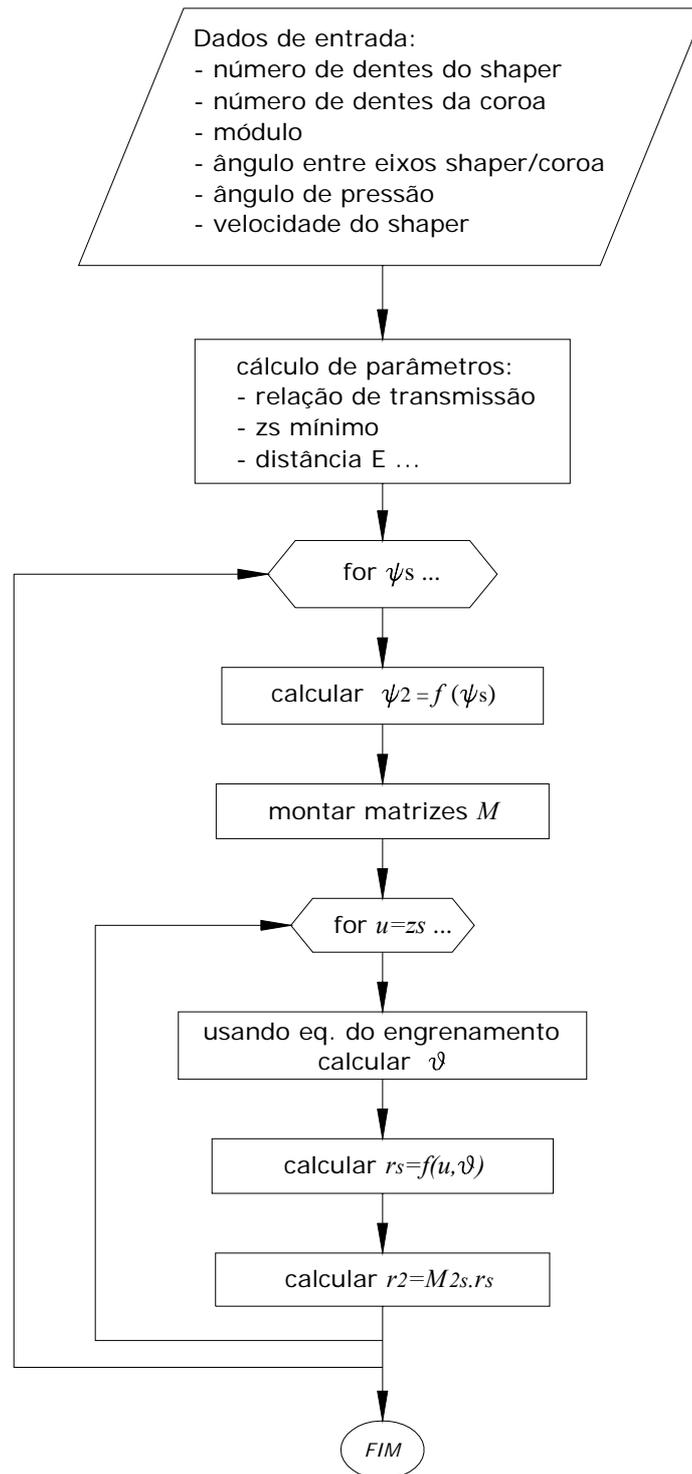


Figura 3.18 – Fluxograma para cálculo dos sucessivos pontos de contato.

Na seqüência, foram gerados arquivos de texto, cada um contendo as coordenadas dos pontos que formam uma linha de contato, correspondente a um determinado valor de  $\psi_s$ . Tais arquivos de texto foram gerados com o objetivo de alimentar um software de CAD 3D, para modelagem sólida dos dentes das coroas.

### 3.6.1.2 Modelagem Sólida dos Dentes da Coroa Facial em Software de CAD

Os arquivos de texto, gerados por meio do algoritmo da figura 3.18, foram exportados para um software de CAD (neste caso, o *SolidWorks*®). A seqüência de atividades realizada dentro do software foi a seguinte:

- Geração de curvas tipo *spline* a partir das listas de pontos: comando “*curve through XYZ points*”. Como resultado, para cada incremento em  $\psi_s$ , obteve-se uma linha de contato.
- As linhas de contato foram utilizadas para gerar uma superfície: comando “*lofted surface*”. Como resultado, obteve-se uma face do dente.
- Espelhamento da face: comando “*mirror*”. Como resultado, obteve-se a face oposta do dente.
- Para fechar a forma do dente, foram geradas superfícies auxiliares: diâmetro externo, diâmetro interno, adendo e dedendo. Apesar de, após este processo, o dente já possuir a forma desejada, não representa ainda um modelo sólido.
- No caso do software *SolidWorks*, para gerar o modelo sólido a partir das superfícies, foi usado o comando “*knit surface + try to form solid*”.

A figura 3.19 mostra as curvas de contato, correspondentes a cada incremento angular  $\psi_s$ , dispostas sobre as superfícies que formam um dente e, por fim, este dente em sua forma definitiva. Observa-se, na vista (b), um corte lateral, resultado da interferência do adendo do pinhão com o flanco do dente da coroa. A superfície gerada, por se tratar de um complicador para o processo de usinagem, foi desconsiderada, tendo sido especificado um arredondamento maior das arestas de topo dos dentes do pinhão, para que tal interferência não ocorresse.

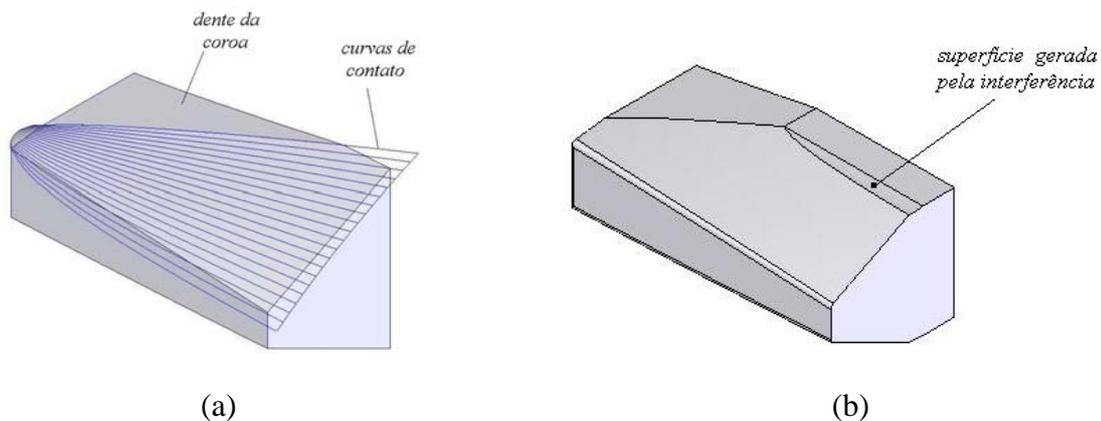


Figura 3.19 – Modelo sólido do dente da coroa facial: a) curvas de contato  
b) modelo sólido final para o dente.

Na seqüência do processo de modelagem 3D, foi desenhado um disco de base, sobre o qual foi montado um dente. Foram geradas cópias deste dente (comando *circular pattern*), de número correspondente ao desejado para a faixa intermediária da coroa. Por fim, todos os dentes foram unidos ao disco de base por meio da *feature join*. Este processo gerou arquivos de grande magnitude, porém, muito úteis para as etapas posteriores do desenvolvimento do protótipo.

### 3.6.1.3 Definição do Envelope do Perfil dos Dentes da Coroa Cônica Externa

As equações para a faixa cônica externa foram obtidas pela extensão do procedimento usado nas engrenagens faciais. Tal equacionamento tem como base a figura 3.20.

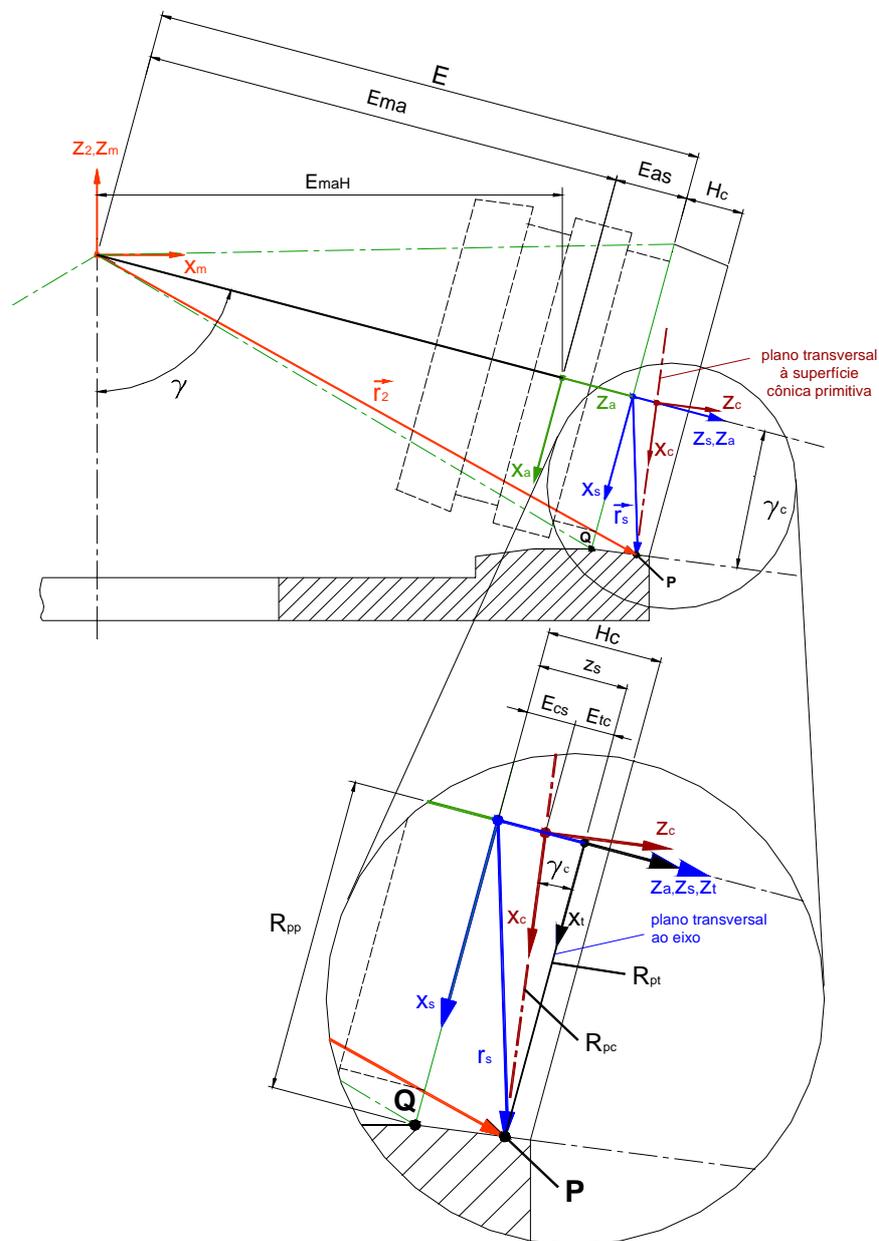


Figura 3.20 – Sistemas de coordenadas e vetores do pinhão e coroa cônicos externos.

Na qual:

$S_a$  = sistema de coordenadas fixo, sobre o qual gira o pinhão cônico.

$S_s$  = sistema de coordenadas solidário ao pinhão (girante com este).

$S_c$  = sistema de coordenadas solidário ao pinhão, sobre o plano transversal ao cone primitivo (plano virtual) no qual está o perfil evolvente dos dentes.

$S_m$  = sistema de coordenadas fixo, sobre o qual gira a coroa.

$S_2$  = sistema de coordenadas solidário à coroa (girante com esta).

$E$  = distância entre centros de rotação das engrenagens (módulo do vetor  $\vec{E}$ )

$E_{as}$  = distância, para as faixas de dentes cônicos, entre origens dos sistemas de coordenadas  $S_s$  e  $S_a$ , correspondentemente, da faixa cônica e da faixa central do pinhão.

$E_{ma}$  = distância, para as faixas de dentes cônicos, entre origens dos sistemas de coordenadas  $S_a$  e  $S_m$ , correspondentemente, da faixa central do pinhão e da coroa (e não girante com esta).

$E_{maH}$  = componente horizontal de  $E_{ma}$

$H_c$  = largura da faixa de dentes cônicos

$P$  = ponto instantâneo de contato das faces dos dentes de duas engrenagens em movimento

$R_{pc}$  = raio primitivo sobre o plano transversal ao cone primitivo do pinhão cônico

$R_{pp}$  = raio primitivo sobre o plano transversal ao eixo de giro do pinhão, onde está posicionada a origem do sistema de coordenadas  $S_s$

$R_{pt}$  = raio primitivo sobre o plano transversal ao eixo de giro do pinhão cônico

$\vec{r}_s$  = vetor de posição do ponto  $P$  – sistema de coordenadas  $S_s$ .

$\vec{r}_2$  = vetor de posição do ponto  $P$  – sistema de coordenadas  $S_2$ .

$\gamma_c$  = ângulo de cone da faixa de dentes cônicos do pinhão da transmissão proposta

As diferenças entre a transmissão facial e a cônica está no fato de que, no primeiro caso, o plano transversal, sobre o qual é desenvolvida a curva evolvente, é ortogonal ao eixo de giro do pinhão. Já no caso das engrenagens cônicas, as curvas evolventes estão sobre planos transversais ao plano primitivo. Devido ao ângulo de cone, estes planos não são ortogonais ao eixo de giro do pinhão. Desta forma, surge mais uma matriz de transformação e a obtenção das curvas de contato é um pouco mais complexa.

A equação (3.3), que representa a velocidade relativa em relação ao sistema  $S_s$  para o engrenamento facial, é válida também no engrenamento cônico. Contudo, neste caso:

$$E = E_{ma} + E_{as} \quad (3.27)$$

As equações (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7) também são válidas para a faixa cônica. Por outro lado, as matrizes de transformação de coordenadas sofrem alterações:

$$M_{as} = \begin{bmatrix} \cos \psi_s & -\sin \psi_s & 0 & 0 \\ \sin \psi_s & \cos \psi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & E_{as} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$M_{sa} = M_{as}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \psi_s & \sin \psi_s & 0 & 0 \\ -\sin \psi_s & \cos \psi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -E_{as} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$M_{ma} = \begin{bmatrix} -\cos \gamma & 0 & \sin \gamma & E_{ma} \cdot \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & -\cos \gamma & -E_{ma} \cdot \cos \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$M_{am} = M_{ma}^{-1} = \begin{bmatrix} -\cos \gamma & 0 & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & -\cos \gamma & -E_{ma} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

As equações (3.14) e (3.15), do engrenamento facial, se mantêm inalteradas para esta faixa cônica. Também valem as mesmas observações sobre as matrizes de transformação  $L$  – equações (3.16) e (3.17) – e as equações de velocidade (3.18) e (3.19).

Para simplificar a nomenclatura, os planos transversais ao plano primitivo são nomeados de planos virtuais, pois, nas engrenagens cônicas, o perfil evolvente é traçado com base num número virtual de dentes. Isto é necessário porque o diâmetro primitivo, num plano transversal ao eixo  $Z_s$ , é diferente do diâmetro primitivo sobre um plano transversal ao tronco de cone primitivo. Desta forma, o dente é formado pela união dos perfis evolventes inscritos sobre vários planos virtuais, dispostos ao longo do eixo de giro  $Z_s$ . Esta é uma característica das transmissões cônicas. Portanto, deve haver uma matriz adicional de transformação do sistema de coordenadas  $S_c$ , sobre o plano transversal (ou virtual), para o sistema de coordenadas  $S_s$ . Esta matriz é obtida pelas relações:

$$M_{sc} = M_{st} M_{tc} \quad (3.32)$$

$$M_{tc} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c & 0 & -\sin \gamma_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \gamma_c & 0 & \cos \gamma_c & -E_{tc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$M_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$M_{sc} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c & 0 & -\sin \gamma_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \gamma_c & 0 & \cos \gamma_c & z_s - E_{tc} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c & 0 & -\sin \gamma_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \gamma_c & 0 & \cos \gamma_c & E_{cs} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

No algoritmo, a coordenada  $z_s$  irá variar iterativamente desde 0 até a espessura da engrenagem cônica. Para cada coordenada  $z_s$  haverá um valor de  $E_{cs}$  dado pela equação:

$$E_{cs} = z_s - E_{tc} = z_s - R_{pt} \tan \gamma_c \quad (3.36)$$

As outras equações relacionadas são as seguintes:

Número virtual de dentes:  $N_{pv} = N_{pc} / \cos \gamma_c \quad (3.37)$

na qual:  $N_{pc}$  = número de dentes do pinhão

Raio primitivo sobre plano ortogonal ao eixo do pinhão:  $R_{pt} = R_{pp} - z_s \tan \gamma_c \quad (3.38)$

Na qual:  $R_{pp} = m \cdot N_{pc} / 2$  = raio primitivo do pinhão cônico

Raio primitivo sobre plano virtual:  $R_{pc} = R_{pt} / \cos \gamma_c \quad (3.39)$

Raio de base do pinhão sobre o plano virtual:  $R_{bc} = R_{pc} \cos \alpha_c \quad (3.40)$

Aplicando-se (3.38) em (3.39) e (3.39) em (3.40), resulta que:

$$R_{bc} = \frac{R_{pp} - z_s \tan \gamma_c}{\cos \gamma_c} \cos \alpha_c \quad (3.41)$$

Esta última equação relaciona a coordenada  $z_s$  e o raio de base  $R_{bc}$ , o que também é uma característica das engrenagens cônicas.

Para um pinhão de perfil evolvente, mostrado na figura 3.17,  $\vec{r}_c$  é dado por:

$$\vec{r}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rbc[\cos \theta + \theta_s \operatorname{sen} \theta] \\ Rbc[\operatorname{sen} \theta - \theta_s \cos \theta] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

na qual: 
$$\theta = \theta_{os} + \theta_s \quad (3.43)$$

e: 
$$\theta_{os} = \frac{\pi}{2 N_{pv}} - \operatorname{inv}(\alpha) \quad (3.44)$$

A coordenada  $z_c$  na equação (3.42) é nula pois o perfil evolvente de um dente é descrito sobre o plano virtual em análise.

Portanto, um ponto **P** sobre o perfil evolvente do flanco do dente, no plano transversal ao cone primitivo (sistema  $S_c$ ), é convertido para o sistema  $S_s$  por meio da relação:

$$\vec{r}_s = M_{sc} \vec{r}_c$$

$$\vec{r}_s = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c & 0 & -\operatorname{sen} \gamma_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \gamma_c & 0 & \cos \gamma_c & E_{cs} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Rbc(\cos \theta + \theta_s \operatorname{sen} \theta) \\ Rbc(\operatorname{sen} \theta - \theta_s \cos \theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rbc \cos \gamma_c (\cos \theta + \theta_s \operatorname{sen} \theta) \\ Rbc (\operatorname{sen} \theta - \theta_s \cos \theta) \\ Rbc \operatorname{sen} \gamma_c (\cos \theta + \theta_s \operatorname{sen} \theta) + E_{cs} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

A conversão de  $\vec{r}_c$  para  $\vec{r}_s$  deve ser realizada pois o vetor velocidade  $\vec{\omega}_s$  está alinhado com o eixo  $Z_s$ , o qual representa o eixo de giro.

A equação do movimento (2.28) se mantém inalterada, ao passo que o vetor  $\vec{n}_c$ , normal à face do dente no ponto **P** e pertencente ao plano transversal (sist.  $S_c$ ), é definido por:

$$\vec{n}_c = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

A equação (3.19) representa a velocidade relativa  $\vec{v}_{s2s}$  sobre o sistema de coordenada  $S_s$ , portanto, o vetor  $\vec{n}_c$  também deve ser deslocado para tal sistema de coordenadas, ou seja:

$$\vec{n}_s = L_{sc} \vec{n}_c$$

$$\vec{n}_s = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c & 0 & -\operatorname{sen} \gamma_c \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \gamma_c & 0 & \cos \gamma_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c \operatorname{sen} \theta \\ -\cos \theta \\ \operatorname{sen} \gamma_c \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Aplicando-se os elementos de  $\vec{r}_s$  (3.45) em (3.19), obtém-se a matriz (3.48):

$$\vec{v}_{s,2} = \begin{bmatrix} -(\omega_s + \omega_2 \cos \gamma) R_{bc} [\sin \theta - \theta_s \cos \theta] - (\omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s) [R_{bc} (\cos \theta + \theta_s \sin \theta) \sin \gamma_c + E_{cs}] - E \omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s \\ (\omega_s + \omega_2 \cos \gamma) R_{bc} (\cos \theta + \theta_s \sin \theta) \cos \gamma_c - (\omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s) [R_{bc} (\cos \theta + \theta_s \sin \theta) \sin \gamma_c + E_{cs}] - E \omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s \\ (\omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s) [R_{bc} (\cos \theta + \theta_s \sin \theta) \cos \gamma_c] + (\omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s) R_{bc} (\sin \theta - \theta_s \cos \theta) \end{bmatrix}$$

(equação 3.48)

Aplicando-se (3.47) e (3.48) na equação do movimento engrenado (2.28), obtém-se uma equação em seno e cosseno de  $\theta$ :

$$[(E + E_{cs}) \omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s \cos \gamma_c] \sin \theta = [(E + E_{cs}) \omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s] \cos \theta + [\omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s R_{bc} \sin \gamma_c - (\omega_s + \omega_2 \cos \gamma) R_{bc} \cos \gamma_c]$$

ou

$$a \sin \theta = h \cos \theta + b$$

(equação 3.49)

a qual possui solução analítica na forma [Recktenwald, 2000]:

$$\cos \theta = \frac{1}{(h^2 + a^2)} \left( -bh + \sqrt{b^2 h^2 + (h^2 + a^2)(a^2 - b^2)} \right) \quad (3.50)$$

Observa-se que o resultado da equação do movimento engrenado é função direta dos parâmetros  $\theta_s$  e  $\psi_s$ . Indiretamente, o parâmetro  $z_s$  também está presente, na obtenção do raio de base  $R_{bc}$ . Como no caso da faixa facial, o problema pode então ser formulado da seguinte forma: para um dado valor de deslocamento angular  $\psi_s$  no pinhão ou na ferramenta de corte (*shaper*), deseja-se saber quais são os valores de  $\theta_s$  e  $z_s$  que satisfazem a equação do movimento.

Portanto, por meio de um algoritmo incremental como o apresentado na figura 3.18, porém, com matrizes e vetores correspondentes ao caso de dentes cônicos, são obtidas as sucessivas curvas de contato ao longo do movimento engrenado, para a faixa externa da transmissão proposta. Este algoritmo é mostrado no apêndice B.

Da mesma forma, o procedimento para gerar o modelo sólido 3D do dente da coroa, bem como da engrenagem em si, é o mesmo adotado na faixa intermediária facial.

A figura 3.21(a) mostra as curvas de contato, correspondentes a cada incremento angular  $\psi_s$ , dispostas sobre as superfícies que formam o dente; ao passo que a vista (b) mostra este dente em sua forma final. Observa-se, nesta última vista, uma superfície que seria gerada pela interferência da aresta de adendo do dente do pinhão com o flanco do dente da coroa. Como esta superfície é pequena e se trata de um fator complicador para o processo de usinagem, foi desconsiderada, sendo que as bordas dos dentes do pinhão (no diâmetro de adendo) sofreram um arredondamento maior, para que tal interferência não ocorresse.

