



SISTEMÁTICA CAIXA CINZA DE IDENTIFICAÇÃO DE PROCESSOS:
APLICAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS

Cristiane Martins Schweinberger¹, Jorge Otávio Trierweiler¹

¹ Grupo de Integração, Modelagem, Simulação e Controle de Processos (GIMSCOP)
Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
R. Eng. Luis Englert, s/n. Campus Central. CEP: 90040-040 - Porto Alegre - RS - BRASIL,
E-MAIL: {[crisms.jorge](mailto:crisms.jorge@enq.ufrgs.br)}@enq.ufrgs.br

Palavras Chaves: Identificação de modelos, CEKF, estimabilidade de parâmetros.

Resumo: O presente artigo tem como objetivo apresentar uma sistemática para identificação de processos do tipo caixa cinza. Para tanto, o sistema que compõe o processo, o sensor, o computador e o ambiente é apresentado e discutido, pois são esses os fatores influenciam na identificação. Na sequência, é apresentada a importância de um estimador de estados para o processo de identificação, pois é necessário ter uma estimativa do distúrbio do processo. O CEKF é o estimador sugerido. Após a estimação dos parâmetros, é importante avaliar a estimabilidade, a técnica sugerida é a de Brun, Reichert e Künsch (2001) que avalia o índice de colinearidade dos parâmetros, quanto maior for o índice, mais fraca é a estimabilidade. Por fim, para a validação do modelo são sugeridos os testes tradicionais: F e correlação. Para o procedimento proposto, foi implementado o CEKF em MAPLE, os demais módulos ainda estão em processo de implementação. O estudo de caso para validar a sistemática proposta foi uma planta de seis tanques esféricos.

1 Introdução

Praticamente todas as metodologias atuais de controle de processos são baseadas no controle através do computador. Sabendo que as ações de controle são dadas em tempo discreto, a idéia chave é como um processo contínuo pode ser previsto na forma discreta. Nesse contexto, se trabalha com três variáveis relacionadas ao tempo: t (tempo contínuo), k (tempo discreto) e h (intervalo de amostragem). Na Figura 1.1 é apresentado o sistema descrito.

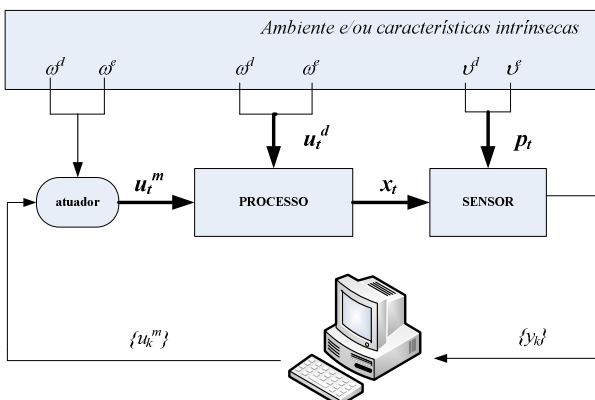


Figura 1.1. Caracterização de um processo controlado por computador.

Como pode ser visto na Figura 1.1, as entradas do processo u podem ser divididas em duas classes: u^m (entrada manipulada) e u^d (entrada distúrbio). A entrada manipulada pode ter seu valor ajustado conforme desejado, enquanto que sobre a entrada distúrbio não se tem controle, sua presença é inerente ao processo. Ambas as entradas estão sujeitas aos distúrbios do processo ω , esses por sua vez também podem ser divididos em duas classes: ω^d (parcela determinística) e ω^e (parcela estocástica).

Exemplificando a parcela determinística dos distúrbios, para u^m pode ser uma queda linear durante o intervalo h quando se espera um comportamento do tipo *hold*. Para u^d pode ser o comportamento de subida e queda da temperatura ambiente influenciando processos de troca de calor.

