

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**ILCA MARIA FERRARI GHIGGI**

**CONTROLE DE SISTEMAS COM  
ATRASOS NO TEMPO NA PRESENÇA  
DE ATUADORES SATURANTES**

Porto Alegre  
2008

**ILCA MARIA FERRARI GHIGGI**

**CONTROLE DE SISTEMAS COM  
ATRASOS NO TEMPO NA PRESENÇA  
DE ATUADORES SATURANTES**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação e Instrumentação Eletro-Eletrônica

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr.

Porto Alegre  
2008

**ILCA MARIA FERRARI GHIGGI**

**CONTROLE DE SISTEMAS COM  
ATRASOS NO TEMPO NA PRESENÇA  
DE ATUADORES SATURANTES**

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Orientador: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr., UFRGS  
Doutor pela Universidade Paul Sabatier - Toulouse, França.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres, UNICAMP  
Doutor pela Universidade de Paul Sabatier – Toulouse, França.

Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho, PUCRS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil.

Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal de Santa Catarina – Florianópolis, Brasil.

Prof. Dr. Walter Fetter Lages, UFRGS  
Doutor pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica – São José dos Campos, Brasil.

Prof. Dr. Renato Ventura Bayan Henriques, UFRGS  
Doutor pela Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte, Brasil.

Coordenador do PPGEE: \_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Arturo Suman Bretas

Porto Alegre, junho de 2008.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho a meu esposo Emerson e aos meus pais, em especial pela dedicação e apoio em todos os momentos difíceis.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, PPGEE, pela oportunidade de realização de trabalhos em minha área de pesquisa.

Ao meu orientador João Manoel Gomes da Silva Jr., por ter transmitido seus ensinamentos, pela paciência e pelas orientações feitas até o presente momento.

Aos membros da Banca Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres, Prof. Dr. Daniel Ferreira Coutinho, Prof. Dr. Alexandre Sanfelice Bazanella, Prof. Dr. Walter Fetter Lages, Prof. Dr. Renato Ventura Bayan Henriques, Prof. Dr. Carlos Eduardo Pereira e Prof. Dr. Romeu Reginatto, por terem aceito ao convite, feito por mim e pelo Prof<sup>o</sup> João Manoel, para compor a banca de defesa da tese.

Aos colegas do PPGEE pelo seu auxílio nas tarefas desenvolvidas durante o curso e apoio nas horas difíceis.

À CAPES pela provisão da bolsa de doutorado.

E principalmente a Deus, por ter me feito filha perfeita.

## RESUMO

Neste trabalho, aborda-se o problema de estabilização de sistemas lineares com atrasos nos estados e sujeitos a ação de atuadores saturantes. Em particular, são propostos métodos para a síntese de leis de controle estabilizantes do tipo realimentação de estados, realimentação dinâmica de saída, bem como para a síntese de compensadores de “*anti-windup*” estáticos e dinâmicos.

Como objetivo de síntese consideram-se duas possibilidades, que o sistema esteja livre ou não de perturbações. No primeiro caso, determina-se uma lei de controle estabilizante de tal forma a maximizar um conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{D}$ . No caso do conjunto  $\mathcal{D}$  ser dado, a lei de controle estabilizante que se determina, deve garantir estabilidade assintótica do sistema em malha-fechada para toda condição inicial pertencente a  $\mathcal{D}$ . No segundo caso, considerando-se os problemas de atenuação e tolerância à perturbação, as leis de controle são obtidas com o intuito de minimizar o ganho- $\mathcal{L}_2$  entre a perturbação e a saída regulada do sistema ou de maximizar o limite superior da norma  $\mathcal{L}_2$  das perturbações admissíveis, para as quais garante-se que as trajetórias do sistema em malha-fechada permaneçam limitadas.

Condições locais e globais de estabilização são obtidas a partir da teoria de Lyapunov e da modelagem por zona-morta da saturação, com a conseqüente aplicação de uma condição de setor generalizada. Em se tratando de sistemas contínuos, para que as condições obtidas sejam dependentes do atraso, combinam-se estas ferramentas com a representação do sistema através de sistema descritor. Já no caso de sistemas discretos, combinam-se estas duas ferramentas com a utilização do Lema de Finsler. A utilização destas ferramentas possibilita que as condições obtidas sejam na forma de desigualdades matriciais lineares (LMI's) ou quase lineares, permitindo assim, a formulação de problemas de otimização convexos.

**Palavras-chave:** Sistemas de controles lineares, atraso no tempo, saturação, “*anti-windup*”, controladores dinâmicos, LMIs.

## ABSTRACT

In this work, we deal with the problem of stabilization of linear systems with delayed state and saturating inputs. Specifically, methods are proposed for the synthesis of stabilizing control laws of state feedback and dynamic output feedback types, as well as for the synthesis of static and dynamic anti-windup compensators.

Regarding synthesis objectives two possibilities were considered, that the system is free or not of disturbances. In the first case, the stabilizing control law is computed considering the maximization of the set of admissible initial conditions  $\mathcal{D}$ . In the case the set  $\mathcal{D}$  is given, this stabilizing control law should guarantee asymptotic stability of the closed-loop system. In the second case, considering the problems of tolerance and disturbance attenuation, the control laws are proposed in order to minimize the  $\mathcal{L}_2$  gain between to disturbance and the regulated output of system, or in order to maximize the bound on the admissible disturbances for which the trajectories are bounded.

Local and global conditions for stabilization are obtained from the theory of Lyapunov and the modeling of the saturation by means of deadzone nonlinearities and the consequent application of a modified sector condition. For continuous systems, in order to obtain delay dependent conditions, these tools are combined with descriptor approach. In the case of discrete-time systems, these two tools are combined with the utilization of Finsler's Lemma. The use of these leads to the conditions in the form of Linear Matrix Inequalities (LMI's) or almost linear, allowing the formulation of convex optimization problems.

**Keywords:** linear control systems, time delay, saturation, anti-windup, dynamic controllers, LMI's.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES</b> . . . . .	10
<b>LISTA DE TABELAS</b> . . . . .	11
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> . . . . .	12
<b>1 INTRODUÇÃO</b> . . . . .	14
<b>2 RESULTADOS PRELIMINARES E FERRAMENTAS MATEMÁTICAS</b> . . . . .	19
<b>2.1 Estabilidade de Sistemas com Atrasos</b> . . . . .	19
2.1.1 Teoremas de Estabilidade no Sentido de Lyapunov . . . . .	20
2.1.2 Condições de Estabilidade Dependentes x Independentes do Atraso . . . . .	21
2.1.3 Estabilidade via Lema de Finsler . . . . .	24
2.1.4 Estabilidade Entrada-Estado do Sistema com Perturbação . . . . .	25
2.1.5 Estabilidade Entrada-Saída . . . . .	26
<b>2.2 Estabilidade Absoluta de Sistemas do tipo Lure</b> . . . . .	27
2.2.1 Problema de Lure . . . . .	27
<b>2.3 Modelagens de Sistemas com Saturação</b> . . . . .	28
2.3.1 Modelagem Politépica . . . . .	29
2.3.2 Modelagem por Não-linearidade do tipo Zona-morta . . . . .	31
<b>3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASOS E SATURAÇÃO DE CONTROLE</b> . . . . .	34
<b>3.1 Introdução</b> . . . . .	34
3.1.1 Breve Estado da Arte . . . . .	34
<b>3.2 Análise de Estabilidade e Estabilização</b> . . . . .	36
3.2.1 Abordagem Proposta em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000) . . . . .	37
3.2.2 Abordagem Proposta em (CAO; LIN; HU, 2002) . . . . .	39
<b>3.3 Problema de Tolerância e Atenuação à Perturbação</b> . . . . .	43
3.3.1 Formulação do Problema . . . . .	43
3.3.2 Abordagem Proposta em (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) . . . . .	43
<b>3.4 Problema de “Anti-windup”</b> . . . . .	47
3.4.1 Formulação do Problema . . . . .	47
3.4.2 Abordagem Proposta em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004) . . . . .	49
<b>3.5 Conclusão</b> . . . . .	51

<b>4</b>	<b>ESTABILIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS</b>	53
4.1	Introdução	53
4.2	Estabilização Interna	53
4.2.1	Condições Independentes do Atraso	54
4.2.2	Condições Dependentes do Atraso	58
4.2.3	Problemas de Otimização	63
4.3	Tolerância e Atenuação de Perturbações	66
4.3.1	Resultados Teóricos	66
4.3.2	Problemas de Otimização	71
4.4	Exemplos Numéricos	72
4.5	Conclusão	75
<b>5</b>	<b>ESTABILIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA</b>	76
5.1	Introdução	76
5.2	Controlador Dinâmico Não Racional	76
5.2.1	Preliminares	76
5.2.2	Síntese de Realimentação Dinâmica Estabilizante	78
5.2.3	Problemas de Otimização	82
5.3	Atenuação e Tolerância a Perturbações	84
5.3.1	Resultados Teóricos	84
5.3.2	Problemas de Otimização	86
5.4	Exemplos Numéricos	86
5.5	Conclusão	91
<b>6</b>	<b>SÍNTESE DE COMPENSADORES DE “ANTI-WINDUP”</b>	92
6.1	Introdução	92
6.2	“Anti-Windup” Estático	92
6.2.1	Formulação do Problema	93
6.2.2	Resultados Teóricos	95
6.2.3	Problemas de Otimização	98
6.2.4	Exemplo Numérico	99
6.3	“Anti-Windup” Dinâmico	100
6.3.1	Formulação do Problema	100
6.3.2	Resultados Teóricos	102
6.3.3	Problemas de Otimização	104
6.3.4	Exemplo Numérico	105
6.4	Conclusão	106
<b>7</b>	<b>ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DISCRETOS COM ATRASOS VARIANTES NO TEMPO E SATURAÇÃO NOS ATUADORES</b>	107
7.1	Introdução	107
7.2	Formulação do Problema	108
7.3	Estabilização de Sistemas Discretos com Atrasos Variantes no Tempo	109
7.3.1	Caso Atrasos Variantes no Tempo e Lei de Controle $v_k = Kx_k + K_d x_{k-\tau_k}$	109
7.3.2	Caso Atrasos Variantes no Tempo e Lei de Controle $v_k = Kx_k$	113

<b>7.4</b>	<b>Estabilização de Sistemas Discretos com Atraso Incerto e Invariante no Tempo</b>	114
<b>7.5</b>	<b>Problemas de Otimização</b>	115
7.5.1	Maximização do Conjunto $C_\phi$	115
7.5.2	Maximização de $\bar{h}-\underline{h}$	116
<b>7.6</b>	<b>Exemplos Numéricos</b>	116
<b>7.7</b>	<b>Conclusão</b>	117
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	119
<b>8.1</b>	<b>Perspectivas de Trabalhos Futuros</b>	121
<b>8.2</b>	<b>Publicações</b>	122
	<b>REFERÊNCIAS</b>	124

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1:	Conexão realimentada de um sistema linear e um elemento não-linear.	28
Figura 2:	<i>Gráficos de setor de não-linearidades.</i>	28
Figura 3:	Função zona-morta.	31
Figura 4:	<i>Comportamento do sistema em malha-fechada utilizando controlador C-1 ou C-2.</i>	89
Figura 5:	<i>Comportamento dinâmico do sistema em malha-fechada utilizando os controladores C-3 e C-4.</i>	90
Figura 6:	Esquema “ <i>anti-windup</i> ”.	93
Figura 7:	<i>Comportamento do sistema com e sem compensador de “anti-windup”.</i>	106

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Influência do atraso no raio do conjunto $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ para o caso independente do atraso. . . . .	72
Tabela 2:	Influência do atraso no raio do conjunto $\mathcal{B}_{2\tau}(\delta)$ para o caso dependente do atraso. . . . .	73
Tabela 3:	Influência do atraso $\tau = 1.5$ no raio do conjunto $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ . . . . .	73
Tabela 4:	Influência do atraso $\tau = 1$ no raio do conjunto $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ . . . . .	74
Tabela 5:	Influência do atraso $\tau = 1.5$ no raio do conjunto $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ . . . . .	74
Tabela 6:	Relação do atraso com a norma $\mathcal{L}_2$ e com o ganho- $\mathcal{L}_2$ . . . . .	74
Tabela 7:	Influência do atraso no raio do conjunto $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ . . . . .	87
Tabela 8:	Relação entre o limite para a norma $\mathcal{L}_2$ e o limite superior para o ganho- $\mathcal{L}_2$ . . . . .	87
Tabela 9:	Relação entre a perturbação e o ganho- $\mathcal{L}_2$ . . . . .	100
Tabela 10:	Tabela comparativa entre o limite para perturbação admissível ( $\varpi$ ) e a atenuação à perturbação ( $\sqrt{\gamma}$ ). . . . .	105
Tabela 11:	Relação entre intervalo de atraso e raio da bola de estabilidade do Exemplo 6. . . . .	117
Tabela 12:	Relação entre o de atraso e raio da bola de estabilidade do Exemplo 7. . . . .	117

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\triangleq$	definido como.
$\forall$	para todo.
$\in$	pertence ao.
$\subset$	subconjunto de.
$\rightarrow$	tende para.
$\Rightarrow$	implica.
$\Sigma$	somatório.
IA	independente do atraso.
DA	dependente do atraso.
$R$	conjunto dos números reais.
$R^n$	conjunto de vetores reais de dimensão $n$ .
$R^{m \times n}$	conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$ .
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais.
$I$	matriz identidade de dimensão apropriada.
$I_n$	matriz identidade de dimensão $n \times n$ .
$A'$	matriz transposta de $A$ .
$A > 0$	matriz simétrica definida positiva.
$A > B$	significa que $A - B$ é uma matriz simétrica definida positiva.
$Diag(\cdot)$	matriz diagonal com elementos da diagonal principal especificados em $(\cdot)$ .
$\lambda(P)$	autovalor da matriz $P$ .
$\lambda_{max}(P)$	autovalor máximo da matriz $P$ .
$\lambda_{min}(P)$	autovalor mínimo da matriz $P$ .
$\bar{\sigma}(P)$	máximo valor singular da matriz $P$ .
$\ \cdot\ $	norma vetorial Euclidiana.
$\ \cdot\ _c$	norma do sup de uma função.

- $x_t(\cdot)$  corresponde a restrição de  $x(\cdot)$ , no instante  $t$ , ao intervalo  $[t - \tau, t]$ , trasladado a  $[-\tau, 0]$ , ou seja,  $x_t = x(t + \theta)$ ,  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ .
- $\|x_{t_0}\|_c$  supremo da norma  $\|x(t_0 + \theta)\|$ , sendo  $\theta \in [-\tau, 0]$ .
- $\mathcal{C}_\tau$  espaço de Banach das funções vetoriais contínuas  $x_{t_0}$ , mapeadas do intervalo  $[-\tau, 0]$  em  $\mathfrak{R}^n$ , ou seja,  $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathfrak{R}^n)$ .
- $\mathcal{C}_\tau^v$  conjunto definido por  $\mathcal{C}_\tau^v = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau; \|\phi\|_c < v, v > 0\}$ .
- $\mathcal{L}_2^q$  espaço das funções quadrado integráveis, definidas de  $[0, \infty)$  em  $\mathfrak{R}^q$ , ou seja,  $\|x\|_2^2 = \int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt$ .
- $\partial \mathcal{B}$  fronteira do conjunto  $\mathcal{B}$ .
- $\mathcal{X}_0$  região de atração,  $\mathcal{X}_0 = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau; \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \phi) = 0\}$ .
- $\mathcal{D}$  conjunto de condições iniciais.
- $\mathcal{B}_\tau(\delta)$  conjunto das condições iniciais admissíveis, i.e.,  $\mathcal{B}_\tau(\delta) = \{\phi \in \mathcal{D}; \|\phi(\theta)\|^2 < \delta, \forall \theta \in [-\tau, 0]\}$ .
- $\mathcal{E}(P, \rho)$  conjunto elipsoidal, i.e.,  $\mathcal{E}(P, \rho) = \{x \in \mathfrak{R}^n; x'Px \leq \rho\}$ .
- $\mathcal{S}$  considerando-se matrizes  $K$  e  $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  define-se,  $\mathcal{S} = \{x \in \mathfrak{R}^n; |(K - G)_{(i)}x| < u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}$
- $\phi_k$  conjunto dos termos da seqüência vetorial  $\phi_k$ , no instante  $k$ , definida no intervalo  $[-\tau, 0]$  em  $\mathfrak{R}^n$ , ou seja,  $\phi_k = \{\phi(k - \tau), \phi(k - \tau + 1), \dots, \phi(k)\}$ .
- $C_\tau$  é o espaço das seqüências vetoriais  $\phi_k$ , mapeadas do intervalo  $[-\tau, 0]$  em  $\mathfrak{R}^n$ , ou seja,  $C_\tau([-\tau, 0], \mathfrak{R}^n)$ .
- $C_\tau^v$  conjunto definido por  $C_\tau^v = \{\phi \in C_\tau; \|\phi_k\|_d < v, v > 0\}$ .
- $\mathcal{X}_{0_k}$  região de atração,  $\mathcal{X}_{0_k} = \{\phi \in C_\tau; \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(\phi) = 0\}$ .
- $\mathcal{D}_k$  conjunto de condições iniciais.
- $\Delta \phi_k$  conjunto dos termos da variação da seqüência vetorial  $\phi_k$ , ou seja,  $\{\phi(k - \tau) - \phi(k - \tau - 1), \phi(k - \tau + 1) - \phi(k - \tau), \dots, \phi(k) - \phi(k - 1)\}$ .
- $\|\phi_k\|_d$  supremo da norma  $\|\phi(k - j)\|$ , sendo  $-\tau \leq j \leq 0$ .
- $co\{\cdot\}$  envelope de um conjunto convexo.
- $sat(\cdot)$  função saturação definida em (22).
- \* o asterisco, utilizado em matrizes simétricas, representa o respectivo elemento transposto da matriz.
- o ponto, utilizado em matrizes, representa que o elemento aí figurado não tem relevância numérica.
- designação de fim de demonstração.

# 1 INTRODUÇÃO

Com o advento da Revolução Industrial, a tecnologia passou cada vez mais a fazer parte da vida do ser humano. Este, por sua vez, exige que essas tecnologias se desenvolvam, com o objetivo de trazer-lhe maior comodidade, segurança, informação, entretenimento e comunicação, ou seja, para que produzam uma reestruturação do mundo do trabalho e do lazer. Com isso, a indústria se vê obrigada a lançar mão de equipamentos de alta tecnologia visando a busca de rendimento, produtividade, confiabilidade e desempenho. Para que estes equipamentos atinjam o objetivo esperado, faz-se necessário o desenvolvimento de técnicas de controle que levem em conta todas as particularidades do sistema físico envolvido. Neste sentido, destaca-se o interesse pelo estudo de sistemas físicos que estejam sujeitos a atrasos no tempo e saturação nos atuadores.

A saturação, em um sistema físico, nada mais é do que uma restrição de ordem tecnológica, física ou mesmo de segurança. Quando essa restrição é modelada para construir o modelo matemático do sistema, ela se traduz na limitação do sinal de controle, entre valores máximos e mínimos. Também pode se traduzir em limitações sobre as variáveis de estado do sistema. O problema de restrições sobre a amplitude do sinal de controle se faz presente em todos os sistemas de controle industriais. Como exemplos citam-se saturações que ocorrem em: válvulas proporcionais, atuadores de aquecimento e/ou resfriamento, amplificadores eletrônicos e circuitos de acionamento de motores. Muitos problemas indesejáveis podem surgir em um sistema de controle devido à saturação. Quando um sistema satura, ele passa a se comportar como se estivesse operando em malha aberta. O comportamento não-linear pode causar uma degradação significativa no desempenho do sistema, tanto em regime permanente, com a perda do seguimento de referência ou a não atenuação assintótica de perturbações constantes, como no período transitório, com o aparecimento de respostas lentas e oscilatórias. Outro fato que se pode observar caso tal não-linearidade não for levada em conta, é um efeito “*windup*” do controlador ou ainda a ocorrência de ciclos limites, de instabilidade e de pontos de equilíbrio parasitas.

Por outro lado, o atraso no tempo é uma característica comumente encontrada em processos biológicos, econômicos, físicos, químicos, fisiológicos, de dinâmicas populacionais e ainda em diversos sistemas de engenharia, tais como sistemas mecânicos, sistemas elétricos de potência, sistemas de telecomunicações, redes de comunicação de dados, etc. A origem do atraso no tempo nestes sistemas pode ser intencional, quando é introduzido de maneira a melhorar o desempenho do sistema, ou não intencional, quando o atraso tem origem em uma característica intrínseca do sistema. É um fato bastante conhecido que a presença de atraso no tempo em sistemas de controle freqüentemente causa instabilidade ou um desempenho indesejável (veja (KOLMANOVSKII; RICHARD, 1999), (NICULESCU, 2001, vol. 269), (RICHARD, 2003) e suas referências).

A maioria dos sistemas citados acima, além de apresentarem atrasos no tempo, está

sujeita ainda a restrições nos atuadores. Tais fenômenos podem gerar conseqüências desastrosas para o sistema de controle, como o surgimento de ciclos limites, pontos de equilíbrio parasitas e instabilidade do sistema em malha-fechada. Dessa forma, o desenvolvimento de técnicas de análise e síntese de sistemas de controle apresentando atrasos e sujeitos à saturação nos atuadores tornou-se cada vez mais alvo de preocupação para diversos pesquisadores, como se observa por exemplo nos seguintes trabalhos: (CHEN; WANG; LU, 1988), (TISSIR; HMAMED, 1992), (OUCHERIAH, 1996), (NICULESCU; DION; DUGARD, 1996), (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (CAO; LIN; HU, 2002), (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) e (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR.; GARCIA, 2004).

Com o objetivo de analisar a estabilidade destes sistemas, muitas são as abordagens empregadas. Dentre elas, pode-se citar o critério de Popov, o qual fora utilizado inicialmente para sistemas do tipo SISO (“*Single Input Single Output*”) (GLATTFELDER; SCHAUFELBERGER, 1983), o conceito de desigualdades de norma, que fora utilizado por (CHEN; WANG; LU, 1988) e (TISSIR; HMAMED, 1992), o conceito de medidas matriciais e a teoria da comparação, utilizada por (CHOU; HORNG; CHEN, 1989) no projeto de compensadores de realimentação dinâmica, o conceito de modelagem política do sistema, que fora utilizado por (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (CAO; LIN; HU, 2002) e (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003). Em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR.; GARCIA, 2004), foi apresentada uma nova metodologia para tratar a saturação, utilizando uma condição de setor generalizada, a qual abrange a condição de setor clássica aplicada a sistemas não lineares. Esta nova metodologia permitiu a formulação das condições de estabilidade na forma de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs), mesmo levando-se em conta os efeitos não lineares provocados pela saturação dos atuadores. A importância de tal formulação deve-se ao fato de que os algoritmos empregados na solução de uma LMI são, em geral numericamente eficientes, como pode ser visto em (BOYD et al., 1994).

Considerando-se a questão do atraso, dois tipos de condições de estabilidade podem ser obtidos, um de estabilidade dependente e outro de estabilidade independente do atraso. Outro fato importante em se tratando de estabilidade é o critério utilizado, ou seja, pode-se utilizar o critério de Lyapunov-Razumikhin, que utiliza uma função de Lyapunov, e o critério de Lyapunov-Krasovskii, que utiliza um funcional de Lyapunov (HALE; LUNEL, 1993).

Em relação à estabilidade de sistemas com atrasos e saturações, pode-se estar interessado em garantir:

- *Estabilidade global*; ou seja, deseja-se que as trajetórias do sistema convirjam assintoticamente para a origem, para toda condição inicial.
- *Estabilidade local*; ou seja, deseja-se que as trajetórias do sistema convirjam assintoticamente para a origem, para toda condição inicial definida em  $\mathcal{D}$ . Neste caso, define-se um *domínio de estabilidade*.

O fato de a estabilidade ser global/local pode depender muitas vezes do tipo de modelagem que é utilizado para a saturação, conforme poderá ser visto no Capítulo 2 da presente tese.

Em se tratando de sistemas que estejam sujeitos à ação de perturbações, fica praticamente impossível determinar condições de estabilidade assintótica, pois a origem do sistema pode deixar de ser um ponto de equilíbrio. Também as soluções do sistema per-

turbado podem não se aproximar da origem quando  $t \rightarrow \infty$ , dessa forma, trata-se do problema da estabilidade entrada-estado. Considerando-se que a perturbação seja limitada em norma  $\mathcal{L}_2$ , deve-se garantir que as trajetórias deste sistema permaneçam confinadas em uma determinada região, a qual esta inclusa na região de atração do sistema. Outro problema de interesse consiste na estabilidade entrada-saída. Neste caso, estuda-se o nível de atenuação e tolerância à perturbação que o sistema apresenta, também utilizando, por exemplo, a norma  $\mathcal{L}_2$ .

Outro importante problema consiste em minimizar os efeitos do “windup” (diferença entre os sinais de entrada do atuador e de saída do atuador) causados pela saturação. Como consequência do “windup”, tem-se que o sistema deixa de responder de acordo com o sinal de controle aplicado, provocando efeitos indesejáveis no desempenho do sistema. A estratégia de “anti-windup” é a adição de uma estrutura (estática ou dinâmica) a um sistema realimentado por uma lei de controle projetada, desprezando qualquer não-linearidade do atuador, a fim de eliminar a diferença entre a entrada e a saída do atuador, sempre que ela existir. A estratégia de “anti-windup” pode então ser vista como a introdução de um laço adicional de realimentação para corrigir desvios entre os dois sinais. Este tópico é a base de muitos trabalhos, dentre os quais podem-se citar (TEEL; KAPOOR, 1997), (KOTHARE; MORARI, 1999), (SAEKI; WADA, 2000), (CAO; LIN; WARD, 2002), (GRIMM; TEEL; ZACCARIAN, 2003), (GRIMM et al., 2003), (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; REGINATTO, 2002), (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004), (HU; TEEL; ZACCARIAN, 2005), (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005).

A finalidade deste documento é apresentar um estudo sobre o problema de controle de sistemas com atraso e saturação, bem como o desenvolvimento de novos métodos que possibilitem a determinação de estimativas da região de atração, a síntese de leis de controle estabilizantes, assim como a síntese de malhas de “anti-windup” para sistemas com atrasos e saturação. Implicitamente nesta proposta está o uso de técnicas de LMIs, da utilização da condição de setor generalizada e o uso de funcionais de Lyapunov-Krasovskii, na busca de novas condições teóricas ou de condições teóricas menos conservadoras que as encontradas atualmente na literatura.

O presente documento é dividido nos seguintes capítulos:

- Capítulo 2 - Apresenta-se uma breve revisão sobre os critérios de estabilidade para sistemas com atrasos, utilizando-se funcionais de Lyapunov. Deseja-se, assim, caracterizar os funcionais que serão utilizados para garantir as condições de estabilidade e a obtenção de estimativas de região de atração. Além disto, enunciam-se o Lema de Finsler, condições de estabilidade absoluta de sistemas tipo Lure, baseadas nas condições de setor clássicas e na condição de setor generalizada, a serem utilizadas para levar em conta os efeitos não lineares provocados pela saturação de atuadores. Com o objetivo de obter-se condições dependentes do atraso apresentam-se algumas formas utilizadas para reescrever o sistema, como exemplos pode-se citar sistemas escritos com atrasos distribuídos, onde utiliza-se a fórmula de Newton/Leibnitz e a representação através de sistema descritor. Apresenta-se também um índice de atenuação e tolerância à perturbação, utilizando a norma  $\mathcal{L}_2$ . Finalmente, apresentam-se duas maneiras utilizadas na literatura para modelar sistemas com saturação: politópica e por zona-morta (condição de setor).
- Capítulo 3 - Neste capítulo apresenta-se um breve estado da arte sobre a estabilidade de sistemas de controle lineares com atraso e saturação nos atuadores. Aqui

são formulados a maioria dos problemas que serão abordados nos Capítulos 4, 5, 6 e 7. Em particular, são apresentados os problemas de síntese, de tolerância e atenuação à perturbação e de “*anti-windup*”. Para cada um dos problemas formulados, alguns dos artigos encontrados na seção 3.1.1 são analisados criticamente, ou seja, é mostrado como estes problemas são resolvidos, com a finalidade de poder comparar com a resolução que se apresenta nos capítulos que seguem.

- Capítulo 4 - O objetivo deste capítulo é o de apresentar um estudo mais aprofundado para o problema de síntese, definido no Capítulo 2, ou seja, dedica-se ao estudo do problema de estabilização por realimentação de estados, tanto para o caso independente como dependente do atraso, utilizando-se o funcional de Lyapunov-Krasovskii, a função de Lyapunov-Rhazumikhin e a condição de setor generalizada, apresentados no Capítulo 2. Para poder obter condições dependentes do atraso, reescreve-se o sistema utilizando-se uma das formas apresentadas na seção 2.1.2. As condições para estabilização globais e locais que se obtêm estão em forma de LMIs. Em se tratando de estabilização local, determinam-se estimativas de regiões de atração. Considerando que o sistema esteja sujeito à perturbação, faz-se uma análise da estabilidade entrada-estado e da estabilidade entrada-saída. Para este último caso, estuda-se o nível de atenuação e tolerância à perturbação que o sistema apresenta. Utiliza-se a norma  $\mathcal{L}_2$  para ambas as análises. Com o objetivo de mostrar-se como utilizar os Teoremas apresentados no Capítulo, formulam-se problemas de otimização e apresentam-se exemplos.
- Capítulo 5 - Neste capítulo propõe-se uma metodologia de projeto de controladores dinâmicos a fim de estabilizar o sistema por realimentação de saída. O controlador que se projeta é do tipo não racional, ou seja, apresenta atrasos nos estados com a adição de um termo estático de “*anti-windup*”, com os objetivos de amenizar os efeitos negativos causados pela saturação dos atuadores e de aumentar a região de atração do sistema em malha-fechada. Como considera-se a possibilidade de atuarem perturbações que sejam limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ , objetiva-se garantir a estabilidade entrada-estado e entrada-saída. Analogamente ao Capítulo 4, formulam-se problemas de otimização e apresentam-se exemplos.
- Capítulo 6 - Neste capítulo continua-se desenvolvendo a questão da estabilização por realimentação de saída, porém, agora utilizam-se controladores estáticos e estratégias de “*anti-windup*”, com o objetivo de amenizar os efeitos negativos causados pela saturação dos atuadores e para aumentar a região de atração do sistema em malha-fechada. Considera-se neste caso um compensador dinâmico pré-calculado, desconsiderando a presença de saturação. Num primeiro momento, trata-se então do projeto de compensador estático de “*anti-windup*” acoplado a um controlador racional dado. Num segundo momento, aborda-se o problema da estabilização via controlador dinâmico não racional, também dado e, compensador dinâmico de “*anti-windup*”, o qual será projetado. Para cada um destes problemas, formulam-se condições de estabilização interna, entrada-estado e entrada-saída, para sistemas de controle com atraso e saturação nos atuadores apresentando perturbação limitada em norma  $\mathcal{L}_2$ . Também formulam-se problemas de otimização e apresentam-se exemplos.
- Capítulo 7 - Visando apresentar como trabalhar a questão da estabilização para o caso discreto, estuda-se o problema considerando-se atrasos incertos e variantes no

tempo, ou seja, atrasos que variam entre um valor mínimo e um valor máximo. Utiliza-se a abordagem de Finsler, juntamente com um funcional de Lyapunov-Krasovskii. Para obterem-se as condições de estabilização, para o caso em que o atraso é variante no tempo e incerto, faz-se necessário o uso da desigualdade de Jensen. Analogamente aos capítulos anteriores, formulam-se problemas de otimização e apresentam-se exemplos.

- No último capítulo são apresentadas as conclusões juntamente com as contribuições e futuros encaminhamentos que possam ser dados às pesquisas.

## 2 RESULTADOS PRELIMINARES E FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

O objetivo deste capítulo é o de apresentar alguns resultados preliminares e ferramentas matemáticas que servem como base para os resultados a serem apresentados ao longo da tese. Inicialmente, apresentam-se a função de Lyapunov-Razumikhin e o funcional de Lyapunov-Krasovskii, bem como os teoremas de estabilidade, a definição da região de atração associada aos sistemas com atrasos e o enunciado do Lema de Finsler. Para o caso dos sistemas estarem sujeitos a perturbação limitada pela norma  $\mathcal{L}_2$ , define-se o problema de estabilidade entrada-estado e entrada-saída e sua relação com a teoria de Lyapunov. São apresentados também os problemas de atenuação e tolerância à perturbação. Em seguida, enunciam-se condições de estabilidade para sistemas tipo Lure. Por fim, apresentam-se as maneiras mais utilizadas para se modelar sistemas apresentando saturação de controle. Nesta última seção, encontra-se também a modelagem por zona-morta e a conseqüente aplicação da condição de setor generalizada, a qual é uma forte ferramenta a ser utilizada ao longo deste trabalho.

### 2.1 Estabilidade de Sistemas com Atrasos

Lyapunov, em 1899, desenvolveu dois métodos para investigar a estabilidade de um sistema. O primeiro método indireto de Lyapunov permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear através de seu modelo linearizado. O segundo método, conhecido como método direto de Lyapunov, é baseado em um conceito análogo ao de energia. Estes métodos são de grande relevância prática, pois servem de base para o projeto de controladores estabilizantes para sistemas dinâmicos.

Destacam-se aqui duas maneiras de aplicar o segundo método de Lyapunov, a fim de garantir a estabilidade de sistemas com atrasos:

- A primeira delas é interpretar a evolução das soluções no espaço das funções, o que leva à formulação do chamado teorema de Lyapunov-Krasovskii.
- A segunda é interpretar a solução do sistema como evoluindo no espaço Euclidiano, o que leva à formulação do teorema de Lyapunov-Razumikhin.

Abaixo apresentam-se estes dois teoremas de estabilidade, os quais são de fundamental importância na análise de estabilidade de sistemas com atrasos, bem como para a síntese de controladores para estes sistemas. Com esse objetivo, seja a seguinte equação diferencial funcional:<sup>1</sup>

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad t \geq t_0. \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> $x_t(\cdot)$ , corresponde à restrição de  $x(\cdot)$ , no instante  $t$ , ao intervalo  $[t - \tau, t]$

Devido à presença de atrasos, a solução de (1) não pode ser unicamente determinada a partir dos valores das variáveis de estado do sistema no instante  $t = t_0$ . Assim, a solução a partir de um instante inicial  $t_0$  é caracterizada de forma única pelo conhecimento dos valores assumidos pelo vetor de estado no intervalo  $[t_0 - \tau, t_0]$ , ou seja, a condição inicial deixa de ser um ponto no espaço  $\mathfrak{R}^n$  para ser uma função nesse espaço.

Assim, a condição inicial  $x_{t_0} \in \mathcal{C}_\tau$  que se utiliza é dada por uma função contínua definida sobre o intervalo  $[-\tau, 0]$ ,

$$x_{t_0}(\theta) = x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \quad (2)$$

### 2.1.1 Teoremas de Estabilidade no Sentido de Lyapunov

**Teorema 1 (Lyapunov-Krasovskii)** *Sejam  $V_1, V_2$  e  $V_3 : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$ , ou seja, são funções tais que  $V_1(r) > 0$ ,  $V_2(r) > 0$  e  $V_3(r) > 0$ ,  $\forall r > 0$ . Se existir um funcional contínuo  $V : \mathfrak{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$ , tal que:*

1.  $V_1(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq V_2(\|\phi\|_c)$ ,
2.  $\dot{V}(t, x_t) \leq -V_3(\|x(t)\|)$ .

*Então a solução identicamente nula de (1) é uniformemente assintoticamente estável.*

A demonstração e maiores comentários sobre este teorema podem ser encontrados, por exemplo, em (HALE; LUNEL, 1993), (IVANESCU; DUGARD; DION, 2000), (NICULESCU, 2001, vol. 269), (GU et al., 2003).

Note que neste caso,  $V : \mathfrak{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$ , sendo  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_\tau^V$  é definida sobre o espaço das funções  $\phi$  definidas no intervalo  $[t - \tau, t]$ , por isso costuma-se chamar na literatura *Funcional de Lyapunov*.

**Teorema 2 (Lyapunov-Razumikhin)** *Suponha que  $u, v, w$  e  $p : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$  sejam funções contínuas, não decrescentes,  $u(s), v(s), w(s)$  positivas para  $s > 0$ . Se existir uma função contínua  $V : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ , tal que:*

1.  $u(\|x\|) \leq V(t, x) \leq v(\|x\|_c) \quad \forall t \in \mathfrak{R}, x \in \mathfrak{R}^n$ ;
2.  $\dot{V}(t, x) \leq -w(\|x(t)\|)$  se  $V(t + \theta, x(t + \theta)) < p(V(t, x(t))) \quad \forall \theta \in [-\tau, 0]$ .

*Então a solução identicamente nula de (1) é uniformemente assintoticamente estável.*

Maiores detalhes sobre este teorema podem ser encontrados em (HALE; LUNEL, 1993), (NICULESCU, 2001, vol. 269). Perceba-se que agora<sup>2</sup>  $V(\cdot, \cdot)$  é uma função, pois é definida sobre o espaço vetorial euclidiano  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$ .

#### 2.1.1.1 Região de atração

Segundo (VIDYASAGAR, 1993), a Região de Atração do sistema (1) é dada por:

$$\mathcal{X}_0 = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau; \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \phi) = 0\},$$

ou seja, é o conjunto de condições iniciais  $\phi$ , tais que as trajetórias correspondentes do sistema (1),  $x(t, \phi)$  convergem para zero.

Deve-se notar que, para um sistema genérico dado por (1), o cálculo analítico da região de atração é, em geral, impossível. Neste caso, calculam-se estimativas para a região de atração.

<sup>2</sup>Nos próximos capítulos utiliza-se  $V(x(t))$  quando  $V$  for uma função de Lyapunov-Razumikhin, para evitar confusões.

## 2.1.2 Condições de Estabilidade Dependentes x Independentes do Atraso

Ao utilizar-se o segundo método de Lyapunov para garantir-se a estabilidade, pode-se encontrar condições que sejam dependentes ou independentes do atraso. Para que as condições sejam *independentes do atraso*, faz-se necessário que as condições de estabilidade do sistema sejam garantidas, não importando o valor do atraso ao qual o sistema esteja submetido. Já para o caso *dependente do atraso*, as condições de estabilidade dependem explicitamente do valor do atraso.

### 2.1.2.1 Caso independente do atraso

Com o objetivo de exemplificar como se utiliza o funcional de Lyapunov-Krasovskii para provar a estabilidade assintótica, considera-se o seguinte sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) \quad (3)$$

com o funcional de Lyapunov-Krasovskii dado por:

$$V(t, x_t) = x'(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^0 x'(\theta)Sx(\theta)d\theta, \quad P = P' > 0, \quad S = S' > 0. \quad (4)$$

Este funcional pode ser utilizado para derivar uma condição suficiente de estabilidade para o sistema. De fato, avaliando-se  $\dot{V}(t, x_t)$  ao longo das trajetórias de (3) tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) = & x'(t)(A'P + PA + S)x(t) + x'(t)PA_d x(t - \tau) + x'(t - \tau)A'_d Px(t) \\ & - x'(t - \tau)Sx(t - \tau). \end{aligned}$$

Portanto, a condição 2 do Teorema 1 é satisfeita se for verificada a LMI:

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + S & PA_d \\ A_d P & -S \end{bmatrix} < 0,$$

que é independente do atraso  $\tau$ . A condição 1 do Teorema 1 é também verificada, pois tem-se:

$$\lambda_{\min}(P)\|\phi(0)\|^2 \leq V(t, \phi) \leq (\lambda_{\max}(P) + \tau\lambda_{\max}(S))\|\phi\|_c^2.$$

### 2.1.2.2 Caso dependente do atraso

A fim de obterem-se condições dependentes do atraso, autores como (KOLMANOVSKII; RICHARD, 1999), (KHARITONOV; MELCHOR-AGUILAR, 2000), (NICULESCU, 2000) e (FRIDMAN, 2001) utilizam transformações do sistema original, juntamente com o Teorema de Lyapunov, para analisar a estabilidade dependente do atraso de sistemas com atraso no tempo. A seguir, são descritos dois destes métodos de transformação.

- O primeiro método utiliza a fórmula de Newton/Leibnitz,

$$\int_{t-\tau}^t \dot{x}(\theta)d\theta = x(t) - x(t - \tau). \quad (5)$$

para transformar o sistema (3) num sistema equivalente com atrasos distribuídos, conforme segue,

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{-\tau}^0 Ax(t + \theta) + A_d x(t + \theta - \tau)d\theta. \quad (6)$$

De acordo com (NICULESCU, 2001, vol. 269), a estabilidade de (6) implica na estabilidade de (3), porém, a recíproca não é verdadeira. Um exemplo de funcional de Lyapunov-Krasovskii (HALE; LUNEL, 1993) utilizado é dado por:

$$V(t, x_t) = x(t)'Px(t) + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t [Ax(\beta) + A_d x(\beta - \tau)]' X^{-1} [Ax(\beta) + A_d x(\beta - \tau)] d\beta d\theta + \int_{t-\tau}^t x(\beta)' Sx(\beta) d\beta, \\ P = P' > 0, S = S' > 0 \text{ e } X = X' > 0.$$

Derivando-se o funcional  $V(t, x_t)$  com relação ao tempo e utilizando-se a relação

$$2u'v \leq u'Mu + v'M^{-1}v,$$

para eliminar os termos cruzados, tem-se:

$$\dot{V}(t, x_t) \leq x'(t) [\tau P(A + A_d) + (A + A_d)'P + \tau A'XA + \tau PA_d X^{-1} A_d'P + S]x(t) \\ + 2x'(t)A'XA_d x(t - \tau) + \tau x'(t - \tau)A_d'XA_d x(t - \tau) - x'(t - \tau)Sx(t - \tau).$$

Escrevendo-se essa expressão na forma matricial, obtém-se:

$$\dot{V}(t, x_t) \leq \begin{bmatrix} x'(t) \\ x'(t - \tau) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \Gamma & \tau A'XA_d \\ * & A_d'XA_d - S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}$$

com  $\Gamma = P(A + A_d) + (A + A_d)'P + S + \tau PA_d X^{-1} A_d'P + \tau A'XA$

Portanto, a condição 2 do Teorema 1 será satisfeita se a seguinte desigualdade matricial se verificar:

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \tau A'XA_d \\ * & A_d'XA_d - S \end{bmatrix} < 0.$$

Pode-se transformar a desigualdade acima em uma LMI através da utilização do complemento de Schur, ou seja,

$$\begin{bmatrix} P(A + A_d) + (A + A_d)'P + \tau A'XA_d + S & \tau A'XA_d & \tau PA_d \\ * & \tau A_d'XA_d - S & 0 \\ * & * & -\tau X \end{bmatrix} < 0.$$

Observa-se assim que o atraso  $\tau$  aparece explicitamente na condição LMI à ser satisfeita. Por outro lado, tem-se que a condição 1 do Teorema 1 é também verificada, pois:

$$\lambda_{\min(P)} \|\phi(0)\|^2 \leq V(t, \phi) \leq (\lambda_{\max}(P) + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(A'X^{-1}A) + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(A'X^{-1}A_d) + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(A_d'X^{-1}A_d) + \tau \lambda_{\max}(S)) \|\phi\|_c^2.$$

- O segundo método que se utiliza, transforma o sistema (3) na forma de sistema descritor, proposto em (K. TAKABA; KATAYAMA, 1995);

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ 0 &= -y(t) + (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau}^t y(s) ds \end{aligned} \quad (7)$$

e utiliza um funcional de Lyapunov-Krasovskii, da forma:

$$V(t, \bar{x}_t) = \bar{x}(t)E P \bar{x}(t) + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t y'(t) R y(s) ds d\theta + \int_{t-\tau}^t x'(s) S x(s) ds \quad (8)$$

sendo

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P = P' > 0, R = R' > 0 \text{ e } S = S' > 0. \quad (9)$$

Abaixo apresenta-se uma adaptação do teorema proposto por (FRIDMAN; SHAKED, 2002a) para garantir condições de estabilidade dependentes do atraso, utilizando a representação por sistema descritor. Analogamente ao comentário feito no item anterior, tem-se que se o sistema (7) é estável então o sistema (3) também é, porém, a recíproca não é verdadeira.

**Teorema 3** *O sistema (3) com um atraso  $\tau$ , é assintoticamente estável, se, para algum escalar positivo  $\varepsilon$ , existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P$  e  $Z \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ ,  $S$  e  $R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , tais que o seguinte conjunto de desigualdades matriciais seja satisfeito:*

$$(i) \begin{bmatrix} \bar{A}'P + P\bar{A} + \tau Z + \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \tau R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varepsilon}A'_d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P + P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{\varepsilon}A_d & 0 \end{pmatrix} & -\bar{\varepsilon}P\bar{A}_d \\ * & -S \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} R & \varepsilon A'_d P \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\text{com } \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A + A_d & -I \end{bmatrix}, \bar{A}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} \text{ e } \bar{\varepsilon} = \varepsilon - 1.$$

**Demonstração:** Para demonstrar o Teorema 3, basta calcular a derivada do funcional de Lyapunov-Krasovskii (9) com relação ao tempo e utilizar a relação:

$$-2 \int_{\Omega} b' N a \leq \int_{\Omega} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R & M - N \\ * & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix},$$

com  $b = y(s)$ ,  $a = x(t)$ ,  $M = \bar{A}'_d P$  e  $N = \varepsilon \bar{A}'_d P$ .

Esta majoração é sugerida em (MOON et al., 2001) e (FRIDMAN; SHAKED, 2002a), com o objetivo de eliminar os termos cruzados. Obtém-se assim:

$$\dot{V}(t, x_t) \leq \bar{x}'(t) [\bar{A}'P + P\bar{A} + \tau Z] \bar{x}(t) + 2x'(t) (\varepsilon - 1) \bar{A}'_d P \bar{x}(t) - 2x'(t - \tau) (\varepsilon - 1) \bar{A}'_d P \bar{x}(t) + x'(t) S x(t) + y'(t) \tau R y(t) - x'(t - \tau) S x(t - \tau).$$

Escrevendo-se essa expressão, em forma matricial, obtém-se

$$\dot{V}(t, x_t) \leq \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}' \Xi \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix},$$

sendo  $\Xi$  a matriz da desigualdade (i). Logo se (i) é verificada tem-se,  $\dot{V}(t, x_t) < 0$ .

Portanto, para que o sistema (3) seja assintoticamente estável dependente do atraso  $\tau$ , falta provar a condição 1 do Teorema 1, a qual é verificada pois:

$$\lambda_{\min(P)} \|\phi(0)\|^2 \leq V(t, \phi(\theta)) \leq (\lambda_{\max}(P) + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(R) + \tau \lambda_{\max}(S)) \|\phi\|_c^2.$$

□

É importante notar que, para que (i) e (ii) sejam LMIs, é necessário fixar-se  $\varepsilon$ .

