UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA ESCOLA BÁSICA

Autor: Daiane Scopel Boff

Orientadora: Prof[a].Dr[a]. Cydara Cavedon Ripoll

PORTO ALEGRE

2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE MATEMÁTICA

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA ESCOLA BÁSICA

Autor: Daiane Scopel Boff

daiaboff@uol.com.br

Orientadora: Prof^a.Dr^a. Cydara Cavedon Ripoll

Banca Examinadora

Prof[a]. Dr[a]. Nedir do Espírito Santo (UFRJ)

Prof[a]. Dr[a]. Elisabete Zardo Burigo (UFRGS)

Prof[a]. Dr[a]. Maria Paula Gonçalves Fachin (UFRGS)

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Ensino de Matemática para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Matemática.

PORTO ALEGRE

2006

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelos meus familiares que, com grande amor, incentivaram-me neste tempo de estudo. Em especial, ao meu esposo Alex e meu filho Luís Henrique, que suportaram as ausências de cada dia.

Agradeço a minha orientadora e amiga Cydara pelas horas dedicadas a leituras e discussões.

Agradeço a todos os professores e colegas do Mestrado em Ensino de Matemática, turma 2005, que participaram dos fóruns. Muitos deles trataram do ensino de irracionais na Escola Básica, e por muitas vezes as discussões continuaram virtualmente (mais ou menos 20 mensagens trocadas entre todos os participantes!). Todas estas discussões e opiniões nos foram muito valiosas.

Agradeço em especial aos colegas professores, que gentilmente se dispuseram a aplicar os questionários-sondagem em suas turmas.

A todos vocês, meu eterno respeito e admiração.

SUMÁRIO

RESUMO

Este trabalho busca, num primeiro momento, caracterizar a problemática *aprendizagem do número real na Escola Básica*, aplicando questionários-sondagem, analisando livros didáticos e comparando-os com os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Num segundo momento desenvolvemos um efetivo estudo de Matemática: as maneiras mais comuns de se construir números reais e a equivalência entre todas elas. Mostramos também como, a partir de cada uma destas abordagens, chega-se à representação decimal de um número real positivo.

Finalizamos com uma proposta pedagógica para o Ensino Fundamental, e uma experiência didática, numa 8ª série, de construção de um número real via medição exata de segmentos de reta.

Palavras chave: número irracional, medida (exata) de um segmento de reta, número real.

ABSTRACT

The first part of this work is an attempt to characterize the problem of learning the concept of real number in Elementary School, making use of questionnaires and analyzing school books as well as the National Parameters for the teaching of Mathematics.

The second part deals with the Mathematics involved in the construction of the real numbers, namely, different ways of constructing this set and also the equivalence between all those constructions. We also show how each one of those constructions leads to the decimal representation of a positive real number.

The last part of this work consists of a pedagogic proposal for the construction of the real number making use of the (exact) measure of a line segment and the description and conclusions of its implementation in an 8th year of Elementary School.

Keywords: irrational number, (exact) measure of a straight line segment, real number.

INTRODUÇÃO

É indiscutível a problemática existente na Escola Básica quanto ao ensino de números reais. Confirma-se isto em [F-M-S] e [Ri], por exemplo.

Comprovamos esta problemática inicialmente, em minhas salas de aula, notando que a linguagem e os procedimentos usuais utilizados para a construção dos números reais, baseados basicamente nos livros didáticos disponíveis, acabavam se mostrando falhos, pois os poucos alunos que, depois de desenvolvido o assunto, se arriscavam afinal a definir número irracional, o faziam de maneira mecânica (dizemos mecânico pois os alunos não sabiam mencionar um exemplo sequer que comprovasse sua definição[1]).

Salientamos aqui que, em geral, a abordagem de números irracionais/reais de alguns livros didáticos aprovados pelo MEC e destinados às 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental envolve:

- na 7ª série, apenas uma apresentação do conceito de número irracional, nem sempre completa, e a apresentação dos números $\sqrt{2}$ e π como exemplos, este último ligado principalmente ao cálculo do comprimento de uma circunferência ou à área de um círculo. Na seqüência, π vira o racional 3,14 sem muitos comentários;

[1]As definições mais comuns por eles apresentadas são: "um número irracional é um número cuja expansão decimal é infinita e não periódica" (que parte do pressuposto de que existem outros números além dos racionais) e "um número irracional é um número que não pode ser escrito sob a forma de fração" (esta última incompleta, pois senão $\sqrt{-1}$ também seria irracional - e este foi de fato um exemplo de número irracional dado por muitos alunos no questionário-sondagem aplicado como parte deste trabalho). Nada mais sabem acrescentar sobre os mesmos, nem mesmo selecionar dentre uma lista de números quais são irracionais e quais não são irracionais.

- na 8^a série, quase que exclusivamente o cálculo com radicais, que pouco contribui para que os alunos aprimorem o conceito de número irracional/real e o significado de sua quantidade.

Evidente é a relevância de se refletir sobre o ensino dos números reais e, principalmente, construir uma proposta de ensino que venha colaborar na melhoria da construção deste número pelo aluno. Como parte desta reflexão, reportamo-nos ao currículo dos cursos de Licenciatura em Matemática no país: após analisarmos sete currículos, observamos que, em geral, os licenciandos cursam disciplinas de Cálculo, onde o conjunto R dos reais é suposto conhecido, e só mais adiante cursam uma disciplina de Análise Real, na qual, em geral, é apresentada a construção de R a partir do conjunto dos racionais Q, pelo processo de Dedekind (cortes) ou, mais raramente, pelo processo de Cantor (seqüências de Cauchy), deduzindo-se as demais propriedades de R como corpo ordenado arquimediano e completo. A partir daí, passa-se, em geral, a estudar seqüências e séries de números reais e, a seguir, funções reais de variável real. Muito pouco é discutido sobre representações dos números reais. Note que representar de maneira *significativa* um número é fundamental para um aluno da Escola Básica, pois é somente através das representações que o aluno pode lidar concretamente com este conceito. Representações adequadas dos números permitem, por exemplo:

- expressar significativamente medidas, sejam elas exatas ou aproximadas;
- realizar concretamente as operações numéricas fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Note que, utilizando a representação fracionária dos números racionais, as quatro operações básicas podem muito facilmente ser definidas e trabalhadas em Q. Contudo, definir-se as operações fundamentais usando a representação decimal (única possível no caso dos irracionais) é muito complicado. Como então proceder neste caso?

A representação decimal também é importante para, por exemplo, dar significado numérico aos números reais dados por expressões do tipo:

$$\frac{\sqrt{5+\sqrt{3}}-\sqrt[3]{5}}{46},$$

respondendo questões como a seguinte:

- Qual o valor aproximado da expressão acima com três casas de precisão*?*

A falta de uma maior discussão sobre a representação decimal de um número real deixa sem resposta questões como a seguinte:

- Afinal: *1 = 0,999... ?* (Muitos alunos de Graduação em Matemática, mesmo depois de estudarem séries, se atrapalham ou são inseguros ao responder esta questão).

Com estas dúvidas não discutidas e esclarecidas durante a Graduação, os licenciados voltam à Escola Básica, agora como professores, e o que se revela é que eles não têm conseguido complementar os livros didáticos e fazer com que sejam atingidos os objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais, no que tange ao ensino de números irracionais e reais. (Constatamos isto através de questionários-sondagem respondidos por alunos do 3º ano do Ensino Médio e por calouros do curso de Licenciatura – veja Capítulo 2). Portanto, tal disciplina de Análise real, estruturada de tal forma, não está sendo tão útil aos licenciandos como poderia e deveria.

Salientamos que as construções de Dedekind e de Cantor foram importantes na história da Matemática na medida em que proporcionaram a construção rigorosa, matematicamente falando, do conjunto *R* que vinha, até o momento, sendo utilizado de maneira intuitiva, não rigorosa. Elas se afastam, no entanto, do conceito mais intuitivo/primitivo de *número*. Então não é de se surpreender que os licenciandos tenham dificuldades de “fazer a ponte” entre esta construção e questões de ordem mais prática, como por exemplo: como se somam dois números reais escritos em expansão decimal?

Durante o curso de Mestrado, tivemos a oportunidade de analisar a construção dos números reais apresentada em [R-R-S], que parte da motivação de medir e acaba por expressar a medida (exata) de qualquer segmento de reta. Além de utilizar-se de um instrumento que generaliza aquele que os alunos de qualquer nível da Escola Básica já estão muito familiarizados, a régua escolar, mantém presente sempre a noção intuitiva de número, resgatando assim a intuição histórica de *número* real.

Refletindo então sobre todas estas construções de números reais e sobre as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, e convictas também de que a construção dos números reais é essencial nas últimas séries do Ensino Fundamental, tanto como um fechamento para o estudo dos números racionais quanto como resolução completa do problema de medição de segmentos de reta e como preparação do aluno para, no Ensino Médio, estudar na Física os fenômenos que envolvem a continuidade (tempo, distância etc.) e, na Matemática, as funções que ajudam a descrever estes fenômenos, resolvemos desenvolver uma seqüência didática para a construção do número real (positivo[2]) para o Ensino Fundamental, proposta esta que, julgamos, melhore o que atualmente está sendo feito, no sentido de nos aproximarmos mais dos objetivos listados nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

---

[2] Não estamos aqui, neste trabalho, nos preocupando com a construção do *corpo* dos reais e portanto vamos nos restringir, na grande parte dele, apenas aos números positivos.

Começamos estudando as abordagens mais comuns de construção dos reais e a equivalência entre todas elas. Decidimos incluir neste texto um capítulo sobre este assunto, já que não encontramos na literatura estas demonstrações feitas em um mesmo trabalho e por tratar-se de um assunto, no nosso ver, esclarecedor e que quase nunca é abordado nos cursos de Licenciatura do país. E, para mostrar tal equivalência, partimos de um corpo ordenado (e, mais adiante, até arquimediano), e chegamos à definição de corpo ordenado arquimediano completo. Também esclarecemos como, a partir de cada uma destas abordagens, chega-se à representação decimal de um número real (positivo).

Este trabalho está então estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1, transcrevemos os trechos dos Parâmetros Curriculares Nacionais e dos Documentos do National Council of Teachers of Mathematics, que dizem respeito ao ensino dos números irracionais/reais e aos objetivos esperados ao fim do Ensino Fundamental e Médio, com o objetivo de se evidenciar o que se espera no Brasil e em um outro país sobre o ensino dos números reais no nível de Escola Básica.

O Capítulo 2 traz os questionários-sondagem aplicados no Ensino Fundamental (7ª série), no Ensino Médio (3º ano) e no curso de Licenciatura em Matemática (calouros de 2006), bem como suas tabulações, a fim de comprovar a situação problema exposta e sentida em minhas salas de aula, bem como de delinear o conhecimento dos alunos sobre o assunto. Salientamos que não houve preocupação em construir uma amostra significativa da população escolar do país, nem mesmo das cidades analisadas, e, portanto, as conclusões referem-se apenas ao grupo participante.

No Capítulo 3 são analisados alguns livros didáticos aprovados pelo MEC, explicitando como se dá o ensino dos números irracionais e reais nestes livros, confrontando-os com os objetivos listados nos Parâmetros Curriculares Nacionais e comparando-os com um livro estrangeiro. Aqui também não houve preocupação em construir uma amostra significativa de livros nacionais e estrangeiros, e, portanto, as conclusões referem-se apenas aos livros analisados, a fim de contextualizar e ilustrar a problemática levantada.

O Capítulo 4 trata da caracterização de um corpo ordenado arquimediano completo e da construção do número real através de três abordagens distintas: por seqüências de Cauchy, por cortes de Dedekind e por medição (exata) de segmentos de reta; em cada uma delas, chega-se à representação decimal de um número real positivo.

O Capítulo 5 traz uma proposta pedagógica de construção do número real, a nosso ver, mais adequada à Escola Básica. Relatamos também uma implementação da mesma, em uma 8ª série, feita em uma escola municipal de Caxias do Sul, RS. No final do capítulo fazemos uma avaliação desta implementação.

No Capítulo 6 registramos algumas considerações finais sobre este trabalho.

No Apêndice trazemos, na íntegra, todas as tabulações dos questionários aplicados nos diferentes níveis e, nos Anexos, mostramos os relatórios feitos pelos alunos de 8ª série durante a implementação da proposta elaborada para construção de número real.

CAPÍTULO 1

PARÂMETROS CURRICULARES

Neste capítulo analisamos o que dizem os parâmetros curriculares nacionais e norte-americanos sobre o ensino dos números irracionais e reais com o objetivo de evidenciar o que se espera no Brasil e em um outro país sobre o assunto a nível de Escola Básica.

1.1 Os parâmetros curriculares nacionais

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, os currículos de Matemática para o Ensino Fundamental devem contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e Álgebra), o estudo do espaço e das formas (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e das medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento), e a aprendizagem deve desenvolver-se de forma gradual e em diferentes níveis, supondo o estabelecimento de relações com conceitos anteriores. (PCN, 1996)

> "No 3º e 4º ciclo[1] alguns conceitos serão consolidados, uma vez que eles já vêm sendo trabalhados desde os ciclos anteriores, como o conceito de número racional. Outros serão *iniciados como* ***noções/idéias*** *que vão se completar e consolidar no ensino médio, como é o caso do conceito de número irracional"*. (grifado pelo autor)

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, os objetivos propostos para o Ensino Fundamental, referentes ao pensamento numérico são:

---

[1] O 3º e 4º ciclos correspondem à 5ª, 6ª 7ª e 8ª séries do ensino fundamental.

Objetivos de matemática para o 3º ciclo (5ª e 6ª séries)

> "Ampliação, construção de novos significados, operações e (...) com naturais, inteiros e racionais";
> "Compreensão da raiz quadrada e cúbica de um número, a partir de problemas como a determinação do lado de um quadrado de área conhecida ou da aresta de um cubo de volume dado";
>
> "Cálculos aproximados de raízes quadradas por meio de estimativas e fazendo o uso de calculadoras";
> "Obtenção de medidas por meio de estimativas e aproximações e decisão quanto a resultados razoáveis, dependendo da situação-problema".

Observa-se que os dois últimos objetivos sugerem, já neste nível, a introdução da noção de *quantidade.* Fica implícito que no momento em que os irracionais forem introduzidos este objetivo e conseqüente habilidade se manterá.

Objetivos de matemática para o 4º ciclo (7ª e 8ª séries)

Do pensamento numérico:

> "Ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais";
> "Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação";
> "Selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais".

Da competência métrica:

> "Ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as medidas, efetuar cálculos e aproximar os resultados de acordo com o grau de precisão desejável".

Confirma-se neste objetivo o que, a respeito do significado da quantidade, já estava "implícito" no nível anterior.

E, especificamente sobre o ensino dos números irracionais, é relevante destacar o que traz os Parâmetros Curriculares Nacionais para o 3º e 4º ciclos:

> "Ao longo do Ensino Fundamental o conhecimento sobre os números é construído e assimilado pelo aluno num processo em que tais números aparecem como instrumento eficaz para resolver determinados problemas, e também como objeto de estudo em si mesmo, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como historicamente foram constituídos".
> "Na perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de número, **é importante colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las: tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais.** Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente". (grifado pelo autor)

Ainda, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> "O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas "casas" decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros (...) Esse trabalho tem por finalidade, sobretudo, proporcionar contra-exemplos para ampliar a compreensão dos números".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que ao longo do estudo sobre racionais, os alunos devam perceber, através de situações-problema, a necessidade de outros números (além dos racionais), como a medida do comprimento da diagonal de um quadrado unitário. Neste momento, pode-se informar (ou indicar) a prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$.(PCN 1996).

É explicitado também nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> As formas utilizadas no estudo dos números irracionais têm se limitado, quase que exclusivamente, ao ensino do cálculo com radicais. O ensino tradicional dos irracionais têm pouco contribuído para que os alunos desenvolvam seu conceito.

Encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais nossas convicções sobre o ensino dos números irracionais e reais contempladas, coisa que não acontece ao analisarmos a maioria dos livros didáticos, conforme explicitamos no próximo capítulo. No entanto, chamou-nos a atenção o fato de que, em nenhum momento, nem nos Parâmetros

Curriculares Nacionais de 4º ciclo nem nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Ensino Médio, é mencionada a continuidade topológica dos números reais, que nos permite modelar e tratar fenômenos que envolvem grandezas contínuas, como muito ocorre na Física. Também em nenhum momento foi feita qualquer alusão à dificuldade de se operar com números irracionais (uma vez que os algoritmos usuais são inviáveis para números irracionais).

1.2 Os documentos norte-americanos

Segundo o National Council of Teachers of Mathematics de 1974, é interessante observar que muito pouco é mencionado sobre números reais neste texto, enquanto que naturais, inteiros e frações são freqüentemente e inesgotavelmente citados. Reproduzimos aqui, com tradução livre nossa, os parágrafos encontrados, indicando como são "pulados" os números irracionais e reais; na maior parte do tempo, mais do que evitados, são até ignorados. Quando, finalmente são mencionados, o são de forma pouco detalhada.

- Em *Números* e *Operações:* página 35, falando sobre números fracionários na etapa 6 a 8[2]

> O conhecimento e uso dos decimais devem estar bem assegurados antes de chegar-se aos níveis superiores. Com um sólido conhecimento de número, os alunos destes níveis podem utilizar variáveis que representem números, para fazer manipulações simbólicas significativas.

- Na página 36, logo depois de falar da passagem dos naturais para os inteiros.

> Na etapa 9-12[3], podem-se utilizar variáveis e funções para representar relações entre conjuntos de números e para ver as propriedades das diferentes classes de números. Ainda que nos níveis superiores se dê mais importância a outras áreas que à dos números, os alunos deveriam ver os conjuntos numéricos em uma perspectiva mais global. Deveriam aprender as diferenças entre eles e quais propriedades se observam e quais não ao passarmos de um conjunto a outro.

---

[2] Etapas 6 a 8 correspondem, no Brasil, aos três últimos anos de Ensino Fundamental.

[3] Etapas 9-12 correspondem, no Brasil, às três séries do Ensino Médio. Nos EUA tem-se quatro anos de Ensino Médio.

Temos um indício de que números reais só são introduzidos a partir da etapa 9 (que corresponde ao 1º ano do Ensino Médio, no Brasil) pela seguinte frase, dentro do item *Compreender os significados das operações e suas inter-relações*:

> Nos níveis 6-8, dever-se-ia dar a maior importância às operações com números racionais.
> (...)
> Nos níveis médios[4], os alunos precisam também aprender a operar com números inteiros. Na etapa 9-12, quando aprendem a combinar aritmeticamente vetores e matrizes, praticarão com outras classes de conjuntos nos quais aparecem números com propriedades e padrões novos.

- Na página 37, dentro de *Calcular com fluidez e fazer estimativas razoáveis*:

> Pré K-2[5]: compreensão dos naturais e das operações de adição e subtração. Ao final do nível 2, deveriam conhecer combinações básicas da adição e subtração e ter destreza na adição e subtração de duas quantidades.
> Níveis 3-5[6]: combinações numéricas básicas com respeito à multiplicação e à divisão, bem como desenvolver algoritmos para resolver problemas aritméticos com segurança e desembaraço, inclusive envolvendo números grandes. Desenvolver os conceitos de número racional, desenvolver e aplicar os métodos de cálculo com decimais.
> Níveis 6-8: desembaraço e segurança com os cálculos envolvendo racionais tanto na forma de fração quanto na forma de decimal.
> Níveis 9-12: (Pág. 294) devem operar com fluidez com números reais; devem comparar e contrastar as propriedades dos números e dos conjuntos numéricos, incluindo os números racionais e reais, e **compreender os números complexos como soluções de equações quadráticas que carecem de raízes reais.** (grifado pelo tradutor)

Observa-se que nada dizem sobre a dificuldade de se conceituar e se operar com os irracionais. Além disso, salientamos que a frase grifada por nós não coincide com os fatos históricos e nem pensamos que ela sirva para uma abordagem didática. Esta abordagem é reiterada adiante:

---

[4] Nível médio corresponde às etapas 6 a 8, ou, no Brasil 6ª, 7ª e 8ª séries.
[5] Pré K-2 corresponde, no Brasil, à 1ª e 2ª séries do Ensino Fundamental
[6] Níveis 3 a 5 correspondem, no Brasil, à 3ª, 4ª e 5ª séries.

- Na página 295 em *Números e Operações:*

> Na Escola Secundária[7], a compreensão de número é a base da compreensão da Álgebra, e a aquisição da fluidez operatória com símbolos se fundamenta na destreza com as operações numéricas. (...)
> **Deveriam utilizar números reais e aprender o suficiente sobre números complexos para interpretá-los como soluções de equações quadráticas** (...) (grifado pelo tradutor)

> A compreensão da ampliação dos conjuntos numéricos, dos naturais para os inteiros, destes para os racionais, dos racionais para os reais, e destes para os complexos deveria constituir uma base para seu trabalho em busca de soluções de certos tipos de equações. (...)
>
> Dado que, nos níveis médios, se deveria dar uma introdução aos números irracionais, os alunos da Escola Secundária teriam que desenvolver uma compreensão dos números reais. Deveriam entender que, dada uma origem e uma unidade de medida, todo ponto de uma reta corresponde a um número real e vice-versa. Deveriam compreender que os irracionais só podem ser aproximados por frações ou decimais finitos ou periódicos. Deveriam entender a diferença entre números racionais e irracionais. Seus conhecimentos destes últimos devem ir além de π e $\sqrt{2}$.

Nota-se que primeiro sugere-se a introdução de números como soluções de equações para depois expressar tais soluções como etiquetas de pontos na reta.

Chama-nos atenção também, que os poucos trechos que falam sobre números reais o fazem de maneira muito superficial e incompleta justificando a aprendizagem destes e sua ampliação para o Conjunto dos Números Complexos apenas na interpretação de soluções de equações, novamente sem nada mencionar sobre a história.

Percebe-se no parágrafo "(...) deveriam entender a diferença entre números racionais e irracionais (...) seus conhecimentos destes últimos devem ir além de π e $\sqrt{2}$ (...)" a única menção específica sobre os números irracionais.