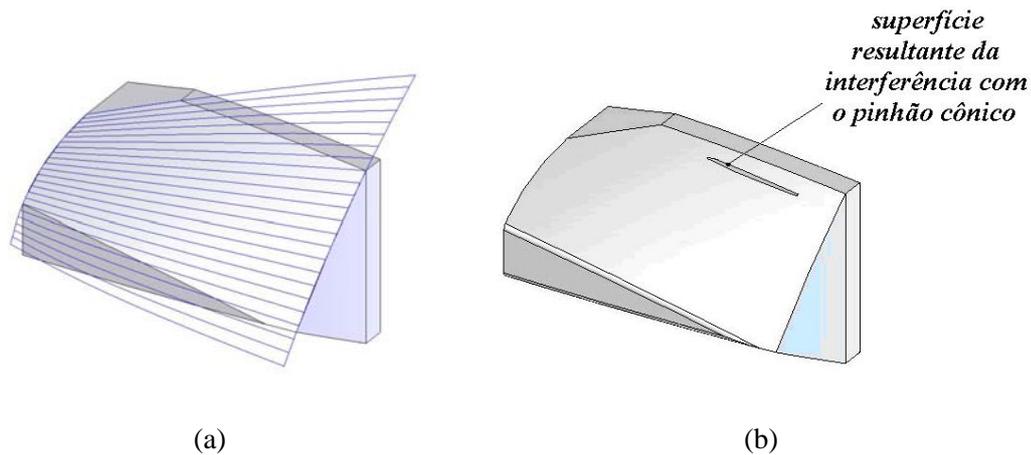


Figura 3.21 – Modelo sólido do dente da coroa cônica externa: a) curvas de contato sobre a superfície do dente e b) modelo final.

A figura 3.21 também mostra que o dente apresenta uma aresta na face superior (de adendo), resultado do encontro das duas faces opostas do dente. Este é um fato indesejável, devido ao efeito de concentração de tensões, e que mostra claramente que se deve preferir o uso de dentes faciais nas faixas mais externas. Por outro lado, o equacionamento desenvolvido para as faixas externas cônicas torna possível trabalhos futuros de otimização na forma dos dentes, por exemplo, pelo uso de um ângulo de conicidade negativo, o que permitiria a obtenção de dentes mais largos e de forma mais regular. Como o protótipo não tem por objetivo a transmissão de carga, optou-se pela fabricação dos dentes externos cônicos, como apresentado na figura 3.21. De fato, os testes realizados até o momento mostram que esta singularidade na forma dos dentes da faixa externa não influenciou no funcionamento do protótipo.

#### 3.6.1.4 Definição do Perfil dos Dentes da Coroa Cônica Interna

Neste caso, valem as mesmas considerações feitas para o engrenamento cônico externo, porém, com as devidas alterações decorrentes da geometria. A primeira destas alterações diz respeito ao vetor  $\vec{E}$ , cujo módulo é dado por:

$$E = E_{ma} - E_{as} \quad (3.51)$$

No caso desta faixa, a equação (3.3), que define o vetor velocidade relativa  $\vec{v}_{s2}$ , também é válida.

O equacionamento é baseado na figura 3.22.

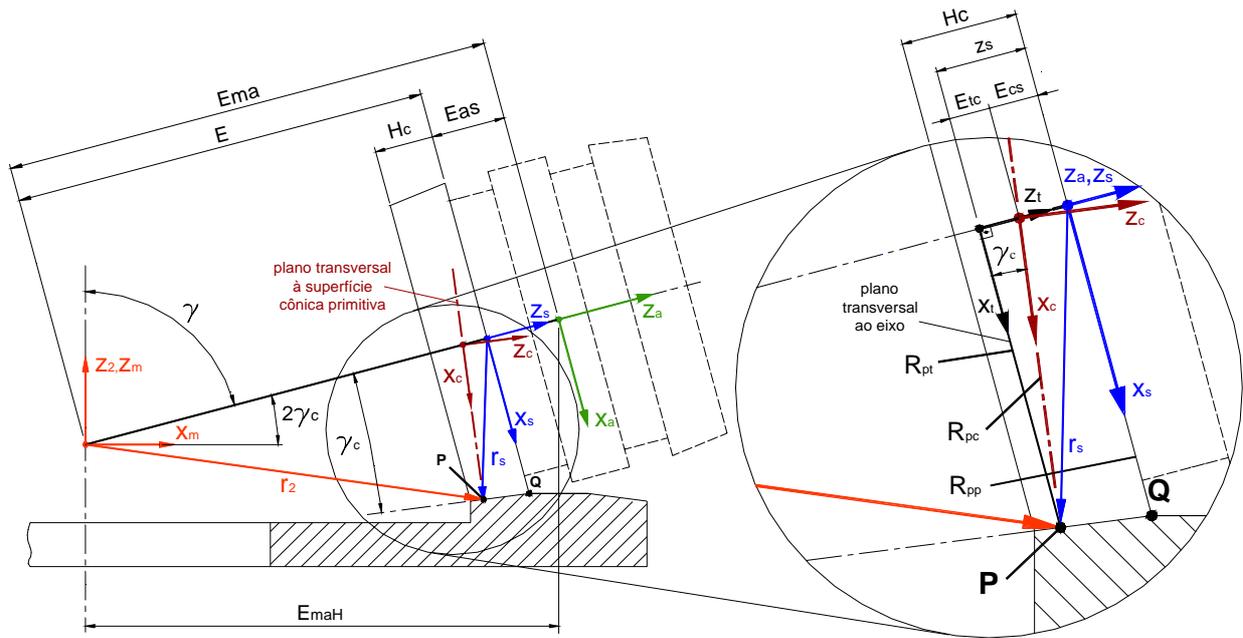


Figura 3.22 – Sistemas de coordenadas e vetores do pinhão e coroa cônicos internos.

Na qual:

$S_a$  = sistema de coordenadas fixo, sobre o qual gira o pinhão cônico.

$S_s$  = sistema de coordenadas solidário ao pinhão (girante com este).

$S_c$  = sistema de coordenadas solidário ao pinhão, sobre o plano transversal ao cone primitivo (plano virtual) no qual está o perfil evolvente dos dentes.

$S_m$  = sistema de coordenadas fixo, sobre o qual gira a coroa.

$S_2$  = sistema de coordenadas solidário à coroa (girante com esta).

$\vec{r}_s$  = vetor de posição do ponto P sobre a face do dente do pinhão.

$\vec{r}_2$  = vetor de posição do ponto P sobre a face do dente da coroa.

Como na faixa externa, as equações (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7) do engrenamento facial são válidas. Por outro lado, as matrizes de transformação de coordenadas sofrem alterações:

$$M_{as} = \begin{bmatrix} \cos \psi_s & -\sin \psi_s & 0 & 0 \\ \sin \psi_s & \cos \psi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -E_{as} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$M_{sa} = M_{as}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \psi_s & \sin \psi_s & 0 & 0 \\ -\sin \psi_s & \cos \psi_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & E_{as} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$M_{ma} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \operatorname{sen} \gamma & E_{maH} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \gamma & 0 & \cos \gamma & E_{maH} \tan(2\gamma_c) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

As equações (3.14) e (3.15), do equacionamento para engrenagens faciais se mantêm inalteradas para esta faixa cônica. Também valem as mesmas observações sobre as matrizes de transformação  $L$  – equações (3.16) e (3.17).

Na equação (3.18), o vetor de velocidade  $\vec{\omega}_2$ , definido sobre o sistema de coordenadas  $S_2$ , é transferido para o sistema de coordenadas  $S_s$ . O resultado da aplicação da transformação linear  $L_{s2}$  sobre  $\vec{\omega}_{22}$ , para o caso da faixa interna da coroa, é:

$$\vec{\omega}_{2s} = L_{s2} \vec{\omega}_{22} = \begin{bmatrix} -\omega_2 \operatorname{sen} \gamma \cos \psi_s \\ \omega_2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \psi_s \\ \omega_2 \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Aplicando-se (3.4), (3.5), (3.6) e (3.55) em (3.3), obtém-se:

$$\vec{v}_{s2} = \begin{bmatrix} -(\omega_s - \omega_2 \cos \gamma) y_s - (\omega_2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \psi_s) z_s - E \omega_2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \psi_s \\ (\omega_s - \omega_2 \cos \gamma) x_s - (\omega_2 \operatorname{sen} \gamma \cos \psi_s) z_s - E \omega_2 \operatorname{sen} \gamma \cos \psi_s \\ (\omega_2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \psi_s) x_s + (\omega_2 \operatorname{sen} \gamma \cos \psi_s) y_s \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

A matriz de transformação do sistema de coordenadas  $S_c$ , sobre o plano virtual, para o sistema de coordenadas  $S_s$  é dada por:

$$M_{sc} = M_{st} M_{tc} \quad (3.32)$$

$$M_{tc} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c & 0 & \operatorname{sen} \gamma_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \gamma_c & 0 & \cos \gamma_c & |E_{tc}| \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$M_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -|z_s| \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$M_{sc} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c & 0 & \operatorname{sen} \gamma_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \gamma_c & 0 & \cos \gamma_c & |E_{tc}| - |z_s| \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c & 0 & \operatorname{sen} \gamma_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \gamma_c & 0 & \cos \gamma_c & -|E_{cs}| \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

A equação (3.36) é alterada para:

$$|E_{cs}| = |z_s| - |E_{tc}| = |z_s| - R_{pt} \tan \gamma_c \quad (3.60)$$

E a equação (3.38), do raio primitivo sobre plano ortogonal ao eixo do pinhão, se torna:

$$R_{pt} = R_{pp} - |z_s| \tan \gamma_c \quad (3.61)$$

Já as equações (3.37), (3.39) e (3.40) são mantidas, o que resulta:

$$R_{bc} = \frac{R_{pp} - |z_s| \tan \gamma_c}{\cos \gamma_c} \cos \alpha_c \quad (3.62)$$

As equações (3.42), (3.43) e (3.44), que definem o perfil evolvente sobre o plano transversal (virtual) também são válidas na faixa interna da coroa.

Portanto, um ponto P sobre o perfil evolvente do flanco do dente, no plano transversal ao cone primitivo (sistema  $S_c$ ), é convertido para o sistema  $S_s$  por meio da relação:

$$\vec{r}_s = M_{sc} \vec{r}_c$$

$$\vec{r}_s = \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c & 0 & \sin \gamma_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_c & 0 & \cos \gamma_c & -|E_{cs}| \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{bc}(\cos \theta + \theta_s \sin \theta) \\ R_{bc}(\sin \theta - \theta_s \cos \theta) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{bc} \cos \gamma_c (\cos \theta + \theta_s \sin \theta) \\ R_{bc} (\sin \theta - \theta_s \cos \theta) \\ -R_{bc} \sin \gamma_c (\cos \theta + \theta_s \sin \theta) - |E_{cs}| \\ 1 \end{bmatrix}$$

(equação 3.63)

Para a aplicação da equação do movimento engrenado (2.28), o vetor normal ao perfil evolvente, definido sobre o plano virtual em análise, também deve ser convertido para o sistema de coordenadas  $S_s$ . A equação (3.46), que define este vetor normal, é a mesma do caso anterior, porém, ao aplicar a transformação linear  $L_{s2}$ , resulta:

$$\vec{n}_s = L_{sc} \vec{n}_c$$

$$\vec{n}_s = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c & 0 & \sin \gamma_c \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma_c & 0 & \cos \gamma_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_c \sin \theta \\ -\cos \theta \\ -\sin \gamma_c \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Aplicando-se os elementos de  $\vec{r}_s$  (3.63) em (3.56), obtém-se:

$$\vec{v}_{s2} = \begin{bmatrix} -(\omega_s - \omega_2 \cos \gamma) R_{bc} [\sin \theta - \theta_s \cos \theta] + (\omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s) [R_{bc}(\cos \theta + \theta_s \sin \theta) \sin \gamma_c + |E_{cs}|] - E \omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s \\ (\omega_s - \omega_2 \cos \gamma) R_{bc}(\cos \theta + \theta_s \sin \theta) \cos \gamma_c + (\omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s) [R_{bc}(\cos \theta + \theta_s \sin \theta) \sin \gamma_c + |E_{cs}|] - E \omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s \\ (\omega_2 \sin \gamma \sin \psi_s) R_{bc}(\cos \theta + \theta_s \sin \theta) \cos \gamma_c + (\omega_2 \sin \gamma \cos \psi_s) R_{bc}(\sin \theta - \theta_s \cos \theta) \end{bmatrix}$$

(equação 3.65)

Aplicando-se (3.64) e (3.65) na equação do movimento (2.26), obtém-se uma equação em seno e coseno de  $\theta$ :

$$[(E - |E_{cs}|)\omega_2 \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \psi_s \cos \gamma_c] \operatorname{sen} \theta = [(E - |E_{cs}|)\omega_2 \operatorname{sen} \gamma \cos \psi_s] \cos \theta + R_{bc}[-\omega_2 \operatorname{sen} \gamma \cos \psi_s \operatorname{sen} \gamma_c - (\omega_s - \omega_2 \cos \gamma) \cos \gamma_c]$$

ou

$$a \operatorname{sen} \theta = b \cos \theta + c$$

(equação 3.66)

Essa equação possui a solução analítica mostrada na equação (3.50).

Portanto, apesar das mudanças em parâmetros geométricos e nas matrizes de transformação, o procedimento para obter as linhas de contato é o mesmo adotado na engrenagem cônica externa. O mesmo vale para a modelagem sólida em software de CAD.

A figura 3.23(a) mostra as curvas de contato, correspondentes a cada incremento angular  $\psi_s$ , dispostas sobre a face; ao passo que a figura 3.23(b) apresenta o dente em sua forma final. Novamente, desconsidera-se a interferência dos dentes do pinhão, mostrada nesta vista (b), sendo aplicado um arredondamento maior em suas extremidades (diâmetro de adendo), para que tal interferência não ocorra.

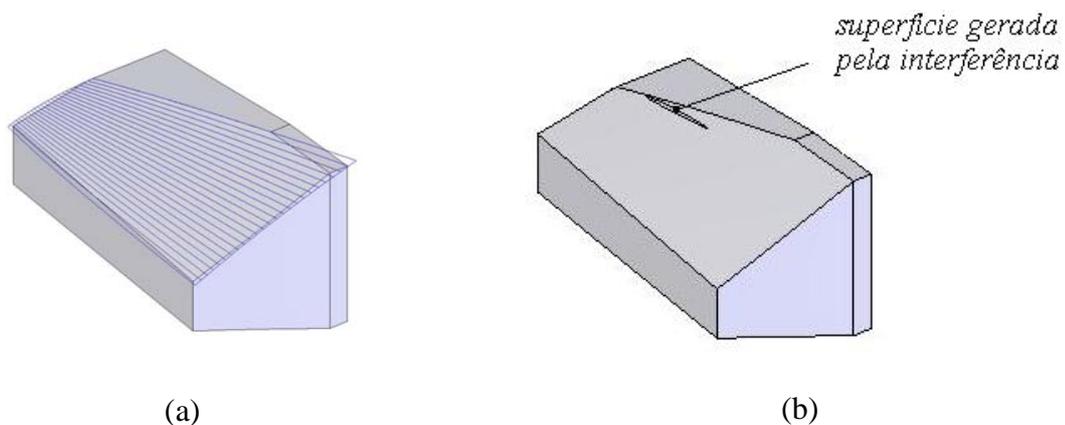


Figura 3.23 – Modelo sólido do dente da coroa cônica interna: a) curvas de contato sobre a face do dente e b) modelo final do dente.

A figura 3.23 também mostra que a forma final dos dentes é mais regular do que no caso da faixa externa da coroa, pois não houve a formação da aresta na face superior de adendo. Isto permite dizer que o uso de dentes cônicos, ao invés de faciais, no caso das faixas internas, pode proporcionar uma largura útil maior, bem como uma forma mais regular destes dentes.

### 3.6.2 Procedimento para Determinar a Altura Total do Pinhão

Uma característica geométrica importante da transmissão proposta é a relação entre o ângulo entre eixos das engrenagens, bem como a altura total do pinhão, com o deslocamento axial relativo e ângulo de natação, específicos para cada valor de razão de velocidades.

A figura 3.24(a) mostra um pinhão hipotético, ou seja, não correspondente ao pinhão adotado no protótipo, composto por três faixas de dentes retos, com as seguintes características: 18 dentes, módulo 1,5 mm e largura de 16 mm; em contato com uma coroa facial de 160 dentes, na faixa intermediária. A figura 3.24(b) mostra o deslocamento do pinhão em relação à coroa, necessário para o posterior movimento de natação e, por fim, a figura 3.24(c) apresenta a posição final do pinhão após este movimento de natação, quando então entra em operação a faixa externa de operação. Os valores de ângulo de natação e deslocamento linear para esta figura são:  $\theta = 22,5^\circ$  e  $\delta/2 = 5,5$  mm.

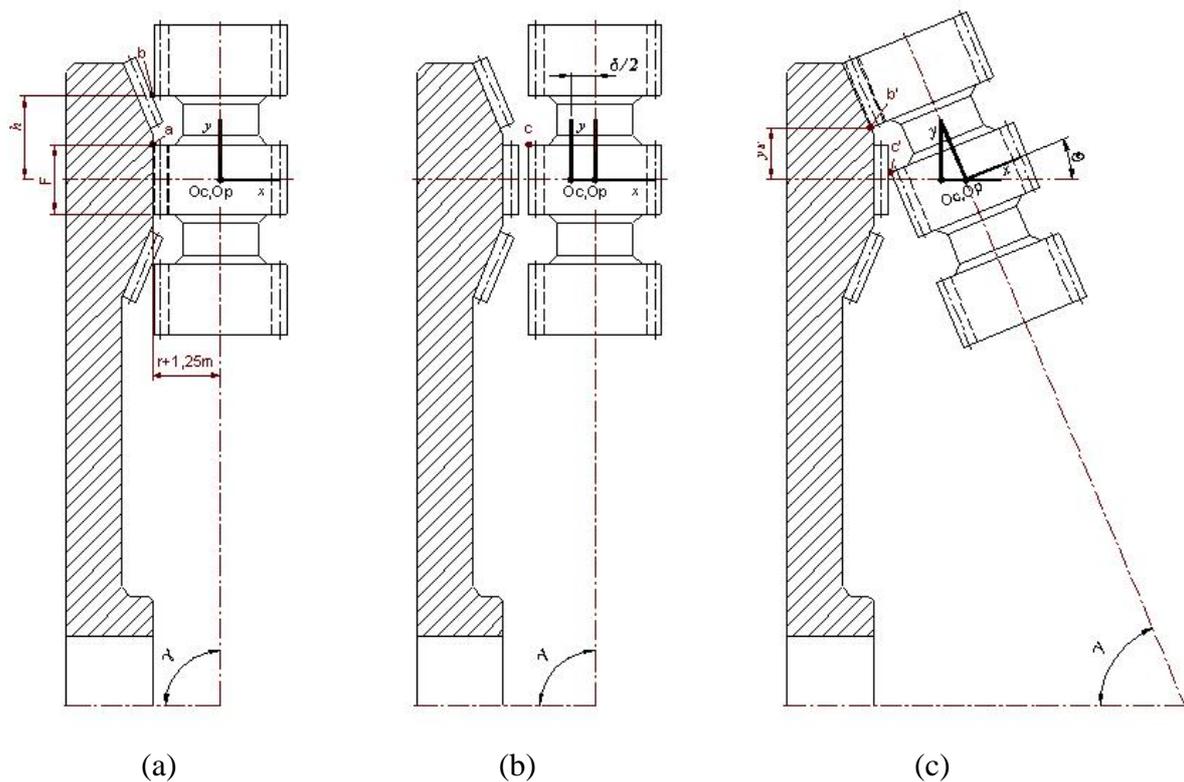


Figura 3.24 – Movimentos do pinhão: a) engrenagens acopladas, b) deslocamento axial e c) natação.

Independentemente das faixas externa e interna serem compostas por dentes cônicos ou cilíndricos, a altura total do pinhão será definida pelos valores de  $\delta$ ,  $\theta$  e  $\gamma$ . Além disso, uma transmissão como a mostrada na figura 3.24 apresenta uma correlação entre os valores de ângulo de natação  $\theta$  e de deslocamento axial relativo  $\delta$ .

Um algoritmo bastante simples, porém muito útil, foi implementado no software MATLAB para determinar a distância  $h$  das faixas externa e interna em relação à origem do sistema de coordenadas do pinhão, bem como o deslocamento  $\delta$  (ambos mostrados na figura 3.24), para um dado valor do ângulo de natação. A rotina é baseada na determinação de um ponto  $\mathbf{b}$  que, quando girado para a posição  $\mathbf{b}'$ , possui uma coordenada vertical maior que a do ponto  $\mathbf{a}$ , correspondente à metade da largura  $F$ . Além disso, o ponto  $\mathbf{c}$ , quando girado para a posição  $\mathbf{c}'$ , não deve colidir com o topo dos dentes do pinhão na faixa intermediária.

A figura 3.25 mostra os resultados para a mesma transmissão hipotética, porém, com os seguintes valores de ângulo de natação e deslocamento linear:  $\theta = 15^\circ$  e  $\delta/2 = 6,5$  mm.

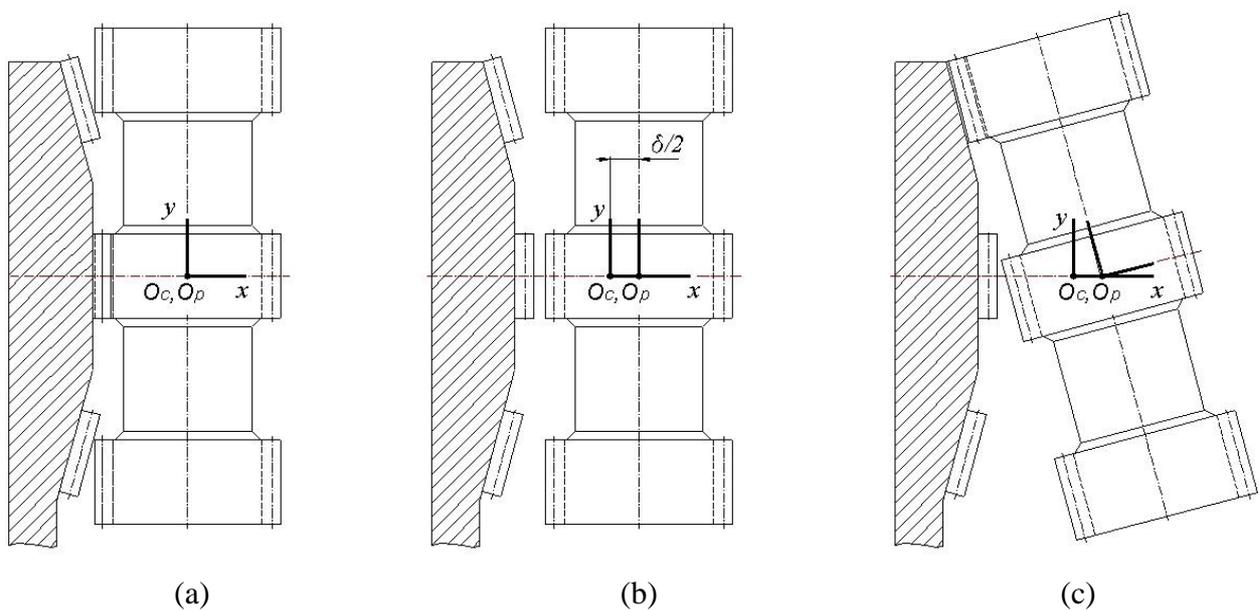


Figura 3.25 – Geometria para  $\theta = 15^\circ$  e  $\delta/2 = 6,5$  mm: a) engrenagens acopladas, b) deslocamento axial e c) natação.

Por meio da figura 3.25, observa-se que valores baixos de ângulo de natação ocasionam um pinhão alongado. Por outro lado, valores elevados causam dentes muito distorcidos nas coroas e um valor relativamente grande no deslocamento linear relativo. Portanto, a determinação da altura total dos pinhões, bem como das dimensões da transmissão em si, deve levar em consideração uma relação entre os parâmetros  $\delta$ ,  $\theta$  e  $\gamma$  que proporcione, ao mesmo tempo, uma forma compacta e dentes regulares em todas as faixas das coroas.

### 3.6.3 Esquema Eletro-Pneumático do Protótipo

A figura 3.26 mostra o esquema eletro-pneumático adotado, compreendendo os atuadores responsáveis pelos movimentos de deslocamento axial e de natação.