### 2.1.3 Estabilidade via Lema de Finsler

De acordo com (BOYD et al., 1994), o Lema de Finsler pode ser utilizado com o objetivo de obterem-se novas condições de estabilidade em forma de LMI, diferentes das condições já obtidas diretamente pelo Teorema de Lyapunov, porém equivalentes. Na seqüência enuncia-se este Lema:

**Lema 1 (Lema de Finsler)** *Seja  $\xi \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  tais que posto( $\mathbf{B}$ )  $< n$ . Então as seguintes assertativas são equivalentes:*

i)  $\xi' \mathbf{Q} \xi < 0, \forall \xi$  tal que  $\mathbf{B} \xi = 0, \xi \neq 0$ .

ii)  $\mathbf{B}^{\perp'} \mathbf{Q} \mathbf{B}^{\perp} < 0$ .

iii)  $\exists \mu \in \mathfrak{R} : \mathbf{Q} - \mu \mathbf{B}' \mathbf{B} < 0, \mu > 0$ .

iv)  $\exists \mathbf{R} \in \mathfrak{R}^{n \times m} : \mathbf{Q} + \mathbf{R} \mathbf{B} + \mathbf{B}' \mathbf{R}' < 0$ .

A prova do Lema 1 pode ser encontrada, por exemplo, em (OLIVEIRA; SKELTON, New York: Springer-Verlang, 2001, v. 268.).

Na seqüência, enuncia-se um teorema que exemplifica a utilização do Lema 1 para provar a estabilidade do sistema (3)<sup>3</sup>.

**Teorema 4** *Se existir uma matriz  $P \in \mathfrak{R}^n$  simétrica definida positiva, matrizes  $F, G, e H \in \mathfrak{R}^n$ , satisfazendo a LMI abaixo*

$$\begin{bmatrix} -F - F' & FA - G' + P & FA_d - H' \\ * & GA + A'G' + Q & GA_d + A'H' \\ * & * & HA_d + A'_d H' - Q \end{bmatrix} < 0$$

então, o sistema (3) é assintoticamente estável e além disso o funcional

$$V(t, x_t) = x'(t) P x(t) + \int_{t-\tau}^t x'(\theta) Q x(\theta) d\theta,$$

é um funcional de Lyapunov-Krasovskii para o sistema (3).

**Demonstração:** Seja  $V : \mathfrak{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$ , um candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii, dado por

$$V(t, x_t) = x'(t) P x(t) + \int_{t-\tau}^t x'(\theta) Q x(\theta) d\theta.$$

Calculando-se a derivada de  $V(t, x_t)$  tem-se:

$$\dot{V}(t, x_t) = \dot{x}'(t) P x(t) + x'(t) P \dot{x}(t) + x'(t) Q x(t) - x'(t - \tau) Q x(t - \tau). \quad (10)$$

Sejam  $\bar{x}(t)$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{Q}$  definidos por:

$$\bar{x}'(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}'(t) & x'(t) & x'(t - \tau) \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -I & A & A_d \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ P & Q & 0 \\ 0 & 0 & -Q \end{bmatrix}.$$

<sup>3</sup>Outros exemplos da utilização do Lema de Finsler para obterem-se condições de estabilidade para sistemas com atrasos e sujeitos a saturação nas entradas, inclusive para sistemas que possuam incertezas, podem ser vistos em (VALMÓRBIDA, 2006).

Se  $\dot{V}(t, x_t)$  em (10) for negativa ao longo das trajetórias do sistema, ou seja, se

$$\bar{x}'(t)\mathbf{Q}\bar{x}(t) < 0, \forall \bar{x}(t) \neq 0 \text{ tal que } \mathbf{B}\bar{x}(t) = 0, \quad (11)$$

pode-se aplicar o Lema 1. Assim, tem-se que (11) é satisfeita se existir uma matriz  $\mathbf{X}$  tal que:

$$\mathbf{Q} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{B}'\mathbf{X}' < 0.$$

Definindo-se,  $\mathbf{X}' = [ F' \quad G' \quad H' ]$  e resolvendo-se

$$\mathbf{Q} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{B}'\mathbf{X}',$$

obtem-se a matriz da desigualdade matricial (4) do Teorema 4, o que garante que

$$\dot{V}(t, x_t) < 0, \forall (t, \phi) \in \mathfrak{R} \times \mathcal{D}.$$

Como  $\dot{V}(t, x_t) < 0$  e

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(P)\|\phi(0)\| &\leq \phi'(0)P\phi(0) \leq V(t, \phi) = \phi'(\theta)P\phi(\theta) + \int_{t-\tau}^t \phi'(\theta)Q\phi(\theta)d\theta \\ &\leq (\lambda_{\max}(P) + \tau\lambda_{\max}(Q))\|\phi\|_c, \end{aligned}$$

pode-se concluir, a partir do Teorema 1, que  $V(t, x(t))$  é um funcional de Lyapunov para o sistema (3), e portanto, este é assintoticamente estável. □

#### 2.1.4 Estabilidade Entrada-Estado do Sistema com Perturbação

Como um dos objetivos deste trabalho de tese é analisar a questão da atenuação e da tolerância a perturbações, considera-se agora, que atue sobre o sistema (3) uma perturbação. Seja então, o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bw(t) \\ z(t) &= Cx(t) + Dw(t) \\ x_{t_0}(\theta) &= \phi(\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (12)$$

sendo  $w(t) \in \mathfrak{R}^p$  uma perturbação e  $z(t) \in \mathfrak{R}^q$  a saída regulada.

Quando um sistema de controle está sujeito à ação de perturbações, não se pode esperar que a solução do sistema perturbado se aproxime da origem quando  $t \rightarrow \infty$ . O melhor que se pode fazer é minimizar a influência desta perturbação na trajetória do sistema. Neste caso, a idéia consiste em garantir que qualquer trajetória  $x(t, \phi)$  seja limitada, para perturbações  $w(t)$  também limitadas.

Em particular, neste trabalho, interessa-se por perturbações limitadas em energia, ou seja:

$$\|w\|_2 = \sqrt{\int_0^t w'(\tau)w(\tau)d\tau} \leq \frac{1}{\sqrt{\varpi}}, \forall 0 < t, \frac{1}{\varpi} < \infty \quad (13)$$

logo,  $w(t) \in \mathcal{L}_2$ , ou seja,  $w$  é uma função quadrado integrável, cuja norma é menor que  $\frac{1}{\sqrt{\varpi}}$ , com  $\varpi > 0$ .

Neste caso, a fim de fazer com que as trajetórias do sistema sejam limitadas, considera-se um funcional de Lyapunov-Krasovskii, tal que

$$V(t, x_t) > 0, V(t, x_{t_0}) \leq \beta, \quad (14)$$

e que sua derivada no tempo, ao longo das trajetórias do sistema (12), satisfaça

$$\dot{V}(t, x_t) \leq w'(t)w(t) \quad (15)$$

para todo  $w(t)$  sujeito a (13) e  $x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta) \in \mathcal{D}$ ,  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ ,  $\mathcal{D}$  é um conjunto de condições iniciais, limitado e que pertence à região de atração de (12), ou seja  $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}_0$ .

Se (15) é satisfeita, aplicando-se a fórmula de Newton/Leibnitz a esta desigualdade, obtém-se:

$$V(t, x_t) - V(0, x_{t_0}) \leq \int_{t_0}^t w'(\tau)w(\tau)d\tau, \quad \forall x_{t_0} \in \mathcal{D} \text{ e } t \geq 0.$$

Devido ao fato de assumir-se (13) e (14), pode-se escrever que:

$$V(t, x_t) \leq \int_{t_0}^t w'(\tau)w(\tau)d\tau + V(0, x_{t_0}) \leq \beta + \frac{1}{\varpi}.$$

Esta desigualdade garante que as soluções ou trajetórias são limitadas dentro de um conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ \phi \in \mathcal{C}_\tau; V(t, x_t) \leq \beta + \frac{1}{\varpi} \right\},$$

ou seja,  $x_t \in \mathcal{E}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

### 2.1.5 Estabilidade Entrada-Saída

Em muitos problemas de controle, o sistema é representado como uma aplicação entrada-saída, de uma perturbação  $w$  para uma saída controlada  $z$ . Caso a norma  $\mathcal{L}_p$  de  $w$  seja limitada  $z$  deve possuir uma norma  $\mathcal{L}_p$  limitada, para que o sistema seja dito entrada-saída estável. Uma definição para a estabilidade entrada-saída é enunciada em (VIDYASAGAR, 1993), a qual é dada abaixo:

**Definição 1** *Suponha que  $R$  seja uma relação binária em  $\mathcal{L}_p$ . Então,  $R$  é dito ser:*

- $\mathcal{L}_p$ -estável se:

$$(w, z) \in R, w \in \mathcal{L}_p \Rightarrow z \in \mathcal{L}_p.$$

- $R$  é  $\mathcal{L}_p$ -estável com ganho finito: se  $R$  é  $\mathcal{L}_p$ -estável, e além disto existirem  $\gamma_p, b_p \in \mathfrak{R}$  tais que:

$$(w, z) \in R, w \in \mathcal{L}_p \Rightarrow \|z\|_p \leq \gamma_p \|w\|_p + b_p.$$

- $R$  é  $\mathcal{L}_p$ -estável com ganho finito e zero bias:  $R$  é  $\mathcal{L}_p$  estável, e além disto existir  $\gamma_p \in \mathfrak{R}$  tal que:

$$(w, z) \in R, w \in \mathcal{L}_p \Rightarrow \|z\|_p \leq \gamma_p \|w\|_p.$$

Com o objetivo de se analisar a estabilidade entrada-saída, neste trabalho escolhe-se a norma  $\mathcal{L}_2$ . Neste caso, considera-se que a entrada do sistema seja limitada em energia e deseja-se que

$$\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2,$$

$\gamma$  é então, dito um limite superior para o ganho- $\mathcal{L}_2$ .

## 2.2 Estabilidade Absoluta de Sistemas do tipo Lure

### 2.2.1 Problema de Lure

Seja o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (16)$$

com  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t)$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^m$ .  $A$  e  $B$  são matrizes constantes, tais que,  $(A, B)$  é controlável e  $(A, C)$  é observável.

Defina  $u(t)$  como sendo:

$$u(t) = -\psi(t, y) \quad (17)$$

sendo  $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma função não linear, sem memória, descentralizada, contínua por partes e localmente Lipschitz em  $y$ .

Sejam agora,  $a$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ , tais que  $a_{(i)} < 0 < b_{(i)}$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ , então pode-se definir o seguinte conjunto:

$$\Gamma \triangleq \{y(t) \in \mathbb{R}^m; a_{(i)} \leq y_{(i)}(t) \leq b_{(i)}\}, \quad (18)$$

perceba-se que o conjunto  $\Gamma$  é conexo e contém a origem.

Se a função  $\psi$  satisfizer à condição (19), dada a seguir, então  $\psi$  é dita uma não-linearidade de setor.

**Definição 2** *Sejam  $K_{min}$  e  $K_{max}$  matrizes diagonais, tais que  $K = K_{max} - K_{min}$  seja definida positiva. Então,  $\forall y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\psi(t, y)$  é dita pertencer ao setor  $(K_{min}, K_{max})$  se*

$$[\psi(t, y) - K_{min}y]' [\psi(t, y) - K_{max}y] \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (19)$$

*Se  $\Gamma$  está estritamente contido em  $\mathbb{R}^m$ , diz-se que a condição de setor (19) é verificada localmente, e se  $\Gamma = \mathbb{R}^m$  esta é verificada globalmente.*

**Observação 1** *O conjunto  $\Gamma$  definido acima é chamado de região de validade da condição de setor.*

Fazendo-se a conexão do sistema (16) com a não-linearidade (17), satisfazendo (19), obtém-se o seguinte sistema não-linear em malha-fechada:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) - B\psi(t, y(t)) \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}\quad (20)$$

O sistema (20), o qual pode ser observado na Figura 1, é conhecido na literatura como sistema do tipo Lure e o estudo de sua estabilidade como *problema de Lure* ou *problema de estabilidade absoluta*.

A partir da Definição 2, pode-se definir estabilidade absoluta (KHALIL, 1996).

**Definição 3** *O sistema (20) é dito:*

- *localmente absolutamente estável: se o sistema (20) é localmente assintoticamente estável, para toda não-linearidade  $\psi$ , verificando localmente a condição de setor (19);*
- *globalmente absolutamente estável: se o sistema (20) é globalmente assintoticamente estável, para toda não-linearidade  $\psi$ , verificando globalmente a condição de setor (19).*

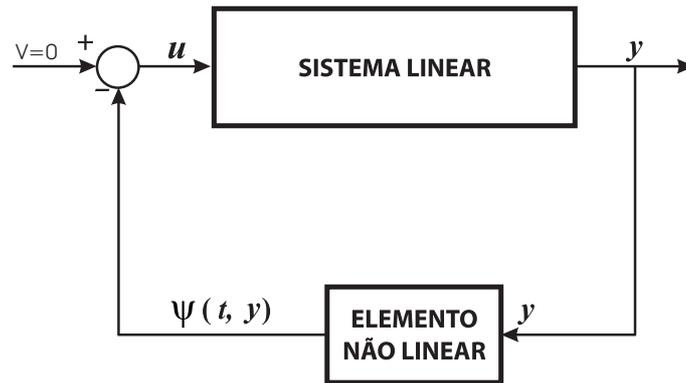


Figura 1: Conexão realimentada de um sistema linear e um elemento não-linear.

Na Figura 2, representam-se os gráficos de setor de não-linearidades, na Figura 2(a) representa-se um gráfico onde a não-linearidade  $\psi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  pertence ao setor  $(\alpha, \beta)$  localmente, pois o domínio de validade da condição de setor é dado por

$$\Gamma = \{y \in \mathfrak{R}; a \leq y \leq b\}.$$

Já na Figura 2(b), representa-se um gráfico onde a não-linearidade  $\psi : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  pertence ao setor  $(\alpha, \beta)$  globalmente, pois  $\Gamma = \mathfrak{R}$ .

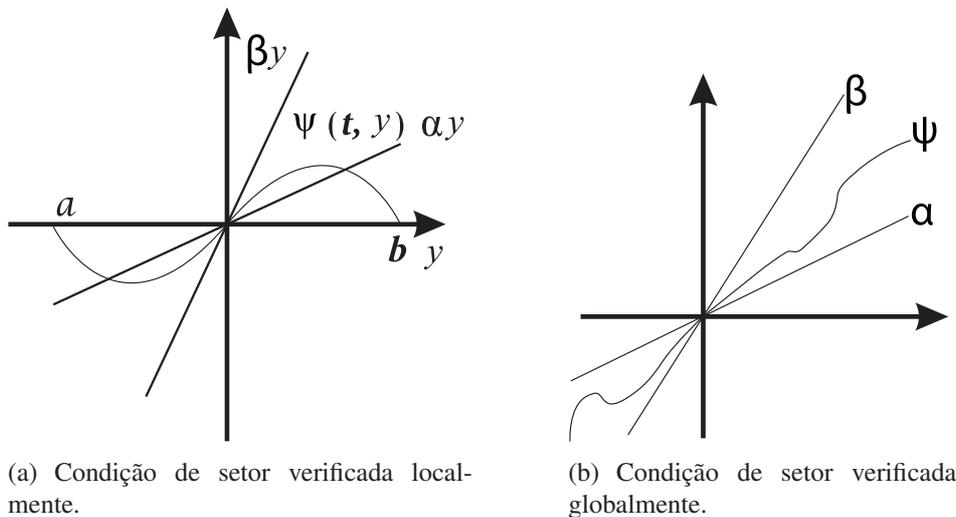


Figura 2: Gráficos de setor de não-linearidades.

### 2.3 Modelagens de Sistemas com Saturação

Os sistemas físicos reais apresentam restrições que se traduzem na possibilidade de aplicação de sinais de controle limitados entre valores máximos e mínimos. Os sistemas de controle que não levam em conta estes limites podem ter a ocorrência imprevista da saturação, que pode levar o sistema à instabilidade ou ao aparecimento de respostas indesejáveis, inerentes ao comportamento não linear do sistema em malha-fechada, tais como, pontos de equilíbrio parasitas e ciclos limite. Logo, a modelagem das saturações, no sentido de considerá-las explicitamente no projeto do controlador, é muito importante a fim

de que se evitem estes comportamentos indesejáveis, ou, pelo menos, que se avaliem os seus efeitos sobre a estabilidade, o desempenho e a robustez do sistema em malha fechada.

Nas subseções que seguem, apresentam-se as definições dadas para cada um dos tipos de modelagens, que são utilizadas na literatura, para sistemas sob saturação nos atuadores.

Para tanto, considere o seguinte sistema linear, sujeito a uma saturação de entrada,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bsat(u(t)), \quad (21)$$

com

$$u(t) = Kx(t)$$

sendo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estado.  $A$  e  $B$  são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas. Suponha que  $sat(\cdot)$  seja uma função vetorial tal que para cada  $i = 1, \dots, m$  define-se:

$$sat_{(i)}(Kx(t)) = \begin{cases} -u_{0(i)} & \text{se } K_{(i)}x(t) < -u_{0(i)} \\ K_{(i)}x(t) & \text{se } -u_{0(i)} \leq K_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)} \\ u_{0(i)} & \text{se } K_{(i)}x(t) > u_{0(i)} \end{cases} . \quad (22)$$

### 2.3.1 Modelagem Politópica

A representação da saturação através da modelagem politópica foi introduzida por (MOLCHANOV; PYATNITSKII, 1989) para resolver problemas específicos do sistema (21). Na área de sistemas com atrasos no tempo e saturação nos atuadores, também são encontrados alguns trabalhos que utilizam a modelagem politópica para a saturação, dentre estes se destacam: (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (CAO; LIN; HU, 2002), (OUCHERIAH, 2003) e (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003).

#### 2.3.1.1 Modelagem direta

Em seguida, descreve-se como reescrever a saturação utilizando o modelo politópico, apresentado em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000).

Note que cada componente da função saturação pode ser escrita como:

$$sat(Kx(t)) = D(\alpha(x(t)))Kx(t); \quad D(\alpha(x(t))) \in \mathfrak{R}^{m \times m}, \quad (23)$$

nesta equação  $D(\alpha(x(t)))$  é uma matriz diagonal, na qual os elementos  $\alpha_{(i)}(x(t))$  são definidos para cada  $i = 1, \dots, m$  como:

$$\alpha_{(i)}(x(t)) = \begin{cases} \frac{-u_{0(i)}}{K_{(i)}x(t)} & \text{se } K_{(i)}x(t) < -u_{0(i)} \\ 1 & \text{se } -u_{0(i)} \leq K_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)} \\ \frac{u_{0(i)}}{K_{(i)}x(t)} & \text{se } K_{(i)}x(t) > u_{0(i)} \end{cases} \quad (24)$$

e  $0 < \alpha_{(i)}(x(t)) \leq 1$ . O coeficiente  $\alpha_{(i)}(x(t))$  pode ser visto como um indicador do grau da saturação da  $i$ -ésima entrada do vetor de controle.

Utilizando essa representação, o sistema (21) é descrito por:

$$\dot{x}(t) = (A + BD(\alpha(x(t)))K)x(t). \quad (25)$$

Considerando-se agora um conjunto compacto<sup>4</sup>  $\mathcal{S}_0 \subset \mathfrak{R}^n$ , segue que  $\forall x(t) \in \mathcal{S}_0$  pode-se definir uma cota inferior para  $\alpha_{(i)}(x(t))$  como:

$$\alpha_{\min(i)} = \min\{\alpha_{(i)}(x(t)); \forall x(t) \in \mathcal{S}_0\}.$$

Portanto,  $\forall x(t) \in \mathcal{S}_0$ , tem-se  $\alpha_{\min(i)} \leq \alpha_{(i)}(x(t)) \leq 1$ .

Definam-se agora matrizes  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, 2^m$ , como segue:

$$A_j = A + BD(\gamma_j)K, \quad (26)$$

com  $D(\gamma_j)$  é uma matriz diagonal de escalares positivos  $\gamma_{j(i)}$  para  $i = 1, \dots, m$ , o qual toma valores 1 ou  $\alpha_{\min(i)}$ . Logo,  $\forall x(t) \in \mathcal{S}_0$ , o sistema (21) pode ser representado pelo modelo politópico

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(x(t))A_j x(t) \quad (27)$$

com  $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(x(t)) = 1$  e  $\lambda_j(x(t)) \geq 0$ . Note que as matrizes  $A_j$  são os vértices de um politopo convexo de matrizes, e para  $x(t) \in \mathcal{S}_0$  tem-se  $(A + BD(\alpha(x(t))))K \in \text{co}\{A_1, \dots, A_{2^m}\}$ . Note também, que  $\alpha_{\min(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , define o conjunto poliédrico

$$\mathcal{S}(K, u_0^\alpha) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; |K_{(i)}x| \leq u_{0(i)}^\alpha, i = 1, \dots, m\};$$

com  $u_{0(i)}^\alpha \triangleq \frac{u_{0(i)}}{\alpha_{\min(i)}}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . O conjunto  $\mathcal{S}(K, u_0^\alpha)$  é o maior conjunto no qual o modelo (27) representa o sistema (21), e é chamado de *região de validade da modelagem*.

Dessa forma, o sistema (27) pode ser usado para analisar o comportamento do sistema (21), se  $x(t) \in \mathcal{S}(K, u_0^\alpha)$ ,  $\forall t \geq 0$ . Neste caso, forçosamente  $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}(K, u_0^\alpha)$ , porém  $x(0) \in \mathcal{S}_0$  não implica necessariamente que  $x(t) \in \mathcal{S}(K, u_0^\alpha)$ . Portanto, para que o sistema (21) seja localmente estável, deve-se considerar que o conjunto  $\mathcal{S}_0$  seja positivamente invariante. Assim, conclui-se, que o sistema (27) pode ser utilizado para representar o comportamento do sistema (21). Conseqüentemente, provando-se a estabilidade de (27), está provada a estabilidade de (21).

### 2.3.1.2 Modelagem generalizada

Em (CAO; LIN; HU, 2002), apresenta-se uma generalização para o modelo politópico apresentado na seção 2.3.1, a qual passa a ser descrita.

Seja  $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , pode-se definir  $\mathcal{S}(H, u_0)$  como,

$$\mathcal{S}(H, u_0) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n ; |H_{(i)}x| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}$$

e considerando-se matrizes

$$D_j \in \mathfrak{R}^{m \times m}, j = 1, \dots, 2^m,$$

sendo  $D_j$  uma matriz diagonal, com

$$d_{ii} = 0 \text{ ou } d_{ii} = 1,$$

<sup>4</sup>Compacto em  $\mathfrak{R}^n$  significa fechado e limitado.

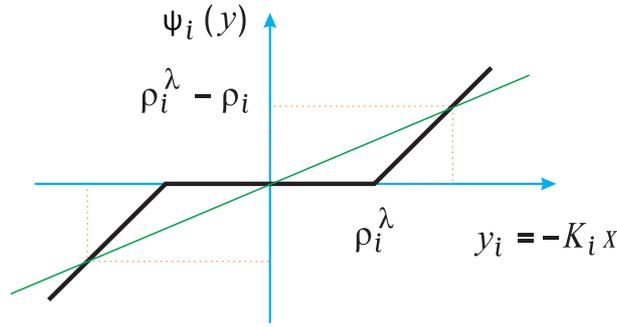


Figura 3: Função zona-morta.

definindo-se

$$D_j^- \text{ por } D_j^- = I - D_j.$$

Pode-se enunciar o seguinte Lema:

**Lema 2** *Sejam  $K, H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ . Se  $x(t) \in \mathcal{S}(H, u_0)$ , então*

$$\text{sat}(Kx(t)) \in \text{co}\{D_j Kx + D_j^- Hx; j \in [1, 2^m]\}.$$

Supondo-se que as hipóteses do Lema 2 sejam satisfeitas, então o sistema (21) pode ser reescrito como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(x(t)) A_j x(t), \quad (28)$$

com  $\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(x(t)) = 1$  e  $\lambda_j(x(t)) \geq 0$ , e  $A_j = (A + B(D_j K + D_j^- H))$ .

Percebe-se que esta maneira de representar politopicamente o sistema (21) é mais geral do que a representação (27). A generalização reside no fato do produto das matrizes  $D(\gamma_j)K$  poder ser escrito como uma soma de dois produtos de matrizes,  $D_j K$  e  $D_j^- H$  onde  $H = \text{Diag}(\alpha_{\min_1} \ \alpha_{\min_2} \ \dots \ \alpha_{\min_m})K$ .

### 2.3.2 Modelagem por Não-linearidade do tipo Zona-morta

Com o objetivo de reescrever-se o sistema como uma conexão entre um sistema linear e uma não-linearidade de setor (*problema de Lure*), utiliza-se uma função  $\psi: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$  definida por:

$$\psi(Kx(t)) = Kx(t) - \text{sat}(Kx(t)), \quad (29)$$

com  $\psi(Kx(t)) = [\ \psi'_1(K_{(1)}x(t)) \ \psi'_2(K_{(2)}x(t)) \ \dots \ \psi'_m(K_{(m)}x(t)) \ ]'$ . Observe-se que:

$$\psi_{(i)}(K_{(i)}x(t)) = \begin{cases} K_{(i)}x(t) + u_{0(i)} & \text{se } K_{(i)}x(t) < -u_{0(i)} \\ 0 & \text{se } -u_{0(i)} \leq K_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)} \\ K_{(i)}x(t) - u_{0(i)} & \text{se } K_{(i)}x(t) > u_{0(i)} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m \quad (30)$$

é uma função zona-morta, a qual esta representada na Figura 3.

Utilizando-se (29), o sistema (21), pode ser reescrito como:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) - B\psi(Kx(t)), \quad (31)$$

com  $A + BK$  Hurwitz<sup>5</sup>.

Observe que o sistema (31) encontra-se agora na forma de Lure, conforme visto na seção 2.2. As seguintes condições de setor podem então ser utilizadas na prova de estabilidade de (31).

### 2.3.2.1 Condição de setor clássica

Defindo-se o seguinte conjunto:

$$\mathcal{S}(K, u_0^\lambda) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n; |K_{(i)}x| \leq u_{0(i)}^\lambda, i = 1, \dots, m\}, \quad (32)$$

com  $u_{0(i)}^\lambda = \frac{u_{0(i)}}{1-\lambda_{(i)}}$  e  $0 \leq \lambda_{(i)} < 1$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

As seguintes considerações a respeito do conjunto  $\mathcal{S}(K, u_0^\lambda)$ , levando-se encontra os valores de  $\lambda_{(i)}$ , podem ser feitas:

- $\lambda_{(i)} = 0 \Rightarrow \mathcal{S}(K, u_0^\lambda) = \mathcal{S}(K, u_0)$ , então o conjunto  $\mathcal{S}(K, u_0^\lambda)$  corresponde a região de linearidade do sistema (31).
- $\lambda_{(i)} \rightarrow 1$ , tem-se que  $\mathcal{S}(K, u_0) \rightarrow \mathfrak{R}^n$ .

Observe-se que a função  $\psi$ , definida em (30) é uma não-linearidade sem memória, descentralizada, contínua por partes e Lipschitz em  $x$ . Prova-se agora que  $\psi$  é uma não-linearidade de setor.

De fato, se  $x(t) \in \mathcal{S}(K, u_0^\lambda)$ , a função  $\psi(Kx(t))$  verifica a condição de setor (19) (KIYAMA; IWASAKI, 2000) (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2003), com

$$K_{min} = 0, K_{max} = \Lambda,$$

$\Lambda$  é uma matriz diagonal, com  $\Lambda_{ii} = \lambda_{(i)}$  e  $y = Kx(t)$ .

Logo, a condição de setor clássica, definida em (19), passa a ser definida por:

$$\psi'(Kx(t))[\psi(Kx(t)) - \Lambda Kx(t)] \leq 0, \quad (33)$$

quando  $\psi$  for uma não-linearidade do tipo zona-morta.

Perceba-se que o conjunto  $\mathcal{S}(K, u_0^\lambda)$  corresponde ao conjunto  $\Gamma$  definido em (18), portanto, a região de validade da condição de setor, quando  $\psi$  for uma não-linearidade do tipo zona-morta, é definida por:

$$\mathcal{S}(K, u_0) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n; |K_{(i)}x| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}. \quad (34)$$

**Observação 2** De acordo com a Definição 2, se  $\Lambda = I$ , a condição de setor (33) é verificada globalmente, i.e.  $\mathcal{S}(K, u_0) = \mathfrak{R}^n$ .

<sup>5</sup>Uma matriz quadrada  $A$  é dita Matriz Hurwitz se a parte real de todos os autovalores de  $A$  forem estritamente negativos, isto é,  $\text{Re}[\lambda_i] < 0$ , para cada autovalor  $\lambda_i$ .

### 2.3.2.2 Condição de setor generalizada

Considerando o caso particular em que  $\psi$  é uma função zona-morta, em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2003) é proposta uma generalização para a condição de setor (33), a idéia básica consiste na substituição do produto das matrizes  $\Lambda K$  por uma matriz  $G \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  livre.

Para enunciar a nova condição de setor, considera-se uma matriz  $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e define-se o seguinte conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n; |(K_{(i)} - G_{(i)})x| \leq u_{0_{(i)}}, i = 1, \dots, m \right\}. \quad (35)$$

O Lema que se enuncia abaixo fornece a condição de setor generalizada, o qual é válido apenas para as não-linearidades do tipo zona-morta.

**Lema 3 (Condição de setor generalizada)** *Considere a função  $\psi$  definida em (29). Se  $x(t) \in \mathcal{S}$ , a relação:*

$$\psi'(Kx)T[\psi(Kx(t)) - Gx(t)] \leq 0 \quad (36)$$

é válida para  $\forall T > 0 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  diagonal.

A demonstração do Lema, bem como seu enunciado, podem ser encontrados em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR.; GARCIA, 2004).

Note que se  $G = \Lambda K$ , então (36) torna-se:

$$\psi'(Kx(t))T[\psi(Kx(t)) - \Lambda Kx(t)] \leq 0. \quad (37)$$

Conclui-se assim que (33) é um caso particular de (36).

**Observação 3** *A utilização da condição (36), permite que se obtenham condições menos conservadoras e em forma de LMIs, vide discussão detalhada em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH, 2005).*

### 2.3.2.3 Aplicação de condições de setor à prova de estabilidade

Considera-se agora que o sistema (31) esteja sujeito a atrasos nos estados, ou seja,

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t - \tau) - B\psi(Kx(t)). \quad (38)$$

Com o objetivo de garantir-se a estabilidade no sentido de Lyapunov para o sistema (38), com  $\psi$  uma não-linearidade do tipo zona-morta, mostra-se na seqüência como podem ser utilizados o funcional de Lyapunov-Krasovskii e a condição de setor generalizada (36).

Seja  $V : \mathfrak{R} \times \mathcal{C}_\tau^V \rightarrow \mathfrak{R}$  um funcional de Lyapunov-Krasovskii, e  $\dot{V}(t, x_t)$  a derivada de  $V$  ao longo das trajetórias do sistema. Do Lema 3, segue que se  $x(t) \in \mathcal{S}$  a condição (36) é verificada. Logo, aplicando-se a  $\mathcal{S}$ -procedure (BOYD et al., 1994) à seguinte desigualdade

$$\dot{V}(t, x_t) - 2\psi'(Kx(t))T[\psi'(Kx(t)) - Gx(t)] < 0$$

pode-se concluir que  $\dot{V}(t, x_t) \leq 0, \forall x(t) \in \mathcal{S}$ .

Assim, a condição 2 do Teorema 1 é satisfeita localmente. Para que a condição 2 do Teorema 1 seja satisfeita globalmente, deve-se tomar  $G = K$ . Neste caso, então, (36) será válida  $\forall x(t) \in \mathfrak{R}^n$ .

## 3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS COM ATRASOS E SATURAÇÃO DE CONTROLE

### 3.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se metodologias que servem de motivação e de base para o desenvolvimento dos resultados a respeito da estabilização de sistemas com atraso e saturação de controle, a serem vistos nos capítulos seguintes. Apresentam-se também, os principais problemas e as respectivas técnicas utilizadas no trato destes sistemas.

Inicialmente, apresentam-se brevemente os primeiros e mais relevantes trabalhos que foram feitos nos últimos anos na área de sistemas de controle com atraso no tempo e saturação nos atuadores. Num segundo momento, apresentam-se alguns dos trabalhos que têm uma ligação direta com esta tese. O objetivo dessa apresentação é o de poder realizar comparações entre os métodos de análise e estabilização apresentados nestes trabalhos, procurando destacar as principais diferenças que existem entre cada uma das abordagens, seus pontos fortes e deficiências.

#### 3.1.1 Breve Estado da Arte

Nas últimas duas décadas, vários pesquisadores têm se preocupado com o problema de estabilização de sistemas com atraso no tempo e saturação nos atuadores, como exemplo citam-se os trabalhos de (CHEN; WANG; LU, 1988), (CHOU; HORNG; CHEN, 1989), (TISSIR; HMAMED, 1992), (NICULESCU; DION; DUGARD, 1996), (OUCHERIAH, 1996), (PARK; CHOI; CHOO, 2000), (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (CAO; LIN; HU, 2002)) e (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003a). Nesses trabalhos, são propostas diversas maneiras de obterem-se condições de estabilidade, tanto em âmbito local como global. Descreve-se a seguir, sucintamente, a maneira pela qual cada um dos autores supracitados obtém suas condições de estabilidade.

A desigualdade de norma é um dos critérios utilizados com o objetivo de tratar a saturação. Seguindo esta abordagem, em (CHEN; WANG; LU, 1988) são propostas condições (dependentes e independentes do atraso) suficientes para garantir a estabilização global dos sistemas lineares com atraso e saturação, utilizando realimentação de estados. Em (CHOU; HORNG; CHEN, 1989) é desenvolvido um compensador de realimentação dinâmica de saída, com o objetivo de fornecer condições suficientes para estabilizar globalmente sistemas incertos com atraso e saturação, através do conceito de medida de uma matriz<sup>1</sup> e da teoria da comparação. Em (TISSIR; HMAMED, 1992) são fornecidas condições de estabilidade assintótica independentes do atraso, utilizando o conceito de desigualdade de norma e o conceito da medida de uma matriz. Os resultados obtidos neste,

<sup>1</sup>Define-se  $\mu(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|I + \varepsilon A\| - 1}{\varepsilon}$ , como sendo a medida de uma matriz  $A$ .

são menos conservadores que os obtidos em (CHEN; WANG; LU, 1988). Em (NICULESCU; DION; DUGARD, 1996) é estudada a estabilização global robusta de sistemas incertos com atraso e saturação. As condições obtidas são independentes do atraso. No entanto, é obtido um limite superior para o atraso admissível. Também são obtidas condições dependentes do atraso, porém, somente para o caso em que não há restrições nas entradas. Para obter as condições de estabilização são utilizados o Teorema de Lyapunov-Razumikhin e equação de Riccati. No trabalho (OUCHERIAH, 1996) é proposta a síntese de um observador linear assintótico com um grau de estabilidade pré-estabelecido, com o objetivo de estabilizar globalmente o sistema. Neste é utilizada a equação de Lyapunov e o funcional de Lyapunov-Krasovskii. Em (PARK; CHOI; CHOO, 2000) é apresentado um método de “*anti-windup*” dinâmico, com o objetivo de minimizar os efeitos indesejáveis produzidos pela saturação. Nesse trabalho são considerados atrasos apenas nas entradas e saídas da planta.

Ressalta-se que as condições para estabilização obtidas até aqui tinham caráter global. Somente em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000) são fornecidas condições para a estabilização local, ou seja, os autores, através do método de síntese, procuram caracterizar um conjunto de condições iniciais admissíveis. As condições introduzidas são na forma de BMIs (Desigualdades Matriciais Bilineares). Para obter esta formulação, utiliza-se um modelo politópico definido na Seção 2.3.1 e um funcional de Lyapunov-Krasovskii. Além de garantir a estabilização local, as condições obtidas satisfazem alguma especificação de desempenho em função da taxa de decaimento.

Em (CAO; LIN; HU, 2002), baseado nas idéias de (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), obtêm-se condições de estabilidade (independentes e dependentes do atraso) utilizando a formulação politópica apresentada na seção 2.3.1.2, uma função de Lyapunov-Razumikhin e um funcional de Lyapunov-Krasovskii. Devido à utilização do modelo politópico 2.3.1.2, obtêm-se neste trabalho condições menos conservadoras que em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000) e diretamente na forma de LMIs. Já em (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003), a formulação politópica 2.3.1.2 é utilizada para obter uma lei de controle de realimentação de estado que estabilize localmente o sistema, que garanta um certo nível de desempenho pré-definida para perturbações limitadas em amplitude<sup>2</sup>, e garanta que as trajetórias do sistema em malha-fechada sejam limitadas. As condições para estabilização e ganho- $\mathcal{L}_2$  do sistema são obtidas pela utilização do funcional de Lyapunov-Krasovskii e pela representação via modelo descritor do sistema, ao passo que as condições para encontrar o elipsóide que limita o conjunto de estados que são atingíveis são obtidas via uma função de Lyapunov-Razumikhin. As condições resultantes são expressas em termos de LMIs. É importante ressaltar que, devido aos modelos politópicos utilizados em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (CAO; LIN; HU, 2002) e (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) para representar a saturação, só é possível obterem-se condições para o caso de estabilidade local.

Nos artigos (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004) e (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR.; GARCIA, 2004), é apresentada uma nova metodologia para tratar a saturação, utilizando a representação por zona-morta e a condição de setor generalizada, vista na seção 2.3.2.2. Essa nova maneira de tratar a saturação, permite que tanto condições locais como globais sejam obtidas para a estabilidade de sistemas com atraso e saturações, usando a modelagem por não-linearidade do tipo zona-morta. Em tais artigos, foca-se o estudo e a caracterização de regiões de estabilidade através de estratégias de “*anti-windup*”, que são utilizadas com o objetivo de maximizar

<sup>2</sup>Um vetor  $x$  é limitado em amplitude quando  $x'x \leq \kappa$ , com  $x \in \mathfrak{R}^n$  e  $\kappa \in \mathfrak{R}$ .

a região de condições iniciais admissíveis. As condições de estabilidade (dependentes e independentes do atraso) são obtidas através dos funcionais de Lyapunov-Krasovskii e são formuladas na forma de LMIs.

Nas seções subseqüentes apresentam-se detalhadamente os trabalhos (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (CAO; LIN; HU, 2002), (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) e (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004), os quais têm uma relação direta com as abordagens adotadas na tese. Para isso, formulam-se dois problemas:

- Análise de Estabilidade e Estabilização;
- Problema de Tolerância e Atenuação à Perturbação.

### 3.2 Análise de Estabilidade e Estabilização

Considere o seguinte sistema linear contínuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t) \quad (39)$$

com condição inicial:

$$x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \quad (t_0, \phi) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathcal{C}_\tau^V,$$

sendo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  e  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  respectivamente os vetores de estado e de controle e  $\tau$  o atraso no tempo.  $A$ ,  $A_d$  e  $B$  são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas.

O termo  $u(t)$  é uma entrada de controle saturante, expresso como uma função linear do estado, ou seja,  $u(t) = \text{sat}(Kx(t))$ , cada componente de  $u(t)$  é definida por:

$$(u(t))_{(i)} = \begin{cases} -u_{0(i)} & \text{se} & K_{(i)}x(t) < -u_{0(i)} \\ K_{(i)}x(t) & \text{se} & -u_{0(i)} \leq K_{(i)}x(t) \leq u_{0(i)} \\ u_{0(i)} & \text{se} & K_{(i)}x(t) > u_{0(i)} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (40)$$

Sob estas suposições, tem-se o seguinte sistema não linear em malha-fechada:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + B \text{sat}(Kx(t)). \quad (41)$$

O sistema (41) é dito globalmente assintoticamente estável, se para toda condição inicial satisfazendo  $\|\phi\|_c \leq v$ , para  $v$  finito, as trajetórias do sistema convergem assintoticamente para a origem (NICULESCU; DION; DUGARD, 1996). A respeito da estabilidade para o caso livre do atraso ( $\tau = 0$ ), em (LIN; SABERI, 1993) pode-se ver que a determinação de um controle globalmente estabilizante somente é possível quando algumas suposições de estabilidade são verificadas para o sistema em malha aberta ( $u(t) = 0$ ), segundo (LIN; SABERI, 1993), quando estas hipóteses não são verificadas, somente é possível garantir estabilidade local conforme pode ser visto em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000). Por outro lado, o sistema (41) é dito localmente assintoticamente estável, se para toda condição inicial  $\phi \in \mathcal{C}_\tau$  pertencente a uma determinada região no espaço de funções, as correspondentes trajetórias do sistema (41) convergem assintoticamente para a origem do sistema (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000).

Considerando-se o sistema (41), dois tipos de problemas podem ser formulados:

**Problema 1 (Problema de Análise):** Dado  $K$ , deve-se determinar conjuntos de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{D}$ , para os quais a convergência das trajetórias respectivas do sistema saturado para a origem é garantida, isto é,  $\forall \phi \in \mathcal{D} \subset \mathcal{C}_\tau^V$ , o sistema é assintoticamente estável. Neste caso,  $\mathcal{D}$  é dito uma estimativa da região de atração do sistema em malha-fechada.

**Problema 2 (Problema de Síntese):** Dado um conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{D}$ , no qual deseja-se garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha-fechada, deve-se determinar uma matriz  $K$ , tal que toda trajetória do sistema (41) inicializada nesse conjunto convirja assintoticamente para a origem. Ou ainda, determinar  $K$  de forma que se obtenha um conjunto de condições iniciais admissíveis o maior possível.

A seguir são descritas as abordagens propostas em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (CAO; LIN; HU, 2002), (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) e (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004), para resolver os Problemas 1 e/ou 2 acima.

### 3.2.1 Abordagem Proposta em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000)

Em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000) é tratado o problema da estabilização de sistemas com atrasos nos estados e saturação nos atuadores. São fornecidas condições suficientes para a estabilização local na forma de BMIs.

Para resolver o Problema 2, utiliza-se a representação politópica para a saturação, conforme apresentado no Capítulo 2, seção 2.3.1. Assim, se  $x(t) \in \mathcal{S}(K, u_0^\alpha)$  o sistema (41) pode ser descrito pelo seguinte modelo politópico (2.3.1):

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) A_j x(t) + A_d x(t - \tau), \quad (42)$$

$$A_j = A + BD(\gamma_j)K, \quad D(\gamma_j) = \text{Diag}(\gamma_{j(i)}) \quad i = 1, \dots, m, \quad \gamma_{j(i)} = 1 \text{ ou } \alpha_{\min(i)}. \quad (43)$$

Adicionalmente, a matriz de ganho  $K$  deve ser tal que o modelo linear do sistema (41) seja estável com taxa de decaimento  $\beta$ .

Considerando um vetor  $\alpha_{\min}$  tal que cada componente  $\alpha_{\min(i)}$ , satisfaça  $0 < \alpha_{\min(i)} \leq 1$   $i = 1, \dots, m$  e, definindo o conjunto

$$\mathcal{J} = \{j \in [1, 2^m]; D(\gamma_j) \neq I_m\},$$

o que permite que se considerem todas as matrizes  $A_j$  descritas em (43), exceto a matriz  $A + BK$ , o seguinte teorema é enunciado como resultado principal.

**Teorema 5** Se existirem matrizes  $W, R > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e escalares positivos  $\alpha_{\min(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$  e  $\kappa$  soluções das desigualdades matriciais:

$$(i) \quad \begin{bmatrix} WA' + AW + Y'B' + BY + 2\beta W + R & e^{\beta\tau} A_d W \\ e^{\beta\tau} W A_d' & -R \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} WA' + AW + Y'D(\gamma_j)B' + BD(\gamma_j)Y + R & A_d W \\ W A_d' & -R \end{bmatrix} < 0, \quad \forall j \in \mathcal{J}$$

$$(iii) \quad \begin{bmatrix} W & \alpha_{\min(i)} Y_{(i)}' \\ \alpha_{\min(i)} Y_{(i)} & \kappa u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

então a matriz de realimentação de estado  $K = YW^{-1}$  garante a estabilidade assintótica do sistema (41) em malha-fechada, para toda condição inicial na bola:

$$\mathcal{B}(\delta) = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau^V; \|\phi\|_c^2 \leq \delta\},$$

com

$$\delta = \frac{\kappa^{-1}}{\lambda_{\max}(W^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(W^{-1}RW^{-1})}.$$

**Demonstração:** Considerando o funcional de Lyapunov-Krasovskii,

$$V(t, x_t) = x'(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x'(\theta)Sx(\theta)d\theta, \quad P, S > 0. \quad (44)$$

- As desigualdades (i) e (ii) garantem que  $\dot{V}(t, x_t) < 0$ ,
- A desigualdade matricial (i) garante a estabilidade do sistema com taxa de decaimento  $\beta$  e convergência exponencial dentro da região de linearidade do sistema.
- A desigualdade matricial (iii) garante que  $\mathcal{E}(W^{-1}, \kappa^{-1}) \subset \mathcal{S}(K, u_0^\alpha)$ . Utilizando-se deste fato, juntamente com a desigualdade matricial (ii), garantem-se que as trajetórias do sistema não saem do conjunto elipsoidal  $\mathcal{E}(W^{-1}, \kappa^{-1})$  para  $t > 0$ , se  $\phi \in \mathcal{B}_\tau(\delta)$ .

□

Perceba-se que o Teorema 5 fornece condições para que sejam obtidos tanto a matriz de ganho  $K$  quanto o raio da bola de condições iniciais  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ , o qual depende do tamanho do atraso  $\tau$ . O conjunto  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$  pode ser maximizado através minimização de  $\kappa$  ou da minimização do termo  $\lambda_{\max}(W^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(W^{-1})R(W^{-1})$ , porém essa minimização pode ser difícil e as vezes até impossível de ser obtida diretamente. Assim, consideram-se algumas BMIs, as quais impõem condições para maximizar os autovalores de  $W^{-1}$  e  $R$ , sugere-se dessa forma o seguinte problema de otimização:

$$\min(\sigma_1 + \varepsilon \kappa) \quad \begin{cases} \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, W > 0, R > 0, \kappa > 0; \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 I_n & I_n \\ I_n & W \end{bmatrix} \geq 0; \\ \sigma_2 I_n - R \geq 0; \\ \sigma_1 \geq \sigma_2; \\ \text{e as desigualdades matriciais (i) (ii) e (iii) do Teorema 5.} \end{cases}$$

Observe que na desigualdade (i), a bilinearidade não aparece diretamente em função de  $Y$  e  $\alpha_{\min}$ , porém, ela encontra-se indiretamente no termo  $Y'D(\gamma_j)B'$ , uma vez que,

$$D(\gamma_j) = \text{Diag}(\gamma_j)$$

e para cada  $j = 1, \dots, 2^m$   $\gamma_j$  é formado pelas combinações de 1 ou  $\alpha_{\min(i)}$ .

Logo, para poder obter-se a matriz  $Y$  e o vetor  $\alpha_{\min}$ , faz-se necessário resolver este problema de otimização iterativamente: primeiro fixa-se  $\alpha_{\min(i)} \forall i = 1, \dots, m$  e encontra-se  $Y$ , e depois fixa-se  $Y$  e encontra-se o vetor  $\alpha_{\min}$ .