[7] Escola secundária corresponde ao Ensino Médio

Observa-se também que apesar de sugerirem que os irracionais devam ser introduzidos aos alunos de “nível médio” (etapas 6 a 8), sugerem que os alunos da escola secundária (etapas 9 a 12) devam desenvolver uma compreensão de números reais, mas nada mencionam sobre irracionais ou reais neste nível, além do seguinte texto (página 224, níveis 6-8):

> A relação inversa existente entre os pares de operações adição-subtração e multiplicação-divisão, já conhecidas dos alunos por terem trabalhado com os naturais, pode ser estendida agora às frações, aos decimais e aos inteiros. E deveriam incluir um novo par: elevar ao quadrado-extrair a raiz quadrada. Nesta etapa, existem freqüentes ocasiões de utilizá-lo ao aplicar o Teorema de Pitágoras. Utilizando esta relação inversa, podem determinar a localização aproximada em uma reta numérica das raízes quadradas de números naturais, como por exemplo, de 27 e de 99.

Frente ao exposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais e nos Documentos Norte-americanos, percebe-se que os parâmetros curriculares nacionais apresentam, de forma muito mais clara e coerente, os objetivos e as especificidades quanto ao ensino dos números irracionais e reais na Escola Básica.

Observamos ainda que, apesar de no Brasil termos um ano a menos de Escola Básica do que nos EUA, sugere-se nos Parâmetros Curriculares Nacionais uma abordagem muito mais completa sobre números reais.

CAPÍTULO 2

QUESTIONÁRIOS-SONDAGEM
X
RESULTADOS

2.1 A escolha dos níveis

Com os objetivos de confirmar a situação-problema sentida em minhas salas de aula e tentar delinear o conhecimento do aluno de Escola Básica sobre números irracionais e reais, foram elaborados questionários-sondagem, a partir da análise dos objetivos do ensino dos números irracionais para os Ensinos Fundamental e Médio constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Os questionários foram aplicados durante o ano de 2006 em turmas de 7ª série do Ensino Fundamental e de 3º ano do Ensino Médio de escolas[1] públicas e privadas de Porto Alegre e Caxias do Sul e também na turma de calouros do curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS [2].

Escolhemos medir o progresso no assunto a nível introdutório (7ª série) e em fase de conclusão da Escola Básica (3º ano do Ensino Médio). Os questionários foram também aplicados em calouros do curso de Licenciatura em Matemática para testar se há alguma mudança no desempenho dos alunos que gostam de Matemática a ponto de escolherem este curso na Universidade.

---

[1]Não pretendemos que a escolha das escolas tenha caráter de *amostra*. Simplesmente os consideramos suficientes para ilustrar a problemática que estamos abordando

[2]Os questionários não foram aplicados direto pela pesquisadora e a participação dos alunos foi voluntária.

Participaram da pesquisa **254 alunos** dos quais **142** cursavam a 7ª série do Ensino Fundamental de 2 escolas públicas e 3 escolas privadas, **73** cursavam o 3º ano do Ensino Médio de 2 escolas públicas e 2 escolas privadas e **39** eram calouros do curso de Licenciatura em Matemática.

As tabulações foram separadas por séries e em escolas públicas e privadas, pois, conforme veremos, dentro do mesmo nível, houve diferença no desempenho dos alunos de escola pública comparado aos de escola privada. Salientamos aqui que a escolha de agrupar os resultados dos questionários em escolas públicas e privadas, analisando-os separadamente, não quer induzir a qualquer comparação e conclusão entre o ensino das mesmas, pois, os resultados obtidos com a análise, valem apenas para estas escolas e este grupo de alunos que participou da pesquisa, já que não houve preocupação de construção de amostras significativas da população escolar do país ou mesmo das cidades consideradas.

A seguir, apresentamos os questionários (incluindo abaixo de cada questão, os objetivos da mesma, para que estes fiquem claros ao leitor deste trabalho) seguidos da tabulação das respostas dadas pelos alunos.

2.2 Questionário aplicado na 7ª série do Ensino Fundamental

1) Escreva a representação decimal dos seguintes números:

a) $\frac{15}{20}$ **b)** $\frac{70}{33}$ **c)** $\frac{4}{7}$

Objetivo: Detectar se o aluno sabe que deve encontrar expansão finita ou infinita periódica, expressando isto com clareza: chegando até o período zero em (a), chegando até o período 12 em (b) e chegando até o período 571428 em (c), que só aparece na sexta casa decimal.

2) Escreva os seguintes números sob a forma de fração:

a) 2,75 **b)** 1,111... **c)** 0,5252...

Objetivo: Detectar se o aluno sabe transformar: no item (a) não temos dízima periódica, mas nos outros dois sim, no item (b) existe, inclusive, uma parte inteira.

3) Quais dos seguintes números podemos garantir que são racionais?

a) $\frac{2}{3}$ **b)** 0,1234567891011121314151617181920...

c) 0,32 **d)** π

e) 0,010101010101... **f)** 0,010101001000100001...

g) 0,01001

Objetivo: Até aqui, detectar se o aluno sabe que racional tem expansão infinita periódica.

h) $\sqrt{6}$

Objetivo: Detectar se o aluno tem a informação ou consegue intuir ou até calcular $\sqrt{6}$ *e concluir que é irracional.*

i) $1+\sqrt{6}$ **j)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$

Objetivo dos dois últimos itens: Detectar se o aluno sabe concluir sobre operações envolvendo irracionais

4) Que raciocínio você usou para responder os itens da questão 3 ?

Objetivo: Detectar se o aluno tem algum conhecimento ou se tudo foi chute.

5) Usando uma calculadora que pode apresentar no máximo 21 caracteres em seu visor e efetuando as operações abaixo, obtivemos os seguintes resultados.

a) $\frac{1}{3} = 0{,}3333333333333333333$ **b)** $\frac{16}{17} = 0{,}9411764705882352941$

c) $\sqrt{6} = 2{,}4494897427831780981$

Observando os resultados obtidos, podemos concluir que todos estes números são racionais? Podemos concluir que todos estes números são irracionais? Justifique.

Objetivo: Detectar se o aluno tem a noção das deficiências de uma calculadora e da impotência da mesma em decidir por nós, na grande maioria dos casos, se um número é ou não irracional.

6) Localize aproximadamente na reta numerada abaixo os números $1+\sqrt{6}$ e $2\sqrt{6}$

0 1 2 3 4 5 6

Objetivo: Detectar se o aluno sabe operar com irracionais (o valor de $\sqrt{6}$ já foi talvez calculado em questão anterior)

2.3 Tabulação dos resultados dos questionários aplicados em turmas de 7ª série

a) Desempenho dos 86 alunos de 2 escolas públicas

Questão→	1a	1b	1c	2a	2b	2c
Número de acertos na questão	$45/86$	$35/86$	$30/86$	$48/86$	$0/86$	$0/86$
Número de alunos que não responde ram	$5/86$	$9/86$	$8/86$	$17/86$	$57/86$	$55/86$

Comentários:

- Na questão 1 os erros mais comuns foram:
  a) 15,20 e 0,705 b) 70,33 e 2,12 c) 4,7 e 0,507

- Na questão 2 não souberam recuperar a fração que gerou a dízima e os que tentaram fazê-lo repetiram a regra usada para decimais finitos.

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

Questão→	3a	3b	3c	3 d	3e	3f	3g	3h	3i	3j
Número de acertos	$47/86$	$45/86$	$36/86$	$53/86$	$31/86$	$38/86$	$41/86$	$53/86$	$53/86$	$52/86$
Número de alunos que não respon-deram	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$

Comentários:

Apenas $17/86$,ou seja, 19,76 % dos alunos acertaram toda a questão 3, o restante cometeu erros do tipo:

- Assinalou todos os “infinitos”
- Assinalou só fração
- Assinalou só fração e decimais finitos
- Assinalou só os números dados por expansões decimais finitas

- Só não assinalou o π
- Assinalou somente fração e dízima periódica
- Assinalou somente as dízimas periódicas
- Assinalou todos
- Assinalou somente os números dados por expansões decimais

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

Obseravação: As respostas das questões 4 e 5 foram agrupadas pelo fato de, neste nível, não apresentarem diferença, ou pelo fato de ter sido respondida somente uma delas. Isto, possivelmente, mostra que os alunos:

- Não reconheceram a diferença entre as duas questões;
- Não atingiram o objetivo da questão 5 a respeito da calculadora;
- Não tiveram muito interesse em respondê-las.

Questão $\rightarrow$	**4 e 5**	**6** $(1+\sqrt{6})$	**6** $(2\sqrt{6})$
Número de acertos na questão	-	$19/86$	$19/86$
Número de alunos que não responderam	$36/86$	$49/86$	$49/86$

Comentários:

- Chamou-nos a atenção a resposta dada pelo aluno de nº 31: "*Na verdade, não sei o que é um número racional nem irracional. Mas acredito que estes números sejam irracionais, pois são números que parecem irreais e confusos*".

- *Respostas mais comuns:*
  - Racionais são frações
  - Fazendo a raiz quadrada
  - Racionais são finitos e infinitos periódicos
  - Fazendo os cálculos
  - Observando as regras
  - Os números se repetem ou não
  - Irracionais não têm fim
  - Se tiver raiz desconhecida é irracional
  - Irracionais, irreais e confusos.
  - Racionais são dízimas
  - Irracionais são infinitos e não periódicos
  - Racionais são dízimas periódicas e irracionais não
  - Racionais sempre terminam
  - Racionais são resultados de divisão
  - Racionais são exatos e irracionais não são exatos
  - Racional tem resultado exato e não quebrado
  - Racionais são números sem vírgula
  - Racionais dão um resultado completo (que não tem vírgula)

- Irracionais são impossíveis de se calcular
- Racionais têm lógica / seqüência
- Racionais são isentos de raiz quadrada
- Racionais são definidos (têm um final). Têm resultados concretos
- Racionais são comuns para mim, já trabalhei com eles.
- Calcular para deixar racional

b) Desempenho dos 56 alunos de 3 escolas privadas

Questão→	**1a**	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**
Número de acertos na questão	$43/56$	$46/56$	$38/56$	$45/56$	$0/56$	$44/56$
Número de alunos que não responderam	$1/56$	$1/56$	$1/56$	$8/56$	$8/56$	$8/56$

Comentários:

- Na questão 1 os erros mais comuns foram ocasionados por divisões mal feitas, como nos questionários da escola pública:

  a) 15,20 (2 alunos - os demais erraram a divisão e encontraram 0,705);

  b)70,33 (2 alunos - os demais efetuaram a divisão até a 2ª casa decimal e encontraram 2,12);

  c) 4,7 (2 alunos - os demais erraram a divisão e encontraram 0,507).

- Houve significativa diferença do percentual de acertos das questões 1 e 2 da escola privada para a pública:
  - Nas escolas privadas: 75,56% dos alunos acertaram a questão 1 e 80,35 % dos alunos acertaram a questão 2;

  - Nas escolas públicas: 42,63 % dos alunos acertaram a questão 1 e 55,81 % dos alunos acertaram a questão 2, sendo que esta última porcentagem refere-se a apenas a questão 2a, pois a 2b e a 2c não foram respondidas.

- O fato de alguns alunos terem ido até o 6º resto na divisão de 4 por 7 mostra que eles tinham a idéia de encontrar um período.

- Na questão 2 talvez o que justifique 0% de acertos na letra b e 78,6% de acertos na letra c seja o fato de os alunos terem usado a regra de forma equivocada, ignorando a parte inteira presente no decimal da letra b.

•O erro mais comum na letra 2b foi $11/9$.

•Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

Questão→	**3a**	**3b**	**3c**	**3 d**	**3e**	**3f**	**3g**	**3h**	**3i**	**3j**
Número de acertos na questão	$43/56$	$50/56$	$50/56$	$47/56$	$46/56$	$41/56$	$49/56$	$46/56$	$48/56$	$46/56$
Número de alunos que não respon deram	$3/56$	$3/56$	$3/56$	$3/56$	$3/56$	$3/56$	$3/56$	$3/56$	$3/56$	$3/56$

Comentários:

- O aumento no percentual dos alunos que acertaram toda a questão 3 foi muito relevante: $31/56$ = 55,35 % da escola privada contra $17/86$ = 19,76 % da escola pública.
- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.
- Os erros comuns mais cometidos pelos alunos foram:
  - Selecionaram $\frac{\sqrt{6}}{2}$, $1+\sqrt{6}$ e $\sqrt{6}$ como racionais.
  - Reconheceram as dízimas periódicas como irracionais.

Observação: Como nas escolas públicas, as respostas das questões 4 e 5 foram agrupadas pelo fato de, neste nível, não apresentarem diferença, ou pelo fato de ter sido respondida somente uma delas. Isto, possivelmente, mostra que os alunos:

- Não reconheceram a diferença entre as duas questões;

- Não atingiram o objetivo 5 a respeito da calculadora;
- Não tiveram muito interesse em respondê-las.

Questão →	**4 e 5**	**6a** ($1+\sqrt{6}$)	**6b** ($2\sqrt{6}$)
Número de acertos na questão	$8/56$	$41/56$	$42/56$
Número de alunos que não responderam	$43/56$	$7/56$	$7/56$

Comentários:

- O aumento no percentual dos alunos que acertaram a questão 6a e 6b, respectivamente, foi muito relevante: $^{41}/_{56}$= 73,21% e $^{42}/_{56}$=75% da escola privada contra $^{19}/_{86}$= 10,46 % e $^{19}/_{86}$= 10,46% da escola pública.

- 76,78 % dos alunos da escola privada e 41,86 % dos alunos da escola pública não responderam as questões 4 e 5.

- *Respostas mais comuns:*
    - Os números que se repetem e fração são racionais
    - Os irracionais são dízimas sem seqüência
    - e dízimas não periódicas
    - Racionais não aceitam dízimas não periódicas
    - Não eram π nem números diferentes
    - Ver se os números se repetiram ou não
    - Separei os irracionais, exemplo π
    - Algum número que tem vírgula e não dízima periódica
    - Naturais e fracionários são racionais
    - Que tem fração
    - Números inteiros, frações e dízimas.
    - Números com vírgula e que não têm mais fim

2.4 Questionário aplicado no 3º ano do Ensino Médio

Observação: As questões 7 e 8 **(grifadas em laranja)** foram acrescentadas em relação ao questionário da 7ª série.

1) Escreva a representação decimal dos seguintes números:

a) $\frac{15}{20}$ **b)** $\frac{70}{33}$ **c)** $\frac{4}{7}$

Objetivo: Detectar se o aluno sabe que deve encontrar expansão finita ou infinita periódica, expressando isto com clareza: chegando até o período zero em (a), chegando até o período 12 em (b) e chegando até o período 571428 em (c), que só aparece na sexta casa decimal.

2) Escreva os seguintes números sob a forma de fração:

a) 2,75 **b)** 1,111... **c)** 0,5252...

Objetivo: Detectar se o aluno sabe transformar: no item (a) não temos dízima periódica, mas nos outros dois sim, no item (b) existe, inclusive, uma parte inteira.

3) Quais dos seguintes números podemos garantir que são racionais?

a) $\frac{2}{3}$ **b)** 0,1234567891011121314151617181920...

c) 0,32 **d)** π

e) 0,010101010101... **f)** 0,010101001000100001...

g) 0,01001

Objetivo: Até aqui, detectar se o aluno sabe que racional tem expansão infinita periódica.

h) $\sqrt{6}$

Objetivo: Detectar se o aluno tem a informação ou consegue intuir ou até calcular $\sqrt{6}$ *e concluir que é irracional.*

i) $1+\sqrt{6}$ **j)** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Objetivo dos dois últimos itens: Detectar se o aluno sabe concluir sobre operações envolvendo irracionais

4) Que raciocínio você usou para responder os itens da questão 3 ?

Objetivo: Detectar se o aluno tem algum conhecimento ou se tudo foi chute.

5) Usando uma calculadora que pode apresentar no máximo 21 caracteres em seu visor e efetuando as operações abaixo, obtivemos os seguintes resultados.

a) $\dfrac{1}{3} = 0{,}3333333333333333333$ **b)** $\dfrac{16}{17} = 0{,}9411764705882352941$

c) $\sqrt{6} = 2{,}4494897427831780981$

Observando os resultados obtidos, podemos concluir que todos estes números são racionais? Podemos concluir que todos estes números são irracionais? Justifique.

Objetivo: Detectar se o aluno tem a noção das deficiências de uma calculadora e da impotência da mesma em decidir por nós, na grande maioria dos casos, se um número é ou não irracional.

6) Localize aproximadamente na reta numerada abaixo os números $1+\sqrt{6}$ e $2\sqrt{6}$

0 1 2 3 4 5 6

Objetivo: Detectar se o aluno sabe operar com irracionais (o valor de $\sqrt{6}$ *já foi talvez calculado em questão anterior)*

7) Podemos garantir que a diagonal de um retângulo que tem para medidas do seu comprimento e largura números inteiros é sempre um número inteiro? É sempre um número racional? (Estamos aqui considerando sempre a mesma unidade de medida)

Objetivo: Detectar se o aluno tem idéia de que raiz quadrada de inteiros que não são quadrados perfeitos são números irracionais. Espera-se aqui que ele não tenha dificuldades de aplicar o Teorema de Pitágoras.

8) Você conhece outros números que não sejam nem racionais nem irracionais? Em caso afirmativo apresente um (ou alguns) exemplo(s).

Objetivo: Verificar se o aluno conhece números complexos e sabe, entre eles, identificar que os imaginários não são reais.

2.5 Tabulação dos resultados dos questionários aplicados em turmas de 3º ano do Ensino Médio

a) Desempenho dos 40 alunos de 2 escolas públicas

Questão→	1a	1b	1c	2a	2b	2c
Número de acertos	33/40	28/40	30/40	34/40	8/40	2/40
Número de alunos que não respon-deram	1/40	1/40	1/40	2/40	14/40	14/40

Comentários:

- Em termos de escola pública, a questão 1a melhorou bastante, 82,5% de acertos no Ensino Médio contra 52,32% no Ensino Fundamental.

- Assim como no Ensino Fundamental, os erros mais cometidos pelos alunos, na questão 1 foram ocasionados durante o algoritmo da divisão.

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

Questão→	3a	3b	3c	3 d	3e	3f	3g	3h	3i	3j
Número de acertos na questão	29/40	23/40	25/40	22/40	12/40	13/40	23/40	22/40	17/40	20/40
Número de alunos que não respon-deram	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40

Comentários:

- O percentual de alunos do 3º ano de escola pública que acertaram toda a questão 3 foi de 10%. Dado este, consideravelmente menor, comparado à 7ª série da escola privada 55,35% e semelhante a 7ª série da escola pública 19,76 %.
- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

Obseravação: Como nos tabulamentos anteriores, as respostas das questões 4 e 5 foram agrupadas pelo fato de, na escola pública, não apresentarem diferença, ou pelo fato de ter sido respondida somente uma delas. Isto, possivelmente, mostra que os alunos:

- Não reconheceram a diferença entre as duas questões;
- Não atingiram o objetivo 5 a respeito da calculadora;
- Não tiveram muito interesse em respondê-las.

Questão $\rightarrow$	**4 e 5** (anotações relevantes)	**6** $(1+\sqrt{6})$	**6** $(2\sqrt{6})$
Número de acertos na questão	$5/40$	$6/40$	$5/40$
Número de alunos que não responderam	$28/40$	$29/40$	$30/40$

Comentários:

- O percentual de alunos do Ensino Médio de escola pública que deixaram questões em branco aumentou consideravelmente em relação a 7ª série da escola pública: no Ensino Médio 70 % dos alunos deixaram as questões 4 e 5 em branco e na 7ª série 48,86%.

- *Respostas mais comuns:*
    - O produto resulta num número inteiro.
    - Todos são irracionais (não são inteiros)
    - Irracionais, pois não têm fim.
    - Racionais são finitos e dízimas
    - Irracionais são infinitos e sem período
    - Racionais são frações

Questões 7 e 8:

- Apenas um aluno respondeu as questões 7 e 8. Sua resposta foi:

    - Sim, pois a hipotenusa resultará da soma dos catetos elevados ao quadrado.
    - Número complexo (2+3i)

b) Desempenho dos 33 alunos de 2 escolas privadas

Questão→	1a	1b	1c	2a	2b	2c
Número de acertos na questão	$31/33$	$33/33$	$30/33$	$31/33$	$0/33$	$0/33$
Número de alunos que não respon deram	$0/33$	$0/33$	$0/33$	$1/33$	$1/33$	$1/33$

Comentários:

- 100% dos alunos não souberam recuperar a geratriz dos números com representação infinita e apenas um destes não soube recuperar a geratriz do número com representação finita. O erro cometido pela maioria deles foi usar a mesma regra para ambos os casos.

- Houve um melhor desempenho nas questões 1 e 2a por parte dos alunos do 3º ano das escolas privadas: 94,94% acertaram estas questões; no 3º ano das escolas públicas houve 75,83% de acertos. Na 7ª série das escolas privadas, em média, 75,56% dos alunos acertaram a questão 1 e 80,35 % acertaram a questão 2. Na 7ª série das escolas públicas 42,63 % e 55,81 % dos alunos acertaram estas questões.

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

Questão→	3a	3b	3c	3 d	3e	3f	3g	3h	3i	3j
Número de acertos na questão	$28/33$	$27/33$	$31/33$	$16/33$	$11/33$	$28/33$	$27/33$	$27/33$	$30/33$	$28/33$
Número de alunos que não respon-deram	$0/33$	$0/33$	$0/33$	$0/33$	$0/33$	$0/33$	$3/33$	$0/33$	$0/33$	$0/33$

Comentários:

- Na questão 3 houve um melhor desempenho dos alunos do Ensino Médio das escolas privadas, (considerando alunos que acertaram 7 ou mais itens de 10) em relação aos alunos do Ensino Médio das escolas públicas: 84,84% contra 45% .

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

Questão →	**4**
Número de acertos na questão	$^{12}/_{33}$
Número de alunos que não responderam	$^{2}/_{33}$

Comentários:

- Percebeu-se um empenho maior em responder a questão 4 por parte dos alunos da escola privada: apenas 6,06% deixaram esta questão em branco.