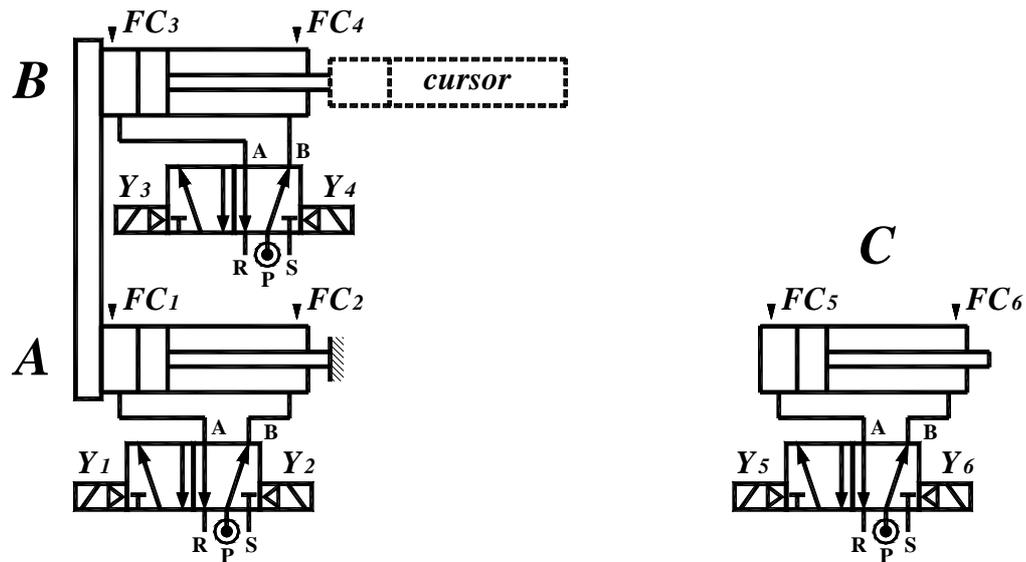


Figura 3.26 – Esquema eletro-pneumático do protótipo.

Os cilindros *A* e *B* atuam sobre o cursor (peça também mostrada na figura 3.14) responsável pelo movimento de natação dos pinhões. O atuador *C* está conectado à alavanca distanciadora, que efetua o deslocamento axial relativo da coroa de saída e do suporte dos pinhões. Os atuadores *A* e *B* são idênticos, sendo fixados na parte traseira a uma mesma peça, ao passo que o êmbolo de *A* é fixado no suporte dos pinhões. Portanto, o acionamento do atuador *C* causa o deslocamento axial de todo o sub-conjunto da figura 3.14 (incluindo os atuadores *A* e *B*). Os três atuadores são cilindros de dupla ação, com acionamento por válvulas direcionais de cinco vias e duas posições, comandadas por duplo solenóide.

Para comandar o sistema, foi utilizado um CLP (Controlador Lógico Programável) de entradas e saídas digitais, no padrão 24 Vcc. Na entrada deste CLP foram conectados três botões elétricos, com retorno por mola, correspondentes a cada relação de transmissão. Também foram conectados os sensores indutivos de proximidade das coroas, que têm a tarefa de indicar que estas estão em posição de alinhamento angular, condição necessária para realização dos movimentos dos atuadores *A*, *B* e *C*, quando solicitada alteração da relação de transmissão. Na parte posterior das coroas de entrada e saída, nas posições angulares mostradas na figura 3.7 (ou seja, a cada 45°), foram fixados pequenos insertos metálicos. O sensor indutivo da coroa de entrada foi montado na estrutura, ao passo que o sensor da coroa de saída foi montado sobre o seu suporte. Desta forma, no período de tempo em que ambos os sensores indicam a presença do correspondente inserto metálico, o movimento de natação dos pinhões pode ser realizado, pois a condição de alinhamento angular das coroas foi atingida.

A lógica correspondente aos sinais de entrada, para cada relação de velocidades é mostrada na tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Estado dos Sinais de Entrada para Cada Relação de Velocidades.

<b>Relação</b>	<b><math>B_1</math></b>	<b><math>B_2</math></b>	<b><math>B_3</math></b>	<b><math>SC_1</math></b>	<b><math>SC_2</math></b>
1 <sup>a</sup>	1	0	0	1	1
2 <sup>a</sup>	0	1	0	1	1
3 <sup>a</sup>	0	0	1	1	1

Na qual:

$B_1$  = botão para ativar a primeira relação de transmissão.

$B_2$  = botão da segunda relação de transmissão.

$B_3$  = botão da terceira relação de transmissão.

$SC_1$  = sensor de posição angular da coroa de entrada.

$SC_2$  = sensor de posição angular da coroa de saída.

1 = nível lógico alto, ou ativo.

0 = nível lógico baixo, ou inativo.

O programa seqüencial *ladder*, implementado no CLP, tem por função ativar as saídas correspondentes às bobinas solenóides de acionamento das válvulas direcionais de *A*, *B* e *C*. Portanto, o acionamento das saídas do CLP segue a lógica mostrada na tabela 3.6.

Tabela 3.6 – Lógica de Acionamento das Saídas do CLP.

<b>Relação</b>	<b><i>A</i></b>	<b><i>B</i></b>	<b><i>C</i></b>	<b><math>Y_1</math></b>	<b><math>Y_2</math></b>	<b><math>Y_3</math></b>	<b><math>Y_4</math></b>	<b><math>Y_5</math></b>	<b><math>Y_6</math></b>
1 <sup>a</sup>	avançado	recuado	avançado	1	0	0	1	1	0
2 <sup>a</sup>	recuado	recuado	recuado	0	1	0	1	0	1
3 <sup>a</sup>	recuado	avançado	avançado	0	1	1	0	1	0

Na qual:

$Y_1$  = bobina solenóide de avanço do atuador *A*.

$Y_2$  = bobina solenóide de recuo do atuador *A*.

$Y_3$  = bobina solenóide de avanço do atuador *B*.

$Y_4$  = bobina solenóide de recuo do atuador *B*.

$Y_5$  = bobina solenóide de avanço do atuador *C*.

$Y_6$  = bobina solenóide de recuo do atuador *C*.

Desta forma, por meio de um programa seqüencial muito simples, são gerados os sinais para os atuadores efetuarem os movimentos necessários para alteração da razão de velocidades. Cabe ressaltar que um programa tão simples não necessitaria do uso de um CLP,

porém, este foi o sistema adotado em função da flexibilidade para realização de alterações, caso fosse necessário (inserção de temporizadores, relés auxiliares para intertravamento, etc.).

Mais detalhes sobre o desempenho dos atuadores são abordados na seção 3.8.

### **3.7 Aspectos Relacionados à Construção do Protótipo**

Nas figuras 3.14 e 3.15, correspondentes ao projeto preliminar, observa-se que os componentes de suporte dos pinhões e da coroa de saída, os quais devem ser deslocados axialmente para alteração da razão de velocidades, apresentam furos cilíndricos, que permitem seu deslocamento sobre eixos-guias de aço. Adotando-se materiais poliméricos nestas peças, pretendia-se obter um sistema simples e de dimensões reduzidas. Devido ao fato das guias cilíndricas apresentarem tendência ao bloqueio, na presença de deformações sob carregamento, desalinhamento ou erros de fabricação, determinou-se que as peças apresentariam um furo cilíndrico e um oblongo. Desta forma, o furo cilíndrico restringiria dois graus de liberdade (horizontal e vertical), enquanto o furo oblongo restringiria apenas os movimentos verticais. Esta atitude, auxiliada pela pequena magnitude dos deslocamentos (da ordem de 12 mm), visava diminuir a possibilidade de bloqueio das guias durante a operação do protótipo.

Contudo, constatou-se que as tolerâncias especificadas de cilíndricidade e paralelismo não puderam ser atingidas na fabricação dos furos. Pela análise posterior das peças, foram levantadas as seguintes hipóteses para as fontes de erros:

- a) para fixar as peças na máquina foi utilizada uma morsa hidráulica, que ocasionou elevada deformação por compressão do polímero, devido ao baixo valor de módulo de elasticidade deste material. O retorno elástico, ocorrido no momento da retirada da peça após a usinagem, pode ter gerado erros de forma consideráveis.
- b) os furos apresentavam dimensões de  $\phi$  20 mm e comprimento de 50 mm, tendo sido usinados por meio de uma fresa de topo, de menor diâmetro, utilizando-se a interpolação circular. Devido ao comprimento relativamente elevado da ferramenta, a deformação elástica resultante pode ter ocasionado a conicidade nos furos.

A tentativa de ajuste dos erros não produziu os resultados desejados e, em virtude disso, várias peças foram descartadas, enquanto outras foram modificadas, no sentido de permitir a montagem de todos os componentes móveis sobre guias lineares de esferas recirculantes.

A figura 3.27 mostra o modelo virtual do protótipo, contendo as guias lineares. Componentes como válvulas e botões de acionamento foram omitidos, para facilitar a visualização do sistema mecânico.

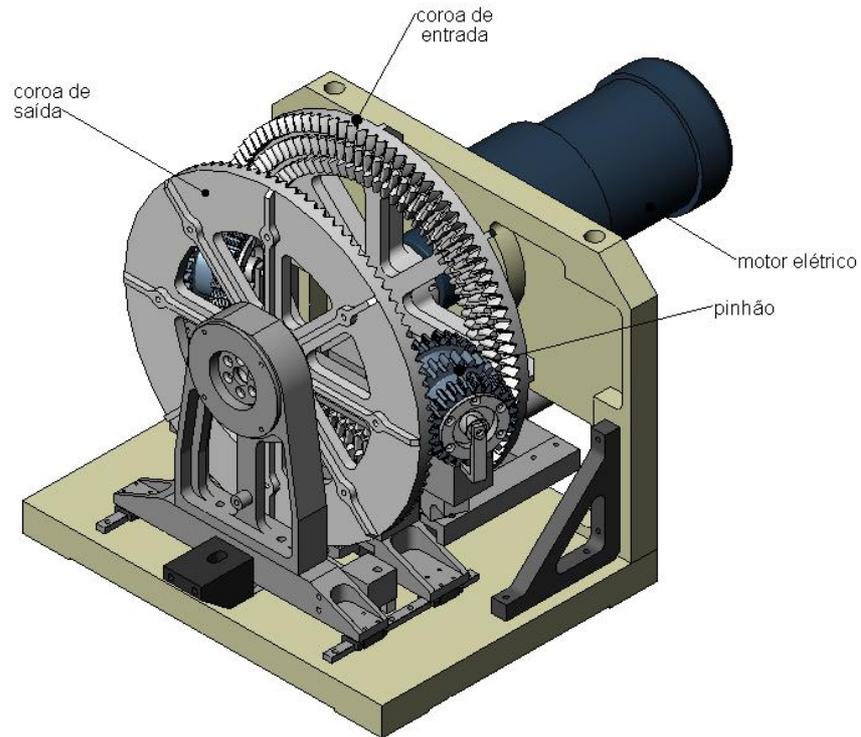


Figura 3.27 – Modelo virtual do protótipo.

Concluídas as modificações, o sistema foi montado, dando-se início aos testes preliminares. A figura 3.28 mostra o protótipo real nesta fase.

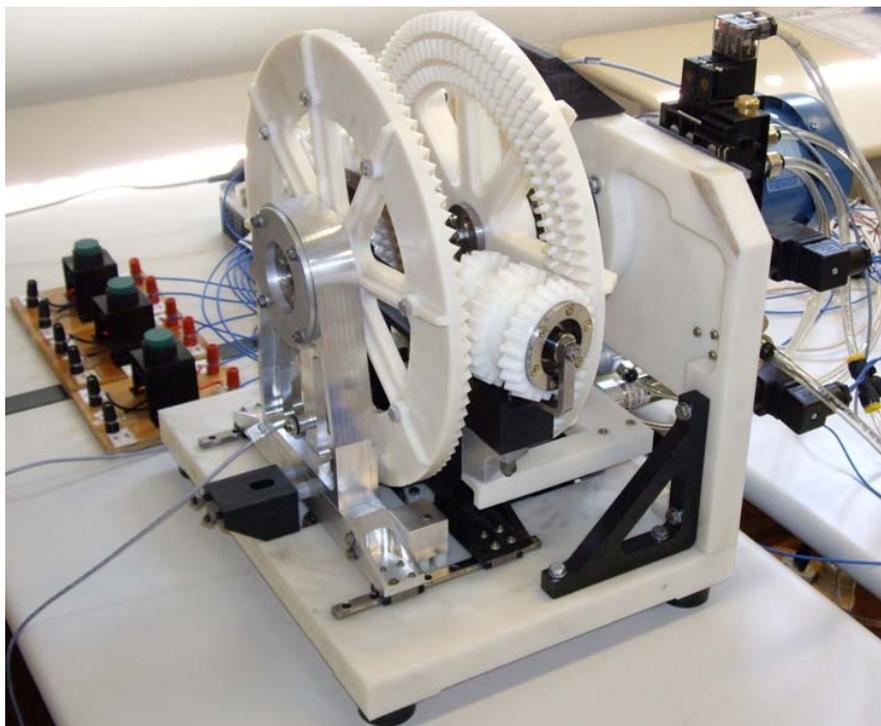


Figura 3.28 – Vista geral do conjunto do protótipo durante os testes experimentais.

### 3.8 Testes Funcionais

Devido ao fato do sistema proposto representar um novo conceito de transmissão mecânica, no início do trabalho não havia nenhuma referência quanto aos aspectos de projeto e de operação. Em função disso, deu-se prioridade à validação apenas dos atributos funcionais. Neste sentido, foi estabelecido que o protótipo deveria operar de forma eficaz, transmitindo o movimento e efetuando os deslocamentos necessários para alteração da relação de transmissão.

A averiguação destes aspectos funcionais foi realizada pela inspeção visual do sistema em operação, sem necessidade de medição de nenhuma grandeza física. Os quesitos qualitativos de funcionamento foram inicialmente estabelecidos como:

- a) operação adequada: o protótipo deveria operar sem ruído e temperatura excessiva. Qualquer indicativo de operação inadequada deveria ser analisado e, se possível, sanado.
- b) alteração da razão de velocidades: a colisão de dentes, durante os movimentos de deslocamento axial e de natação, não poderia ocorrer. Caso fosse observada alguma falta de sincronismo, velocidade insuficiente de algum atuador, ou qualquer problema semelhante, este deveria ser analisado e sanado.

Ao longo dos testes, foram observados os seguintes aspectos de funcionamento:

- c) ruído e temperatura

Constatou-se um nível de ruído e temperatura aceitáveis na operação das engrenagens, desta forma, não foi necessário realizar um procedimento de medição. Este resultado comprovou a adequação dos modelos matemáticos e virtuais implementados, bem como do processo adotado para a fabricação das engrenagens.

Por outro lado, o moto-redutor comercial empregado no acionamento da coroa de entrada apresentou um ruído que, apesar de suportável, mostrou-se desagradável. Portanto, tal componente deverá ser isolado ou substituído futuramente.

- d) movimentos de natação dos pinhões e deslocamento axial

Observou-se a alteração praticamente instantânea da razão de velocidades. Contudo, o impacto dos atuadores pneumáticos no final dos cursos de avanço e de recuo é considerável. Apesar destes impactos não representarem prejuízo para a observação da eficácia dos mecanismos, trata-se de uma questão importante para trabalhos futuros. No caso do desenvolvimento de um protótipo para aplicação real em campo, amortecedores de fim de curso de maior eficiência devem ser empregados.

Também foi constatado que, no caso de uma mudança direta da 1ª para a 3ª relação de transmissão (e vice versa), em alguns testes, houve perda de referência da posição angular,

ou seja, houve o atraso de um dente, pois o curso de natação é elevado. Desta forma, percebeu-se que a alteração das razões de velocidades deve ser efetuada de forma seqüencial, o que poderia ser obtido por meio de uma alavanca, em substituição aos botões elétricos atualmente utilizados. Até o momento, não está definido se esta alavanca apresentará posições fixas, para cada uma das relações, ou se operará na forma conhecida, no setor automotivo, por câmbio seqüencial (*up and down shifting*).

Portanto, como os principais aspectos especificados para o protótipo foram comprovados, conclui-se que o conceito proposto é funcional. Contudo, aspectos importantes para a validação desta transmissão como produto ainda não foram verificados, como por exemplo, o desempenho das engrenagens e dos componentes do sistema de troca da relação de transmissão após um número elevado de ciclos, correspondente à vida útil esperada para uma transmissão usada nos setores industrial e da mobilidade.

Observou-se que os algoritmos implementados e o procedimento utilizado na modelagem matemática e virtual das engrenagens do protótipo se mostraram adequados para o desenvolvimento do protótipo e, portanto, poderiam ser aplicados no desenvolvimento de transmissões para casos reais. Tal resultado motivou a extensão do procedimento de projeto para a análise de engrenagens de aço de elevada dureza e resistência mecânica. Desta forma, foi implementado um algoritmo, baseado na norma AGMA, para auxílio no processo de dimensionamento das engrenagens intermediárias, elementos mais críticos da transmissão. Assim, para avançar um pouco o estudo da aplicabilidade dos algoritmos e procedimentos implementados, a primeira etapa do projeto preliminar de uma transmissão para veículo comercial foi elaborada, sendo esta objeto do apêndice F.

### **3.9 Avaliação das Características da Transmissão Mecânica Proposta**

Por meio das atividades implementadas ao longo do trabalho, constatou-se que a transmissão mecânica baseada em engrenagens cônicas e faciais apresenta características que podem ser divididas em três grupos:

a) Características associadas às engrenagens faciais:

- robustez e operação com baixo ruído (desde que a fabricação e montagem sejam exatas);
- insensibilidade ao deslocamento do pinhão no sentido de seu eixo;
- facilidade e baixo custo de fabricação;
- elevado momento de inércia das coroas;
- elevada sensibilidade a erros de ângulo entre eixos de coroa e pinhão.

b) Características associadas ao conceito e à forma de operação da transmissão

- simplicidade construtiva e robustez;
- mecanismo simples de alteração da razão de velocidades, porém, são necessários atuadores de elevada velocidade, para execução dos movimentos de deslocamento axial e de nutação;
- adequação para operação automática na troca das relações de transmissão;
- pequena variação do valor de razão de velocidades (de 10 a 30% por relação).

c) Características associadas ao tipo de aplicação

- adequação à operação sob cargas elevadas, devido à robustez das engrenagens faciais, à divisão da carga entre vários pinhões intermediários e ao grande diâmetro das coroas;
- adequação a aplicações onde a inércia das engrenagens seja tolerada (ou desejada);
- devido à baixa variação da relação de transmissão, o sistema é adequado à operação como dispositivo auxiliar de transmissões já existentes. Porém, a associação do sistema proposto em série (3 ou mais coroas) ou em conjunto com um arranjo de redutores epicicloidais, pode proporcionar uma transmissão de operação automática, com grande número de relações e com alteração simples da razão de velocidades.

O elenco de características associadas às engrenagens faciais foi obtido principalmente por meio da bibliografia consultada. As engrenagens faciais têm suscitado interesse de vários centros de pesquisa e empresas em todo o mundo, entre os mais importantes, estão o *Glenn Research Center*, da NASA, o *Gear Research Center*, da Universidade de Chicago, os laboratórios da empresa Boeing, em Mesa, Arizona e o Instituto Nacional das Ciências Aplicadas, de Lion. Novos modelos matemáticos foram estabelecidos e exaustivos testes sobre protótipos e transmissões reais foram realizados. Desta forma, o conhecimento gerado sobre estas engrenagens nos últimos anos é muito consistente, sendo que todas as publicações consultadas ressaltam que esta transmissão apresenta as propriedades de robustez, operação silenciosa e baixo custo, que as tornam adequadas para as mais variadas aplicações.

Já as características associadas ao conceito e à operação foram obtidas por meio dos testes sobre o protótipo implementado. Observou-se que a velocidade elevada é um requisito importante para os atuadores responsáveis pelos movimentos relacionados à alteração da relação de transmissão. No protótipo foi utilizado um motoredutor que aciona a coroa de entrada a uma taxa de rotação em torno de 56 rpm. Porém, nos campos industrial e da mobilidade, valores superiores a 4000 rpm são usuais, o que, dependendo da razão do número de dentes, pode representar uma taxa de rotação dos pinhões intermediários superior a 20.000 rpm. Desta forma, o período disponível para alteração da relação de transmissão é da ordem de milisegundos. Por

isso, atuadores elétricos ou pneumáticos tendem a ser as melhores opções. Portanto, tais atuadores apresentam requisitos de projeto e operação antagônicos: elevada velocidade de atuação com amortecimento de fim de curso eficaz.

Esta característica de velocidade de atuação também está associada à simplicidade construtiva da transmissão mecânica proposta. Na seção 3.1 foi salientado que o sistema apresenta uma operação mais próxima ao de um CVT quando é composto por grande número de faixas de trabalho. Além disso, as atividades desenvolvidas ao longo do projeto permitiram perceber que a variação da velocidade entre relações consecutivas é pequena. Portanto, um sistema como o proposto, se aplicado em condições reais de trabalho na área industrial ou da mobilidade, apresentaria um princípio de operação muito dinâmico, ou seja, pequenas flutuações na carga demandariam alteração imediata da relação de velocidades. Por outro lado, um dos pontos positivos do sistema é a possibilidade de alteração da razão de velocidades sem necessidade de um mecanismo sincronizador. Isto se deve aos seguintes fatos:

- i)* o engajamento das engrenagens, no momento da alteração da relação, se dá no sentido radial aos pinhões, ao contrário das transmissões mais conhecidas, em que este engajamento ocorre no sentido axial (deslizamento de uma das engrenagens sobre seu eixo);
- ii)* a pequena variação do valor da relação de transmissão entre duas faixas de trabalho consecutivas, a inércia própria das coroas de entrada e saída, bem como a operação sequencial do sistema (para mudança da relação  $i$  para  $i+2$  é obrigatório passar por  $i+1$  e vice-versa), não permitem que haja grande variação na velocidade da carga (que tende a desacelerar no período de alteração da relação) e do motor (que tende a acelerar neste mesmo período).

Desta forma, a grande variação da velocidade entre relações consecutivas, observada nas transmissões por engrenagens mais comuns, no sistema proposto é substituída por uma variação gradual. No primeiro caso, há necessidade de uso de mecanismos de sincronismo, enquanto que no segundo, atuadores de alta velocidade e vida útil são imprescindíveis, para realizar as freqüentes alterações sequenciais.

Outras características foram constatadas por meio dos algoritmos implementados para modelagem das engrenagens e para análise dos pinhões. Os modelos matemáticos e algoritmos desenvolvidos ao longo do trabalho, num resumo, foram os seguintes:

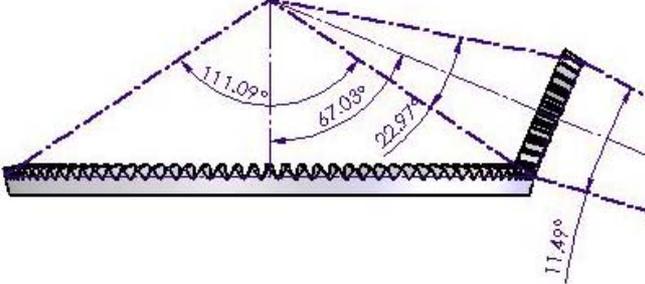
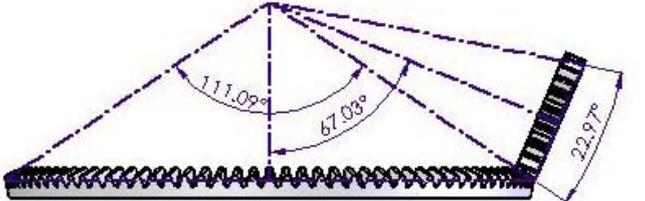
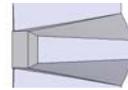
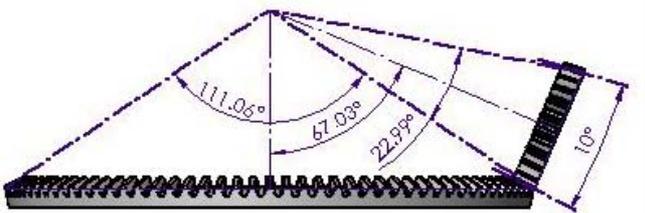
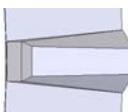
- a) Modelo matemático para obtenção das superfícies dos dentes das engrenagens faciais e cônicas envolvidas, apresentados nos apêndices A, B e C. Esses algoritmos também calculam, a partir dos parâmetros geométricos de cada faixa de trabalho, os raios limítrofes máximo e mínimo para tal faixa (correspondente aos pontos de singularidade onde ocorrem os fenômenos de interferência e encontro de faces opostas dos dentes).