### 3.2.2 Abordagem Proposta em (CAO; LIN; HU, 2002)

Em (CAO; LIN; HU, 2002), trata-se a questão da estabilidade do sistema (41), utilizando a modelagem politópica generalizada para a saturação, vista na Seção 2.3.1.2, um funcional de Lyapunov-Krasovskii, uma função de Lyapunov-Razumikhin e técnicas de LMIs. As condições obtidas em (CAO; LIN; HU, 2002) são tanto dependentes como independentes do atraso. Assim, como em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), também é obtida uma região de estabilidade  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$  que serve como estimativa do domínio de atração do sistema em malha-fechada. Com o objetivo de projetar uma lei de controle linear no estado, tal que a estimativa do domínio de atração seja maximizada, formula-se um problema de otimização com restrições em forma de LMIs.

Com o objetivo de fornecer as condições de estabilidade, considera-se a modelagem generalizada 2.3.1.2, sendo:

$$A_j = A + B(D_j K + D_j^- H) \quad j = 1, \dots, 2^m, \quad (45)$$

o conjunto  $\mathcal{S}(H, u_0)$  e o conjunto  $\mathcal{V}$  como definidos no Capítulo 2. Num primeiro momento, são fornecidas condições de estabilidade independente do atraso, utilizando as abordagens de Lyapunov-Razumikhin e Lyapunov-Krasovskii. Ambos os teoremas são apresentados a seguir, respectivamente:

**Teorema 6** *Seja  $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ . Para uma matriz  $P > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e um número  $\rho > 0$ , considere o conjunto*

$$M_V(\rho) = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau; \phi(\theta) \in \mathcal{E}(P, \rho) \forall \theta \in [-\tau, 0]\}.$$

*Se existirem duas matrizes  $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $S > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , tais que:*

$$\begin{aligned} A'_j P + P A_j + P A_d S A'_d P + P &< 0 \quad \forall j = 1, \dots, 2^m \\ P &\geq S^{-1} \end{aligned} \quad (46)$$

*e  $\mathcal{E}(P, \rho) \subset \mathcal{S}(H, u_0)$ , i.e.,  $|h_{(i)} x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathcal{E}(P, \rho)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , com  $A_j$  definida em (45), então a solução  $x(t) \equiv 0$  é assintoticamente estável para o sistema (41) e o conjunto  $M_V(\rho)$  é um conjunto invariante dentro do domínio de atração.*

**Demonstração:** A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (CAO; LIN; HU, 2002). Segue-se com alguns comentários a respeito. □

**Observação 4** *Devido ao fato de utilizar-se uma função de Lyapunov-Razumikhin quadrática para garantir a estabilidade do sistema, obtém-se o elipsóide  $\mathcal{E}(P, \rho)$  como estimativa para a região de atração.*

Observe-se que o conjunto  $M_V(\rho)$  está contido no domínio de atração  $\mathcal{X}_0$ . Assim, define-se uma nova variável

$$\alpha_R(\mathcal{E}(P, \rho)) \triangleq \sup\{\alpha > 0; \alpha \mathcal{E}(P, \rho) \subset \mathcal{X}_0\},$$

a qual determina o tamanho do conjunto  $\mathcal{X}_0$  com respeito à  $\mathcal{E}(P, \rho)$ , definindo-se ainda uma matriz  $G = HQ$  e  $x_1, \dots, x_l$  alguns pontos dados do  $\mathfrak{R}^n$ , tais que  $\mathcal{E}(P, 1) = \text{co}\{x_1, \dots, x_l\}$ . Dessa forma, em (CAO; LIN; HU, 2002), formula-se um problema de otimização que maximiza  $\alpha_R(\mathcal{E}(\rho, P))$ .

$$\min_{S \geq Q > 0, G} \gamma \cdot \begin{cases} \left[ \begin{array}{cc} \gamma & x'_{(i)} \\ x_{(i)} & Q \end{array} \right] \geq 0, \quad i = 1, \dots, l; \\ \text{sujeito a:} \quad \left\{ \begin{array}{l} QA' + AQ + A_d WA'_d + Q + \\ + B(D_j K Q + D_j^- G) + (D_j K Q + D_j^- G)' B' < 0, \quad j = 1, \dots, 2^m; \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & g_{(i)} \\ g'_{(i)} & Q \end{array} \right] \geq 0 \quad i = 1, \dots, m. \end{array} \right. \end{cases}$$

As condições, do problema de otimização, são utilizadas respectivamente com o objetivo de:

- maximizar o conjunto  $\alpha(\mathcal{E}(\rho, P))$ , através da maximização de  $\alpha$ . Para isso, utiliza-se  $\mathcal{E}(Q, \gamma)$ , sendo  $\gamma = \frac{1}{\alpha^2}$  e  $Q = (\rho^{-1}P)^{-1}$ ;
- satisfazer a condição (46) do Teorema 6;
- garantir que  $\mathcal{E}(P, \rho) \subset \mathcal{S}(H, u_0)$ .

Utilizando o mesmo funcional de Lyapunov-Krasovskii que (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), o seguinte Teorema, o qual fornece condições independentes do atraso para que o sistema (41) seja estável, é obtido.

**Teorema 7** *Seja  $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  uma matriz de ganho. Para  $P, S > 0$  e  $\rho > 0$ , considere o conjunto:*

$$L_V(\rho) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}_\tau : \phi'(0)P\phi(0) + \int_{-\tau}^0 \phi'(s)S\phi(s)ds \leq \rho \right\}.$$

*Se existir uma matriz  $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  tal que a desigualdade abaixo acontece:*

$$\left[ \begin{array}{cc} A'_j P + P A_j + S & P A_d \\ A'_d P & -S \end{array} \right] < 0, \quad j \in [1, 2^m]$$

*e  $\mathcal{E}(P, \rho) \subset \mathcal{S}(H, u_0)$ , então a solução  $x(t) \equiv 0$  do sistema (41) é assintoticamente estável. Além disso, o conjunto  $L_V(\rho)$  é um conjunto invariante dentro do domínio de atração  $\mathcal{X}_0$ .*

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em (CAO; LIN; HU, 2002). Na sequência são feitos comentários a respeito desta.

□

Perceba-se que o conjunto

$$L_V(\rho) = \left\{ \phi \in \mathcal{C}_\tau : \phi'(0)P\phi(0) + \int_{-\tau}^0 \phi'(s)S\phi(s)ds \leq \rho \right\}$$

no Teorema 7, é uma estimativa do domínio de atração, e depende não apenas de  $P$ , mas também de uma integração sobre o intervalo  $[-\tau, 0]$ . Isto faz com que a estrutura de  $L_V(\rho)$  seja mais complicada do que o conjunto invariante  $M_V(\rho)$  no Teorema 6.

Devido ao fato da dificuldade em encontrar-se a medida do conjunto  $L_V(\rho)$ , encontra-se uma estimativa para o conjunto de condições iniciais admissíveis, de maneira que seja tratável em forma de LMIs.

Dessa forma, observe que

$$\phi'(0)P\phi(0) + \int_{-\tau}^0 \phi'(s)S\phi(s)ds \leq (\lambda_{\max}(P) + \tau\lambda_{\max}(S))\|\phi\|_c^2,$$

então o seguinte conjunto

$$\mathcal{B}_\tau(\delta) = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau; \|\phi\|_c^2 < \delta, \delta = \frac{1}{\lambda_{\max}(P) + \tau\lambda_{\max}(S)}\},$$

pode ser tomado como estimativa para o conjunto de condições iniciais admissíveis, para as quais a estabilidade do sistema em malha-fechada é garantida.

Assim, de maneira análoga ao proposto em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), propõe-se em (CAO; LIN; HU, 2002) o seguinte problema de otimização convexo:

$$\min_{Q>0, X>0, G, \rho} \gamma \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} \gamma & (1 + \tau\epsilon)x'_{(i)} \\ (1 + \tau\epsilon)x_{(i)} & (1 + \tau\epsilon)Q \end{array} \right] > 0, Q < \epsilon X, i = 1, \dots, l; \\ \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} QA' + AQ + A_d X A'_d + \\ B(D_{(i)} K Q + D_{(i)}^- G) + \\ (D_{(i)} K Q + D_{(i)}^- G)' B' \\ Q \end{array} \right) \\ -X \end{array} \right] < 0, i = 1, \dots, 2^m; \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & g_{(i)} \\ g'_{(i)} & Q \end{array} \right], 1 = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

As condições do problema de otimização, são utilizadas respectivamente com o objetivo de:

- maximizar o raio da bola  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ , ou seja, maximizar a estimativa do conjunto de condições iniciais admissíveis, sendo  $\gamma = \frac{1}{\alpha^2}$ ,  $Q = (\rho^{-1}P)^{-1}$  e  $X = \rho S^{-1}$ ;
- satisfazer a condição (46) do Teorema 6, com  $G = HQ$ ;
- garantir que  $\mathcal{E}(P, \rho) \subset \mathcal{S}(H, 1)$ .

Em (CAO; LIN; HU, 2002) é feita também uma análise para o caso dependente do atraso, utilizando a função de Lyapunov-Razumikhin. Para poder fazer esta análise, o sistema (41) é reescrito utilizando a abordagem por atrasos distribuídos (NICULESCU, 2001, vol. 269), ou seja,

$$\dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds + Bu(t).$$

Abaixo apresenta-se o teorema de estabilidade para o caso dependente do atraso.

**Teorema 8** *Seja  $K$  a matriz de ganho de realimentação de estado. Considere o elipsóide  $\mathcal{E}(P, \rho)$ . Se existirem matrizes  $H \in \mathfrak{K}^{m \times n}$ ,  $P, P_1, P_2 > 0 \in \mathfrak{K}^{n \times n}$  e  $\tau_0 > 0$  tais que  $\forall j = 1, \dots, 2^m$ :*

$$\begin{aligned} \hat{A}'_j P + P \hat{A}_j + \tau_0 P A_d (P_1 + P_2) A'_d P + 2\tau_0 P &< 0 \\ A'_j P_1^{-1} A_j &\leq P \\ A'_d P_2^{-1} A_d &\leq P \end{aligned} \quad (47)$$

e  $\mathcal{E}(P, \rho) \subset \mathcal{S}(H, u_0)$ , então  $x(t) \equiv 0$  do sistema (41) é assintoticamente estável dependente do atraso. Além disso, para  $\tau \leq \tau_0$  e para toda condição inicial

$$\phi(\theta) \in \mathcal{E}(P, \rho), \forall \theta \in [-\tau, 0], \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Com  $\hat{A}_j$  definido por

$$\hat{A}_j = A + A_d + B(D_j K + D_j^- H).$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em (CAO; LIN; HU, 2002). Na sequência são feitos comentários a respeito desta.

□

Se  $Q = \rho P^{-1}$ ,  $G = HQ$ ,  $A_j = A + B(D_j K + D_j^- H)$  e  $\bar{A}_j = A + A_d$  as desigualdades acima são equivalentes às LMIs:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{c} Q\bar{A}_j' + \bar{A}_j Q + \tau_0 A_d(P_1 + P_2)A_d' + 2\tau_0 Q + \\ B(D_j K Q + D_j^- G) + (D_j K Q + D_j^- G)' B' \end{array} \right) < 0; \\ & \left[ \begin{array}{cc} Q & (AQ + B(D_j K Q + D_j^- G))' \\ (AQ + B(D_j K Q + D_j^- G)) & P_1 \end{array} \right] \geq 0; \\ & \left[ \begin{array}{cc} Q & QA_d' \\ A_d Q & P_2 \end{array} \right] \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $P_1$  e  $P_2$  foram trocados por  $P_1/\rho$  e  $P_2/\rho$ .

Perceba-se que as desigualdades matriciais apresentadas acima são efetivamente LMIs, o que não ocorre em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), onde é necessário fixar a priori  $\alpha_{min}$ , conforme visto em na seção 3.2.1. Assim, é proposto o seguinte problema de otimização convexa, para estimar o domínio de atração do sistema (41), para qualquer atraso  $\tau \leq \tau_0$ .

$$\min_{Q, P_1, P_2 > 0, G, \gamma} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} \gamma & x^{(i)} \\ x^{(i)} & Q \end{array} \right] \geq 0, \quad i = 1, \dots, l; \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & g^{(i)} \\ g^{(i)} & Q \end{array} \right] \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; \\ \text{LMIs do Teorema 8.} \end{array} \right.$$

Perceba-se que é possível trata-se também do problema de estabilização, para isto basta tomar  $Y = KQ$  de forma a se obter LMIs em (47).

Deve-se perceber que a utilização da modelagem politópica, tanto a modelagem direta 2.3.1 como a modelagem generalizada 2.3.1.2, as quais foram utilizadas em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000) e em (CAO; LIN; HU, 2002) respectivamente, para o problema:

- Apresentam a necessidade de testar a validade das LMIs para cada um dos vértices do politopo;
- Não fornecem condições para estabilidade global.

Na seção 3.4.2, ver-se-á que estes problemas podem ser contornados através da utilização da modelagem por não-linearidade do tipo zona-morta vista na seção 2.3.2.

### 3.3 Problema de Tolerância e Atenuação à Perturbação

#### 3.3.1 Formulação do Problema

Considere-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_u \text{sat}(Kx(t)) + D_w w(t) \\ x(t_0 + \theta) &= \phi_x(\theta) \quad \forall \theta \in [-h, 0] \quad t_0 \in \mathfrak{R}_+, \phi_x \in \mathcal{C}_h^v \end{aligned} \quad (48)$$

com  $u \in \mathfrak{R}^m$  uma entrada de controle sujeita a saturações.

$$u(t) = \text{sat}(Kx(t)),$$

sendo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estado,  $w(t) \in \mathcal{L}_2^q[0, \infty)$  um sinal de perturbação exógeno e  $z(t) \in \mathfrak{R}^p$  a saída controlada,  $A$ ,  $A_d$ ,  $B_u$ ,  $B_w$ ,  $C$ ,  $D_u$  e  $D_w$ , são matrizes constantes de dimensões apropriadas. Considera-se que  $D_w = 0$ ,  $t_0 = 0$ . Supõe-se ainda que  $\tau$  e o atraso seja variante no tempo, satisfazendo:

$$0 \leq \tau(t) \leq h \quad (49)$$

$$\dot{\tau}(t) \leq d < 1 \quad (50)$$

considera-se que  $h$  e  $d$  sejam dados.

Conforme visto no Capítulo 2, há duas maneiras de analisar a estabilidade de sistemas perturbados, uma delas é utilizando-se a estabilidade entrada-estado e a outra é a estabilidade entrada-saída. Na seção 3.3.2 apresentam-se as conclusões e análises feitas em relação ao artigo (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003).

**Problema 3 (Problema de Tolerância a Perturbação)** *Determinar uma cota superior para  $\|w\|_2$ , tal que as trajetórias do sistema permanecem limitadas.*

#### 3.3.2 Abordagem Proposta em (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003)

Em (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) é estudada a estabilização do sistema (48) considerando perturbações limitadas em amplitude. Assim como em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000) e em (CAO; LIN; HU, 2002), também modela-se a saturação através de um politopo convexo de matrizes, utilizando o modelo politópico descrito na seção 2.3.1.2. Com o objetivo de demonstrar a estabilidade dependente do atraso, reescreve-se o modelo através de sistema descritor, ao invés de utilizar o modelo com atrasos distribuídos, procurando diminuir o conservadorismo imposto pelas trajetórias adicionais do modelo. Também utilizam-se o funcional de Lyapunov-Krasovskii, para obter as condições de estabilidade.

Considerando o problema (48) e o conjunto  $\mathcal{S}(H, u_0)$ , utiliza-se o Lema 2 e procede-se de maneira análoga a (CAO; LIN; HU, 2002) para reescrever o sistema (48) com uma representação politópica:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) A_j x(t) + A_d x(t - \tau) + B_w w(t) \\ z(t) &= \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) C_j x(t) + D_w w(t) \end{aligned} \quad (51)$$

com

$$A_j = A + B_u(D_j K + D_j^- H) \text{ e } C_j = C + D_u(D_j K + D_j^- H) \quad j = 1, \dots, 2^m,$$

$$\sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) = 1, \lambda_j(t) \geq 0 \forall t > 0,$$

ou de maneira equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}(t)x(t) + A_d x(t - \tau) + B_w w(t) \\ z(t) &= \bar{C}(t)x(t) + D_w w(t) \end{aligned} \quad (52)$$

com  $\bar{A}$  e  $\bar{C}$  definidas por:

$$\bar{A} = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) A_j \text{ e } \bar{C} = \sum_{j=1}^{2^m} \lambda_j(t) C_j.$$

Com a finalidade de fornecer condições para a estabilização dependente do atraso para o sistema (52), este sistema é reescrito utilizando-se a representação por sistema descritor, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) \\ 0 &= -y(t) + (\bar{A} + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau(t)}^t y(s) ds + B_w w(t) \\ x(s) &= \phi(s) \\ y(s) &= \dot{\phi}(s), \quad s \in [-h, 0]. \end{aligned} \quad (53)$$

Considerando-se ainda o conjunto  $\mathcal{X}_\delta$ , definido por:

$$\mathcal{X}_\delta = \{\phi \in \mathcal{C}_\tau; \|\phi\|_c \leq \delta_1, \|\dot{\phi}\|_c \leq \delta_2\},$$

apresenta-se o seguinte resultado.

**Teorema 9** Quando  $w(t) \equiv 0$ , o sistema (48) com o atraso  $\tau$  e sua taxa de variação  $\dot{\tau}$  satisfazendo (49) e (50) é assintoticamente estável com  $\mathcal{X}_\delta$  contido no domínio de atração, i.e.  $\mathcal{X}_\delta \subset \mathcal{X}_0$ , se, para algum escalar positivo  $\varepsilon$ , existirem matrizes simétricas definidas positivas  $Q_1, S, R, Z_1$  e  $Z_3 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , e ainda matrizes  $Q_2, Q_3, Z_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $Y, G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e um escalar  $\beta \in \mathfrak{R}$  que satisfazem o seguinte conjunto de desigualdades:

$$(i) \begin{bmatrix} Q_2 + Q_2' + hZ_1 & \Sigma_j & hQ_2 & 0 & Q_1 \\ * & -Q_3 - Q_3' + hZ_3 & hQ_3 & (\varepsilon - 1)A_d S & 0 \\ * & * & -hR & 0 & 0 \\ * & * & * & -(1-d)S & 0 \\ * & * & * & * & -S \end{bmatrix} < 0, \quad j = 1, \dots, 2^m$$

$$(ii) \begin{bmatrix} R & 0 & \varepsilon R A_d' \\ * & Z_1 & Z_2 \\ * & * & Z_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(iii) \begin{bmatrix} \beta & g^{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 Q_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

e

$$(iv) \delta_1^2 [\bar{\sigma}(Q_1^{-1}) + h\bar{\sigma}(S^{-1})] + \frac{h^2}{2} \delta_2^2 \bar{\sigma}(R^{-1}) \leq \beta^{-1}$$

sendo

$$\Sigma_j = Q_3 - Q_2' + Q_1(A' + \varepsilon A_d') + (Y'D_j + G'D_j^-)B_u' + hZ_2, \quad (54)$$

então a matriz do ganho de realimentação, que estabiliza o sistema é dada por  $K = YQ_1^{-1}$ .

**Demonstração:** Em (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) é utilizado o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii, para demonstrar este Teorema:

$$V(t, \bar{x}_t) = \bar{x}(t)E\tilde{P}\bar{x}(t) + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t y'(t)R^{-1}y(s)dsd\theta + \int_{t-\tau(t)}^t x'(s)S^{-1}x(s)ds \quad (55)$$

com,  $\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ ,  $E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$  e  $P_1 = P_1' > 0$ .

Este funcional permite que as condições obtidas sejam dependentes de  $h$ , valor máximo do atraso, e  $d$ , variação máxima para o atraso.

□

Observe que para se ter LMIs em (i) e (ii), é necessário fixar-se  $\varepsilon$ .

Comparando-se as abordagens de (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) e de (CAO; LIN; HU, 2002), percebem-se as seguintes diferenças:

- em (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) utiliza-se o modelo descritor para obterem-se condições dependentes do atraso, o que leva a uma redução do conservadorismo imposto pela representação por atrasos distribuídos utilizada em (CAO; LIN; HU, 2002);
- essa representação para o sistema faz com que apareça a dependência de  $\phi$  no conjunto de condições iniciais admissíveis.

Com o intuito de considerar o caso em que há perturbações limitadas em amplitude, atuando no sistema, ou seja, para  $w(t) \neq 0$ , define-se o seguinte conjunto

$$\mathcal{W} = \{w \in \mathfrak{R}^q; w'w \leq \bar{w}\}.$$

Então, utilizando um sistema equivalente, com atrasos distribuídos (NICULESCU, 2001, vol. 269), enuncia-se o Lema 4 abaixo, o qual é utilizado conjuntamente com o Teorema 10, com o objetivo de garantir condições para estabilidade entrada-estado.

**Lema 4** *Dados  $P > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e escalares positivos  $\beta$  e  $\bar{w}$ , as trajetórias do sistema (48) permanecem dentro do elipsóide  $\mathcal{E}(P, \beta)$  para todo  $w(t) \in \mathcal{W}$ ,  $\phi(\theta) \equiv 0$  e um atraso  $\tau$  que satisfaz (49), se existirem matrizes  $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e escalares positivos  $\gamma_k$ ,  $k = 0, \dots, 3$  e  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  que satisfazem o seguinte conjunto de desigualdades*

$$(i) \begin{bmatrix} \Psi & PB_w & PA_d - W & hW(A + B_u(D_j K + D_j^- H)) & hWA_d & hWB_w \\ * & -\lambda_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma_0 P & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -h\gamma_1 P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -h\gamma_2 P & 0 \\ * & * & * & * & * & -h\gamma_3 I \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$(ii) (\lambda_2 + \gamma_3 h)\bar{w}\beta - \lambda_1 \leq 0,$$

$$(iii) \begin{bmatrix} \beta & g^{(i)} P \\ * & u_{0(i)}^2 P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

com

$$\Psi = P(A + B_u(D_j K + D_j^- H) + (A + B_u(D_j K + D_j^- H))'P) + W + W' + (\lambda_1 + h(\gamma_1 + \gamma_2))P, \quad j = 1, \dots, 2^m.$$

**Demonstração:** A demonstração deste Lema pode ser encontrada em (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003). Na seqüência seguem-se alguns comentários a respeito desta.

□

Perceba-se que é necessário fixar-se  $\gamma_k$ ,  $k = 0, \dots, 3$ , com o objetivo de obterem-se LMIs. O Lema 4 garante condições para que as trajetórias  $x(t)$  do sistema em malha-fechada permaneçam limitadas no elipsóide  $\mathcal{E}(P, \beta)$ , quando  $\phi(\theta) = 0$ ,  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ . Utilizando-se o Teorema de estabilidade de Lyapunov-Razumikhin, tem-se que se a condição (i) for satisfeita, então a desigualdade

$$\dot{V}(x(t)) + \lambda_1 V(x(t)) \leq 0, \quad (56)$$

também é satisfeita e, uma vez que  $\lambda_2 w'w + h\gamma_3 \bar{w} \geq 0$ , pode-se escrever

$$\dot{V}(x(t)) + \lambda_1 V(x(t)) - \lambda_2 w'w - h\gamma_3 \bar{w} \leq 0, \quad (57)$$

agora utilizando-se a condição (ii) em (57), obtém-se

$$\dot{V}(x(t)) + \lambda_1 (V(x(t)) - \beta^{-1}) + \lambda_2 (\bar{w} - w'w) \leq 0. \quad (58)$$

Observe que esta desigualdade garante que  $\dot{V}(x(t)) < 0$ ,  $\forall x(t) \in \partial \mathcal{E}(P, \beta)$  desde que  $w \in \mathcal{W}$ . Conclui-se assim que para  $\phi(\theta) = 0$  as trajetórias ficam confinadas em  $\mathcal{E}(P, \beta)$ .

Similarmente ao Teorema 9, o teorema que é enunciado abaixo tem por objetivo obter condições tanto para a limitação dos estados como para o ganho- $\mathcal{L}_2$ . Para isso considera-se a seguinte desigualdade:

$$\dot{V}(x(t)) + z'(t)z(t) - \gamma^2 w'(t)w(t) < 0, \quad (59)$$

sendo  $V$  dado por (55).

**Teorema 10** *Dados escalares positivos  $\gamma$  e  $\bar{w}$ , existe um ganho de realimentação de estado  $K$  que estabiliza (48) internamente e implica em*

$$J \triangleq \|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 < 0, \quad \forall w \neq 0 \in \mathcal{W}, x_{i_0} = \phi(\theta) \equiv 0, \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \quad (60)$$

para todo atraso  $\tau$  que satisfaz (49) e (50), se para parâmetros de ajuste  $\varepsilon$  e  $\bar{\varepsilon}$  existirem matrizes simétricas definidas positivas  $Q_1, S, R, Z_1$  e  $Z_3 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Q_2, Q_3 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e matriz  $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e ainda escalares positivos  $\beta, \gamma_k, k = 0, \dots, 3$  e  $\lambda$  que satisfazem as seguintes desigualdades matriciais para  $j = 1, \dots, 2^m$

$$(i) \quad \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_2 + Q'_2 \\ +hZ_1 \end{pmatrix} & \Sigma_j & Q_1 & hQ'_2 & \Sigma_{2j} & 0 & 0 \\ * & -\begin{pmatrix} Q_3 + Q'_3 \\ +hZ_3 \end{pmatrix} & 0 & hQ'_3 & 0 & B_w & (\bar{\varepsilon} - 1)A_d S \\ * & * & -S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -hR & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I_q & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -(1-d)S \end{pmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} R & 0 & \bar{\varepsilon}RA'_d \\ * & Z_1 & Z_2 \\ * & * & Z_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(iii) \begin{bmatrix} \Psi_{1j} & B_w & (1-\varepsilon)A_d & \varepsilon h(AQ_1 + B_u(D_j Y + D_j^- G)) & \varepsilon h A_d Q_1 & \varepsilon h B_w \\ * & -\lambda I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\gamma_0 Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -h\gamma_1 Q_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -h\gamma_2 Q_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -h\gamma_3 I \end{bmatrix} \leq 0$$

$$(iv) \begin{bmatrix} \beta & g^{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 Q_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

com

$$\Psi_{1j} = (A + \varepsilon A_d)Q_1 + Q_1(A' + \varepsilon A'_d) + B_u(D_j Y + D_j^- G) + (Y'D_j + G'D_j^-)'B'_u + ((\lambda + h\gamma_3)\bar{w}\beta + \gamma_0 + h(\gamma_1 + \gamma_2))Q_1 P,$$

$\Sigma_j$  como definido em (54) e  $\Sigma_{2j} = Q_1 C' + (Y'D_j + G'D_j^-)D'_u$ .

Assim, se existir uma solução, a matriz de ganho de realimentação que garante o desempenho desejado é dada por  $K = YQ_1^{-1}$ .

**Demonstração:** A demonstração do Teorema pode ser encontrada em (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003). Na sequência seguem-se alguns comentários a respeito das condições (i) – (iv).

□

As condições (i) e (ii) fazem com que a lei de controle de realimentação de estados garanta que as trajetórias do sistema permaneçam limitadas ao elipsóide  $\mathcal{E}(P, \beta)$ , para todo  $w(t) \in \mathcal{W}$ . Estas condições são obtidas utilizando-se a função de Lyapunov-Razumikhin. Já as condições (iii) e (iv) são utilizadas com o objetivo de garantir o ganho- $\mathcal{L}_2$  e são obtidas através da utilização do funcional de Lyapunov-Krasovskii.

### 3.4 Problema de “Anti-windup”

#### 3.4.1 Formulação do Problema

Segundo (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005) a estratégia de “anti-windup” consiste em projetar um compensador, o qual é conectado a um controlador existente em uma planta que esta sujeita a entradas saturadas. Tal estratégia, é indicada para controladores que tenham sido projetados sem considerar os efeitos da saturação, seu objetivo pode ser recuperar da melhor maneira possível a performance do sistema.

A estratégia de “anti-windup” pode então ser vista como a adição de uma estrutura (estática ou dinâmica) a um controlador pré-calculado ou projetado (sem levar em conta as não-linearidades dos atuadores), de forma a minimizar os efeitos indesejáveis provocados por estas não-linearidades no comportamento do sistema em malha-fechada.

Com o objetivo de formular o problema de “*anti-windup*”, considera-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (61)$$

com condições iniciais

$$x(t_0 + \theta) = \phi_x(\theta), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0], \phi_x \in \mathcal{C}_\tau^V$$

sendo  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  o vetor de saída do sistema. Seja agora um compensador de estabilização dinâmica de saída de ordem  $n_c$ , dado por:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t) &= A_c \eta(t) + B_c y(t) \\ y_c(t) &= C_c \eta(t) + D_c y(t)\end{aligned}\quad (62)$$

com  $\eta(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$  o estado do controlador,  $u_c(t) = y(t) \in \mathfrak{R}^p$  a entrada de controle e  $y_c(t) \in \mathfrak{R}^m$  a saída de controle. Este controlador é projetado com o objetivo de garantir um certo nível de desempenho e a estabilidade do sistema em malha-fechada, na ausência de saturação de controle.

Considera-se que o sinal de controle é saturante,

$$u(t) = \text{sat}(y_c(t)). \quad (63)$$

Adiciona-se então um compensador de “*anti-windup*” estático, dado por:

$$E_c(\text{sat}(y_c(t)) - y_c(t)), \quad \text{com } E_c \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$$

ao controlador, com o objetivo de amenizarem-se os efeitos de “*windup*” causados pela saturação. Assim, o sistema em malha-fechada será dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + B \text{sat}(y_c(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \\ \dot{\eta}(t) &= A_c \eta(t) + B_c y(t) + E_c(\text{sat}(y_c(t)) - y_c(t)) \\ y_c(t) &= C_c \eta(t) + D_c y(t).\end{aligned}\quad (64)$$

**Problema 4 (Problema de anti-windup)** *Dado um conjunto de condições iniciais admissíveis  $\mathcal{D}$ , no qual deseja-se garantir a estabilidade assintótica do sistema em malha-fechada, deve-se determinar um ganho de “anti-windup”  $E_c$  de forma a:*

- *Aumentar a região de estabilidade (estimativa da região de atração) do sistema em malha fechada,*  
*ou*
- *Dado um conjunto  $\mathcal{D}$  de condições iniciais admissíveis, garantir que toda a trajetória do sistema inicializada em  $\mathcal{D}$  convirja assintoticamente para a origem.*

Na seção 3.4.2 descreve-se a abordagem apresentada em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004) e em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006), a qual utiliza a estratégia de “*anti-windup*”, com o objetivo de aumentar a região de estabilidade do sistema em malha-fechada.

### 3.4.2 Abordagem Proposta em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004)

Com o objetivo de estimar e/ou maximizar o conjunto de condições iniciais para o sistema (61) e ainda melhorar seu desempenho dinâmico, em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004) e em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006), é sintetizado um laço de “*anti-windup*”, o qual é adicionado a um controlador dinâmico pré-calculado. As técnicas empregadas garantem estabilidade local ou global. Nesse trabalho, destaca-se a modelagem da saturação, por uma não-linearidade tipo zona-morta (29), e a utilização da condição de setor generalizada, apresentada em 2.3.2.2. As condições fornecidas são tanto dependentes como independentes do atraso. Para a obtenção de tais condições, utiliza-se um funcional de Lyapunov-Krasovskii.

Considerando o sistema (64), são definidos um vetor estendido e as seguintes matrizes, respectivamente:

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}; \mathbb{A} = \begin{bmatrix} A + BD_c C & BC_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix}; \mathbb{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbb{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_c} \end{bmatrix}; \mathbb{K} = \begin{bmatrix} D_c C & C_c \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema em malha-fechada (64) é dado por:

$$\dot{\xi}(t) = \mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{A}_d\xi(t - \tau) - (\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)\psi(\mathbb{K}\xi(t)) \quad (65)$$

com condição inicial

$$\xi(t_0 + \theta) = \phi(\theta) = \begin{bmatrix} x(t_0 + \theta) \\ \eta(t_0 + \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_\eta \end{bmatrix}; \theta \in [-\tau, 0].$$

Sendo

$$\psi(\mathbb{K}\xi(t)) = y_c(t) - \text{sat}(y_c(t)) = \mathbb{K}\xi(t) - \text{sat}(\mathbb{K}\xi(t))$$

uma não-linearidade do tipo zona-morta, como definida em (29), satisfazendo então a relação

$$\psi'(\mathbb{K}\xi(t))T[\psi(\mathbb{K}\xi) - F\xi] \leq 0, \forall \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{K} - F, u_0), \forall T > 0 \text{ diagonal}, \quad (66)$$

com

$$\mathcal{S}(\mathbb{K} - F, u_0) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n; |(\mathbb{K} - F)_{(i)}|x \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}. \quad (67)$$

Perceba-se que a equação (66) é uma condição de setor generalizada, conforme visto no Capítulo 2.

Diferentemente de (CAO; LIN; HU, 2002) e (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003), ao invés da função de Lyapunov-Razumikhin, em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004), enuncia-se uma condição de estabilidade independente do atraso, utilizando-se o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V(t, \xi_t) = \xi'(t)P\xi(t) + \int_{t-\tau}^t \xi'(\theta)S\xi(\theta)d\theta$$

com  $P = P' > 0, S = S' > 0$ .

**Teorema 11** Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $W$  e  $R \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $G \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$  e  $Z \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$  satisfazendo:

$$(i) \begin{bmatrix} W\mathbb{A}' + \mathbb{A}W + R & \mathbb{A}_d W & \mathbb{B}G + \mathbb{R}Z - Y' \\ * & -R & 0 \\ * & * & -2G \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} W & W\mathbb{K}'_{(i)} - Y'_{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

então, para  $E_c = ZG^{-1}$ , segue que todas as condições iniciais  $\phi \in \mathcal{B}_\tau(\delta)$ , com

$$\delta = \frac{1}{\lambda_{\max}(W^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(W^{-1}RW^{-1})} \quad (68)$$

as correspondentes trajetórias do sistema (65) convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004). Na sequência faz-se alguns comentários a respeito desta.

□

Agora, apresentam-se as condições obtidas por (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004) para a estabilidade dependente do atraso do sistema (65). Assim como (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000), (CAO; LIN; HU, 2002) em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004) também reescreve-se o sistema com atrasos distribuídos, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & (\mathbb{A} + \mathbb{A}_d)\xi(t) - (\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)\psi(\mathbb{K}\xi(t)) - \int_{-\tau}^0 \mathbb{A}_d \mathbb{A}_d \xi(t + \beta - \tau) d\beta \\ & - \int_{-\tau}^0 [\mathbb{A}_d \mathbb{A} \xi(t + \beta) - \mathbb{A}_d (\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)\psi(\mathbb{K}\xi(t + \beta))] d\beta \end{aligned} \quad (69)$$

com condição inicial

$$\xi(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-2\tau, 0].$$

Neste caso, o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii é considerado:

$$\begin{aligned} V(t, \xi_t) = & \xi(t)' P \xi(t) + \int_{-\tau}^0 \int_{\tau+\theta}^t \xi'(s) (\mathbb{A}' X^{-1} \mathbb{A} + \mathbb{A}'_d R^{-1} \mathbb{A}_d) \xi(s) ds d\theta \\ & + \int_{-\tau}^0 \int_{\tau+\theta}^t \xi'(s) (\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)' H^{-1} (\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c) \xi(s) ds d\theta \end{aligned}$$

sendo  $P$ ,  $R^{-1}$ ,  $X^{-1}$  e  $H^{-1}$  matrizes definidas positivas.

**Teorema 12** Dado  $\tau > 0$ , se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $W$ ,  $X$ ,  $R$  e  $H \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $G \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$  e  $Z \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$  satisfazendo:

$$(i) \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} W(\mathbb{A} + \mathbb{A}_d)' + \\ (\mathbb{A} + \mathbb{A}_d)W + \\ \tau \mathbb{A}_d (X + R + H) \mathbb{A}'_d \end{pmatrix} & \tau W \mathbb{A}' & \tau W \mathbb{A}'_d & \begin{pmatrix} \mathbb{B}G + \\ \mathbb{R}Z - Y' \end{pmatrix} & 0 \\ * & -\tau X & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tau R & 0 & 0 \\ * & * & * & -2G & \tau(G\mathbb{B}' + Z'\mathbb{R}') \\ * & * & * & * & -\tau H \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} W & W\mathbb{K}'_{(i)} - Y'_{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

então, para  $E_c = ZG^{-1}$ , segue que para toda condição inicial  $\phi \in \mathcal{B}_{2\tau}(\delta)$  com

$$\delta = (\lambda_{\max}(W^{-1}) + \frac{3\tau^2}{2}\lambda_{\max}(\mathbb{A}'_d R^{-1} \mathbb{A}_d) + \frac{\tau^2}{2}\lambda_{\max}(\mathbb{A}' X^{-1} \mathbb{A}) + \frac{\tau^2}{2}\lambda_{\max}((\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)' H^{-1} (\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)) \|Y W^{-1}\|^2)^{-1},$$

as trajetórias correspondentes ao sistema (65) convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004). □

Observe-se que os Teoremas 11 e 12 garantem condições para estabilidade local. Com o objetivo de garantirem estabilidade global, em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004) são enunciados Corolários, respectivamente para o caso dependente do atraso e independente do atraso. Para o caso de estabilidade global, os Teoremas 11 e 12 apresentam apenas a condição (i), sendo  $Y = \mathbb{K}W$ . Convém destacar que os resultados obtidos em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004) são válidos para atrasos invariantes no tempo.

### 3.5 Conclusão

Conforme visto neste capítulo, inicialmente os primeiros trabalhos tratavam da estabilidade de sistemas com atraso no tempo e saturação nos atuadores, utilizando a estratégia da desigualdade de norma ou de medidas matriciais para tratar a saturação, juntamente com a equação de Riccati para garantir a estabilidade do sistema. Cabe ressaltar que os atrasos eram considerados invariantes no tempo. As condições obtidas eram tanto dependentes do atraso como independentes e eram garantidas somente em âmbito global. Uma das desvantagens desses métodos é o fato das condições não serem convexas e outra é o conservadorismo imposto pela utilização da desigualdade de norma e pelas medidas matriciais.

Num segundo momento, os trabalhos começam a utilizar funções de Lyapunov-Razumikhin e funcionais de Lyapunov-Krasovskii, para garantir a estabilidade e estimar conjuntos de condições iniciais admissíveis. Com o objetivo de tratar a saturação de maneira a garantir a estabilidade local, são utilizadas a modelagem politópica e a politópica generalizada para a saturação, com as quais obtêm-se condições em forma de BMIs e LIMS respectivamente. Uma desvantagem que se tem com a utilização destas modelagens é o número de inequações que se resolve para garantir a estabilidade.

Somente numa terceira fase das pesquisas, é que consegue-se garantir a estabilidade tanto num âmbito local quanto global e obterem-se condições na forma direta de LMIs, isso graças à modelagem da saturação por função zona-morta e a conseqüente utilização da condição de setor generalizada.

Viu-se também que se o sistema está sujeito a perturbações, então é utilizado como hipótese o fato destas serem limitadas em amplitude, a fim de garantir a estabilidade entrada-estado.

Outro fato que pôde ser percebido é que já havia preocupações com os efeitos de “*windup*” causados pela saturação, então estes eram levados em conta através de estratégias de “*anti-windup*”.

Percebeu-se também que nenhum dos trabalhos desenvolvidos até o presente momento obtém condições para estabilização local e global para sistemas em que o atraso seja variante no tempo, bem como a possibilidade de considerar que as perturbações que atuassem sobre o sistema fossem limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ .

Constatou-se também que não são encontrados na literatura trabalhos que investiguem a estabilização por realimentação dinâmica de saída, bem como da síntese de compensadores de “*anti-windup*” estáticos ou dinâmicos para sistemas apresentando atrasos nos estados, capazes de garantir estabilidade entrada-estado e entrada-saída nos âmbitos locais e globais em forma direta de LMIs.

Em se tratando de sistemas discretos, também encontram-se questões ainda não investigadas como a formalização do problema da estabilização local e global, juntamente com a possibilidade da estimativa de conjuntos de condições iniciais admissíveis, a partir de LMIs, para o caso de atrasos variantes no tempo e/ou incertos.

Dessa forma, nos próximos capítulos procura-se atacar estes problemas, apresentando condições na forma de inequações matriciais lineares (LMIs) ou quase lineares, o que possibilita obter soluções a partir da resolução de problemas de otimização convexos.

## 4 ESTABILIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos em relação ao problema de síntese, ou seja, o problema de estabilização por realimentação de estados. Para a obtenção das condições de estabilização, utilizam-se funcionais de Lyapunov-Krasovskii e funções de Lyapunov-Razumikhin, a representação de sistema descritor (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) e a condição de setor generalizada, vista na seção 2.3.2.2. Estas ferramentas permitem que se obtenham condições tanto locais quanto globais, dependentes ou independentes do atraso. Em particular, no caso de estabilização local, as condições que se obtém fornecem estimativas da região de atração do sistema em malha-fechada. Considerando-se que o sistema esteja sujeito a perturbações, determinam-se condições para a estabilidade entrada-estado e entrada-saída, ou seja, estuda-se o nível de atenuação e tolerância à perturbação. Para fazer este estudo utiliza-se a norma  $\mathcal{L}_2$ .

### 4.2 Estabilização Interna

Considere o sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t). \quad (70)$$

Supõe-se que a entrada de controle esteja sujeita a saturações, ou seja

$$u(t) = \text{sat}(Kx(t)).$$

Utilizando a definição para  $\psi(Kx(t))$ , apresentada na seção 2.3.2, onde  $\psi$  é uma não-linearidade do tipo zona-morta descentralizada, pode-se reescrever o sistema (70) como:

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t - \tau) - B\psi(Kx(t)). \quad (71)$$

Assim, o objetivo deste capítulo é determinar uma matriz  $K$ , tal que toda trajetória do sistema (70) inicializada em um conjunto  $\mathcal{D}$  convirja assintoticamente para a origem. Este problema pode ser visto como um problema de síntese, apresentado na seção 3.2.

Considera-se assim, dois tipos de conjuntos:

- $\mathcal{B}_\tau(\delta) \triangleq \{\phi \in \mathcal{C}_\tau; \|\phi\|_c^2 < \delta\}$ , definido no espaço das funções definidas no intervalo  $[-\tau, 0]$ .
- $\mathcal{E}(P) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n; x'Px \leq 1\}$ , definido no espaço  $\mathfrak{R}^n$ .

Considerando-se uma matriz  $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , a definição do conjunto  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(K - G, u_0)$  dada em (35) e através da utilização Lema 3, enunciam-se teoremas que fornecem condições de estabilização independente/dependente do atraso, para os casos local e global, utilizando as abordagens de Lyapunov-Razumikhin e Lyapunov-Krasovskii.

#### 4.2.1 Condições Independentes do Atraso

Assim como em (CAO; LIN; HU, 2002), enuncia-se um teorema baseado na abordagem de Lyapunov-Razumikhin, o qual fornece condições necessárias de estabilidade do sistema, para toda condição inicial

$$\phi(\theta) = x(t + \theta) \in \mathcal{E}(P), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

Por serem independentes do atraso, as condições obtidas implicam na possibilidade do atraso poder ser variante no tempo e a estabilidade poder ser garantida para qualquer valor do atraso.

Antes de enunciar-se o teorema, deve-se lembrar que para um sistema ser estável, independentemente do atraso, faz-se necessário que as matrizes  $A + A_d$  sejam Hurwitz e que a matriz  $A - A_d$  não seja estritamente instável (NICULESCU, 2001, vol. 269).

**Teorema 13 (Razumikhin-Local - IA)** *Se existir uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  satisfazendo:*

$$(i) \begin{bmatrix} WA' + AW + Y'B' + BY + W + A_d'XA_d & -BU + H' \\ * & -2U \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) X - W > 0$$

$$(iii) \begin{bmatrix} W & Y'_{(i)} - H'_{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

então, considerando-se  $K = YW^{-1}$  para todas as condições iniciais  $\phi$ , tais que

$$x(t_0 + \theta) \in \mathcal{E}(P), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0],$$

as trajetórias do sistema (71) em malha-fechada convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** Seja  $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por:

$$V(x(t)) = x'(t)Px(t). \quad (72)$$

Considerando-se o conjunto  $\mathcal{S}$  e o Lema 3,  $\forall x(t) \in \mathcal{S}$  tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & 2x'(t)(A + BK)'Px(t) + 2x'(t - \tau)A_d'Px(t) + \\ & 2\psi'(Kx(t))(TG - B'P)x(t) - 2\psi'(Kx(t))T\psi(Kx(t)). \end{aligned}$$

Utilizando-se a desigualdade  $2u'v \leq u'M^{-1}u + v'Mv$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & 2x'(t)(A + BK)'Px(t) + x'(t - \tau)Mx(t - \tau) + x'(t)PA_dM^{-1}A_d'Px(t) - \\ & 2\psi'(Kx(t))T\psi(Kx(t)) + 2\psi'(Kx(t))(TG - B'P)x(t). \end{aligned}$$

Seja:

$$\Upsilon = x'(t)[(A+BK)'P + P(A+BK) + PA_dM^{-1}A'_dP]x(t) + 2\psi'(Kx(t))(TG - B'P)x(t) - 2\psi'(Kx(t))T\psi(Kx(t)).$$

Note-se que

$$\dot{V}(x(t)) \leq \Upsilon + x'(t-\tau)Mx(t-\tau).$$

Se  $P = W^{-1}$  e  $M^{-1} = X$ , de (ii) obtém-se que

$$x'(t-\tau)Mx(t-\tau) < x'(t-\tau)Px(t-\tau)$$

e, portanto:

$$\dot{V}(x(t)) \leq \Upsilon + V(x(t-\tau)). \quad (73)$$

Definindo-se  $P = W^{-1}$ ,  $U = T^{-1}$ ,  $K = YW^{-1}$ ,  $G = HW^{-1}$  e  $X = M^{-1}$  e pré e pós multiplicando-se (i) por  $Diag(P, T)$  o resultado será:

$$\begin{bmatrix} (A+BK)'P + P(A+BK) + P + PA_dXA'_dP & -PB + G'T \\ * & -2T \end{bmatrix} < 0. \quad (74)$$

Assim, se (74) é satisfeita, segue que  $\Upsilon + x'(t)Px(t) < 0$ , logo existe  $\delta > 0$  tal que:

$$\begin{aligned} \Upsilon + x'(t)Px(t) < -2\delta x'(t)Px(t) &\Leftrightarrow \\ \Upsilon + (1+\delta)x'(t)Px(t) < -\delta x'(t)Px(t). \end{aligned} \quad (75)$$

Da abordagem de Razumikhin, conforme visto na seção (2.1.1), para provar-se a estabilidade do sistema é suficiente garantir que

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0$$

para  $x(t)$  tal que

$$V(x(t+\theta)) < \varepsilon V(x(t)), \quad \theta \in [-\tau, 0].$$

Neste caso, considerando-se  $\varepsilon = 1 + \delta$ , de (73) e de (75) tem-se que:

$$\dot{V}(x(t)) < -\delta x'(t)Px(t) - \varepsilon x'(t)Px(t) + x'(t-\tau)Px(t-\tau), \quad (76)$$

e portanto

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \quad \forall x(t) \in \mathcal{S}, \quad \text{se } V(x(t+\theta)) < \varepsilon V(x(t)), \quad \theta \in [-\tau, 0]. \quad (77)$$

Agora, pré e pós multiplicando-se a condição (iii) por  $Diag(P, I)$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} P & K'_{(i)} - G'_{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Desta desigualdade, conclui-se que  $\mathcal{E}(P) \subset \mathcal{S}$  (BOYD et al., 1994). Da definição de  $V(x(t))$  tem-se:

$$\lambda_{\min(P)} \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq \lambda_{\max(P)} \|x(t)\|^2.$$

Por outro lado,  $\forall \phi$ , tal que,

$$\phi(\theta) = x(t_0 + \theta) \in \mathcal{E}(P), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0],$$

tem-se que  $x(0) \in \mathcal{S}$  e então efetivamente

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\delta V(x(t)) < 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Logo, pelo Teorema de Razumikhin, conclui-se que a estabilidade assintótica da origem é garantida  $\forall \phi$  tal que  $x(t_0 + \theta) \in \mathcal{E}$ ,  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ .

□

Abaixo enunciam-se condições independentes do atraso para a estabilidade global do sistema (71).

**Corolário 1 (Razumikhin-Global - IA)** *Se existir uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  satisfazendo as desigualdades (i) e (ii) do Teorema 13, com  $H = GW$ , então, considerando-se  $K = YW^{-1}$ , a origem do sistema (71) é globalmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** É suficiente considerar-se  $H = GW$  na demonstração do Teorema 13. Neste caso, a desigualdade do Lema 3 é verificada para todo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ , e, portanto, garante-se a estabilidade assintótica global da origem.

□

Utilizando-se o Teorema de estabilidade de Lyapunov-Krasovskii, Teorema 1, enuncia-se um resultado análogo ao do Teorema 13. Observe-se que para este caso a região de estabilidade será dada por uma bola no espaço de funções sobre o intervalo  $[-\tau, 0]$ , e não mais por um elipsóide. Observe-se também que apesar da condição de estabilização ser independente do atraso, a região de estabilidade dependerá do mesmo.

**Teorema 14 (Krasovskii-Local - IA)** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $W$  e  $R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  satisfazendo:*

$$(i) \begin{bmatrix} WA' + AW + Y'B' + BY + R & -BU + H' & A_d W \\ * & -2U & 0 \\ * & * & -R \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} W & Y'_{(i)} - H'_{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

então, considerando-se  $K = YW^{-1}$ , para todas as condições iniciais  $\phi$  pertencentes ao conjunto  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ , com

$$\delta = (\lambda_{\max}(W^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(W^{-1}RW^{-1}))^{-1},$$

as trajetórias do sistema do (71) em malha-fechada convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** Seja  $V : \mathfrak{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por:

$$V(t, x_t) = x'(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x'(\theta)Sx(\theta)d\theta. \quad (78)$$

A derivada de  $V(t, x_t)$  ao longo das trajetórias do sistema é então dada por:

$$\dot{V}(t, x_t) = 2(x'(t)(A + BK)' - \psi'(Kx(t))B' + x'(t - \tau)A'_d)Px(t) + x'(t)Sx(t) - x'(t - \tau)Sx(t - \tau). \quad (79)$$

Pela desigualdade

$$[x(t - \tau) - S^{-1}A'_dPx(t)]' S [x(t - \tau) - S^{-1}A'_dPx(t)] \geq 0,$$

a qual é equivalente a

$$-x'(t - \tau)Sx(t - \tau) + 2x'(t)PA_d x(t - \tau) \leq x'(t)PA_d S^{-1}A'_dPx(t)$$

e, utilizando-se o Lema 3,  $\forall x(t) \in \mathcal{S}$  segue que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) < & 2(x'(t)(A + BK)' - \psi'(Kx(t))B' + x'(t - \tau)A'_d)Px(t) + \\ & x'(t)Sx(t) - x'(t - \tau)Sx(t - \tau) - 2\psi'(Kx(t))T[\psi(Kx(t)) - Gx(t)]. \end{aligned} \quad (80)$$

Definindo-se agora  $K = YW^{-1}$ ,  $U = T^{-1}$ ,  $G = HW^{-1}$ ,  $R = WSW$ ,  $W = P^{-1}$  e pré e pós multiplicando-se (i) por  $Diag(P, T, P)$ , segue que a satisfação de (i) é suficiente para garantir que:

$$\begin{aligned} & 2(x'(t)(A + BK)' - \psi'(Kx(t))B' + x'(t - \tau)A'_d)Px(t) + x'(t)Sx(t) - \\ & x'(t - \tau)Sx(t - \tau) + 2x'(t)G'TB\psi(Kx(t)) - 2\psi'(Kx(t))T\psi(Kx(t)) < 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\dot{V}(t, x_t) < 0, \forall x(t) \in \mathcal{S}.$$

De (ii) segue-se que  $\mathcal{E}(P) \in \mathcal{S}$  (BOYD et al., 1994).

Seja agora,  $x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta)$ ,  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$ , para  $\phi \in \mathcal{B}_\tau(\delta)$ . Se  $\dot{V}(t, x_t) < 0$ , para  $t \geq t_0$ , tem-se:

$$\begin{aligned} x'(t)Px(t) \leq V(t_0, x_{t_0}) & \leq V(t, \phi) = x'(t_0)Px(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s)'Sx(s)ds \leq \\ & (\lambda_{\max}(P) + \tau\lambda_{\max}(S))\|\phi\|_c^2 \leq (\lambda_{\max}(P) + \tau\lambda_{\max}(S))\delta = 1. \end{aligned}$$

Logo segue que, se  $\phi \in \mathcal{B}_\tau(\delta)$ , então

$$x(t) \in \mathcal{E}(P) \subset \mathcal{S}, \forall t \geq t_0,$$

e, efetivamente,

$$\dot{V}(t, x_t) < 0, \forall t \geq 0.$$

Como

$$\lambda_{\min}(P)\|\phi(t_0)\|^2 \leq V(t, \phi) \leq (\lambda_{\max}(P) + \tau\lambda_{\max}(S))\|\phi\|_c^2,$$

as condições do Teorema 1 são satisfeitas  $\forall \phi \in \mathcal{B}_\tau(\delta)$  e, por conseguinte, as correspondentes soluções do sistema em malha-fechada convergem assintoticamente para a origem.  $\square$

Analogamente ao caso Razumikhin-Global, é possível enunciar condições de estabilidade Global.

**Corolário 2 (Krasovskii-Global - IA)** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $W$  e  $R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz diagonal positiva  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $Y$  e  $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  satisfazendo a condição (i) do Teorema 14, com  $H = GW$ , então considerando-se  $K = YW^{-1}$ , a origem do sistema (71) é globalmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** É suficiente considerar-se  $H = GW$  na demonstração do Teorema 14. Neste caso, a desigualdade do Lema 3 é verificada para todo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ , e, portanto, garante-se a estabilidade assintótica global da origem.  $\square$

#### 4.2.2 Condições Dependentes do Atraso

Como bem pode-se observar, os Teoremas 13 e 14 não apresentam nas LMIs a dependência do atraso, ainda que a região de estabilidade seja dependente do mesmo. Para elaborar condições dependentes do atraso nas LMIs, trabalha-se com o sistema transformado, o qual apresenta atrasos distribuídos.

Considerando-se o sistema (71) com  $\theta \in [-\tau, 0]$  e utilizando-se a fórmula de Newton/Leibnitz, obtém-se o sistema transformado, (NICULESCU, 2001, vol. 269):

$$\dot{x}(t) = (A + BK + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau}^t [(A + BK)x(s) + A_dx(s - \tau) - B\psi(Kx(s))]ds - B\psi(Kx(t)), \quad (81)$$

com condição inicial  $x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta)$ ,  $\forall \theta \in [-2\tau, 0]$ ,  $(t_0, \phi) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathcal{C}_{2\tau}^y$ .

Esta mesma transformação fora utilizada em (CAO; LIN; HU, 2002) e em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2004) para obter condições de estabilidade dependentes do atraso.

**Teorema 15 (Krasovskii-Local - DA)** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $W$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e matrizes  $Y$  e  $H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , satisfazendo:*

$$(i) \begin{bmatrix} \Sigma & 0 & H' - BU & \tau(WA' + Y'B') & 0 & 0 \\ * & -R & 0 & 0 & \tau WA'_d & 0 \\ * & * & -2U & 0 & 0 & \tau UB' \\ * & * & * & -\tau P_1 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\tau P_2 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & -\tau P_3 \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} W & Y'_{(i)} - H'_{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

com  $\Sigma = W(A + A_d)' + (A + A_d)W + Y'B' + BY + R + \tau A_d(P_1 + P_2 + P_3)A'_d$  então considerando-se  $K = YW^{-1}$ , para todas as condições iniciais  $\phi$  pertencentes ao conjunto  $\mathcal{B}_{2\tau}(\delta)$ , com

$$\delta = (\lambda_{\max}(W^{-1}) + \tau \lambda_{\max}(W^{-1}RW^{-1}) + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}((A + BK)'P_1^{-1}(A + BK)) + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(A'_d P_2^{-1} A_d) + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(B' P_3^{-1} B) \|HW^{-1}\|^2)^{-1},$$

as correspondentes trajetórias do sistema (71) em malha-fechada, convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** Seja  $V(t, x_t) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5$ , com:

$$V_1 = x'(t)Px(t),$$

$$V_2 = \int_{-\tau}^0 x'(t + \theta)Sx(t + \theta)d\theta,$$

$$V_3 = \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t x'(\zeta)(A + BK)'P_1^{-1}(A + BK)x(\zeta)d\zeta d\theta,$$

$$V_4 = \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t x'(\zeta - \tau)A'_d P_2^{-1} A_dx(\zeta - \tau)d\zeta d\theta,$$

$$V_5 = \int_{-\tau}^0 \int_{t+\theta}^t \psi'(Kx(\zeta))B'P_3^{-1}B\psi(Kx(\zeta))d\zeta d\theta.$$

Calculando-se  $\dot{V}_1$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2(x'(t)(A+BK+A_d)' - \psi'(Kx(t))B')Px(t) + 2 \int_{t-\tau}^t x'(\theta)(A+BK)'A_d'Px(t)d\theta + \\ & 2 \int_{t-\tau}^t (x'(\theta - \tau)A_d' + \psi'(s)B')A_d'Px(t)d\theta. \end{aligned} \quad (82)$$

Aplicando-se a majoração

$$-2\mu'v \leq \mu'X_j\mu + v'X_j^{-1}v$$

para  $j = 1, 2, 3$ , aos termos cruzados de (82), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & (2x'(t)(A+BK+A_d)' - 2\psi'(Kx(t))B')Px(t) + \tau x'(t)PA_d(X_1 + X_2 + X_3)A_d'Px(t) \\ & + \int_{-\tau}^0 x'(t+\theta)(A+BK)'X_1^{-1}(A+BK)x(t+\theta)ds + \int_{-\tau}^0 x'(t+\theta - \tau)A_d' \\ & X_2^{-1}A_dx(t+\theta - \tau)d\theta + \int_{-\tau}^0 \psi'(Kx(t+\theta))B'X_3^{-1}B\psi(Kx(t+\theta))d\theta. \end{aligned}$$

Calculando-se as derivadas de  $V_2, V_3, V_4$  e  $V_5$ , obtém-se:

$$\dot{V}_2 = x'(t)Sx(t) - x'(t-\tau)Sx(t-\tau),$$

$$\dot{V}_3 = \tau x'(t)(A+BK)'P_1^{-1}(A+BK)x(t) - \int_{t-\tau}^t x'(\theta)(A+BK)'P_1^{-1}(A+BK)x(\theta)d\theta,$$

$$\dot{V}_4 = \tau x'(t-\tau)A_d'P_2^{-1}A_dx(t-\tau) - \int_{-\tau}^0 x'(t+\theta - \tau)A_d'P_2^{-1}A_dx(t+\theta - \tau)d\theta,$$

$$\dot{V}_5 = \tau \psi'(Kx(t))B'P_3^{-1}B\psi'(Kx(t)) - \int_{-\tau}^0 \psi'(Kx(t+\theta))B'P_3^{-1}B\psi(Kx(t+\theta))d\theta.$$

Definindo-se  $P_j^{-1} = X_j^{-1}$  para  $j = 1, 2, 3$ , então,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) \leq & 2x'(t)((A+BK+A_d)'P)x(t) + \tau x'(t)PA_d(P_1 + P_2 + P_3)A_d'Px(t) + x'(t)Sx(t) \\ & - x'(t-\tau)Sx(t-\tau) + \tau x'(t-\tau)A_d'P_2^{-1}A_dx(t-\tau) - 2\psi'(Kx(t))B'Px(t) + \\ & \tau x'(t)(A+BK)'P_1^{-1}(A+BK)x(t) + \tau \psi'(Kx(t))B'P_3^{-1}B\psi(Kx(t)). \end{aligned} \quad (83)$$

Se  $x(t) \in \mathcal{S}$ , aplicando-se o Lema 3 e escrevendo-se (83) em forma de produto matricial, tem-se  $\dot{V}(t, x_t) \leq \Theta' \Xi \Theta$ , com

$$\Theta' = [ \ x'(t) \quad x'(t-\tau) \quad \psi'(Kx(t)) \ ]$$

e

$$\Xi = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} (A+BK+A_d)'P + P(A+BK+A_d) + \\ S + \tau PA_d(P_1 + P_2 + P_3)A_d'P + \\ \tau(A+BK)'P_1^{-1}(A+BK) \end{array} \right) & 0 & -PB + G'T \\ * & \tau A_d'P_2^{-1}A_d - S & 0 \\ * & * & \tau B'P_3^{-1}B - 2T \end{bmatrix}.$$

Suponha que  $\Xi < 0$ , então, aplicando-se complemento de Schur, a LMI obtida seguida da pré e pós multiplicação por

$$\text{Diag}(W, W, U, I, I, I)$$

e definindo-se ainda

$$R = WSW, \quad P = W^{-1}, \quad T = U^{-1}, \quad H = GW \text{ e } Y = KW,$$

obtém-se a LMI (i) do Teorema 15, o que permite concluir que:

$$\dot{V}(t, x_t) < 0, \forall x(t) \in \mathcal{S}.$$

A demonstração de que se  $\phi \in \mathcal{B}_{2\tau}(\delta)$ , então  $\dot{V}(t, x_t) < 0, \forall t \geq t_0$ , e as correspondentes trajetórias do sistema (71) estão no conjunto  $\mathcal{E}(P) \subset \mathcal{S}$  é análoga à do Teorema 14.

Da definição de  $V(t, x_t)$ , pode-se concluir que:

$$\lambda_{\min(P)} \|\phi(0)\|^2 \leq V(t, \phi) \leq (\lambda_{\max}(P) + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}((A+BK)'P_1^{-1}(A+BK)) + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(A_d'P_2^{-1}A_d) + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max}(B'P_3^{-1}B) \|H'W^{-1}\|^2 + \tau \lambda_{\max}(S)) \|\phi\|_c^2.$$

Com isso,  $V(t, x_t)$  é um funcional de Lyapunov-Krasovskii. Logo,

$$\forall \phi \in \mathcal{B}_{2\tau}(\delta), \dot{V}(t, x_t) < 0$$

e as trajetórias do sistema convergem assintoticamente para a origem. □

**Corolário 3 (Krasovskii-Global - DA)** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $W, P_1, P_2, P_3$  e  $R \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e uma matriz diagonal definida positiva  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , satisfazendo a condição (i) do Teorema 15, com  $H = GW$ , então considerando-se  $K = YW^{-1}$  a origem do sistema (71) é globalmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** A demonstração é análoga à do Corolário 2. □

Com o objetivo de diminuir o conservadorismo inserido pelos funcionais de Lyapunov ao sistema transformado (81), uma nova representação do sistema, utilizando-se o modelo de sistema descriptor (FRIDMAN; SHAKED, 2002b), conforme visto na seção 3.3.2, é considerada:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A+BK+A_d)x(t) - B\psi(Kx(t)) - A_d \int_{t-\tau}^t y(\theta) d\theta \\ y(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned} \quad (84)$$

com  $x_{t_0}(\theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-\tau, 0], (t_0, \phi) \in \mathfrak{R}^+ \times \mathcal{C}_\tau^V$ .

Dessa forma, obtém-se o seguinte resultado:

**Teorema 16 (Sistema Descriptor - Local)** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $Q_1, L_1, L_3, J, X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Q_2, Q_3, L_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e matrizes  $Y, H \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , uma matriz  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva e um escalar  $\varepsilon$  satisfazendo:*

$$(i) \left[ \begin{array}{cccccc} \left( \begin{array}{c} Q_2 + Q_2' \\ + \tau L_1 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} Q_1 A' + Y' B' \\ + Q_3 - Q_2' + \\ \varepsilon Q_1 A_d' + \tau L_2' \end{array} \right) & 0 & H' & Q_1' & \tau Q_2' \\ * & \left( \begin{array}{c} -Q_3 - Q_3' \\ + \tau L_3 \end{array} \right) & (1 - \varepsilon) A_d X & -BU & 0 & \tau Q_3' \\ * & * & -X & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2U & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -X & 0 \\ * & * & * & * & * & -\tau J \end{array} \right] < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} J & J \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon A'_d \end{bmatrix} \\ * & L \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(iii) \begin{bmatrix} Q_1 & Y'_{(i)} - H'_{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

então, considerando-se  $K = YQ_1^{-1}$ , para todas as condições iniciais  $\phi \in \mathcal{C}_\tau^V$  satisfazendo

$$\lambda_{\max}(Q_1^{-1})\|\phi\|_c^2 + \tau\lambda_{\max}(X^{-1})\|\phi\|_c^2 + \frac{\tau^2}{2}\lambda_{\max}(J^{-1})\|\phi\|_c^2 \leq 1, \quad (85)$$

as correspondentes trajetórias do sistema em malha-fechada (71) convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** Reescrevendo o sistema (71) na forma de sistema descritor, conforme proposto em (FRIDMAN; SHAKED, 2002b), segue que:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A + BK + A_d & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} \int_{t-\tau}^t y(s) ds - \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \psi(Kx(t)). \quad (86)$$

Define-se agora o seguinte conjunto de matrizes:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}', \quad E = \text{Diag}(I, 0), \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}^{-1} = Q^{-1}.$$

Observe que se (i) é satisfeito, tem-se que  $-Q_3 - Q'_3 < 0$ , o que implica que  $Q_3$  é não-singular. Se  $Q_1 > 0$ , segue que a matriz  $Q$  definida acima é inversível.

Considere o funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(t, x_t) = V_1 + V_2 + V_3,$$

com

$$V_1 = \bar{x}' E P \bar{x},$$

$$V_2 = \int_{t-\tau}^t x'(\theta) S x(\theta) d\theta,$$

$$V_3 = \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t y'(\theta) R y(\theta) d\theta ds, \quad \text{e } R, S > 0.$$

Calcula-se agora  $\dot{V}(t, x_t)$  ao longo das trajetórias do sistema. Para isso, define-se o seguinte conjunto de matrizes:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A + BK + A_d & -I \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} \quad \text{e } \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B \end{bmatrix},$$

segue que

$$\dot{V}_1 = 2\bar{x}'(t)\bar{A}'P\bar{x}(t) - 2 \int_{t-\tau}^t y'(s)\bar{A}'_d P \bar{x}(t) ds + 2\psi'(Kx(t))\bar{B}'P\bar{x}(t).$$

Garantindo que  $\begin{bmatrix} R & M \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0$ , obtém-se (MOON et al., 2001) que

$$-2 \int_{\Omega} b' N a \leq \int_{\Omega} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R & M - N \\ * & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}.$$

Aplicando este resultado com

$$b = y(s), M = \varepsilon \bar{A}'_d P, N = \bar{A}'_d P \text{ e } a = \bar{x}(t)$$

obtm-se (FRIDMAN; SHAKED, 2002b):

$$\dot{V}_1 \leq 2\bar{x}'(t)\bar{A}'P\bar{x}(t) + 2\psi'(Kx(t))\bar{B}'P\bar{x}(t) + \int_{t-\tau}^t \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R & (\varepsilon - 1)\bar{A}'_d P \\ * & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} ds.$$

Note que considerando

$$J = R^{-1}, L = Q'ZQ = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ * & L_3 \end{bmatrix},$$

e pré e pós-multiplicando (ii) por  $Diag(R, Q'^{-1})$  e sua transposta respectivamente, segue que

$$\begin{bmatrix} R & \varepsilon \bar{A}'_d P \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0.$$

Então, garantindo que (ii), é satisfeita e definindo  $\bar{\varepsilon} = \varepsilon - 1$ , conclui-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & 2\bar{x}'(t)\bar{A}'P\bar{x}(t) + 2\psi'(Kx(t))\bar{B}'P\bar{x}(t) + \tau\bar{x}'(t)Z\bar{x}(t) \\ & + \int_{t-\tau}^t y'(s)Ry(s)ds + 2\bar{x}'(t)\bar{\varepsilon}\bar{A}'_d P\bar{x}(t) - 2\bar{x}'(t-\tau)(\bar{\varepsilon}\bar{A}'_d P)\bar{x}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & 2\bar{x}'(t)\bar{A}'P\bar{x}(t) + 2\psi'(v_c)\bar{B}'P\bar{x}(t) + \tau\bar{x}'(t)Z\bar{x}(t) \\ & + \int_{t-\tau}^t y'(s)Ry(s)ds + 2\bar{x}'(t) \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}\bar{A}'_d P \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t) - 2\bar{x}'(t-\tau) \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}\bar{A}'_d P \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t). \end{aligned}$$

Agora calcula-se  $\dot{V}_2$  e  $\dot{V}_3$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 & \leq \tau y'(t)Ry(t) - \int_{t-\tau}^t y'(s)Ry(s)ds \\ & = \bar{x}'(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau R \end{bmatrix} \bar{x}(t) - \int_{t-\tau}^t y'(s)Ry(s)ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 & \leq x'(t)Sx(t) - x'(t-\tau)Sx(t-\tau) \\ & = \bar{x}'(t) \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t) - \bar{x}'(t-\tau) \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t-\tau). \end{aligned}$$

Suponha que  $x(t) \in \mathcal{S}$ , do Lema 3, então

$$\dot{V}(t, x_t) \leq \dot{V}(t, x_t) - 2\psi'(Kx(t))T(\psi(Kx(t)) - Gx(t)),$$

obtm-se,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) \leq & 2\bar{x}'(t)\bar{A}'P\bar{x}(t) + 2\psi'(Kx(t))\bar{B}'P\bar{x}(t) + \tau\bar{x}'(t)Z\bar{x}(t) \\ & + \bar{x}'(t) \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \tau R \end{bmatrix} \bar{x}(t) + 2\bar{x}'(t) \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}\bar{A}'_d P \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t) - 2\bar{x}'(t-\tau) \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}\bar{A}'_d P \\ 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t) \\ & - \bar{x}'(t-\tau) \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t-\tau) - 2\psi'(Kx(t))T(\psi(Kx(t)) - Gx(t)). \end{aligned}$$

ou equivalentemente  $\dot{V}(t, x_t) \leq \theta'\Xi\theta$ , com  $\theta$  e  $\Xi$  dados por:

$$\theta' = \begin{bmatrix} \bar{x}'(t) & x'(t-\tau) & \psi'(Kx(t)) \end{bmatrix},$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \left( \begin{array}{c} \bar{A}'P + P'\bar{A} + \tau Z + \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \tau R \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}\bar{A}'_d P \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}P'\bar{A}_d & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) & \begin{bmatrix} -\bar{\varepsilon}P'\bar{A}_d & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G'T \\ 0 \end{bmatrix} + P'\bar{B} \\ * & \begin{bmatrix} -S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ * & * & -2T \end{bmatrix}.$$

Suponha que  $\Xi < 0$ . Então pré e pós multiplicando por  $Diag(Q', X, U)$  e sua transposta, respectivamente, definindo-se

$$Q = P^{-1}, S^{-1} = X, R^{-1} = J, U = T^{-1}, GQ_1 = H \text{ e } Y = KQ_1$$

e aplicando complemento de Schur à desigualdade matricial obtida, pode-se concluir que esta é equivalente à condição (i) do Teorema 16. Logo, as condições (i) e (ii) garantem que  $\dot{V}(t, x_t) < 0$ , contanto que  $x(t) \in \mathcal{S}$ . Da definição de  $V(t, x_t)$ , pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} P_1 \|\phi(0)\|^2 &\leq \phi'(0) P_1 \phi(0) \leq V(t, \phi) \leq \phi'(0) P_1 \phi(0) + \int_{t-\tau}^t \phi'(s) S \phi(s) ds \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \dot{\phi}'(s) R \dot{\phi}(s) ds \leq (\lambda_{\max} P_1 + \tau \lambda_{\max} S) \|\phi\|_C^2 + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{\max} R \|\dot{\phi}\|_C^2. \end{aligned}$$

Com isso,  $V(t, x_t)$  é um funcional de Lyapunov-Krasovskii. Logo,

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_\tau^V, \dot{V}(t, x_t) < 0$$

e as trajetórias do sistema convergem assintoticamente para a origem. □

**Corolário 4 (Sistema Descritor - Global)** *Se existem matrizes definidas positivas  $Q_1, L_1, L_3, X, J, \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Q_2, Q_3, L_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $H$  e  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , uma matriz diagonal  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , e escalares  $\varepsilon$  e  $\gamma > 0$ , satisfazendo as desigualdades (i) e (ii) no Teorema 16, com  $H = GQ_1$ , então considerando-se  $K = YQ_1^{-1}$  a origem do sistema (71) é globalmente assintoticamente estável.*

**Demonstração:** A demonstração é análoga à do Corolário 2. □

### 4.2.3 Problemas de Otimização

Nesta seção, mostra-se como utilizar as condições apresentadas nos Teoremas 13, 14 e 16, para a maximização dos conjuntos  $\mathcal{E}(P)$  ou  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ , ou ainda a maximização do atraso admissível para  $\mathcal{E}(P)$  ou  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$  dados.

#### 4.2.3.1 Maximização do conjunto de estados iniciais admissíveis

##### A) Caso independente do atraso

- *Lyapunov-Razumikhin:* No caso do Teorema 13, utiliza-se uma função de Lyapunov-Razumikhin para provar a estabilidade, sendo assim, o conjunto de condições iniciais admissíveis é o elipsóide  $\mathcal{E}(P)$ . Para isso, considera-se, por exemplo, a maximização do eixo menor de  $\mathcal{E}(P)$ , a partir do seguinte

problema<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} & \min \lambda_W \\ & \text{sujeito às relações: (i), (ii), (iii) do Teorema 13 e} \\ & \text{(iv) } \begin{bmatrix} \lambda_W I & I \\ I & W \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (87)$$

- *Lyapunov-Krasovskii*: Para o Teorema 14, é necessário maximizar a bola  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ . A idéia neste caso é minimizar o valor de

$$(\beta_1 \lambda_{\max}(W^{-1}) + \beta_2 \lambda_{\max}(R)),$$

com  $\beta_1$  e  $\beta_2$  parâmetros de ajuste. Isto pode ser indiretamente feito, considerando o seguinte problema de otimização convexo:

$$\begin{aligned} & \min \beta_1 \lambda_W + \beta_2 \lambda_R \\ & \text{sujeito às relações (i), (ii) do Teorema 14 e} \\ & \text{(iii) } \begin{bmatrix} \lambda_W I & I \\ I & W \end{bmatrix} \geq 0, \lambda_R I \geq R. \end{aligned} \quad (88)$$

## B) Caso dependente do atraso

- *Sistema escrito com atrasos distribuídos*: Utilizando-se as condições do Teorema 15, uma maneira de maximizar  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$  é considerar o seguinte critério:

$$\min \left( \begin{array}{c} \beta_1 \lambda_{\max}(W^{-1}) + \beta_2 \lambda_{\max} R + \beta_3 \lambda_{\max}((A + BK)P_1^{-1}(A + BK)) + \\ \beta_4 \lambda_{\max}(A'_d P_2^{-1} A_d) + \beta_5 \lambda_{\max}(B' P_3^{-1} B) \end{array} \right).$$

Entretanto, tal critério não é convexo. Alternativamente esta minimização pode ser indiretamente feita considerando-se o seguinte problema de otimização convexo<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} & \min \beta_1 \lambda_W + \beta_2 \lambda_R + \beta_3 \lambda_{P_1} + \beta_4 \lambda_{P_2} + \beta_5 \lambda_{P_3} \\ & \text{sujeito às relações (i), (ii), (iii) do Teorema 15 e} \\ & \text{(iv) } \begin{bmatrix} \lambda_W I & I \\ I & W \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \lambda_{P_2} I & A'_d \\ * & P_2 \end{bmatrix} \geq 0, \lambda_R I \geq R, \\ & \begin{bmatrix} \lambda_{P_1} I & WA' + Y'B' \\ * & P_1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \lambda_{P_3} I & B' \\ * & P_3 \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (89)$$

- *Sistema descritor*: Com o objetivo de garantir a estabilidade do sistema (71) em malha-fechada, pelo uso do Teorema 16, as condições iniciais  $\phi$  precisam verificar a condição (85). Dessa forma, assume-se que

$$\|\phi\|_c^2 \leq \delta_1 \text{ e } \|\dot{\phi}\|_c^2 \leq \delta_2.$$

Neste caso, o objetivo é maximizar os limites para  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Formula-se assim o seguinte problema de otimização<sup>3</sup>:

<sup>1</sup>Note que a LMI (iv), bem como a LMI (iii) do problema (88) são equivalentes a  $\lambda_W \geq \lambda_{\max}(W^{-1})$ .

<sup>2</sup>Isto deve-se ao fato de que as LMI's da condição (88) serem respectivamente equivalentes a  $\lambda_W \geq \lambda_{\max}(W^{-1})$ ,  $\lambda_{P_2} \geq \lambda_{\max}(A'_d P_2^{-1} A_d)$ ,  $\lambda_R \geq \lambda_{\max}(R)$ ,  $\lambda_{P_1} \geq \lambda_{\max}((A + BK)P_1^{-1}(A + BK))$  e  $\lambda_{P_3} \geq \lambda_{\max}(B' P_3^{-1} B)$ .

<sup>3</sup>Neste caso, as LMI's da condição (iv) são respectivamente equivalentes a  $\lambda_{Q_1} \geq \lambda_{\max}(Q_1^{-1})$ ,  $\lambda_X \geq \lambda_{\max}(X^{-1})$ ,  $\lambda_J \geq \lambda_{\max}(J)$ .

$$\begin{aligned}
& \min \beta_1 \lambda_{Q_1} + \beta_2 \lambda_X + \beta_3 \lambda_J \\
& \text{sujeito às relações (i), (ii), (iii) e} \\
\text{(iv)} \quad & \begin{bmatrix} \lambda_{Q_1} I & I \\ I & Q_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \lambda_X I & I \\ I & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \lambda_J I & I \\ I & J \end{bmatrix} \geq 0.
\end{aligned} \tag{90}$$

#### 4.2.3.2 Maximização do atraso admissível para um dado conjunto de estados iniciais admissíveis

A idéia aqui é encontrar o intervalo máximo do atraso  $[0, h]$ , para o qual é possível encontrar um conjunto de condições iniciais garantindo a estabilidade assintótica local. Considera-se então o seguinte problema, para cada um dos Teoremas 14, 15 e 16:

$$\begin{aligned}
& \max h \\
& \text{sujeito as desigualdades matriciais dos respectivos Teoremas.}
\end{aligned} \tag{91}$$

Por outro lado, considerando dado um conjunto de condições iniciais admissíveis para as quais deve-se garantir estabilidade, pode-se calcular o máximo atraso tolerado. Neste caso, restrições adicionais a (91) devem ser consideradas, para cada um dos casos, como segue:

A) Caso independente do atraso:

- *Lyapunov-Krasovskii*: Mesmo que as LMIs do Teoremas 14 sejam independentes do atraso, o conjunto de condições iniciais admissíveis é dependente, então é possível calcular o atraso máximo  $h$ , visando a garantia de estabilidade especificamente para  $\|\phi\|_c^2 \leq \delta$ , com  $\delta$  dado, a restrição (iii) de (88) e a restrição

$$(\lambda_W + \tau \lambda_R) \delta < 1$$

que devem ser adicionadas ao problema de otimização (91).

B) Caso dependente do atraso:

Para este caso, tanto as desigualdades matriciais quanto o conjunto de condições iniciais admissíveis, depende do atraso  $h$ .

- *Sistema escrito com atrasos distribuídos*: Neste caso, calcula-se  $h$ , visando a garantia de estabilidade especificamente para  $\|\phi\|_c^2 \leq \delta$ , com  $\delta$  dado, a restrição (iv) de (89) e a restrição

$$(\lambda_W + \tau \lambda_R + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{P_1} + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{P_2} + \frac{\tau^2}{2} \lambda_{P_3} \|G\|^2) \delta < 1$$

devem ser adicionadas ao problema de otimização (91).

Perceba-se que além de fixar  $h$  é necessário que se fixe  $\lambda_{P_3}$ . Assim, faz-se uma busca iterativa em  $h$  e  $\lambda_{P_3}$  em uma busca sobre uma grade bidimensional, para poder resolver este problema.

- *Sistema descritor*: Aqui o conjunto de condições iniciais admissíveis depende também de  $\phi$ , assim, considerando calcular o máximo  $h$ , visando a garantia de estabilidade especificamente para  $\|\phi\|_c^2 \leq \delta_1$  e  $\|\dot{\phi}\|_c^2 \leq \delta_2$ , com  $\delta_1$  e  $\delta_2$  dados, a restrição (iv) de (90) e a restrição

$$(\lambda_{Q_1} + \tau \lambda_X) \delta_1 + \frac{\tau^2}{2} \lambda_J \delta_2 < 1$$

devem ser adicionadas ao problema de otimização (91).

**Observação 5** *Se comparados os problemas de otimização acima com os obtidos em (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000) e em (CAO; LIN; HU, 2002), percebe-se que estes são obtidos diretamente na forma de LMIs, as quais são em menor número. Isto se deve ao fato de utilizar-se a condição de setor generalizada para não-linearidades, tipo zona-morta, para modelar a saturação, ao invés da abordagem politópica.*

**Observação 6** *Em se tratando do caso de análise de estabilidade, no artigo (GHIGGI; GOMES DA SILVA JR., 2006a) são apresentados exemplos com o objetivo de mostrarem-se as vantagens obtidas com a utilização da função de Lyapunov-Razumikhin sobre o funcional de Lyapunov-Krasovskii, no caso independente do atraso, e as vantagens do Sistema Descritor sobre a representação do sistema com atrasos distribuídos, utilizando o funcional de Lyapunov-Krasovskii. Para o caso de estabilização essas vantagens poderão ser percebidas no Exemplo 1 a seguir.*

### 4.3 Tolerância e Atenuação de Perturbações

#### 4.3.1 Resultados Teóricos

Considere o seguinte sistema com atraso no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) - B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= Cx(t) - D_u u(t) + D_w w(t)\end{aligned}\quad (92)$$

novamente supõe-se que a entrada esteja sujeita a saturações  $u(t) = \text{sat}(Kx(t))$ . Utilizando-se a função zona-morta definida em (29) para modelar a saturação, têm-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A + B_u K)x(t) + A_d x(t - \tau) - B_u \Psi(Kx(t)) + B_w w(t) \\ z(t) &= (C + D_u K)x(t) - D_u \Psi(Kx(t)) + D_w w(t)\end{aligned}\quad (93)$$

sendo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $w(t) \in \mathfrak{R}^q$  os vetores do estado e da perturbação, respectivamente.  $z(t) \in \mathfrak{R}^p$  corresponde à saída medida e  $z(t) \in \mathfrak{R}^r$  é a saída regulada.  $A$ ,  $A_d$ ,  $B_u$ ,  $B_w$ ,  $C$ ,  $D_u$  e  $D_w$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas. Supõe-se que o par  $(A, B)$  seja controlável e o par  $(C, A)$  seja observável.  $\tau$  é o atraso no tempo, suposto constante e conhecido.

Nesta seção, diferentemente do artigo (GHIGGI; GOMES DA SILVA JR., 2006a) e da seção 4.2, considera-se que o sistema esteja sujeito a perturbações limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ , ou seja, assume-se que

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w'(t)w(t)dt \leq \frac{1}{\varpi}.\quad (94)$$

Conforme comentado no Capítulo 2, dois problemas são de interesse neste caso: a estabilização entrada-estado e a estabilização entrada-saída. Sendo assim, o objetivo neste caso consiste em calcular um ganho de realimentação, tal que:

- as trajetórias do sistema em malha-fechada permaneçam limitadas, considerando-se um limite superior para a norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação;
- o ganho- $\mathcal{L}_2$  entre a perturbação e a saída controlada seja minimizado.

Considera-se também que o atraso possa ser variante no tempo, neste caso assume-se que

$$\begin{aligned}0 &< \tau(t) \leq h \\ \dot{\tau}(t) &< d < 1.\end{aligned}\quad (95)$$

Os resultados a seguir apresentados podem também ser encontrados em (GOMES DA SILVA JR.; GHIGGI; TARBOURIECH, 2006).

**Teorema 17** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $Q_1, L_1, L_3, X, J \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Q_2, Q_3, L_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $H$  e  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e escalares positivos  $\varepsilon$  e  $\gamma$ , tais que as seguintes desigualdades sejam verificadas*

$$(i) \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \begin{pmatrix} H' \\ -B_u U \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ B_w \end{pmatrix} & \Sigma_3 & \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} hQ_2' \\ hQ_3' \end{pmatrix} \\ * & -(1-d)X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -2U & 0 & -UD_u' & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & D_w' & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -X & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -hJ \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} J & J \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon A_d' \end{bmatrix} \\ * & L \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(iii) \begin{bmatrix} Q_1 & Y_{(i)}' - H_{(i)}' \\ * & \varpi u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

com

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} Q_2' + Q_2 + hL_1 & \begin{pmatrix} Q_3 + Q_1 A' + Y' B_u' \\ -Q_2' + \varepsilon Q_1 A_d' + hL_2 \end{pmatrix} \\ * & -Q_3' - Q_3 + hL_3 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ (\varepsilon - 1)A_d X \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma_3 = \begin{bmatrix} Q_1 C' + Y' D_u' \\ 0 \end{bmatrix},$$

então, considerando que  $\phi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0], \|w\|_2^2 \leq \varpi^{-1}$  e  $K = YQ_1^{-1}$

1. as trajetórias do sistema (93) em malha-fechada permanecem limitadas no conjunto

$$\mathcal{E}(Q^{-1}, \varpi^{-1}) \triangleq \{x \in \mathfrak{R}^n; x' Q_1^{-1} x \leq \varpi^{-1}\},$$

2.  $\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2$ ,

3. se  $w(t) = 0, \forall t \geq t_1 \geq 0, x(t)$  converge assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** Reescrevendo-se o sistema (48) na forma de sistema descritor, proposto em (FRIDMAN; SHAKED, 2002b), segue que:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A + B_u K + A_d & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix} \int_{t-\tau}^t y(s) ds - \begin{bmatrix} 0 \\ B_u \end{bmatrix} \psi(Kx(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} w(t). \quad (96)$$

Defina:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_2 & Q_3 \end{bmatrix}^{-1} = Q^{-1}.$$

Note que se (i) é satisfeito, tem-se  $-Q_3 - Q'_3 < 0$ , o que implica que  $Q_3$  é não-singular. Como  $Q_1 > 0$ , segue-se que a matriz  $Q$  definida acima, é inversível.

Seja o funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(t, \bar{x}_t) = \bar{x}'(t)EP\bar{x}(t) + \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t y'(\theta)Ry(\theta)d\theta ds + \int_{t-\tau(t)}^t x'(\theta)Sx(\theta)d\theta$$

com  $S = S', R = R' > 0$ .

Defina agora

$$\Upsilon = \dot{V}(t, x_t) - w'(t)w(t) + \frac{1}{\gamma}z'(t)z(t). \quad (97)$$

Se  $\Upsilon < 0$ , obtém-se

$$\int_0^T \Upsilon dt = V(T, x_T) - V(0, x_0) - \int_0^T w'(t)w(t)dt + \frac{1}{\gamma} \int_0^T z'(t)z(t)dt < 0. \quad (98)$$

Supondo-se que  $\phi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$ , segue que  $V(0, 0) = 0$  e, portanto, de (98) pode-se concluir que:

- $x'(T)Q_1^{-1}x(T) \leq V(T, x_T) < \varpi^{-1}, \forall T > 0$ , i.e. as trajetórias do sistema em malha fechada não saem do conjunto  $\mathcal{E}(Q^{-1}, \varpi^{-1})$ , para  $w(t)$  satisfazendo (94),
- para  $T \rightarrow \infty: \|z\|_2^2 < \gamma\|w\|_2^2$ ,
- se  $w(t) = 0, \forall t \geq t_1 \geq 0$  ou se  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \rightarrow 0$ , então  $\dot{V}(t, x_t) < -\frac{1}{\gamma}z'(t)z(t) < 0$ , o que garante neste caso que  $x(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

Calcula-se agora  $\Upsilon$  ao longo das trajetórias de (48). Para tanto, definem-se as seguintes matrizes:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A + B_u K + A_d & -I \end{bmatrix}, \bar{A}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ A_d \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_u \end{bmatrix} \text{ e } \bar{B}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix}.$$

Considerando  $V_1(t) = \bar{x}'(t)EP\bar{x}(t)$  então,

$$\dot{V}_1(t) = 2\bar{x}'(t)\bar{A}'P\bar{x}(t) - 2 \int_{t-\tau(t)}^t y'(s)\bar{A}'_d P\bar{x}(t)ds + 2\psi'(Kx(t))\bar{B}'P\bar{x}(t) + 2w'(t)\bar{B}'_w P\bar{x}(t).$$

Garantido que

$$\begin{bmatrix} R & M \\ * & Z \end{bmatrix} > 0,$$

tem-se que

$$-2 \int_{\Omega} b'Na \leq \int_{\Omega} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R & M-N \\ * & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$$

(MOON et al., 2001). Aplicando este resultado com

$$b = y(s), M = \varepsilon\bar{A}'_d P, N = \bar{A}'_d P \text{ e } a = \bar{x}(t)$$

(FRIDMAN; SHAKED, 2002b), obtém-se:

$$\dot{V}_1(t) \leq 2\bar{x}'(t)\bar{A}'P\bar{x}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R & (\varepsilon-1)\bar{A}'_d P \\ * & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(s) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} ds + 2\psi'(Kx(t))\bar{B}'P\bar{x}(t) + 2w'(t)\bar{B}'_w P\bar{x}(t).$$

Considerando-se

$$J = R^{-1}, L = Q'ZQ = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ * & L_3 \end{bmatrix},$$

e pré e pós-multiplicando-se (ii), por  $Diag(R, (Q')^{-1})$  e  $Diag(R, Q^{-1})$ , segue que

$$\begin{bmatrix} R & \varepsilon \bar{A}'_d P \\ * & Z \end{bmatrix} > 0.$$

Então, garantindo que (ii) é satisfeita, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) \leq & 2\bar{x}'(t)\bar{A}'P\bar{x}(t) + 2\psi'(Kx(t))\bar{B}'P\bar{x}(t) + 2w'(t)\bar{B}'_w P\bar{x}(t) + h\bar{x}'(t)Z\bar{x}(t) + \\ & \int_{t-h}^t y'(s)Ry(s)ds + 2x'(t)(\varepsilon - 1)\bar{A}'_d P\bar{x}(t) - 2x'(t - \tau(t))(\varepsilon - 1)\bar{A}'_d P\bar{x}(t). \end{aligned} \quad (99)$$

Sejam

$$V_2(t) = \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t y'(\theta)Ry(\theta)d\theta ds$$

e

$$V_3(t) = \int_{t-\tau(t)}^t x'(\theta)Sx(\theta)d\theta,$$

calculando-se agora  $\dot{V}_2$  e  $\dot{V}_3$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) & \leq hy'(t)Ry(t) - \int_{t-h}^t y'(s)Ry(s)ds \\ & = \bar{x}'(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & hR \end{bmatrix} \bar{x}(t) - \int_{t-h}^t y'(s)Ry(s)ds, \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) & \leq x'(t)Sx(t) - (1-d)x'(t - \tau(t))Sx(t - \tau(t)) \\ & = \bar{x}'(t) \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t) - \bar{d}x'(t - \tau(t))Sx(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (101)$$

Suponha que  $x(t) \in \mathcal{S}$ . Neste caso, usando-se o fato que  $\psi(Kx(t))$  satisfaz a condição (36) e levando-se em consideração que

$$z(t) = \begin{bmatrix} C + D_u K & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(t) - D_u \psi(Kx(t)) + D_w w(t) = \mathbb{C}_z - D_u \psi(Kx(t)) + D_w w(t)$$

obtm-se que

$$\Upsilon \leq \theta' \Xi \theta, \text{ com } \theta' = [\bar{x}'(t) \quad x'(t - \tau(t)) \quad \psi'(Kx(t)) \quad w'(t)]$$

e

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & (\varepsilon - 1)P'\bar{A}_d & \begin{pmatrix} G'T \\ 0 \end{pmatrix} + P'\bar{B} - \frac{1}{\gamma}C'_z D_u & P'\bar{B}_w + \frac{1}{\gamma}C'_z D_w \\ * & -\bar{d}S & 0 & 0 \\ * & * & \begin{pmatrix} -2T \\ +\gamma^{-1}D'_u D_u \end{pmatrix} & -\gamma^{-1}D'_u D_w \\ * & * & * & (\gamma^{-1}D'_w D_w - I) \end{bmatrix}$$

com

$$\Gamma_1 = \bar{A}'P + P'\bar{A} + \begin{bmatrix} (\varepsilon - 1)\bar{A}'_d P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\varepsilon - 1)P'\bar{A}_d & 0 \end{bmatrix} + hZ + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & hR \end{bmatrix} + \frac{1}{\gamma}C'_z C_z.$$

Aplicando-se complemento de Schur, nota-se que  $\Xi < 0$  é equivalente à:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_1 & (\varepsilon - 1)P'\bar{A}_d & P'\bar{B} + \begin{pmatrix} G'T \\ 0 \end{pmatrix} & P'\bar{B}_w & \begin{pmatrix} C' + K'D'_u \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ hI \end{pmatrix} \\ * & -\bar{d}S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -2T & 0 & -D'_u & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & D'_w & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -S^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -hR^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (102)$$

$$\text{com } \bar{\Gamma}_1 = \bar{A}'P + P'\bar{A} + \begin{bmatrix} (\varepsilon - 1)\bar{A}'_d P \\ 0 \end{bmatrix} + [(\varepsilon - 1)P'\bar{A}_d \quad 0] + hZ.$$

Definindo-se

$$Q = P^{-1}, S^{-1} = X, R^{-1} = J, U = T^{-1}, GQ_1 = H \text{ e } Y = KQ_1,$$

e pré e pós multiplicando-se (i) respectivamente por  $\text{Diag}(P, S, T, I, I, I, I)$  e sua transposta, segue que (102) é equivalente à (i). Dessa forma, pode-se concluir que (i) e (ii) asseguram que  $\Upsilon < 0$ , desde que  $x(t) \in \mathcal{S}$ . Por outro lado, pré e pós multiplicando-se (iii) respectivamente por  $\text{Diag}(P_1, 1)$  e sua transposta, segue que

$$\begin{bmatrix} P_1 & K'_{(i)} - G'_{(i)} \\ * & \varpi u_{0(i)} \end{bmatrix} > 0,$$

o que implica que  $\mathcal{E}(Q_1^{-1}, \varpi^{-1}) \subset \mathcal{S}$ . Então, está garantido que as trajetórias do sistema nunca saem de  $\mathcal{E}(Q_1^{-1}, \varpi^{-1})$ , e portanto  $\Upsilon < 0$ , se satisfeitas as desigualdades matriciais (i), (ii) e (iii). □

**Observação 7** Perceba-se que no Teorema 17 há a dependência de  $\bar{d}$ , na posição (2,2) da desigualdade matricial (i), isto deve-se ao fato de ter-se imposto a condição (95).