- *Respostas mais comuns:*
    - Números que podem ser escritos sob forma de fração e as dízimas
    - Todas as dízimas
    - Números que podem ser divididos em frações
    - Racionais são todos os que têm final definido
    - Racionais finitos
    - Irracionais infinitos
    - Números após a vírgula, finitos ou previsíveis. Dízimas periódicas
    - Racionais, fração e finitos.
    - Têm que ser inteiro não decomposto.
    - Número que posso pensar e contar, são finitos.
    - Que têm raiz quadrada

Questão→	**5**	**6** $(1+\sqrt{6})$	**6** $(2\sqrt{6})$
Número de acertos na questão	$^{14}/_{33}$	$^{18}/_{33}$	$^{18}/_{33}$
Número de alunos que não responderam	$^{10}/_{33}$	$^{15}/_{33}$	$^{15}/_{33}$

Comentários:

- 30,30% dos alunos mencionaram a limitação da calculadora, coisa que não aconteceu com os alunos do Ensino Fundamental e nem com os alunos do Ensino Médio das escolas públicas;

Questão 7

- Sim, é sempre racional (ou inteira): $8/33$
- Não responderam: $9/33$

Comentários:

- Na questão 7 houve um melhor desempenho dos alunos da escola privada em relação aos da escola pública: 48,48 % contra 2,5%.

Questão 8

- Sim, números irreais: $2/33$ (sem exemplo).
- Sim, números complexos: $19/33$ (com exemplos).
- Não: $2/33$
- Não responderam: $9/33$ (os mesmos da questão anterior)

Comentários:

- Na questão 8 houve um melhor desempenho dos alunos da escola privada em relação aos da escola pública: 57,57% contra 2,5%

2.6 Questionário aplicado aos calouros da Licenciatura em Matemática

As questões 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 18 **(grifadas em vermelho)** foram acrescentadas em relação ao questionário do Ensino Médio. As questões 2b e 2c trocaram de lugar e a questão 3 teve seu enunciado alterado.

1) Escreva a representação decimal dos seguintes números:

a) $\frac{15}{20}$ **b)** $\frac{70}{33}$ **c)** $\frac{4}{7}$

Objetivo: Detectar se o aluno sabe que deve encontrar expansão finita ou infinita periódica, expressando isto com clareza: chegando até o período zero em (a), chegando até o período 12 em (b) e chegando até o período571428 em (c), que só aparece na sexta casa decimal.

2) Escreva os seguintes números sob a forma de fração:

a) 2,75 **b)** 0,525252... **c)** 1,111...

Objetivo: Detectar se o aluno sabe transformar: no item (a) não temos dízima periódica, mas nos outros dois sim, no item (c) inclusive existe uma parte inteira.

3) Quais dos seguintes números podemos garantir que são racionais?

a) $\frac{2}{3}$ ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

b) 0,1234567891011121314151617181920... (listagem encadeada de todos os números naturais)

( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

c) 0,32 ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

d) π ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

e) 0,010101010101... (continua a lei de formação de ir-se intercalando 0's e 1's)

( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

f) 0,010101001000100001... (continua a lei de formação de ir-se aumentando em uma unidade a quantidade de zeros entre duas unidades consecutivas)

( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

g) 0,01001 ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

Objetivo: Até aqui, detectar se o aluno sabe que racional tem expansão infinita periódica.

h) $\sqrt{6}$ ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

Objetivo: Detectar se o aluno tem a informação ou consegue intuir ou até calcular $\sqrt{6}$ *e concluir que é irracional*

i) $1+\sqrt{6}$ ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

j) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

Objetivo dos dois últimos itens: Detectar se o aluno sabe concluir sobre operações envolvendo irracionais.

4) Cite alguns fatos/raciocínios você usou para responder os itens da questão anterior.

Objetivo: Detectar se o aluno tem algum conhecimento ou se tudo foi chute.

5) Usando uma calculadora que pode apresentar no máximo 21 caracteres em seu visor e nela efetuando as operações indicadas, obtivemos os seguintes resultados.

a) $\frac{1}{3} = 0{,}33333333333333333333$ **b)** $\frac{16}{17} = 0{,}94117647058823529 41$

c) $\sqrt{6} = 2{,}4494897427831780981$

Observando estes resultados, podemos concluir que todos estes números são racionais? Podemos concluir que todos estes números são irracionais? Justifique.

Objetivo: Detectar se o aluno tem a noção das deficiências de uma calculadora e da impotência da mesma em decidir por nós, na grande maioria dos casos, se um número é ou não irracional.

6) O número *1- O,999...* é maior, menor ou igual a zero?

Objetivo: Detectar se o aluno sabe que 1= O, 999..., e analisar a reação dos que não sabem, frente a um algoritmo da diferença que agora é ineficaz.

7) Localize aproximadamente na reta numerada abaixo os números $1+\sqrt{6}$ e $2\sqrt{6}$

0	1	2	3	4	5	6

Objetivo: Detectar se o aluno sabe operar com irracionais (o valor de $\sqrt{6}$ *já foi talvez calculado em questão anterior)*

8) Existe algum número racional entre 2/3 e 3/4? Quem? Quantos, ao todo?

Objetivo: Detectar se o aluno tem idéia de que os racionais formam um conjunto denso.

9) Existe algum número irracional entre 2/3 e 3/4? Quem? Quantos, ao todo?

Objetivo: Detectar se o aluno tem idéia de que os irracionais formam um conjunto denso.

10) Podemos garantir que a diagonal de um retângulo que tem para medidas do seu comprimento e largura números inteiros é sempre um número inteiro? É sempre um número racional? (Estamos aqui considerando sempre a mesma unidade de medida de comprimento). Justifique brevemente.

Objetivo: Detectar se o aluno tem idéia de que raiz quadrada de inteiros que não são quadrados perfeitos são números irracionais. Espera-se aqui que ele não tenha dificuldades de aplicar o Teorema de Pitágoras.

11) Uma barra de giz[3] de comprimento *c* é quebrada em dois pedaços. Podemos garantir que os comprimentos de ambas as partes são números racionais?

Objetivo: Detectar se o aluno tem idéia de que os irracionais também servem para medir, ou, de outro modo, que os racionais não medem qualquer coisa, Ou ainda, que "existem irracionais cuja soma pode até ser um inteiro, por exemplo".

[3] Depois de aplicado o questionário, demo-nos conta, sobre a questão 11, de que a barra de giz não foi a melhor escolha. Sugerimos que no futuro ela seja substituída por um arame sendo cortado por um "alicate ideal". (Neste caso, o alicate tem a propriedade de cortar o arame em um único ponto).

12) Entre todos os círculos de diâmetros iguais a 1, 2, 3, 4, 5, etc., podemos garantir que existe pelo menos um cuja circunferência é um número inteiro? Em caso afirmativo, é possível dizermos qual?

Objetivo: Detectar se o aluno sabe: i) a fórmula da circunferência; ii) que π é irracional, isto é, que não é 3,14; iii) operar com irracionais.

13) Comente, quanto à correção, o seguinte raciocínio:

Sabemos que se um círculo tem perímetro c e diâmetro de comprimento d, então $\frac{c}{d} = \pi$. Portanto π é um número racional.

Objetivo: Este é um erro comum entre os alunos: argumentar que π é sim racional porque é quociente entre dois números. Pretende-se então aqui verificar se este aluno também tem este ponto de vista.

14) Considere um círculo de circunferência c e diâmetro d. Com estas medidas, construímos um retângulo de lados c e d. Pergunta-se: é possível subdividir este retângulo em pequenos quadrados, todos de mesmo tamanho (isto é, de mesma área), de modo a obtermos um número inteiro de quadrados preenchendo todo o retângulo, sem sobreposições?

Objetivo: Este é um erro comum entre os alunos: argumentar que π é sim racional porque é quociente entre dois números. Pretende-se então aqui verificar se este aluno também tem este ponto de vista.

15) O que afinal é um número irracional?

Objetivo: Captar o que existe de correto na idéia do aluno sobre número irracional.

16) Cite uma razão que ilustre a importância e/ou necessidade dos números reais.

Objetivo: Captar o que existe de correto na idéia do aluno sobre a necessidade de números irracionais.

17) Você conhece outros números que não sejam nem racionais nem irracionais? Em caso afirmativo, apresente um (ou alguns) exemplo(s).

Objetivo: Verificar se o aluno conhece números complexos e sabe exemplificar com complexos que não são reais.

2.7 Tabulação dos resultados dos questionários aplicados nos calouros do Curso de Licenciatura em Matemática

Desempenho dos 39 alunos

Questão→	1a	1b	1c	2a	2b	2c
Número de acertos na questão	34/39	6/39	9/39	32/39	20/39	16/39
Número de alunos que não responderam	0/39	2/39	2/39	2/39	14/39	15/39

Comentários:

- Os erros mais comuns nas questões 1a, 1b e 1c foram ocasionados por divisões mal feitas: muitos alunos encontraram zeros pelo meio. Este erro já foi constatado nas outras séries analisadas.
  Na questão 1a o desempenho se manteve, na questão 1b foram 100% de acertos para o Ensino Médio das escolas privadas, 70% de acertos para o Ensino Médio das escolas públicas e 15,38% de acertos para os calouros. Na questão 1c foram 90,90% de acertos para o Ensino Médio das escolas privadas, 75% de acertos para o Ensino Médio das escolas públicas e 23,07% de acertos para os calouros.

- A questão 2c dos calouros que corresponde à questão 2b do Ensino Médio apresentou melhora: 41,02% de acertos dos calouros contra 20% de acertos o Ensino Médio das escolas públicas e 0% de acertos o Ensino Médio das escolas privadas, mas ainda o desempenho está baixo para os futuros profissionais da Matemática.

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

Questão→	3a	3b	3c	3d	3e	3f	3g	3h	3i	3j
Número de acertos na questão	29/39	22/39	30/39	27/39	23/39	23/39	17/39	21/39	23/39	20/39
Número de alunos que não responderam	1/39	4/39	0/39	3/39	4/39	6/39	4/39	2/39	3/39	4/39

Comentários:

- Nas questões 3d (referente ao π), houve melhora significativa dos calouros em relação ao Ensino Médio, respectivamente, 69,23% contra 48,48% das escolas privadas e 55% das escolas públicas.

- Acertaram toda a questão 3: 12,82 % dos calouros, 10% dos alunos do Ensino Médio das escolas públicas e 0% dos alunos de Ensino Médio das escolas privadas.

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

Questão 4

- o Para ser racional o número pode ser escrito na forma de fração;
- o Números com dízimas periódicas podem ser representados na forma de fração, por isso são racionais, enquanto que os que não possuem dízimas e tendem o infinito são irracionais;
- o Dízima não é racional;
- o Racionais são números que não incluem imaginários;
- o Números cujas casas depois da vírgula são finitas / infinitas periódicas / infinitas e não periódicas são racionais / racionais / irracionais;
- o Se não puder se expressar na forma de fração é irracional;
- o Se o número, quando na forma calculada, apresenta ou não periodicidade (mas não argumentou nada nem apresentou os cálculos de 3h, 3i, 3j);
- o Seqüência lógica de números (o que o levou a responder que a constante de champernowne é racional);
- o Se apresentar período é racional (e se não apresenta "nada podemos garantir");
- o Números racionais são representados por todas as frações exatas possíveis;
- o Com números muito grandes como dízimas não consigo fazer tal cálculo, portanto não encontro a resposta;
- o O infinito é irracional (sendo coerente em não saber recuperar a fração em 2(b) e 2(c) e afirmando que 3(e) não é racional);
- o Fração der resultado inteiro = racional; fração der resultado não inteiro = irracional (sendo coerente ao dizer que $2/3$ não é racional);
- o Procurei enxergar o número, de uma maneira que ele tivesse fim, considerei irracionais as dízimas periódicas e os números sem qualquer regra de formação. (sendo coerente ao dizer que $2/3$ é irracional);
- o Racionais são todos os números que podem ser escritos sob a forma de fração (e marcou que π e $\sqrt{6}$ são racionais!);
- o Seqüência lógica e não saber como descobrir o $\sqrt{6}$ (marcou que nada podemos garantir sobre o $\sqrt{6}$);
- o Todos os números que apresentam "vírgula" e que também são "infinitos" (sendo coerente com a marcação de $2/3$ e também 0,010101... serem irracionais);

- Analisei se existe um padrão que se repete (e, portanto champernowne é racional).
- Ser racional=limitação de casas decimais e dízimas periódicas; ser irracional=não há regularidade nas casas decimais (e praticamente só não soube recuperar a fração);
- Poder ou não transformar-se em fração(mas não soube reconhecer os irracionais) e dízima periódica não são racionais (sendo incoerente ao recuperar corretamente a fração em 2(b) e 2(c));
- Considerei raízes com resultado não inteiro irracionais (e não teve oportunidade de errar alguma questão porque não apresentamos, por exemplo, $\sqrt{9/4}$);
- Números finitos são racionais (o que o levou a marcar que 2/3 é racional, mas também $\sqrt{6}$ e $1+\sqrt{6}$, enquanto "não sabe" se 0,0101010... é ou não racional);
- Dízima periódica é racional, mas não sei se $\sqrt{6}$ é racional ou não.

Comentários:

- Comparando com as questões anteriores, percebeu-se que os alunos identificaram periódico com fração, mas não souberam recuperar a fração. Outros souberam recuperar a fração de uma dízima simples menor do que 1, mas não souberam recuperar de uma dízima simples com parte inteira maior ou igual a 1.

Questão →	**5** (abordou a questão calculadora?)
Número de acertos na questão	$22/39$
Número de alunos que não responderam	$1/39$

Comentários:

- Na questão: abordou a questão calculadora?, as respostas mais comuns foram:

- Não, apenas mencionou o arredondamento em (b)
- Sim, no item (b), apesar de racional, não apareceu a periodicidade
- Sim (não foram utilizados todos os dígitos, logo são racionais)
- Sim (não temos a garantia de que existe um período)
- Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
- Não e concluiu que (b) é irracional
- Não sei
- Não e disse apenas que (a) é irracional
- Não, todos irracionais porque não são inteiros.
- Não, todos são racionais.
- Sim e disse que "calculadora não demonstra dízimas, e, portanto só podemos supor que os números são irracionais".

- o Sim conclusões corretas (inclusive “arredondamento”)
- o Sim mas concluiu que todos são irracionais por não apresentarem “divisão exata”
- o Sim mas concluiu que todos são irracionais porque nenhum deles é raiz de número negativo.

- 3 alunos sugeriram que sendo (a) periódico, é irracional, pois “dízima não tem fim”.
- Chamou-nos a atenção que $^{12}\!/_{39}$ = 30,76% dos calouros responderam que no item (b) tínhamos um irracional, por sua expansão não apresentar período.

- Houve melhor desempenho dos alunos calouros no quesito “dar-se conta da limitação da calculadora”: 56,41 % dos alunos calouros abordaram a questão calculadora contra 30,30 % do Ensino Médio das escolas particulares.

Questão→	**6**	**7**	**8a**	**8b**	**9a**	**9b**
Número de acertos na questão	Igual: $^{8}\!/_{39}$ Maior: $^{25}\!/_{39}$ Menor: $^{3}\!/_{39}$ Não sei: $^{2}\!/_{39}$ Tende a zero: $^{1}\!/_{39}$	$^{25}\!/_{39}$	$^{9}\!/_{39}$	$^{12}\!/_{39}$	$^{3}\!/_{39}$	$^{12}\!/_{39}$
Número de alunos que não respon-deram	$^{1}\!/_{39}$	$^{2}\!/_{39}$	$^{24}\!/_{39}$	$^{22}\!/_{39}$	$^{30}\!/_{39}$	$^{27}\!/_{39}$

Comentários:

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

- Na questão 6, o percentual de acertos foi muito baixo (20,51%), tendo em vista o conhecimento que eles podiam ter de soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica .

- Na questão 7, houve muito mais respostas do que no Ensino Médio. No entanto, vários foram marcados E porque marcaram $2+\sqrt{6}$ ao invés de $2\sqrt{6}$. Pensamos que isso não tenha sido puramente distração!

- Nas questões 8 e 9, chamou-nos a atenção da quantidade de alunos, praticamente 30,76%, que acha que são infinitos mas não consegue dar um exemplo sequer.

Questão→	10	11	12
Respostas corretas com argumentações corretas (com palavras)	$8/39$	$22/39$	$9/39$
Respostas corretas com argumentações corretas (com contra-exemplo)	$7/39$		
Respostas corretas com argumentações erradas	$2/39$		$4/39$
Número de alunos que não justificaram ou não responderam	$14/39$	$4/39$	$9/39$

Comentários:

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.
- Na questão 10 percebeu-se que nem sempre respostas corretas proporcionaram justificativas corretas.
- Observamos que responder corretamente a questão 10 (inclusive com a justificativa correta), não é garantia de saber responder a questão 11.

Questão →	13
Respostas corretas com argumentações corretas	$5/39$
Respostas corretas com argumentações razoáveis	$20/39$
Número de alunos que não responderam	$14/39$

Comentários:

- Na questão 13, surpreendeu-nos os comentários por não sustentarem nenhuma resposta.
- *Respostas mais comuns:*
    - O comprimento da circunferência é um número aproximado
    - Falso, pois π é irracional.
    - A circunferência tem que ser divisível pelo diâmetro

- Não sei se existe situação em que numerador é múltiplo do denominador
- O cálculo está incorreto
- *C* e *d* são racionais
- Atribuiu valores inteiros
- Não podemos afirmar
- Um fato não justifica o outro
- Inteiro
- Raciocínio correto (coerente com sua resposta 3d)

Questão→	**14**	**15**
Número de acertos **- Com justificativa correta:** **- Sem justificativa:**	$3/39$ $8/39$	
Número de alunos que não responderam	$12/39$	$13/39$

Comentários:

- A grande maioria deixou a questão 14 em branco ou respondeu, sem justificar, “sim” ou “não”.

- $7/39$, ou seja, 17,94% dos alunos definiram irracional como um número que não pode ser expresso na forma de fração, sem se dar conta dos números complexos, dos quais já deveriam ter notícia (e, de fato, têm: veja questão 17).

- *Respostas mais comuns na questão 15:*

- Números que não podem ser representado na forma de fração; os números de casas decimais tendem ao infinito.
- Números dizimais
- São números imaginários
- Números que não pode ser representado na forma de fração
- Números reais não racionais, todas as dízimas aperiódicas são irracionais, número de Euler, pi.
- Número que não pode ser representado na forma de fração que se colocado na forma decimal não representa uma seqüência lógica
- Número que não pode ser representado na forma de fração de inteiros com denominador não nulo
- Número que não apresenta periodicidade em sua dízima
- Inclui raízes inexatas
- Número na forma decimal, em que não há uma seqüência de repetição de números.

- Divisão de números inteiros, com resultados de números inteiros.
- Números que quando divididos apresentam uma seqüência indefinida de decimais
- Aqueles que ficam separados dos decimais. Ex: pi e as raízes não exatas
- Número cuja regularidade das casas decimais não está bem definida
- Não tem soma, multiplicação, divisão e demais operações exatas.
- Pi, raízes, número sem dízima periódica.

Questão →	**16**	**17**
Número de acertos na questão	$7/39$	$23/39$
Número de alunos que não responderam	$22/39$	$1/39$

Comentários:

- Na questão 16, apesar de várias questões terem tratado de medidas irracionais, apenas 3 alunos apresentaram respostas relevantes, mencionando medida.

- Na questão 17, percebeu-se que os alunos conhecem números complexos e reconhecem os imaginários como não reais.

- *Respostas mais comuns:*
  - Áreas e volumes
  - Dinheiro
  - Gráficos
  - “O mundo lá fora não é discreto”
  - Facilidade de calcular com reais
  - Contagem, ordenação e falta.
  - Sem eles não existe a matemática
  - Cálculos. Quantidade de alimento/habitante
  - **Medida**
  - Cálculos: escalas
  - Computação
  - **Medida** / temperatura

2.8 Comparação dos resultados dos questionários entre os diversos níveis

Analisando os questionários em geral, comprova-se o problema exposto na introdução: *a dificuldade dos alunos frente à compreensão e emprego do número real, mais precisamente, do número irracional.*

Pouco sabem acrescentar sobre os números irracionais, nem mesmo selecionar dentre uma lista de números quais são irracionais e quais não são irracionais. Comprovamos isto na tabulação dos resultados dos questionários aplicados: apenas 19,76 % dos alunos da escola pública e 55,35 % dos alunos da escola privada que cursavam a 7ª série do Ensino Fundamental, souberam, na questão 3, classificar corretamente **todos** os números apresentados em racionais ou irracionais. No Ensino Médio, 10 % dos alunos da escola pública fizeram corretamente esta classificação, percentual este consideravelmente menor comparado com o da 7ª série da escola privada. Nenhum aluno do Ensino Médio, das escolas privadas que participou da amostra, classificou corretamente **todos** os números apresentados, mas o percentual de acertos foi maior comparado ao Ensino Médio das escolas públicas: considerando alunos que acertaram 7 ou mais itens de 10, tivemos 84,84% de acertos nas escolas privadas contra 45% nas escolas públicas.