De forma exata, pode-se dizer que a Equação (1.1) descreve o estado no próximo tempo discreto.

$$x_k = \Phi(x_{k-1}, u, k, h) \quad (1.1)$$

Analogamente, no sensor se observam duas entradas: x e p , onde a última é equivalente a entrada distúrbio observada no processo. A entrada p é composta pelo distúrbio do sensor v que também pode ser dividido em duas classes: v^d (parcela determinística) e v^e (parcela



VII-Oktober Fórum – PPGEQ

21, 22 e 23 de outubro de 2008

estocástica). A entrada p é a responsável pelo erro de medição. Dados os fatos, a Equação (1.2) descreve a a saída do sensor.

$$y_k = \Gamma(x_k, p, k) \quad (1.2)$$

Salienta-se que os parâmetros θ nas Equações (1.1) e (1.2) estão implícitos, eles apenas serão explicitados quando o objetivo é estimá-los ou avaliar sua estimabilidade

Juntas, as equações (1.1) e (1.2) formam o modelo principal. No entanto, a abordagem pode ser ampliada para sub-modelos referentes às entradas, que podem variar ao longo do tempo, como pode ser visto na Figura 1.2.

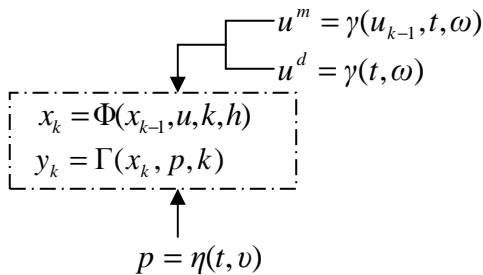


Figura 1.2. Relações entre o modelo principal com os sub-modelos.

Até este momento o problema foi contextualizado de maneira que se possa visualizar de forma clara todos os fatores envolvidos. Contudo, para fins matemáticos, o problema pode ser abordado de outra maneira, onde as entradas são divididas em determinística e estocástica, u^{det} e u^{est} , respectivamente. Assim, considerando que a separação pode ser feita na forma linear, a Equação (1.1) passa a ser equivalente a (1.3).

$$x_k = \Phi(x_{k-1}, u^{det}, k, h) + \Phi(x_{k-1}, u^{est}, k, h) \quad (1.3)$$

O segundo termo da Equação (1.3) consiste no efeito de todos os distúrbios estocásticos (ω^{est}) atuantes, o resultado também não deixa de ser um distúrbio de processo estocástico. Como um distúrbio na vazão de alimentação de um tanque causa um distúrbio no seu nível. Portanto, a Equação (1.3) pode ainda ser reduzida para (1.4).

$$x_k = \Phi(x_{k-1}, u^{det}, k, h) + \omega^{est} \quad (1.4)$$

De forma análoga, obtemos a Equação (1.5) para o sensor.

$$y_k = \Gamma(x_k, p^{det}, k) + v^{est} \quad (1.5)$$

As Equações (1.4) e (1.5) se aproximam mais das normalmente encontradas na literatura. Entretanto, é comum não se adotar os sobre-índices *det* e *est*. Até o

presente momento esta notação foi utilizada para enfatizar a origem das variáveis. Com isso pôde-se perceber que ω^{est} e v^{est} capturam as entradas do processo e do sensor que já não são mais capturadas pelas funções Φ e Γ .

Entrando em acordo com a literatura, à partir deste momento já não se adota mais os sobre-índices, fica sub-entendido que para u estamos nos referindo a tudo que pode ser completamente determinado sobre as entradas, enquanto que ω tem a responsabilidade de carregar toda estocasticidade remanescente. A mesma tomada pode ser feita para o sensor. No entanto, embora seja possível existir algum distúrbio determinístico, normalmente ele é considerado inexistente no sensor. A essência do modelo principal não é alterada, apenas a sua representação, como pode ser visto na Figura (1.3) em comparação com a (1.2).

$$\begin{aligned} x_k &= \Phi(x_{k-1}, u, k, h) + \omega \\ y_k &= \Gamma(x_k, k) + v \end{aligned}$$

Figura 1.3. Outra apresentação do modelo principal.