Abaixo enunciam-se condições que garantem que o sistema seja globalmente assintoticamente estável e que o sistema seja  $\mathcal{L}_2$ -estável<sup>4</sup>,  $\forall w \in \mathcal{L}_2$ .

**Corolário 5** Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $Q_1, L_1, L_3, X, J \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , matrizes  $Q_2, Q_3, L_2 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $H$  e  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e escalares  $\varepsilon$  e  $\gamma$  positivos, tais que as desigualdades (i) e (ii) do Teorema 17 com  $H = GQ_1$ , sejam satisfeitas, então considerando-se  $K = YQ_1^{-1}$ , para todo  $w(t) \in \mathcal{L}_2$  tem-se que:

1. se  $w \neq 0$ :
  - a. as trajetórias do sistema (93) em malha-fechada permanecem limitadas.
  - b.  $\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2 + V(0, 0)$ ,
2. se  $w(t) = 0$ , a origem do sistema em malha-fechada é globalmente assintoticamente estável.

<sup>4</sup>Conforme visto na Definição 1 de  $\mathcal{L}_p$ -estável.

**Observação 8** Considerando-se que a taxa de variação do atraso seja  $d \geq 1$ , condições semelhantes as do Teorema 17 podem ser obtidas. Basta considerar o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V(t, x_t) = \bar{x}(t)'EP\bar{x}(t) + \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t y'(\theta)Ry(\theta)d\theta ds$$

com  $R > 0$ . Para este funcional e  $\varepsilon = 1$ , a condição (i) do Teorema 17 é simplificada e torna-se independente de  $d$ , conforme abaixo:

$$(i) \quad \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \begin{pmatrix} H' \\ -B_u U \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ B_w \end{pmatrix} & \Sigma_3 & \begin{pmatrix} hQ'_2 \\ hQ'_3 \end{pmatrix} \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & -2U & 0 & -UD'_u & 0 \\ * & * & -I & D'_w & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & * & -hJ \end{bmatrix} < 0$$

As condições (ii) e (iii), permanecem as mesmas.

### 4.3.2 Problemas de Otimização

A partir das condições do Teorema 17, podem ser formulados problemas de otimização para a determinação do ganho  $K$  com os objetivos de: maximizar a perturbação admissível, minimizar o ganho  $\mathcal{L}_2$  e maximizar o limite superior para o atraso.

#### 4.3.2.1 Maximização da perturbação admissível

Deseja-se neste caso, maximizar a tolerância à perturbação. Considerando  $\|w\|_2^2 < \frac{1}{\varpi}$  a idéia é maximizar o limite da perturbação  $\frac{1}{\varpi}$ , para a qual pode-se garantir que as trajetórias do sistema (93) permaneçam limitadas. Isto pode ser resolvido pelo seguinte problema de otimização.

$$\begin{aligned} & \min \varpi \\ & \text{sujeito às relações (i), (ii) e (iii).} \end{aligned} \quad (103)$$

**Observação 9** Note que neste problema de otimização nenhuma restrição é imposta sobre a varável  $\gamma$ , podendo essa assumir qualquer valor positivo.

#### 4.3.2.2 Minimização do ganho $\mathcal{L}_2$

Neste caso, deseja-se resolver o problema de atenuação à perturbação, ou seja, dado um limite  $(1/\varpi)$  para a perturbação admissível, a idéia é minimizar o limite superior  $\sqrt{\gamma}$  do ganho- $\mathcal{L}_2$ ;

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito às relações (i), (ii) e (iii).} \end{aligned} \quad (104)$$

#### 4.3.2.3 Maximizar o limite superior para o atraso

Dados o limite  $(1/\varpi)$  para a perturbação admissível, o limite mínimo  $(\sqrt{\gamma})$  para o ganho- $\mathcal{L}_2$  e a taxa de variação máxima  $d$  para o atraso, a idéia é encontrar o limite máximo  $h$  do atraso para o qual pode-se garantir que as trajetórias do sistema (93) sejam limitadas com um ganho- $\mathcal{L}_2$  pré-especificado.

$$\begin{aligned} & \max h \\ & \text{sujeito às relações (i), (ii) e (iii).} \end{aligned} \quad (105)$$

**Observação 10** Considerando-se um  $\varepsilon$  fixo, as condições (i) and (ii) no Teorema 17 são LMIs e os problemas de otimização, formulados aqui, são convexos. Assim, a solução ótima para os problemas pode ser obtida através de uma procura iterativa, realizando uma varredura unidimensional em  $\varepsilon$ . Por outro lado, devido ao produto entre  $h$  e as matrizes  $Q$ ,  $L$  e  $J$ , a solução do problema da maximização do limite para o atraso pode ser obtido pelo aumento do valor de  $h$  iterativamente, e testando a factibilidade das condições (i), (ii) e (iii) no Teorema 17, as quais são LMIs para  $h$  e  $\varepsilon$  fixos.

#### 4.4 Exemplos Numéricos

**Exemplo 1** Considerando o sistema (71) dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix}; A_d = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e  $u_0 = 15$ ;  $\tau = 1$ , resolvem-se todos os problemas de otimização formulados na seção 4.2.3.

- **Estabilização Independente do Atraso - Lyapunov Razumikhin:**

Pela solução do problema (87), tem-se que o eixo menor do elipsóide mede 6644.7 e a matriz de ganho é dada por

$$K = [ -7740.4 \quad -777.2 ].$$

Perceba que nas condições do Teorema 13, bem como no problema de otimização (87), não aparece a dependência do atraso.

- **Estabilização Independente do Atraso - Lyapunov Krasovskii:**

Pela solução do problema (88), tem-se que o raio da bola de estabilidade é dado por 3102.1, sendo a matriz de ganho dada por

$$K = [ -10493 \quad -5363 ].$$

Embora nem as condições no Teorema 14 e nem o problema (88) sejam dependentes do atraso, tem-se que o raio que determina o conjunto de estabilidade é dependente do mesmo. Esse fato pode ser percebido na Tabela 1, quanto maior o valor de atraso permitido, menor será o raio do conjunto  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ .

Tabela 1: Influência do atraso no raio do conjunto  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$  para o caso independente do atraso.

$\tau$	$\delta$
1	3102.1
0.5	4731.9
0.25	6418.0
0.05	8976.7
0.01	9754.5

**Observação 11** De acordo com o ilustrado na Tabela 1 pode-se concluir que para atrasos pequenos, a solução do problema (88) é menos conservadora que a solução problema de otimização (87).

• **Estabilização Dependente do Atraso - Sistema com atrasos distribuídos:**

Neste problema, além das condições do Teorema 15 serem dependentes do atraso, a determinação do conjunto  $\mathcal{B}_{2\tau}(\delta)$  também depende. Assim, considerando-se no problema (89) que  $\beta_i = 1$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , obtém-se que atrasos maiores implicam num conjunto  $\mathcal{B}_{2\tau}(\delta)$  menor, conforme mostrado na Tabela 2.

Tabela 2: Influência do atraso no raio do conjunto  $\mathcal{B}_{2\tau}(\delta)$  para o caso dependente do atraso.

$\tau$	$\delta$	K	
1	18.0091	-0.2717	1.6700
0.5	22.3491	-0.2675	1.6370
0.25	26.7949	-0.2634	1.5978
0.05	36.7597	-0.2446	1.3911
0.01	52.1778	-0.2166	1.0874

• **Estabilização Dependente do Atraso - Sistema Descritor - Local:**

Considerando-se que  $\delta_1 = \delta_2$  e  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$  no problema (90), constroem-se as Tabelas 3, 4, 5 que ilustram a dependência do atraso com o conjunto de estabilidade, ou seja, quanto maior o atraso menor o raio da bola

$$\mathcal{B}_{\tau}(\delta) = \{\phi \in \mathcal{C}_{\tau}^V; (\lambda_{\max}(Q_1^{-1}) + \tau\lambda_{\max}(X^{-1}) + \frac{\tau^2}{2}\lambda_{\max}(J^{-1}))\|\phi\|_c^2 \leq 1\}.$$

Para cada caso tem-se o  $\varepsilon$  relacionado que permite que estes valores sejam maximizados. Observa-se que, neste caso, é possível obterem-se soluções menos conservadoras para o tamanho do conjunto de condições iniciais admissíveis que nos casos precedentes, confirmando a redução do conservadorismo imposto pela abordagem de sistema descritor.

Tabela 3: Influência do atraso  $\tau = 1.5$  no raio do conjunto  $\mathcal{B}_{\tau}(\delta)$ .

K		$\delta$	$\varepsilon$
-1511.8	-751.4	$3.2705e \times 10^3$	0
-6.9950	-0.1507	$3.0678 \times 10^3$	0.7
-5.8610	0.4098	$2.7421 \times 10^3$	1

**Observação 12** Perceba-se que em se tratando da obtenção de condições que sejam dependentes do atraso, a utilização do Teorema 16, permite a obtenção de resultados menos conservadores que os obtidos através da utilização Teorema 15.

Tabela 4: Influência do atraso  $\tau = 1$  no raio do conjunto  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ .

$K$	$\delta$	$\varepsilon$
$\begin{bmatrix} -2166.3 & -1076.0 \end{bmatrix}$	$4.0682 \times 10^3$	0
$\begin{bmatrix} -8.2354 & -0.3135 \end{bmatrix}$	$5.6610 \times 10^3$	0.8
$\begin{bmatrix} -7.0944 & 0.4605 \end{bmatrix}$	$6.1831 \times 10^3$	1

Tabela 5: Influência do atraso  $\tau = 1.5$  no raio do conjunto  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ .

$K$	$\delta$	$\varepsilon$
$\begin{bmatrix} -2612.8 & -1298.2 \end{bmatrix}$	$5.3837 \times 10^3$	0
$\begin{bmatrix} -16.5107 & -1.3381 \end{bmatrix}$	$1.1221 \times 10^4$	1
$\begin{bmatrix} -10.0244 & 0.6086 \end{bmatrix}$	$6.8040 \times 10^3$	1.4

**Exemplo 2** Considere o sistema dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix}; A_d = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}; B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}; D_u = 0;$$

$$\tau = 1.5; \varepsilon = 0.2; u_0 = 15; d = 0.$$

Resolvendo-se o problema de otimização (103), obtém-se que<sup>5</sup>  $\bar{\omega} \geq 1.379 \times 10^{-5}$ , logo  $\|w\|_2 \leq 269.2885$ . Para este valor de  $\bar{\omega}$ , resolve-se o problema (104), obtendo-se assim  $\gamma = 939.1233$ .

Na Tabela 6, apresenta-se como o atraso está relacionado com o limite para a norma  $\mathcal{L}_2$  e com o ganho- $\mathcal{L}_2$ , e é obtida fixando-se  $\sqrt{\frac{1}{\bar{\omega}}}$  e  $\sqrt{\gamma}$  e resolvendo-se o problema (105), o valor máximo para  $h$  é obtido a partir de um problema de factibilidade.

Tabela 6: Relação do atraso com a norma  $\mathcal{L}_2$  e com o ganho- $\mathcal{L}_2$ .

$\sqrt{\frac{1}{\bar{\omega}}}$	$\sqrt{\gamma}$	$h$
223.6068	26.4575	2.9706
0.0022	26.4575	14.0419
0.0022	8.3666	13.4801

Observando os resultados obtidos na 2ª linha da Tabela com a 1ª, percebe-se que à medida que diminui-se o valor do limite para a norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação e mantém-se fixo o valor do ganho- $\mathcal{L}_2$ , o valor do atraso máximo aumenta. Observando agora os resultados obtidos na 3ª linha da Tabela com a 2ª, percebe-se que à medida que mantém-se o valor do limite para a norma  $\mathcal{L}_2$  e diminui-se o valor do ganho- $\mathcal{L}_2$ , o valor do atraso máximo diminui.

<sup>5</sup>valor de  $\varepsilon$  utilizado para resolver (103), foi obtido através de uma busca no intervalo  $[-1, 2]$  com um passo de 0.1.

## 4.5 Conclusão

Neste capítulo apresentaram-se os resultados obtidos em relação ao problema de realimentação de estados. Num primeiro momento, trabalhou-se a questão da estabilização interna, onde são apresentadas condições para estabilização local e global, via utilização dos Teoremas de Lyapunov 1 e 2, tanto para o caso independente do atraso como para o caso dependente do atraso, juntamente com problemas de otimização convexos. Num segundo momento, consideraram-se a atuação de uma perturbação limitada em energia sobre o sistema, dessa forma, apresentou-se condições locais e globais para que as trajetórias do sistema em malha-fechada permanecessem limitadas.

Comparando-se agora os resultados obtidos com (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003), tem-se que, para obter condições com a finalidade de projetar um ganho  $K$ , neste trabalho é utilizada a representação politópica mais geral (28) para a saturação, o que permite que sejam obtidas apenas condições locais de estabilidade. Já na abordagem proposta no Teorema 17, devido à utilização da condição de setor generalizada (36), obtêm-se condições de estabilização tanto locais como globais. Outra desvantagem da utilização do modelo politópico (28) é a grande quantidade de LMIs, as quais apresentam-se num número de  $2 \times 2^m + m + 1$ , ao passo que no Teorema 17 encontram-se apenas  $2 + m$  LMIs. Considerando o problema de atenuação e tolerância à perturbação em (FRIDMAN; PILA; SHAKED, 2003) para projetar o ganho  $K$  é necessário que se utilize a função de Lyapunov-Rhazumikhin para a obtenção da constante  $\beta$ , utilizada para determinar o conjunto dos estados atingíveis, juntamente com o funcional de Lyapunov-Krasovskii para garantir (59), isso fornece as desigualdades matriciais (i), (ii), (iii) e (iv) do Teorema 10. Por outro lado, na abordagem aqui apresentada, as condições são menos complexas e não há necessidade de que  $w$  seja limitado em amplitude, apenas em norma  $\mathcal{L}_2$ .

## 5 ESTABILIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO DINÂMICA DE SAÍDA

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, propõe-se uma metodologia de projeto de controladores dinâmicos, com o objetivo de estabilizar sistemas com atrasos e saturação de controle, por realimentação de saída, e resolver problemas de atenuação e tolerância a perturbações. Como o sistema apresenta atraso nos estados, considera-se que o controlador também apresente atraso. Este tipo de controlador dá-se o nome de controlador dinâmico não racional, caso contrário, ele é chamado de controlador racional. Os controladores racionais têm sido objeto de estudo de muitos pesquisadores, por exemplo, em (JEUNG et al., 1996), (ESFAHANI; PETERSEN, 1998), (CHOI; CHUNG, 1997), (IVANESCU et al., 2000). De acordo com (OLIVEIRA; GEROMEL, 2004), a principal limitação encontrada no projeto deste tipo de controlador é que alguns termos dos funcionais de Lyapunov-Krasovskii, usados nas provas de estabilidade, devem ser fixados a priori ou serem escolhidos com alguma estrutura particular de maneira a se obter condições tratáveis na forma de LMIs. Com o objetivo de tratar essa limitação, em (OLIVEIRA; GEROMEL, 2004) considera-se um contexto independente do atraso e mostra-se que estas restrições podem ser eliminadas a partir da utilização do controlador não racional. Assim, motivados pela utilização desse modelo de controlador para estabilizar o sistema, mais algumas transformações específicas envolvendo termos de “*anti-windup*” e a condição de setor generalizada, aplicada à função zona-morta, para modelar a saturação, obtém-se resultados diretamente na forma de LMIs, os quais serão apresentados a seguir e encontram-se também publicados em (GOMES DA SILVA JR.; GHIGGI; TARBOURIECH, 2008).

### 5.2 Controlador Dinâmico Não Racional

#### 5.2.1 Preliminares

Considera-se o seguinte sistema linear com atraso no tempo e saturação nos atuadores:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau) + B_u \text{sat}(v(t)) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + C_{y,d} x(t - \tau) + D_{y,w} w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + C_{z,d} x(t - \tau) + D_{z,u} \text{sat}(v(t)) + D_{z,w} w(t)\end{aligned}\tag{106}$$

sendo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $v(t) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $w(t) \in \mathfrak{R}^q$  os vetores do estado, do sinal enviado para o atuador e da perturbação, respectivamente.  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  corresponde à saída medida e  $z(t) \in \mathfrak{R}^r$  é a saída regulada.  $A$ ,  $A_d$ ,  $B_u$ ,  $B_w$ ,  $C_y$ ,  $C_{y,d}$ ,  $C_z$ ,  $C_{z,d}$ ,  $D_{y,w}$ ,  $D_{z,u}$  e  $D_{z,w}$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas. Supõe-se que o par  $(A, B)$  seja controlável e o par

$(C,A)$  seja observável.  $\tau \in \mathfrak{R}$  é o atraso no tempo,  $w$  é o vetor da perturbação, o qual supõe-se limitado em energia i.e.,

$$\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w'(t)w(t)dt \leq \frac{1}{\varpi}. \quad (107)$$

Considera-se um controlador dinâmico não racional com estrutura proposta em (OLIVEIRA; GEROMEL, 2004), com a adição de um laço de realimentação estática de “*anti-windup*”:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + A_{c,d} x_c(t - \tau) + B_c u_c(t) + E_c (\text{sat}(v(t)) - v(t)) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + C_{c,d} x_c(t - \tau) + D_c u_c(t) \end{aligned} \quad (108)$$

com  $x_c(t) \in \mathfrak{R}^n$  o estado do controlador,  $u_c(t)$  a entrada do controlador e  $y_c(t)$  a saída do controlador.  $A_c$ ,  $A_{c,d}$ ,  $B_c$ ,  $C_c$ ,  $C_{c,d}$ ,  $D_c$  e  $E_c$  são matrizes com dimensões apropriadas.  $E_c$  é a matriz de ganho de “*anti-windup*”.

Diferentemente do problema de “*anti-windup*”, descrito na seção 3.4, no presente caso, o objetivo é projetar-se simultaneamente um controlador não racional e um ganho de “*anti-windup*” estático, ou seja, deseja-se propor um método que calcule as matrizes do controlador não racional, que leve em conta os efeitos causados pela saturação e o comportamento não linear do sistema em malha-fechada, de forma a resolver os problemas de estabilização, de atenuação e tolerância à perturbação, os quais são enunciados abaixo:

- **Estabilização:** na ausência de perturbações, o controlador precisa garantir a estabilidade do sistema para toda condição inicial iniciada em um conjunto  $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}_0$ . Implicitamente a este problema, tem-se o fato de projetar um controlador com o objetivo de maximizar o domínio de atração do sistema em malha-fechada.
- **Atenuação e Tolerância à Perturbação:** a idéia neste caso, consiste em garantir que as trajetórias do sistema sejam limitadas para toda perturbação satisfazendo (107) e, em adição deseja-se minimizar o ganho- $\mathcal{L}_2$  da perturbação  $w(t)$  para a saída regulada  $z(t)$ .

Com o objetivo de colocar-se o sistema formado pela interconexão entre a planta e o controlador, dada por  $v(t) = y_c(t)$ ,  $u_c(t) = y(t)$ , numa forma mais compacta, define-se convenientemente um vetor de estados aumentado  $\xi(t) = [x(t)' \quad x_c(t)']'$  e as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix}; \quad \mathbb{A}_d = \begin{bmatrix} A_d + B_u D_c C_{y,d} & B_u C_{c,d} \\ B_c C_{y,d} & A_{c,d} \end{bmatrix}; \\ \mathbb{B}_u &= \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}; \quad \mathbb{B}_w = \begin{bmatrix} B_u D_c D_{y,w} + B_w \\ B_c D_{y,w} \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (109)$$

$$\mathbb{K}_w = D_c D_{y,w}; \quad \mathbb{K}_\psi = 0; \quad \mathbb{K} = [D_c C_y \quad C_c]; \quad \mathbb{K}_d = [D_c C_{y,d} \quad C_{c,d}];$$

$$\mathbb{C} = [C_z + D_{z,u} D_c C_y \quad D_{z,u} C_c]; \quad \mathbb{C}_d = [C_{z,d} + D_{z,u} D_c C_{y,d} \quad D_{z,u} C_{c,d}];$$

$$\mathbb{D}_w = D_{z,w} + D_{z,u} D_c D_{y,w}; \quad \mathbb{D}_\psi = -D_{z,u}.$$

Assim, pode-se representar o sistema em malha-fechada por:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \mathbb{A}\xi(t) + \mathbb{A}_d\xi(t - \tau) - (\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c)\psi(y_c) + \mathbb{B}_w w(t) \\ z(t) &= \mathbb{C}\xi(t) + \mathbb{D}_\psi\psi(y_c) + \mathbb{D}_w w(t)\end{aligned}\quad (110)$$

sendo,

$$\begin{aligned}y_c(t) &= \mathbb{K}\xi(t) + \mathbb{K}_d\xi(t - \tau) + \mathbb{K}_w w(t) \\ \psi(y_c(t)) &= y_c(t) - \text{sat}(y_c(t)).\end{aligned}\quad (111)$$

O sistema em malha-fechada admite as seguintes condições iniciais

$$\phi(\theta) = \begin{bmatrix} x'(t_0 + \theta) & x'_c(t_0 + \theta) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \phi'_x(\theta) & \phi'_{x_c}(\theta) \end{bmatrix}', \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

Considera-se uma matriz  $\mathbb{G} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times 2n}$ , e define-se o conjunto

$$\mathcal{S} \triangleq \{\xi \in \mathfrak{R}^{2n}; |(\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})\xi| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}.$$

Assim, pode-se enunciar o seguinte Lema a respeito da não-linearidade  $\psi(y_c)$ , apresentada na seção 2.3.2.

**Lema 5** *Se  $\xi(t) \in \mathcal{S}$ , então a relação*

$$\psi(y_c)'T \left( \psi(y_c) - \begin{bmatrix} \mathbb{G} & \mathbb{K}_d & 0 & \mathbb{K}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t - \tau) \\ \psi(y_c(t)) \\ w(t) \end{bmatrix} \right) \leq 0$$

*é verificada para toda matriz  $T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva.*

**Demonstração:** Considere  $r(t) = \mathbb{G}\xi(t) + \mathbb{K}_d\xi(t - \tau) + \mathbb{K}_w w(t)$  segue de (111) que,  $y_c(t) - r(t) = (\mathbb{K} - \mathbb{G})\xi(t)$  e portanto,  $\forall \xi(t) \in \mathcal{S}$  tem-se que  $|y_{c(i)}(t) - r_{(i)}(t)| \leq u_{0(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Deste ponto em diante a demonstração segue os mesmos passos dados ao Lema 1 de (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR.; GARCIA, 2004), com isso pode-se concluir que  $\psi'(y_c)T[\psi(y_c) - r(t)] \leq 0$ .

□

É importante notar que o Lema 5 apresenta a dependência do estado atraso  $\xi(t - \tau)$  e da perturbação  $w(t)$ , além do vetor de estado  $\xi(t)$ , ao passo que o Lema 3 depende apenas do vetor de estado  $x(t)$ .

## 5.2.2 Síntese de Realimentação Dinâmica Estabilizante

### 5.2.2.1 Resultados Teóricos

Como o objetivo de garantir-se a estabilização (local), enuncia-se o Teorema 18, com condições independentes do atraso. Apesar deste fato, como será visto, a estimativa da região de atração é dependente do atraso.

**Teorema 18** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $X_0, Y_0, X_{11}, X_{22} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , e matrizes  $X_{12}, \hat{A}, \hat{A}_d, \hat{B} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{C}, \hat{C}_d, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $Q \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ , tais que as seguintes desigualdades matriciais lineares sejam verificadas:*

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \begin{pmatrix} A + \hat{A}' + \\ B_u \hat{D} C_y \\ + X_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_d X_0 + \\ B_u \hat{C}_d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_d + \\ B_u \hat{D} C_{y,d} \end{pmatrix} & -B_u S + Z'_1 \\ * & \begin{pmatrix} Y_0 A + A' Y_0 + \\ \hat{B} C_y + C'_y \hat{B}' \\ + X_{22} \end{pmatrix} & \hat{A}_d & \begin{pmatrix} Y_0 A_d + \\ \hat{B} C_{y,d} \end{pmatrix} & -Q + Z'_2 \\ * & * & -X_{11} & -X_{12} & \hat{C}'_d \\ * & * & * & -X_{22} & \hat{C}'_d \hat{D}' \\ * & * & * & * & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (112)$$

$$\begin{bmatrix} X_0 & * & * \\ I & Y_0 & * \\ \hat{C}'_{(i)} - Z_{1(i)} & \hat{D}'_{(i)} C_y - Z_{2(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (113)$$

com  $\Sigma_1 = AX_0 + X_0 A' + B_u \hat{C} + \hat{C}' B'_u + X_{11}$ , então, considerando-se  $w(t) = 0, \forall t > 0$ , o controlador dinâmico (108) com

$$\begin{aligned} E_c &= -V_0^{-1} Y_0 B_u + V_0^{-1} Q S^{-1} \\ C_{c,d} &= \hat{D} \\ D_c &= (\hat{C}_d - D_c C_{y,d} X_0) (U'_0)^{-1} \\ C_c &= (\hat{C} - D_c C_y X_0) (U'_0)^{-1} \\ A_c &= V_0^{-1} [\hat{A} - (Y_0 A X_0 + Y_0 B_u \hat{C} + V_0 B_c C_y X_0)] (U'_0)^{-1} \\ B_c &= V_0^{-1} (\hat{B} - Y_0 B_u \hat{D}) \\ A_{c,d} &= V_0^{-1} [\hat{A}_d - (Y_0 A_d X_0 + Y_0 B_u \hat{C}_d + V_0 B_c C_{y,d} X_0)] (U'_0)^{-1}, \end{aligned} \quad (114)$$

as matrizes  $U_0$  e  $V_0$  verificam a igualdade  $V_0 U'_0 = I_n - Y_0 X_0$ , garante que para toda condição inicial  $\phi = [\phi_x \quad \phi_{x_c}]$  pertencente ao conjunto

$$\Xi_0 = \{ \phi \in \mathcal{C}_\tau^v; \phi'(0) P_0 \phi(0) + \int_{-\tau}^0 \phi'(\theta) (\Pi^{-1})' X \Pi^{-1} \phi(\theta) d\theta \leq 1 \} \quad (115)$$

com

$$P_0 = \begin{bmatrix} Y_0 & V_0 \\ V'_0 & \bullet \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X'_{12} & X_{13} \end{bmatrix} \text{ e } \Pi = \begin{bmatrix} X_0 & I \\ U'_0 & 0 \end{bmatrix},$$

as trajetórias do sistema em malha-fechada (110) convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** Semelhantemente a (OLIVEIRA; GEROMEL, 2004) utiliza-se o seguinte candidato a funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(t, \xi_t) = \xi'(t) P_0 \xi(t) + \int_{t-\tau}^t \xi'(\theta) P_1 \xi(\theta) d\theta \quad (116)$$

com  $P_0 = \begin{bmatrix} Y_0 & V_0 \\ V'_0 & \bullet \end{bmatrix}$  and  $P_0^{-1} = \begin{bmatrix} X_0 & U_0 \\ U'_0 & \bullet \end{bmatrix}$ . Segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \xi_t) &= 2\dot{\xi}'(t) P_0 \xi(t) + \xi'(t) P_1 \xi(t) - \xi'(t-\tau) P_1 \xi(t-\tau) \\ &= 2[\mathbb{A} \xi(t) + \mathbb{A}_d \xi(t-\tau) - (\mathbb{B}_u + \mathbb{R} E_c) \psi(y_c(t))] P_0 \xi(t) + \xi'(t) P_1 \xi(t) \\ &\quad - \xi'(t-\tau) P_1 \xi(t-\tau) \\ &= 2\xi'(t) \mathbb{A}' P_0 \xi(t) + 2\xi'(t-\tau) \mathbb{A}'_d P_0 \xi(t) - 2\psi'(y_c(t)) (\mathbb{B}_u + \mathbb{R} E_c)' P_0 \xi(t) \\ &\quad + \xi'(t) P_1 \xi(t) - \xi'(t-\tau) P_1 \xi(t-\tau). \end{aligned} \quad (117)$$

Suponha que  $w(t) = 0, \forall t \in \mathfrak{R}$  e que  $\xi(t) \in \mathcal{S}$ , do Lema 5, segue que

$$\dot{V}(t, \xi_t) \leq \dot{V}(t, \xi_t) - 2\psi'(y_c(t))T(\psi(y_c(t)) - [\mathbb{G} \ \mathbb{K}_d \ 0] [\xi'(t) \ \xi'(t-\tau) \ \psi'(y_c(t))]')'. \quad (118)$$

Segue que  $\dot{V}(t, \xi_t) \leq \theta'(t)\Xi\theta(t)$  com  $\theta(t) = [\xi(t)' \ \xi'(t-\tau) \ \psi'(y_c(t))]'$  e

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbb{A}'P_0 + P_0\mathbb{A} + P_1 & P_0\mathbb{A}_d & -P_0(\mathbb{B}_u + \mathbb{R}E_c) + \mathbb{G}'T \\ * & -P_1 & \mathbb{K}'_d T \\ * & * & -2T \end{bmatrix}. \quad (119)$$

Define-se então uma matriz

$$\Pi = \begin{bmatrix} X_0 & I \\ U'_0 & 0 \end{bmatrix}$$

(SCHERER; GAHINET; CHILALI, 1997), (OLIVEIRA; GEROMEL, 2004).

Note-se que da condição (113), segue que a matriz

$$I - Y_0X_0 \text{ é não-singular,}$$

o que implica que sempre é possível calcular matrizes não-singulares  $V_0$  e  $U_0$  verificando a equação

$$V_0U'_0 = I - Y_0X_0.$$

Este fato garante que  $\Pi$  é não-singular.

Pré e pós multiplicando (119) respectivamente por  $Diag(\Pi' \ \Pi' \ S)$  e  $Diag(\Pi \ \Pi \ S)$  com  $S = T^{-1}$ , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \Pi'\mathbb{A}'P_0\Pi + \Pi'P_0\mathbb{A}\Pi + \Pi'P_1\Pi & \Pi'P_0\mathbb{A}_d\Pi & -\Pi'P_0(\mathbb{B}_u + \mathbb{R}E_c)S + \Pi'\mathbb{G}' \\ * & -\Pi'P_1\Pi & \Pi'\mathbb{K}'_d \\ * & * & -2S \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Definindo

$$\Pi'P_1\Pi = X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ * & X_{22} \end{bmatrix}$$

e considerando

$$\begin{aligned} \hat{A} &= Y_0AX_0 + Y_0B_uD_cC_yX_0 + V_0B_cC_yX_0 + Y_0B_uC_cU'_0 + V_0A_cU'_0, \\ \hat{B} &= Y_0B_uD_c + V_0B_c, \\ \hat{A}_d &= Y_0A_dX_0 + Y_0B_uD_cC_{y,d}X_0 + V_0B_cC_{y,d}X_0 + Y_0B_uC_{c,d}U'_0 + V_0A_{c,d}U'_0, \\ \hat{C} &= C_cU'_0 + D_cC_yX_0, \\ \hat{D} &= D_c, \hat{C}_d = C_{c,d}U'_0 + D_cC_{y,d}X_0, \\ Z'_2 &= G'_1, Z'_1 = X_0G'_1 + U_0G'_2 \text{ e } Q = Y_0B_uS + V_0E_cS, \end{aligned} \quad (121)$$

segue que:

$$\begin{aligned} \Pi'P_0\mathbb{A}\Pi &= \begin{bmatrix} AX_0 + B_u\hat{C} & A + B_u\hat{D}C_y \\ \hat{A} & Y_0A + \hat{B}C_y \end{bmatrix}; \Pi'P_0\Pi = \begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & Y_0 \end{bmatrix}; \\ \Pi'P_0(\mathbb{B}_u + \mathbb{R}E_c)S &= \begin{bmatrix} B_uS \\ Q \end{bmatrix}; \Pi'\mathbb{G}' = \begin{bmatrix} Z'_1 \\ Z'_2 \end{bmatrix}; \Pi'\mathbb{K}'_d = \begin{bmatrix} \hat{C}'_d \\ C'_{y,d}\hat{D}' \end{bmatrix}; \\ \Pi'P_0\mathbb{A}_d\Pi &= \begin{bmatrix} A_dX_0 + B_u\hat{C}_d & A_d + B_u\hat{D}C_{y,d} \\ \hat{A}_d & Y_0A_d + \hat{B}C_{y,d} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (122)$$

Como  $\Pi$  e  $S$  são matrizes não singulares e, se a condição (112) do Teorema 18 é verificada, tem-se que  $\dot{V}(t, \xi_t) < 0$  acontece para as matrizes  $A_c, A_{c,d}, B_c, C_c, C_{c,d}, E_c$  e  $D_c$  definidas em (114), desde que  $\xi(t) \in \mathcal{S}$ .

Pré e pós multiplicando-se agora a desigualdade (113) por

$$\begin{bmatrix} (\Pi^{-1})' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e sua transposta respectivamente, e como

$$\mathbb{K}\Pi = [D_c C_y X_0 + C_c U_0' \quad D_c C_y] = [\hat{C} \quad \hat{D} C_y],$$

segue que a condição (113), garante que

$$\mathcal{E}(P_0) = \{\xi \in \mathfrak{X}^{2n}; \xi' P_0 \xi \leq 1\} \subset \mathcal{S}.$$

Considerando-se que

$$\dot{V}(t, \xi_t) < 0$$

e da definição do funcional  $V(t, \xi_t)$ , segue-se que:

$$\xi'(t) P_0 \xi(t) \leq V(t, \xi_t) \leq V(0, \xi_0) = \xi'(0) P_0 \xi(0) + \int_{-\tau}^0 \xi(\theta)' P_1 \xi_\theta(\theta) d\theta. \quad (123)$$

Então, assegurando-se que a condição inicial  $\phi \in \Xi_0$ , pela definição dada em (115), segue-se que

$$\xi'(t) P_0 \xi(t) \leq 1.$$

Dessa forma, é possível garantir-se que as trajetórias nunca saem do conjunto  $\mathcal{E}(P_0) \subset \mathcal{S}$ . Logo, se as relações (112) e (113) são satisfeitas, obtém-se

$$\dot{V}(t, \xi_t) < 0, \quad \forall \phi \in \Xi_0,$$

e, do Teorema de Lyapunov-Krasovskii, as trajetórias correspondentes convergem assintoticamente para a origem. □

Suponha agora que o controlador tenha condição inicial nula, i.e.,

$$x_c(0) = 0 \text{ e } x_c(\theta) = 0, \quad \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

Esta hipótese sugere que o controlador esteja em equilíbrio, o que é razoável supor. Este fato permite que se caracterize o domínio de condições iniciais admissíveis em função dos estados da planta, conforme segue.

Note que a partir da demonstração do Teorema obtém-se:

$$\begin{aligned} \xi'(t) P_0 \xi(t) \leq V(t, \xi_t) \leq V(0, \xi_0) &= \xi'(0) P_0 \xi(0) + \int_{-\tau}^0 \xi(\theta)' P_1 \xi_\theta(\theta) d\theta = \\ &= \begin{bmatrix} x'(0) & x'_c(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0 & V_0 \\ V_0' & \bullet \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x_c(0) \end{bmatrix} + \int_{-\tau}^0 \begin{bmatrix} x'(\theta) & x'_c(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\theta) \\ x_c(\theta) \end{bmatrix} d\theta. \end{aligned} \quad (124)$$

Supondo-se

$$\phi_{x_c}(\theta) = 0, \text{ i.e. } x_c(t_0 + \theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

Então, da equação (124), segue que

$$\xi'(t)P_0\xi(t) \leq \|\phi_x\|_c^2(\lambda_{\max}(Y_0) + \tau\lambda_{\max}(P_{11})). \quad (125)$$

Por outro lado, como

$$\Pi^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & (U_0')^{-1} \\ I & -X_0(U_0')^{-1} \end{bmatrix},$$

segue que  $P_{11} = X_{22}$ .

Neste caso, a estabilidade do sistema em malha-fechada é garantida para toda condição inicial  $\phi_x(\theta)$  pertencente à bola

$$\mathcal{B}_\tau(\delta) = \{\phi_x \in \mathcal{C}_\tau; \|\phi_x\|_c^2 \leq \delta\}$$

com

$$\delta = \frac{1}{\lambda_{\max}(Y_0) + \tau\lambda_{\max}(X_{22})}.$$

É importante notar que, os parâmetros que definem  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$  podem ser obtidos diretamente da solução das LMIs (112) e (113). Assim, o objetivo de controle pode ser garantir a estabilidade no conjunto  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$  definido a partir dos estados da planta, sendo este tão grande quanto possível. Este problema será visto na seção 5.2.3.

No caso do sistema (106) ser assintoticamente estável, pode-se aplicar o seguinte Corolário, o qual garante condições suficientes para a estabilização global do sistema em malha-fechada (110).

**Corolário 6** *Se existirem matrizes simétricas definidas positiva  $X_0, Y_0, X_{11}, X_{22} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , e matrizes  $X_{12}, \hat{A}, \hat{A}_d, \hat{B} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{C}, \hat{C}_d \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  e  $Q \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  tal que a desigualdade (112) do Teorema 18, seja verificada, com  $Z_1 = \hat{C}$  e  $Z_2 = \hat{D}Cy$  e ainda*

$$\begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & Y_0 \end{bmatrix} > 0,$$

então o controlador dinâmico (108) com as matrizes definidas em (114), as matrizes  $U_0$  e  $V_0$  verificam  $V_0U_0' = I - Y_0X_0$ , garante a estabilidade global assintótica da origem do sistema em malha-fechada (110).

**Demonstração:** Considere  $\mathbb{G} = \mathbb{K}$ . Segue que a condição de setor

$$\psi'(y_c)T \left( \psi(y_c) - \begin{bmatrix} G & \mathbb{K}_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'(t) & \xi'(t - \tau) & \psi'(y_c(t)) \end{bmatrix}' \right) \leq 0$$

é verificada  $\forall \xi(t) \in \mathfrak{R}^{2n}$ , assim segue a estabilidade assintótica global. □

### 5.2.3 Problemas de Otimização

Considere agora o caso em que o controlador dinâmico está em equilíbrio, ou seja,

$$x_c(0) = 0 \text{ e } x_c(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0].$$

Esta hipótese permite que se caracterize o conjunto de condições iniciais admissíveis. Na seqüência, duas estratégias de otimização, as quais utilizam as condições enunciadas no Teorema 18, são propostas com o objetivo de projetar o controlador.

### 5.2.3.1 Maximização do conjunto de condições iniciais admissíveis

A idéia consiste em calcular um controlador, com o objetivo de maximizar a bola  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ , i.e. como o objetivo de maximizar a estimativa da região de atração. Neste caso o seguinte problema de otimização pode ser considerado:

$$\begin{aligned} & \min \lambda_{Y_0} + \tau \lambda_{X_{22}} \\ & \text{sujeito a (112), (113) e } Y_0 \leq \lambda_{Y_0} I ; X_{22} \leq \lambda_{X_{22}} I. \end{aligned} \quad (126)$$

### 5.2.3.2 Maximização para um dado conjunto de condições iniciais admissíveis

Considere agora um dado conjunto  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$  de estados iniciais admissíveis. A idéia consiste em calcular um controlador, com o objetivo de garantir a estabilidade para todas as condições iniciais, satisfazendo  $\|\phi_x\|_c^2 \leq \delta$ . Neste caso, devem ser consideradas as seguintes restrições:

$$Y_0 \leq \lambda_{Y_0} I ; X_{22} \leq \lambda_{X_{22}} I \text{ e } \lambda_{Y_0} I + \tau \lambda_{X_{22}} I \leq \delta^{-1}. \quad (127)$$

Os seguintes critérios de otimização podem então ser utilizados:

- maximizar a taxa de decaimento na região de linearidade do sistema em malha-fechada (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR., 2000);

Para resolver este problema é necessário resolver o problema (128), fazendo uma busca unidimensional em  $\beta$  (fixa-se  $\beta$  e resolve-se um problema de factibilidade para as LMIs),

$$\begin{aligned} & \max \beta \\ & \text{sujeito a (112), (113) e (129)} \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \begin{pmatrix} A + \hat{A}' + \\ B_u \hat{D} C_y \\ + X_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e^{\beta \tau} A_d X_0 + \\ B_u \hat{C}_d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} e^{\beta \tau} A_d + \\ B_u \hat{D} C_{y,d} \end{pmatrix} & -B_u S + Z'_1 \\ * & \begin{pmatrix} Y_0 A + A' Y_0 + \\ \hat{B} C_y + C'_y \hat{B}' \\ + X_{22} \end{pmatrix} & \hat{A}_d & \begin{pmatrix} e^{\beta \tau} Y_0 A_d + \\ \hat{B} C_{y,d} \end{pmatrix} & -Q + Z'_2 \\ * & * & -X_{11} & -X_{12} & \hat{C}'_d \\ * & * & * & -X_{22} & \hat{C}'_d \hat{D}' \\ * & * & * & * & -2S \end{bmatrix} < 0, \quad (129)$$

com  $\Sigma_1$  dado no Teorema 18.

- minimizar a cota superior para uma dada função custo (problema do custo garantido).

Como função custo pode-se definir o seguinte funcional

$$\Upsilon = \int_0^\infty x'(t) Q x(t) dt, \text{ com } Q = Q' \geq 0, Q \in \mathfrak{R}^{n \times n},$$

o qual é utilizado para medir o desempenho do sistema em malha-fechada.

Suponha que as condições obtidas sejam suficientes para garantir que:

$$\dot{V}(t, \xi_t) + \frac{1}{\kappa} \xi' \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \xi < 0 \quad (130)$$

perceba-se que integrando esta desigualdade sobre o intervalo  $[0, \infty)$ , é possível obter-se:

$$\Upsilon < \kappa V(0, \xi_0) = \kappa V(0, \phi) < \kappa, \forall \phi \in \Xi_0. \quad (131)$$

Dessa maneira, escrevendo-se a equação (130) em forma de produto matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \begin{pmatrix} A + \hat{A}' + \\ B_u \hat{D} C_y \\ + X_{12} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_d X_0 + \\ B_u \hat{C}_d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_d + \\ B_u \hat{D} C_{y,d} \end{pmatrix} & -B_u S + Z'_1 & X_0 \tilde{Q}^{\frac{1}{2}} \\ * & \begin{pmatrix} Y_0 A + A' Y_0 + \\ \hat{B} C_y + C'_y \hat{B}' \\ + X_{22} \end{pmatrix} & \hat{A}_d & \begin{pmatrix} Y_0 A_d + \\ \hat{B} C_{y,d} \end{pmatrix} & -Q + Z'_2 & 0 \\ * & * & -X_{11} & -X_{12} & \hat{C}'_d & 0 \\ * & * & * & -X_{22} & \hat{C}'_d \hat{D}' & 0 \\ * & * & * & * & -2S & 0 \\ * & * & * & * & -2S & -\kappa I \end{bmatrix} < 0, \quad (132)$$

logo a LMI (132) garante que a desigualdade (130) é satisfeita.

Pode-se assim, resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \min \kappa \\ & \text{sujeito a (132), (113)}. \end{aligned} \quad (133)$$

**Observação 13** *É importante notar que as condições de estabilidade foram obtidas por estratégias “independentes do atraso”, porém, o conjunto de condições iniciais admissíveis definido no Teorema 18, no qual a convergência assintótica é garantida, é dependente do atraso.*

## 5.3 Atenuação e Tolerância a Perturbações

### 5.3.1 Resultados Teóricos

Nesta seção está-se interessado em projetar o controlador dinâmico (108) com o objetivo de minimizar o ganho- $\mathcal{L}_2$  da perturbação  $w(t)$  para a saída regulada  $z(t)$ . Desde que as entradas sejam limitadas, um objetivo importante que deseja-se garantir é a estabilidade entrada-estado, ou seja, que as trajetórias do sistema sejam limitadas para toda perturbação admissível e que o conjunto dos estados atingíveis esteja contido na região de atração do sistema em malha-fechada. Considera-se agora que  $\phi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$ . Obtém-se assim tanto condições locais para a estabilidade entrada-estado para perturbações satisfazendo (107) para um dado  $\varpi$ , como condições globais, as quais garantem que as trajetórias sejam limitadas para toda perturbação  $\mathcal{L}_2$ . Tal resultado é formalizado no Teorema subsequente.

**Teorema 19** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $X_0, Y_0, X_{11}, X_{22} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $X_{12}, \hat{A}, \hat{A}_d, \hat{B} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{C}, \hat{C}_d, \hat{D}$ ,  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $Q \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  e escalares positivos  $\gamma$  e  $\varpi$  tais que as seguintes desigualdades matriciais lineares sejam verificadas*

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & A_d X_0 + B_u \hat{C}_d & A_d + B_u \hat{D} C_{y,d} & -B_u S + Z'_1 & B_u \hat{D} D_{y,w} + B_w & \Sigma_3 \\ * & \Sigma_4 & \hat{A}_d & Y_0 A_d + \hat{B} C_{y,d} & -Q + Z'_2 & \hat{B} D_{y,w} + Y_0 B_w & \Sigma_5 \\ * & * & -X_{11} & -X_{12} & \hat{C}'_d & 0 & \Sigma_6 \\ * & * & * & -X_{22} & C'_{y,d} \hat{D}' & 0 & \Sigma_7 \\ * & * & * & * & -2S & \hat{D} D_{y,w} & -S D'_{z,u} \\ * & * & * & * & * & -I & \Sigma_8 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (134)$$

$$\begin{bmatrix} X_0 & * & * \\ I_{2n} & Y_0 & * \\ \hat{C}'_{(i)} - Z_{1(i)} & \hat{D}'_{(i)} C_y - Z_{2(i)} & \varpi u_0^2_{(i)} \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (135)$$

com

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= AX_0 + X_0 A' + B_u \hat{C} + \hat{C}' B'_u + X_{11}, \\ \Sigma_2 &= A + \hat{A}' + B_u \hat{D} C_y + X_{12}, \\ \Sigma_3 &= X'_0 C'_z + \hat{C}'_d D'_{z,u}, \\ \Sigma_4 &= Y_0 A + A' Y_0 + \hat{B} C_y + C'_y \hat{B}' + X_{22}, \\ \Sigma_5 &= (C_z + D_{z,u} \hat{D} C_y)', \\ \Sigma_6 &= X_0 C'_{z,d} + \hat{C}'_d D'_{z,u}, \\ \Sigma_7 &= (C_{z,d} + D_{z,u} \hat{D} C_{y,d})', \\ \Sigma_8 &= D'_{y,w} \hat{D}' D'_{z,u} + D'_{z,w}. \end{aligned}$$

então, considerando que  $\phi(\theta) = 0$ ,  $\forall \theta \in [-\tau, 0]$  e que  $\|w\|_2^2 \leq \varpi^{-1}$ , o controlador dinâmico (108) com matrizes definidas como em (114), as matrizes  $U_0$  e  $V_0$  verificam  $V_0 U'_0 = I - Y_0 X_0$ , é tal que:

1. quando  $w(t) \neq 0$

a. as trajetórias do sistema (106) em malha-fechada permanecem limitadas no conjunto

$$\mathcal{E}(P_0, \varpi^{-1}) \triangleq \{\xi \in \mathfrak{R}^{2n}; \xi' P_0 \xi \leq \varpi^{-1}\},$$

com

$$P_0 = \begin{bmatrix} Y_0 & V_0 \\ V'_0 & \bullet \end{bmatrix} \quad P_0^{-1} = \begin{bmatrix} X_0 & U_0 \\ U'_0 & \bullet \end{bmatrix}$$

b.  $\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2$

2. se  $w(t) = 0$ ,  $\forall t \geq t_1 \geq 0$ , ou se  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \rightarrow 0$ ,  $\xi(t)$  converge assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** A demonstração deste Teorema segue os mesmos procedimentos das demonstrações dos Teoremas 17 e 18.