Outros fatos importantes constatados são destacados a seguir:

- Os alunos da escola privada aparentemente se dedicaram mais em responder as questões do que os alunos da escola pública;
- Na rede pública, o percentual de alunos do Ensino Médio que deixaram questões em branco aumentou consideravelmente em relação ao da 7ª série: 70% dos alunos do Ensino Médio e 41,86 % dos alunos da 7ª série deixaram as questões 4 e 5 em branco;

- Os erros mais freqüentes na questão 1 foram ocasionados durante o algoritmo da divisão. Este erro foi constatado em todas as séries analisadas e muitas vezes envolvia o acréscimo incorreto de zeros no quociente;
- Apenas 3,55 % dos alunos que participaram da amostragem (275 ao total), souberam recuperar a geratriz dos números com representação finita e infinita. Dentre estes, a maioria soube recuperar a fração de uma dízima simples menor do que 1, mas não soube recuperar de uma dízima simples com parte inteira maior ou igual a 1;
- Houve significativa diferença no percentual de acertos das questões 1 e 2 da escola privada para a pública dentro de um mesmo nível;
- O aumento no percentual de acertos dos alunos da 7ª série que acertaram a questão 6a e 6b foi muito relevante: aproximadamente 75 % da escola privada contra e 22 % da escola pública;
- Houve um aumento percentual nos acertos da escola privada nas questões 1a e 1b da 7ª série para o Ensino Médio, o que não aconteceu na escola pública;
- Em termos de escola pública, referente ao Ensino Médio, a questão 1a melhorou bastante;
- Houve um melhor desempenho nas questões 1 e 2 por parte dos alunos do Ensino Médio das escolas públicas em relação aos alunos do Ensino Fundamental;
- Houve um melhor desempenho na questão 3 dos alunos do Ensino Médio das escolas privadas do que públicas;
- Na questão 7 do questionário do Ensino Médio houve um melhor desempenho dos alunos da escola privada em relação aos alunos das escolas públicas: 48,48 % de acertos contra 2,5% de acertos;

- Na questão 8 do questionário do Ensino Médio houve um melhor desempenho dos alunos da escola privada em relação aos alunos das escolas públicas: 57,57% contra 2,5% de acertos;
- 30,30 % dos alunos do Ensino Médio das escolas privadas mencionaram a limitação da calculadora, coisa que não aconteceu no Ensino Fundamental e nem no Ensino Médio das escolas públicas;
- Os alunos calouros identificaram periódico com fração, mas não souberam recuperar a fração. Parece-nos então que este assunto não é mais abordado na Escola Básica;
- Os calouros não apresentaram melhor desempenho na questão 2a do que o Ensino Médio, a questão 2b apresentou um desempenho levemente melhor comparado ao Ensino Médio e a questão 2c apresentou boa melhora em relação ao Ensino Médio, porém este desempenho continua baixo para futuros profissionais da Matemática;
- Na questão 6 do questionário dos calouros, o percentual de acertos dos alunos calouros foi muito baixo (20,51%), tendo em vista o conhecimento que eles podiam ter de soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica e da regra (erradamente aplicada neste caso) de recuperação da fração geratriz da dízima periódica;
- Nas questões 8 e 9 do questionário dos calouros, chamou-nos a atenção da quantidade de alunos calouros (30,76%) que têm a idéia da densidade mas não consegue dar um exemplo;
- Na questão 10 do questionário dos calouros, percebeu-se que nem sempre respostas corretas dos calouros proporcionaram justificativas corretas;

- Na questão 16 do questionário dos calouros, apesar de várias questões terem tratado de medidas irracionais, apenas três alunos calouros apresentaram respostas relevantes, mencionando sempre medida;
- Em geral, pode-se afirmar que os alunos do Ensino Médio das escolas privadas e os calouros reconhecem números complexos/imaginários como não reais.

A partir da análise feita, percebe-se a defasagem conceitual dos alunos [3], quando se trata de temas que envolvam números reais. Percebe-se também que aparentemente não está mais sendo trabalhada nas escolas destes alunos, a transformação de decimal para fração, principalmente quando o decimal tem expansão decimal infinita, e infere-se que isto é a nível de Escola Básica.

Também se observa que não há uma diferença considerável dos alunos do Ensino Médio para aqueles que estão ingressando no curso de Licenciatura em Matemática e, portanto, gostar de Matemática não está sendo suficiente para garantir um bom conhecimento sobre números reais.

[3] Estas conclusões valem para o grupo de alunos que respondeu aos questionários, uma vez que não houve preocupação em construção de amostras representativas da população escolar do país ou mesmo das cidades consideradas.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DE ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS APROVADOS PELO MEC

Analisando alguns livros[1] de Matemática da 7ª série do Ensino Fundamental, todos aprovados pelo MEC, comprova-se a situação descrita na Introdução sobre o Ensino dos Números Irracionais/Reais: nos livros brasileiros analisados, geralmente o que se encontra é:

- Número irracional definido como sendo um número cuja representação decimal é infinita e não periódica, pressupondo, portanto, a existência de outros números, contrário a uma orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (veja página 16);
- O exemplo $\sqrt{2}$ apresentado sem a demonstração de sua irracionalidade sendo, portanto, induzido que a sua expansão decimal seja a descrita na definição.

A seguir, para confirmar a descrição acima, destacamos alguns textos extraídos de livros didáticos atualmente aprovados pelo MEC e adotados nas Escolas, servindo de âncora para muitos professores trabalharem em sala de aula. A título de comparação, apresentamos também, com tradução livre nossa, um livro adotado na Alemanha (veja [W]), em nível de 9ª. série (que equivale ao nosso primeiro ano do Ensino Médio), omitindo alguns parágrafos que julgamos não essenciais para o que queremos salientar em nossa análise. Fazemos também alguns comentários que julgamos pertinentes.

---

[1] Não pretendemos que a escolha dos livros didáticos tenha caráter de *amostra*. Simplesmente os consideramos suficientes para ilustrar a problemática que estamos abordando.

3.1 Textos e comentários relativos a livros de Ensino Fundamental

3.1.1 Livros didáticos de 7ª série

Texto 1:

Neste texto pertencente à Unidade 1, intitulada "Conjuntos Numéricos", os capítulos 1, 2, 3 e 4 tratam de Números Naturais, Números Inteiros, Números Racionais e Representação dos Números Racionais, respectivamente.

5. NÚMEROS IRRACIONAIS

Há números cuja forma decimal é infinita, mas não é periódica. É o caso de $\sqrt{2}$. Para determinar a $\sqrt{2}$, devemos encontrar o número que elevado ao quadrado dá 2.

Veja como Carla pensou:

$1^2 = 1$

$2^2 = 4$

Ela conclui que $\sqrt{2}$ é um número decimal entre 1 e 2.

$1 < \sqrt{2} < 2$

- "*Use uma calculadora para conferir os cálculos de Carla*".

Aí experimentou:

$1{,}4^2 = 1{,}96$

$1{,}5^2 = 2{,}25$

Concluiu que $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

Experimentou mais uma vez:

$1{,}41^2 = 1{,}9881$

$1{,}42^2 = 2{,}0164$

Concluiu que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

Com mais algumas etapas ela poderia encontrar:

$1{,}414213562^2 = 1{,}999999999$

$1{,}414213563^2 = 2{,}000000002$

E concluiu que $1{,}414213562 < \sqrt{2} < 1{,}414213563$

Carla poderia prosseguir indefinidamente nessa aproximação, pois a representação decimal de $\sqrt{2}$ tem infinitas casas decimais e não é periódica.

Você se lembra da Luísa, que efetuava divisões de números inteiros na calculadora para descobrir se o quociente seria sempre um número decimal finito ou uma dízima periódica? Pois aqui vai a resposta: ele pode insistir a vida inteira. A representação decimal de números racionais é sempre da forma finita ou periódica.

- *"Mas então, se* $\sqrt{2}$ *é um número cuja representação decimal não é finita nem periódica...".*

- *"Podemos concluir que* $\sqrt{2}$ *não é um número racional"!*

Então $\sqrt{2}$ não é um número racional, não pode ser escrito na forma de fração.

No século III a.C. um grande matemático chamado Euclides mostrou isso:

$\sqrt{2}$ *é um número irracional*

Os matemáticos mostraram também que existem infinitos números irracionais. Por exemplo, as raízes quadradas dos números primos:

Os matemáticos gregos antigos acreditavam que muitos dos problemas podiam ser resolvidos com números inteiros e números racionais.

No entanto, por volta de 400 a.C., resolvendo problemas geométricos, eles descobriram números não eram inteiros e também não podiam ser usados na forma de razão entre números inteiros. Isso os abalou muito: que tipo de números eram aqueles?

Acredita-se que a descoberta desses números, que eles chamaram de "inexprimíveis" e que hoje chamamos de números irracionais, tenha sido mantida em segredo durante certo tempo.

- *"Eu cheguei num número irracional: 2,1011121314151617 18... Ele terá infinitas casas decimais sem repetição. Você percebeu como foi que eu o encontrei"?*

Todos os números irracionais formam um conjunto que recebe o nome *Z.*

- *"Mas como vamos trabalhar com os números irracionais se eles têm infinitas casas decimais e não conseguimos escrevê-las"?*

- *"Podemos aproximar usando um número racional de acordo com nossa necessidade. Por exemplo:* $\sqrt{2}$ *= 1,41".*

6. PI: UM NÚMERO IRRAIONAL

Trace com um compasso um círculo de 5 cm de diâmetro em uma cartolina e recorte-o.

Contorne-o com linha grossa. Meça o comprimento da linha, obtendo o comprimento da circunferência do círculo. Anote-o.

Repita o procedimento para um círculo de 10 cm de diâmetro e um círculo de 15 cm de diâmetro.

Chamando o diâmetro de "*d*" e o comprimento da circunferência de "*C*", calcule o quociente $\frac{C}{d}$ para cada círculo, preenchendo em seu caderno uma tabela como esta:

d(cm)	***c(cm)***	$\frac{C}{d}$
5		
10		
15		

Você deve ter obtido nos três casos $\frac{C}{d} \approx 3$. Este símbolo significa aproximadamente igual.

Dizemos aproximadamente igual porque no século XVII provou-se que este quociente constante é um número irracional.

Ele é representado pela letra grega π ("lê-se pi") que é a inicial da palavra "contorno" em grego.

π tem infinitas casas decimais e não apresenta período.

$\pi = 3{,}14159265...$

Se $\frac{C}{d} =$, π então C = π.d

Podemos calcular a medida *C*, do comprimento de uma circunferência de diâmetro *d*, fazendo $C = \pi.d$, como $d = 2r$ então $C = 2r.\pi$

De acordo com nossas necessidades, usaremos aproximações racionais para π. Por exemplo: $\pi = 3{,}14$.

Comentários ao Texto 1:

Observa-se aqui que o autor já parte da existência de números irracionais e do fato de eles admitirem uma expansão decimal e apresenta como exemplo o número $\sqrt{2}$. Em nenhum momento pretende-se comprovar para o aluno que $\sqrt{2}$ é um número irracional. Tenta-se apenas, via calculadora, se obter a expansão decimal de $\sqrt{2}$ e afirma-se: "Carla poderia prosseguir indefinidamente nesta aproximação, pois a representação decimal de $\sqrt{2}$ tem infinitas casas decimais e é não periódica".

Na página seguinte comenta-se apenas que um "grande matemático" mostrou que $\sqrt{2}$ não é um número racional, sugerindo a impossibilidade de se fazer esta prova com os alunos (veja no capítulo 5 como esta prova foi trabalhada por nós com alunos de 8ª série), pois parece que as provas da irracionalidade de raiz de número primo só podem ser realizadas /repetidas por matemáticos.

A resposta do professor à relevante pergunta da aluna "Como vamos trabalhar com os números irracionais se eles têm infinitas casas decimais e não conseguimos escrevê-las?" é incoerente com o que se faz em geral nos livros didáticos: a 7ª série, basicamente se trabalha com uma aproximação para o número π; na 8ª série, trabalha-se excessivamente com o cálculo de radicais.

Finalmente, após definido número irracional, aparece como exemplo de aplicação o número π ligado ao cálculo do comprimento de uma circunferência e à área de um círculo. Neste momento, depois de sugerir uns cálculos práticos, o autor conclui dizendo: "Você deve ter obtido, nos três casos, $\frac{C}{d} \approx 3$", este quociente *constante* (ao invés de *"é constante"* o que faz muita diferença!), é um número irracional denotado por π . Logo a seguir, afirma: "De acordo com nossas necessidades, usaremos aproximações racionais para π", e passa a escrever π =3,14; ao invés de π ≈ 3,14, para deixar implícita a irracionalidade.

Texto 2:

Neste livro encontramos praticamente a mesma linha de raciocínio do texto anterior: o texto é parte da Unidade 3, intitulada como "Os Números Reais" e que inicia abordando números racionais e sua representação decimal para depois abordar os números irracionais. No fim do capítulo, acrescenta um resumo, mostrando que novamente não é priorizada a construção do número real e sim a memorização da definição.

Em resumo:

Número racional é todo número cuja representação decimal é sempre finita ou infinita e periódica. Exemplos:

$3/10 = 0,3$

$1/3 = 0,3333...$

$7/5 = 1,4$

$22/9 = 2,4444...$

$43/20 = 2,15$

$37/11 = 3,363636...$

Número irracional é todo o número cuja representação decimal é sempre infinita sem ser periódica. Exemplos:

$\sqrt{2} = 1,4142135...$

2,110110011000...

$\sqrt{10} = 3,1622776...$

3,141592...

Texto 3:

Este texto pertence à Unidade 4 do livro, intitulada "Estudo de potências e raízes" e inicia sua abordagem com os números racionais e na seqüência aborda os números irracionais.

NÚMEROS IRRACIONAIS

Joana estava fazendo uma pesquisa pela internet para a aula de matemática quando achou o seguinte:

"Os antigos matemáticos gregos já sabiam que alguns problemas não podiam ser resolvidos com os números racionais".

Com o tempo, surgiu a necessidade de um outro tipo de número.

Que número será esse? (pensou Joana).

Na aula seguinte, ela foi falar com Neide, sua professora de Matemática.

- *"Existe algum número que não seja racional"?*

- *"Sim, alguns são chamados números irracionais". Com certeza, você já conhece muitos deles.* Examine esses exemplos.

O quociente da medida do comprimento de qualquer circunferência pelo dobro da medida do raio é um número irracional chamado pi ; $\pi = 3{,}1415...$

As raízes quadradas não-exatas de números naturais são também números irracionais. Veja, por exemplo, $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} = ?$

$1^2 = 1$ (menor que 2) $2^2 = 4$ (maior que 2)

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1 e 2.

$(1{,}4)^2 = 1{,}96$ (menor que 2) $(1{,}5)^2 = 2{,}25$ (maior que 2)

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1,4 e 1,5.

$(1{,}41)^2 = 1{,}9881$ (menor que 2) $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$ (maior que 2)

Logo, $\sqrt{2}$ está entre 1,41 e 1,42.

Se continuarmos o processo, não chegaremos nem a um decimal exato nem a uma dízima periódica. Escrevemos assim:

$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$

$\sqrt{2}$ é um número irracional.

As reticências indicam que as casas decimais continuam indefinidamente.

Comentário ao texto 3:

Neste texto os números irracionais aparecem como “por acaso”. Comenta-se superficialmente a *necessidade histórica* dos números irracionais, mas não diz quando, nem onde e nem o problema que motivou a descoberta dos irracionais, e logo após segue, no cálculo da expansão decimal de $\sqrt{2}$, como os demais livros.

Texto 4:

Este texto inicia sua abordagem com: 1. Números racionais, 2. Formas de representação, e, na seqüência, aborda os números irracionais.

NÚMEROS IRRACIONAIS

Com os dois quadrados é possível formar um novo quadrado. Imagine como recortá-los para realizar a montagem.

A = 1 cm^2 A = 1 cm^2

Qual é a medida do lado do novo quadrado? $\sqrt{2}$

A raiz quadrada de um quadrado perfeito é um número natural. E a raiz quadrada de um número natural qualquer também é um número natural? Quanto é $\sqrt{2}$?

Podemos calcular quanto é $\sqrt{2}$ por aproximações:

$\sqrt{1} = 1$; porque $1^2 = 1$

$\sqrt{2} = 2$, porque $2^2 = 4$

$1{,}1^2$	**$1{,}2^2$**	**$1{,}3^2$**	**$1{,}4^2$**	**$1{,}5^2$**
1,21	1,44	1,69	1,96	2,25

$1{,}41^2$	**$1{,}42^2$**
1,9881	2,0164

Ultrapassou o 2

$1{,}411^2$	**$1{,}412^2$**	**$1{,}413^2$**	**$1{,}414^2$**	**$1{,}415^2$**
1,990921	1,993744	1,996569	1,999396	2,00225

$1{,}4141^2$	**$1{,}4142^2$**	**$1{,}4143^2$**
1,9996788	1,9999616	2,0002444

Prosseguindo as aproximações, encontraremos: $\sqrt{2}$ = 1,4142135... $\sqrt{2}$ não é um decimal exato, pois tem infinitas casas decimais. Também não é uma dízima periódica.

Então, o número $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma de fração, ou seja, não é um número racional. $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Os **números irracionais** têm infinitas casas decimais não–periódicas e, portanto, não podem ser expressos na forma de fração.

Exemplos:

São números irracionais:

0,181188111888...

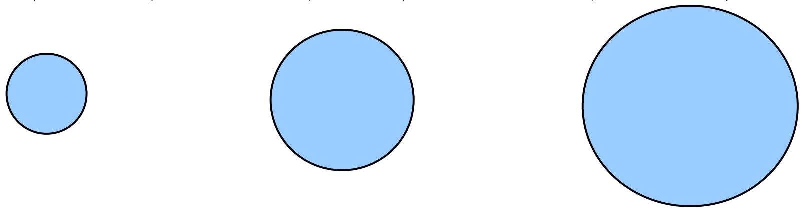
6,232232223...

-4,282992102112...

NÚMERO PI

Observe três circunferências. Cada uma delas tem um comprimento.

C_1 (r=0,5 cm) C_2 (r=1 cm) C_3 (r = 1,5 cm)



Calculando a razão entre o comprimento e a medida do diâmetro de cada circunferência numa mesma medida de comprimento, temos:

$C_1 = \dfrac{3,1}{1} = 3,1$ $\qquad$ $C_2 = \dfrac{6,27}{2} = 3,135$ $\qquad$ $C_3 = \dfrac{9,43}{3} = 3,14333...$

Se calcularmos essa razão para qualquer circunferência, encontraremos sempre um número aproximadamente igual a 3,14.

Esse número, obtido pela divisão da medida do comprimento da circunferência pela medida do seu diâmetro, é chamado **pi.**

O símbolo do pi é π

$$\pi = 3,14159265...$$

Como π tem infinitas casas decimais e não há um período que se represente, ele é um número irracional.

NÚMEROS IRRACIONAIS NA RETA NUMÉRICA

É possível traçar um segmento com a medida $\sqrt{2}$, mesmo que o número $\sqrt{2}$ tenha infinitas casas decimais não-periódicas.

Para representar essa medida na reta numérica, podemos utilizar algumas construções geométricas e traçar na reta o ponto correspondente a essa medida.

Em outros casos, quando não conhecemos um artifício geométrico para traçar a medida exata, partimos para a aproximação.

$\sqrt{3} = 1,732050.....$ $\Longrightarrow$ $\sqrt{3} \approx 1,73$

$-\sqrt{7} = -2,645751.....$ $\Longrightarrow$ $\sqrt{7} \approx -2,65$

Comentário ao Texto 4:

Percebe-se que, da mesma maneira que os textos anteriores, os alunos são apenas informados sobre a expansão decimal do número $\sqrt{2}$. Na seqüência, dedica-se o texto ao número π que, precisamente, não é definido, pois é verdade que os números 3,1; 3,135 e 3,14333 são todos aproximadamente iguais a 3, 14; mas absolutamente eles não são iguais entre si, a ponto de o leitor se convencer de que é constante o quociente entre o comprimento da circunferência pelo comprimento do seu diâmetro. Ou seja, novamente os alunos são informados sobre a irracionalidade de um número cuja existência sequer foi tornada clara.

Salientamos neste texto um diferencial comparado aos anteriores: Note que, o autor usa aproximações (não usando o símbolo de igualdade!) para alguns irracionais (deixando claro que se trata de aproximações), e também faz construções na reta de ponto correspondente a irracionais.

Texto 5:

Nos textos analisados, números reais aparecem logo após números irracionais, e na maioria deles, o conjunto dos Números Reais é definido pela união dos números racionais e irracionais, nada mais mencionando além de exemplos. Chama-nos atenção que (exceto em um livro analisado) em nenhum deles é comentada a dificuldade de se operar com números irracionais; apenas, é comentado superficialmente que é possível efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão (exceto por zero) e extração da raiz quadrada de números positivos no Conjunto dos Reais.

Juntamos aqui algumas continuações dos textos anteriores:

Texto 5.1: (Continuação do Texto 1)

NÚMEROS REAIS

Vimos que todos os números naturais e todos os números inteiros são números racionais.

Juntando os números racionais e os números irracionais num único conjunto, obtemos o conjunto dos números reais, que é denotado por R.

São exemplos de números reais:

2; -1698; $\frac{3}{8}$; $\frac{-1}{15}$; 0,47; -3,555....; $\sqrt{17}$; 0

OS NÚMEROS REAIS E AS OPERAÇÕES

A soma de dois números reais é um número real.

Isso também vale para o produto e a diferença de dois números reais.

Excetuando a divisão por zero, que continua a não existir em *R*, o quociente de dois números reais é um número real.

Em *R* também podemos extrair a raiz quadrada de qualquer número positivo.

No entanto, a raiz quadrada de um número negativo não é um número real, pois todo número real elevado ao quadrado é positivo.

- "Subtrações do tipo 5 - 9 não tinham solução no conjunto N. No conjunto Z, eles podem ser efetuados".

- "E no conjunto dos números reais podemos trabalhar com $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$, π *e outros números que não são números racionais".*

- "Divisões do tipo $\frac{3}{4}$ *não tinham resultado no conjunto N e no conjunto Z. No conjunto Q elas podem ser efetuadas".*

- "Eu achei legal perceber que novos tipos de números foram sendo criados para representar e resolver questões que os números já existentes não podiam resolver"!

Comentário ao Texto 5.1:

O autor faz uma afirmação relevante e diferenciadora dos textos já mencionados, incluindo as afirmações da ilustração, como por exemplo, que a soma de dois números reais ainda é um número real. Mas obviamente o aluno leitor do texto ficará se perguntando: como encontramos este resultado? Em nossa opinião, ele poderia ter aproveitado a oportunidade e ter ilustrado, pelo menos com um exemplo, como isto é feito.

Texto 5.2: (Continuação do Texto 2)

OS NÚMEROS REAIS

A organização dos campos numéricos continuou. A união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais resultou um novo campo: o conjunto dos números reais, representados por *R*.

Assim, são números reais:

3; -12; $2/7$; $-9/10$; 0,45; -2,06; 2,6666.....; -0,13131313......; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{10}$; 1,020020002...; π.