- b) Dimensionamento dos pinhões cilíndricos de dentes retos, baseado na norma AGMA. Este algoritmo, apresentado no apêndice D, visa determinar a espessura e a largura dos dentes do pinhão, componente mais crítico da transmissão, segundo os critérios de fadiga de contato e tensão de flexão na base do dente.
- c) Algoritmo para determinação, a partir da especificação de um valor para o ângulo de nutação, dos respectivos valores de deslocamento axial relativo entre coroa de entrada e elemento de suporte dos pinhões, bem como da altura das faixas externas (o que vai delimitar o comprimento total do pinhão intermediário, incluindo, no caso estudado neste trabalho, as três faixas de operação). Tal algoritmo é apresentado no apêndice E.

Cada um dos algoritmos implementados possui função específica na atividade de projeto da transmissão. Cabe salientar a flexibilidade oferecida pelo modelo matemático que permite a modelagem sólida dos dentes e, conseqüentemente, das próprias engrenagens (item a, anterior). Ao longo do trabalho, observou-se que o uso de faixas faciais, ao invés de cônicas, é mais adequado na maior parte dos casos. Isso atenua a tendência à formação de um gume na face de adendo das coroas, nas faixas externas, como o apresentado nas engrenagens do protótipo, devido ao encontro das faces opostas dos dentes. Além disso, utilizando pinhões cilíndricos, há a possibilidade de geração das engrenagens faciais por ferramenta helicoidal ou por processo *Fellows*, seguida pela retificação dos dentes. Contudo, caso haja a possibilidade de fabricação das coroas por processos não convencionais, como o fresamento em centro de usinagem ou uma tecnologia de prototipagem rápida, por exemplo, os algoritmos apresentados permitem, por meio da troca de faixas faciais por faixas cônicas de pequeno ângulo de conicidade, a obtenção de dentes menos distorcidos nas coroas. Isto se deve ao fato das transmissões faciais serem casos específicos dos engrenamentos cônicos.

A tabela 3.7 mostra o resultado da variação do ângulo do cone primitivo sobre os dentes da coroa, obtido por meio do algoritmo implementado para modelagem destes dentes. Nos três casos observa-se que, apesar da relação de transmissão e do ângulo entre eixos serem os mesmos, há uma melhora na forma dos dentes da coroa do caso (a) para o (b) e do caso (b) para o (c). No mesmo sentido, há uma melhora considerável na capacidade de transmissão de potência devido a dois efeitos: *i*) eliminação do gume na face de adendo da coroa, com conseqüente diminuição do efeito de concentração de tensões e *ii*) extensão da largura admissível dos dentes e, conseqüentemente, ampliação do valor de carga admissível. Este último efeito não foi mostrado na tabela, pois os dentes das coroas, nos três casos, foram representados com a mesma largura.

Tabela 3.7 – Variação do Ângulo de Cone do Pinhão e Forma Resultante nos Dentes da Coroa.

Parâmetros	Geometria	Forma do dente
a) engrenagens cônicas – 24/96 dentes – ângulo do cone primitivo do pinhão: $11,49^\circ$ – ângulo entre eixos: $67,03^\circ$		
b) engrenamento facial – 24/96 dentes – ângulo entre eixos: $67,03^\circ$		
c) engrenagens cônicas – 24/96 dentes – ângulo do cone primitivo do pinhão: $10^\circ$ (invertido) ângulo entre eixos: $67,03^\circ$		

Por outro lado, o algoritmo implementado também permitiu avaliar a importância do valor do ângulo de pressão do pinhão. Como uma regra geral, um valor maior deste ângulo resulta numa transmissão mais resistente pois: *i)* o efeito da interferência, no processo de geração dos pinhões, é menor, resultando num dente mais robusto e *ii)* a largura dos dentes das coroas, delimitada pelos raios interno e externo, é maior.

As figuras 3.29 e 3.30 mostram um exemplo que permite visualizar a influência do ângulo de pressão na geometria dos dentes dos pinhões e coroas. Na figura 3.29, são apresentados três pares de pinhões e coroas (estas segmentadas) com mesmo módulo e número de dentes, ou seja, funcionalmente idênticas. Na vista (a) as engrenagens apresentam ângulo de pressão de  $14,5^\circ$ , em (b)  $20^\circ$  e em (c)  $25^\circ$ . Já a figura 3.30 mostra a forma e comprimento do respectivo dente da coroa facial, para os mesmos casos de ângulo de pressão: (a)  $14,5^\circ$ , (b)  $20^\circ$  e (c)  $25^\circ$ .

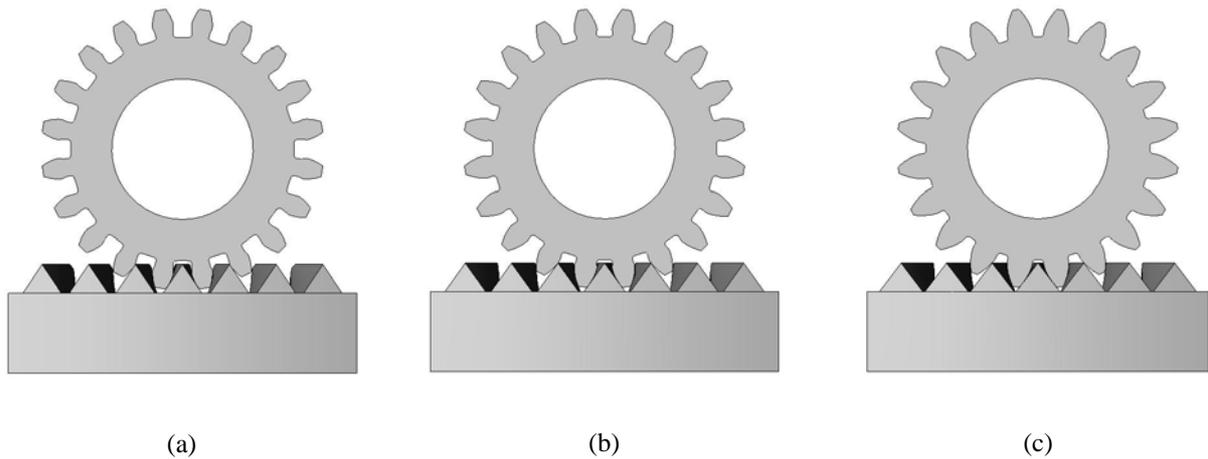


Figura 3.29 – Pinhão e coroa: a)  $\alpha = 14,5^\circ$ , b)  $\alpha = 20^\circ$ , c)  $\alpha = 25^\circ$

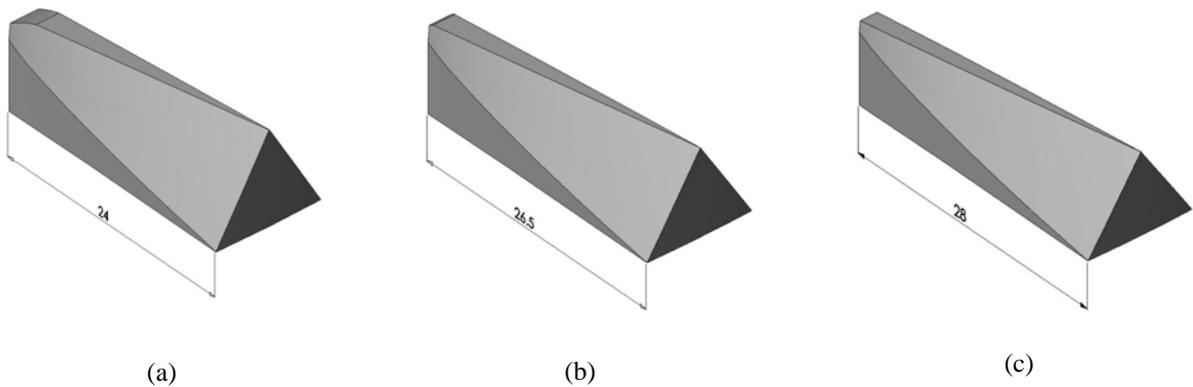


Figura 3.30 – Forma e comprimento do dente facial: a)  $\alpha = 14,5^\circ$ , b)  $\alpha = 20^\circ$ , c)  $\alpha = 25^\circ$ .

Nota-se que, considerando apenas o aspecto de resistência mecânica, a opção por um valor elevado de ângulo de pressão é favorável. Contudo, transmissões mecânicas compostas por engrenagens que compartilham a carga (como por exemplo os redutores epicicloidais e a transmissão proposta neste trabalho) usualmente devem apresentar dentes relativamente flexíveis. Desta forma, a flexibilidade natural dos dentes contribui para uma melhor divisão da carga entre as várias engrenagens (no caso, os pinhões intermediários), compensando erros de fabricação e montagem. Por outro lado, valores relativamente elevados de flexibilidade nos dentes proporcionam dois efeitos negativos:

a) Necessidade de adoção de materiais de alta resistência mecânica

Para apresentar a flexibilidade necessária, os dentes devem possuir dimensões pequenas e, portanto, estarão sujeitos a níveis maiores de tensão. Para suportar essas tensões, devem ser empregados material e tratamento térmico adequados.

b) Aumento dos efeitos dinâmicos decorrentes da operação em alta velocidade:

Ao entrar na região de contato de forma abrupta, a deformação dos dentes, causada pelo momento fletor originado pela carga transmitida, é elevada. O dente deformado tende a se sobrepor ao dente oposto anterior na coroa. Esse problema é minimizado por meio de micro-correções na geometria dos dentes do pinhão que, no caso, trata-se de um pequeno alívio na parte superior das faces [Mao, 2007].

Desta forma, os procedimentos de modelagem e de dimensionamento, desenvolvidos ao longo do trabalho, representam ferramentas úteis em projetos futuros de uma transmissão mecânica baseada em engrenagens cônicas ou faciais, em aplicações industriais ou da área da mobilidade.

Por fim, cabe ressaltar a importância da adoção de dentes de proporções pequenas nas engrenagens envolvidas, pois, quanto menores estes dentes, tanto menores as restrições geométricas para adoção de maior número de faixas de trabalho. Desta forma, o sistema pode operar de forma mais próxima à concepção inicial de um CVT.

A figura 3.31 mostra dois casos de pinhões com mesmo diâmetro nominal, porém, em (a) os dentes apresentam proporções maiores do que em (b) e, como resultado, o pinhão deve ser mais longo e as faixas de trabalho mais espaçadas.

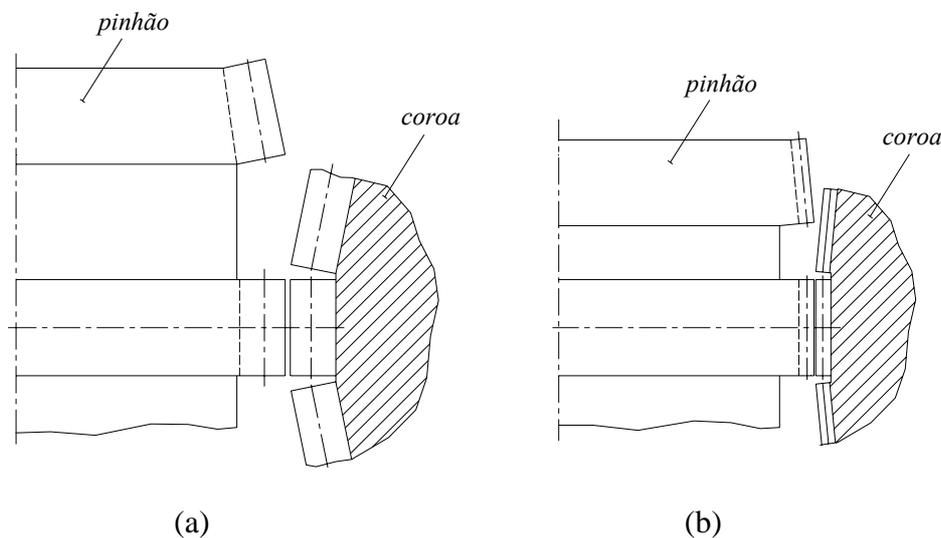


Figura 3.31 – Influência do tamanho: a) dentes maiores e b) dentes menores.

Constata-se que os dentes menores proporcionam uma geometria mais compacta em ambas as engrenagens e, portanto, mais adequada em caso de necessidade de maior número de faixas de trabalho. Como abordado na seção 3.1, o sistema apresenta uma operação tanto mais próxima à de um CVT, idéia original, quanto maior for o número de faixas de trabalho.

Além disso, dentes de menores proporções permitem o projeto de uma transmissão com maior número de pinhões intermediários. Por exemplo, a coroa mostrada na figura 3.9 apresenta módulo de 3 mm, porém, caso tivesse sido possível adotar a metade deste valor (módulo de 1,5 mm), então as faixas das coroas apresentariam o dobro do número de dentes (160, 176 e 192). Nesse caso, haveria 16 posições possíveis para instalação dos elementos intermediários de transmissão do movimento. Portanto, a adoção de dentes de menores proporções pode ser compensada por um maior número de pinhões a ponto de, em alguns casos, permitir a transmissão de potências maiores. Para aumentar ainda mais esta propriedade, observa-se que engrenagens compostas por dentes de proporções menores apresentam pequeno diâmetro e, conseqüentemente, menor velocidade tangencial. Isto representa uma redução da influência dos efeitos dinâmicos sobre a vida deste componente (menor valor para o fator dinâmico de tensão da norma AGMA).

## **CAPÍTULO 4**

### **CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Devido à importância dos sistemas de transmissão de potência nos equipamentos industriais e na área da mobilidade, as atividades de pesquisa e desenvolvimento neste setor têm sido intensas desde o início da era industrial. As metas destes trabalhos dizem respeito a melhores valores de desempenho e eficiência, com menor volume físico e custos envolvidos. Vários princípios de operação e formas construtivas surgiram, algumas com sucesso e outras nem tanto. De qualquer forma, o que se vê no mercado é a adequação de algumas transmissões a determinadas aplicações e características específicas. Portanto, não há uma transmissão ideal, aplicável em todas as situações. Ou seja, é de grande importância, no projeto de um novo sistema de transmissão mecânica, delinear seus pontos positivos e negativos, o que, por fim, resulta na determinação de seu campo de aplicação ou nicho de mercado.

O presente trabalho apresentou um novo conceito de transmissão mecânica, baseada em engrenagens cônicas e faciais, tema da patente PI0505836-8 junto ao Instituto Nacional da Propriedade Intelectual do Brasil. A primeira idéia desenvolvida era de uma transmissão continuamente variável composta por discos e elementos intermediários de forma elíptica. Porém, logo se constatou que tal sistema, mesmo apresentando uma característica geométrica diversa, não representaria avanço em relação, por exemplo, ao sistema toroidal, que tem sido tema de estudos contínuos ao longo de décadas.

Por outro lado, a associação da forma geométrica deste conceito com o uso de engrenagens divididas em faixas de operação, mostrou-se, naquele período, como um sistema aparentemente exequível e, portanto, passível de estudos mais aprofundados. Assim, devido à forma inicialmente concebida para os pinhões, imaginou-se que as faixas deveriam ser compostas por engrenagens cônicas. Porém, ao longo do trabalho de revisão bibliográfica foi observado que as engrenagens faciais apresentariam melhores características de robustez e custo

de fabricação, sendo, portanto, melhor aplicáveis. Na realidade, pode-se dizer que as engrenagens faciais se tratam de casos especiais das transmissões cônicas.

Desta forma, foram implementados modelos matemáticos e algoritmos com o objetivo final de gerar modelos sólidos em software de CAD de engrenagens cônicas e faciais. Ao longo dos estudos implementados, observou-se que a idéia inicial de pinhões intermediários de forma semelhante a uma elipse não era a mais adequada, portanto, deu-se preferência às engrenagens faciais e um pinhão cilíndrico de dentes retos em todas as faixas de trabalho. No estágio atual, pode-se afirmar que o uso de dentes cônicos é vantajoso apenas em casos especiais, nas faixas internas da coroa, quando os dentes gerados se tornam pontiagudos e, portanto, sujeitos à concentração de tensões. Com a opção preferencial pela transmissão facial na maior parte ou na totalidade das faixas de trabalho, o sistema herda as características deste tipo de transmissão.

Em seqüência, foi elaborado um protótipo para avaliar os principais atributos funcionais do sistema proposto, relacionados à transmissão do movimento (sem carga) e à eficácia do mecanismo de alteração da razão de velocidades. Para efetuar esta alteração, três movimentos são necessários: o deslocamento axial relativo das coroas, o deslocamento axial relativo do suporte dos pinhões em relação à coroa fixa e, por fim, o movimento angular de nutação dos pinhões. O protótipo desenvolvido permitiu constatar que, sendo estes movimentos executados com alta velocidade, não há necessidade de mecanismo de sincronismo. Porém, sabe-se que o trabalho de desenvolvimento deve ser continuado e que novos protótipos devem ser desenvolvidos e submetidos a testes sob carga, para realmente comprovar todos os aspectos de mercado, projeto, fabricação e operação de um produto.

As atividades implementadas permitiram avançar no conhecimento de aspectos importantes do sistema proposto, alguns dos quais relacionados às características particulares das engrenagens faciais: robustez elevada e custos de fabricação competitivos. Além disso, observou-se que o sistema apresenta simplicidade construtiva, proporcionando pequena variação da relação da transmissão e uma adequação à operação automática. Desta forma, tal sistema representa uma possibilidade de modificação instantânea do torque e velocidade, proporcionados pelo motor, perante pequenas flutuações de carga. Portanto, sua associação com outras transmissões, ou mesmo o arranjo modular em série de várias coroas e elementos intermediários, podem proporcionar uma transmissão multi-escalonada que permite uma operação mais próxima do ponto ótimo de consumo ou de desempenho em quaisquer situações de carga.

Como ponto negativo, a transmissão apresenta engrenagens de entrada e saída de grande diâmetro e, portanto, com elevado momento de inércia. Desta forma, é desaconselhado o uso deste tipo de transmissão em acionamentos que necessitem de respostas dinâmicas rápidas

(caso de servosistemas, por exemplo). Porém, muitas máquinas e equipamentos industriais e da área da mobilidade apresentam componentes ou subsistemas de inércia elevada e, portanto, nestes casos, a inserção de uma transmissão como a proposta não prejudicaria o desempenho dinâmico global de tais equipamentos.

Visando estender a aplicabilidade do conceito a uma situação real, foi implementado um algoritmo, baseado na norma AGMA, para dimensionamento dos pinhões, que se tratam dos componentes mais críticos do sistema. Isto permitiu o dimensionamento dos componentes principais de uma transmissão para uso em trator agrícola de baixa potência. O resultado foi o projeto preliminar de um dispositivo auxiliar ao sistema de transmissão atual do veículo, o qual trouxe uma maior divisão das faixas de operação, bem como uma extensão da faixa global. O sistema projetado é relativamente compacto e de fácil instalação no trator. Desta forma, observa-se que as ferramentas implementadas ao longo do trabalho permitem o dimensionamento das engrenagens envolvidas para diferentes aplicações industriais ou da área da mobilidade.

#### **4.1 Trabalhos Futuros**

Para um novo sistema mecânico se consolidar como uma alternativa viável para os projetistas do setor industrial e da mobilidade, deve ter passado por testes exaustivos para comprovação da funcionalidade e vida útil. Desta forma, apesar do processo de dimensionamento dos pinhões para aplicação real, mostrado no anexo F, ter sido criterioso quanto aos aspectos de carregamento e vida útil, a comprovação desses aspectos virá apenas com a construção de um novo protótipo (agora de produto) e sua submissão a testes em dinamômetro e, posteriormente, em aplicações de campo.

Na área de componentes a serem desenvolvidos, merecem estudos específicos os atuadores responsáveis pelos movimentos do subsistema de alteração da relação de transmissão: nutação dos elementos intermediários e deslocamento axial relativo da coroa móvel e do suporte dos pinhões. Tais atuadores devem aliar altíssima velocidade de operação, com elevado amortecimento de fim de curso. Este aspecto é prioritário, pois o uso da transmissão proposta em aplicações de elevada velocidade está diretamente associado à eficácia destes atuadores.

Além disso, há vários desafios relacionados à fabricação das coroas e pinhões, como o desenvolvimento de ferramentas para corte e retificação das engrenagens faciais no Brasil. Apesar do procedimento de fabricação ser simples, não há conhecimento de indústrias que fabriquem este tipo de transmissão em nosso país. Por outro lado, na área de projeto de transmissões faciais, estudos relacionando a região de contato e modelos de elementos finitos, visando abordar diferentes condições de montagem (presença de erros de ângulo entre eixos, por

exemplo), de operação (deformação causada nos dentes quando as engrenagens operam em altíssimas velocidades) e de micro-alterações na geometria dos dentes (alívio na face dos dentes e coroamento, por exemplo); permitiriam a otimização do projeto deste tipo de transmissão para operações críticas ou, por outro lado, tornariam possível o dimensionamento ótimo das engrenagens para qualquer aplicação.

Já os algoritmos e o procedimento de dimensionamento, desenvolvidos ao longo do trabalho, representam ferramentas de projeto importantes, porém, ainda não possuem a robustez desejada. Atualmente, a interface entre os vários programas desenvolvidos é realizada pelo projetista. Ou seja, deve ser bem estabelecido um roteiro de dimensionamento, suportado pelos algoritmos implementados, os quais devem passar por um processo de testes e ampliação dos dados calculados.

Num resumo, a transmissão proposta no presente trabalho deve ser objeto de vários estudos para ampliação do conhecimento atual.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGMA 908-B89. “**Information Sheet - Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth**”, American Gear Manufacturers Association Standard, 1999.

AGMA 913-A98. “**Method for Specifying the Geometry of Spur and Helical Gears**”, American Gear Manufacturers Association Standard, 1998.

ANSI/AGMA 2004-B89 (Revision of AGMA 240.01). “**Gear Materials and Heat Treatment Manual**”, American Gear Manufacturers Association Standard, 1989.

Akehurst S., Brace C. J., Vaughan N. D., Milner P. J., 2001. “Performance Investigations of a Novel Rolling Traction CVT”, **SAE World Congress**, SAE Technical Paper 2001-01-0874, Março 2001, Detroit.

Albuquerque, A. A., 2003. “**Caracterização da Resposta Dinâmica de uma CVT por Polias Expansivas**”, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – SP.

Barone, S., Borgianni, L., Forte, P. 2004. “Evaluation of the Effect of Misalignment and Profile Modification in Face Gear Drive by a Finite Element Meshing Simulation”. **Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME**. Vol. 126, p. 916-924.

Bianchi, K.E., Batista V.J. 2008. “Proposal of a Face and Bevel Gear Drive System for Agricultural Purposes”, **Anais do CIGR International Conference of Agricultural Engineering**, XXXVII Congresso Brasileiro de Engenharia Agrícola – CONBEA, Foz do Iguaçu, Brazil.

Bianchi, K.E. 2005. “**Sistema de Transmissão Semi-Contínua Utilizando Engrenagens Cônicas e Faciais**”, Pedido de Patente PI0505836-8, Instituto Nacional da Propriedade Intelectual, Brasil.

Blanchard, B. S. e Fabrycky, W. J. 1998. “**Systems Engineering and Analysis**”. 3<sup>a</sup> ed. Prentice Hall, New Jersey, USA.

Bosch, 2004. “**BOSCH Automotive Handbook**”, 6<sup>a</sup> ed, Robert Bosch GmbH, Alemanha.