Até o presente momento, a abordagem foi feita em termos ideais. Contudo, para adequação a realidade a representação matemática passa a ser conforme as Equações (1.6) e (1.7).

$$x_k = f(x_{k-1}, u, k, h) + w \quad (1.6)$$

$$y_k = g(x_k, k) + v \quad (1.7)$$

As funções f e g contêm erros, na estrutura e nos parâmetros. Ou seja, nem todo determinismo é capturado. Além destes erros, também existe o erro do valor inicial. Com isso, acaba ficando de responsabilidade das variáveis w e v compensar os erros mencionados, além de capturar os distúrbios estocásticos.

1.1 Estimação dos parâmetros

A identificação caixa cinza tem como objetivo capturar ao máximo todo determinismo atuante no processo, ou seja: $E\{f\} = \Phi$. Adotar a visão em sub-modelos consiste em uma interessante alternativa para se alcançar tal objetivo devido a minuciosidade. Contudo, não é o suficiente para garantir a eficácia do método. A segunda grande questão são os distúrbios do processo estocásticos, eles devem ser levados em conta no processo de minimização dos resíduos. A seguir esse assunto será mais aprofundado, podendo-se localizar a participação desses distúrbios no processo de identificação.

Para determinar os parâmetros θ tem-se como objetivo minimizar o erro de medição, ou distúrbio v , sendo que $E\{v\} = v$. Portanto, os parâmetros θ são encontrados segundo a Equação (1.8). E, o vetor dos parâmetros é composto por: $\theta^x + \theta^y$, ou seja, parâmetros dos estados mais os parâmetros das saídas.



VII-Oktober Fórum – PPGEQ

21, 22 e 23 de outubro de 2008

$$\min_{\theta} \sum_{k=1}^n (y_k - g(x_k, k; \theta))^2 \quad (1.8)$$

Sabendo que g depende de x_k , g pode ser rearranjada conforme a Figura (1.4).

$$\begin{array}{c} \boxed{x_k = f(x_{k-1}, u, k, h) + w} \\ \downarrow \\ \boxed{g(f(x_{k-1}, u, k, h) + w, k)} \end{array}$$

Figura 1.4. Dependência de g por w .

Com isso, fica evidente a importância de w no processo de estimação de parâmetros. Caso não se tenha uma estimativa para w , o erro minimizado não irá convergir para v como se deseja.

Portanto, para suprir tal necessidade o emprego de um estimador de estados vem como uma excelente alternativa. A formulação é apresentada nas Equações (1.9) e (1.10).

$$\hat{x}_{k|k} = f(\hat{x}_{k|k-1}, u, k, h) + \hat{w}_{k-1|k} \quad (1.9)$$

$$y_k = g(\hat{x}_{k|k}, k) + \hat{v}_{k|k} \quad (1.10)$$

Para viabilizar o tratamento matemático \hat{w} e \hat{v} são assumidas como gaussianas, independentes dos valores passados e futuros, com média zero e covariâncias Q e R , respectivamente.

Estudos têm demonstrado que o CEKF costuma gerar bons resultados devido a sua robustez garantida pelas restrições. O problema de otimização resolvido pelo CEKF, bem como o cálculo da matriz de covariância e as restrições podem ser vistos nas Equações (1.11) a (1.14).

$$\min_{w, v} \Psi = \hat{w}_{k-1|k}^T P_k^{-1} \hat{w}_{k-1|k} + \hat{v}_{k|k}^T R^{-1} \hat{v}_{k|k} \quad (1.11)$$

$$P_k = Q_k + \varphi_k P_{k-1} \varphi_k^T - (\varphi_k P_{k-1} H_k^T)(H_k P_{k-1} H_k^T + R)^{-1} (H_k P_{k-1} \varphi_k^T) \quad (1.12)$$

$$x_{\min} - \hat{x}_{k|k-1} \leq w \leq x_{\max} - \hat{x}_{k|k-1} \quad (1.13)$$

$$y_k = g(\hat{x}_{k|k-1}) + Hw + v \quad (1.14)$$

De posse dos resultados gerados pelo filtro, o problema de estimação de parâmetros da Equação (1.8) pode ser apresentado como em (1.15)

$$\min_{\theta} \sum_{k=1}^n (y_k - g(\hat{x}_{k|k}, k; \theta))^2 = \sum_{k=1}^n (\hat{v}_{k|k})^2 \quad (1.15)$$

1.2 Estimabilidade dos parâmetros

Quando se trabalha com modelos mais complexos, que são aqueles baseados em equações fenomenológicas, se torna difícil estimar os verdadeiros valores de todos

parâmetros. A fraca estimabilidade dos parâmetros ocorre quando existe forte dependência entre eles, ou seja, isso quer dizer que mesmo que ocorram diferentes modificações nos valores dos parâmetros os modelos resultantes irão sempre convergir para a mesma resposta.