Como podemos notar, os conjuntos numéricos *N*, *Z*, *Q* e o conjunto dos números irracionais são subconjuntos de *R*.

As propriedades operatórias válidas no conjunto dos números racionais também são válidas no conjunto dos números reais.

Operações com números reais.

Nos conjuntos numéricos já estudados *N*, *Z*, *Q* e irracionais, vimos que há certas limitações em relação a algumas operações. Por exemplo:

No conjunto *N* nem sempre é possível efetuar uma subtração, uma divisão, ou extrair uma raiz quadrada exata.

No conjunto *Z*, a divisão e a extração da raiz quadrada exata nem sempre podem ser efetuadas.

No conjunto *Q*, não é possível calcular um número que representa $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{20}$, por exemplo.

No conjunto *R* dos números reais, é possível efetuar qualquer adição, subtração, multiplicação e divisão com números reais (exceto divisão por zero), bem como extrair a raiz quadrada de qualquer número positivo.

Vale lembrar que a raiz quadrada de um número negativo não representa um número real. Isso porque nenhum número real elevado ao quadrado dá como resultado um número negativo. Então, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-\frac{1}{4}}$ e $\sqrt{-0{,}36}$, por exemplo, não representam números reais.

Vejamos algumas operações com números reais.

1) Calcule com aproximação de até a 1ª casa decimal, o produto de $2\sqrt{7}$.

$\sqrt{7} \approx 2{,}6$

$2\sqrt{7} \approx 2.2{,}6 \approx 5{,}2$

Portanto, o valor procurado para esse produto é aproximadamente 5,2.

2) Calcule o valor da expressão $\sqrt{2^6} + \sqrt{3^4}$

(...)

3) Com valores aproximados até a 2ª casa decimal, calcule $\sqrt{11} - \sqrt{5}$

(...)

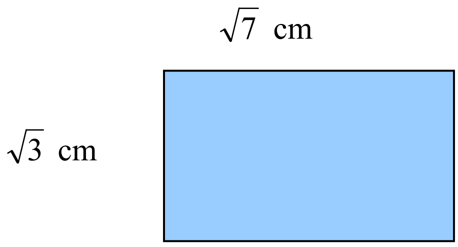
Comentário ao Texto 5.2:

Nos exemplos utilizados pelo autor, já poderia ter sido comentada a noção de erro, muito presente ao trabalharmos com aproximações.

Este autor inclui de forma relevante o cálculo de raízes, deixando clara a aproximação e o grau de precisão, o que o diferencia dos textos já mencionados. No entanto, ao abordar as operações, o faz apenas utilizando radicais. É criticável a omissão da dificuldade em se operar com irracionais na forma decimal.

Texto 5.3: (continuação do Texto 4)

NÚMEROS REAIS



$\sqrt{3} = 1{,}7320508...$

$\sqrt{7} = 2{,}6457513...$

Como calcular a área aproximada desse retângulo?

Multiplicação de números irracionais

Já estamos acostumados a operar com os números racionais. Como seria operar com os números irracionais?

Resolução geométrica com aproximação.

Contando a quantidade de quadradinhos de área 0,01 cm^2, temos:

(...)

A = 2 + 1 + 1 + 0,42

A = 4,42 cm^2

Cálculo aproximado com uma operação:

Aproximação para segunda casa decimal:

$\sqrt{3} \rightarrow 1{,}73$

$\sqrt{7} \rightarrow 2{,}65$

1,73 x 2,65 = 4,5845

A = 4,5845 cm^2

(...)

Desafio:

Um tatuzinho de jardim estava participando de um rali. Ele estava no ponto de partida (vértice A de um cubo unitário) e tinha de passar pelas bandeirinhas e voltar ao ponto de partida. Indique o menor caminho que o tatuzinho poderá fazer. Qual é a medida desse percurso? (...)

Adição de números irracionais.

Vamos calcular $\sqrt{7} + \sqrt{3}$.

Resolução geométrica:

(...)

Resolução por aproximação:

$$\begin{array}{r} 2{,}65 \\ +\ 1{,}73 \\ \hline 4{,}38 \end{array}$$

Propriedades da adição e multiplicação de números reais.

As propriedades válidas para a adição e a multiplicação de números racionais também são válidas para essas operações com números reais.

* Propriedade associativa

Para quaisquer 3 números reais x, y e z:

(x+y) + z = x + (y+z) e (x.y) . z = x . (y.z)

* Propriedade da existência do elemento neutro.

Para qualquer número real x:

0 + x = x + 0 = x e 1 . x = x . 1 = x

* Propriedade comutativa.

Para quaisquer 2 números reais x e y:

x + y = y + x   e   x . y = y . x

* Propriedade da existência do elemento oposto

Para qualquer número real x:

Existe -x, tal que x + (-x) = 0

* Propriedade da existência do elemento inverso

Para qualquer número real x, como x ≠ 0:

Existe 1/x, tal que x . 1/x = 1

* Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

Para quaisquer 3 números reais x, y e z:

x . (y + z) = x . y + x . z

Potenciação de números irracionais

1) Quanto é $\left(\sqrt{2}\right)^2$?

$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2}.\sqrt{2}$

Resolvendo geometricamente:

(...)

$\sqrt{2}.\sqrt{2}$ é igual a área do quadrado de lado $\sqrt{2}$.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2}.\sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$$

2) Quanto é $\left(\sqrt{5}\right)^2$?

$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{5}.5$

(...)

Comentário do texto 5.3:

Percebe-se aqui também a preocupação do autor com as operações com números irracionais, fato este que esteve presente em apenas dois dos livros analisados.

Um fato não presente nos livros anteriores é a lista das *propriedades das operações com reais*, aqui colocada de modo excessivo, uma vez que discussões anteriores à lista de propriedades foram omitidas, tais como "Como se opera com dois reais escritos na forma decimal"?

3.1.2 Livros didáticos de 8ª série

Observando alguns livros de Matemática de 8ª série aprovados pelo MEC, observa-se uma exploração quase que exclusiva de cálculo com radicais. Bem relevante é aqui destacarmos e relembrarmos que os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que se evite a identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais (PCN, 1998) justamente o contrário do que se faz em grande parte dos livros didáticos de 8ª série por nós analisados.

Como fechamento da unidade destinada ao estudo dos radicais, a maioria dos livros observados traz uma lista de atividades que vem comprovar a ênfase dada nas operações com radicais.

A seguir apresentamos alguns textos analisados que comprovam o exposto acima.

Texto 6

Este texto é extraído do capítulo 1 intitulado como "Potências e raízes", e trata de potenciação e suas propriedades, cálculo da raiz de um número real, propriedades dos radicais, simplificação de radicais, operações com radicais e racionalização de denominadores.

CÁLCULO DA RAIZ DE UM NÚMERO REAL

Vamos observar o cálculo de algumas raízes conhecidas:

$\sqrt{16} = 4$, pois $4 > 0$ e $4^2 = 16$

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$; pois $\frac{1}{3} > 0$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$\sqrt{25} = 5$; pois $5 > 0$ e $5^2 = 25$

Veja que definimos $\sqrt{a} = b$ se e somente se $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $b^2 = a$

A raiz quadrada de um número a, positivo ou nulo, é um número b, positivo ou nulo, tal que $b^2 = a$.

O conceito já adotado de que $\sqrt{4} = \pm 2$ ou $\sqrt{16} = \pm 4$ foi descartado pelos matemáticos, pois isso conduzia, algumas vezes, a dificuldades e até a erros. Já para as raízes cúbicas temos:

$\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$

Quando o índice é ímpar, a raiz tem sempre uma só solução.

$$\sqrt[3]{a} = b, \text{ se e somente se } b^3 = a$$

Por extensão, para qualquer n natural e $n \geq 2$, temos:

* para n par:

$\sqrt[n]{a} = b$ se e somente se $b^n = a$

* para n ímpar:

$\sqrt[n]{a} = b$ se e somente se $b^n = a$

Na expressão $\sqrt[n]{a} = b$, temos:

$\sqrt{\ }$ $\Rightarrow$ radical

n $\Rightarrow$ índice do radical

a $\Rightarrow$ radicando

b $\Rightarrow$ raiz enésima

Veja alguns exemplos:

$\sqrt{25} = 5, \Rightarrow \quad 5^2 = 25$

$\sqrt[3]{27} = 3, \Rightarrow \quad 3^3 = 27$

(...)

Como os símbolos $\sqrt[1]{a}$ e $\sqrt[a]{a}$ não se enquadram em nenhuma das definições dadas, dizemos que $\sqrt[1]{a}$ e $\sqrt[a]{a}$ não tem sentido matemático.

PROPRIEDADES DOS RADICAIS

Vamos examinar as propriedades operacionais dos radicais. Elas valem sempre que forem obedecidas as definições dadas inicialmente.

1ª propriedade

Observe as igualdades:

$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{+4} = +2$

$-\left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{+4} = +2$

Isso mostra que temos sempre $\sqrt{a^2} = |a|$

Ou seja:

A raiz quadrada de a para qualquer $a \in R$, é igual ao módulo de a.

Generalizando, temos:

* para n par: $\sqrt{a^n} = |a|$

* para n ímpar: $\sqrt{a^n} = a, \ \forall a \in R$

Assim:

$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 2$

$\left(\sqrt{-4}\right)^2 = -4$

$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

(...)

2ª Propriedade

Observe as igualdades:

$\sqrt{4.9} = 6$ (I)

$\sqrt{4}.\sqrt{9} = 6$ (II)

Igualando I e II, temos $= \sqrt{4.9} = \sqrt{4}.\sqrt{9}$

Generalizando, para $a \geq 0$ e $b \geq 0$, temos: $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

A raiz enésima de um produto a . b é igual ao produto das raízes enésimas dos fatores, se $a \geq 0$ *e* $b \geq 0$.

(...)

Comentário ao Texto 6:

Neste primeiro texto, observa-se que o autor usa de forma equivocada os termos *"conceito" e "convenção",* não fazendo distinção entre eles. Deveria inicialmente ter discutido a utilidade de uma convenção para o símbolo $\sqrt{}$ para depois anunciar o que está grifado (itálico).

E também apresenta um erro quando afirma que $\sqrt[1]{a}$ "não tem sentido matemático porque não se enquadra em nenhuma das definições dadas". $\sqrt[1]{a}$ está sim bem definida e vale a.

Percebe-se na segunda página que o autor mostra um exemplo numérico de cada propriedade e logo em seguida generaliza uma afirmação inteira. Seria interessante que ele mencionasse que a generalização (expressa pela propriedade) não é constatada por um exemplo e sim a partir de uma demonstração que inclua todos os possíveis casos.

Texto 7

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Os números irracionais possuem infinitas casas decimais e não apresentam período.

Dividir por um número irracional é trabalhoso quanto não se dispõe de uma calculadora.

Por exemplo:

$$\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\underset{\downarrow}{1{,}414213562}} = 7 : 1{,}414213562$$

Usamos uma aproximação para $\sqrt{2}$.

Podemos evitar essas divisões encontrando uma divisão equivalente à divisão original, que não tenha número irracional como divisor.

$$\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{7.\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{..........}$$

Quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo número diferente de zero, o quociente não se altera.

Então: $$\frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{...............}$$

Essa divisão tem divisor racional e vale o mesmo que a divisão original.

Comentário ao Texto 7:

Aqui o autor passa a idéia muito errada de que todo número irracional pode ser expresso na forma de radicais, ao substituir uma expressão decimal de um irracional pela $\sqrt{2}$.

Texto 8:

Esta lista de exercícios vem comprovar a ênfase dada por alguns autores no cálculo dos radicais.

Exercícios:

(...)

11) Transforme num único radical e, quando possível simplifique:

a) $\sqrt{2}.\ \sqrt{2} =$

b) $\sqrt[3]{5}\ .\ \sqrt[3]{5}\ .\sqrt[3]{5} =$

(...)

l) $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2y^3}}$

(...)

12) Sabendo que $\sqrt{2}$ = 1,41 (aproximadamente) e $\sqrt{3}$ = 1,73 (aproximadamente) calcule:

a) $\sqrt{8}$

b) $\sqrt{12}$ (...)

13) Determine os valores desconhecidos:

a) $\sqrt{4x} = \sqrt{4}.\sqrt{5}$

b) $\sqrt[x]{81} = 3$

(...)

h) $3\sqrt{5} = \sqrt{a}$

14) Qual o valor de x, tal que $\sqrt[12]{3^8}.\sqrt[12]{3^x} = 3$?

15) Qual é maior: $\sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2^5}$ ou $\sqrt[9]{2^7}$?

(...)

17) Qual o valor numérico da expressão $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}$ quando x = 80 e y = 10?

(...)

20) Simplifique as expressões (suponha que as letras representam números reais positivos).

a) $\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5}$

(...)

d) $3\sqrt{5}\left(1 - 2\sqrt{5} + \sqrt{125}\right)$

(...)

Texto 9:

Nesta coleção analisada, o conteúdo “números irracionais” é desenvolvido somente no livro de 8ª série. O texto que aqui apresentamos é parte integrante do capítulo 1 intitulado “Revisitando os conjuntos numéricos”, que aborda os seguintes tópicos: números naturais, múltiplos, união e intersecção de conjuntos, números inteiros, equações em *N* e *Z*, conjuntos enumeráveis, números racionais, equações solúveis em Q, conjuntos ordenados, representação dos números racionais, números irracionais e enfim números reais. O capítulo 2 é dedicado ao número pi.

NÚMEROS IRRACIONAIS

Há números cuja representação é um decimal infinito e não-periódico.

Um dos primeiros desses números a ser descoberto pelos matemáticos é o que expressa a $\sqrt{2}$.

No século VI a.C., os matemáticos admitiam os números inteiros positivos. As frações eram tratadas como razões entre números inteiros.

Porém, um problema colocou essas concepções em crise. Os matemáticos verificaram que o lado do quadrado e a sua diagonal não admitem uma unidade de medida comum, ou seja, não existe uma unidade de medida que caiba um número exato de vezes no lado do quadrado e na sua diagonal. Considere um quadrado cujo lado mede 1. Pelo teorema de Pitágoras, sua diagonal mede $\sqrt{2}$. Mas $\sqrt{2}$ não pode ser expressa como uma razão entre segmentos com medidas inteiras.

Hoje, sabe-se que $\sqrt{2}$ é um exemplo de um número cuja representação decimal é infinita e não-periódica. Como esse número não pode ser representado por uma razão de números inteiros, ele não é um número racional.

Dizemos, então, que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

(...)

Atribui-se a Euclides de Alexandria, século III a.C., uma prova de que o número $\sqrt{2}$ não é racional. Euclides supôs que $\sqrt{2}$ pudesse ser representado por uma razão entre números inteiros. Segundo essa hipótese, ele chegou a um resultado absurdo.

Dos pitagóricos até nossos dias, passando por Euclides, muitas questões sobre números irracionais foram levantadas.

“Quantos são os números irracionais: Como representá-los?”

“Que números são racionais? Como se distribuem?”

Hoje, encontramos resposta para a maior parte de questões como essas.

Sabemos que:

- Os irracionais são infinitos.

- A expansão decimal dos irracionais é infinita e não-periódica.

- Podemos estabelecer uma correspondência entre os pontos de uma reta e os números irracionais.

Está provado que $\sqrt{p}$ é um número irracional sempre que p for um número primo.

São irracionais:

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, (...), \sqrt{13}, ...$

Como o conjunto de números primos é infinito, temos aqui um subconjunto infinito de números irracionais.

Uma vez que é impossível escrever as infinitas casas decimais de um número irracional, o que se pode fazer é aproximá-lo de um número irracional. Você pode encontrar aproximações racionais de um número irracional com o auxílio de uma calculadora.

Uma aproximação com 7 casas decimais de $\sqrt{2}$ pode ser obtida de maneira simples:

" - Teclando 2 e $\sqrt{\ }$ na calculadora....."

" - aparece no visor o número 1.4142136"

" - Teclando em seguida $\boxed{X}$ $\boxed{=}$ "

" - .... aparece no visor o número 2.0000001, que é maior que 2."

Quando teclamos $\boxed{X}$ $\boxed{=}$ nessa última operação, calculamos $(1{,}4142136)^2$.

Isso prova que $(1{,}4142136)^2 > 2$, ou seja, 1,4142136 é uma aproximação por excesso de $\sqrt{2}$.

" - Então, vamos teclar na calculadora 1,4142135 $\boxed{X}$ $\boxed{=}$."

" - que equivale a $(1{,}4142135)^2$"

Então, $(1{,}4142135)^2 < 2$, ou seja, 1,4142135 é uma aproximação por falta de $\sqrt{2}$.

Portanto:

$(1{,}4142135)^2 < 2 < (1{,}4142136)^2$

$1{,}4142135 < \sqrt{2} < 1{,}4142136$

(...)

A reta racional não pode ser traçada. Não seria possível deslizar o nosso lápis ideal sobre uma reta racional, pois o lápis teria que saltar os infinitos números irracionais que estariam no caminho.

Da mesma forma, não seria possível traçar uma reta irracional. O lápis teria que saltar os infinitos números racionais.

- Há infinitos irracionais entre dois racionais quaisquer e há infinitos racionais entre dois irracionais quaisquer.

- "Essa idéia parece esquisita".

-"Mas terá que ser admitida. Provar certas idéias matemáticas pode não ser tão simples. Mas não é difícil de compreendê-las".

Construção de racionais e irracionais na reta.

-"Imagine que você ganhou uma bonita régua. Mas, infelizmente, ela não tem marcas".

- "Uma régua assim não serve para medir. Só para fazer traços".

- "Tudo bem. Suponha que além da régua você também ganhou um compasso."

Está resolvido o problema. Com a régua e o compasso dá para construir marcas. É simples. Você faz um traço com a régua.....

..... escolhe um ponto "na reta" como origem, e marca uma unidade:

Construa sobre a reta um quadrado ABCD cujo lado tenha medida do unitário.

Com a ponta seca em A e a abertura AC, trace um arco que cruze a reta AD no ponto correspondente a $\sqrt{2}$.

Agora podemos construir 1 + $\sqrt{2}$, 2 - $\sqrt{2}$, 2 $\sqrt{2}$, etc.

(...)

PI, O NÚMERO MAIS FAMOSO

Usos de um número irracional.

O estudo das medidas numa circunferência é bem antigo.

Na Bíblia, há referências à relação entre as medidas do comprimento e do diâmetro de uma circunferência. Numa passagem, conta-se que o rei Salomão mandou que um artesão, de nome Hirão, especialista em peças de bronze, fizesse alguns trabalhos num templo em Jerusalém, construído entre 1014 a 1007 a.C.. No versículo 23 há a descrição de um tipo de reservatório de forma cilíndrica:

“ E ele passou a fazer o mar de fundição de dez côvados de uma borda à sua outra borda, circular em toda volta, e sua altura era de cinco côvados e requeria um cordel de trinta côvados para circundá-lo em toda volta.”

(...)

Vamos interpretar matematicamente o texto:

“... dez côvados de borda à sua outra borda...”

- Isso equivale ao diâmetro do reservatório.

“.....e requeria um cordel de trinta côvados para circundá-lo em toda a volta”.

- Isso equivale ao comprimento da circunferência do reservatório, 30 côvados.

De acordo com a Bíblia, o comprimento da circunferência C é igual a 3 vezes a medida do diâmetro d.

$$C = 3d \Leftrightarrow \frac{C}{d} = 3$$

(...)

Supõe-se, portanto, que, há alguns milênios, já se sabia que a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência é um número constante, ou seja, tem sempre o mesmo valor.

(...)

-Vamos experimentar:

- “ Eu encontrei a razão 3,1.”

- “ Eu achei 3.”

- “ E eu, 3,15”.

Os matemáticos enfrentaram este problema: determinar um valor o mais preciso possível dessa constante.

Aproximação de π na História da Humanidade

A descoberta de que π é um número irracional só aconteceu no século XVIII.

Uma vez que π é um número irracional, sua representação tem infinitas casas decimais que não se repetem e seu uso prático só é possível por meio de valores aproximados.

A busca de um valor, o mais preciso possível, é tão antiga quanto a própria matemática.

Num papiro egípcio, atribuído ao escriba Ahmes, o valor da área de um círculo é calculado a partir da fração $\frac{256}{81}$, ou seja, $\pi \cong 3{,}16$.

Os povos da Mesopotâmia antiga usaram $\pi = \frac{25}{8}$ para calcular a área do círculo.

(...)

Arquimedes, inventor e matemático grego (287-212 a.C.), usou a fração $\frac{22}{7}$ como valor constante para π.

Indo um pouco mais longe, Arquimedes calculou o valor de π como um número que satisfaz a desigualdade:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{220}{70} \qquad (...)$$

Para chegar a esse grau de precisão, Arquimedes construiu um polígono regular com 96 lados. Tal polígono se assemelhava a um círculo. Então, ele calculou a razão do perímetro desse polígono pelo diâmetro.

(...)

Quanto maior o número de lados de um polígono, mais o seu perímetro se aproxima do comprimento de uma circunferência.

Geômetras chineses encontraram uma fração que dava um valor ainda mais preciso para π: $\frac{355}{113}$

Foi somente em 1761 que o francês Lamberti provou que π é um número irracional ou seja, tem uma expansão decimal infinita e não-periódica.

(...)

Comentários ao Texto 9:

Neste texto aqui reproduzido, vemos uma tentativa do autor em explicar "segmentos incomensuráveis", com o objetivo talvez de também informar ao aluno sobre a história da matemática. No nosso ponto de vista, isto pode, neste momento, incluir um "agravante" desnecessário para o aluno: bastava aqui discutir com o aluno que não existe número racional cujo quadrado é 2 (veja a abordagem por nós utilizada no Capítulo 5).

Também este autor sugere que só matemáticos podem reproduzir a prova feita por Euclides para este fato. É nosso ponto de vista que, se o autor opta por não apresentá-la no livro, pelo menos instigue o aluno a tentar fazê-la. Constatamos que bons alunos conseguem sim entender tal demonstração e desenvolverem sozinhos provas análogas (veja a abordagem por nós utilizada no Capítulo 5)

Encontramos uma frase muito infeliz: “podemos estabelecer uma correspondência entre os números irracionais e os pontos de uma reta”. Por que só os irracionais?