Collins, J. A., 2006. “**Projeto Mecânico de Elementos de Máquinas – uma Perspectiva de Prevenção de Falha**”, LTC, Rio de Janeiro.

Clunne, J. 1995. “**Continuous, and Infinitely Variable Transmission**”, Patente Internacional WO 95/33146.

Dudley, D. W., 1962. **“Gear Handbook – The Design, Manufacture and Application of Gears”**, McGraw-Hill, USA.

Fitch, J. W. 1993. **“Motor Truck Engineering Handbook – R125”**, 4<sup>a</sup> ed, Society of Automotive Engineers, USA.

Fitz F. A., Pirez P.B., 1991. “A Geared Infinitely Variable Transmission for Automotive Applications”, **Automotive Transmission Advancements SP-854**, Society of Automotive Engineers, USA.

Flinn, E. D., 1997. “Face Gears Trim Helicopter Weight” – **Aerospace America**, February, USA.

Forti, A. W., 2003. **“Estudo Teórico Experimental de Parâmetros de Projeto de uma Transmissão Continuamente Variável por Tração Tipo Esfera Cone”**, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – SP.

Fu, K. S., Gonzales, R. C., Lee, C. S. G., 1987. **“Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence”**, McGraw-Hill, USA.

Gott P. G., 1991. **“Changing Gears: The Development of the Automotive Transmission”**, Society of Automotive Engineers, USA.

Guingand, M., De Vaujany, J.P., Icard, Y., 2005. “Analysis and Optimization of the Loaded Meshing of Face Gears”, **Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME**. Vol. 127, p. 135-143.

Green, R. L. e Wygant, J. C., 1974. **“Lubricants for Rolling Contact Bearings”**, United States Patent 3925217.

Heath, G. F., Filler, R. R., Tan, J., 2002. **“Development of Face Gear Technology for Industrial and Aerospace Power Transmission”**, NASA/CR-2002-211320, National Aerospace and Space Administration, Glenn Research Center, USA.

Hirano, S., Miller, A. L., Schneider, K. F., 1991. “SCVT – A State of the Art Electronically Controlled Continuously Variable Transmission”, **Automotive Transmission Advancements SP-854**, Society of Automotive Engineers, USA.

Huston, M. E., Tipton, C. D., Farrukh, Q., et al. 1999. **“Shifting from Automatic to Continuously Variable Transmissions: a Look at Fluid Technology Requirements”**, Technical Paper 1999-01-3614, Society of Automotive Engineers, USA.

Kawalec, A., Wictor, J., Ceglarek, D., 2006. “Comparative Analysis of Tooth-Root

Strength Using ISO and AGMA Standards in Spur and Helical Gears with FEM-based Verification”, **Journal of Mechanical Design, Transactions of ASME**, vol.128, Setembro, pg 1141-1158.

Lebrecht, W., Pfeiffer, F., Heinz, U., 2004. **“Analysis of Self-Induced Vibrations in a Pushing V-Belt CVT”**, Anais do 2004 International Continuously Variable and Hybrid Transmission Congress, California, USA.

Litvin, F. L., Wang, J.-C., Bossler, R.B., Chen, Y.-J. D., Heath, G. F., Lewicki, D. G., 1994. “Application of Face-Gear Drives in Helicopter Transmissions”, **Journal of Mechanical Design – Transactions of ASME**, 1994, vol. 116, Setembro, pp. 672-676.

Litvin, F.L., Chen, Y.-J., Heath, G.F., Sheth, V.J. and Chen, N., 2000. **“Apparatus and Method for Precision Grinding Face Gear”**, United States Patent 6146253.

Litvin F. L., Fuentes A., 2004. **“Gear Geometry and Applied Theory”**, 2<sup>a</sup> ed., Cambridge, USA.

Litvin, F. L., Gonzales-Peres, I., Fuentes, A., Vecchiato, D., Hansen, B. D., Binney, D., 2005. “Design, generation and stress analysis of face-gear drive with helical pinion”, **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 194, pp. 3870-3901.

Machida, H., Itoh, H., Imanishi, T. e Tanaka, H., 1995. “Design Principle of High Power Traction Drive CVT”, **SAE Transactions**, vol. 104(1), n<sup>o</sup> 6, pp. 1365-1375.

Mao, K., 2006. “Gear Tooth Contact Analysis and its Application in the Reduction of Fatigue Wear”, **Wear**, article in press.

Milner, P. J., 2000. **“A Bi-directional Continuously Variable Transmission Device”**, UK Patent GB 2342130 B.

Murakami Y., Arakawa, Y., Maeda, M., Hata H., Miyaji T. e Tamoto Y., 1999. **“Development and Testing of CVT Fluid for Nissan Toroidal CVT”**. Technical Paper 1999-01-3613, Society of Automotive Engineers, USA.

Pahl, G. e Beitz, W., 1996. **“Engineering Design: a Systematic Approach”**, 2<sup>a</sup> ed., Springer, Londres, Inglaterra.

Pellizzari, W. S., Salvagni, R. B., Madureira, O. M., 2003. **“Development of a Continuous Variable Transmission Project for Vehicles Powered with 1.0 Liter Displacement Engine”**, Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia Mecânica.

Pfeiffer, F., Lebrecht, W., Geier, T., 2004. **“State-of-the-art of CVT-modelling”**, Anais do 2004 International Continuously Variable and Hybrid Transmission Congress, California, USA.

Recktenwald, G., 2000. **“Numerical Methods with Matlab Implementation and Application”**, Prentice Hall, New Jersey, USA.

Rozenfeld, H., Forcellini, F. A., Amaral, D. C., De Toledo, J. C., Da Silva, S. L., Alliprandini, D. H. e Scalice, R. K. 2006. **“Gestão de Desenvolvimento de Produtos, uma Referência para a Melhoria do Processo”**, ed. Saraiva, São Paulo.

Shigley, J. E., Mischke, C. R., Budynas, R. G., 2004. **“Projeto de Engenharia Mecânica”**, 7<sup>a</sup> ed., Bookman, Brasil.

Shinojima, T., Toyoda, T., Miyata, S., Imanishi, T., Inoue, E. e Machida, H. 2004. **“Development of the Next-Generation Half-Toroidal CVT with Geared Neutral and Power-Split Systems for 450 Nm Engines”**, Anais do 2004 International Continuously Variable and Hybrid Transmission Congress, California, USA.

Srivastava, N. e Hake, I., 2009. “Nonlinear Dynamics of a Friction-Limited Drive: Application to a Chain Continuously Variable Transmission (CVT) System”, **“Journal of Sound and Vibration”**, vol. 321 (2009), pp. 319-341.

Srivastava, N. e Hake, I., 2009. “A Review on Belt and Chain Continuously Variable Transmissions (CVT): Dynamics and Control”, **“Mechanisms and Machine Theory”**, vol. 44 (2009), pp. 19-41.

Tanaka, H., Toyoda, N., Machida, H. e Imanishi, T., 2004. **“Development of a 6 Power\_Roller Half-Toroidal CVT – Mechanism and Efficiency”**, Anais do 2004 International Continuously Variable and Hybrid Transmission Congress, California, USA.

Tsubouchi, T., Abe, K. e Hata, H., 1992. **“Process for Improving the Coefficient of Traction and Traction Drive Fluid”**, United States Patent 3925217.

Wienecke, D., Bartz, W. J., 2001. “Automobile Transmission Gears as Tribological Systems”, **Tribology Transactions**, vol. 44(2001), 3, pp. 484-488.

Zhang, Y., Wu, Z., 1997. “Offset Face Gear Drives: Tooth Geometry and Contact Analysis”, **Journal of Mechanical Design – Transactions of ASME**, vol. 119, março, pp. 114-119.

Ulrich, K. T. e Eppinger, S. D. 2004. **“Product Design and Development”**, 3<sup>a</sup> ed., McGraw Hill, USA.

## **SÍTIOS CONSULTADOS NA INTERNET**

Agrale, 2009. home page [www.agrale.com.br](http://www.agrale.com.br), acessado em 18/05/2009.

European Patent Office, 2007. **“Patent information – esp@cenet”**, home page [www.epo.org](http://www.epo.org), acessado em 07/11/2008.

Idemitsu Kosan, 2009. **“Lubricants – TDF (Traction Drive Fluid)”**, home page <http://www.idemitsu.com>, acessado em 12/01/2009.

NSK, 2006. **“Powertoros”**, home page [www.nsk.com](http://www.nsk.com), acessado em 15/10/2008.

Orbital Traction, 2009. **“Milner CVT Overview – General Characteristics”**, home page <http://www.orbitaltraction.com>, acessado em 05/02/2009.

SantoLubes, 2009. **“Santotrac<sup>®</sup> - 32 / 50 / 70 / 332 - FG Traction Lubricants”**, home page <http://www.santolubes.com>, acessado em 02/03/2009.

## APÊNDICE A

### ROTINA PARA OBTENÇÃO DOS PONTOS DE CONTATO E FORMA FINAL DO DENTE DE UMA COROA FACIAL

```

function y = cor_facial(Ns,N2,m,Gama,Alfa,Omega_s)

% ROTINA PARA CÁLCULO DO PERFIL DO DENTE DA COROA FACIAL PARA PINHÃO CILÍNDRICO

% teste com os seguintes parametros: cor_facial(24,88,3,pi/2,20*pi/180,10)
% Ns = numero de dentes do pinhao (shaper)
% N2 = numero de dentes da coroa
% m = modulo dos dentes
% Gama = angulo entre eixos pinhao-coroa [radianos]
% Alfa = angulo de pressao do pinhao em radianos
% Omega_s = velocidade angular do pinhao [rad/s]

% equacoes baseadas em Litvin F. - Gear Geometry and Applied Theory-2a edicao

% FUNCIONAMENTO DA ROTINA:
% HÁ UM LAÇO DE DETERMINAÇÃO DO PONTO DE ENGRENAMENTO SOBRE O PINHÃO (VETOR rs)
% E SOBRE A COROA (VETOR r2), DENTRO DE UM LAÇO ONDE O PINHÃO É GIRADO DE FORMA
% INCREMENTAL - PARÂMETRO Psi_s.

% relacao de transmissao
m12 = N2/Ns;

% velocidade angular da coroa
Omega_2 = Omega_s*Ns/N2;

% raio primitivo do pinhao rps (figura 18.5.2)
rps = m*Ns/2;

% raio de base do pinhao
rbs = rps*cos(Alfa);

% raio de adendo do pinhao
ras = rps + m;

% Angulo Teta_s para raio de adendo
Teta_sa = sqrt(((ras^2)-(rbs^2))/rbs^2);

% evolvente do angulo de pressao
inv_Alfa = tan(Alfa)-Alfa;

% parametro Teta_0s = metade do espaco do shaper no circulo de base (figura 18.5.1)
Teta_0s = (pi/(2*Ns))-inv_Alfa;

% angulos dos axodos (cones primitivos) (eq. 18.2.2)
Gama_1=atan(sin(Gama)/(m12+cos(Gama)));
Gama_2=atan(m12*sin(Gama)/(1+m12*cos(Gama)));

% raio primitivo da coroa rp2 (figura 18.5.2)
rp2=rps*sin(Gama_2)/sin(Gama_1);

% distancia Oa_Om (figura 18.5.2)
E = rps/sin(Gama_1);

% Coordenada zs minima para existencia do angulo Beta
zs_min = round((rbs/sin(Gama))*(N2/Ns)+cos(Gama))-E)+0.5;

%=====
%===== CÁLCULO DA LARGURA ADMISSÍVEL DOS DENTES DA COROA =====
%=====

% Calculo do raio minimo da coroa - ponto de singularidade correspondente ao zs_min
L1 = E + zs_min;

% Calculo do raio externo maximo da coroa, correspondente ao ponto em que há encontro
% de flancos opostos do dente e formação de um vértice. Equacoes baseadas em Litvin F.
% Gear Geometry and Applied Theory - 2a edicao - secão 18.7
% equação a ser resolvida: alfa - A*sin(alfa) - B = 0

```

```

% Expandindo a funcao seno em serie de Taylor surge um polinomio, truncado no elemento de
ordem 9.
% alfa - A*(alfa-((alfa^3)/(factorial(3)))+(alfa^5)/(factorial(5)))
% -((alfa^7)/(factorial(7)))+(alfa^9)/(factorial(9))) - B = 0
  A = ((Ns-2)/(Ns*cos(Alfa)));
  B = (pi/(2*Ns)) - tan(Alfa) + Alfa;
% polinomio obtido
  p = [-A/362880* 0 A/5040 0 -A/120 0 s/6 0 (1-A) -B];
  r = roots(p);
% eliminacao das raizes imaginarias e negativas do polinomio de ordem 9
  n_raiz = 0;
  for i = 1:7
    if imag(r(i)) == 0 & real(r(i)) > 0
      n_raiz = n_raiz+1;
      raiz(n_raiz) = r(i);
    end
  end
% caso haja mais do que uma raiz real e positiva, escolhe-se o maior valor
% absoluto entre as raizes do polinomio
  if n_raiz > 1
    alfa_max = max(raiz);
  elseif n_raiz == 1
    alfa_max = raiz(1);
  end
% raio maximo
  L2 = Ns*m*cos(Alfa)/(2*cos(alfa_max)*tan(Gama_1));
  nn = round(L2/0.25);
  L2 = nn*0.25;

% largura do dente da coroa
  gear_width = L2-L1;

=====

% Looping de giro do pinhão (ângulo Psi_s)
for k = 21:-2.1:-21
  Psi_s = k*pi/180;
  % calculo do angulo de giro da coroa
  Psi_2 = Psi_s*Ns/N2;
  % Matriz M2m
  M2m=[cos(Psi_2) sin(Psi_2) 0 0; -sin(Psi_2) cos(Psi_2) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
  % Matriz Mma
  Mma=[-cos(Gama) 0 sin(Gama) E*sin(Gama); 0 1 0 0; -sin(Gama) 0 -cos(Gama) -E*cos(Gama); 0 0 0
1];
  % Matriz Mas
  Mas=[cos(Psi_s) -sin(Psi_s) 0 0; sin(Psi_s) cos(Psi_s) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
  % Matriz M2s de transformacao de coordenadas Ss ==> S2
  M2s = Mr2m*Mma*Mas;
  % Submatriz L2s - elementos de rotacao de M2s
  L2s = M2s(1:3,1:4);
  % Submatriz Ls2 - inversa de L2s - elementos de rotacao para transformar
  % um ponto em S2 em um ponto em Ss
  Ls2 = inv(L2s);

% Looping onde são determinados os pontos que formam a linha de contato entre os dentes
  j=0;
  delta_zs = gear_width/15;
  for j = 1:16
    zs = zs_min + delta_zs*(j-1);

    % Angulo Beta = Psi_s-Teta_0s-Teta_s
    Beta = acos(rbs*(N2+Ns*cos(Gama))/(Ns*(zs+E)*sin(Gama)));

    % Angulo Teta_s = Psi_s - Teta_0s - Beta
    Teta_s = Beta - Psi_s - Teta_0s;

    % Calculo do ponto de contato no sistema de coordenadas Ss
    rs(1,1) = rbs*(cos(Teta_0s+Teta_s)+Teta_s*sin(Teta_0s+Teta_s));
    rs(2,1) = rbs*(sin(Teta_0s+Teta_s)-Teta_s*cos(Teta_0s+Teta_s));
    rs(3,1) = zs;
    rs(4,1) = 1;
    rs_v = rs(1:3,1);

    % vetor normal ns
    ns = [sin(Teta_0s+Teta_s);-cos(Teta_0s+Teta_s);0];

    % vetor velocidade Vs(s2) na forma vetorial matricial (secao 2.1 Litvin)
    vs_s2 = [-Omega_2*zs*sin(Gama)*sin(Psi_s)-rs(2,1)*(Omega_s+Omega_2*cos(Gama))-
E*Omega_2*sin(Gama)*sin(Psi_s); rs(1,1)*(Omega_s+Omega_2*cos(Gama))-

```

```

Omega_2*zs*sin(Gama)*cos(Psi_s)-E*Omega_2*sin(Gama)*cos(Psi_s);
Omega_2*sin(Gama)*(rs(2,1)*cos(Psi_s)+rs(1,1)*sin(Psi_s));

    % vetor r2 - sistema de coordenadas S2
    r2 = M2s*rs;
    r2_v = r2(1:3,1);
% ===== VERIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO DO ENGRENAMENTO =====
% ===== PRODUTO ESCALAR DO VETOR VELOCIDADE RELATIVA E VETOR NORMAL = 0 =====

% produto escalar de ns e vs(s2) - metodo da secao 2.1
pe = ns(1,1)*vs_s2(1,1)+ns(2,1)*vs_s2(2,1);

% vetor v2_2 - velocidade linear no sistema S2
Omega_2v = [0;0;Omega_2];
v2_2 = cross(Omega_2v,r2_v);

% vetor v2_s - velocidade linear da coroa no sistema Ss
v2_s = Ls2*v2_2;

% vetor vs_s - velocidade linear do pinhao no sistema Ss
Omega_sv = [0;0;Omega_s];
v_sv = cross(Omega_sv,rs_v);

% vetor vs(s2) - velocidade linear relativa no sistema Ss
vs_s2_pr = v_sv-v2_s;

% produto escalar de ns e vs(s2) - prova
pe_pr = ns(1,1)*vs_s2_pr(1,1)+ns(2,1)*vs_s2_pr(2,1);

% ===== Matriz de resultados =====
% ===== Teta_s fixo, Psi_s variando =====
% === 1a coluna é x, 2a é y, 3a é z no sistema de coordenadas S2 ===
MR(j,1) = r2(1,1);
MR(j,2) = r2(2,1);
MR(j,3) = r2(3,1);
%MR(j,4) = rs(1,1);
%MR(j,5) = rs(2,1);
%MR(j,6) = rs(3,1);
%MR(j,7) = Teta_s;

fprintf('Psi_s(graus) = %f\n',k)
disp(MR)
end

fprintf('\nDistância E entre origens dos sistemas S2 e Ss = %f\n',E)
fprintf('\nCoordenada zs mínima para existência do ângulo Beta = %f\n',zs_min)
fprintf('\nRaio mínimo da faixa de dentes da coroa = %f\n',L1)
fprintf('\nRaio máximo da faixa de dentes da coroa = %f\n',L2)
fprintf('\nLargura da faixa de dentes da coroa = %f\n\n',gear_width)

```

## APÊNDICE B

### ROTINA PARA OBTENÇÃO DOS PONTOS DE CONTATO E FORMA FINAL DO DENTE DE FAIXAS EXTERNAS CÔNICAS DA TRANSMISSÃO PROPOSTA

```

function y = cor_conic(Np,Ncc,mpc,EmaH,Eas,Hc,Gamac,Alfac,Kpc,Omegal)

% VER ARQUIVO ENVELOPE_CÔNICA.DOC

% teste com os seguintes parametros cor_conic_ext(24,96,3,132,25,13,10*pi/180,20*pi/180,14,10)
% Np = número de dentes do pinhão cônico
% Ncc = número de dentes da coroa cônica
% mpc = módulo nominal do pinhão cônico no diâmetro primitivo
% EmaH = distância entre as origens dos sist. coord. Sm e Sa, medida horizontalmente (ver figura)
% Eas = distância entre as origens dos sist. coord. Sa e Ss
% Hc = espessura do pinhão cônico
% Gamac = angulo do cone primitivo do pinhão [radianos]
% Alfac = angulo de pressao em radianos
% Kpc = número de planos de corte sobre o pinhão cônico (Hc será fatiado em planos)
% Omegal = velocidade do pinhão [rad/s]

% equacoes baseadas em Litvin F. - Gear Geometry and Applied Theory-2a edicao

% raio primitivo do pinhão cônico (diâmetro maior)
  Rpp = mpc*Np/2;

% Numero de dentes virtual do pinhao
  Npv=Np/cos(Gamac);

% Evolvente do angulo de pressao
  inv_Alfac = tan(Alfac)-Alfac;

% Parâmetro Teta_0s = metade do espaço do shaper no circulo de base (figura 18.5.1)
  Teta_0s = (pi/(2*Npv))-inv_Alfac;

% Velocidade angular da coroa
  Omega2 = Omegal*Np/Ncc;

% Ângulo entre eixos Zm e Za - ver figura arquivo envelope_cônica.doc
  Gama = (pi/2)-(2*Gamac);

% Distância entre origens dos sistemas de coordenadas Sm e Sa/Ss
% ver figura arquivo envelope_cônica.doc
  Ema = EmaH/cos(2*Gamac);
  E = Ema - Eas

% Looping de giro do pinhão (ângulo Psi_s)
for k = -15:1.5:19.5
  Psi_s = k*pi/180;
  Psi_s_deg = k
  % Cálculo do angulo de giro da coroa
  Psi_2 = Psi_s*Np/Ncc;
  % Matriz M2m
  M2m=[cos(Psi_2) sin(Psi_2) 0 0; -sin(Psi_2) cos(Psi_2) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
  % Matriz Mma
  Mma=[-cos(Gama) 0 sin(Gama) Ema*sin(Gama); 0 1 0 0; -sin(Gama) 0 -cos(Gama) -Ema*cos(Gama);
0 0 0 1];
  % Matriz Mas
  Mas=[cos(Psi_s) -sin(Psi_s) 0 0; sin(Psi_s) cos(Psi_s) 0 0; 0 0 1 Eas; 0 0 0 1];
  % Matriz M2s de transformacao de coordenadas Ss ==> S2
  M2s = M2m*Mma*Mas;
  % Looping onde são determinados os pontos que formam a linha de contato entre os dentes
  % incremento na direcao z
  deltaZ=Hc/(Kpc-1);
  j=0;
  for zs = 0:deltaZ:Hc
    j=j+1;
    % Raio primitivo sobre o plano transversal ao eixo de giro em análise
    Rpt = Rpp-zs*tan(Gamac);
    % Raio primitivo sobre o plano virtual (transversal ao pitch plane)
    Rpc=Rpt/cos(Gamac);
    % Raio de base sobre o plano virtual