As técnicas mais tradicionais de avaliar a dependência entre os parâmetros são a matriz de covariância e a construção da região de confiança, representada graficamente por uma elipsóide m -dimensional. Entretanto, tais técnicas possuem certas deficiências. A matriz de covariância permite apenas avaliar a dependência dos parâmetros aos pares. No caso da elipsóide, devido a m -dimensionalidade sua construção vai se tornando cada vez mais complexa à medida que o número de parâmetros aumenta. A construção da elipsóide pode até ser inviável em certos casos.

Diante do que foi argumentado, surge a necessidade de uma técnica para se avaliar a qualidade dos parâmetros com melhor precisão. Uma solução consiste em identificar quais são os parâmetros possíveis de serem estimados e estimá-los mantendo os demais fixos em valores coerentes conhecidos previamente. Brun, Reichert e Künsch (2001) sugerem um método de sensibilidade local iterativo e interessante. Começando com determinação da matriz V .

$$V = \left. \frac{\partial g(x_k, k; \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} \quad (1.16)$$

Com o objetivo de trabalhar com valores adimensionais, à partir da matriz V se chega à matriz de sensibilidade S .

$$s_{ij} = v_{ij} \frac{\Delta \theta_j}{SC_i} \quad i=1,2,\dots,n \quad j=1,2,\dots,m \quad (1.17)$$

Onde v_{ij} denota um elemento de V , $\Delta \theta_j$ consiste em uma prévia incerteza de θ_j e SC_i um fator de escala com a mesma dimensão física que a observação correspondente. O número de observações é n e o número de parâmetros m . Com isso é possível obter o índice de importância dos parâmetros δ_j^{msqr} .

$$\delta_j^{msqr} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_{ij}^2} \quad (1.18)$$

Localizados os parâmetros mais importantes, constroem-se de maneira prudente diferentes grupos de parâmetros identificados pela letra “R”. O objetivo é avaliar o índice de colinearidade ζ_R de cada grupo. Lembrando que o índice de colinearidade, ou dependência linear, indica o quanto modificações nos parâmetros do grupo podem se auto-cancelar, ou seja, manter a resposta pouco sensível as alterações. Isso quer dizer que poderão existir casos de grupos compostos por parâmetros vistos



VII-Oktober Fórum – PPGEQ

21, 22 e 23 de outubro de 2008

como importantes individualmente, mas, quando agrupados passam a ser fracamente estimados.

Antes de determinar o índice de colinearidade ζ_R , as colunas da matriz S devem ser normalizadas obtendo-se \tilde{S}

$$\zeta_R = \frac{1}{\min_{\|\beta\|=1} \|\tilde{S}_R \beta\|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} \quad (1.19)$$

Onde β corresponde a um determinado vetor com norma igual a 1, \tilde{S}_R é uma sub-matriz de S com dimensão $n \times r$, λ_r é o menor autovalor de $S_R^T S_R$.

1.3 Validação do modelo

Obtidos os parâmetros com a confiança desejada, o último passo do processo iterativo consiste na validação do modelo, alternativas interessantes são:

- Construção de um gráfico $y \times g(\hat{x}_{k|k}, k, \theta)$ e verificar o coeficiente de correlação ρ ,
- Teste F, considerando a matriz R e \hat{R} .

$$\hat{R} = \min_{\theta} \frac{1}{n-m} \sum_{k=1}^n (y_k - g(\hat{x}_{k|k}, k; \theta))^2 \quad (1.20)$$

Caso o modelo identificado não seja validado o processo se reinicia com a mudança na estrutura de f e/ou g , seguindo de forma iterativa. A visão em sub-modelos é um vantajoso recurso para esta reformulação de estrutura, pois viabiliza enriquecer o sistema com conhecimento prévio.