Há cinco aspectos aqui desenvolvidos que não foram encontrados nos outros livros analisados:

- Percebe-se que este texto contempla bastante a aproximação dos irracionais por racionais (apesar de não chegar ao objetivo dos Parâmetros Curriculares Nacionais de também lidar com o erro).
- Também trabalha a correspondência *número-reta,* apesar de introduzi-la de forma abrupta, falando na “reta racional” (Será que isto faz sentido para os alunos, isto é, quando ele falou em racionais?).
- Afirma que entre dois racionais (irracionais) existem infinitos racionais (irracionais). No entanto, apesar de reconhecer que esta afirmação parece “esquisita” aos alunos, perde a oportunidade de, através de exemplos e exercícios, tornar isto menos esquisito aos alunos e fazê-los intuir este fato.
- Faz algumas construções com régua e compasso.
- Faz um histórico muito interessante sobre o número π, deixando claro que 3,14 é uma medida aproximada.

3.2 Textos e comentários relativos a livros de Ensino Médio

Observando o tratamento dado ao assunto "números reais" em alguns livros de Ensino Médio, nota-se muito pouca diferença dos textos contidos nos livros de Ensino Fundamental.

Incluímos aqui a análise de um texto para o Ensino Médio que pretende ser continuação do texto de Ensino Fundamental, escrito pelo mesmo autor.

Texto 10:

O livro em questão tem sua Unidade 2 intitulada "Conjuntos e conjuntos numéricos"; nela, os capítulos 1 ao 10 tratam de conjuntos e operações com conjuntos. O capítulo 11, do qual extraímos este texto, trata então, dos conjuntos numéricos.

Salientamos que este texto foi escrito para o Ensino Médio pelo mesmo autor do texto 3 do Ensino Fundamental.

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Como vimos, há números decimais que podem ser escritos na forma fracionária com numerador inteiro e denominador inteiro (diferente de zero) - são os números racionais. Mas há também números decimais que não admitem essa representação; são os *decimais infinitos e não-periódicos.* Esses números são chamados *números irracionais.*

Veja alguns exemplos:

$\sqrt{2}$ = 1,414235...

$\sqrt{3}$ = 1,7320508...

π = 3,1415926535...

Usando a relação de Pitágoras, podemos representar alguns desses números na reta:

(...)

Observe que a medida da diagonal do quadrado de lado 1, usando esse lado 1 como unidade é $\sqrt{2}$. Essa diagonal é um exemplo de segmento que não pode ser medido com um número racional. Sua medida é o número irracional $\sqrt{2}$.

π é irracional

O número π é obtido dividindo-se a medida do comprimento de qualquer circunferência pela medida de seu diâmetro (π = 3,1415926535...).

Pode-se também provar que π é irracional. Isso garante que não se vai encontrar um decimal exato nem uma dízima periódica no cálculo dos algarismos decimais de π , mesmo que se obtenham bilhões de dígitos.

Observação:

O conjunto formado por todos os números irracionais será representado nesse livro por *Ir*.

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS (*R*)

Da reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais obtemos o *conjunto dos números reais R*

R = Q U Ir = { x | x Є Q ou x Є Ir} = { x | ***x*** *é racional ou* ***x*** *é irracional}*

Os números racionais não bastavam para esgotar os pontos da reta. Por exemplo, os pontos da reta correspondentes aos números $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, etc., não eram alcançados com os números racionais. Agora, os números reais esgotam todos os pontos da reta, ou seja, cada ponto da reta corresponde um único número real, e reciprocamente, a cada número real corresponde um único ponto da reta.

Comentário ao texto 10:

Percebe-se que o autor acrescenta, neste nível, a idéia do completamento dos racionais e a noção da continuidade, muito usada agora nesta fase pelos alunos na disciplina de Física, mas que poderia ser trabalhada intuitivamente desde o Ensino Fundamental.

3.3 Análise de um livro estrangeiro

Constatamos que grande parte dos livros didáticos nacionais, por nós analisados, não procuram atingir todos objetivos listados nos Parâmetros Curriculares Nacionais, principalmente no que se refere a "controlar o erro cometido em aproximações" (veja páginas 15 e 16).

Ocorreu-nos então analisar um livro didático estrangeiro como comparação: isto é ou não abordado em nível de Escola Básica? Tivemos em mãos então um livro adotado na Alemanha (veja [W]), no nível de 9ª. série (que equivale ao nosso primeiro ano do Ensino Médio), e que a seguir apresentamos, com tradução livre nossa, omitindo alguns parágrafos que julgamos não essenciais para o que queremos salientar em nossa análise.

Salientamos que as atividades marcadas com * são consideradas mais difíceis pelo autor.

1. Elevar ao quadrado e extrair a raiz quadrada

Exercício 1. Sarah possui 127 CD's. Ela quer construir com as capas destes CD's um painel de forma quadrada. É isto possível? Se não, diga qual o maior número de capas que ela pode utilizar. Qual o número de capas que terá o lado de tal painel?

Exercício 2. A maioria das calculadoras de bolso possui uma tecla que calcula o quadrado de qualquer número. Pode-se, com tal calculadora, a partir de um valor positivo qualquer para x^2, descobrirmos o valor de x?

elevar ao quadrado
→

x	x^2
1.0	1
1.1	1.21
1.2	1.44
1.3	1.69
1.4	1.96
1.5	2.25
1.6	2.56
1.7	2.89
1.8	3.24
1.9	3.61
2.0	4
2.1	4.41
2.2	4.84
2.3	5.29
2.4	5.76
2.5	6.25
2.6	6.76
2.7	7.29
2.8	7.84
2.9	8.41

que auxiliavam
←
extrair a raiz quadrada

Antigamente usavam-se tabelas que auxiliavam o cálculo do quadrado de um número. Uma tal tabela pode ser utilizada ao contrário: para $a = x^2$, podemos determinar o valor de *x.* A este processo denominamos *extrair a raiz quadrada*:

> Se para dados *números a* e *x,* com $x \geq 0$,
>
> vale $x^2 = a$, então *x* é denominado
>
> a raiz quadrada de *a.*
>
> *Notação:* $x = \sqrt{a}$ (leia-se: raiz quadrada de a)

Atenção!

1. $\sqrt{a}$ é, por definição, um número maior ou igual a zero.

2. Podemos extrair a raiz quadrada apenas de números não negativos, pois o quadrado de um número nunca é um número negativo.

Exemplo 1: Determine:

a) $\sqrt{49}$; b) $\sqrt{6,25}$; c) $\sqrt{\frac{4}{9}}$; d) $\sqrt{10000}$; e) $\sqrt{1}$; f) $\sqrt{0}$

Resolução:

a) $\sqrt{49} = 7$, pois $7^2 = 49$ e $7 \geq 0$

(...)

Exemplo 2: Determine todos os números cujo quadrado é 2,25

Resolução: (...)

Existem dois números cujo quadrado é 2,25: 1,5 e -1,5. Mas apenas um deles é a raiz de 2,25: $\sqrt{2,25} = 1,5$.

Para um número *a* existe, no máximo, *uma raiz quadrada*. Isto ficará mostrado no Exercício 10.

(...)

Exercícios:

3. Calcule as raízes quadradas abaixo, sem o uso de calculadora:

a) $\sqrt{64}$); b) $\sqrt{121}$; c) $\sqrt{225}$; d) $\sqrt{256}$; e) $\sqrt{625}$; f) $\sqrt{900}$; g) $\sqrt{400}$;

h) $\sqrt{8100}$; i) $\sqrt{3600}$; j) $\sqrt{1024}$; k) $\sqrt{810000}$; l) $\sqrt{1000000}$

4. Calcule as raízes quadradas abaixo, sem o uso de calculadora:

a) $\sqrt{1{,}21}$; b) $\sqrt{0{,}09}$; c) $\sqrt{0{,}16}$; d) $\sqrt{4{,}41}$; e) $\sqrt{0{,}81}$; f) $\sqrt{0{,}0004}$; g) $\sqrt{\frac{1}{4}}$;

h) $\sqrt{\frac{1}{9}}$; i) $\sqrt{\frac{64}{9}}$; j) $\sqrt{\frac{9}{100}}$; k) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; l) $\sqrt{\frac{49}{16}}$

5. Transforme inicialmente o número dentro da raiz em fração, para depois calcular a raiz quadrada:

a) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; b) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; c) $\sqrt{1\frac{15}{49}}$; d) $\sqrt{1\frac{25}{144}}$; e) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; f) $\sqrt{2\frac{23}{49}}$

6. Calcule a raiz quadrada com o auxílio de uma calculadora:

a) $\sqrt{2116}$; b) $\sqrt{9216}$; c) $\sqrt{17956}$; d) $\sqrt{76176}$; e) $\sqrt{695556}$; f) $\sqrt{820836}$;

g) $\sqrt{7{,}29}$; h) $\sqrt{11{,}56}$; i) $\sqrt{0{,}8464}$; j) $\sqrt{0{,}0784}$; k) $\sqrt{864{,}36}$; l) $\sqrt{0{,}006889}$

7. Calcule, com o auxílio de uma calculadora:

a) $3.\sqrt{16}$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{0{,}04}$; c) $\frac{3}{4\sqrt{0{,}81}}$; d) $0{,}8\sqrt{0{,}36}$; e) $\sqrt{36}.\sqrt{81}$;

f) $\sqrt{64}.\sqrt{\frac{9}{16}}$; g) $5.\sqrt{0{,}25}.\sqrt{0{,}09}$; h) $\sqrt{0{,}64}.\sqrt{0{,}09}$ i) $\left(\sqrt{16}\right)^2$; j) $\left(\sqrt{0{,}04}\right)^2$;

k) $\left(\sqrt{\frac{1}{25}}\right)^2$; l) $\left(\sqrt{2^2}\right)^2$

8. Qual o comprimento do lado de um quadrado cuja área é

a) $9m^2$; b) $25m^2$; c) $12{,}25m^2$; d)1 a; e) $2\frac{1}{4}$ a; f) 6,25 ha g)0,09 ha

9. (...)

10. A Fig.1 nos mostra que, quando $0 < x < y$ então $x^2 < y^2$. Deduza daí que:

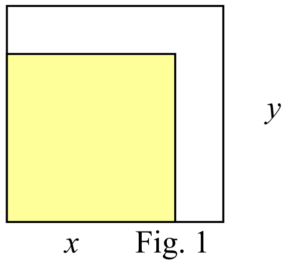


Fig. 1

Se $a > 0$, então existe no máximo um número x tal que $x = \sqrt{a}$.

11. Determine todos os números x tais que

a) $x^2 = 169$ b) $x^2 = 0{,}09$; c) $x^2 = 8{,}41$; d) $x^2 = 1$; e) $x^2 = 0$

12. Na Prússia existia uma medida de área chamada *morgen*. 400 *morgen* correspondiam a 1 km^2. Qual o comprimento de um quadrado cuja área equivale a 1 *morgen*?

13. (...)

*14. Por que a raiz de um número primo não é um número natural?

2. A insuficiência dos Números Racionais

Exercício1. Qual a área dos quadrados hachurados na Fig.1? Apresente também o comprimento dos lados e das diagonais de ambos os quadrados.

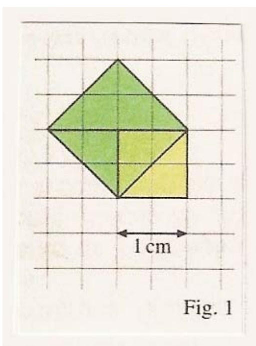


Fig. 1

Exercício 2. Com três calculadoras diferentes calculamos $\sqrt{2}$, encontrando

1.41421 1.4142136 1.4142135662

a) Mostre, elevando ao quadrado, que nenhum destes resultados é verdadeiro.

b) Por que nenhum decimal finito quando elevado ao quadrado nos dá 2 como resultado?

Decimais finitos e decimais infinitos periódicos são números racionais, e portanto podem ser escritos na forma de fração $\frac{p}{q}$, com p,q inteiros e $q \neq 0$. É possível acharmos uma fração para a medida do lado de um quadrado cuja área é 2cm²?

Já na Antigüidade Euclides mostrou que $\sqrt{2}$ não se escreve na forma de fração. O quadro abaixo, em linguagem atual, mostra a prova de Euclides.

(1) Por absurdo: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com p,q inteiros relativamente primos

(2) $2=\frac{p^2}{q^2}$,

(3) $2q^2=p^2$

(4) p^2 é divisível por 2

(5) p é divisível por 2. Escrevamos $p=2r$

(6) $q^2=2r^2$

(7) q^2 é divisível por 2

(8) q é divisível por 2

Mas isto, junto com (5), é contraditório com o afirmado em (1)

Trabalhando com a Geometria:

Na Fig.4, $\overline{AB}=5.\overline{PQ}$ e $\overline{CD} = 3.\overline{PQ}$.

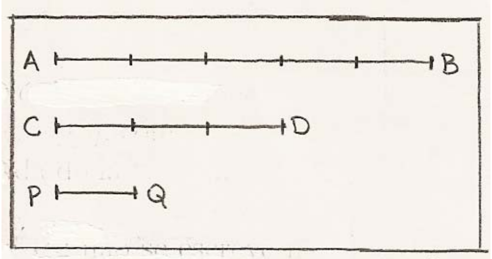


Fig 4

Dizemos que os segmentos AB e CD têm uma unidade de medida comum, dada pelo segmento $\overline{PQ}$ pois cada um pode ser encarado como um número inteiro de cópias de $\overline{PQ}$.

Também escrevemos $\overline{AB} = \frac{5}{3}.\ \overline{CD}$.

Dizer que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma de fração significa dizer que a diagonal e o lado de um mesmo quadrado não têm uma unidade de medida comum. Confirme isto com o Exercício 9 a seguir.

Exercícios:

3. Considere um decimal finito qualquer não pertencente ao conjunto *N*. Mostre que seu quadrado também não é um número natural.

Observação: Pode-se mostrar que todo número natural que não é um quadrado perfeito não possui raiz quadrada racional.

4. Apresente três racionais entre 0 e 1 tais que:

a) um deles tem raiz quadrada (racional)

b) nenhum deles tem raiz quadrada (racional)

Faça uso da observação acima.

5. a) Mostre que $\sqrt{3}$ $(\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11})$ não é um número racional. Para isso, imite a demonstração de Euclides.

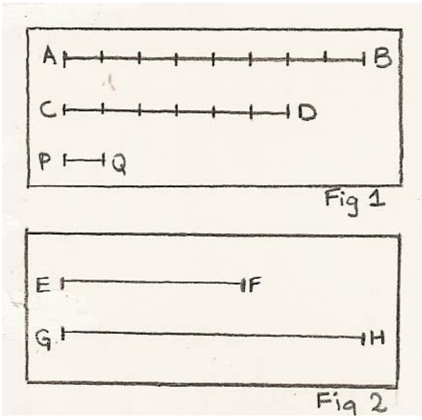
b) Utilize a demonstração de Euclides para determinar $\sqrt{4}$.

c) Mostre que, seja qual for o número primo *p*, $\sqrt{p}$ não é um número racional.

6. Para mostrar que $\sqrt{10}$ não é racional, (...)

Medida comum para segmentos

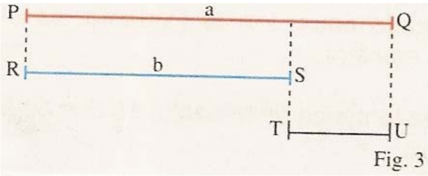
7. a) Escreva os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ da Fig.1 como múltiplos de $\overline{PQ}$. Mostre que existe um racional r tal que $\overline{AB} = r.\ \overline{CD}$.



b) Para os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ da Fig.2 vale $\overline{EF} = \frac{4}{7}.\overline{GH}$. Mostre que existe um segmento que é uma unidade de medida comum para $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$.

*8. Mostre que, se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ possuem uma unidade de medida comum e se $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ possuem uma unidade de medida comum então $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ possuem uma unidade de medida comum.

*9. a) Dois segmentos $a = \overline{PQ}$ e $b = \overline{RS}$ com $a > b$ possuem uma unidade de medida comum m. Mostre que então os segmentos $\overline{RS}$ e $\overline{TU}$, com $\overline{TU} = a\text{-}b$ possuem também m para unidade de medida comum. (Fig.3)



b) Suponha que o lado e a diagonal do quadrado *ABCD* possuem uma unidade de medida comum *m*. Mostre que então também o lado e a diagonal do quadrado *BEF*G possuem m para unidade de medida comum. (Fig.4)

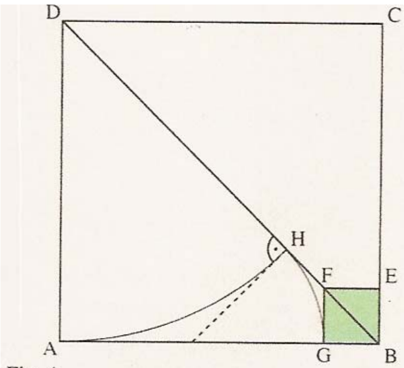


Fig. 4

c) Justifique, utilizando (b), por que o lado $\overline{AD}$ e a diagonal $\overline{BD}$ não podem possuir uma unidade de medida comum.

3. Valores aproximados de raízes

Exercício 1: Pede-se descobrir, com o menor número de perguntas possível, entre quais números encontra-se a bolinha. Na Fig.1, ela se encontra entre os números 19 e 20. Como podemos proceder, se a única pergunta permitida é do tipo: "A bolinha está à direita ou à esquerda de... (um número à sua escolha)"?

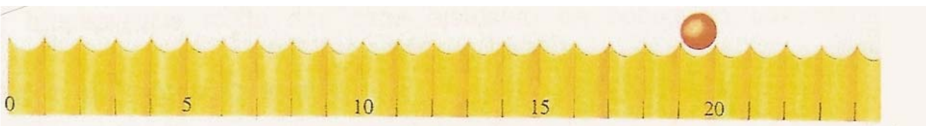


Fig 1

Exercício 2: a) Deduza da Fig. 2: para quaisquer $x,y > 0$, se $x^2 < y^2$, então $x < y$.

b) Decida, elevando ao quadrado, entre quais números 1; 1,1 ; 1,2 ; ... ; 1,9; 2; encontra-se $\sqrt{2}$.

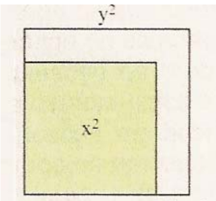


Fig. 2

Todos os números da reta numerada que se encontram sobre o segmento que une os números *a* a *b* constituem o que chamamos intervalo [*a ; b*].

O **comprimento do intervalo** [*a ; b*] é o número *b* - *a*.

Vamos determinar a posição de $\sqrt{2}$ sobre a reta numérica determinando *intervalos de aproximação:*

$\sqrt{2}$ **pertence ao intervalo**	***por que***
[1;2]	$1^2 < 2 < 2^2$
[1,4 ; 1,5]	$1,4^2 < 2 < 1,5^2$
[1,41 ; 1,42]	$1,41^2 < 2 < 1,42^2$
[1,414 ; 1,415]	$1,414^2 < 2 < 1,415^2$
[1,4142 ; 1,4143]	$1,4142^2 < 2 < 1,4143^2$

... ...

Pela tabela conseguimos encaixar $\sqrt{2}$ cada vez num intervalo menor, isto é:

- cada intervalo está contido no anterior;
- os comprimentos dos intervalos são cada vez menores;
- $\sqrt{2}$ pertence a cada intervalo.

Uma tal seqüência de intervalos é denominada **seqüência de intervalos encaixantes** quando os comprimentos de tais intervalos se tornam "arbitrariamente pequenos".

Por "arbitrariamente pequenos" queremos aqui significar que, para cada número positivo tão pequeno quanto queiramos, existe na seqüência um intervalo de comprimento menor do que este número.

Podemos então garantir que para toda seqüência de intervalos encaixantes sempre existe exatamente um número que pertence a todos estes intervalos. De fato, se este não fosse o caso, existiria um número $b \neq a$ também pertencente a todos os intervalos de uma tal seqüência; decorreria daí que então nenhum intervalo tem comprimento menor do que $|b-a|$.

Exemplo 1: Determine um intervalo de comprimento 0,01 ao qual pertença $\sqrt{5}$.

Resolução:

Resumimos os resultados na seguinte tabela:

Aproximação	Quadrado da aproximação	Comparação	Intervalo	Comprimento do intervalo
(entre dois inteiros) 2	4	$2<\sqrt{5}$		
3	9	$3>\sqrt{5}$	[2 ; 3]	1
(entre dois décimos) 2,1	4,41	$2{,}1<\sqrt{5}$	[2,2 ; 3]	0,9
2,2	4,84	$2{,}2<\sqrt{5}$	[2,2 ; 3]	0,8
2,3	5,29	$2{,}3>\sqrt{5}$	[2,2 ; 2,3]	0,1
(entre dois centésimos) 2,21	4,8841	$2{,}21<\sqrt{5}$	[2,21 ; 2,3]	0,09
2,22	4,9284	$2{,}22<\sqrt{5}$	[2,22 ; 2,3]	0,08

2,23	4,9729	2,23< $\sqrt{5}$	[2,23 ; 2,3]	0,07
2,24	5,0176	2,24> $\sqrt{5}$	[2,23 ; 2,24]	0,01

Conclusão: $\sqrt{5}$ pertence ao intervalo [2,23 ; 2,24]

Exemplo 2: Determine, com auxilio de uma calculadora, um valor para $\sqrt{8}$. Para isso, apresente os seis primeiros intervalos de uma seqüência encaixante de intervalos que contenham todos $\sqrt{8}$ e cujos comprimentos são, respectivamente, iguais a 1; 0,1 ; 0,001 ; ... ; 0,000001.

Resolução: (...)

Exercícios:

3. Entre quais dois inteiros consecutivos se encontram os números:

a) $\sqrt{50}$; b) $\sqrt{250}$; c) $\sqrt{720}$; d) $\sqrt{1000}$; e) $\sqrt{1500}$?

4. a) Decida, elevando ao quadrado, quais dos seguintes números são uma melhor aproximação para $\sqrt{7}$:

2 ; 3 ; 2,1 ; 2,2 ; ... ; 2,9.

b) A qual intervalo de comprimento 0,1 pertence $\sqrt{7}$?