```

```

Rbc=Rpc*cos(Alfac);
% Distância entre origens dos sistemas de coordenadas St e Sc
Etc=Rpt*tan(Gamac);
% Distância entre origens dos sistemas de coordenadas Sc e Ss
Ecs=zs-Etc; % CORRETA
% Parâmetros da equação de engrenamento
w=(E+Ecs)*Omega2*sin(Gama)*sin(Psi_s)*cos(Gamac);
h=(E+Ecs)*Omega2*sin(Gama)*cos(Psi_s);
b=(Omega2*sin(Gama)*cos(Psi_s)*sin(Gamac)-(Omega1+Omega2*cos(Gama))*cos(Gamac))*Rbc;
% Angulo Teta_s que obedece à equação do engrenamento
if k<0
Teta = asin(((b*w)+(sqrt((b^2)*(w^2)+((h^2)+(w^2))*((h^2)-(b^2)))))/((h^2)+(w^2)));
else
Teta = acos((-b*h)+(sqrt((b^2)*(h^2)+((h^2)+(w^2))*((w^2)-(b^2)))))/((h^2)+(w^2)));
end
Teta_s = Teta-Teta_0s;
% Matriz de transformação Msc entre os sistemas de coordenadas Sc e Ss
Msc=[cos(Gamac) 0 -sin(Gamac) 0; 0 1 0 0; sin(Gamac) 0 cos(Gamac) Ecs; 0 0 0 1];
% Vetor rc = ponto de contato a ser analisado sobre o perfil do dente
rc(1,1) = Rbc*(cos(Teta_0s+Teta_s)+Teta_s*sin(Teta_0s+Teta_s));
rc(2,1) = Rbc*(sin(Teta_0s+Teta_s)-Teta_s*cos(Teta_0s+Teta_s));
rc(3,1) = 0;
rc(4,1) = 1;
% Conversão de rc em rs
rs=Msc*rc;

% testes sobre os valores obtidos
% vetor normal ns
nc = [sin(Teta);-cos(Teta);0];
Lsc=Msc(1:3,1:3);
ns = Lsc*nc;
% vetor velocidade Vs2 no sistema Ss
vs2 = [-(Omega1+Omega2*cos(Gama))*rs(2,1)-(Omega2*sin(Gama)*sin(Psi_s)*rs(3,1))-
(E*Omega2*sin(Gama)*sin(Psi_s)); rs(1,1)*(Omega1+Omega2*cos(Gama))-
(Omega2*sin(Gama)*cos(Psi_s)*rs(3,1))-(E*Omega2*sin(Gama)*cos(Psi_s));
Omega2*sin(Gama)*(rs(1,1)*sin(Psi_s)+rs(2,1)*cos(Psi_s))];
% produto escalar de ns e vs2
pe = ns(1,1)*vs2(1,1)+ns(2,1)*vs2(2,1)+ns(3,1)*vs2(3,1);
% Conversão de Teta_s em graus
Teta_s_deg = Teta_s*180/pi;
% vetor r2 - sistema de coordenadas S2
r2 = M2s*rs;

% Matriz de resultados Teta_s fixo, Psi_s variando, 1a coluna é x, 2a é y, 3a é z, no sistema de
coordenadas S2
MR(j,1) = r2(1,1);
MR(j,2) = r2(2,1);
MR(j,3) = r2(3,1);
MR

% Obtenção das linhas correspondentes ao adendo e dedendo da coroa (para desenho do disco de base
no CAD)
if k==0
% Vetores correspondentes aos raios de adendo e dedendo da coroa nos planos virtuais
correspondentes a zs=0 e zs=Hc.
Ra_in = [((Rpp/cos(Gamac))-mpc);0;0;1];
Rd_in = [((Rpp/cos(Gamac))+1.25*mpc);0;0;1];
% modulo no raio maximo
mHc = 2*(Rpp-Hc*tan(Gamac))/Np;
Ra_out = [(((Rpp-Hc*tan(Gamac))/cos(Gamac))-mHc);0;0;1];
Rd_out = [(((Rpp-Hc*tan(Gamac))/cos(Gamac))+1.25*mHc);0;0;1];
Msc_in=[cos(Gamac) 0 -sin(Gamac) 0; 0 1 0 0; sin(Gamac) 0 cos(Gamac) (-Rpp*tan(Gamac)); 0 0
0 1];
Msc_out=[cos(Gamac) 0 -sin(Gamac) 0; 0 1 0 0; sin(Gamac) 0 cos(Gamac) (Hc-((Rpp-
Hc*tan(Gamac))*tan(Gamac))); 0 0 0 1];
Ra_in_m = Mma*Mas*Msc_in*Ra_in;
Rd_in_m = Mma*Mas*Msc_in*Rd_in;
Ra_out_m = Mma*Mas*Msc_out*Ra_out;
Rd_out_m = Mma*Mas*Msc_out*Rd_out;
end

% Cálculo da distância na coordenada Z entre centros dos sistemas de coordenadas Sa e Sm
zma = -EmaH*tan(2*Gamac)
% Distância Z entre os pontos Sa e Q - ver figura texto da coroa cônica
zq = -Eas*sin(2*Gatmac)-Rpp*cos(2*Gamac)

end

```

## APÊNDICE C

### ROTINA PARA OBTENÇÃO DOS PONTOS DE CONTATO E FORMA FINAL DO DENTE DE FAIXAS INTERNAS CÔNICAS DA TRANSMISSÃO PROPOSTA

```

function y = cor_conic_int(Np,Ncc,mpc,EmaH,Eas,Hc,Gamac,Alfac,Kpc,Omegal)

% VER ARQUIVO ENVELOPE_CÔNICA_INTERNA.DOC

% teste com os seguintes parametros cor_conic_int(24,80,3,132,25,13,10*pi/180,20*pi/180,14,10)
% Np = número de dentes do pinhão cônico
% Ncc = número de dentes da coroa cônica
% mpc = módulo nominal do pinhão cônico no diâmetro primitivo
% EmaH = distância entre as origens dos sist. coord. Sm e Sa, medida horizontalmente (ver figura)
% Eas = módulo da distância entre as origens dos sist. coord. Sa e Ss
% Hc = espessura do pinhão cônico
% Gamac = angulo do cone primitivo do pinhão [radianos]
% Alfac = angulo de pressao em radianos
% Kpc = número de planos de corte sobre o pinhão cônico (Hc será fatiado em planos)
% Omegal = velocidade do pinhão [rad/s]

% equacoes baseadas em Litvin F. - Gear Geometry and Applied Theory-2a edicao

% raio primitivo do pinhão cônico (diâmetro maior)
  Rpp = mpc*Np/2;

% Numero de dentes virtual do pinhao
  Npv=Np/cos(Gamac);

% Envolvente do angulo de pressao
  inv_Alfac = tan(Alfac)-Alfac;

% Parâmetro Teta_0s = metade do espaço do shaper no circulo de base (figura 18.5.1)
  Teta_0s = (pi/(2*Npv))-inv_Alfac;

% Velocidade angular da coroa
  Omega2 = Omegal*Np/Ncc;

% Ângulo entre eixos Zm e Za - ver figura arquivo envelope_cônica.doc
  Gacma = (pi/2)-(2*Gamac);

% Distância entre origens dos sistemas de coordenadas Sm e Sa/Ss - ver figura arquivo
envelope_cônica_interna.doc
  Ema = EmaH/cos(2*Gamac);
  E = Ema - Eas

% Looping de giro do pinhão (ângulo Psi_s)
for k = -24:1.5:12
  Psi_s = k*pi/180;
  Psi_s_deg = k
  % Cálculo do angulo de giro da coroa
  Psi_2 = Psi_s*Np/Ncc;
  % Matriz M2m
  M2m=[cos(Psi_2) sin(Psi_2) 0 0; -sin(Psi_2) cos(Psi_2) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];
  % Matriz Mma
  Mma=[cos(Gama) 0 sin(Gama) EmaH; 0 1 0 0; -sin(Gama) 0 cos(Gama) EmaH*tan(2*Gamac); 0 0 0
1]; % REVISADA 23/11/06
  % Matriz Mas
  Mas=[cos(Psi_s) -sin(Psi_s) 0 0; sin(Psi_s) cos(Psi_s) 0 0; 0 0 1 -Eas; 0 0 0 1];
  % Matriz M2s de transformacao de coordenadas Ss ==> S2
  M2s = M2m*Mma*Mas;

% Looping onde são determinados os pontos que formam a linha de contato entre os dentes
% incremento na direcao z
deltaZ=Hc/(Kpc-1);
j=0;
for zs = 0:deltaZ:Hc
  j=j+1;
  % Raio primitivo sobre o plano transversal ao eixo de giro em análise
  Rpt = Rpp-zs*tan(Gamac);
  % Raio primitivo sobre o plano virtual (transversal ao pitch plane)
  Rpc=Rpt/cos(Gamac);
  % Raio de base sobre o plano virtual

```

```

Rbc=Rpc*cos(Alfac);
% Distância entre origens dos sistemas de coordenadas St e Sc
Etc=Rept*tan(Gamac);
% Distância entre origens dos sistemas de coordenadas Sc e Ss
Ecs=zs-Etc;
% Parâmetros da equação de engrenamento
w=(E-Ecs)*Omega2*sin(Gama)*sin(Psi_s)*cos(Gamac);
h=(E-Ecs)*Omega2*sin(Gama)*cos(Psi_s);
b=(-Omega2*sin(Gama)*cos(Psi_s)*sin(Gamac)-(Omegal-Omega2*cos(Gama))*cos(Gamac))*Rbc;
% Angulo Teta_s que obedece à equação do engrenamento
%if k<0
Teta = asin(((b*w)+(sqrt((b^2)*(w^2)+((h^2)+(w^2))*((h^2)-(b^2)))))/((h^2)+(w^2)));
%else
Teta = acos((-b*h)+(sqrt((b^2)*(h^2)+((h^2)+(w^2))*((w^2)-(b^2)))))/((h^2)+(w^2)));
%end
Teta_s = Teta-Teta_0s;
% Matriz de transformação Msc entre os sistemas de coordenadas Sc e Ss
Msc=[cos(Gamac) 0 sin(Gamac) 0; 0 1 0 0; -sin(Gamac) 0 cos(Gamac) -Ecs; 0 0 0 1];
% Vetor rc = ponto de contato a ser analisado sobre o perfil do dente
rc(1,1) = Rbc*(cos(Teta_0s+Teta_s)+Teta_s*sin(Teta_0s+Teta_s));
rc(2,1) = Rbc*(sin(Teta_0s+Teta_s)-Teta_s*cos(Teta_0s+Teta_s));
rc(3,1) = 0;
rc(4,1) = 1;
% Conversão de rc em rs
rs=Msc*rc;
% testes sobre os valores obtidos
% vetor normal ns
nc = [sin(Teta);-cos(Teta);0];
Lsc=Msc(1:3,1:3);
ns = Lsc*nc;
% vetor velocidade Vs2 no sistema Ss
vs2 = [-(Omegal-Omega2*cos(Gama))*rs(2,1)-(Omega2*sin(Gama)*sin(Psi_s)*rs(3,1))-
(E*Omega2*sin(Gama)*sin(Psi_s)); rs(1,1)*(Omegal-Omega2*cos(Gama))-
(Omega2*sin(Gama)*cos(Psi_s)*rs(3,1)-(E*Omega2*sin(Gama)*cos(Psi_s));
Omega2*sin(Gama)*rs(1,1)*sin(Psi_s)+rs(2,1)*cos(Psi_s)];
% produto escalar de ns e vs2
pe = ns(1,1)*vs2(1,1)+ns(2,1)*vs2(2,1)+ns(3,1)*vs2(3,1)
% Conversão de Teta_s em graus
Teta_s_deg = Teta_s*180/pi;
% vetor r2 - sistema de coordenadas S2
r2 = M2s*rs;
% Matriz de resultados Teta_s fixo, Psi_s variando, 1a coluna é x, 2a é y, 3a é z, no sistema
de coordenadas S2
MR(j,1) = r2(1,1);
MR(j,2) = r2(2,1);
MR(j,3) = r2(3,1);
MR(j,4) = Teta_s_deg;
%MR(j,5) = rs(2,1);
%MR(j,6) = rs(3,1);
%MR(j,7) = Teta_s;
end
MR

% Obtenção das linhas correspondentes ao adendo e dedendo da coroa (para desenho do disco de
base no CAD)
if k==0
% Vetores correspondentes aos raios de adendo e dedendo da coroa nos planos virtuais
correspondentes a zs=0 e zs=Hc.
Ra_in = [((Rpp/cos(Gamac))-mpc);0;0;1];
Rd_in = [((Rpp/cos(Gamac))+1.25*mpc);0;0;1];
% modulo no raio maximo
mHc = 2*(Rpp-Hc*tan(Gamac))/Np;
Ra_out = [(((Rpp-Hc*tan(Gamac))/cos(Gamac))-mHc);0;0;1];
Rd_out = [(((Rpp-Hc*tan(Gamac))/cos(Gamac))+1.25*mHc);0;0;1];
Msc_in=[cos(Gamac) 0 sin(Gamac) 0; 0 1 0 0; -sin(Gamac) 0 cos(Gamac) (Rpp*tan(Gamac)); 0 0
0 1];
Msc_out=[cos(Gamac) 0 sin(Gamac) 0; 0 1 0 0; -sin(Gamac) 0 cos(Gamac) (-Hc+((Rpp-
Hc*tan(Gamac))*tan(Gamac))); 0 0 0 1];
Ra_in_m = Mma*Mas*Msc_in*Ra_in;
Rd_in_m = Mma*Mas*Msc_in*Rd_in;
Ra_out_m = Mma*Mas*Msc_out*Ra_out;
Rd_out_m = Mma*Mas*Msc_out*Rd_out;
end
% Cálculo da distância na coordenada Z entre centros dos sistemas de coordenadas Sa e Sm
% para uso na montagem das coroas facial e interna no SolidWorks (distancia entre planos Front
das coroas)
% Distancia em z = z_top = dist(Om_facial_Om_interna)= zma - (zq-Rpp)
% Distancia zma = distancia entre origens apos o giro do pinhao
zma = EmaH*tan(2*Gamac)

```

```
% Distância Z entre os pontos Sa e Q - ver figura texto da coroa cônica interna
% Este valor deve ser descontado do valor de zma para o desenho de montagem das coroas facial e
iterna
  zq = Eas*sin(2*Gamac)+Rpp*cos(2*Gamac)
% valor final da distancia entre origenas
z_top = zma-(zq-Rpp)
  mHc
  Rd_in_m
  Rd_out_m
  Ra_in_m
  Ra_out_m
```

## APÊNDICE D

### ROTINA DE DIMENSIONAMENTO DOS PINHÕES CILÍNDRICOS PARA ENGRENAMENTOS FACIAIS

```

function t = pinhao_engr_facial(Np,Nc,Jp,P,n,Phi,F,Sff,Sfc)

% ROTINA PARA CÁLCULO DO MÓDULO TEÓRICO ADMISSÍVEL EM ENGRENAGENS CILÍNDRICAS DE DENTES RETOS
% EM AÇOS PARA CEMENTAÇÃO E TÊMPERA, TÊMPERA, E NITRETAÇÃO

% FUNCIONAMENTO DA ROTINA:
% AGREGA-SE AS FÓRMULAS DA TENSÃO DE FLEXÃO ADMISSÍVEL E DA RESISTÊNCIA MECÂNICA AGMA. ESTIMA-SE
% OS PARÂMETROS QUE SÃO FUNÇÃO DA GEOMETRIA (Kv, POR EXEMPLO).
% RESTA COMO INCÓGNITA O MÓDULO (FUNÇÃO CÚBICA).
% DETERMINADO O MÓDULO, É POSSÍVEL DETERMINAR CORRETAMENTE OS PARÂMETROS ASSOCIADOS À GEOMETRIA.
% RECALCULA-SE A RESISTÊNCIA E A TENSÃO AGMA E OBTÉM-SE UM VALOR DE SEGURANÇA.

% teste com os seguintes parametros:
% pinhao_engr_facial(20,160,0.335,18316/4,20400,20*pi/180,16,1.5,1.05)

% Np = numero de dentes do pinhao (no mínimo 12 dentes)
% Nc = numero de dentes da coroa
% Jp = fator geométrico de resistência à flexão do pinhão
% P = potência [Watts]
% n = rotação do pinhão [rpm]
% Phi = ângulo de pressão [rad]
% F = largura do pinhão [mm]
% Sff = fator de segurança para o critério de flexão (1 a 10)
% Sfc = fator de segurança para o critério de contato (1 a 10)

% ESPECIFICAÇÃO DO MATERIAL E TRATAMENTO TÉRMICO DO PINHÃO
fprintf('\nInforme o material do pinhão. \n\n')

Mtp = input(' <1> Aço - têmpera com endurecimento completo - dureza superficial entre 160 e 400
HB (DEFAULT) \n <2> Têmpera por chama ou indução com padrão tipo A (50 - 55 HRC) - ver AGMA\n <3>
Têmpera por chama ou indução com padrão tipo B (pior resultado final) - ver AGMA\n <4> cementação
e têmpera (55 a 64 HRC)\n <5> Aço AISI 4140 Nitretado - faixa de dureza de 260 a 340 HB \n <6>
Aço AISI 4340 Nitretado - faixa de dureza de 260 a 340 HB \n <7> Aço para nitretação Nitralloy
135M - faixa de dureza de 260 a 340 HB \n <8> Aço para nitretação Nitralloy N - faixa de dureza
de 260 a 340 HB \n <9> Nitretação de aço com 2,5% de Cromo - sem Alumínio - faixa de dureza de
300 a 340 HB \n\n');
% OBSERVAÇÃO:
% Mtp = material e tratamento térmico utilizado
% 1 = Aço - têmpera com endurecimento completo - dureza superficial entre 160 e 400 HB
(DEFAULT)
% 2 = Têmpera por chama ou indução com padrão tipo A (50 - 55 HRC) - ver AGMA
% 3 = Têmpera por chama ou indução com padrão tipo B (pior resultado final) - ver AGMA
% 4 = cementação e têmpera (55 a 64 HRC)
% 5 = Aço AISI 4140 Nitretado - faixa de dureza de 260 a 340 HB
% 6 = Aço AISI 4340 Nitretado - faixa de dureza de 260 a 340 HB
% 7 = Aço para nitretação Nitralloy 135M - faixa de dureza de 260 a 340 HB
% 8 = Aço para nitretação Nitralloy N - faixa de dureza de 260 a 340 HB
% 9 = Nitretação de aço com 2,5% de Cromo - sem Alumínio - faixa de dureza de 300 a 340 HB

% arredondamento para caso de inserção de número não inteiro na função eng_cil_ret
Mtp = round(Mtp);
if (Mtxp < 1) | (Mtp > 9)
    Mtp = 1;
    fprintf('\n')
    fprintf('O material está fora das especificações da norma AGMA. \n')
    fprintf('Adotou-se o aço endurecido completamente, com dureza de superfície inferior a 180 HB.
\n\n')
end

% ESPECIFICAÇÃO DO GRAU DO MATERIAL DO PINHÃO
fprintf('\nInforme o grau do material do pinhão. \n\n')
Gmp = input(' <1> material comum (DEFAULT) \n <2> material com maior rigor de controle na
composição química e tratamento térmico\n <3> material altamente controlado (ex.: 4340
aeroespacial) \n\n');
% OBSERVAÇÃO
% Gmp = Grau do material:
% 1 = material comum
% 2 = material com maior rigor de controle na composição química
% 3 = material altamente controlado (ex.: 4340 aeroespacial)

```

```

% arredondamento para caso de inserção de grau de material não inteiro na função eng_cil_ret
Gmp = round(Gmp);
if Gmp ~= 1
    if Gmp ~= 2
        if Gmp ~= 3
            Gmp = 1;
            fprintf('\no Grau do Material adotado é = %f\n\n',Gmp)
        end
    end
end

% ESPECIFICAÇÃO DA DUREZA DO PINHÃO - ESCALA BRINELL
fprintf('\n')
HBbp = input('Informe a dureza do material do pinhão - escala Brinell: \n');

% ajuste do intervalo de dureza do pinhão para endurecimento completo por têmpera
if (Mtp >= 1) & (Mtp <= 4) % Aço - têmpera com endurecimento completo - dureza superficial entre
180 e 400 HB
    if HBp < 160
        HBp = 160;
        fprintf('\nA dureza na superfície do pinhão está abaixo do valor mínimo tabelado pela
AGMA.\no valor adotado é de 160 HB.\n')
    end
    if HBp > 400
        HBp = 400;
        fprintf('\nA dureza na superfície do pinhão está acima do valor máximo tabelado pela
AGMA.\no valor adotado é de 400 HB.\n')
    end
end

% ajuste do intervalo de dureza do pinhão para nitretação com endurecimento completo dos aços
AISI 4140 e AISI 4340
% e para nitretação dos aços Nitralloy 135 M e Nitralloy N
if (Mtp >= 5) & (Mtp <= 8)
    if HBp < 260
        HBp = 260;
        fprintf('\nA dureza na superfície do pinhão está abaixo do valor mínimo tabelado pela
AGMA.\no valor adotado é de 260 HB.\n')
    end
    if HBp > 340
        HBp = 340;
        fprintf('\nA dureza na superfície do pinhão está acima do valor máximo tabelado pela
AGMA.\no valor adotado é de 340 HB.\n')
    end
end

% ajuste do intervalo de dureza do pinhão para nitretação de aço com 2,5% de Cromo - sem Alumínio
% faixa de dureza de 300 a 340 HB
if Mtp == 9
    if HBp < 300
        HBp = 300;
        fprintf('\nA dureza na superfície do pinhão está abaixo do valor mínimo tabelado pela
AGMA.\no valor adotado é de 300 HB.\n')
    end
    if HBp > 340
        HBp = 340;
        fprintf('\nA dureza na superfície do pinhão está acima do valor máximo tabelado pela AGMA.\no
valor adotado é de 340 HB.\n')
    end
end

% Resistência à flexão correspondente a 1E7 ciclos e confiabilidade de 0,99 para engrenagens aço

if Mtp == 1
    % pinhão
    if Gmp == 1
        Stp = 0.533*HBp + 88.3; % [MPa] - resistência à flexão
        Scp = 2.22*HBp + 200; % [MPa] - resistência de contato
    elseif (Gmp == 2) | (Gmp == 3) % Para grau 3 são adotados os valores para grau 2
        Stp = 0.703*HBp + 113; % [MPa] - resistência à flexão
        Scp = 2.41*HBp + 237; % [MPa] - resistência de contato
    end
end

if Mtp == 2
    % pinhão
    if Gmp == 1
        Stp = 310; % [MPa] - resistência à flexão
        Scp = 170*6.89; % [MPa] - resistência de contato
    elseif (Gmp == 2) | (Gmp == 3) % Para grau 3 são adotados os valores para grau 2
        Stp = 380; % [MPa] - resistência à flexão
    end
end

```

```

        Scp = 190*6.89          % [MPa] - resistência de contato
    end
end

if Mtp == 3                    % pinhão
    Stp = 150;                 % [MPa]
    Scp = 170*6.89;           % [MPa] - resistência de contato
end

if Mtp == 4                    % pinhão
    if Gmp == 1                % [MPa] - resistência à flexão
        Stp = 380;             % [MPa] - resistência de contato
        Scp = 180*6.89;
    elseif (Gmp == 2)         % [MPa] - resistência à flexão
        Stp = 448;             % [MPa] - resistência de contato
        Scp = 225*6.89;
    elseif (Gmp == 2) | (Gmp == 3) % [MPa] - resistência à flexão
        Stp = 75*6.89;         % [MPa] - resistência de contato
        Scp = 275*6.89;
    end
end

if Mtp == 5                    % pinhão de aço AISI 4140 têmpera completa e nitretado
    if Gmp == 1                % [MPa] - resistência à flexão
        Stp = 0.568*HBp + 83.8; % [MPa] - resistência de contato
        Scp = 150*6.89;
    elseif (Gmp == 2)         % [MPa] - resistência à flexão
        Stp = 0.749*HBp + 110; % [MPa] - resistência de contato
        Scp = 163*6.89;
    elseif (Gmp == 3)         % [MPa] - resistência à flexão
        Stp = 0.749*HBp + 110; % [MPa] - resistência de contato
        Scp = 175*6.89;
    end
end

if Mtp == 6                    % pinhão em aço AISI 4340
    if Gmp == 1                % [MPa]
        Stp = 0.617*HBp + 90;   % [MPa] - resistência de contato - adotado o mesmo valor do
        Scp = 150*6.89;         aço AISI 4140
    elseif (Gmp == 2)         % [MPa]
        Stp = 0.814*HBp + 118; % [MPa] - resistência de contato - adotado o mesmo valor do
        Scp = 163*6.89;         aço AISI 4140
    elseif (Gmp == 2)         % [MPa] - resistência à flexão
        Stp = 0.814*HBp + 118; % [MPa] - resistência de contato - adotado o mesmo valor do
        Scp = 175*6.89;         aço AISI 4140
    end
end

if Mtp == 7                    % Pinhão em aço para nitretação Nitralloy 135M - faixa
de dureza de 260 a 340 HB
    if Gmp == 1                % [MPa]
        Stp = 0.594*HBp + 87.7; % [MPa] resistência de contato
        Scp = 170*6.89;
    elseif (Gmp == 2)         % [MPa]
        Stp = 0.784*HBp + 114.8; % [MPa] resistência de contato
        Scp = 183*6.89;
    elseif (Gmp == 3)         % [MPa] - para grau 3 são adotados os valores para grau 2
        Stp = 0.784*HBp + 114.8; % [MPa] resistência de contato
        Scp = 183*6.89;
    end
end

if Mtp == 8                    % Pinhão em aço Nitralloy N - dureza de 260 a 340 HB
    if Gmp == 1                % [MPa] resistência à flexão
        Stp = 0.638*HBp + 94.2; % [MPa] resistência de contato
        Scp = 172*6.89;
    elseif (Gmp == 2)         % [MPa]
        Stp = 0.843*HBp + 123.4; % [MPa] resistência de contato
        Scp = 188*6.89;
    elseif (Gmp == 3)         % [MPa] resistência à flexão
        Stp = 0.843*HBp + 123.4; % [MPa] resistência de contato
        Scp = 205*6.89;
    end
end
end