□

Semelhantemente ao resultado enunciado no Corolário 6, para os sistemas assintoticamente estáveis em malha aberta, o seguinte Corolário do Theorem 19 garante condições suficientes para a solução do problema de atenuação à perturbação num contexto global. Neste caso, pode ser garantido que as trajetórias do sistema em malha-fechada são limitadas  $\forall w(t) \in \mathcal{L}_2$  e para toda condição inicial  $\phi \in \mathcal{C}_\tau^v$ .

**Corolário 7** Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $X_0, Y_0, X_{11}, X_{22} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $X_{12}, \hat{A}, \hat{A}_d, \hat{B} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $\hat{C}, \hat{C}_d \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $\hat{D} \in \mathfrak{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  e um escalar positivo  $\gamma$  tal que a LMI (135) do Teorema 19, seja verificada, com  $Z_1 = \hat{C}$  e  $Z_2 = \hat{D}C_y$  e ainda,

$$\begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & Y_0 \end{bmatrix} > 0.$$

Então, o controlador dinâmico (108) com matrizes definidas como em (114), as matrizes  $U_0$  e  $V_0$  verificam  $V_0 U_0' = I - Y_0 X_0$ , é tal que:

1. quando  $w \neq 0$ 
  - a. as trajetórias do sistema (106) em malha-fechada permanecem limitadas  $\forall \phi \in \mathcal{C}_T^v$  e  $\forall w(t) \in \mathcal{L}_2$ .
  - b.  $\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(0)$ ,
2. se  $w(t) = 0$ ,  $\forall t \geq t_1 \geq 0$ , ou se  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \rightarrow 0$ ,  $\xi(t)$  converge assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** Como no Corolário 6, é suficiente definir  $\mathbb{G} = \mathbb{K}$ .

□

### 5.3.2 Problemas de Otimização

#### 5.3.2.1 Maximização da tolerância à perturbação

Neste caso, a idéia é maximizar o limite superior da norma  $\mathcal{L}_2$  da perturbação  $w$ , para as quais pode-se garantir que as trajetórias do sistema permaneçam limitadas. Então resolve-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \min \varpi \\ & \text{sujeito a (134), (135).} \end{aligned} \tag{136}$$

Note que, neste problema, não se está interessado nos valores de  $\gamma$ , que assumir valores tão grandes quanto o necessário para garantir que a relação (134) seja verificada.

#### 5.3.2.2 Minimização do ganho- $\mathcal{L}_2$

Dado um limite  $1/\varpi$  para as perturbações admissíveis, a idéia aqui é minimizar o limite superior  $\sqrt{\gamma}$  para o ganho- $\mathcal{L}_2$ , i.e.:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito a (134), (135).} \end{aligned} \tag{137}$$

## 5.4 Exemplos Numéricos

**Exemplo 3** Considere o sistema (106), descrito pelas seguintes matrizes, (OLIVEIRA; GEROMEL, 2004):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad A_d = \begin{bmatrix} 1 & 2.4 \\ 2.4 & -2 \end{bmatrix}; \quad B_u = B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C_y = [1 \quad 1];$$

$$C_{y,d} = [ 1 \quad -1 ]; \quad C_z = [ 1 \quad 1 ]; \quad C_{z,d} = [ 0 \quad 0 ]; \quad D_{y,w} = -0.1; \quad D_{z,u} = 0.1; \quad D_w = 0.$$

Considerando  $u_0 = 15$  e  $\tau = 0.5$ , da resolução do problema de otimização (126), obtêm-se as seguintes matrizes para o controlador:

$$E_c = \begin{bmatrix} -0.1687 \\ -0.0775 \end{bmatrix}; \quad D_c = -0.2184; \quad C_c = [ 139.4879 \quad 8.5998 ];$$

$$C_{c,d} = [ -11.1815 \quad 7.1147 ];$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -0.1920 \\ -0.4915 \end{bmatrix}; \quad A_c = \begin{bmatrix} -22.8999 & -3.0566 \\ -3.8965 & -5.8943 \end{bmatrix}; \quad A_{c,d} = \begin{bmatrix} -1.7609 & 1.1204 \\ -1.2804 & 0.8147 \end{bmatrix}.$$

Supondo-se que o controlador tenha condições iniciais nulas, obtém-se o seguinte valor ótimo de  $\delta$  (raio da bola  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$  é 0.7153).

A Tabela 7 ilustra os valores de  $\delta$  obtidos da resolução de (126) considerando diferentes valores de  $\tau$ . Nesta é possível observar a relação entre o tamanho do atraso e da região de estabilidade: quanto maior for o atraso, menor será a região de estabilidade. Note também que através da condição de estabilidade, que é independente do atraso, obtém-se o tamanho da bola de estabilidade (dada por  $\delta$ ), que depende diretamente do atraso.

Tabela 7: Influência do atraso no raio do conjunto  $\mathcal{B}_\tau(\delta)$ .

$\tau$	$\delta$
$3.8278 \cdot 10^{-10}$	3.8278
0.0001	3.8229
0.001	3.7927
0.01	3.5112
0.1	2.0313
0.5	0.7153
1	0.3958
$10^{10}$	$4.4389 \times 10^{-11}$

Considerando agora o problema (136), o valor ótimo de  $\varpi$  é 0.4127, o que significa que o limite máximo para a norma  $\mathcal{L}_2$  das perturbações admissíveis, para as quais é possível calcular um controlador que garanta que as trajetórias sejam limitadas, é dado por  $1/\sqrt{\varpi} = 1.5566$ . Por outro lado, considerando que o limite da norma  $\mathcal{L}_2$  ao qua-

Tabela 8: Relação entre o limite para a norma  $\mathcal{L}_2$  e o limite superior para o ganho- $\mathcal{L}_2$ .

$\varpi$	$\sqrt{\gamma}$
0.4127	31.0873
0.42	22.7528
0.5	9.8448
1	5.3435
10	3.9941

drado para as perturbações admissíveis seja dado por  $\bar{\omega}^{-1}$ , a Tabela 8 mostra os valores obtidos para  $\sqrt{\bar{\gamma}}$ , resolvendo o problema (137) para valores diferentes de  $\bar{\omega}$ . Note que neste caso, quanto maior for o valor de  $\bar{\omega}$  (i.e., quanto menor for o valor do limite para as perturbações admissíveis), menor é o valor do limite superior para o ganho- $\mathcal{L}_2$  de  $w$  para  $z$  (i.e. maior é o índice de atenuação à perturbação).

Na seqüência, é feita uma comparação do comportamento do sistema em malha-fechada, entre dois controladores dinâmicos diferentes.

- **Controlador I (C-1):** este controlador foi calculado através da resolução do problema (137), considerando  $\bar{\omega} = 0.4127$ , i.e., considerando que as perturbações admissíveis são tais que  $\|w\|_2 < 1.5566$ . As matrizes do controlador calculado são:

$$A_c = \begin{bmatrix} 20.9371 & -157.7763 \\ 5.6559 & -39.4650 \end{bmatrix}; A_{cd} = \begin{bmatrix} 0.7432 & -0.1276 \\ 0.1677 & -0.0288 \end{bmatrix};$$

$$E_c = \begin{bmatrix} -4.5337 \\ -1.1154 \end{bmatrix}; B_c = \begin{bmatrix} -24.1281 \\ -4.0523 \end{bmatrix};$$

$$D_c = -0.2307; C_c = \begin{bmatrix} -5.3999 & 33.0519 \end{bmatrix}; C_{cd} = \begin{bmatrix} 0.1277 & -0.0221 \end{bmatrix}.$$

- **Controlador II (C-2):** corresponde ao controlador que minimiza o limite para o ganho- $\mathcal{L}_2$  sem levar em conta a saturação, i.e. ele é obtido através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{l} \min \gamma \\ \text{sujeito a} \end{array} \left[ \begin{array}{cccccc} \Sigma_1 & \Sigma_2 & A_d X_0 + B_u \hat{C}_d & A_d + B_u \hat{D} C_{y,d} & B_u \hat{D} D_{y,w} + B_w & X_0' C_z' + \hat{C}' D_{z,u}' \\ * & \Sigma_3 & \hat{A}_d & Y_0 A_d + \hat{B} C_{y,d} & \hat{B} D_{y,w} + Y_0 B_w & (C_z + D_{z,u} \hat{D} C_y)' \\ * & * & -X_{11} & -X_{12} & 0 & X_0 C_{z,d}' + \hat{C}'_d D_{z,u}' \\ * & * & * & -X_{22} & 0 & (C_{z,d} + D_{z,u} \hat{D} C_{y,d})' \\ * & * & * & * & -I & D'_{y,w} \hat{D}' D'_{z,u} + D'_{z,w} \\ * & * & * & * & * & -\gamma I \end{array} \right] < 0 \quad (138)$$

e

$$\begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & Y_0 \end{bmatrix} > 0.$$

sendo

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= AX_0 + X_0 A' + B_u \hat{C} + \hat{C}' B_u' + X_{11}, \quad \Sigma_2 = A + \hat{A}' + B_u \hat{D} C_y + X_{12}, \\ \Sigma_3 &= Y_0 A + A' Y_0 + \hat{B} C_y + C_y' \hat{B}' + X_{22}. \end{aligned}$$

Neste caso, o controlador não racional que se obtém, é dado pelas seguintes matrizes:

$$E_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C_c = \begin{bmatrix} 0.8883 & 14.0327 \end{bmatrix}; C_{cd} = \begin{bmatrix} 0.1428 & -0.0359 \end{bmatrix};$$

$$D_c = 0.3075; B_c = \begin{bmatrix} -26.5999 & 1.4335 \end{bmatrix};$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -9.3861 & -71.3726 \\ 0.2387 & -1.2499 \end{bmatrix}; \quad A_{cd} = \begin{bmatrix} 0.6216 & -0.1093 \\ -0.0088 & 0.0025 \end{bmatrix}.$$

Considere um sinal para a perturbação definido como segue:

$$w(t) = \begin{cases} \alpha & \text{se } 0 < t \leq T \\ 0 & \text{se } t > T. \end{cases} \quad (139)$$

Para  $T = 3.1$ , segue (através de simulação) que **C-2** apresenta um comportamento instável para perturbações com  $\alpha > 2.0389$ , enquanto que **C-1** se torna instável para  $\alpha > 3.0478$ . Note que para o limite considerado no projeto de **C-1** o valor máximo admissível para  $\alpha$  é dado por  $(t\omega)^{-0.5} = 0.8841$ , o qual reflete o conservadorismo do limite garantido pela condição proposta. Por outro lado, o sistema em malha-fechada com o controlador **C-1** pode suportar uma perturbação 54% maior (em amplitude) do que o controlador projetado, sem levar em conta a saturação dos atuadores.

Considerando agora  $T = 3.1$ ,  $\alpha = 3.0059$ , a Figura 4(a) ilustra o comportamento do sistema em malha-fechada, com  $\tau = 0.1$  e  $u_0 = 15$ , considerando **C-1** e **C-2**. Como pode ser visto, o sistema em malha-fechada com **C-2** apresenta um comportamento instável para a perturbação, enquanto que **C-1** pode garantir a estabilidade do sistema. Conforme pode ser visto na Figura 4(b), para **C-1** o controlador satura, mas as trajetórias convergem para zero depois de cessar a ação da perturbação.

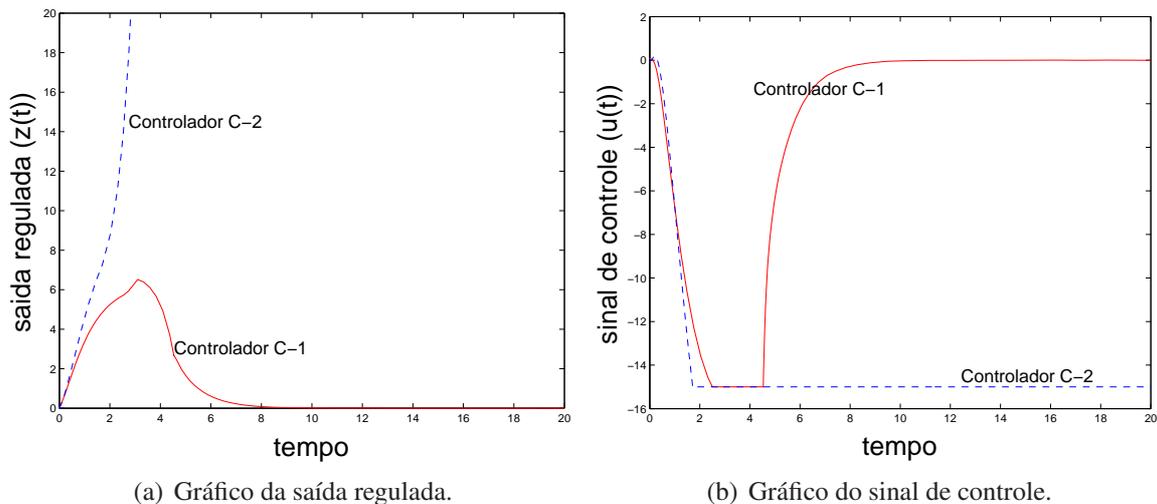


Figura 4: Comportamento do sistema em malha-fechada utilizando controlador C-1 ou C-2.

**Exemplo 4** Considere o sistema (106) descrito pelas seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad A_d = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad B_u = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad B_w = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$C_y = [ .5 \quad 1 ]; \quad C_{y,d} = [ 1 \quad -1 ]; \quad C_z = [ 1 \quad 0 ]; \quad C_{z,d} = [ 0 \quad 0 ];$$

$$D_{y,w} = 0; \quad D_{z,u} = 0; \quad D_{z,w} = 0.$$

Como o sistema é assintoticamente estável em malha aberta, pode-se obter o seguinte controlador:

- **Controlador (C-3):** *Corresponde ao controlador que minimiza o limite para o ganho- $\mathcal{L}_2$ . O qual foi calculado através da aplicação do Corolário 7. O resultado para o problema de otimização, neste caso, fornece como resultado  $\gamma = 1.0001$  e*

$$C_c = [ 0.0541 \quad -2.0032 ]; \quad C_{cd} = 10^{-3} \times [ -0.1092 \quad 0.0245 ];$$

$$E_c = \begin{bmatrix} -1718.6 \\ -3.9 \end{bmatrix}; \quad D_c = 0.1966; \quad B_c = \begin{bmatrix} -336.1652 \\ -67.0616 \end{bmatrix};$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -97.0 & 3441.4 \\ -0.3 & 2.8 \end{bmatrix}; \quad A_{cd} = \begin{bmatrix} 0.7001 & -1.2728 \\ 0.1355 & -0.9613 \end{bmatrix}.$$

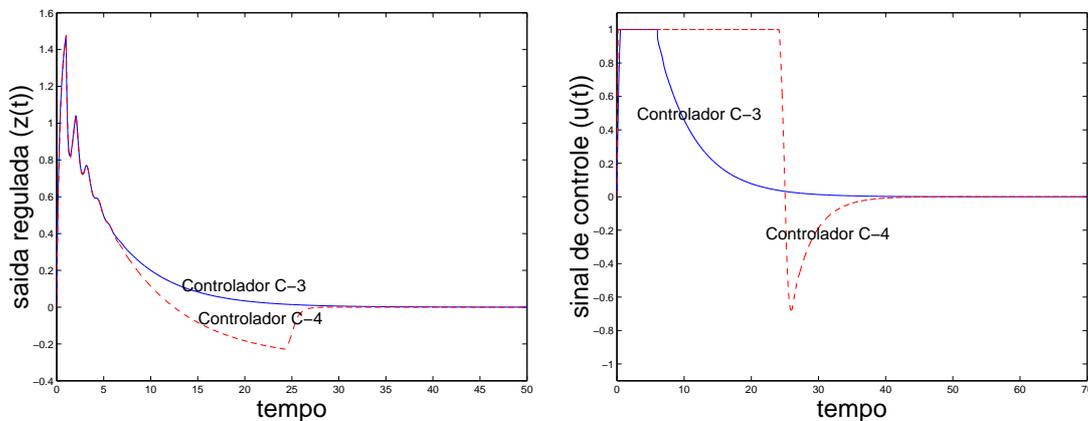
- **Controlador (C-4):** *Corresponde ao controlador que minimiza o limite para o ganho- $\mathcal{L}_2$ , sem levar em conta a saturação. O qual foi calculado através da solução do problema de otimização (138), o resultado obtido é:  $\gamma = 0.0141$  e*

$$E_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad D_c = 3.2211; \quad C_c = [ 0.7885 \quad -21.1575 ];$$

$$C_{cd} = [ -0.0101 \quad -0.3068 ]; \quad B_c = \begin{bmatrix} -1491.6 \\ -44 \end{bmatrix};$$

$$A_c = \begin{bmatrix} -375.8 & 9978.5 \\ -1.3 & 27.9 \end{bmatrix}; \quad A_{cd} = \begin{bmatrix} 5.0578 & 144.9260 \\ 0.2844 & 0.5768 \end{bmatrix}.$$

Como no Exemplo 3, a Figura 5 mostra o comportamento dinâmico do sistema em malha fechada com o controlador (C-3), comparado com o comportamento dinâmico do controlador (C-4), obtido sem considerar a saturação. Com este objetivo, considera-se  $u_0 = 1$ ,  $\tau = 1$  e o sinal da perturbação definido em (139) com  $T = 1$  e  $\alpha = 5$ . Pode-se ver na Figura 5(a) que o controlador projetado pela condição proposta pelo Corolário 7 faz com que não ocorra sobrepassagem por zero e na Figura 5(b) observa-se que o esforço de controle é menor.



(a) Gráfico da saída regulada.

(b) Gráfico do sinal de controle.

Figura 5: *Comportamento dinâmico do sistema em malha-fechada utilizando os controladores C-3 e C-4.*

## 5.5 Conclusão

Neste capítulo, propôs-se uma metodologia de projeto de controladores dinâmicos não racionais, como o objetivo de estabilizar, por realimentação de saída, sistemas com atraso no tempo e saturação nos atuadores. Os controladores projetados apresentam uma estrutura especial formada por um compensador linear mais um termo de “*anti-windup*” estático. Paralelamente resolveram-se problemas de atenuação e tolerância a perturbações, quando o sistema estivesse sujeito a perturbações. Para chegar-se a estes objetivos utilizou-se a condição de setor generalizada, para funções do tipo zona-morta e um funcional de Lyapunov-Krasovskii. Estas ferramentas permitiram que a partir de transformações de variáveis apropriadas se obtivessem condições na forma direta de LMIs e independentes do atraso.

O projeto de controladores não racionais apresenta a vantagem de não ser necessário fixar a estrutura das matrizes do funcional de Lyapunov a fim de se obter condições na forma de LMIs. Por outro lado, esse controlador apresenta a desvantagem de ter que se conhecer o valor do atraso. Caso o atraso seja variante no tempo, tem-se um problema de robustez, o qual é resolvido utilizando-se a representação do modelo como sugerida por (IVANESCU et al., 2000), mais a representação do vetor de atraso aumentado por  $\xi_\tau = [ x(t - \tau_1) \quad x_c(t - \tau_2) ]$  e o funcional de Lyapunov-Krasovskii dado por

$$V(t, \xi_t) = \xi'(t)P_0\xi(t) + \int_{t-\tau_1}^t x'(\theta)P_1x(\theta)d\theta + \int_{t-\tau_2}^t x'_c(\theta)P_{1_c}x_c\theta d\theta,$$

assim é possível obterem-se condições na forma de LMIs independentes do atraso com o conjunto de condições iniciais admissíveis dependente do atraso e dos autovalores das matrizes  $Y_0$ ,  $P_1$  e  $P_{1_c}$ .

Quando se adiciona o laço de “*anti-windup*” ao controlador, permite-se que se leve em conta os efeitos indesejados causados pela saturação, além de introduzir mais graus de liberdade o que possibilita que se obtenham efetivamente condições LMIs, a partir de transformações de variáveis apropriadas. A junção do controlador dinâmico não racional com laço de “*anti-windup*”, é uma das contribuições que se pode citar desta tese, uma vez que é inédita na literatura.

## 6 SÍNTESE DE COMPENSADORES DE “ANTI-WINDUP”

### 6.1 Introdução

Como visto na seção 3.4, o objetivo da estratégia de “*anti-windup*” é projetar um ganho estático de “*anti-windup*”  $E_c$  ou um compensador dinâmico de “*anti-windup*”, de tal forma que os efeitos causados pela diferença entre a entrada do atuador e a saída sejam minimizados. Na Figura 6, é possível observar-se a adição da estrutura de “*anti-windup*” ao controlador, que tem como entrada a diferença entre a entrada e saída do atuador.

Neste capítulo, apresentam-se condições para o cálculo de ganhos estáticos “*anti-windup*” e para o projeto de compensadores dinâmicos de “*anti-windup*”, para sistemas apresentando atrasos variantes no tempo e incertos, nos estados, sujeitos à saturação de controle.

Considerando que o sistema está sujeito à ação de perturbações limitadas pela norma  $\mathcal{L}_2$ , o cálculo da estrutura de “*anti-windup*” deve garantir que as trajetórias do sistema permaneçam limitadas e que um certo nível de desempenho  $\mathcal{L}_2$  seja garantido para a saída regulada. Os resultados obtidos são baseados na utilização de um funcional de Lyapunov-Krasovski, na condição de setor generalizada. A partir destas ferramentas, condições em forma de LMI’s são obtidas para garantir a estabilidade  $\mathcal{L}_2$  entrada-estado como também a estabilidade assintótica do sistema em malha-fechada, tanto para o caso local como global. Analogamente às seções anteriores, também formulam-se problemas de otimização convexa com a finalidade de garantir dois objetivos de síntese: a maximização do limite superior para a norma  $\mathcal{L}_2$  das perturbações admissíveis, para as quais as trajetórias permanecem limitadas (i.e. maximização da tolerância à perturbação); e, considerando-se dada o limite superior da norma  $\mathcal{L}_2$  para a perturbação admissível, minimização do ganho  $\mathcal{L}_2$  entre a saída regulada e a perturbação (i.e. maximização da atenuação à perturbação).

Em particular, no caso estático, diferentemente das abordagens previamente apresentadas na literatura (PARK; CHOI; CHOO, 2000), (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005), considera-se o sistema apresentando atrasos variantes no tempo e a ação de perturbações limitadas em energia. No caso dinâmico é proposta uma estrutura não racional, a qual, similarmente aos resultados do capítulo precedente, permite obterem-se condições na forma de LMIs. Diferentemente destas abordagens, estes resultados permitem considerar também sistemas com atrasos nos estados e instáveis em malha aberta.

### 6.2 “Anti-Windup” Estático

Considera-se nesta seção a estrutura de “*anti-windup*” apresentada na Figura 6, com

$$y_a = E_c(\text{sat}(y_c(t)) - y_c(t)).$$

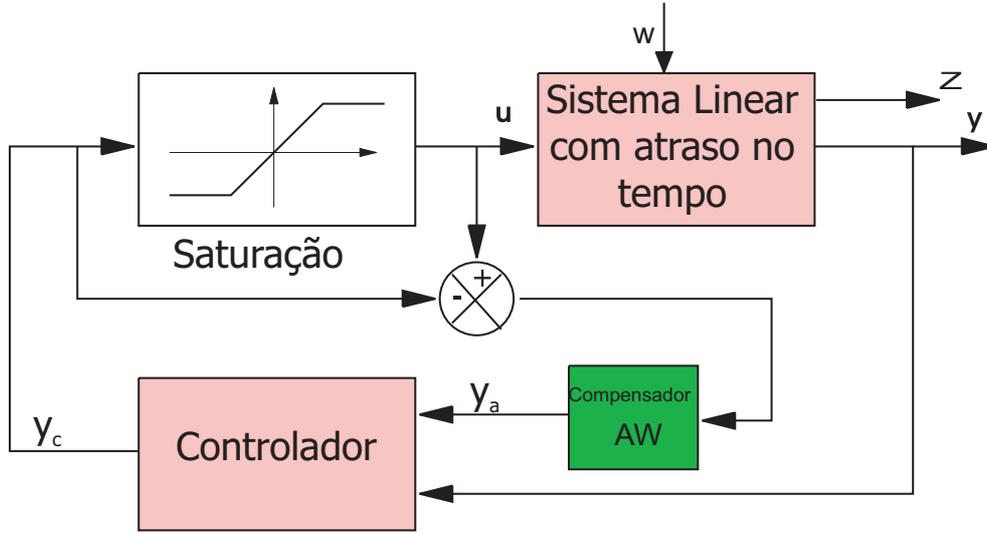


Figura 6: Esquema “anti-windup”.

### 6.2.1 Formulação do Problema

Seja o seguinte sistema linear, com atrasos variantes no tempo nos estados:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau(t)) + B_u \text{sat}(v(t)) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{y,u} u(t) + D_{y,w} w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{z,u} u(t) + D_{z,w} w(t)\end{aligned}\quad (140)$$

com condição inicial  $x(t_0 + \theta) = \phi_x(\theta), \forall \theta \in [-h, 0], t_0 \in \mathfrak{R}_+, \phi \in \mathcal{C}_\tau^v$ , sendo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $v(t) \in \mathfrak{R}^m$ ,  $w(t) \in \mathfrak{R}^q$  os vetores de estado, do sinal enviado para o atuador e de perturbação, respectivamente.  $y(t) \in \mathfrak{R}^p$  corresponde a saída de medida e  $z(t) \in \mathfrak{R}^r$  a saída regulada. Considere ainda  $A, A_d, B_u, B_w, C_y, D_{y,u}, D_{y,w}, C_z, D_{z,u}$  e  $D_{z,w}$  como sendo matrizes constantes de dimensões apropriadas e  $\tau(t)$  um atraso que varia lentamente no tempo e satisfaz:

$$\begin{aligned}0 &\leq \tau(t) \leq h \\ \dot{\tau}(t) &\leq d < 1.\end{aligned}\quad (141)$$

Assume-se ainda que o vetor da perturbação  $w$  seja limitado em energia, como em (13) e para algum escalar  $\bar{\omega}$ ,  $0 < \frac{1}{\bar{\omega}} < \infty$ , isto é,

$$\|w\|_2^2 \leq \frac{1}{\bar{\omega}}.\quad (142)$$

Considerando-se o sistema (140), assume-se um compensador dinâmico de saída de ordem  $n_c$ , definido como abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_{c,u} u_c(t) + B_{c,w} w(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_{c,u} u_c(t) + D_{c,w} w(t)\end{aligned}\quad (143)$$

sendo  $x_c(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$  o estado,  $u_c(t) \in \mathfrak{R}^p$  a entrada e  $y_c(t) \in \mathfrak{R}^m$  a saída do controlador. Considera-se este controlador é pré-projetado com o objetivo de garantir um certo nível de desempenho e a estabilidade do sistema em malha-fechada, sem considerar a presença de saturação no controle. A interconexão entre o controlador (143) e o sistema (140) é dada pelas seguintes relações

$$v(t) = y_c(t) \quad u_c(t) = y(t).\quad (144)$$

Esta interconexão é suposta ser bem definida (“*well-posed*”), i.e.,  $(I - D_{c,u}D_{y,u})$  e  $(I - D_{y,u}D_{c,u})$  são matrizes não singulares.

Com o objetivo de atenuar-se os efeitos indesejáveis de “*windup*”, causados pela saturação da entrada, um termo “*anti-windup*”

$$y_a = E_c(\text{sat}(y_c(t)) - y_c(t)), \quad E_c \in \mathfrak{R}^{n_c \times m},$$

é adicionado ao compensador conforme segue (veja (TARBOURIECH; GOMES DA SILVA JR.; GARCIA, 2004) e referências inclusas):

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_{c,u} u_c(t) + B_{c,w} w(t) + E_c(\text{sat}(y_c(t)) - y_c(t)) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_{c,u} u_c(t) + D_{c,w} w(t). \end{aligned} \quad (145)$$

Considerando-se as relações (144), define-se um vetor aumentado  $\xi'(t) = [x'(t) \quad x'_c(t)] \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$ , e as seguintes matrizes

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A + B_u \Delta D_{c,u} C_y & B_u \Delta C_c \\ B_{c,u} C_y + B_{c,u} D_{y,u} \Delta D_{c,u} C_y & A_c + B_{c,u} D_{y,u} \Delta C_c \end{bmatrix}; \quad \mathbb{A}_d = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} B_u (\Delta D_{c,u} D_{y,u} + I) \\ B_{c,u} D_{y,u} (\Delta D_{c,u} D_{y,u} + I) \end{bmatrix};$$

$$\mathbb{B}_w = \begin{bmatrix} B_u \Delta (D_{c,u} D_{y,w} + D_{c,w}) + B_w \\ B_{c,u} D_{y,u} \Delta (D_{c,u} D_{y,w} + D_{c,w}) + B_{c,u} D_{y,w} + B_{c,w} \end{bmatrix};$$

$$\mathbb{C} = [C_z + D_{z,u} \Delta D_{c,u} C_y \quad D_{z,u} \Delta C_c]; \quad \mathbb{D}_\psi = -D_{zu} (\Delta D_{c,u} D_{y,u} + I);$$

$$\mathbb{D}_w = D_{z,w} + D_{z,u} \Delta (D_{c,u} D_{y,w} + D_{c,w}); \quad \Delta = (I - D_{c,u} D_{y,u})^{-1}; \quad \mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix};$$

$$\mathbb{K} = [\Delta D_{c,u} C_y \quad \Delta C_c]; \quad \mathbb{K}_\psi = -\Delta D_{c,u} D_{y,u}; \quad \mathbb{K}_w = \Delta (D_{c,u} D_{y,w} + D_{c,w}).$$

Assim, o sistema em malha-fechada é representado por:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \mathbb{A} \xi(t) + \mathbb{A}_d \xi(t - \tau(t)) - (\mathbb{B} + \mathbb{R} E_c) \psi(y_c) + \mathbb{B}_w w(t) \\ z(t) &= \mathbb{C} \xi(t) + \mathbb{D}_\psi \psi(y_c) + \mathbb{D}_w w(t) \end{aligned} \quad (146)$$

sendo,

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \mathbb{K} \xi(t) + \mathbb{K}_\psi \psi(y_c(t)) + \mathbb{K}_w w(t) \\ \psi(y_c(t)) &= y_c(t) - \text{sat}(y_c(t)). \end{aligned} \quad (147)$$

O sistema (146) admite uma condição inicial

$$\xi(t_0 + \theta) = \phi(\theta) = \begin{bmatrix} x(t_0 + \theta) \\ x_c(t_0 + \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x(\theta) \\ \phi_{x_c}(\theta) \end{bmatrix}, \quad \forall \theta \in [-h, 0].$$

Supondo que o sistema está em equilíbrio, i.e.  $\phi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-h, 0]$ , e que uma perturbação “*w*” satisfazendo (142) atue no sistema para  $t \geq t_0 = 0$ , o problema que deseja-se resolver é enunciado como segue:

**Problema 5** *Projetar um ganho  $E_c$  de “anti-windup” com o objetivo de:*

- garantir que as trajetórias do sistema em malha-fechada sejam limitadas.
- minimizar o ganho- $\mathcal{L}_2$  entre  $w$  e  $z$ .

### 6.2.2 Resultados Teóricos

Com o objetivo de utilizar-se a condição de setor apresentada na seção 2.3.2.2, considera-se uma matriz  $G \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ , e define-se o conjunto

$$\mathcal{S} \triangleq \{\xi \in \mathfrak{R}^{n+n_c}; |(\mathbb{K}_{(i)} - G_{(i)})\xi| \leq u_{0(i)}, i = 1, \dots, m\}.$$

Dessa forma, pode-se enunciar uma variação do Lema 3.

**Lema 6** *Se  $\xi(t) \in \mathcal{S}$ , então a relação*

$$\psi(y_c(t))'T \left( \psi(y_c(t)) - \begin{bmatrix} G & \mathbb{K}_\psi & \mathbb{K}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \psi(y_c(t)) \\ w(t) \end{bmatrix} \right) \leq 0,$$

com  $y_c = \mathbb{K}\xi(t) + \mathbb{K}_\psi\psi(y_c(t)) + \mathbb{K}_w w(t)$ , é verificada para toda matriz  $T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva.

**Demonstração:** A demonstração segue os mesmos passos da prova do Lema 5.

Com o objetivo de garantir-se a estabilidade entrada-estado e entrada-saída, ou seja, resolver-se o Problema 5, enuncia-se o Teorema 20, com condições dependentes do atraso. Estas condições têm como hipótese que o sistema em malha-fechada esteja em equilíbrio, isto é,  $\xi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$ .

**Teorema 20** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $Q_1, L_1, L_3, X, J \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , matrizes  $Q_2, Q_3, L_2 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ ,  $H \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e escalares  $\varepsilon$  e  $\gamma > 0$ , tais que as seguintes desigualdades sejam verificadas*

$$(i) \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & H' & 0 & Q_1 C' & Q_1 & hQ_2' \\ * & -\bar{\varepsilon}\mathbb{A}_d X & -\mathbb{B}U - \mathbb{R}Y & \mathbb{B}_w & 0 & 0 & hQ_3' \\ * & -\bar{d}X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Sigma_2 & \mathbb{K}_w & U\mathbb{D}'_\psi & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & \mathbb{D}'_w & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -X & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -hJ \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} J & J \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \mathbb{A}'_d \end{bmatrix} \\ * & L \end{bmatrix} \geq 0$$

$$(iii) \begin{bmatrix} Q_1 & Q_1^{-1} \mathbb{K}'_{(i)} - H'_{(i)} \\ * & \varpi u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

com

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_2' + Q_2 \\ +hL_1 \\ * \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Q_3 + Q_1 \mathbb{A}' - Q_2' \\ +\varepsilon Q_1 \mathbb{A}'_d + hL_2 \\ -Q_3' - Q_3 + hL_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \Sigma_2 = -2U + U\mathbb{K}'_\psi + \mathbb{K}_\psi U,$$

$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - 1$  e  $\bar{d} = 1 - d$ , então, considerando-se que  $\phi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-h, 0]$ , e que  $\|w\|_2^2 \leq \varpi^{-1}$ ,  $E_c = YU^{-1}$  garante que o sistema em malha-fechada (146) é “well-posed” e:

1. suas trajetórias do sistema permanecem limitadas no conjunto

$$\mathcal{E}(Q_1^{-1}, \varpi^{-1}) \triangleq \{\xi \in \mathfrak{R}^{n+n_c}; \xi' Q_1^{-1} \xi \leq \varpi^{-1}\};$$

2.  $\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2$ ;

3. se  $w(t) = 0, \forall t \geq t_1 \geq 0, \xi(t)$  converge assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** A demonstração é similar à demonstração do Teorema 17, assim apresenta-se a mesma de forma sucinta. Reescrevendo-se o sistema (146) na forma de sistema descritor, conforme proposto em (FRIDMAN; SHAKED, 2002b), segue-se assim:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathbb{A} + \mathbb{A}_d & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ y(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{A}_d \end{bmatrix} \int_{t-\tau(t)}^t y(s) ds - \begin{bmatrix} 0 \\ (\mathbb{B} + \mathbb{R}E_c) \end{bmatrix} \Psi(y_c) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{B}_w \end{bmatrix} w(t). \quad (148)$$

Definindo agora o vetor  $\bar{\xi}' = [\xi'(t) \ y'(t)]$  e considerando as matrizes  $E$  e  $P$  e, o mesmo funcional de Lyapunov-Krasovskii do Teorema 17, juntamente com o funcional

$$\Upsilon = \dot{V}(t, x_t) - w'(t)w(t) + \frac{1}{\gamma} z'(t)z(t) dt < 0.$$

Então, se  $\Upsilon < 0$ , tem-se que (i), (ii) e (iii) se verificam. Definindo-se as seguintes matrizes,

$$\bar{\mathbb{A}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \mathbb{A} + \mathbb{A}_d & -I \end{bmatrix}; \bar{\mathbb{A}}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{A}_d \end{bmatrix}; \bar{\mathbb{B}} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{B} + \mathbb{R}E_c \end{bmatrix} \text{ e } \bar{\mathbb{B}}_w = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{B}_w \end{bmatrix}$$

pode-se calcular  $\Upsilon$  ao longo das trajetórias do sistema, como no Teorema 17. Supondo-se agora que  $\xi(t) \in \mathcal{S}$ , então, pelo Lema 6 e levando-se em conta que

$$z(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix} \bar{\xi}(t) + \mathbb{D}_\psi \Psi(y_c) + \mathbb{D}_w w(t)$$

obtém-se,

$$\Upsilon \leq \theta' \Xi \theta,$$

com

$$\theta' = [\bar{\xi}'(t) \ \xi'(t-\tau(t)) \ \Psi'(y_c) \ w'(t)] \text{ e}$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & (\varepsilon - 1)P'\bar{\mathbb{A}}_d & \begin{bmatrix} G'T \\ 0 \end{bmatrix} + P'\bar{\mathbb{B}} + \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} C' \\ 0 \end{bmatrix} \mathbb{D}_\psi & P'\bar{\mathbb{B}}_w + \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} C' \\ 0 \end{bmatrix} \mathbb{D}_w \\ * & -\bar{d}S & 0 & 0 \\ * & * & \left( -2T + \gamma^{-1} \mathbb{D}'_\psi \mathbb{D}_\psi + \mathbb{K}'_\psi T + T \mathbb{K}_\psi \right) & \left( \gamma^{-1} \mathbb{D}'_\psi \mathbb{D}_w + T \mathbb{K}_w \right) \\ * & * & * & (\gamma^{-1} \mathbb{D}'_w \mathbb{D}_w - I) \end{bmatrix}$$

sendo,

$$\Gamma_1 = \bar{\mathbb{A}}'P + P'\bar{\mathbb{A}} + \begin{bmatrix} (\varepsilon - 1)\bar{\mathbb{A}}'_d P \\ 0 \end{bmatrix} + [(\varepsilon - 1)P'\bar{\mathbb{A}}_d \ 0] + hZ + \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} C' \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & hR \end{bmatrix}.$$

Aplicando complemento de Schur, note que  $\Xi < 0$  é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_1 & (\varepsilon - 1)P'\bar{A}_d & P'\bar{B} + \begin{bmatrix} G'T \\ 0 \end{bmatrix} & P'\bar{B}_w & \begin{bmatrix} C' \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ hI \end{bmatrix} \\ * & -\bar{d}S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -2T + T\mathbb{K}_\psi + \mathbb{K}'_\psi T & T\mathbb{K}_w & \mathbb{D}'_\psi & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & \mathbb{D}'_w & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -S^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -hR^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (149)$$

com

$$\bar{\Gamma}_1 = \bar{A}'P + P'\bar{A} + \begin{bmatrix} (\varepsilon - 1)\bar{A}'_d P \\ 0 \end{bmatrix} + [(\varepsilon - 1)P'\bar{A}_d \ 0] + hZ.$$

Considerando agora

$$Q = P^{-1}, S^{-1} = X, R^{-1} = J, U = T^{-1}, GQ_1 = H \text{ e } Y = E_c U,$$

pré e pós-multiplicando (i) respectivamente por  $Diag(P, S, T, I, I, I, I)$  e sua transposta segue-se que (i) é equivalente à (149). Então, pode-se concluir que (i) e (ii) garantem que  $\Upsilon < 0$ , desde que  $\xi(t) \in \mathcal{S}, \forall t > 0$ .

Por outro lado, pré e pós-multiplicando (iii) implica que  $\mathcal{E}(Q^{-1}, \bar{\omega}^{-1}) \subset \mathcal{S}$ . Então, está garantido que as trajectórias do sistema nunca saem de  $\mathcal{S}$ , e portanto  $\Upsilon < 0$ , garante que (i), (ii) e (iii) são satisfeitas.

Se (i) é satisfeita segue que

$$-2U + U\mathbb{K}'_\psi + \mathbb{K}_\psi U < 0.$$

Este fato, dos Lemas 2 e 3 em (GRIMM et al., 2003), garante que o sistema em malha-fechada (146) é “well-posed” quando  $\psi(y_c) \neq 0$ , o que conclui a demonstração.  $\square$

Do Teorema 20, também obtêm-se condições de estabilidade global. Perceba-se que neste caso não é necessário considerar-se uma cota superior para a norma  $\mathcal{L}_2$  de  $w$  e que o resultado é válido para  $\forall \phi \in \mathcal{C}_\tau$ , como se segue.

**Corolário 8** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $Q_1, L_1, L_3, X, J, V \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , matrizes  $Q_2, Q_3, L_2 \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ ,  $H \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ ,  $Y \in \mathfrak{R}^{n_c \times m}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , e escalares  $\varepsilon$  e  $\gamma > 0$ , satisfazendo as desigualdades (i) e (ii) no Teorema 20, com  $H = \mathbb{K}Q_1$ , então para todo  $w(t) \in \mathcal{L}_2$ ,  $E_c = YU^{-1}$  garante que o sistema em malha-fechada (146) é “well-posed” e segue que:*

1. suas trajectórias são limitadas;
2.  $\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2 + V(0, 0)$ ;
3. quando  $w = 0$ , a origem do sistema em malha-fechada (146) é globalmente assintoticamente estável.

**Demonstração:** É suficiente considerar-se  $G = \mathbb{K}$ . Assim, a desigualdade do Lema 6 verifica-se para todo  $\xi(t) \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$ , logo para  $\forall w \in \mathcal{L}_2$  a origem do sistema é globalmente assintoticamente estável.  $\square$

**Observação 14** Considerando-se que o atraso  $\tau(t)$  seja tal que  $d \geq 1$ , condições semelhantes ao Teorema 20 podem ser obtidas. Basta considerar o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V(t, x_t) = \bar{\xi}(t)' EP \bar{\xi}(t) + \int_{-h}^0 \int_{t+s}^t y'(\theta) R y(\theta) d\theta ds$$

com  $R > 0$ . Para este funcional e  $\varepsilon = 1$ , a condição (i) do Teorema 20 é simplificada e torna-se independente de  $d$ , conforme abaixo:

$$(i) \quad \begin{bmatrix} \Sigma_1 & H' & 0 & Q_1 C' & h Q_2' \\ * & -\mathbb{B}U - \mathbb{R}Y & \mathbb{B}_w & 0 & h Q_3' \\ * & \Sigma_2 & \mathbb{K}_w & U \mathbb{D}'_\psi & 0 \\ * & * & -I & \mathbb{D}'_w & 0 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 \\ * & * & * & * & -hJ \end{bmatrix} < 0$$

com  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  dados como no Teorema 20. Cabe chamar atenção que as condições (ii) e (iii), permanecem as mesmas.

### 6.2.3 Problemas de Otimização

Analogamente à seção 4.3.2, formulam-se problemas de otimização com a finalidade de mostrar-se como utilizar as condições do Teorema 20, com o objetivo de encontrar-se  $E_c$  para maximizar: a tolerância à perturbação e minimizar o ganho- $\mathcal{L}_2$ .

#### 6.2.3.1 Maximização da perturbação admissível

Considerando  $\|w\|_2^2 < \frac{1}{\varpi}$  a idéia é maximizar o limite da perturbação  $\frac{1}{\varpi}$ .

$$\begin{aligned} & \min \varpi \\ & \text{sujeito às relações (i), (ii) e (iii).} \end{aligned} \quad (150)$$

#### 6.2.3.2 Minimização do ganho $\mathcal{L}_2$

Dado um limite  $(1/\varpi)$  para a perturbação admissível, a idéia é minimizar o limite superior  $\sqrt{\gamma}$  do ganho- $\mathcal{L}_2$ ;

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito às relações (i), (ii) e (iii).} \end{aligned} \quad (151)$$

**Observação 15 :** Igualmente à Observação 10, considerando-se um  $\varepsilon$  fixo, as condições (i) e (ii) no Teorema 20 são LMIs e os problemas de otimização, formulados aqui, são convexos. Assim, a solução ótima dos problemas é obtida através de uma procura iterativa em uma busca unidimensional em  $\varepsilon$ .

**Observação 16** Comparando-se os resultados do artigo (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006) com os resultados apresentados neste capítulo, tem-se que em (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2006):

1. a síntese de “anti-windup” estático não permite que se considerem atrasos variantes no tempo, além disso, a fim de obterem-se condições de estabilidade dependentes do atraso, utiliza-se apenas o modelo de transformação de (NICULESCU, 2001, vol. 269);
2. o sistema não sofre a influência de perturbações, por isso não trata da estabilidade entrada-estado e entrada-saída;

**Observação 17** No sistema (140) pode-se considerar que a derivada do estado também dependa do atraso  $\tau$ , neste caso, tem-se um sistema do tipo neutro, ou seja,

$$\dot{x}(t) + F\dot{x}(t - \tau) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + Bu(t),$$

no qual assume-se  $\tau$  constante e  $\|F\| < 1$ . Descrevem-se brevemente as principais diferenças na abordagem para este caso, as quais podem ser observadas também em (GHIGGI; GOMES DA SILVA JR., 2006b),

- o funcional de Lyapunov apresenta um termo a mais

$$V_4(t, \xi_t) = \int_{t-\tau(t)}^t y'(\theta) W y(\theta) d\theta, \quad W > 0,$$

- a LMI (i) do Teorema 17, passa a apresentar a dependência de uma matriz constante  $F$  que acompanha o termo da derivada do estado com atraso, bem como a dependência da matriz  $W$  do novo funcional de Lyapunov.