5. Determine, detalhadamente, um intervalo de comprimento 0,01 ao qual pertença:

a) $\sqrt{14}$; b) $\sqrt{6}$; c) $\sqrt{11}$; d) $\sqrt{13}$; e) $\sqrt{15}$

6. Determine, como no Exemplo 2, seis intervalos de uma seqüência encaixante de intervalos que contenham todos o número:

a) $\sqrt{17}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{50}$; d) $\sqrt{70}$; e) $\sqrt{98}$

7. (...)

4. O Algoritmo de Heron

Exercício 1. Heron de Alexandria apresentou o seguinte procedimento para calcular $\sqrt{720}$:

a) procura-se o quadrado perfeito mais próximo de 720:

$$27^2 = 729;$$

b) calcula-se a média entre 27 e $\frac{720}{27}$, e toma-se como intervalo de aproximação para $\sqrt{720}$ o intervalo de extremos iguais a 27 e esta média.

c) continua-se assim aplicando este processo.

Determine o próximo intervalo, com ajuda de uma calculadora. (...)

Exercício 2.

a) Considere três retângulos de lados respectivamente iguais a

$$3 \text{ cm e } 2\text{cm}, \quad 2{,}5 \text{ cm e } 2{,}4 \text{ cm}, \quad 2{,}45 \text{ cm e } \frac{6}{2{,}45} \text{ cm}$$

Determine a área de todos eles.

b) Chegamos ao próximo retângulo (no caso, o quarto) tomando para um dos lados a média dos lados do último retângulo (no caso, o terceiro) e, para o outro lado, um valor *b* tal que a área do novo retângulo seja a mesma do anterior. De qual quadrado estão se aproximando os retângulos?

O Algoritmo de Heron

(...) Ele determina uma aproximação para $\sqrt{a}$ (por exemplo, para $\sqrt{12}$)

Início	*Exemplo*
Considere um valor qualquer x_0 .	Por exemplo: $x_0 = 4$
Defina $y_0 = \frac{a}{x_0}$.	$y_0 = \frac{12}{4} = 3$
$\sqrt{a}$ então pertence ao intervalo de extremos x_0 e y_0	$3 < \sqrt{12} < 4$
1ºpasso: Calcule a média x_1 entre x_0 e y_0	$x_1 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$
Defina $y_1 = \frac{a}{x_1}$	$y_1 = \frac{12}{7/2} = \frac{24}{7} = 3{,}4285714...$
$\sqrt{a}$ então pertence ao intervalo $[y_1, x_1]$	$3{,}4285714... < \sqrt{12} < 3{,}5$
2ºpasso: Calcule a média x_2 entre x_1 e y_1	$x_2 = \frac{97}{28} = 3{,}4642857..$
Defina $y_2 = \frac{a}{x_2}$	$y_2 = \frac{12}{97/28} = 3{,}4639175...$
$\sqrt{a}$ então pertence ao intervalo $[y_2, x_2]$	$3{,}4639175... < \sqrt{12} < 3{,}4642857...$
etc.	

Para aplicação do Algoritmo de Heron é útil fazermos uso de uma tabela. Exemplo: Calcule, pelo Algoritmo de Heron, um valor aproximado para $\sqrt{2}$. Resolução na forma de tabela:

Aproximação x	Aproximação $y = \frac{a}{x}$	Resultado	Nova aproximação pela média
1	$\frac{2}{1}$=2	$1 < \sqrt{2} < 2$	$\frac{1+2}{2} = 1{,}5$
1,5	...	...	...
...	...	...	...

(...)

Exercícios:

3. Determine, com a ajuda do Algoritmo de Heron, $\sqrt{7}$ com 5 casas de precisão.

(...)

4. Determine com a ajuda do Algoritmo de Heron as seguintes raízes, controlando o resultado com a calculadora.

a) $\sqrt{13}$; b) $\sqrt{15}$; c) $\sqrt{11}$; d) $\sqrt{30}$; e) $\sqrt{160}$ f) $\sqrt{3{,}6}$ g) $\sqrt{0{,}4}$;

h) $\sqrt{22{,}5}$; i) $\sqrt{1000}$; j) $\sqrt{1259}$ k) $\sqrt{1946}$; l) $\sqrt{5036}$ (...)

*7. Prove: se $a \geq 0$ e $\sqrt{a} < x_1$ então $\frac{a}{x_1} < \sqrt{a}$ (...)

5. Números Reais

Exercício 1. Na Fig.1, o ponto P está sendo aproximado por intervalos encaixantes.

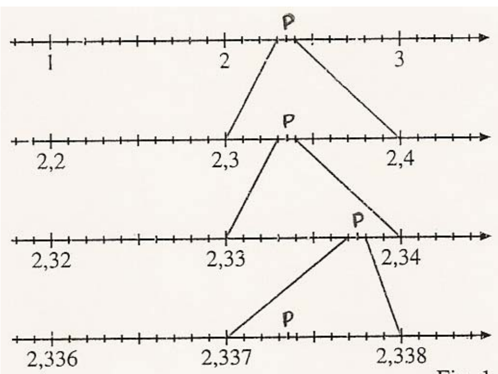


Fig. 1

a) Determine o menor intervalo contendo tal ponto que a figura nos permite deduzir.

b) Por que não se pode firmar que o ponto *P* corresponda a um número racional?

c) Pode 2,337333733337... pertencer a todos os intervalos da Fig.1?

Exercício 2. a) Por que $\frac{2}{3}$ pertence a todos os intervalos da seqüência de intervalos encaixantes da forma

[0,6 ; 0,7], [0,66 ; 0,67], [0,666 ; 0,667], [0,6666 ; 0,6667], ... ?

(...)

b) A expansão decimal de um número começa com 7,1356728... . Qual o maior erro cometido quando truncamos tal expansão na sétima casa decimal?

Decimais finitos e decimais infinitos periódicos podem ser transformados em frações. Por exemplo: (...)

Portanto, *decimais finitos e decimais infinitos periódicos são representações para números racionais.* A eles correspondem pontos da reta numerada. Por outro lado, nem todo ponto da reta numerada corresponde a um número racional. Por exemplo, o ponto que corresponde a $\sqrt{2}$. Mas podemos associar a $\sqrt{2}$, através de uma seqüência de intervalos encaixantes, uma lista decimal não periódica. A igualdade vale para outras listas decimais infinitas e não periódicas, como, por exemplo,

7,12112211122211112222... .

Tais listas decimais infinitas e não periódicas correspondem a novos números:

Números Reais

Números racionais	*Números irracionais*

Números racionais podem ser representados por expansões decimais finitas ou infinitas periódicas.

Números que podem ser representados por expansões decimais infinitas não periódicas são chamados números irracionais. Eles podem ser aproximados com a precisão que quisermos por números racionais.

Números racionais e irracionais compõem o conjunto do que chamamos números reais, que é denotado por *R*.

Cada número natural é também um número inteiro; cada número inteiro é também um número racional; cada número racional é também um número real:

$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

Números reais podem ser determinados:

- por expansões decimais;
- por uma seqüência de intervalos encaixantes;
- por pontos da reta numerada.

Reciprocamente, podemos a cada ponto da reta numerada associar uma seqüência de intervalos encaixantes e determinar a expansão decimal a ele associada. Portanto a cada ponto da reta numerada corresponde um número real

Expansão decimal

$\updownarrow$

Seqüência de intervalos encaixantes

$\updownarrow$

Ponto da reta numerada

Exemplo 1: Determine os cinco primeiros intervalos de uma seqüência de intervalos encaixantes para os seguintes números:

a) $\frac{3}{7}$; b) 1,74; c) 3,411592653...

Resolução:

a) $\frac{3}{7}$ pertence a, por exemplo: [0 ; 1], [0,4 ; 0,5], [0,42 ; 0,43], [0,428 ; 0,429],

[0,4285 ; 0,4286]

(...)

c) Por construção, 3,411592653... pertence a [3 ; 4], [3,4 ; 3,5], (...)

Exemplo 2: Ordene de forma crescente:

$\sqrt{2{,}9}$; 1,7; 1,703; $1\frac{45}{64}$

Resolução: (...)

Exercícios:

3. Apresente os cinco primeiros intervalos de uma seqüência de intervalos encaixantes para os seguintes números:

a) 0,444444... b) 2,236067... c) 8,03005... d) 0,047513...

4. Apresente os quatro primeiros intervalos de uma seqüência de intervalos encaixantes para os números a seguir. Represente tais pontos sobre uma reta numerada de unidade igual a 2 cm.

a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{22}{15}$; c) $2\frac{2}{3}$; d) $\frac{12}{7}$; e) 1,6; f) 2,3; g) 0,9; h) 1,49; (...)

(...)

*6. Determine o ponto da reta numerada pertencente a todos os intervalos da seguinte seqüência de intervalos encaixantes:

a) $[1 ; 2]$, $[1+\frac{1}{2} ; 2]$, $[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} ; 2]$, $[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} ; 2]$, $[1+\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}; 2]$, ...

b) $[1 ; 2{,}5]$, $[1+\frac{1}{2} ; 2{,}5]$, $[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} ; 2{,}5]$, $[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} ; 2{,}5]$,

$[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} ; 2{,}5]$,...

Números racionais e expansões decimais

7. a) Apresente a expansão decimal dos números $\frac{17}{25}$; $\frac{31}{40}$; (...)

b) Seja $\frac{p}{q}$ uma fração irredutível. Quais são os únicos primos que podem estar envolvidos na fatoração do denominador q para que $\frac{p}{q}$ possa ser expresso por uma expansão decimal finita?

8. a) Escreva a expansão decimal dos números $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{6}{7}$ e observe os resultados.

b) Escreva a expansão decimal do número $\frac{1}{17}$.

c) Seja $\frac{p}{q}$ uma fração irredutível. Qual o número máximo de dígitos que pode ter o período de sua expansão decimal? Para isso, considere os possíveis restos que podemos obter na divisão de p por q. Depois de quantas divisões necessariamente teremos restos repetidos?

9. Como você continuaria as expansões decimais abaixo? Quais delas correspondem a números racionais e quais delas correspondem a irracionais?

(...)

11. Quantas casas decimais da expansão decimal de $\sqrt{60}$ precisamos determinar se não queremos um erro maior do que

a) 0,5; b) 0,02; c) 0,01; d) 0,001; e) $\frac{1}{10000}$?

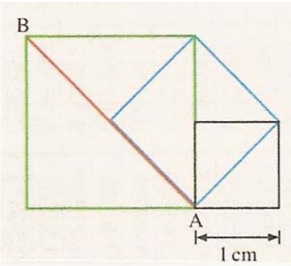
12. Determine a expansão decimal e localize na reta numerada os seguintes números:

a) $1,\bar{5}$; $1\frac{2}{3}$; $\sqrt{2,5}$; 1,6 b) (...)

13. Quem é maior?

a) $\sqrt{2}$ ou 1,4142 b) $\sqrt{3}$ ou 1,7323322333222...; c) $\sqrt{8}$ ou $\frac{31}{11}$

14. Qual o comprimento do segmento $\overline{AB}$ da Fig.1? Apresente um resultado aproximado, mas com uma precisão de quatro casas decimais.



15. Apresente a expansão decimal do número que corresponde ao ponto P sobre a reta numerada da Fig.2 (Fig.3), com uma precisão de quatro casas decimais.

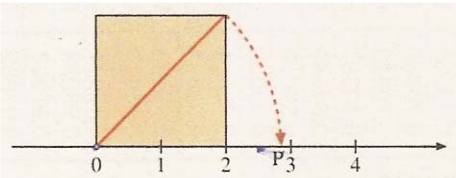


Fig. 2

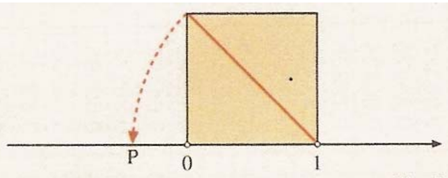


Fig. 3

Comentários do texto alemão:

Salientamos aqui a viabilidade de se trabalhar aproximações controlando o erro, pelo menos em nível de Ensino Médio, o que vai ao encontro do objetivo mencionado nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Além disso, este texto:

i. apresenta exercícios solicitando aos alunos que repitam provas de irracionalidade de uma raiz; mais até: motiva, através de exercícios, a argumentação rigorosa em Matemática.

ii. treina muito raízes exatas e, depois, aproximações, para só depois definir número irracional;

iii. antes de dar a definição de irracional, já salienta e treina erro.

No entanto,

i. parte da intuição de que $\sqrt{2}$ existe, isto é, é um número;

ii. motiva a construção dos irracionais exclusivamente via raiz quadrada. Ocorre-nos então a seguinte questão: será que, ao final do trabalho de construção dos números reais, os alunos vão conseguir dar outros exemplos de números irracionais?

iii. faz uso, sem definir, da "reta numerada" , definido inclusive *intervalo*, antes de definir número irracional;

iv. fala da lista 2,337333733... (pág. 97) como se ela já tivesse um significado numérico, e só dois parágrafos adiante é que define número irracional;

v. finalmente, sugere a existência de uma correspondência biunívoca entre as expansões decimais e os números reais. Não faz nenhuma menção às expansões periódicas de período 9, e não nos parece, pelos exercícios sobre números racionais propostos neste nível, que tal assunto já tenha sido tratado em séries anteriores.

Também chamou-nos a atenção o fato de, na pág. 99, Exemplo 2, já ser pedido, sem maiores comentários, (provavelmente apelando para a intuição do aluno e para todo o processo já desenvolvido) para o aluno ordenar números de uma lista da qual fazem parte tanto racionais quanto irracionais.

3.4 Conclusões

Analisando alguns livros didáticos nacionais aprovados pelo MEC e adotados em algumas escolas, percebe-se que eles, em sua grande maioria, não atingem todos os objetivos propostos nos Parâmetros Curriculares Nacionais, apesar de termos aqui mostrado que existem livros que chegam mais perto dos mesmos do que outros.

CAPÍTULO 4

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Este capítulo trata da construção do número real através de três abordagens distintas: por cortes de Dedekind, por seqüências de Cauchy e por medição (exata) de segmentos de reta. Incluímos aqui a prova da equivalência destas construções, por dois motivos: por tratar-se de um assunto, a nosso ver, esclarecedor, e também porque não encontramos esta demonstração toda numa só referência. Para mostrar tal equivalência, partimos de um corpo ordenado arquimediano[1] e chegamos à definição de corpo ordenado arquimediano completo. Também esclarecemos como, a partir de cada uma destas abordagens, chega-se à representação decimal de um número real (positivo).

Este estudo se faz relevante no sentido de fornecer subsídios para os atuais professores da Escola Básica e alunos de Licenciatura entenderem a equivalência entre todas estas abordagens e, com isso, refletirem sobre cada uma delas: as abordagens de Dedekind e de Cantor não foram feitas para se *ensinar* números reais, e sim para *resolver um problema puramente matemático*, qual seja, a prova da existência de um corpo ordenado arquimediano completo.

[1]Para as definições de corpo, anel, subanel e ideal maximal, indicamos [H] e [M].

4.1 O completamento de um corpo ordenado arquimediano

4.1.1 Conceitos básicos sobre corpos ordenados

Permitimo-nos, nesta seção, omitir algumas demonstrações.

Definição 1: *Um corpo (K,+,.) é dito* **ordenado** *se no conjunto K está definida uma relação de ordem total (que vamos denotar por $\leq$) que é compatível com as operações do corpo, isto é:*

i) para quaisquer a,b,c $\in K$,

$$\text{se } a \leq b \text{ então } a+c \leq b+c$$

ii) para quaisquer a,b,c $\in$ K, com $0 < c$ (isto é, $0 \leq c$ e $c \neq 0$),

$$\text{se } a \leq b \text{ então } a.c \leq b.c$$

Da definição de corpo, temos $0 \neq 1$, e portanto, $0<1$ ou $1<0$. Afirmamos que $0<1$. De fato, por propriedades dos corpos, sabemos que

$$0.x = 0,$$

para todo $x \in K$. Daí, se tivéssemos $1<0$ então necessariamente teríamos $0 <-1$, pois caso contrário,

$$1< 0 \ \text{ e } \ -1<0 \Rightarrow 0= 1 + (-1) < 0 + 0 = 0,$$

absurdo. Daí, pela compatibilidade da ordem com as operações do corpo, teríamos

$$0 < (-1) = 0. (-1) < (-1)(-1) = 1 = 0+0 < 1+(-1) = 0,$$

também absurdo.

Proposição 1: *Todo corpo ordenado tem característica zero.*

Prova. Já sabemos que $0<1$. Se $carK = p > 0$, então

$$0 < 1 \Rightarrow 0 + 1<1+1 \Rightarrow 0 < 1< 2.1 \Rightarrow$$

...

$$\Rightarrow 0 < (p-1)1 = 0 + (p-1)1 < 1 + (p-1)1 = p.1 = 0,$$

absurdo. Logo, $carK = 0$.

Conseqüência da proposição acima é que todo corpo ordenado contém uma cópia de Q (isto é, existe um subcorpo de K que é isomorfo a Q). Além disso, pelo que vimos acima, todos os naturais são elementos positivos de K, pois $0 < 1$.

No que segue,

$$z = \frac{x+y}{2}$$

está denotando de forma resumida o elemento

$$(x + y)(1+1)^{-1}.$$

Lema 1: *Seja K um corpo ordenado, e sejam $x, y \in K$, digamos, com $x \leq y$. Então o elemento*

$$z = \frac{x+y}{2}$$

satisfaz

$$x \leq z \leq y,$$

ocorrendo igualdade só no caso em que $x = y$.

Prova. De fato, pela compatibilidade da ordem com as operações do corpo, obtemos, já que $2>0$,

$$x \leq y \Rightarrow 2x \leq x + y \Rightarrow 2x \leq 2z \Rightarrow x \leq z\,;$$

analogamente, prova-se que $z \leq y$.

Observe agora que

$$z = x \Leftrightarrow x = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2x = x + y \Leftrightarrow x = y$$

o que completa a prova.

Numa estrutura de corpo ordenado K podemos definir vários conceitos:

Definição 2: *Num corpo ordenado K, definimos* **módulo** *de um elemento a (e o denotamos por |a|) o elemento*

$$|a| = \begin{cases} a & se \ \ 0 \leq a \\ -a & se \ \ a < 0 \end{cases}$$

Um *subconjunto A de um corpo ordenado K é dito* **limitado** *se existe $M \in K$ tal que*

$$|a| \leq M,$$

para todo $a \in K$.

Definição 3: *Uma seqüência $(a_n)_{n \in N}$ de elementos de K é dita* **convergente** *(em K) se existe $a \in K$ tal que, dado qualquer $\varepsilon \in K$, com $\varepsilon > 0$ existe um índice $n_o \in N^*$ a partir do qual*

$$| a_n - a| < \varepsilon.$$

Notação: Denotaremos por $S_c(K)$ o conjunto de todas as seqüências convergentes de um corpo ordenado K.

Definição 4: *Uma seqüência $(a_n)_{n \in N}$ de elementos de K é dita* **limitada** *se existe $M \in K$ tal que*

$$| a_n | \leq M,$$

para todo $n \in N^*$.

Notação: Denotaremos por $S_l(K)$ o conjunto de todas as seqüências limitadas de um corpo ordenado K.

Lema 2: *Num corpo ordenado K, toda seqüência convergente é limitada*. Ou seja:

$$S_c(K) \subseteq S_l(K)$$

Definição 5: *Uma seqüência* $(a_n)_{n\in N}$ *de elementos de K é dita* ***seqüência de Cauchy*** *se, dado qualquer ε ∈K, com ε > 0 existe um índice* $n_o \in N^*$ *que satisfaz*

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon \ .$$

Notação: Denotaremos por C(*K*) o conjunto de todas as seqüências de Cauchy de um corpo ordenado *K*.

Lema 3: *Num corpo ordenado K, toda seqüência convergente é de Cauchy.*

Lema 4: *Num corpo ordenado K, toda seqüência de Cauchy é limitada.*

Portanto temos, num corpo ordenado *K*,

$$S_c(K) \subseteq \mathrm{C}(K) \subseteq S_l(K).$$

Definição 6: *Seja K um corpo ordenado, e sejam a,b ∈K, com a ≤ b. Denominamos* ***intervalo (fechado) de extremos*** *a* ***e*** *b ao conjunto*

$$[a,b]=\{x\in K \mid a \leq x \leq b\}.$$

Definição 7: *Uma seqüência de intervalos* $(I_n)_{n\in N^*}$ *num corpo ordenado K é dita* ***seqüência de intervalos encaixantes*** *se*

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$$

Lema 5: *Dada uma seqüência de intervalos encaixantes* $([x_n, y_n])_{n\in N^*}$ *num corpo ordenado K, temos que a seqüência formada pelos extremos esquerdos* $(x_n)_{n\in N^*}$ ***é não decrescente****, enquanto a seqüência formada pelos extremos direitos* $(y_n)_{n\in N^*}$ ***é não crescente****. Além disso, para todo* $m \in N^*$, y_m *é cota superior para o conjunto* $\{x_n, n \in N^*\}$.

Ou seja:

$$\forall m, n \in N^*, x_n \leq y_m$$

Prova. A 1ª parte: é claro, a partir da definição 7. Para a 2ª parte, já sabemos que a seqüência $(x_n)_{n\in N^*}$ é não decrescente e que a seqüência $(y_n)_{n\in N^*}$ é não crescente, suponhamos então que existam $n, m_1 m_2$ com $m_1 < m_2$ tais que

$$x_{m1} \leq y_n \leq x_{m2} \qquad (1)$$

e, sem perda de generalidade, suponhamos que n é o primeiro índice para o qual isto acontece.

De (1) e do fato que

$$x_{m_2} \leq y_{m_2} \qquad (2)$$

obtemos

$$y_n \leq y_{m_2}$$

Como a seqüência é não crescente, então $n \geq m_2$ e como a seqüência de intervalos é encaixante, $n \geq m_2 \Rightarrow [x_n, y_n] \subseteq [x_{m_2}, y_{m_2}]$, ou seja,

$$x_{m_2} \leq x_n \leq y_n \leq y_{m_2} \qquad (3)$$

que combinada com (1) nos dá $x_{m_2} = x_n = y_n$ e portanto o intervalo $[x_n, y_n]$ resume-se a um ponto (e, sendo os intervalos encaixantes, todos, a partir deste, resumem-se a este mesmo ponto).