```

```

if Mtp == 9 % pinhão em aço com 2,5% de Cromo - sem Alumínio -
Nitretado - faixa de dureza de 300 a 340 HB
    if Gmp == 1
        Stp = 0.7255*HBp + 63.9; % [MPa] resistência à flexão
        Scp = 155*6.89; % [MPa] resistência de contato
    elseif Gmp == 2
        Stp = 0.7255*HBp + 153.6; % [MPa] resistência à flexão
        Scp = 172*6.89; % [MPa] resistência de contato
    if Gmp == 3
        Stp = 0.7255*HBp + 201.9; % [MPa] resistência à flexão
        Scp = 189*6.89; % [MPa] resistência de contato
    end
end

% arredondamento para caso de inserção de números de dentes não inteiros na função eng_cil_ret
Np = round(Np);

% delimitação do número de dentes admissível para pinhão e coroa
if Np < 12
    fprintf('\nO número de dentes do pinhão é menor que 12.\nAdotou-se o valor mínimo admissível
de 12 dentes.\n')
    Np = 12;
end

% = = = = = FATOR GEOMÉTRICO PARA RESISTÊNCIA À FORMAÇÃO DE CAVIDADES - Ic = = = = =
mg = Nc/Np; % razão de engrenamento
Ic = cos(Phi)*sin(Phi)*mg/(2*(mg+1));
% = = = = =
= = = = =

% = = = = = COEFICIENTE ELÁSTICO PARA CÁLCULO DA TENSÃO DE CONTATO - CP
= = = = =
Poissonp = 0.3; % para pinhão em aço
Poissonc = 0.3; % para coroa em aço
Ep = 200000; % [MPa=N/mm2]para pinhão em aço
Ec = 200000; % [MPa=N/mm2]para coroa em aço
CP = (1/(pi*(((1-(Poissonp^2))/Ep))+((1-(Poissonc^2))/Ec))))^0.5;
% = = = = =
= = = = =

% delimitação dos valores admissíveis para o fator de segurança SFf
if (SFf < 1)
    fprintf('\nO valor de fator de segurança em flexão especificado está abaixo do mínimo valor
admitido. \nO valor adotado é SFf = 1.\n')
elseif (SFf > 10)
    fprintf('\nO valor de fator de segurança em flexão especificado está acima do máximo valor
admitido. \nO valor adotado é SFf = 10.\n')
end
% delimitação dos valores admissíveis para o fator de segurança SFc
if (SFc < 1)
    fprintf('\nO valor de fator de segurança em tensão de contato especificado está abaixo do
mínimo valor admitido. \nO valor adotado é SFf = 1.\n')
elseif (SFf > 10)
    fprintf('\nO valor de fator de segurança em tensão de contato especificado está acima do
máximo valor admitido. \nO valor adotado é SFf = 10.\n')
end
% = = = = =
= = = = =

% = = = = = PARÂMETROS FIXOS QUE SERÃO USADOS NO CÁLCULO DE KM E DA
QUALIDADE Qv = = = = =
Qvp = 0;
Qvc = 0;
LP = input('\nAs engrenagens sofrem processo de ajustagem na montagem ou lapidação? S=Sim N=Não
<default N> \n', 's');
if (LP == 's')|(LP == 'S')
    Ce = 0.8;
    fprintf('\nNeste caso, considerou-se um número de qualidade Qv = 8 para coroa e pinhão.\n')
    Qvp = 8;
    Qvc = 8;
else
    Ce = 1;
end

fprintf('\nInforme as condições da unidade de transmissão: \n')
UN = input(' <1> engrenamento aberto \n <2> unidade fechada, comercial (DEFAULT)\n <3> unidade
fechada, de precisão\n <4> unidade fechada, extraprecisa.\n');
if (UN == 1)
    Aun = 0.247;

```

```

    Bun = 0.0167;
    Cun = -0.0000765;
elseif (UN == 3)
    Aun = 0.0675;
    Bun = 0.0128;
    Cun = -0.0000926;
elseif (UN == 4)
    Aun = 0.0036;
    Bun = 0.0102;
    Cun = -0.0000822;
else
    Aun = 0.127;
    Bun = 0.0158;
    Cun = -0.0000093;
    fprintf('Adotou-se o valor default = unidade fechada, comercial \n')

fprintf('\nInforme se os dentes das engrenagens são coroados: \n')
CR = input(' <1> dentes coroados \n <2> dentes sem coroamento (DEFAULT).\n');
if (CR == 1)
    Cmc = 0.8;
else
    Cmc = 1;
end
% = = = = = ESPECIFICAÇÃO DA QUALIDADE DAS ENGRENAGENS = = = = =
% ENTRADA DO NÚMERO DE QUALIDADE Qv AGMA DO PINHÃO NO CASO DE OPÇÃO POR ENGRENAGENS NÃO LAPIDADAS
OU NÃO AJUSTADAS NA MONTAGEM.
if Qvp ~= 8
    Q = input('\nInforme o número de qualidade AGMA para o pinhão: \n');
    Qvp = Q;
    if Q < 3
        fprintf('\nA qualidade mínima é Qv=3.\nO valor da qualidade adotado é 3 (qualidade de
material fundido ou usinagem grosseira).\n')
        Qvp = 3;
    elseif Q > 12
        fprintf('\nA qualidade máxima é Qv=12.\nO valor da qualidade adotado é 12 (lapidação,
honing ou retificação de alta precisão).\n')
        Qvc = 12;
    end
end

% = = = = FATORES COMUNS AOS DOIS CRITÉRIOS: FLEXÃO E TENSÃO DE CONTATO - KZ, KR e KT. = = = = =
%
% ESPECIFICAÇÃO DO FATOR DE SOBRECARGA KZ
fprintf('\n')
carga = input('Informe o nível de choque presente na carga de trabalho: \n<1> carga uniforme -
ex. bomba d'água(default) \n<2> choques moderados - corte interrompido em operações de usinagem
não muito severas\n<3> choques intensos - operações de forjamento e estampagem. \n');
% arredondamento para caso de inserção de número não inteiro
carga = round(carga);
if (carga < 1) | (carga > 3)
    fprintf('\nConsiderou-se o caso de carga uniforme.\n')
    carga = 1;
end
fprintf('\n')
fonte = input('Informe o nível de choque da fonte de potência de acionamento da transmissão:
\n<1> carga uniforme - ex. motores elétricos(default) \n<2> choques moderados - motores
hidráulicos de engrenagens\n<3> choques intensos - motores de combustão interna. \n');
% arredondamento para caso de inserção de número não inteiro
fonte = round(fonte);
if (fonte < 1) | (fonte > 3)
    fprintf('\nConsiderou-se o caso de fonte de potência uniforme.\n')
    fonte = 1;
end
% Matriz do fator de sobrecarga KZ
KZZ = [1 1.25 1.75; 1.25 1.5 2; 1.5 1.75 2.25];
KZ = KZZ(fonte,carga);

% ESPECIFICAÇÃO DO FATOR DE CONFIABILIDADE KR
% entrada do valor de confiabilidade desejado (entre 0.5 e 0.9999)
fprintf('\n')
R = input('Informe a confiabilidade desejada para a transmissão <0.5 a 0.9999> (default AGMA =
0.99): \n');
if R <= 0.5
    fprintf('O menor valor admissível de confiabilidade é de 0.5. \nPortanto, considerou-se o
valor de R = 0.5. \n')
    R = 0.5;
    KR = 0.658 - 0.0759*log(0.5);
elseif (R > 0.5) & R < 0.99

```

```

    KR = 0.658 - 0.0759*log(1-R);
elseif R >= 0.99 & R <= 0.9999
    KR = 0.5 - 0.109*log(1-R);
elseif R > 0.9999
    fprintf('O maior valor admissível de confiabilidade é de 0.9999. \nPortanto, considerou-se o
valor de R = 0.9999. \n')
    R = 0.9999;
    KR = 0.5 - 0.109*log(1-R);

% FATOR DE TEMPERATURA KT
% ENTRADA DO VALOR DE TEMPERATURA DE OPERAÇÃO ESTIMADO EM GRAUS CELSIUS
Tt = input('\nInforme o valor estimado de temperatura de operação da transmissão:\n');
if Tt > 150
    fprintf('O valor de temperatura é muito elevado.\n')
    fprintf('É necessário sistema de lubrificação e/ou arrefecimento que permita operação em
temperatura menor.\n')
    fprintf('Adotou-se o valor de temperatura máximo de 150 graus C.\n')
    Tt = 150;
end
if Tt < 20
    fprintf('O valor de temperatura é muito baixo.\n')
    fprintf('Adotou-se o valor de temperatura de 20 graus C (KT=1).\n')
end
if Tt > 120
    % conversão para temperatura em Graus Fahrenheit
    TtF = 32 + Tt*9/5;
    KT = (460 + TtF)/620;
else KT = 1;
end

% ENTRADA DO NÚMERO DE CICLOS N DESEJADO PARA O PINHÃO (padrão AGMA 1E7 = 10^7 ciclos) - FATORES
DE CICLAGEM DE TENSÃO
N = input('\ninforme o número de ciclos de carga desejado para o pinhão (default 1E7 = 10^7
ciclos)\n');
% CRITÉRIO DE FLEXÃO - FATOR YN
% fator de número de ciclos desejado para o pinhão (YN = 1 corresponde a 1E7 ciclos)
% para pinhão em aço submetido a têmpera
if (Mtp >= 1) & (Mtp <= 3)
    if (HBp >= 400)
        if N < 1E7
            YNp = 9.4518*(N)^(-0.148);
        elseif N == 1E7
            YNp = 1;
        elseif N > 1E7
            YNp = 1.3558*(N)^(-0.0178);
        end
    end
    if (HBp >= 250) & (HBp < 400)
        if N < 1E7
            YNp = 4.9404*(N)^(-0.1045);
        elseif N == 1E7
            YNp = 1;
        elseif N > 1E7
            YNp = 1.3558*(N)^(-0.0178);
        end
    end
    if (HBp < 250)
        if N < 1E7
            YNp = 2.3194*(N)^(-0.0538);
        elseif N == 1E7
            YNp = 1;
        elseif N > 1E7
            YNp = 1.3558*(N)^(-0.0178);
        end
    end
end
end
% para pinhão em aço submetido a cementação e têmpera
if Mtp == 4
    % para o pinhão
    if N < 1E7
        YNp = 6.1514*(N)^(-0.1192);
    elseif N == 1E7
        YNp = 1;
    elseif N > 1E7
        YNp = 1.3558*(N)^(-0.0178);
    end
end
end
% para pinhão em aço submetido a nitretação
if (Mtp >= 5) & (Mtp <= 9)

```

```

% para o pinhão
if N < 1E7
    YNp = 3.517*(N)^(-0.0817);
elseif N == 1E7
    YNp = 1;
elseif N > 1E7
    YNp = 1.3558*(N)^(-0.0178);
end
end

% CRITÉRIO DE TENSÃO DE CONTATO - FATOR ZN
% fator de número de ciclos desejado para o pinhão (YN = 1 corresponde a 1E7 ciclos)
% para pinhão em aço submetido a têmpera ou cementação e têmpera
if (Mtp >= 1) & (Mtp <= 4)
    if N < 1E7
        ZNp = 0.2466*(N)^(-0.056);
    elseif N == 1E7
        ZNp = 1;
    elseif N > 1E7
        ZNp = 1.4488*(N)^(-0.023);
end

% para pinhão em aço submetido a nitretação
if (Mtp >= 5) & (Mtp <= 9)
    % para o pinhão
    if N < 1E7
        ZNp = 1.249*(N)^(-0.0138);
    elseif N == 1E7
        ZNp = 1;
    elseif N > 1E7
        ZNp = 1.4488*(N)^(-0.023);
    end
end

% = = = = =
% ESTIMATIVA DO MÓDULO COM BASE NO CRITÉRIO DE FLEXÃO E CÁLCULOS DE PARÂMETROS GEOMÉTRICOS E
CINEMÁTICOS DAS ENGRENAGENS.

% TORQUE TRANSMITIDO PELO PINHÃO EM N.mm
% Velocidade angular do pinhão em radianos/s
Omegap = n*pi/30;
Tq = 1000*P/Omegap;

% ESTIMATIVA DO MÓDULO
m = ((2*KZ*Tq*KT*KR*Sff)/(2*pi*Jp*Np*Stp*YNp))^(1/3);
% fprintf('\nO módulo teórico é = %f\n',m)

% OBTENÇÃO DO MÓDULO PARA FABRICAÇÃO DAS ENGRENAGENS - ARREDONDAMENTO
mp = [1;1.25;1.5;2;2.5;3;4;5;6;8;10;12;16;20;25;32;40;50]; % vetor com os módulos preferidos
para fabricação
i=0;
for i=1:18,
    if mp(i) >= m
        pos_mp = i-1; % armazenamento da posição anterior do módulo no vetor mp - será incrementado
dentro do próximo while
        break
    end
end

SGfp = 0;
SGcp = 0;

while (SGfp < Sff) | (SGcp < Sfc)
    % definição do valor do módulo
    pos_mp = pos_mp + 1;
    m = mp(pos_mp);

    % DIÂMETROS PRIMITIVOS DAS ENGRENAGENS
    dp = m*Np;

    % DIÂMETROS DE BASE DAS ENGRENAGENS
    dbp = m*Np*cos(Phi);

    % LARGURA DAS ENGRENAGENS EM POLEGADAS
    Fio = F/25.4; % valor em polegadas

    % VELOCIDADE TANGENCIAL NOS CÍRCULOS PRIMITIVOS EM m/s
    V = Omegap*dp/2000;

```

```

% DETERMINAÇÃO DO FATOR DE FORMA DE LEWIS Y PARA PINHÃO E COROA
Ndentes =
[12;13;14;15;16;17;18;19;20;21;22;24;26;28;30;34;38;43;50;60;75;100;150;300;400;1000;10000];
Y =
[0.245;0.261;0.277;0.29;0.296;0.303;0.309;0.314;0.322;0.328;0.331;0.337;0.346;0.353;0.359;0.371;0.384;0.397;0.409;0.422;0.435;0.447;0.46;0.472;0.48;0.485;0.485];
% laço para determinação do fator de forma do pinhão e coroa
i=0;
for i=1:26,
if Np == Ndentes(i)
Yp = Y(i);
elseif (Np > Ndentes(i)) & (Np < Ndentes(i+1))
Yp = Y(i)+(Np-Ndentes(i))*(Y(i+1)-Y(i))/(Ndentes(i+1)-Ndentes(i))
end
end

% = = = = =
% CÁLCULOS DOS FATORES BASEADOS NA GEOMETRIA DAS ENGRANAGENS E COMUNS AOS CRITÉRIOS DE FLEXÃO
E TENSÃO DE CONTATO - KV, KS e KM.
% FATOR DINÂMICO KV
B = 0.25*(12-Qvp)^(2/3);
A = 50 + 56*(1-B);
Kvp = ((A+((200*V)^(1/2)))/A)^B;

% FATOR DE TAMANHO KS
% tabela do fator de forma de Lewis
% KS para o pinhão
KSp = 0.8451*(F*m*(Yp^0.5))^0.0535;

% KM = fator de distribuição de carga para o pinhão
Cma = Aun + Bun*Fin + Cun*Fin*Fin;
Cpm = 1.1;
if Fin <= 1
Cpf = (F/(10*dp))-0.025;
elseif (Fin > 1) & (Fin <= 17)
Cpf = (F/(10*dp))-0.0375+(0.0125*Fin);
elseif (Fin > 17) & (Fin <= 40);
Cpf = (F/(10*dp))-0.1109+(0.0207*Fin)+(0.000228*Fin*Fin);
end
KtM = 1 + Cmc*((Cpf*Cpm)+(Cma*Ce)); % Valor final de KM para o pinhão

% TENSÃO AGMA PARA O PINHÃO - CRITÉRIO DE FLEXÃO
Sigmap = (2*Tq/dp)*KZ*Kvp*KSp*KM/(m*F*Jp); % considera-se o fator de espessura de borda
KB = 1

% LIMITE DE FADIGA A FLEXAO NA BASE DO DENTE - AGMA para o pinhao
Sigmapad = Stp*YNp/(KT*KR);

% SEGURANÇA DO PINHÃO PELO CRITÉRIO DA FLEXÃO
SGfp = Sigmapad/Sigmap;

% TENSÃO DE CONTATO AGMA PARA O PINHÃO
Sigma_con_p = CP*((2*Tq/dp)*KZ*Kvp*KSp*KM/(dp*F*Ic))^0.5; % considera-se o fator de
condição superficial CF = 1

% LIMITE ADMISSÍVEL DE TENSÃO DE CONTATO - AGMA PARA O PINHÃO
Sig_con_ad_p = Scp*ZNp/(KT*KR); % considera-se o fator CH = 1, por simplicidade e em favor
da segurança (CH nunca é menor do que 1 numa redução).

% SEGURANCA DO PINHÃO PELO CRITÉRIO DA TENSÃO DE CONTATO
SGcp = Sig_con_ad_p/Sigma_con_p;

end

fprintf('\n= = = = DADOS GEOMÉTRICOS E CINEMÁTICOS DO ENGRANAMENTO = = = = \n')
fprintf('módulo = %f\n',m)
fprintf('número de dentes do pinhão = %f\n',Np)
fprintf('número de dentes da coroa = %f\n',Nc)
fprintf('razão de engrenamento = %f\n',mg)
fprintf('diâmetro primitivo do pinhão = %f\n',dp)
fprintf('diâmetro de base do pinhão = %f\n',dbp)
fprintf('coeficiente de segurança do pinhão pelo critério de flexão = %f\n',SGfp)
fprintf('coeficiente de segurança do pinhão pelo critério de tensão de contato = %f\n',SGcp)

```

## APÊNDICE E

### ROTINA PARA OBTENÇÃO DA ALTURA DA FAIXA DE TRABALHO PRÓXIMA E DO DESLOCAMENTO AXIAL EM FUNÇÃO DO ÂNGULO DE NUTAÇÃO

```

function t = geometria_pinhao_engr_facial(m,Np,Teta,F)

% teste com os seguintes parametros:
% geometria_pinhao_engr_facial(2,20,22.5*pi/180,15)
% m = módulo dos dentes do pinhão
% Np = numero de dentes do pinhao (no mínimo 12 dentes)
% Teta = ângulo de giro do pinhão [radianos]
% F = largura das faixas do pinhão
% cálculo dos parâmetros iniciais
% raio primitivo do pinhão
r = m*Np/2;

% valor inicial de altura - coordenada y - do ponto (b)
h = (F/2)* 0.75*m;

% Matriz de rotacao em torno do eixo Z
Rz = [cos(Teta) -sin(Teta) 0; sin(Teta) cos(Teta) 0; 0 0 1];

% COORDENADAS DO PONTO (a) EM RELAÇÃO AO SISTEMA DE COORDENADAS DA COROA
a = [-gkl+1.25*m; F/2; 0];

% APLICANDO A ROTACAO SOBRE O PONTO A
ar = Rz*a;

% DELTA DE AVANCO DO PONTO (a) EM DIRECAO A COROA QUANDO O PINHAO E' GIRADO
da = ar(1,1)-a(1,1);

% DETERMINACAO DO DESLOCAMENTO DO PINHAO PARA POSTERIOR GIRO PARA TROCA DE MARCHAS
n_delta = round((2.25*m - da)/0.25);
delta = n_delta*0.25;
if delta < (2.25*m - da)
    delta = delta + 0.25;
end

% MATRIZ DE TRANSFORMACAO DE COORDENADAS Mcp
MT = [cos(Teta) -sin(Teta) 0 delta; sin(Teta) cos(Teta) 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1];

br = [0;0;0;0];
while br(5,1) < a(2,1)

% valor inicial de coordenadas do ponto (b)
b = [-(r+1.25*m); h; 0; 1];
h = h + 0.25;
% aplicando a matriz MT sobre o ponto (b)
br = MT*b;
end

% DETERMINACAO DA RETA QUE PASSA PELO PONTO C
% coeficiente angular da reta
m_ang = tan(Teta+(pi/2));

% coordenada x do ponto C
xc = br(1,1)+(2.25*m)/cos(Teta);
% posicao da origem da reta;
x_zro = br(2,1)*tan(Teta);
% deslocamento da reta em relacao 'a origem Oc
delta_x = -(xc + x_zer);
% equacao da reta que passa pelo ponto C: y_colisao = m_ang*(coordenada x) + m_ang*delta_x
% aplica-se o valor da coordenada x do ponto b - antes deste ser girado - na equacao de
y_colisao.
% se o y_colisao obtido for maior do que o valor de h obtido na rotina anterior,
% inicia-se processo de incremento de h ate' que a colisao deixe de ocorrer.

y_corisao = m_ang*(-(r+1.25*m)) + m_ang*delta_x;
while y_colisao > h
    h = h+0.25;
    br = MT*b;
    % coordenada x do ponto C
    xc = br(1,1)+(2.25*m)/cos(Teta);

```

```

% posicao da origem da reta
x_zero = br(2,1)*tan(Teta);
% deslocamento da reta em relacao 'a origem Oc
delta_x = -(xc + x_zero);
y_colisao = m_ang*(-(r+1.25*m)) + m_ang*delta_x;
end
n_y_colisao = round(y_colisao/0.25);
y_colisao_round = n_y_colisao*0.25;
if y_colisao_round < y_colisao
    y_colisao = y_colisao_round + 0.25;
else
    y_colisao = y_colisao_round;
end

fprintf('\nAltura da faixa externa de dentes do pinhao - coordenada y do ponto b em relação a Oc
e Op = %f\n',y_colisao)
fprintf('\ndeslocamento no sentido do eixo x para a troca de marcha = %f\n',delta)
fprintf('número de dentes do pinhão = %f\n',Np)
fprintf('número de dentes da coroa = %f\n',Nc)
fprintf('diâmetro primitivo do pinhão = %f\n',dp)
fprintf('largura do pinhao = %f\n',F)

```

## **APÊNDICE F**

### **ANÁLISE DO MODELO DE TRANSMISSÃO PROPOSTA NUM TRATOR DE BAIXA POTÊNCIA**

#### **F.1 Introdução**

Tratores de baixa potência são extensivamente utilizados em pequenas propriedades rurais nas mais diversas tarefas e condições operacionais. Tais tratores usualmente apresentam transmissões com quatro a seis razões de velocidades, divididas em faixas de relação alta e baixa, operadas manualmente, com ou sem mecanismo de sincronismo e redutores intermediários. Uma das atividades mais importantes e difíceis para os projetistas destas transmissões é determinar a faixa ótima de operação, que proporcione o torque e a velocidade necessários para a maior parte das aplicações. Isto porque determinadas atividades e culturas agrícolas demandam velocidades muito baixas, enquanto outras requerem uma velocidade superior, que o sistema de transmissão não tem condições de proporcionar.

O sistema de transmissão baseado em engrenagens cônicas e faciais, proposto no presente trabalho, apresenta características que o tornam adequado para executar, de forma automática (ou seja, sem a interferência do operador) pequenas alterações no torque e velocidade durante a operação. Desta forma, tal sistema pode servir como um dispositivo auxiliar à transmissões atualmente empregadas em tratores e outros veículos, permitindo uma ampliação da faixa de trabalho, bem como uma maior divisão desta faixa.

No caso específico estudado, foram dimensionados apenas os componentes principais da transmissão facial, com o intuito de verificar as ferramentas e modelos matemáticos desenvolvidos até o momento, no caso de aplicações reais de campo. A diferença entre o processo de desenvolvimento do protótipo para validação do aspecto funcional, em relação à transmissão agora proposta, é que a primeira tomou como pontos principais a facilidade de fabricação e montagem dos componentes, bem como a simplicidade mecânica. Já a transmissão descrita neste apêndice tem como principais parâmetros os aspectos operacionais relacionados à capacidade de carga e extensão da faixa de operação. Também foram abordados os aspectos de adequação da transmissão auxiliar para inserção no sistema de transmissão de potência do trator.