#### 6.2.4 Exemplo Numérico

Considere o sistema (140) com os seguintes dados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0.3 & -2 \end{bmatrix}; A_d = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_u = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}; B_w = [ 0 \quad 0.5 ]';$$

$$C_z = [ 0 \quad 1 ]; C_y = [ 5 \quad 1 ]; D_{y,w} = 0.1; D_{z,u} = D_{z,w} = D_{c,w} = D_{y,u} = 0;$$

$$u_0 = 15; h = 1; d = 0.5.$$

Através da resolução do problema de otimização (150) relativo ao Teorema 20, o valor mínimo de  $\varpi$ , obtido com

$$\varepsilon = 0.5, \text{ é } 1.3642 \times 10^{-5}.$$

Para este caso, pode-se obter

$$\gamma = 299.1772 \text{ e } E_c = [ -61.3035 \quad 611.2292 ]'.$$

Considerando o mesmo problema, mas forçando  $E_c = 0$ , (i.e. sem considerar o compensador de “anti-windup”), os valores que se obtêm são

$$\varpi = 1.3660 \times 10^{-5} \text{ e } \gamma = 353.67,$$

os quais mostram que o laço de “anti-windup” aumenta a atenuação à perturbação.

Na tabela 9, são mostrados os valores de  $\gamma$  (relativos à minimização do ganho- $\mathcal{L}_2$ ) obtidos através da solução do problema (151) relativo ao Teorema 20, considerando valores diferentes para  $\varpi$ .

Conforme esperado, quanto maior é o valor de  $\varpi$  (i.e. o menor limite para a perturbação), menor é o valor de  $\gamma$ . Por outro lado, os valores de  $\varpi$  e  $\gamma$  são maiores para maiores valores do atraso  $h$ .

Tabela 9: Relação entre a perturbação e o ganho- $\mathcal{L}_2$ .

$h = 1, d = 0.5$ e $\varepsilon = 0.5$	
$\bar{\omega}$	$\gamma$
$1.3642 \times 10^{-5}$	299.177
$2 \times 1.3642 \times 10^{-5}$	0.0677
$5 \times 1.3642 \times 10^{-5}$	0.0589
$h = 0.5, d = 0.5$ e $\varepsilon = 0.9$	
$\bar{\omega}$	$\gamma$
$6.1433 \times 10^{-6}$	63.2549
$2 \times 6.1433 \times 10^{-6}$	0.0593
$5 \times 6.1433 \times 10^{-6}$	0.0572

### 6.3 “Anti-Windup” Dinâmico

Seguindo-se as idéias apresentadas em (GOMES DA SILVA JR.; GHIGGI; TARBOURIECH, 2008), supõe-se agora que no esquema apresentado na Figura 6, o controlador de realimentação de saída seja não racional e pré-calculado, desconsiderando a existência de saturação, e o compensador de “anti-windup” seja dinâmico. Então, o objetivo torna-se projetar um compensador de “anti-windup” dinâmico que corrija ou minimize os efeitos causados pela diferença entre a entrada do atuador e a saída.

Os resultados aqui apresentados são também encontrados em (GHIGGI; BENDER; GOMES DA SILVA JR., 2008).

#### 6.3.1 Formulação do Problema

Considere o sistema (140) com  $\tau(t) = \tau, \forall t$ , ou seja, o atraso é considerado invariante no tempo e suponha que um controlador de realimentação de saída, possivelmente não racional (OLIVEIRA; GEROMEL, 2004), seja projetado desconsiderando-se a saturação, conforme segue:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + A_{c,d} x_c(t - \tau) + B_c u_c(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + C_{c,d} x_c(t - \tau) + D_c u_c(t)\end{aligned}\quad (152)$$

sendo  $x_c(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$  é o estado do controlador,  $u_c(t) = y(t)$  é a entrada do controlador e  $y_c(t)$  é a saída do controlador. As matrizes  $A_c, A_{c,d}, B_c, C_c, C_{c,d}, D_c$  são de dimensões apropriadas.

Como a entrada da planta é limitada em amplitude, tem-se:

$$u(t) = \text{sat}(y_c(t)). \quad (153)$$

Com o objetivo de eliminar os efeitos indesejáveis causados pela saturação, é proposto o seguinte compensador dinâmico não racional de “anti-windup”:

$$\begin{aligned}\dot{x}_a(t) &= A_a x_a(t) + A_{a,d} x_a(t - \tau) + B_a \psi(y_c(t)) \\ y_a(t) &= C_a x_a(t) + C_{a,d} x_a(t - \tau) + D_a \psi(y_c(t))\end{aligned}\quad (154)$$

sendo  $x_a(t) \in \mathfrak{R}^{n+n_c}$  o vetor do estado do compensador,  $y_a(t)$  a saída do compensador. As matrizes  $A_a, A_{a,d}, B_a, C_a, C_{a,d}$  e  $D_a$  são de dimensões apropriadas.

A saída do compensador (154) é injetada no controlador (152), através do sinal  $y_a$ . Assim, a estrutura do controlador final torna-se:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + A_{c,d} x_c(t - \tau) + B_c u_c(t) + y_a(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + C_{c,d} x_c(t - \tau) + D_c u_c(t).\end{aligned}\quad (155)$$

Similarmente ao Problema 5, o objetivo do projeto do compensador de “*anti-windup*”, com a estrutura dada em (154), é de garantir que as trajetórias do sistema sejam limitadas para toda perturbação satisfazendo (15) e, em adição, garantir um limite superior para o ganho- $\mathcal{L}_2$  da perturbação para a saída regulada.

Sejam agora o vetor  $\xi(t)' = [x(t)' \quad x_c(t)' \quad x_a(t)']$  e as seguintes matrizes

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A + BD_c C_y & BC_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n_c} \end{bmatrix}; \mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_1 \\ I_a & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C} &= [0 \quad I_a]; \\ \mathbb{A}_d &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} A_d + BD_c C_{y,d} & BC_{c,d} \\ B_c C_{y,d} & A_{c,d} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} A_a \\ C_a \end{bmatrix}; \mathbf{K}_{1,d} = \begin{bmatrix} A_{a,d} \\ C_{a,d} \end{bmatrix}; \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} B_a \\ D_a \end{bmatrix}; \\ \mathbb{B}_\psi &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbb{B}_w &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_w \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} BD_c D_{y,w} + B_w \\ B_c D_{y,w} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C} &= [\mathbf{C}_z \quad 0]; \mathbf{C}_z = [C_z + D_z D_c C_y \quad D_z C_c]; \\ \mathbb{C}_d &= [\mathbf{C}_{z,d} \quad 0]; \mathbf{C}_{z,d} = [C_{z,d} + D_z D_c C_{y,d} \quad D_z C_{c,d}]; \\ \mathbb{D}_{z,w} &= \mathbf{D}_{z,w} = D_{z,w} + D_z D_c D_{y,w}; \mathbb{D}_\psi = \mathbf{D}_\psi = -D_z; \\ \mathbb{K} &= [\mathbf{K} \quad 0]; \mathbf{K} = [D_c C_y \quad C_c]; \mathbb{K}_d = [\mathbf{K}_d \quad 0]; \\ \mathbf{K}_d &= [D_c C_{y,d} \quad C_{c,d}]; \mathbb{K}_w = \mathbf{K}_w = D_c D_{y,w}, \mathbb{K}_\psi = 0.\end{aligned}$$

A interconexão do sistema (140) com o controlador (155) e com o compensador de “*anti-windup*” (154), gera o sistema (156) em malha-fechada,

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= (\mathbb{A} + \mathbb{B}_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{C}) \xi(t) + (\mathbb{A}_d + \mathbb{B}_1 \mathbf{K}_{1,d} \mathbf{C}) \xi(t - \tau) \\ &\quad - (\mathbb{B}_\psi - \mathbb{B}_1 \mathbf{K}_2) \psi(y_c) + \mathbb{B}_w w(t) \\ z(t) &= \mathbb{C} \xi(t) + \mathbb{C}_d \xi(t - \tau) + \mathbb{D}_\psi \psi(y_c) + \mathbb{D}_w w(t).\end{aligned}\quad (156)$$

Reescrevendo a saída do controlador com o vetor  $\xi(t)$ , tem-se que

$$y_c(t) = \mathbb{K} \xi(t) + \mathbb{K}_d \xi(t - \tau) + \mathbb{K}_w w(t).\quad (157)$$

O sistema (156) tem condições iniciais expressas por:

$$\begin{aligned}\phi(\theta) &= [x(t_0 + \theta)' \quad x_c(t_0 + \theta)' \quad x_a(t_0 + \theta)']' \\ &= [\phi_x(\theta)' \quad \phi_{x_c}(\theta)' \quad \phi_{x_a}(\theta)']', \forall \theta \in [-\tau, 0].\end{aligned}\quad (158)$$

### 6.3.2 Resultados Teóricos

Considerando uma matriz  $G = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{m \times 2(n+n_c)}$ , analogamente à seção 6.2, define-se um conjunto poliédrico  $\mathcal{S} \subset \mathfrak{R}^{2(n+n_c)}$  e enuncia-se um lema para a condição de setor generalizada.

**Lema 7** Se  $\xi(t) \in \mathcal{S}$  então a relação

$$\begin{aligned} & \psi(y_c)' T \left( \psi(y_c) - \begin{bmatrix} G & \mathbb{K}_d & 0 & \mathbb{K}_w \end{bmatrix} \cdot \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} \xi(t)' & \xi(t-\tau)' & \psi(y_c(t))' & w(t)' \end{bmatrix}' \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (159)$$

é verificada para toda matriz diagonal  $T \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  definida positiva.

Abaixo são apresentadas condições suficientes, na forma de LMI's, para a existência de um compensador dinâmico de “anti-windup” não racional (154) para o sistema (140)-(155).

**Teorema 21** Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $X_0, Y_0, X_{11}, X_{22} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $X_{12}, \hat{A}_a, \hat{A}_{a,d} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ ,  $\hat{C}_a, \hat{C}_{a,d} \in \mathfrak{R}^{(n_c) \times (n+n_c)}$ ,  $Z_1, Z_2, Q_1, Q_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ , e escalares positivos  $\gamma$  e  $\varpi$ , tais que (i) e (ii) sejam verificadas,

$$(i) \quad \begin{bmatrix} \Sigma & \mathbf{A} + \hat{A}'_a + X_{12} & \mathbf{A}_d X_0 + B_1 \hat{C}_{a,d} & \mathbf{A}_{a,d} & -Q_1 + Z'_1 & \mathbf{B}'_w & X_0 \mathbf{C}'_z \\ * & Y_0 \mathbf{A} + \mathbf{A}' Y_0 + X_{22} & \hat{A}_d & Y_0 \mathbf{A}_d & -Q_2 + Z'_2 & Y_0 \mathbf{B}'_w & \mathbf{C}'_z \\ * & * & -X_{11} & -X_{12} & X'_0 \mathbf{K}_d & 0 & X_0 \mathbf{C}'_{z,d} \\ * & * & * & -X_{22} & \mathbf{K}_d & 0 & \mathbf{C}'_{z,d} \\ * & * & * & * & -2S & \mathbf{K}_w & -S \mathbf{D}'_\psi \\ * & * & * & * & * & -I & \mathbf{D}'_{z,w} \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} X_0 & * & * \\ I_{n+n_c} & Y_0 & * \\ X_0 \mathbb{K}_{(i)} - Z_{1(i)} & \mathbb{K}_{(i)} - Z_{2(i)} & \varpi u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

com  $\Sigma = \mathbf{A} X_0 + X_0 \mathbf{A}' + B_1 \hat{C}_a + \hat{C}'_a B'_1 + X_{11}$ , então, considerando que  $\phi(\theta) = 0, \forall \theta \in [-\tau, 0]$  e que  $\|w\|_2^2 \leq \varpi^{-1}$ , o compensador dinâmico de “anti-windup” (154) com matrizes

$$\begin{aligned} A_a &= V_0^{-1} [\hat{A}_a - (Y_0 \mathbf{A} X_0 + Y_0 \hat{C}_a)] (U'_0)^{-1} \\ A_{a,d} &= V_0^{-1} [\hat{A}_{a,d} - (Y_0 \mathbf{A}_d X_0 + Y_0 \hat{C}_{a,d})] (U'_0)^{-1} \mathbf{B}_1 \\ B_a &= V_0^{-1} (Q_2 + Y_0 Q_1) S^{-1} \\ C_a &= \hat{C}_a (U'_0)^{-1} \\ C_{a,d} &= \hat{C}_{a,d} (U'_0)^{-1} \\ D_a &= (Q_1 + \mathbf{B} S) S^{-1} \end{aligned} \quad (160)$$

sendo que as matrizes  $U_0$  e  $V_0$  verificam  $V_0 U'_0 = I - Y_0 X_0$ , são tais que:

1. quando  $w \neq 0$

a. as trajetórias do sistema (140) em malha-fechada permanecem limitadas no conjunto

$$\mathcal{E}(P_0, \varpi^{-1}) \triangleq \{\xi \in \mathfrak{R}^{2(n+n_c)}; \xi' P_0 \xi \leq \varpi^{-1}\}, \text{ com}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} Y_0 & V_0 \\ V_0' & \bullet \end{bmatrix} \quad P_0^{-1} = \begin{bmatrix} X_0 & U_0 \\ U_0' & \bullet \end{bmatrix};$$

b.  $\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2$ ;

2. se  $w(t) = 0, \forall t \geq t_1 \geq 0$ , ou se  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \rightarrow 0$ ,  $\xi(t)$  as trajetórias do sistema (140) em malha-fechada convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** Os passos seguidos na demonstração são análogos aos dos Teoremas 20 e 18. Sendo considerado o funcional

$$V(t, \xi_t) = \xi'(t) P_0 \xi(t) + \int_{t-\tau}^t \xi'(\theta) P_1 \xi(\theta) d\theta \quad (161)$$

e as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} \hat{A}_a &= Y_0 \mathbf{A} X_0 + Y_0 \mathbf{B}_1 C_a U_0' + V_0 A_a U_0' & \hat{C}_a &= C_a U_0' \\ \hat{A}_{a,d} &= Y_0 \mathbf{A}_d X_0 + Y_0 \mathbf{B}_1 C_{a,d} U_0' + V_0 A_{a,d} U_0' & \hat{C}_{a,d} &= C_{a,d} U_0' \\ Z_1 &= G_1 X_0 + G_2 U_0 & Z_2 &= G_1 \\ Q_1 &= \mathbf{B} S - \mathbf{B}_1 D_a S & Q_2 &= Y_0 Q_1 - V_0 B_a S. \end{aligned}$$

□

O seguinte corolário pode ser aplicado quando o sistema em malha-aberta for assintoticamente estável. Neste caso, pode-se garantir que as trajetórias do sistema em malha-fechada são limitadas para toda perturbação  $w(t) \in \mathcal{L}_2$  considerando condições iniciais nulas.

**Corolário 9** Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $X_0, Y_0, X_{11}, X_{22} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ , uma matriz diagonal definida positiva  $S \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ , matrizes  $X_{12}, \hat{A}_a, \hat{A}_{a,d} \in \mathfrak{R}^{(n+n_c) \times (n+n_c)}$ ,  $\hat{C}_a, \hat{C}_{a,d} \in \mathfrak{R}^{(n_c) \times (n+n_c)}$ ,  $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{R}^{m \times (n+n_c)}$ , e escalares positivos  $\gamma$  e  $\varpi$  tais que as LMIs (i) do Teorema 21 e

$$\begin{bmatrix} X_0 & I \\ I & Y_0 \end{bmatrix} > 0,$$

sejam verificadas, com  $Z_1 = X_0 \mathbf{K}$  e  $Z_2 = \mathbf{K}$ , então o compensador dinâmico de “anti-windup” (154) com matrizes definidas em (160), e com matrizes  $U_0$  e  $V_0$  verificando  $V_0 U_0' = I - Y_0 X_0$ , é tal que:

1. quando  $w \neq 0$

a. as trajetórias do sistema (140) em malha-fechada permanecem limitadas para todo  $\phi_{\xi}(\theta) \in \mathcal{C}_{\tau}^v$  e para toda condição inicial;

b.  $\|z\|_2^2 < \gamma \|w\|_2^2 + \gamma V(0, 0)$ ;

2. se  $w(t) = 0, \forall t \geq t_1 \geq 0$ , ou se  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) \rightarrow 0$ ,  $\xi(t)$  converge assintoticamente para a origem.

### 6.3.3 Problemas de Otimização

Seguindo raciocínio análogo à seção 6.2.3, pode-se formular os seguintes problemas de otimização:

#### 6.3.3.1 Maximização da perturbação admissível

Considerando  $\|w\|_2^2 < \frac{1}{\bar{\omega}}$  a idéia é maximizar o limite da perturbação  $\frac{1}{\bar{\omega}}$ .

$$\begin{aligned} & \min \bar{\omega} \\ & \text{sujeito às relações (i) e (ii).} \end{aligned} \tag{162}$$

#### 6.3.3.2 Minimização do ganho $\mathcal{L}_2$

Dado um limite  $(1/\bar{\omega})$  para a perturbação admissível, a idéia é minimizar o limite superior  $\sqrt{\gamma}$  do ganho- $\mathcal{L}_2$ ;

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{sujeito às relações (i), e (ii).} \end{aligned} \tag{163}$$

**Observação 18** *Perceba-se que se não forem considerados os termos não racionais, dados por  $A_{a,d}x_a(t - \tau)$  e  $C_{a,d}x_a(t - \tau)$ , na estrutura do compensador de “anti-windup”, não será possível obterem-se condições de síntese em forma de LMIs. Estes termos introduzem mais graus de liberdade as condições do Teorema 21, implicando numa redução do conservadorismos.*

**Observação 19** *Fazendo-se uma comparação entre os resultados obtidos e os artigos (PARK; CHOI; CHOO, 2000) e (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005), tem-se que em (PARK; CHOI; CHOO, 2000) é considerado que a planta está sujeita a atrasos na entrada e a saturação, é projetado um compensador de “anti-windup” para minimizar uma função custo, dado como valor absoluto a diferença entre os estados do controlador, considerando o atuador livre de saturação, e os estados do controlador, quando a planta está sujeita a entradas saturadas e uma estrutura de “anti-windup”. Mostra-se que o compensador resultante é ótimo e que estabiliza o sistema em malha-fechada globalmente. É importante lembrar que este resultado se aplica somente a sistemas que são assintoticamente estáveis em malha aberta e que não apresentem atrasos nos estados. Em (ZACCARIAN; NESIC; TEEL, 2005), o controlador ótimo obtido em (PARK; CHOI; CHOO, 2000) é estendido com o objetivo de considerar que o sistema esteja também sujeito a perturbações e a incertezas e esteja sujeito a atrasos nas saídas. As condições são obtidas para a estabilidade global do sistema em malha-fechada. Por outro lado, as técnicas de projeto de compensador, proposta nesta seção, aplicam-se a sistemas com atrasos nos estados, que sejam estáveis ou instáveis, e as condições de estabilidade, para o sistema em malha-fechada, são tanto locais quanto globais.*

**Observação 20** *Comparando-se agora os resultados deste capítulo com os do capítulo 5, observe-se que aqui o controlador é dado, sendo projetado o compensador de “anti-windup”, ao passo que em 6.2 projeta-se simultaneamente o controlador e o ganho estático de “anti-windup”.*

### 6.3.4 Exemplo Numérico

**Exemplo 5** Considere o sistema (140) dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -0.1x(t) + 0.1x(t - \tau) + u(t) + 0.1w(t) \\ y(t) &= x(t) \\ z(t) &= x(t)\end{aligned}\quad (164)$$

e portanto

$$\begin{aligned}A &= -0.1, A_d = 0.1, B = 1, B_w = 0.1 \\ C_y &= 1, C_{y,d} = 0, D_{y,w} = 0 \\ C_z &= 1, C_{z,d} = 0, D_z = 0, D_{z,w} = 0.\end{aligned}\quad (165)$$

Um controlador PI, descrito em equações de estado, por:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= -0.2y(t) \\ y_c(t) &= x_c(t) - 2y(t)\end{aligned}\quad (166)$$

implicando em

$$\begin{aligned}A_c &= 0, A_{c,d} = 0, B_c = -0.2 \\ C_c &= 1, C_{c,d} = 0, D_c = -2.\end{aligned}\quad (167)$$

Seja  $u_0 = 1$  e  $\tau = 1$ . Resolvendo-se o problema de maximização da tolerância à perturbação (163), obtém-se como limite para a perturbação  $w$  admissível o valor  $1/\sqrt{\varpi} = 113.7717$  (o valor de  $\varpi$  é dado por  $\varpi = 7.7256 \times 10^{-5}$ ). Obtém-se também as matrizes (168), que geram o compensador de “anti-windup” (154),

$$\begin{aligned}D_a &= -0.7495; C_a = \begin{bmatrix} 0.4966 & 0.6401 \end{bmatrix} \\ C_{a,d} &= \begin{bmatrix} 0.0074 & 0.0030 \end{bmatrix}; B_a = \begin{bmatrix} 5.1913 \\ 3.6375 \end{bmatrix} \\ A_a &= \begin{bmatrix} -2.7810 & 0.6633 \\ -2.8824 & -3.2606 \end{bmatrix}; A_{a,d} = \begin{bmatrix} -3.4736 & -0.3950 \\ -0.6333 & -0.2059 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (168)$$

Tabela 10: Tabela comparativa entre o limite para perturbação admissível ( $\varpi$ ) e a atenuação à perturbação ( $\sqrt{\gamma}$ ).

$\varpi$	$\sqrt{\gamma}$
$7 \times 10^{-4}$	1.2122
$7 \times 10^{-3}$	0.0242
$7 \times 10^{-2}$	0.0142
$7 \times 10^{-1}$	0.0135
$7 \times 10^2$	0.0134

Na Tabela 5 são apresentados os resultados da atenuação à perturbação  $\sqrt{\gamma}$ , calculados a partir da resolução do problema de minimização do ganho- $\mathcal{L}_2$ , para diferentes valores de  $\varpi$  ( $\frac{1}{\sqrt{\varpi}}$  = tolerância a perturbação), que são atribuídos a priori. Percebe-se que, quanto maior for o valor de  $\varpi$ , maior é o valor do limite superior  $\sqrt{\gamma}$ , da norma  $\mathcal{L}_2$  da saída regulada.

Considere um sinal para a perturbação definido como segue:

$$w(t) = \begin{cases} \alpha & \text{se } 0 < t \leq T \\ 0 & \text{se } t > T \end{cases}\quad (169)$$

Para  $T = 0.01s$ ,  $\alpha = 113.7717$ , a Figura 7 ilustra o comportamento do sistema em malha-fechada, com  $\tau = 1$  e  $u_0 = 1$ , considerando que o compensador (168) atue ou não no sistema. Como pode ser visto, as trajetórias do sistema em malha-fechada com compensador de “anti-windup” convergem mais rapidamente para a origem. Na mesma figura é possível observar-se um gráfico da entrada  $u(t)$ , correspondente à saída  $y(t)$ . Como era de se esperar, pode-se notar que o atuador permanece mais tempo saturado sem o compensador de “anti-windup”.

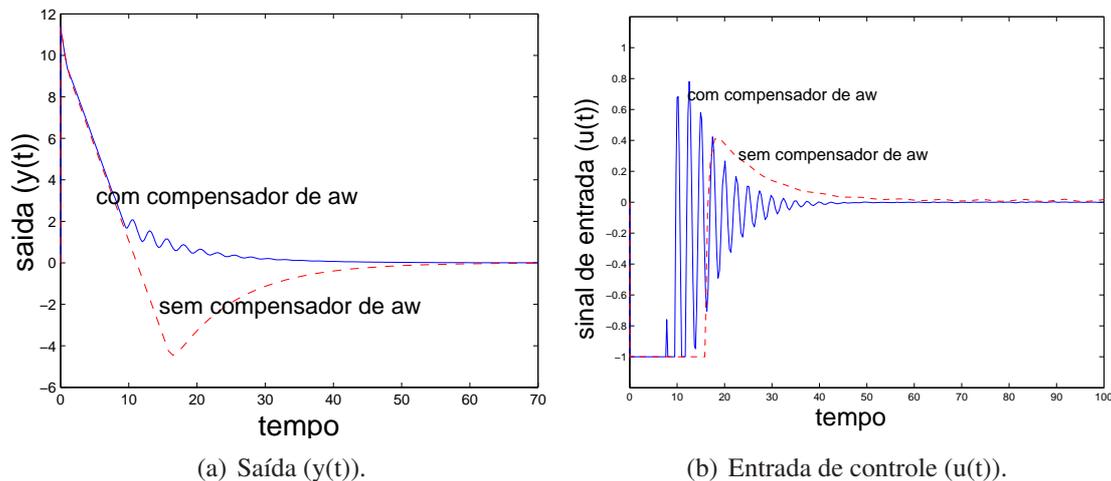


Figura 7: Comportamento do sistema com e sem compensador de “anti-windup”.

## 6.4 Conclusão

Nesta seção, apresentaram-se propostas para técnicas de projeto de compensador de “anti-windup” estático ou dinâmico, para sistemas com atrasos nos estados e saturação nos atuadores. Considerando que atuasse no sistema uma perturbação limitada pela norma  $\mathcal{L}_2$ , a estrutura de “anti-windup” foi calculada com o objetivo de garantir que as trajetórias do sistema permanecessem limitadas e que um certo nível de desempenho  $\mathcal{L}_2$  fosse garantido para a saída regulada. Os resultados foram obtidos diretamente na forma de LMI’s, para garantir a estabilidade  $\mathcal{L}_2$  entrada-estado como também a estabilidade assintótica do sistema em malha-fechada, tanto para o caso local como global.

Como vantagens para o caso estático, há de se falar a respeito da possibilidade de considerarem-se atrasos que sejam variantes no tempo. Por outro lado, no caso em que a estrutura de “anti-windup” é dinâmica, considera-se que o atraso é constante, podendo-se considerar que o controlador pré-calculado seja não racional.

Em particular, os resultados foram estabelecidos para o caso de sistemas com atrasos nos estados, caso que não poderia ser tratado com métodos previamente propostos na literatura. A extensão para o caso de sistemas com atrasos sobre as entradas e/ou saídas é, entretanto, praticamente direta.

## 7 ESTABILIZAÇÃO DE SISTEMAS DISCRETOS COM ATRASOS VARIANTES NO TEMPO E SATURAÇÃO NOS ATUADORES

### 7.1 Introdução

Conforme visto no Capítulo 3, é grande na literatura a quantidade de trabalhos abordando o problema de estabilidade e estabilização de sistemas contínuos no tempo com atrasos. Já para sistemas discretos, tem sido dada menor atenção, notando-se um número menor de artigos publicados para este caso. Uma das razões deve-se ao fato de que a estabilidade dos sistemas discretos com atrasos nos estados, pode ser estudada através da construção de um sistema aumentado livre de atrasos, com dinâmica equivalente a do sistema original. Porém, se o atraso for muito grande, variante no tempo ou mesmo desconhecido, então justifica-se o estudo deste tipo de sistema.

Visando abordar sobretudo estes dois últimos casos, trabalhos considerando sistemas discretos no tempo vêm sendo propostos. Em (MAHMOUD, 2000), sistemas com atrasos invariantes no tempo são investigados nos últimos anos. Em (CHEN; GUAN; LU, 2003) condições independentes do atraso são propostas. Em (FRIDMAN; SHAKED, 2005a) a técnica de sistema descritor é utilizada para a dedução de condições de estabilidade e de estabilização para o caso de atrasos variantes no tempo, considerando abordagens dependentes e independentes do atraso. Cabe ressaltar que essa abordagem leva a condições de estabilização (síntese) na forma de BMIs. A estabilização de sistemas discretos no tempo, com atrasos variantes no tempo, é considerada em (BOUKAS, 2006) por meio de condições independentes do atraso. Em (LEITE; TARBOURIECH; PERES, 2004) e (MIRANDA; LEITE, 2007) condições dependentes do atraso são apresentadas para a análise e síntese. Nesses trabalhos, o atraso é considerado variante no tempo e as condições propostas utilizam variáveis de folga, resultando em condições convexas, na forma de LMIs, também para a síntese de controladores robustos. Os trabalhos acima focam a questão de estabilidade robusta, mas nenhum deles considera a possibilidade de saturação nas variáveis de controle. Para sistemas discretos no tempo podemos citar apenas (TIS-SIR; HMAMED, 1992), onde condições de estabilidade local são propostas, mas sem uma caracterização consistente do domínio de condições iniciais admissíveis e apenas para atrasos invariantes no tempo.

Assim, neste Capítulo, é considerado o problema de estabilização de sistemas discretos com atrasos variantes no tempo e atrasos constantes, mas incertos, sujeitos à saturação de controle. Considera-se uma abordagem baseada em funcionais de Lyapunov Krasovskii, similar às propostas em (LEITE; TARBOURIECH; PERES, 2004) e (MIRANDA; LEITE, 2007), mas usando explicitamente o Lema de Finsler, e a modelagem de satura-

ção usada em (GHIGGI; GOMES DA SILVA JR., 2006a). Condições na forma de LMIs tanto para a garantia de estabilização global quanto local são apresentadas. Baseado nestas condições, problemas de otimização convexos são propostos com o intuito de computar a lei de controle no sentido de maximizar o domínio de condições iniciais admissíveis ou o intervalo de atraso admissível, para um conjunto de condições iniciais admissíveis dado. Neste capítulo, tal conjunto será definido como:

$$C_\phi \triangleq \{\phi_k \in D_{\bar{h}}; \alpha_1 \|\phi_k\|_d^2 + \alpha_2 \|\Delta\phi_k\|_d^2 < 1\}$$

## 7.2 Formulação do Problema

Considere o sistema discreto no tempo, sujeito a atrasos, nos estados e entradas saturantes dado por:

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-\tau_k} + B \text{sat}(v_k) \quad (170)$$

com condição inicial<sup>1</sup>

$$x_{k_0-j} = \phi(k_0 - j), j \in [-\bar{h}, 0], \text{ e } \phi_{k_0} \in C_{\bar{h}}^V,$$

sendo  $x_k \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estados,  $v_k \in \mathfrak{R}^m$  a entrada de controle.  $A$ ,  $A_d$  e  $B$  são matrizes reais constantes de dimensões apropriadas.  $\tau_k$  é o atraso suposto, variante no tempo e limitado por

$$1 \leq \underline{h} \leq \tau_k \leq \bar{h}, \quad (\underline{h}, \bar{h}) \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{N}. \quad (171)$$

Considera-se neste capítulo que possam ser empregadas duas leis de controle, do tipo realimentação de estados:

$$v_k = Kx_k + K_d x_{k-\tau_k} \quad (172)$$

$$v_k = Kx_k, \quad (173)$$

com  $K$  e  $K_d \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ . É importante observar que, a lei de controle (172), só pode ser utilizada quando o atraso  $\tau_k$  for conhecido para cada instante de tempo  $k$ , caso contrário, utiliza-se a lei de controle (173). Comentários análogos a respeito da estabilidade local e global, apresentados em 3.2, podem ser considerados. Assim, pode-se formular o seguinte problema.

**Problema 6 (Síntese)** *dado um conjunto de condições iniciais  $C_\phi$ , para que o sistema em malha-fechada seja assintoticamente estável, determinar matrizes  $K$  e  $K_d$ , tais que toda trajetória do sistema (170), iniciando nesse conjunto, convirja assintoticamente para a origem, ou ainda, determinar  $K$  e  $K_d$  de forma que se obtenha uma estimativa para o conjunto de condições iniciais admissíveis, o maior possível.*

Desejando-se modelar a saturação, a fim de transformar o modelo não-linear em uma forma tratável, utiliza-se a mesma função apresentada na seção 2.3.2, porém aplicada ao caso discreto. Assim, definindo  $\psi(v_k) = v_k - \text{sat}(v_k)$ , pode-se reescrever o sistema (170) como:

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k + (A_d + BK_d)x_{k-\tau_k} - B\psi(v_k). \quad (174)$$

Definindo-se  $\mathbb{K} \in \mathfrak{R}^{m \times 2n}$ ;  $\mathbb{G} \in \mathfrak{R}^{m \times 2n}$  e  $\xi_k \in \mathfrak{R}^{2n}$ , respectivamente por:

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} K & K_d \end{bmatrix}, \mathbb{G} = \begin{bmatrix} G & G_d \end{bmatrix} \text{ e } \xi_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-\tau_k} \end{bmatrix},$$

<sup>1</sup> $D_\tau^V$  conjunto definido por  $D_\tau^V = \{\phi_k \in D_\tau; \|\phi_k\|_c < v, v > 0\}$ .

pode-se definir o seguinte conjunto poliédrico:

$$S \triangleq \left\{ \xi \in \mathfrak{R}^{2n}; |(\mathbb{K}_{(i)} - \mathbb{G}_{(i)})\xi| \leq (u_{0(i)})^2; i = 1, \dots, m \right\}. \quad (175)$$

Dessa forma, enuncia-se o Lema 8, o qual é uma versão do Lema 3 aplicado ao caso discreto.

**Lema 8** Se  $\xi_k \in \mathcal{S}$ , então a relação:

$$\psi'(v_k)T[\psi(v_k) - \mathbb{G}\xi_k] \leq 0$$

é verificada para  $\forall T > 0 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  diagonal.

### 7.3 Estabilização de Sistemas Discretos com Atrasos Variantes no Tempo

Nesta seção, supõe-se que  $\tau_k$  seja conhecido para cada instante de tempo  $k$ , assim, consideram-se as leis de controle (172) e (173). Dessa forma, formulam-se condições dependentes do intervalo de atraso para a resolução do Problema 6. A fim de atingir este objetivo, utilizam-se um funcional de Lyapunov-Krasovskii, que considera a solução do sistema como evoluindo no espaço das funções, a desigualdade de Jensen (GU et al., 2003), aplicada ao caso discreto, e o Lema de Finsler.

#### 7.3.1 Caso Atrasos Variantes no Tempo e Lei de Controle $v_k = Kx_k + K_d x_{k-\tau_k}$

**Teorema 22** Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$ ,  $\tilde{Z} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva e ainda matrizes  $\tilde{F}_3$ ,  $\tilde{G}_2$ ,  $\tilde{G}_3$ ,  $\tilde{H}_2$ ,  $\tilde{H}_3$ ,  $\tilde{M}_2$ ,  $\tilde{M}_3$ ,  $M$ ,  $\tilde{N}_2$ ,  $\tilde{N}_3$ ,  $\tilde{R}_2$ ,  $\tilde{R}_3$ ,  $\tilde{V}_2$ ,  $\tilde{V}_3 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $H$ ,  $H_d$ ,  $S \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $Y$  e  $Y_d \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  satisfazendo as LMIs (i) e (ii)

$$(i) \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 & -\tilde{M}'_2 & -\tilde{N}'_2 & -\tilde{R}'_2 & \Sigma_4 & -\tilde{F}_3 - \tilde{V}'_2 \\ * & \Sigma_5 & \Sigma_6 & \Sigma_7 & \tilde{N}'_2 + \tilde{N}'_3 & \tilde{R}'_2 + \tilde{R}'_3 & H' + S' & \Sigma_8 \\ * & * & \Sigma_9 & -\tilde{M}'_3 + \tilde{H}_2 & -\tilde{N}'_3 & -\tilde{R}'_3 & H'_d & -\tilde{V}'_3 - \tilde{H}_3 \\ * & * & * & \Sigma_{10} & \tilde{N}'_2 & \tilde{R}'_2 & S' & \tilde{V}'_2 - \tilde{M}_3 \\ * & * & * & * & -\tilde{Z} & 0 & 0 & -\tilde{N}_3 \\ * & * & * & * & * & -\tilde{Z} & 0 & -\tilde{R}_3 \\ * & * & * & * & * & * & -2U & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\tilde{V}'_3 - \tilde{V}_3 \end{bmatrix} < 0$$

$$(ii) \begin{bmatrix} \tilde{P} & (\mathbb{Y} - \mathbb{H})'_{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0 \quad i = 1, \dots, m$$

com,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \tilde{P} + M' + M & \Sigma_2 &= -AM' - BY' + \tilde{F}_3 - \tilde{G}'_2 \\ \Sigma_3 &= -A_d M' - BY'_d - \tilde{H}'_2 - \tilde{F}_3 & \Sigma_4 &= BU - S' \\ \Sigma_5 &= \tilde{G}_2 + \tilde{G}'_2 + \beta \tilde{Q} - \tilde{P} + \tilde{G}_3 + \tilde{G}'_3 & \Sigma_6 &= \tilde{H}'_2 + \tilde{H}'_3 - \tilde{G}_3 \\ \Sigma_7 &= \tilde{M}'_2 + \tilde{M}'_3 + \tilde{G}_2 & \Sigma_8 &= -\tilde{G}_3 + \tilde{V}'_2 + \tilde{V}'_3 \\ \Sigma_9 &= -\tilde{Q} - \tilde{H}_3 - \tilde{H}'_3 & \Sigma_{10} &= \tilde{M}_2 + \tilde{M}'_2 + (\tilde{h} + 1)\tilde{Z} \end{aligned}$$

e

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P} & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{Y} = [ Y \quad Y_d ] \quad e \quad \mathbb{H} = [ H \quad H_d ],$$

então, considerando-se  $K = Y(M^{-1})'$  e  $K_d = Y_d(M^{-1})'$ , para todas as condições iniciais  $\phi_{k_0} \in C_\phi$ , com

$$\alpha_1 = \lambda_{\max}(M^{-1}\tilde{P}(M^{-1})') + \left(\frac{-3\bar{h} + 5\underline{h} + \bar{h}^2 - \underline{h}^2}{2}\right)\lambda_{\max}(M^{-1}\tilde{Q}(M^{-1})')$$

e

$$\alpha_2 = \left(\frac{\bar{h}^2 + \bar{h} + 2\underline{h}}{2}\right)\lambda_{\max}(M^{-1}\tilde{Z}(M^{-1})'),$$

as correspondentes trajetórias do sistema (174) convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** Seja  $V : \aleph \times C_\phi \rightarrow \Re$ , definido por  $V(k, \phi_k) = V_k = \sum_{j=1}^5 V_{j,k}$  com:

$$\begin{aligned} V_{1,k} &= x'_k P x_k, \\ V_{2,k} &= \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} x'_j Q x_j, \\ V_{3,k} &= \sum_{m=2-\bar{h}}^{1-\underline{h}} \sum_{j=k+m-1}^{k-1} x'_j Q x_j, \\ V_{4,k} &= \sum_{m=-\bar{h}}^{-1} \sum_{j=k+m}^{k-1} y'_j Z y_j, \\ V_{5,k} &= \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} y'_j Z y_j. \end{aligned}$$

Definindo-se  $y_j = x_{j+1} - x_j$ , obtém-se

$$\eta_k = \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} y_j = x_k - x_{k-\tau_k}. \quad (176)$$

Tem-se então que<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta V_{1,k} &= V_{1,k+1} - V_{1,k} = x'_{k+1} P x_{k+1} - x'_k P x_k, \\ \Delta V_{2,k} &= \sum_{j=k+1-\tau_{k+1}}^k x'_j Q x_j - \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} x'_j Q x_j \\ &= x'_k Q x_k + \sum_{j=k+1-\tau_{k+1}}^{k-1} x'_j Q x_j - x'_{k-\tau_k} Q x_{k-\tau_k} - \sum_{j=k+1-\tau_k}^{k-1} x'_j Q x_j \\ &\leq x'_k Q x_k + \sum_{j=k+1-\bar{h}}^{k-1} x'_j Q x_j - x'_{k-\tau_k} Q x_{k-\tau_k} - \sum_{j=k+1-\underline{h}}^{k-1} x'_j Q x_j \\ &= x'_k Q x_k + \sum_{j=k+1-\bar{h}}^{k-\underline{h}} x'_j Q x_j + \sum_{j=k+1-\underline{h}}^{k-1} x'_j Q x_j - x'_{k-\tau_k} Q x_{k-\tau_k} \\ &\quad - \sum_{j=k+1-\underline{h}}^{k-1} x'_j Q x_j = x'_k Q x_k - x'_{k-\tau_k} Q x_{k-\tau_k} + \sum_{j=k+1-\bar{h}}^{k-\underline{h}} x'_j Q x_j, \\ \Delta V_{3,k} &= \sum_{m=2-\bar{h}}^{1-\underline{h}} \sum_{j=k+m}^k x'_j Q x_j - \sum_{m=2-\bar{h}}^{1-\underline{h}} \sum_{j=k+m-1}^{k-1} x'_j Q x_j \\ &= (\bar{h} - \underline{h})x'_k Q x_k - \sum_{j=k+1-\bar{h}}^{k-\underline{h}} x'_j Q x_j, \\ \Delta V_{4,k} &= \sum_{m=-\bar{h}}^{-1} \sum_{j=k+1+m}^k y'_j Z y_j - \sum_{m=-\bar{h}}^{-1} \sum_{j=k+m}^{k-1} y'_j Z y_j \\ &\leq \bar{h}y'_k Z y_k - y'_{k-\bar{h}} Z y_{k-\bar{h}} - \sum_{j=k+1-\bar{h}}^{k-\underline{h}} y'_j Z y_j, \\ \Delta V_{5,k} &= \sum_{j=k+1-\tau_{k+1}}^k y'_j Z y_j - \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} y'_j Z y_j \\ &\leq y'_k Z y_k - y'_{k-\tau_k} Z y_{k-\tau_k} + \sum_{j=k+1-\bar{h}}^{k-\underline{h}} y'_j Z y_j. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta V_k &\leq x'_{k+1} P x_{k+1} - x'_k P x_k - y'_{k-\bar{h}} Z y_{k-\bar{h}} + (1 + \bar{h} - \underline{h})x'_k Q x_k - x'_{k-\tau_k} Q x_{k-\tau_k} \\ &\quad + (1 + \bar{h})y'_k Z y_k - y'_{k-\tau_k} Z y_{k-\tau_k}. \end{aligned} \quad (177)$$

Logo, se  $\xi_k \in \mathcal{S}$ , do Lema 8 segue que:

$$\Delta V_k < \Delta V_k - 2\psi'(v_k)T[\psi(v_k) - \mathbb{G}\xi_k]. \quad (178)$$

<sup>2</sup>Os cálculos para se obter  $\Delta V_5$  são análogos aos feitos para  $\Delta V_2$ .

Sejam agora,  $\zeta$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{Q}$  definidos como abaixo,

$$\zeta' = [x'_{k+1} \ x'_k \ x'_{k-\tau_k} \ y'_k \ y'_{k-\bar{h}} \ y'_{k-\tau_k} \ \psi'(v_k) \ \eta'_k];$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} I & -(A+BK) & -(A_d+BK_d) & 0 & 0 & 0 & B & 0 \\ -I & I & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & \beta Q - P & 0 & 0 & 0 & 0 & G'T & 0 \\ * & * & -Q & 0 & 0 & 0 & G'_d T & 0 \\ * & * & * & (\bar{h}+1)Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -Z & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -Z & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -2T & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad (179)$$

com  $\beta = (\bar{h} - \underline{h} + 1)$ .

Assim, através da aplicação do Teorema de Lyapunov-Krasovskii<sup>3</sup>, a estabilidade assintótica do sistema (170), para um dado conjunto de condições iniciais  $C_\phi$ , pode ser garantida se (178) for negativa ao longo das trajetórias do sistema, ou equivalentemente, se

$$\zeta' \mathbf{Q} \zeta < 0, \quad \forall \zeta \neq 0 \text{ tal que } \mathbf{B} \zeta = 0. \quad (180)$$

Aplicando-se então o Lema de Finsler (BOYD et al., 1994), tem-se que (180) é satisfeita se existir

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} F'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G'_2 & H'_2 & M'_2 & N'_2 & R'_2 & S'_2 & V'_2 \\ F'_3 & G'_3 & H'_3 & M'_3 & N'_3 & R'_3 & 0 & V'_3 \end{bmatrix},$$

tal que,

$$\mathbf{Q} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{B}'\mathbf{X}' < 0. \quad (181)$$

Seja então  $\Xi = \mathbf{Q} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{B}'\mathbf{X}'$ , dada por (182)

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & -M'_2 & -N'_2 & -R'_2 & \Gamma_4 & -V'_2 - F_3 \\ * & \Gamma_5 & \Gamma_6 & \Gamma_7 & N'_2 + N'_3 & R'_2 + R'_3 & S'_2 + G'T & \Gamma_8 \\ * & * & \Gamma_9 & -M'_3 + H_2 & -N'_3 & -R'_3 & G'_d T & -V'_3 - H_3 \\ * & * & * & \Gamma_{10} & N'_2 & R'_2 & S'_2 & V'_2 - M_3 \\ * & * & * & * & -Z & 0 & 0 & -N_3 \\ * & * & * & * & * & -Z & 0 & -R_3 \\ * & * & * & * & * & * & -2T & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -V_3 - V'_3 \end{bmatrix} \quad (182)$$

em que

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= F_1 + F'_1 + P, & \Gamma_2 &= -F_1 \tilde{A} - G'_2 + F_3, \\ \Gamma_3 &= -F_1 \tilde{A}_d - H'_2 - F_3, & \Gamma_4 &= F_1 B - S'_2, \\ \Gamma_5 &= G_2 + G'_2 - P + \beta Q + G_3 + G'_3, & \Gamma_6 &= H'_2 + H'_3 - G_3, \\ \Gamma_7 &= G_2 + M'_2 + M'_3, & \Gamma_8 &= V'_2 + V'_3 - G_3, \\ \Gamma_9 &= -Q - H_3 - H'_3, & \Gamma_{10} &= M_2 + M'_2 + (1 + \bar{h})Z. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>A formalização do Teorema de Lyapunov-Krasovskii, bem como do Teorema de Lyapunov-Razumikhin para o caso de estabilidade de sistemas discretos, pode ser encontrada em (OLIVEIRA, 2008).

Definindo-se  $M = (F_1^{-1})'$  e pré e pós multiplicando  $\Xi$  por

$$\mathbb{M} = \text{Diag}\{M, M, M, M, M, M, U, M\}$$

e sua transposta respectivamente, obtém-se a condição (i) do Teorema 22, com

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= MPM', & \tilde{Q} &= MQM', & \tilde{Z} &= MZM', & \tilde{G}_2 &= MG_2M', & \tilde{H}_2 &= MH_2M', \\ \tilde{M}_2 &= MM_2M', & \tilde{N}_2 &= MN_2M', & \tilde{R}_2 &= MR_2M', & \tilde{V}_2 &= MV_2M', & \tilde{F}_3 &= MF_3M', \\ \tilde{G}_3 &= MG_3M', & \tilde{H}_3 &= MH_3M', & \tilde{M}_3 &= MM_3M', & \tilde{N}_3 &= MN_3M', & \tilde{R}_3 &= MR_3M', \\ \tilde{V}_3 &= MV_3M', & H &= GM', & H_d &= G_dM', & S &= US_2M', & T^{-1} &= U. \end{aligned}$$

o que garante que  $\Delta V_k < 0, \forall x_k \in \mathcal{S}$ .

Perceba-se que  $F_1$  é efetivamente inversível, uma vez que  $\Sigma_1 < 0$  e  $\tilde{P} > 0$ .

Pré e pós multiplicando-se agora, a condição (ii) do Teorema 22, por

$$\text{Diag}\{M^{-1}, M^{-1}, I\}$$

e sua transposta, respectivamente, seguida da aplicação do complemento de Schur, é possível obter-se

$$\xi_k' \mathbb{P} \xi_k - \frac{1}{(u_{0(i)})^2} \xi_k' (\mathbb{K} - \mathbb{G})'_{(i)} (\mathbb{K} - \mathbb{G})_{(i)} \xi_k \geq 0 \quad i = 1, \dots, m, \quad (183)$$

o que implica em  $\xi(\mathbb{P}) \subset \mathcal{S}$  (BOYD et al., 1994). Suponha agora que

$$x_{k_0+j} = \phi(k_0 + j), \text{ sendo } \phi_k \in C_\phi.$$

Então, considerando-se que  $\Delta V_k < 0$ , para  $k > 0$ .