2. Metodologia / Materiais e Métodos

Com o objetivo de implementar o sistema de identificação caixa cinza para modelos dinâmicos com visão em sub-modelos, foi implementado em MAPLE o estimador de estados CEKF conforme as Equações (1.11) a (1.14).

Tomou-se como caso de estudo uma planta de seis tanques esféricos. O modelo foi simulado para três pontos de operação com o acréscimo de ruído gaussiano com média zero e desvio padrão 0,25, em seguida o CEKF foi aplicado. Os níveis dos tanques 1 e 2 foram tomados como variáveis observadas. Na tabela 2.1 são apresentados os dados utilizados, e na Figura 2.1 as perturbações realizadas.

Tabela 2.1. Dados utilizados para simulação

Equações	
$A_6(h_6) \frac{dh_6}{dt} = x_2 \cdot F_2 - R_6 \sqrt{h_6}$	
$A_5(h_5) \frac{dh_5}{dt} = x_1 \cdot F_1 - R_5 \sqrt{h_5}$	
$A_4(h_4) \frac{dh_4}{dt} = (1 - x_1) \cdot F_1 + R_6 \sqrt{h_6} - R_4 \sqrt{h_4}$	
$A_3(h_3) \frac{dh_3}{dt} = (1 - x_2) \cdot F_2 + R_5 \sqrt{h_5} - R_3 \sqrt{h_3}$	
$A_2(h_2) \frac{dh_2}{dt} = R_4 \sqrt{h_4} - R_2 \sqrt{h_2}$	
$A_1(h_1) \frac{dh_1}{dt} = R_3 \sqrt{h_3} - R_1 \sqrt{h_1}$	
Parâmetros	
D1 =24,50 cm	CD1 =35,70 cm ^{2.5} /s
D2 =25,00 cm	CD2 =34,20 cm ^{2.5} /s
D3 =30,40 cm	CD3 =52,00 cm ^{2.5} /s
D4 =29,80 cm	CD4 =50,40 cm ^{2.5} /s
D5 =35,10 cm	CD5 =30,60 cm ^{2.5} /s
D6 =35,30 cm	CD6 =28,00 cm ^{2.5} /s
Pontos de Operação	
P1 F1 ₀ = F2 ₀ = 85 cm ³ /s x1 = x2 = 0,25	P2 F1 ₀ = F2 ₀ = 170 cm ³ /s x1 = x2 = 0,48
P3 F1 ₀ = F2 ₀ = 170 cm ³ /s x1 = x2 = 0,75	

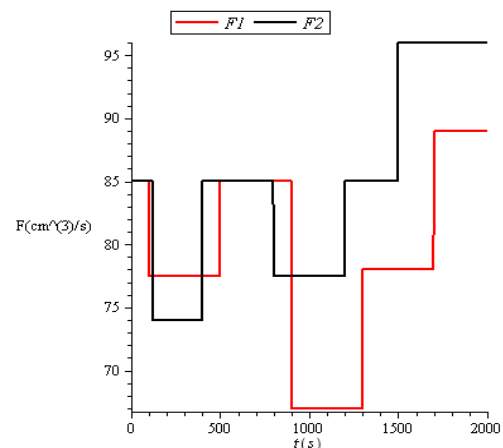


Figura 2.1. Perturbações realizadas durante as simulações.

3. Resultados

Os resultados gerados pelo CEKF referentes aos três pontos de operação podem ser vistos nas Figuras 3.1 a 3.3.



VII-Oktober Fórum – PPGEQ

21, 22 e 23 de outubro de 2008

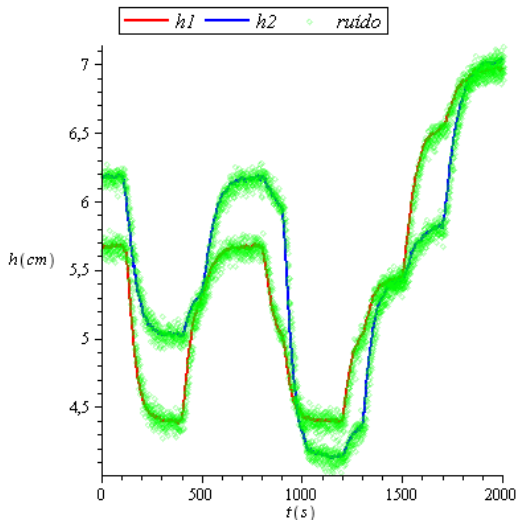


Figura 3.1. Resultado para o Ponto 1.