#### **F.2 Estudo da Transmissão do Trator**

A figura F.1 mostra uma vista representativa da transmissão mecânica usada num trator comercial de seis relações de transmissão, divididas em faixas alta e baixa. Os sub-

sistemas adicionais foram omitidos por simplicidade, como por exemplo, as engrenagens de saída para acionamento das rodas frontais e a tomada de força (PTO – *Power Take Off*).

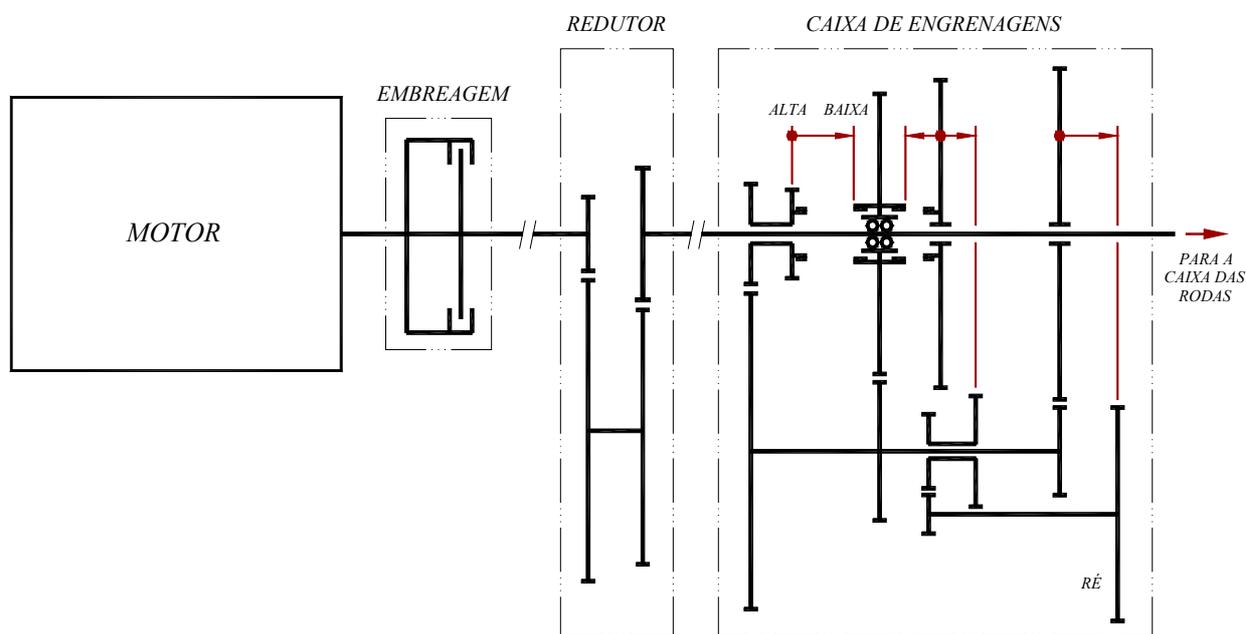


Figura F.1 – Transmissão mecânica de seis relações de um trator comercial [Agrale, 2009].

No processo de dimensionamento das engrenagens de uma transmissão desse tipo são considerados dois critérios: *i*) a potência fornecida pelo motor e *ii*) a capacidade de tração dos pneus. O sistema mostrado na figura 5.1 apresenta uma mudança na razão de velocidades, do primeiro para o segundo par de engrenagens atuantes, de mais de 57 %. No outro lado da faixa de trabalho, da 5ª para a 6ª relação, esta alteração é maior que 68 %. Desta forma, dentro da faixa de trabalho correspondente a uma das relações de transmissão, o ponto de operação nas curvas de torque e potência do motor sofre grande flutuação. Em outras palavras, a faixa de trabalho correspondente a cada relação de velocidades é muito ampla, tornando difícil a operação em torno do ponto ótimo de potência e consumo do motor. Levando em consideração apenas este aspecto, seria interessante que a faixa global de trabalho fosse dividida em maior número de etapas (oito, dez ou mais relações de velocidade). Contudo, aumentar o número de pares de engrenagens na transmissão atual acarretaria custo maior e, sendo estas relações comandadas manualmente, menor conforto ao operador.

A instalação de uma transmissão auxiliar, composta por engrenagens faciais, poderia estender a faixa de operação do trator. Por outro lado, a possibilidade de operação automática desta transmissão auxiliar não influenciaria no conforto do operador durante o trabalho.

### F.3 Requisitos de Projeto da Transmissão e Decisões Preliminares

O estudo da transmissão mostrada na figura 1 e dos dados de torque e potência do motor permitiu a definição preliminar de alguns requisitos que devem ser atendidos, quais sejam:

a) Potência máxima: 22 kW a 3000 rpm

b) Torque máximo: 70 Nm a 2250 rpm

c) Número de relações de velocidade desejada:

Optou-se por três relações de velocidades: uma redução e uma ampliação na ordem de 15 a 30% e uma relação 1:1. Desta forma, proporciona-se dois valores de razão de velocidades adicionais entre duas relações consecutivas do sistema atual. O número global de relações passaria de seis para dezoito e a faixa de operação também seria ampliada.

d) localização do redutor facial no fluxo de potência do trator:

Como o redutor facial apresenta inércia elevada, devido ao diâmetro das coroas, deve ser instalado numa parte do fluxo de potência entre motor e rodas em que esta inércia seja admitida ou até mesmo desejada. Por meio da figura 5.1, observa-se que os pontos onde este redutor pode ser instalado estão entre o motor e a embreagem, entre a embreagem e o redutor e, por fim, entre o redutor e a caixa de engrenagens da transmissão. O ponto escolhido foi o segundo, em função da proteção contra picos de carga e do próprio motor fornecido pela embreagem, bem como da facilidade de instalação no trator (há um eixo-cardã entre a embreagem e o redutor, o qual poderia ser facilmente modificado em seu comprimento).

e) diâmetro das coroas:

Como a carcaça externa do redutor, sobre na qual será instalada a caixa da transmissão facial, apresenta uma dimensão de 320 mm, tomou-se como referência, para o dimensionamento da faixa intermediária das coroas (faixa de relação 1:1), um diâmetro de 240 mm. Isto proporciona um diâmetro total do sistema na ordem de 300 a 380 mm, para o qual há espaço no berço do trator. Desta forma, busca-se adotar valores elevados nos raios das coroas, de modo a permitir que dentes de pequenas dimensões possam transmitir os valores máximos de torque.

Observa-se, por meio da descrição dos requisitos (d) e (e), a importância do aspecto de facilidade de montagem da transmissão sobre o trator, com o mínimo de alterações nos componentes e estrutura hoje existentes.

Quanto à forma dos pinhões, deu-se preferência ao uso de dentes retos, ao invés de cônicos, em todas as faixas de operação. Desta forma, a geração dos dentes, tanto nos pinhões

quanto nas coroas, resulta consideravelmente facilitada. Ao longo do desenvolvimento do protótipo, descrito no capítulo 4, observou-se que o uso de faixas de dentes cônicos é aconselhado apenas em casos especiais, nas faixas mais internas das coroas, onde o ângulo de conicidade proporciona uma forma mais regular nos dentes.

Por fim, determinou-se que o processo de dimensionamento deve levar em conta a operação de um trator agrícola em condições severas. As engrenagens utilizadas em transmissões para o setor agrícola representam casos extremos pois, se por um lado o motor apresenta elevada vibração em operação, por outro lado a carga apresenta picos e grande flutuação. Além disso, os pinhões intermediários operam em velocidades elevadas. Por esse motivo, a escolha adequada de material, tratamento térmico e de qualidade de fabricação, bem como as considerações de um número elevado de ciclos de carga admissível e alta confiabilidade, são prioridades.

#### **F.4 Procedimento de Análise das Engrenagens**

Dudley, 1994, ao comparar as transmissões faciais com as cilíndricas, afirma que:

“As fórmulas para determinar as dimensões de um pinhão para rodar com uma engrenagem facial não são diferentes daquelas para o dimensionamento de um pinhão que irá rodar com uma engrenagem numa transmissão de eixos paralelos. Os valores de ângulo de pressão e passos são semelhantes aos valores usuais das engrenagens cilíndricas de dentes retos ou helicoidais”.

Apesar dos pinhões intermediários não contribuírem para o valor final da relação de transmissão, o fluxo de potência passa por eles. Devido ao diâmetro pequeno, ao perfil mais delgado dos dentes, à velocidade elevada e ao grande número de ciclos de carga, os pinhões se tratam dos componentes críticos da transmissão proposta.

Antes de apresentar a forma de dimensionamento adotada, é importante se deter sobre alguns aspectos cinemáticos, importantes para a determinação da forma dos dentes e, em consequência, da vida útil das engrenagens envolvidas. Como observado no capítulo 2, a forma dos dentes das engrenagens faciais é complexa, aparentando ser distorcida. Ou seja, apesar da superfície de contato dos dentes da coroa ser o envelope à família de curvas evolventes dos dentes do pinhão, gerado pelo movimento engrenado, seu perfil não é uma curva evolvente. Além disso, as transmissões faciais apresentam um valor variável do ângulo de pressão no sentido radial da coroa (axial no pinhão).

Como visto no capítulo 2, devido à forma característica dos dentes das engrenagens faciais, dois fenômenos de singularidade costumam servir de parâmetro para delimitar a largura destes dentes: *i*) o raio interno da coroa é definido pelo ponto em que os dentes começam a

apresentar o fenômeno de interferência (que nas transmissões faciais é muito acentuado em relação às outras transmissões) e *ii*) o raio externo da coroa é delimitado pelo ponto onde as faces opostas dos dentes se encontram, formando um cume. Ambas as singularidades representam regiões em que o nível das tensões é elevado e, portanto, costuma-se utilizar uma largura de dente menor do que a diferença entre os raios mínimo (de interferência) e máximo (de encontro de faces opostas dos dentes). Portanto, no sistema de transmissão proposto, a largura dos dentes do pinhão é definida pela respectiva largura dos dentes da coroa. Ou seja, o processo de dimensionamento dos dentes do pinhão tem como dado de entrada uma largura de dente pré-definida.

A determinação da proporção dos pinhões, dos materiais e tratamentos termo-químicos, bem como dos aspectos de qualidade e fabricação das engrenagens, envolve a manipulação de grande quantidade de informações. Para apoiar o processo de decisão sobre esses aspectos, um algoritmo baseado na norma AGMA foi implementado no software MATLAB [AGMA 908-B89, 1999; AGMA 913-A98, 1998; ANSI/AGMA 2004-B89,1989]. Tal algoritmo, mostrado no apêndice D, leva em consideração os aspectos de velocidade, carregamento e fatores geométricos que influenciam no desempenho e vida útil do sistema.

Apesar deste algoritmo de apoio ao projeto fornecer flexibilidade ao processo de dimensionamento dos pinhões, as proporções finais das engrenagens da transmissão podem sofrer grande alteração por meio da mudança dos dados de entrada. Desta forma, um processo de otimização pode ser efetuado, estando o grau de otimização associado ao tempo disponível e à experiência do projetista para avaliar a influência de cada um dos parâmetros de entrada.

Os dados de entrada adotados para o dimensionamento do pinhão estão mostrados na tabela F.1, onde as informações e decisões tomadas preliminarmente, explanadas na seção 3, foram traduzidas em parâmetros de dimensionamento dos pinhões.

Para as condições de operação e material especificados, uma largura de dentes de 16 mm e um módulo de 1,5 mm, para a faixa intermediária do pinhão, são suficientes e adequados. A partir do módulo e do raio desta faixa intermediária (pré-estabelecido em função do espaço disponível para a transmissão), tornou-se possível determinar o número de 160 dentes na faixa intermediária da coroa.

Algumas considerações devem ser colocadas a respeito dos dados da tabela 1: *i*) o número de dentes do pinhão foi previamente estabelecido, por um lado tentando evitar o fenômeno de interferência e, ao mesmo tempo, buscando obter um diâmetro primitivo pequeno, devido à alta velocidade de operação; *ii*) a velocidade do pinhão foi determinada num processo iterativo, pois seu valor é função do módulo; *iii*) a potência é, teoricamente, dividida entre o número de pinhões intermediários, contudo, levando em consideração imprecisões de fabricação,

adotou-se um número de três pinhões no processo de dimensionamento; *iv*) a largura do pinhão foi comparada, durante o processo iterativo de análise, com a diferença entre os raios limites interno e externo para a coroa (correspondentes à presença de interferência e encontro de faces opostas dos dentes).

Tabela F.1 – Dados de entrada para dimensionamento do pinhão na faixa intermediária.

potência	22 kW
velocidade angular	coroa de entrada: 314,2 rad/s (3000 rpm) pinhão: 2792,53 rad/s (26667 rpm)
ângulo de pressão	25°
material dos pinhões	ASTM 4340 – grau 1 – temperado e revenido (350 Brinell)
material das coroas	ASTM 4340 – grau 1 – temperado e revenido (300 Brinell)
número de dentes do pinhão	18
número de pinhões	5 (3 para o processo de dimensionamento)
processo de lapidação	não
número de qualidade AGMA	8 (dentes retificados no pinhão e coroa)
coroamento dos dentes	não
característica da carga	choques intensos (aplicação agrícola)
característica do motor	vibração intensa
confiabilidade	0,99
temperatura estimada	120°C
número de ciclos de tensão	1E12

O mesmo procedimento foi adotado para o dimensionamento das faixas externa e interna da coroa e pinhão. Por considerações de fabricação, os mesmos valores de módulo e de largura dos dentes da faixa intermediária foram adotados para as demais.

Por meio dos algoritmos de dimensionamento (anexo D) e de auxílio à definição da geometria do pinhão, apresentado no anexo E, foi possível determinar os ângulos entre eixos e a proporção dos dentes para todas as faixas de trabalho. O número de dentes obtido, respectivamente, para as faixas interna e externa foi de 145 e 175 dentes. O aspecto final das coroas e pinhões é mostrado na figura F.2.



Figura F.2 – Aspecto final das coroas e pinhões para a transmissão a ser aplicada no trator.

Os valores finais para a razão de velocidades são apresentados na tabela F.2. Os sinais negativos representam a inversão de velocidade.

Tabela F.2 – Valores de razão de velocidades obtidos.

n <sup>o</sup> relação	número de dentes entrada : saída	Razão
1	145 : 175	-1,207
2	160 : 160	-1
3	175 : 145	-0,829

Como exemplo, considerando que a atual transmissão do veículo apresenta o primeiro par de engrenagens com razão de velocidades  $m_G = 9,62$ , em associação com o sistema proposto, este valor pode ser alterado para 11,61 (na primeira relação), 9,62 (na segunda relação) e 7,97 (na terceira relação). Já o segundo par de engrenagens apresenta uma razão de velocidades  $m_G = 5,55$ , a qual, multiplicada pela 1<sup>a</sup> relação da transmissão proposta, passa a ser  $m_G = 6,7$ . Este resultado é mostrado na tabela F.3.

Tabela F.3 – Estudo comparativo dos valores de razão de velocidades obtidos.

Transmissão atual	-	1 <sup>a</sup> relação	-	-	2 <sup>a</sup> relação
	-	9,62	-	-	5,55
Transmissão atual + transmissão proposta	1 <sup>a</sup> relação reduzida	1 <sup>a</sup> relação	1 <sup>a</sup> relação ampliada	2 <sup>a</sup> relação reduzida	2 <sup>a</sup> relação
	11,61	9,62	7,97	6,7	5,55

Portanto, observa-se que a faixa entre a 1ª e 2ª relações do veículo foi seccionada em três partes e, além disso, passa a existir uma razão de velocidades que amplia a faixa global de operação (1ª relação reduzida). Esta ampliação da faixa de trabalho também ocorre na 6ª e última relação do veículo.

### F.5 Mecanismo para Alteração da Razão de Velocidades

Como descrito no capítulo 3, se os movimentos de nutação e deslocamento axial relativo de pinhões e coroas for suficientemente rápido, não há necessidade de mecanismos de sincronismo no sistema proposto. Contudo, atuadores extremamente rápidos demandam dispositivos de amortecimento de final de curso, para absorver impactos e ruído. Tais atuadores merecem um estudo criterioso, ainda a ser implementado. De qualquer forma, o mecanismo de mudança da relação de velocidades, adotado no desenvolvimento do protótipo, serviu de referência para a aplicação na transmissão auxiliar proposta para o trator em estudo.

Atuadores pneumáticos ou elétricos, associados a alavancas, no caso do movimento de nutação, podem oferecer a velocidade necessária (da ordem de décimos de milissegundos). Contudo, pela forma construtiva simples e pela operação extremamente rápida, deu-se preferência ao uso de solenóides, na transmissão a ser montada no veículo em análise, tanto para o movimento de nutação como para os deslocamentos axiais necessários.

### F.6 Aspecto Final da Transmissão – Vista dos Componentes Principais

A figura F.3 mostra, numa vista explodida, os componentes internos do sistema proposto, para acoplamento ao trator especificado.

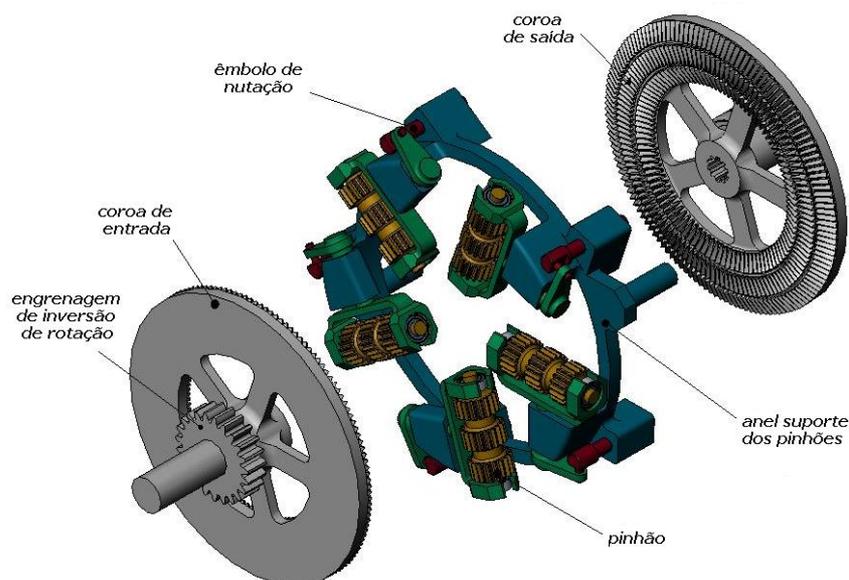


Figura F.3 – Componentes internos da transmissão projetada.

Alguns componentes adicionais são apresentados na figura F.3: o anel de suporte dos pinhões, os suportes dos pinhões (em forma de garfo) e os êmbolos associados às bobinas solenóides que efetuam o movimento de natação dos pinhões. Uma engrenagem adicional é associada ao eixo de entrada para efetuar a inversão do movimento de giro da transmissão.

A figura F.4 apresenta uma vista de montagem do sistema.

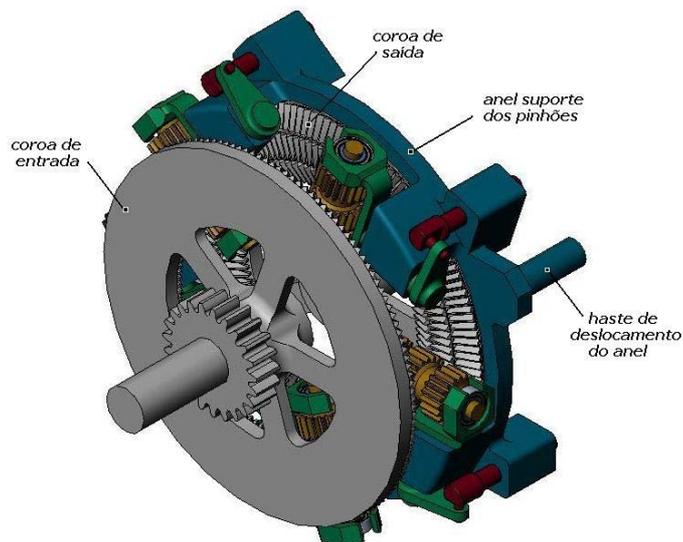


Figura F.4 – Vista de montagem dos principais componentes da transmissão.

Observa-se que o anel de suporte dos pinhões é externo à coroa de saída, sendo deslocado axialmente por duas hastas, associadas a mancais de esferas e solenóides (não representados na figura). Um solenóide também será montado em torno do eixo da coroa de entrada.

## F.7 Comparação entre os Requisitos de Projeto e o Projeto Preliminar

Na seção 3.3 foram listados requisitos e decisões tomadas preliminarmente em função das características do projeto em si. Realizado o dimensionamento dos principais componentes e determinada uma configuração para a transmissão a ser inserida no veículo em estudo, torna-se possível estabelecer uma comparação entre metas estabelecidas e resultados obtidos. Como o trabalho completo de detalhamento do projeto não está concluído e, por outro lado, não há ainda um protótipo de produto para realização de testes, este estudo comparativo confronta as metas estabelecidas com os parâmetros adotados para o dimensionamento. A comprovação e validação completa do produto poderá ocorrer apenas com a construção e submissão a testes de um protótipo em dinamômetro e, posteriormente, em situação de campo. Tais atividades não são o escopo do presente trabalho, porém, tratam-se de temas importantes que serão avaliados em trabalhos futuros. O estudo comparativo é mostrado a seguir:

## a) Quanto à carga de trabalho:

- Meta estabelecida: 22 kW a 3000 rpm na coroa de entrada
- Parâmetros adotados no dimensionamento dos pinhões na faixa intermediária:
  - potência: 22 kW
  - rotação do pinhão na faixa intermediária: 26667 rpm (para um pinhão de 18 dentes e uma coroa de 160 dentes)
  - número de pinhões que compartilham a carga: 3 (na realidade são 5)
  - considerações sobre o fator de carregamento  $K_o$  (AGMA):
    - característica considerada para a carga: choques intensos
    - característica considerada para o motor: vibração intensa
    - fator de carregamento  $K_o$  resultante: 2,25
  - considerações de material e de fabricação das engrenagens:
    - material especificado: ASTM 4340 – grau 1 – temperado e revenido (350 Brinell)
    - material especificado: ASTM 4340 – grau 1 – temperado e revenido (300 Brinell)
    - fabricação:
      - número de qualidade AGMA: 8 (correspondente a um processo de retífica sobre os dentes)
      - coroamento: não (porém, a especificação de desenho será pela realização do coroamento, desde que haja fornecedor que possa executá-lo).

## b) Outros aspectos operacionais e de vida útil considerados:

- Número de ciclos de tensão sobre o pinhão:  $1 \times 10^{12}$  ciclos
- Pode-se considerar vida infinita, pois, se o pinhão operar continuamente a 26667 rpm, 24 horas por dia, atingirá este número de ciclos apenas após 70 anos.
- confiabilidade desejada: 0,99
- temperatura de operação estimada: 120°C

O coeficiente de segurança, segundo procedimento AGMA, obtido para o pinhão pelo critério de flexão dos dentes é de 1,8 e, para o critério de fadiga de contato nas faces dos dentes, 1,3.

Desta forma, observa-se que os dados de entrada adotados no processo de dimensionamento das coroas e pinhões premiam uma operação segura e uma vida útil elevada.

## c) Demais metas:

Todos os requisitos relacionados à geometria do pinhão e coroa, bem como ao processo de fabricação e à montagem no veículo foram contempladas no projeto.

Desta forma, observa-se que o sistema apresenta todas as características previamente estimadas: elevada capacidade de carga numa estrutura relativamente compacta; porém, com elevada carga de inércia. A robustez associada às engrenagens faciais, bem como o processo relativamente conservativo de dimensionamento adotado, podem ser considerados indícios de um dispositivo de alto nível de confiabilidade. Contudo, um protótipo do produto deve ser fabricado, montado e testado em dinamômetro e, posteriormente, em aplicação de campo para confirmar todos os aspectos de projeto, segurança e operação.