Os valores

$$\left( \frac{-3\bar{h} + 5\underline{h} + \bar{h}^2 - \underline{h}^2}{2} \right) \text{ e } \left( \frac{\bar{h}^2 + \bar{h} + 2\underline{h}}{2} \right),$$

utilizados na majoração (184), obtém-se através da aplicação da fórmula de soma para uma progressão aritmética

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} N,$$

sendo  $a_1$  o primeiro elemento,  $a_n$  o último elemento e  $N$  é o número de elementos do somatório, logo, segue que:

$$\begin{aligned} \xi_k' \mathbb{P} \xi_k &= x_k' P x_k + x_{k-\tau_k}' Q x_{k-\tau_k} \leq V_k \leq V_{k_0} \\ &= \phi_k' P \phi_k + \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} \phi_j' Q \phi_j + \sum_{m=2-\bar{h}}^{1-\underline{h}} \sum_{j=k+m-1}^{k-1} \phi_j' Q \phi_j \\ &\quad + \sum_{m=-\bar{h}}^{-1} \sum_{j=k+m}^{k-1} \Delta \phi_j' Z \Delta \phi_j + \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} \Delta \phi_j' Z \Delta \phi_j \\ &\leq \lambda_{\max}(P) \|\phi_k\|_d^2 + \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} \lambda_{\max}(Q) \|\phi_k\|_d^2 + \sum_{m=2-\bar{h}}^{1-\underline{h}} \sum_{j=k+m-1}^{k-1} \lambda_{\max}(Q) \|\phi_k\|_d^2 \\ &\quad + \sum_{m=-\bar{h}}^{-1} \sum_{j=k+m}^{k-1} \lambda_{\max}(Z) \|\Delta \phi_k\|_d^2 + \sum_{j=k-\tau_k}^{k-1} \lambda_{\max}(Z) \|\Delta \phi_k\|_d^2 \\ &\leq (\lambda_{\max}(M^{-1} \tilde{P} (M^{-1})') + \left( \frac{-3\bar{h} + 5\underline{h} + \bar{h}^2 - \underline{h}^2}{2} \right) \lambda_{\max}(M^{-1} \tilde{Q} (M^{-1})')) \|\phi_k\|_d^2 \\ &\quad + \left( \frac{\bar{h}^2 + \bar{h} + 2\underline{h}}{2} \right) \lambda_{\max}(M^{-1} \tilde{Z} (M^{-1})') \|\Delta \phi_k\|_d^2 \\ &\leq (\alpha_1 \|\phi_k\|_d^2 + \alpha_2 \|\Delta \phi_k\|_d^2) \leq 1. \end{aligned} \quad (184)$$

Logo, se

$$\phi_{k_0} \in C_\phi \text{ segue que } \xi_k' \mathbb{P} \xi_k \leq 1$$

e então,

$$\xi_k \in \xi(\mathbb{P}) \subset \mathcal{S}, \forall k \geq 0,$$

garantindo que a condição de setor é efetivamente válida, o que por sua vez assegura que (ii) implica  $\Delta V_k < 0$ , para  $k > 0$ . Como

$$\lambda_{\min}(P) \|\phi_{k_0}\|^2 \leq V_k \leq \alpha_1 \|\phi_k\|_d^2 + \alpha_2 \|\Delta \phi_k\|_d^2,$$

as condições do Teorema de Lyapunov-Krasovskii 1, aplicadas ao caso discreto, são satisfeitas  $\forall \phi_k \in C_\phi$  e, por conseguinte, as soluções correspondentes do sistema convergem assintoticamente para a origem.

□

Na seqüência, enunciam-se condições para a estabilização global, utilizando-se as mesmas ferramentas empregadas no Teorema 22.

**Corolário 10** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{Z} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva e ainda matrizes  $\tilde{F}_3, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3, M, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $S, H, H_d \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  e  $Y$  e  $Y_d \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  satisfazendo a condição (i) do Teorema 22, com  $H = KM$  e  $H_d = K_d M$ . Então, considerando-se  $K = Y(M^{-1})'$ , as correspondentes trajetórias do sistema (174) convergem globalmente para a origem, ou seja, a origem do sistema em malha-fechada (174) é globalmente assintoticamente estável.*

### 7.3.2 Caso Atrasos Variantes no Tempo e Lei de Controle $v_k = Kx_k$

Considera-se agora que a lei de controle utilizada dependa apenas do estado do sistema no instante  $k$ , ou seja,  $v_k = Kx_k$ . Assim utilizando-se as mesmas ferramentas que na seção anterior, obtêm-se condições semelhantes às do Teorema 22, basta tomarmos as matrizes  $Y_d = 0$  e  $H_d = 0$ . Na seqüência enuncia-se o Teorema que se obtém:

**Teorema 23** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{Z} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , uma matriz  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  diagonal definida positiva e ainda matrizes  $\tilde{F}_3, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3, M, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3, \tilde{R}_2, \tilde{R}_3, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $H, S \in \mathfrak{R}^{m \times n}, Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  satisfazendo a condição (i) do Teorema 22 com  $Y_d = 0$  e  $H_d = 0$  e a condição (ii) dada abaixo:*

$$(ii) \begin{bmatrix} \tilde{P} & (Y - H)'_{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} > 0 \quad i = 1, \dots, m,$$

então, considerando-se  $K = Y(M^{-1})'$ , para todas as condições iniciais  $\phi_{k_0} \in C_\phi$ , com

$$\alpha_1 = \lambda_{\max}(M^{-1} \tilde{P} (M^{-1})') + \left( \frac{-3\bar{h} + 5\bar{h} + \bar{h}^2 - \underline{h}^2}{2} \right) \lambda_{\max}(M^{-1} \tilde{Q} (M^{-1})')$$

e

$$\alpha_2 = \left( \frac{\bar{h}^2 + \bar{h} + 2\underline{h}}{2} \right) \lambda_{\max}(M^{-1} \tilde{Z} (M^{-1})'),$$

as correspondentes trajetórias do sistema (174) convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** A demonstração é análoga à do Teorema 22.

O corolário que garante condições globais de estabilidade pode ser obtido de maneira semelhante ao Corolário 10, basta tomar  $Y_d = 0$  e  $H_d = 0$ .

## 7.4 Estabilização de Sistemas Discretos com Atraso Incerto e Invariante no Tempo

Nesta seção  $\tau_k$  é considerado constante, mas incerto, e tal que,  $0 \leq \tau_k = \tau \leq h$ . Assim, o sistema em malha fechada, obtido pela utilização da lei de controle (173) no sistema (174), é dado por:

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k + A_d x_{k-\tau} - B\psi(v_k). \quad (185)$$

Analogamente à seção 7.3, é possível formular condições, dependentes do “limite do atraso  $h$ ”, para a resolução do Problema 6. Para obter tais condições, são utilizados, além de um funcional de Lyapunov-Krasovskii e o Lema de Finsler, a desigualdade de Jensen (GU et al., 2003).

O conjunto  $\mathcal{S}$  e o Lema 8 passam agora a ser definidos em função de matrizes  $\mathbb{K} = K$ ,  $\mathbb{G} = G$  e  $\xi_k = x_k$ . Conseqüentemente, um novo teorema pode ser enunciado.

**Teorema 24** *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  e  $\tilde{Z} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $U$  uma matriz diagonal definida positiva, tal que  $U \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  e ainda matrizes  $\tilde{F}_3$ ,  $\tilde{G}_2$ ,  $\tilde{G}_3$ ,  $\tilde{H}_2$ ,  $\tilde{H}_3$ ,  $\tilde{M}_2$ ,  $\tilde{M}_3$ ,  $M$ ,  $\tilde{N}_2$ ,  $\tilde{N}_3$ ,  $\tilde{R}_2$ ,  $\tilde{R}_3 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $H$  e  $Y \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  satisfazendo as condições (i) e (ii):*

$$(i) \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \begin{pmatrix} -AM' - BY \\ -\tilde{F}_3 - \tilde{G}'_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -A_d M + \\ \tilde{F}_3 - \tilde{H}'_2 \end{pmatrix} & -\tilde{M}'_2 & \tilde{F}_3 - \tilde{N}'_2 & BU - \tilde{R}'_2 \\ * & \Sigma_2 & \tilde{G}_3 + \tilde{H}'_2 - \tilde{H}_3 & \Sigma_3 & \Sigma_4 & \Sigma_5 \\ * & * & \tilde{H}_3 + \tilde{H}'_3 - \tilde{Q} & \tilde{H}_2 + \tilde{M}'_3 & \tilde{H}_3 + \tilde{N}'_3 & \tilde{R}'_3 \\ * & * & * & \Sigma_6 & \tilde{M}_3 + \tilde{N}'_2 & \tilde{R}'_2 \\ * & * & * & * & \Sigma_7 & \tilde{R}'_3 \\ * & * & * & * & * & -2U \end{pmatrix} < 0, \\ (ii) \begin{bmatrix} \tilde{P} & (Y - H)'_{(i)} \\ * & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

sendo

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \tilde{P} + M + M', & \Sigma_2 &= -\tilde{P} + \tilde{Q} + \tilde{G}_2 + \tilde{G}'_2 - \tilde{G}_3 - \tilde{G}'_3, \\ \Sigma_3 &= \tilde{G}_2 + \tilde{M}'_2 - \tilde{M}'_3, & \Sigma_4 &= \tilde{G}_3 + \tilde{N}'_2 - \tilde{N}'_3, \\ \Sigma_5 &= \tilde{R}'_2 - \tilde{R}'_3 + H', & \Sigma_6 &= \tilde{M}_2 + \tilde{M}'_2 + h\tilde{Z}, \\ \Sigma_7 &= \tilde{N}_3 + \tilde{N}'_3 - \frac{1}{h}\tilde{Z}. \end{aligned}$$

Então, considerando-se  $K = Y(M^{-1})'$ , para todas as condições iniciais  $\phi_{k_0} \in C_\phi$ , com

$$\alpha_1 = \lambda_{\max}(M^{-1}\tilde{P}(M^{-1})' + h\lambda_{\max}(M^{-1}\tilde{Q}(M^{-1})')$$

e

$$\alpha_2 = \frac{h^2}{2} \lambda_{\max}(M^{-1}\tilde{Z}(M^{-1})')$$

as correspondentes trajetórias do sistema (185) convergem assintoticamente para a origem.

**Demonstração:** A prova do Teorema 24 é análoga ao Teorema 22, basta utilizar o funcional de Lyapunov-Krasovskii dado por<sup>4</sup>:

$$V_k = x'_k P x_k + \sum_{j=k-\tau}^{k-1} x'_j Q x_j + \sum_{m=-h}^{-1} \sum_{j=k+m}^{k-1} y'_j Z y_j. \quad (186)$$

<sup>4</sup>A desigualdade de Jensen é dada por  $-h \sum_{j=k-h}^{k-1} y'_j Z y_j \leq -\sum_{j=k-h}^{k-1} y'_j Z \sum_{j=k-h}^{k-1} y_j$ , para maiores detalhes sobre a fórmula vide (GU et al., 2003).

Considerando-se as mesmas definições feitas no Teorema 22 para  $y_j$  e  $\eta_k$ , calcula-se  $\Delta V_k$  juntamente com a utilização da desigualdade de Jensen, aplicada ao caso discreto, tem-se que:

$$\Delta V_k \leq x'_{k+1} P x_{k+1} - x'_k P x_k + x'_k Q x_k - x'_{k-\tau} Q x_{k-\tau} + h y'_k Z y_k - \frac{1}{h} \eta'_k Z \eta_k$$

A continuação da demonstração é análoga ao Teorema 22, basta aplicar o lema de Finsler com as matrizes  $\zeta$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{X}$ , dadas por:

$$\zeta' = [ x'_{k+1} \quad x'_k \quad x'_{k-\tau} \quad y'_k \quad \eta'_k \quad \psi'(Kx_k) ]; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} I & -\tilde{A} & -A_d & 0 & 0 & B \\ -I & I & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -I & I & 0 & I & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & Q-P & 0 & 0 & 0 & G'T \\ * & * & -Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & hZ & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\frac{1}{h}Z & 0 \\ * & * & * & * & * & -2T \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & F_3 \\ 0 & G_2 & G_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}.$$

□

Para este teorema, também é possível enunciarem-se condições para estabilização global, análogas às do Corolário 10.

## 7.5 Problemas de Otimização

Nesta seção, discute-se como utilizar as condições apresentadas no Teorema 22, para calcular os ganhos de realimentação em problemas de otimização. Cabe ressaltar que para o Teorema 24, podem-se formular problemas de otimização análogos.

### 7.5.1 Maximização do Conjunto $C_\phi$

Assumindo então que

$$\|\phi_{k_0}\|_d^2 \leq \delta_1 \text{ e } \|\Delta\phi_{k_0}\|_d^2 \leq \delta_2,$$

a idéia é maximizar  $\delta_1$  e  $\delta_2$  de forma a garantir que

$$\alpha_1 \|\phi_{k_0}\|_d^2 + \alpha_2 \|\Delta\phi_{k_0}\|_d^2 < 1.$$

Observe que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  dependem das matrizes que verificam as condições (i) e (ii) dos Teoremas 22, 23 e 24. Assim, este objetivo pode ser considerado indiretamente através do seguinte problema de otimização convexo com restrições em forma de LMIs, em que  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$  são constantes de peso e,  $\lambda_{\tilde{P}}$ ,  $\lambda_{\tilde{Q}}$  e  $\lambda_{\tilde{Z}}$  são limites superiores para os autovalores das matrizes  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  e  $\tilde{Z}$  respectivamente:

$$\begin{aligned} & \max \beta_1 \lambda_{\tilde{P}} + \beta_2 \lambda_{\tilde{Q}} + \beta_3 \lambda_{\tilde{Z}} \\ & \text{sujeito às relações (i), (ii), e} \\ \text{(iii)} \quad & \begin{bmatrix} \lambda_{\tilde{P}} I & I \\ I & \tilde{P} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \lambda_{\tilde{Q}} I & I \\ I & \tilde{Q} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \lambda_{\tilde{Z}} I & I \\ I & \tilde{Z} \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (187)$$

Perceba-se que maximizando  $\beta_1 \lambda_{\tilde{P}} + \beta_2 \lambda_{\tilde{Q}} + \beta_3 \lambda_{\tilde{Z}}$ , está-se maximizando os autovalores das matrizes  $P$ ,  $Q$  e  $Z$ , conseqüentemente os valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , que por sua vez maximizam o conjunto  $C_\phi$ .

### 7.5.2 Maximização de $\bar{h} - \underline{h}$

A idéia aqui é determinar o intervalo máximo do atraso ( $\bar{h} - \underline{h}$ ), para o qual é possível encontrar um conjunto de condições iniciais garantindo a estabilidade assintótica local. Considera-se então o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \max(\bar{h} - \underline{h}) \\ & \text{sujeito as relações (i) e (ii).} \end{aligned} \quad (188)$$

Considerando o cálculo do máximo ( $\bar{h} - \underline{h}$ ), visando a garantia de estabilidade especificamente para  $\|\phi_{k_0}\|_d^2 \leq \delta_1$  e  $\|\Delta\phi_{k_0}\|_d^2 \leq \delta_2$ , com  $\delta_1$  e  $\delta_2$  dados, a restrição (iii) de (187) e a restrição

$$(\lambda_{\bar{p}} + \frac{-3\bar{h}+5\underline{h}+\bar{h}^2-\underline{h}^2}{2}\lambda_{\bar{Q}})\delta_1 + (\frac{\bar{h}^2+\bar{h}+2\underline{h}}{2}\lambda_{\bar{z}})\delta_2 < 1$$

deve ser adicionada ao problema de otimização.

Observe-se que agora o problema não está na forma de LMI, assim, para poder resolvê-lo é necessário fixar ( $\bar{h} - \underline{h}$ ) e resolver um problema de factibilidade até encontrar o máximo ( $\bar{h} - \underline{h}$ ).

## 7.6 Exemplos Numéricos

**Exemplo 6 (Caso atraso variante no tempo)** Considere o sistema (174), dado pelas seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}; \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

- Resolvendo-se (188), através de problemas de factibilidade de LMIs, com  $u_0 = 1$  e a lei de controle (172), obtém-se:

- um intervalo de atraso máximo igual a  $\bar{h} - \underline{h} \leq 9 \times 10^2$ .
- para  $\underline{h} = 2$  e  $\bar{h} = 100$ , obtém-se

$$K = [-0.4849 \quad -0.3362] \text{ e } K_d = [0.1732 \quad 0.0488].$$

Este mesmo problema fora resolvido em (MIRANDA; LEITE, 2007), onde obtém-se um intervalo máximo de atraso  $\bar{h} - \underline{h} \leq 5 \times 10^8$ . Entretanto, cabe observar que em (MIRANDA; LEITE, 2007), não é considerado que o sistema possa estar sujeito à saturação nos atuadores.

Utilizando-se agora a lei de controle (173)

- obtém-se um intervalo de atraso  $[\underline{h}, \underline{h} + 12]$ .
- para  $\underline{h} = 1$  e  $\bar{h} = 13$ , obtém-se um ganho  $K = [-0.6436 \quad -0.3589]$ .
- Resolve-se agora o problema (187), utilizando-se ambas as leis de realimentação de estado. Os resultados, considerando-se  $\delta = \delta_1 = \delta_2$  são mostrados na Tabela 11.

Esta tabela, mostra um comparativo entre os valores obtidos para  $\delta$ , nos casos em que se resolve o problema de otimização (187), aplicado aos Teoremas 22 e 23. Conclui-se que se o atraso  $\tau_k$  for conhecido para cada instante de tempo  $k$ , então é melhor que se utilize a lei de controle (172).

Tabela 11: Relação entre intervalo de atraso e raio da bola de estabilidade do Exemplo 6.

$h$	$\bar{h}$	$\delta$ com $K_d$	$\delta$ sem $K_d$
1	3	50.7633	33.2390
1	6	4.3574	3.6901
1	11	0.6649	0.4788
1	21	0.0921	infectível
1	51	0.0356	infectível
1	101	0.0072	infectível
1	121	0.0048	infectível
1	701	$1.3238 \times 10^{-4}$	infectível
1	901	$5.4514 \times 10^{-7}$	infectível

Tabela 12: Relação entre o de atraso e raio da bola de estabilidade do Exemplo 7.

$h$	$K$	$\delta$
1	$\begin{bmatrix} 0.0014 & -0.6748 \end{bmatrix}$	$1.7370 \times 10^6$
5	$\begin{bmatrix} 0.0000 & -8.8768 \end{bmatrix}$	$1.1923 \times 10^3$
10	$\begin{bmatrix} 0.6602 & -7.2056 \end{bmatrix}$	27.1877
20	$\begin{bmatrix} 194.0155 & -60.9337 \end{bmatrix}$	0.0078
40	$\begin{bmatrix} 135.2996 & -36.0742 \end{bmatrix}$	$1.8876 \times 10^{-5}$

**Exemplo 7 (Caso atraso constante)** Considere o sistema dado por (FRIDMAN; SHAKED, 2005b):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.01 \end{bmatrix}; \quad A_d = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.005 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix}.$$

- Resolvendo-se o problema (188) para as LMIs do Teorema 24, com  $u_0 = 1$ , obtém-se um atraso máximo de  $h = 28$ , ao passo que em (FRIDMAN; SHAKED, 2005b), obtém-se  $h = 71$ . Deve-se lembrar que em (FRIDMAN; SHAKED, 2005b) não se considera a saturação. Por outro lado, considerando-se  $u_0 = 10^3$ , obtém-se  $h = 72$ . Neste caso se está considerando um limite grande para a saturação de forma de o sistema passe a se comportar como se não houvesse saturação, podendo-se assim comparar o resultado obtido com o resultado obtido em (FRIDMAN; SHAKED, 2005b).
- Resolve-se um problema de otimização análogo ao (187), porém aplicado ao Teorema 24, para  $u_0 = 10$ . Os resultados obtidos, considerando-se  $\delta = \delta_1 = \delta_2$ , são apresentados na Tabela 12. Observe que quanto maior o atraso  $h$ , menor será o tamanho do conjunto das condições iniciais, i.e., menor o valor de  $\delta$ .

## 7.7 Conclusão

Neste Capítulo, formaliza-se o problema de estabilização para sistemas discretos, com atrasos nos estados e sujeitos à saturação nos atuadores, para dois casos.

- Caso atraso variante no tempo: aqui o atraso  $\tau_k$  foi considerado conhecido para cada instante de tempo  $k$ , e utilizou-se a lei de controle  $v_k = Kx_k + K_d x_{k-\tau_k}$ . Dessa forma, utilizando-se um funcional de Lyapunov-Krasovskii e o Lema de Finsler, formulam-se condições, dependentes do intervalo de atraso, para a resolução do Problema 6.
- Atraso incerto e invariante no tempo: considerou-se, neste caso, que  $\tau_k$  satisfizesse a inequação  $0 \leq \tau_k = \tau \leq h$ . Assim, foi possível formular condições dependentes do “limite do atraso  $h$ ”, para a resolução do Problema 6.

Ressalta-se que o Problema 6 é formalizado tanto para a estabilização local quanto global a partir de LMIs, o que de acordo com investigações realizadas, mostrou-se inédito na literatura.

## 8 CONCLUSÕES

O enfoque principal desta tese foi o projeto de controladores para a estabilização, por realimentação de estados e de saída, de sistemas com atrasos nos estados e saturação nos atuadores. Neste contexto, metodologias baseadas em LMIs ou BMIs (no caso da utilização de sistema descritor, mas com a formulação de problemas convexos), foram propostas para o projeto de controladores, com o objetivo de obter condições de estabilização tanto locais quanto globais para estes sistemas, bem como caracterizar conjuntos de condições iniciais admissíveis e de obter condições de estabilização entrada-estado/entrada-saída utilizando-se norma  $\mathcal{L}_2$  para sistemas sujeitos a perturbações. Estes resultados foram obtidos através da utilização de função de Lyapunov Razumikhin e funcionais de Lyapunov-Krasovskii, bem como o Lema de Finsler. Com o objetivo de tratar os efeitos não lineares causados pela saturação, utilizou-se a modelagem por zona-morta e a consequente aplicação da condição de setor generalizada, o que permitiu que fossem obtidas tantas condições locais quanto globais para a estabilização. Também foram propostas estratégias de “*anti-windup*” para tratar dos efeitos de “*windup*” causados pela saturação.

Na seqüência, tem-se um sumário dos resultados apresentados nesta tese.

- *Projeto de controladores para estabilização do sistema por realimentação de estados:*

Apresentaram-se condições para a resolução do problema de estabilização por realimentação de estados, tanto para o caso independente como dependente do atraso, utilizando-se funcionais de Lyapunov-Krasovskii, funções de Lyapunov-Razumikhin e a condição de setor generalizada. As condições para estabilização globais e locais que foram obtidas estão em forma de LMIs. Em se tratando de estabilização local, determinaram-se estimativas de regiões de atração. Considerando que o sistema estivesse sujeito a perturbação, utilizou-se a norma  $\mathcal{L}_2$  para quantizar o problema de estabilidade entrada-estado e entrada-saída. Resolveu-se problemas de otimização com o objetivo de maximizar o nível de atenuação e tolerância a perturbações do sistema.

Pode-se citar como contribuições:

- a formulação do problema de atenuação e tolerância à perturbação utilizando-se a norma  $\mathcal{L}_2$ ;
- a obtenção de condições em forma de LMIs para sistemas contínuos com atrasos variantes no tempo;
- a utilização do funcional de Lyapunov-Razumikhin para obterem-se condições de estabilização independentes do atraso em forma de LMIs;

- a utilização do sistema descritor que potencialmente reduz a conservatividade imposto pela representação do sistema com atrasos distribuídos.

- *Estabilização do sistema por realimentação de saída:*

Uma das contribuições que pode-se citar deste trabalho é o projeto de controladores dinâmicos não racionais conjuntamente com laços de “*anti-windup*” estáticos, com o objetivo de estabilizar, por realimentação de saída, sistemas com atraso no tempo e saturação nos atuadores. A vantagem do projeto destes controladores está no fato de não ser necessário se conhecer toda a estrutura das matrizes do funcional de Lyapunov, porém é necessário que se conheça o atraso. A adição do laço de “*anti-windup*” ao controlador, permitiu se que se levassem em conta os efeitos indesejados causados pela saturação.

Vale destacar que o projeto de controladores dinâmicos não racionais já vinha sendo utilizado para estabilizar sistemas com atraso no tempo, porém não havia sido aplicado ainda a sistemas que estivessem sujeitos também a saturações de controle, dessa forma utiliza-se a função zona-morta com a finalidade de modelar a saturação e laços de “*anti-windup*” estáticos com o objetivo de atenuar os efeitos causados pela saturação.

- *Síntese de compensadores de “anti-windup”:*

Apresentaram-se propostas para técnicas de projeto de compensador de “*anti-windup*” estático ou dinâmico, para sistemas com atrasos nos estados e saturação nos atuadores. No caso do compensador estático, houve a possibilidade de se considerar que o atraso fosse variante no tempo, já para o caso dinâmico, considerou-se apenas atrasos constantes. Neste último caso, consideraram-se também uma estrutura não racional.

A estrutura de “*anti-windup*” foi calculada com o objetivo de garantir que as trajetórias do sistema permanecessem limitadas e que um certo nível de desempenho  $\mathcal{L}_2$  fosse garantido para a saída regulada, para o caso em que atuasse sobre o sistema perturbações limitadas pela norma  $\mathcal{L}_2$ .

Tanto para o caso de estabilização quanto para o caso de atenuação e tolerância a perturbações, obtiveram-se condições locais e globais, diretamente na forma de LMIs.

Os trabalhos anteriormente publicados, propunham técnicas de projeto de compensadores de “*anti-windup*” dinâmicos para sistemas sujeitos a saturação de atuadores, levando-se em consideração apenas atrasos nas entradas e saídas, e invariantes no tempo.

- *Projeto de controladores para estabilização de sistemas discretos com atrasos nos estados e saturação nos atuadores;*

Para obter condições de estabilização, consideraram-se duas possibilidades para o atraso:

- Atraso variante no tempo: utilizou-se a abordagem de Finsler, juntamente com o funcional de Lyapunov-Krasovskii;
- Atraso incerto: além do Lema de Finsler e do funcional de Lyapunov-Krasovskii, utilizou-se a desigualdade de Jensen.

Analogamente ao caso contínuo, utilizou-se a função zona-morta, para tratar a saturação e a conseqüente aplicação da condição de setor generalizada, permitindo que se obtivessem condições locais e globais para a estabilização em forma de LMIs. Em particular caracteriza-se o problema de estabilização local, com a definição de uma região de condições iniciais admissíveis.

Destaca-se aqui, outra contribuição deste trabalho, o fato de terem-se obtido condições na formulação de LMIs para sistemas discretos com atrasos variantes no tempo e saturação nos atuadores.

## 8.1 Perspectivas de Trabalhos Futuros

Com base nas técnicas apresentadas e nos resultados obtidos, deseja-se dar continuidade às pesquisas e/ou aprofundá-las. Assim, elencam-se abaixo tópicos específicos a serem investigados.

- *A investigação de novos funcionais de Lyapunov-Krasovskii para a análise e síntese de sistemas com atrasos e saturação nos atuadores*

Estudar e desenvolver novos métodos que possibilitem a síntese de leis de controle, levando-se em conta explicitamente a possibilidade de saturação e a ocorrência de atrasos (controle, estados e saídas), tanto variantes no tempo quanto incertos, que assegurem estabilidade interna e externa ao sistema em malha-fechada. Utilizando-se novos funcionais de Lyapunov-Kazoviskii, para obter condições de estabilidade dependente do atraso menos conservadoras que as atuais. Considerar a possibilidade de incertezas na modelagem do sistema.

- *Projeto de laços de “anti-windup” para sistemas discretos*

Projetar compensadores de “anti-windup” estáticos ou dinâmicos, para sistemas discretos saturados com atrasos que possam estar sujeitos a ação de perturbações limitadas em norma  $\mathcal{L}_2$ .

- *Saturações encadeadas*

Saturações encadeadas (*nested saturations*) aparecem naturalmente em sistemas contendo saturações na dinâmica do atuador (saturações em taxa de variação) (GOMES DA SILVA JR.; TARBOURIECH; GARCIA, 2003b), (BATEMAN; LIN., 2003) e também em sistemas controlados por realimentação dinâmica de saída, apresentando tanto atuadores quanto sensores saturantes em amplitude.

Por outro lado, em um sistema de controle implementado digitalmente em redes de comunicações industriais, atrasos no envio de dados do sensor ao controlador, e do controlador para o atuador, ocorrem com frequência. Se estes atrasos e saturações não são levados em conta, perdas significativas de desempenho e mesmo de estabilidade podem ocorrer.

Considerando então as saturações de sensores e atuadores e os atrasos, o comportamento do seguinte sistema deve ser investigado

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_1 \text{sat}(A_1x(t - \tau_1(t)) + B_2 \text{sat}(Kx(t - \tau_2(t))))$$

Com este intuito, pretende-se partir dos resultados recentemente propostos em (TARBOURIECH; PRIEUR; GOMES DA SILVA JR., 2006) para sistemas sem atraso.

- *Separação Quadrática - Caso discreto com atraso no tempo e saturação nos atuadores* O método de separação topológica é investigado para os casos em que há uma matriz incerta invariante no tempo interligada com uma transformação linear implícita. Um separador quadrático independente da incerteza é mostrado para comprovar sem perdamente o fechar-laço bem-posedness. Várias aplicações da análise de sistema descritiva LTI então são dadas. Primeiro, alguns resultados conhecidos de estabilidade e posição de pólo de sistemas descritivos são demonstrados de um novo modo. Em segundo lugar, as contribuições para análise de estabilidade robusta e análise de estabilidade de sistemas de atraso de tempo são expostas. Esses comprovam ser novos mesmo quando em comparação com resultados de sistemas LTI habituais (não na forma descritiva). Todos os resultados são formulados como desigualdade matriz linear (LMIs). Trabalhos utilizando o método da separação quadrática com o objetivo de tratar a estabilidade de sistemas discretos com atrasos no tempo, já vem sendo utilizados por diversos autores como: (PEAUCELLE; HENRION; ARZELIER, 2005), (GOUAISBAUT; PEAUCELLE, 2006a) e (GOUAISBAUT; PEAUCELLE, 2006b). Porém, percebe-se que nestes trabalhos não é considerado a possibilidade de que o sistema esteja sujeito a saturações nas entradas.

Dessa forma, pretende-se investigar a possibilidade da aplicação do método de separação quadrática para a estabilização de sistemas com atrasos e que estejam sujeitos a saturações nas entradas.

- *Desenvolver projetos práticos*

Investigar e modelar matematicamente sistemas físicos, com o intuito de aplicar os resultados obtidos. Um exemplo que pode-se citar é a aplicação em redes de TCP IP.

## 8.2 Publicações

- GOMES DA SILVA JR, João Manoel; GHIGGI, Ilca; TARBOURIECH, Sophie .  *$L_2$  Performance improvement through anti-windup design for time delay systems in the presence of saturating Inputs*. In: IFAC - SYMPOSIUM on ROBUST CONTROL (ROCOND'06), 5th , 2006, Toulouse. **Proceedings...** Toulouse: IFAC, 2006.
- GOMES DA SILVA JR, João Manoel; GHIGGI, Ilca; TARBOURIECH, Sophie .  *$L_2$  Disturbance tolerance and rejection for time delay systems in the presence of saturating inputs*. In: IFAC WORKSHOP ON CONTROL APPLICATIONS OF OPTIMISATION - CAO'06, 13, 2006, Cachan. **Proceedings...** Cachan: IFAC, 2007. p. 84-89
- GHIGGI, Ilca; GOMES DA SILVA JR, João Manoel. *Projeto de laços de anti-windup para sistemas neutros sujeitos à saturação de controle*. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 16, 2006, Salvador. **Anais...** Salvador: SBA, 2006. p. 1471-1476.
- GHIGGI, Ilca; GOMES DA SILVA JR, João Manoel. *Análise de estabilidade de sistemas lineares com atraso apresentando saturação de controle*. In: CONGRESSO

BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 16, 2006, Salvador. **Anais...** Salvador: SBA, 2006. p. 1477-1482.

- GOMES DA SILVA JR., João Manoel; GHIGGI, Ilca. and TARBOURIECH, S. *Non-rational dynamic output feedback for time-delay systems with saturating inputs*. **International Journal of Control**. v. 81, p.557-570, 2008.
- GHIGGI, Ilca; BENDER, Fernando A.; GOMES DA SILVA JR., João Manoel. *Dynamic non-rational anti-windup for time-delay systems with saturating inputs*. In: IFAC WORLD CONGRESS THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL, 17h, 2008. Seoul-Korea. **Proceedings...** Seoul-Korea: IFAC, 2008. p.277-282
- GHIGGI, Ilca; GOMES DA SILVA JR., João Manoel; LEITE, Valte J.S. e MIRANDA, Marcio F. *Estabilização de sistemas discretos com atrasos variantes no tempo e saturação nos atuadores*. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 17, 2008, Juiz de Fora, Minas Gerais. **Anais...** Juiz de Fora: SBA, 2008. ISBN 978-85-60750-01-6

## REFERÊNCIAS

- BATEMAN, A.; LIN, Z. An analysis and design method for linear systems under nested saturation. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.48, p.41–52, 2003.
- BOUKAS, E.-K. Discrete-time systems with time-varying time delay: stability and stabilizability. **Mathematical Problems in Engineering**, [S.l.], v.2006, p.1–10, Jan 2006.
- BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: Siam, 1994.
- CAO, Y.; LIN, Z.; HU, T. Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation. **IEEE Control Systems**, [S.l.], v.49, p.233–240, 2002.
- CAO, Y.; LIN, Z.; WARD, D. G. An antiwindup approach to enlarging domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.47, n.1, p.140–145, 2002.
- CHEN, B. S.; WANG, S. S.; LU, H. C. Stabilization of time-delay systems containing saturating actuators. **International Journal of Control**, [S.l.], v.47, p.867–881, 1988.
- CHEN, W.-H.; GUAN, Z.-H.; LU, X. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay. In: IEE PROCEEDINGS — CONTROL THEORY AND APPLICATIONS, 2003. **Anais...** [S.l.: s.n.], 2003. n.4, p.412–416. (Control Theory and Applications, 2003., v.150).
- CHOI, H. H.; CHUNG, M. J. An LMI approach to  $H_\infty$  controller design for linear time-delay systems. In: AUTOMATICA, 1997. **Anais...** [S.l.: s.n.], 1997. n.4, p.737–739. (Control Theory and Applications, 1997., v.33).
- CHOU, J.; HORNG, I.; CHEN, B. S. Dynamical feedback compensator for uncertain time-delay systems containing saturating actuator. **International Journal of Control**, [S.l.], v.49, p.961–968, 1989.
- ESFAHANI, S. H.; PETERSEN, I. R. An LMI approach to the output-feedback guaranteed cost control for uncertain time-delay systems. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 37., 1998, Tampa, FL. **Proceedings...** Tampa: FL: IEEE, 1998. p.1358–1363. (Decision and Control, 1998., v.2).
- FRIDMAN, E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.43, n.4, p.309–319, 2001.

FRIDMAN, E.; PILA, A.; SHAKED, U. Regional stabilization and  $H_\infty$  control of time-delay systems with saturating actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, [S.l.], v.13, n.9, p.885–907, Jun 2003.

FRIDMAN, E.; SHAKED, U. An improved stabilization method for linear time-delay systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.47, n.11, p.1931–1937, 2002.

FRIDMAN, E.; SHAKED, U. A descriptor system approach to  $H_\infty$  control of linear time-delay systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.47, n.2, p.253–269, 2002.

FRIDMAN, E.; SHAKED, U. Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems. **International Journal of Control**, [S.l.], v.78, n.4, p.235–246, Mar 2005.

FRIDMAN, E.; SHAKED, U. Delay-dependent  $\mathcal{H}_\infty$  control of uncertain discrete delay systems. **European Journal of Control**, [S.l.], n.11, p.29–37, 2005.

GHIGGI, I.; BENDER, F.; GOMES DA SILVA JR., J. Dynamic non-rational anti-windup for time-delay systems with saturating inputs. In: WORLD CONGRESS THE INTERNATIONAL FEDERATION OF AUTOMATIC CONTROL, 17., 2008, Seoul-Korea. **Anais...** Seoul-Korea: IFAC, 2008. p.277–282. (International Federation of Automatic Control).

GHIGGI, I.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Análise de estabilidade de sistemas lineares com atraso apresentando saturação de controle. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 16., 2006, Salvador. **Anais...** Salvador: SBA, 2006. p.1477–1482.

GHIGGI, I.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Projeto de laços de anti-windup para sistemas neutros sujeitos à saturação de controle. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 16., 2006, Salvador. **Anais...** Salvador: SBA, 2006. p.1471–1476.

GLATTFELDER, A.; SCHAUFELBERGER, W. Stability analysis of single loop control systems with saturation and antireset-windup circuits. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.28, n.12, p.1074 – 1081, 1983.

GOMES DA SILVA JR., J.; GHIGGI, I.; TARBOURIECH, S. Non-rational dynamic output feedback for time-delay systems with saturating inputs. **International Journal of Control**, [S.l.], v.81, n.4, p.557–570, Apr 2008.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; GHIGGI, I.; TARBOURIECH, S.  $\mathcal{L}_2$  disturbance tolerance and rejection for time delay systems in the presence of saturating inputs. In: IFAC WORKSHOP ON CONTROL APPLICATIONS OF OPTIMISATION - CAO'06, 13., 2006, Cachan. **Proceedings...** Cachan: IFAC, 2006.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability: an lmi-based approach. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL (CDC'03), 42., 2003, Hawaii, USA. **Proceedings...** Hawaii: IEEE, 2003. p.4451–4456.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S. Anti-windup design with guaranteed regions of stability: an lmi-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.50, n.1, p.106–111, 2005.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Synthesis of anti-windup loops for enlarging the stability region of time-delay systems with saturating controls. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, (ECC'03), 7., 2003, Cambridge, England. **Proceedings...** Cambridge: ECC, 2003.

GOMES DA SILVA JR., J. M.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Local Stabilization of linear systems under amplitude and rate saturating actuators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.48, n.5, p.842–847, 2003.

GOMES DA SILVA JR., J.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Using anti-windup loops for enlarging the stability region of time-delay systems subject to input saturation. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2004, Boston, MA., USA. **Proceedings...** Boston: ACC, 2004. p.4819–4824.

GOMES DA SILVA JR., J.; TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. Anti-windup design for time-delay systems subject to input saturation: an lmi-based approach. **European Journal of Control**, [S.l.], v.12, p.622–634, 2006.

GOMES DA SILVA JR., J.; TARBOURIECH, S.; REGINATTO, R. Analysis of regions of stability for linear systems with saturating inputs through an anti-windup scheme. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS AND COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEM DESIGN (CCA/CACSD 2002), 2002, Glasgow, UK. **Anais...** Glasgow: IEEE, 2002. v.2, p.1106–1111.

GOUAISBAUT, F.; PEAUCELLE, D. A note on stability of time delay systems. In: IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN, 5., 2006, Toulouse, France. **Proceedings...** Toulouse: IFAC, 2006.

GOUAISBAUT, F.; PEAUCELLE, D. Delay-dependent stability analysis of linear time delay systems. In: PREPRINTS OF THE IFAC WORKSHOP ON TIME-DELAY SYSTEMS, 2006, Italy. **Anais...** Italy: IFAC, 2006.

GRIMM, G.; HATFIELD, J.; POSTLETHWAITE, I.; A. TEEL, M. T.; ZACCARIAN, L. Antiwindup for stable systems with input saturation: an lmi-based synthesis. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.48, n.9, p.1500–1525, 2003.

GRIMM, G.; TEEL, A.; ZACCARIAN, L. The  $l_2$  anti-windup problem for discrete-time linear systems: definition and solutions. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2003, Denver, USA. **Proceedings...** Denver: ACC, 2003. p.5329–5334.

GU, K.; CHEN, J.; CHEN, J.; GU, K.; KHARITONOV, V. **Stability of Time-Delay Systems**. [S.l.]: Boston: Birkhauser, 2003.

HALE, J.; LUNEL, S. M. V. **Introduction to Functional Differential Equations**. New York: Springer-Verlag, 1993.

HU, T.; TEEL, A.; ZACCARIAN, L. Regional anti-windup compensation for linear systems with input saturation. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2005, Portland, OR, USA. **Proceedings...** Portland: ACC, 2005. p.3397–3402.

IVANESCU, D.; DION, J. M.; DUGARD, L.; NICULESCU, S. I. Dynamical compensation for time-delay systems: an LMI approach. **International Journal of Robust Nonlinear Control**, [S.l.], v.10, n.8, p.611–628, 2000.

IVANESCU, D.; DUGARD, L.; DION, J. **Stability of Linear Time-Delay Systems**. a time domain approach. theory and examples. Grenoble, France: Laboratoire D'Automatique de Grenoble, 2000.

JEUNG, E. T.; OH, D. C.; KIM, J. H.; PARK, H. B. Robust controller design for uncertain systems with time delays: LMI approach. **Automatica**, [S.l.], v.32, n.8, p.1229–1231, 1996.

K. TAKABA, N. M.; KATAYAMA, T. A generalized Lyapunov theorem for descriptor system. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.24, p.49–51, 1995.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

KHARITONOV, V.; MELCHOR-AGUILAR, D. On delay-dependent stability conditions. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.40, p.71–76, 2000.

KIYAMA, T.; IWASAKI, T. On the use of multi-loop circle for saturating control synthesis. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.41, p.105–114, 2000.

KOLMANOVSKII, V.; RICHARD, J. Stability of some linear systems with delays. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.44, n.5, p.984 – 989, May 1999.

KOTHARE, M. V.; MORARI, M. Multiplier theory for stability analysis of anti-windup control systems. **Automatica**, [S.l.], v.35, p.917–928, 1999.

LEITE, V. J. S.; TARBOURIECH, S.; PERES, P. L. D. A convex approach for robust state feedback control of discrete-time systems with state delay. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2004., 2004, Boston, MA., EUA. **Proceedings...** Boston: ACC, 2004. p.2870–2875.

LIN, Z.; SABERI, A. Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to input saturation via linear feedback. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.21, p.225–239, 1993.

MAHMOUD, M. S. **Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems**. New York: Marcel Dekker, Inc., 2000. (Control Engineering Series).

MIRANDA, M. . F.; LEITE, V. J. S. Síntese convexa para sistemas incertos discretos no tempo com atrasos variantes. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 8., 2007, Florianópolis, SC, Brasil. **Anais...** Florianópolis: SBA, 2007.

MOLCHANOV, A.; PYATNITSKII, E. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.13, p.59–64, 1989.

MOON, Y.; PARK, P.; KWON, W.; LEE, Y. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state delayed systems. **International Journal of Control**, [S.l.], v.74, p.1447–1455, 2001.

NICULESCU, S. Further remarks on delay dependent stability of linear neutral systems. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM OF MATHEMATICAL THEORY OF NETWORKS AND SYSTEMS (MTNS 2000), 14., 2000, Perpignan, France. **Proceedings...** Perpignan: MTNS, 2000.

NICULESCU, S. **Delay Effects on Stability**. a robust control approach. Heidelberg, LN-CIS: Springer, 2001, vol. 269.

NICULESCU, S.-I.; DION, J. M.; DUGARD, L. Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.41, n.5, p.742–747, 1996.

OLIVEIRA, M. C. de; GEROMEL, J. Synthesis of non-rational controllers for linear delay systems. **Automatica**, [S.l.], v.40, n.2, p.171–188, 2004.

OLIVEIRA, M. C. de; SKELTON, R. Stability tests for constrained linear systems, In MOHEIMANI, S. O. Reza (Ed.). **Perspectives in robust control**, [S.l.], New York: Springer-Verlang, 2001, v. 268.

OLIVEIRA, M. Z. **Estabilidade Robusta de Sistemas Lineares em Tempo Discreto Sujeitos a Atraso no Estado**. 2008. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2008.

OUCHERIAH, S. Global stabilization of a class of linear continuous time delay systems with saturating controls. **IEEE Control Systems**, [S.l.], v.43, n.12, p.1012–1015, 1996.

OUCHERIAH, S. Synthesis of controllers for time delay systems subject to actuator saturation and disturbance. **Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control — Transactions of ASME**, [S.l.], v.125, p.244–249, 2003.

PARK, J.-K.; CHOI, C.-H.; CHOO, H. Dynamic anti-windup method for a class of time-delay control systems with input saturation. **International Journal of Robust Nonlinear Control**, [S.l.], v.10, p.457–488, 2000.

PEAUCELLE, D.; HENRION, D.; ARZELIER, D. Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation. In: IFAC WORLD CONGRESS, 16., 2005, Prague, Czech Republic. **Proceedings...** Prague: IFAC, 2005.

RICHARD, J.-P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. **Automatica**, [S.l.], v.39, n.10, p.1667–1694, Oct 2003.

SAEKI, M.; WADA, N. Synthesis of a static anti-windup compensator via linear matrix inequalities. In: IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN, 3., 2000, Prague, Czech Rep. **Proceedings...** Prague: IFAC, 2000.

SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.42, n.7, p.896–911, 1997.

TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Synthesis of controllers for continuous-time delay systems with saturating controls via LMIs. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Phoenix, USA, v.45, n.1, p.105–111, 2000.

TARBOURIECH, S.; GOMES DA SILVA JR., J. M.; GARCIA, G. Delay-dependent anti-windup strategy for linear systems with saturating inputs and delayed outputs. **International Journal of Robust Nonlinear Control**, [S.l.], v.14, p.665–682, 2004.

TARBOURIECH, S.; PRIEUR, C.; GOMES DA SILVA JR., J. M. Stability analysis and stabilization of systems presenting nested saturations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, [S.l.], v.51, p.1364–1371, 2006.

TEEL, A. R.; KAPOOR, N. The  $\mathcal{L}_2$  anti-windup problem: Its definition and solution. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 4., 1997, Brussels, Belgium. **Proceedings...** Brussels: ECC, 1997.

TISSIR, E.; HMAMED, A. Further results on the stabilization of time delay systems containing saturating actuators. **International Journal of Systems Science**, [S.l.], v.23, p.615–622, 1992.

VALMÓRBIDA, G. **Estabilidade de Sistemas com Atraso**: análise de incertezas e de saturação empregando desigualdades matriciais lineares. 2006. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) — Universidade Estadual de Campinas. 2006.

VIDYASAGAR, M. **Nonlinear Systems Edition**. Heidelberg, LNCIS: Prentice Hall, 1993.

ZACCARIAN, L.; NESIC, D.; TEEL, A.  $\mathcal{L}_2$  anti-windup for linear dead-time systems. **Systems & Control Letters**, [S.l.], v.54, n.12, p.1205–1217, 2005.