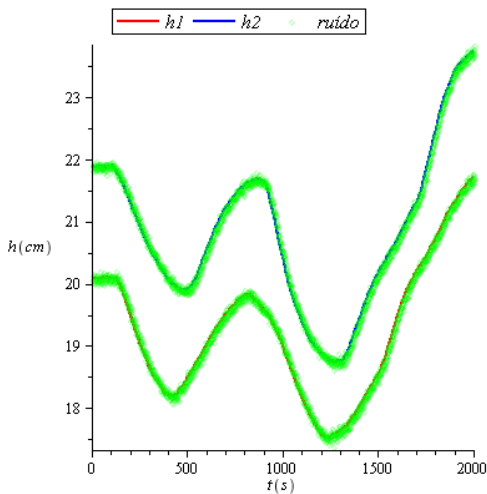


Figura 3.1. Resultado para o Ponto 2.

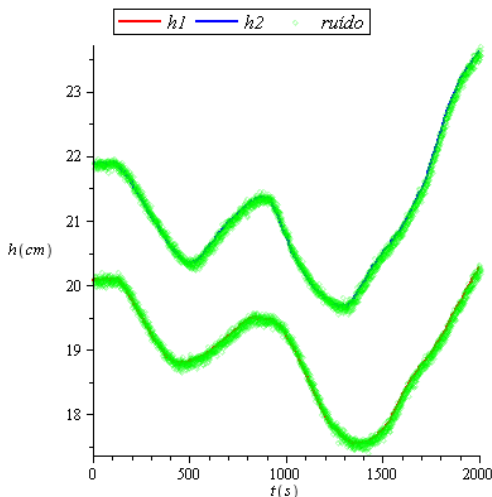


Figura 3.1. Resultado para o Ponto 3.

Como pôde ser visto nas Figuras 3.1 a 3.3 o CEKF teve um bom desempenho, salientando-se nos pontos de operação 2 e 3. Isto se deve ao ruído adiciocinado ser proporcionalmente menor.

4. Conclusão

Uma etapa da implementação do sistema de identificação caixa cinza já foi concluída, que consiste na implementação do CEKF. Restam ainda estimar os parâmetros, avaliar a estimabilidade e validar o modelo. Concluída a etapa computacional, o sistema será aplicado à planta real.

5. Bibliografia

- Salau, N. P., Secchi, A. R., Trierweiler, J. O. (2007). Five Formulations of Extended Kalman Filter: Which is the best for D-RTO? *In Proceedings of the ESCAPE 17*, paper T3 – 486.
- Reichert, P., Brun R., Künsch, H. R. (2001). Practical Identifiability analysis of large environmental simulation models. *In Water Resources Research*, vol.37, no 4, p. 1015 – 1030.
- Aström, K. J., Wittenmark B. (1997). *Computer Controlled Systems: Theory and Design*. Third Edition, Thomas Kailath Editor.
- Bohlin, T. (2007). *Practical Grey-Box Process Identification: Theory and applications*. Advances in Industrial Control, Springer.
- Bard, Y. (1974). *Nonlinear Parameter Estimation*. Academic Press, New York/London.
- Beck, J. V., Arnold K. J. (1977). *Parameter Estimation: In engineering and science*. John Wiley & Sons, New York/London/Sidney/Toronto.
- Marcon, S. M., Trierweiler, J. O. Secchi, A. R. (2002). EKF e CEKF: Comparação entre Duas Formulações do Filtro de Kalman Estendido. CBA. Brazil.
- Tonel, G. Trierweiler, J. O. Secchi, A. R. (2007). Atualização Automática de Modelos para Otimização em Tempo Real. OKTOBER FÓRUM. Porto Alegre – Brazil.