Concluímos: se ocorre a situação (1), então na verdade ocorre igualdade, e portanto, ainda assim temos válido que

$$\forall m, n \in N^*, x_n \leq y_m$$

o que completa a prova.

Definição 8: *Uma seqüência de intervalos fechados encaixantes* $([x_n, y_n])_{n\in N^*}$ *num corpo ordenado K é dita uma* ***seqüência de intervalos evanescentes*** *se o comprimento de tais intervalos forma uma seqüência de elementos de K que converge a zero.*

Definição 9: ***Dado um corpo ordenado K, definimos corte*** *de K como sendo um par (A,B) de subconjuntos não vazios de K tais que:*

i) A e B formam uma partição para K, isto é, A e B são disjuntos e $A \cup B = K$*;*

ii) $a<b$*, para todo* $a \in A$ e $b \in B$*;*

iii) o subconjunto A não possui maior elemento.

Definição 10: *Seja K um corpo ordenado e A um subconjunto não vazio de K. Dizemos que um elemento* $b \in K$ *é* ***supremo de A*** *se*

i) para todo $x \in A$ *tem-se* $x \leq b$*;*

ii) para todo $\varepsilon \in K$*, com* $\varepsilon > 0$*, existe* $x \in A$ *tal que* $b-\varepsilon < x \leq b$*.*

Definição 11: *Seja K um corpo ordenado e A um subconjunto de K. Dizemos que um elemento* $b \in K$ *é* ***ínfimo de A*** *se*

i) para todo $x \in A$ *tem-se* $b \leq x$*;*

ii) para todo $\varepsilon \in K$*, com* $\varepsilon > 0$*, existe* $x \in A$ *tal que* $b \leq x < b+\varepsilon$*.*

4.1.2 Corpos ordenados arquimedianos e completos

Definição 12: *Um corpo ordenado K é dito* ***arquimediano*** *se, para quaisquer elementos* $a,b \in K$ *existe* $n \in Z$ *tal que*

$$a < nb.$$

Prova-se que existem corpos ordenados que não são arquimedianos (veja [5], pág.155).

Lema 6: *Num corpo ordenado arquimediano K, a seqüência* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in N^*}$ *converge para zero.*

Prova: De fato, dado $\varepsilon \in K$, com $\varepsilon > 0$, escolhemos $n_0 \in N^*$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$. Daí, para todo $n > n_0$, temos

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\varepsilon .$$

Proposição 2: *Num corpo ordenado arquimediano K, uma seqüência* $(x_n)_{n\in N^*}$ *converge para **a** se e só se, para cada* $s\in N^*$ *existe* $n_0\in N^*$ *tal que*

$$n\geq n_0 \Rightarrow |x_n - a|<\frac{1}{s}$$

Prova: $(\Rightarrow)$É claro.

$(\Leftarrow)$ Dado $\varepsilon\in K$, com $\varepsilon>0$, utilizando a propriedade arquimediana, podemos garantir a existência de $s\in N^*$ tal que $\frac{1}{\varepsilon}<s$. Por hipótese, para tal s existe $n_0\in N^*$ tal que, para todo $n\geq n_0$ temos $|x_n-a|<\frac{1}{s}$. Mas daí,

$$|x_n-a|<\frac{1}{s}<\varepsilon$$

donde concluímos que a seqüência $(x_n)_{n\in N^*}$ converge para a.

Teorema 1: *Num corpo ordenado arquimediano K, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Para toda seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes, existe um único elemento de K comum a todos os intervalos da seqüência.

(ii) Toda seqüência de Cauchy de elementos de K é convergente (em K).

(iii) Todo corte de K tem um elemento de separação em K.

(iv) Todo subconjunto limitado de elementos de K possui supremo e ínfimo em K.

Prova. Provaremos a equivalência de cada condição com a primeira.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Seja $(a_n)_{n\in N^*}$ uma seqüência de Cauchy de elementos de *K*. Vamos, a partir dela, construir uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes e mostrar que o elemento comum a todos estes intervalos é o valor para o qual converge a seqüência dada.

A seqüência de intervalos é construída da seguinte forma:

- fixado o valor $\frac{1}{2}$, sabemos que existe $n_1 \in N^*$ tal que

$$m,n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{1}{4};$$

em particular,

$$m \geq n_1 \Rightarrow |a_{n_1} - a_m| < \frac{1}{4}$$

ou ainda,

$$m \geq n_1 \Rightarrow a_{n_1} - \frac{1}{4} < a_m < a_{n_1} + \frac{1}{4}$$

Definimos $I_1 = \left[a_{n_1} - \frac{1}{4}, a_{n_1} + \frac{1}{4}\right]$, que tem comprimento $\frac{1}{2}$;

- fixado o valor $\frac{1}{3}$, sabemos que existe $n_2 \in N^*$ tal que

$$m,n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{1}{2.3}$$

em particular,

$$m \geq n_2 \Rightarrow |a_{n_2} - a_m| < \frac{1}{2.3}$$

ou ainda, escolhendo $n_2 \geq n_1$,

$$m \geq n_2 \geq n_1 \Rightarrow a_{n_2} - \frac{1}{2.3} < a_m < a_{n_2} + \frac{1}{2.3} \text{ e } a_m \in I_1$$

Então, definindo $I_2 = \left[a_{n_2} - \frac{1}{2.3}, a_{n_2} + \frac{1}{2.3}\right] \cap I_1$

temos

$$I_2 \subseteq I_1 \text{ e } \quad \text{comprimento de } I_2 \leq \frac{1}{3}$$

Continuando este processo, construímos uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes (pelo Lema 6). Por hipótese, existe um elemento $k \in K$ comum a todos estes intervalos. Afirmamos que

$$k = \lim_{n\to\infty} a_n$$

De fato, para cada $j \in N^*$, temos $k \in I_j$ e, da definição de I_j, temos também um índice n_j tal que

$$m \geq n_j \Rightarrow a_m \in I_j$$

Mas então

$$k \in I_j \quad \text{e} \quad a_m \in I_j \Rightarrow |a_m - k| \leq \text{ comprimento de } I_j \leq \frac{1}{j}$$

Pela Proposição 2, concluímos que a seqüência de Cauchy $(a_n)_{n\in N^*}$ converge para *k*.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*): Seja $([x_n, y_n])_{n\in N^*}$ uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes. Denotando por $I_n = [x_n, y_n]$ e por h_n o comprimento de I_n, sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

e que $(h_n)_{n\in N^*}$ é não crescente.

Afirmamos que a seqüência $(x_n)_{n\in N^*}$ dos extremos esquerdos dos intervalos (que já sabemos ser não decrescente) é uma seqüência de Cauchy. De fato, dado $\varepsilon \in K$, com $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $n_0 \in N^*$ a partir do qual (já que $(h_n)_{n\in N^*}$ é não crescente e converge a zero) $h_n < \varepsilon$. Daí, como

$$n \geq n_0 \Rightarrow I_n \subseteq I_{n_0} \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n \leq y_n \leq y_{n_0},$$

tem-se

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow x_n - x_m \leq y_{n_0} - x_{n_0} = h_{n_0} < \varepsilon,$$

o que completa a prova da afirmação.

Por hipótese, a seqüência de Cauchy $(x_n)_{n \in N^*}$ converge em *K*; denotemos seu limite por *a*. Afirmamos que *a* é um elemento comum a todos os intervalos I_n. De fato, se assim não fosse, teríamos

$$\exists n \in N^* \text{ tal que } a \notin I_n = [x_n, y_n]$$

Como $a < x_n$ não pode ocorrer, já que $(x_n)_{n \in N^*}$ é não decrescente e $a = \lim_{n \to \infty} x_n$, temos

$$x_n \leq y_n < a$$

Mas então, sendo $a = \lim_{n \to \infty} x_n$, temos que existe $s \in N^*$ tal que

$$x_n \leq y_n < x_s \leq a$$

absurdo, pelo Lema 2.

Resta-nos mostrar que é único este elemento comum a todos os intervalos. Inicialmente, note que *a* satisfaz a propriedade

$$x_n \leq a \leq y_n,$$

para todo $n \in N^*$. Daí, se existisse também $b \in K$ satisfazendo a mesma propriedade, da hipótese "evanescentes" inferimos que $a = b$.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Dado um corte (A,B) de *K*, escolha $x \in A$ e $y \in B$.

Como

$$x < y$$

temos, pelo Lema 1

$$x < z_1 < y,$$

onde

$$z_1 = \frac{x+y}{2}.$$

Definimos agora os elementos $z_2, z_3, \ldots \in K$ recursivamente pondo, para $n \geq 2$,

$$z_{n+1} = \frac{z_n + y}{2}.$$

Aplicando o Lema 1, é fácil ver que a seqüência $(z_n)_{n \in N^*}$ é uma seqüência crescente.

Dividimos agora a prova em dois casos, levando em conta que, como *A* e *B* formam uma partição para *K*, temos $z_1 \in A$ ou $z_1 \in B$.

1º caso: A seqüência $(z_n)_{n \in N^*}$ está totalmente contida no conjunto *A*. Afirmamos que, neste caso, *y* é elemento de separação para o corte (*A*, *B*). De fato, considerando os intervalos

$$I_n = [z_n, y]$$

é fácil ver que o comprimento de I_n vale

$$\frac{1}{2^n}(y-x).$$

Daí, supondo que *y* não é elemento de separação de (*A*, *B*), teríamos

$$y \in B \text{ e existe } \overline{y} \in B \text{ com } \overline{y} < y$$

Definido $h = y - \overline{y}$, teríamos

$$h = y - x - (\overline{y} \text{-} x)$$

Utilizando a propriedade arquimediana, escolha *n* tal que

$$(y-x) < 2^n \left(y - \overline{y}\right),$$

ou seja, estamos escolhendo um intervalo $I_n = [z_n, y]$ que satisfaz

$$\text{comprimento de } I_n = \frac{1}{2^n}(y-x) < \left(y - \overline{y}\right);$$

isto significa que

$$y - z_n < y - \overline{y} \ ,$$

ou ainda, que

$$z_n > \overline{y} \, ,$$

absurdo, pois $z_n \in A$ e $\overline{y} \in B$.

2º caso: A seqüência $(z_n)_{n \in N^*}$ a partir de um certo índice $n_0 \in N^*$ é formada por elementos de *B*:

$$z_{n_0 - 1} \in A \ \text{ e } \ z_{n_0} \in B$$

A partir deste momento, abandonamos a seqüência $(z_n)_{n \in N^*}$ e definimos novos elementos w_n definidos não mais pela média com *y*, mas sim pela média com $z_{n_0 - 1}$. Mais precisamente:

$$w_n = \begin{cases} z_n \, , \ se \ n < n_0 \\ \dfrac{z_{n_0 - 1} + y}{2} \ \ se \ \ n = n_0 \end{cases}$$

e, para $n > n_0$,

$$w_{n+1} = \frac{z_{n_0 - 1} + w_n}{2} \ .$$

Os intervalos $J_n = [w_n , y] = I_n$ para $n < n_0$ satisfazem

$$\text{comprimento de } J_n = \frac{1}{2^n}(y - x).$$

Já o intervalo

$$J_{n_0} = [z_{n_0 - 1}, w_{n_0}] \subset [z_{n_0 - 1}, y] = I_{n_0 - 1}$$

satisfaz

$$\text{comprimento de } J_{n_0} = \frac{1}{2} \text{comprimento de } I_{n_0 - 1} = \frac{1}{2^{n_0}}(y - x)$$

E, para $n > n_0$, não é difícil convencer-se que $J_n = \lfloor z_{n_0 - 1}, w_{n_0} \rfloor$ continua satisfazendo a propriedade

$$\text{comprimento de } J_n = \frac{1}{2^n}(y - x)$$

Repetimos a construção se a seqüência $(w_n)_{n \in N^*}$ não for uma seqüência totalmente contida em *B*.

Com esta construção, vamos construir uma seqüência de intervalos encaixantes $([a_n, b_n])_{n \in N^*}$ cujos extremos da esquerda a_n são sempre elementos de *A* e cujos extremos da direita b_n são sempre elementos de *B*. Além disso, como o comprimento do *n*-ésimo intervalo é $\frac{(y - x)}{2^n}$, temos também garantido que tal seqüência é de intervalos evanescentes. Daí, como estamos supondo válida a condição (*i*), concluímos que existe um único elemento de *K*, que vamos denotar por *k*, comum a todos os intervalos desta seqüência.

Afirmamos que *k* é um elemento de separação do corte (*A*, *B*). De fato, como A e B formam uma partição para *K*, temos $k \in A$ ou $k \in B$. Vamos aqui provar a afirmação para o caso em que $k \in B$. Suponhamos (por absurdo) que existe $d \in B$ tal que $d < k$. Como $d \in B$ e $a_n \in A$, para todo *n*, temos

$$a_n < d < k \leq b_n$$

para todo *n*. Daí concluímos que $d \in \lfloor a_n \; , b_n \rfloor$, para todo *n*, o que é um absurdo, pela condição (*i*).

$(iii) \Rightarrow (i)$: Seja $([x_n, y_n])_{n \in N^*}$ uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes. Consideremos então os conjuntos

$$A = \{x \in K / \exists n \in N^* \text{ tal que } x \leq x_n\}$$

$$B = \{y \in K / \exists n \in N^* \text{ tal que } y_n \leq y\}$$

Note que, pela definição de intervalos encaixantes, temos

$$\forall n \in N^*, x_n \in A \quad \text{e} \quad y_n \in B$$

Note também que:

- $A \cap B = \varnothing$, pois

$$z \in A \cap B \Rightarrow \exists m,n \in N, \quad z \leq x_n \quad \text{e} \quad y_m \leq z \Rightarrow y_m \leq x_n,$$

absurdo pelo Lema 5;

- todo elemento de *A* é menor ou igual do que qualquer elemento de *B*, pelo Lema 5.

Dividimos agora a prova em casos:

1º caso: $A \cup B \neq K$.

Como $A \cup B \subseteq K$, temos que existe $k \in K$ tal que para qualquer $m \in N^*$, $x_m < k < y_m$, ou seja, para qualquer $m \in N^*$, $k \in [x_m, y_m]$, e a prova está completa neste caso.

2º caso: $A \cup B = K$ e A tem maior elemento, digamos *a*.

Neste caso, existe $n_0 \in N$ tal que *1º caso:* $a \leq x_{n_0}$. Mas como $x_m \in A$, para todo $m \in N^*$, concluímos:

$$a = x_{n_0} = x_{n_0+1} = \ldots,$$

e portanto *a* é um elemento comum a todos os intervalos da seqüência., e a prova está completa neste caso.

3º caso: $A \cup B = K$ e A não tem maior elemento.

Neste caso, (A,B) é um corte para K, e portanto, por hipótese existe em K um elemento de separação k_0 para ele. Isto significa que

$$\forall x \in A, \forall y \in B, x < k_0 \leq y;$$

em particular,

$$\forall m \in N^*, x_m < k_0 \leq y_m$$

e portanto k_0 é comum a todos os intervalos, o que completa a prova.

$(i) \Rightarrow (iv)$: Seja *E* um subconjunto não vazio e limitado de *K*. Mostremos que *E* possui supremo, deixando para o leitor a prova (que é análoga) de que *E* possui ínfimo. Denotemos por M_1 uma cota superior para *E* (que existe, pois *E* é por hipótese limitado).

Se $M_1 \in E$ então está pronto: é fácil mostrar que M_1 é supremo para *E*.

Suponhamos agora que $M_1 \notin E$. Construímos, neste caso, uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes $([x_n, y_n])_{n \in N^*}$ da seguinte forma: para x_1 tomamos qualquer elemento de *E* que não seja o maior elemento de *E* e $y_1 = M_1$. Tome agora

$$z_1 = \frac{x_1 + y_1}{2} \quad ;$$

- se z_1 for cota superior para *E* então defina $x_2 = x_1$ e $y_2 = z_1$;
- se z_1 não for cota superior para *E* então defina $x_2 = z_1$ e $y_2 = y_1$.

Note que, em qualquer caso:

- I_2 tem para comprimento a metade do comprimento *h* de I_1;
- existe pelo menos um elemento de *E* pertencente a I_1;
- existe pelo menos um elemento de *E* pertencente a I_2.

Repita o procedimento para o intervalo I_2, criando um intervalo I_3 contido em I_2 com comprimento metade do comprimento de I_2 e que possua pelo menos um elemento de *E*, e assim sucessivamente. Estaremos deste modo obtendo uma seqüência de intervalos

$(I_n)_{n\in N^*}$ encaixantes e evanescentes cujo extremo direito é uma cota superior para *E* e o esquerdo não é e que têm comprimentos iguais a $\frac{1}{2^n}h$. Portanto, por hipótese, existe um único elemento de *K* comum a todos estes intervalos e que vamos denotar por *x*. Afirmamos que *x* é supremo para o conjunto *E*. De fato, se existe um elemento $a \in E$ satisfazendo $x \le a$ então

$$x_n \le x \le a \le y_n$$

para qualquer $n \in N^*$ (já que os y_n são cotas superiores para *E*). Concluímos então que *a* é também um elemento pertencente a todos os intervalos I_n, e portanto, pela unicidade em (*iv*), temos

$$x = a,$$

donde deduzimos que *x* é o supremo para o conjunto *E*.

(*iv*)$\Rightarrow$(*i*): Seja $([x_n, y_n])_{n\in N^*}$ uma seqüência de intervalos encaixantes e evanescentes. Sabemos então que $(x_n)_{n\in N^*}$ é uma seqüência não-decrescente, e que é também limitada (por qualquer y_n - veja demonstração do Lema 5). Logo, por hipótese, o conjunto $E = \{x_n | n \in N^*\}$ possui supremo, digamos *x*. Afirmamos que *x* é um elemento comum a todos os intervalos da seqüência. De fato, suponha (por absurdo) que $x \notin [x_k, y_k]$; isto significa que

$$y_k < x.$$

Mas, pelo Lema 5, para todo $n \in N^*$, tem-se $x_n \le y_k$ de modo que, pondo ε = $x - y_k$ temos que não existe nenhum elemento do conjunto *E* entre *x*- ε = y_k e *x*, absurdo, pela definição de supremo.

Isto conclui a prova do teorema.

Definição 13: *Um corpo ordenado arquimediano K é dito* **completo** *se K satisfaz alguma (e portanto todas) das condições do Teorema 1. Neste caso, a condição (i) é chamada* ***Teorema dos Intervalos Encaixantes*** *e a condição (iv) é chamada* ***Princípio/Axioma do Supremo****.*

O teorema 1 não garante a *existência* de um corpo ordenado completo. Para provar tal existência, podemos nos valer de qualquer uma das condições equivalentes do Teorema 1. Nas próximas seções, descrevemos brevemente, de três maneiras distintas (utilizando as três primeiras condições), a construção de um corpo ordenado arquimediano completo a partir do conjunto dos números racionais, chegando, em cada uma delas, à representação decimal dos elementos deste corpo. Salientamos que a quarta condição costuma ser utilizada não como *condição definidora,* mas sim como *propriedade* dos corpos construídos por alguma das outras três condições e dela deduzir outras propriedades destes corpos.

Assim,

- se fizermos uso da condição (*i*), estaremos desenvolvendo a abordagem apresentada no livro [R-R-S];
- se fizermos uso da condição (*ii*), estaremos desenvolvendo a abordagem de Cantor, cujos detalhes podem ser encontrados em [H] e também em [M];
- se fizermos uso da condição (*iii*), estaremos desenvolvendo a abordagem de Dedekind, cujos detalhes podem ser encontrados em [R].

Em cada uma destas referências, encontra-se a construção de forma detalhada, nem sempre, no entanto, chegando até a expansão decimal de um irracional. Por isso, fazemos esta parte final em detalhes.

4.2 A construção de Dedekind dos números reais

Dedekind (1831-1916) relata que foi buscar inspiração para sua construção dos números reais na teoria das proporções de Eudoxo. Assim, em 1887, ele escreve:

> "... e se interpretamos número como razão de duas grandezas, há de se convir que tal interpretação já aparece na célebre definição dada por Euclides sobre igualdade de razões. Aí reside a origem de minha teoria (...) e muitas outras tentativas de construir os fundamentos dos números reais".

A definição de Eudoxo associa a cada par de segmentos, digamos (A, B), dois conjuntos de pares (m, n) de números naturais: o conjunto A dos pares para os quais $mB < nA$ e o conjunto B dos pares para os quais mB > nA. Com esta inspiração geométrica (incomensurabilidade de segmentos de reta), Dedekind fez uma construção mais algébrica do conjunto dos reais a partir do conhecimento do conjunto Q dos números racionais e define *corte.*

4.2. 1 A construção de *R*

Definição 1: *Um corte de Q é um par ordenado (A , B) onde A e B são subconjuntos não vazios e disjuntos de números racionais tais que, A não possui elemento máximo,* $A \cup B = Q$ *e, dados* $x \in A$ *e* $y \in B$*, tem–se* $x < y$.

Observação: Estamos exigindo que o par (A, B) é tal que A não possua maior elemento para garantirmos uma correspondência que associa a cada racional um *único* corte de Q.

Exemplo: Fixado um número racional r, tomando

$$A = \{x < r \,/\, x \in Q\} \quad \text{e} \quad B = \{x \geq r \mid x \in Q\},$$

temos um exemplo de corte de Q. Note que, neste caso, B possui menor elemento que é precisamente o racional r.

O que Dedekind observou é que existem cortes de *Q* tais que *B* não possui menor elemento em *Q*. A estes cortes Dedekind associou um novo número *s* que, obviamente, não é racional, e chamou tanto este novo número quanto o racional *r* do exemplo acima, de *elemento de separação.*

Dedekind define então como conjunto dos números reais (denotado neste texto por *R)* o conjunto formado por todos os elementos de separação de cortes de *Q* e chama de *irracionais* todos os elementos de separação que não são números racionais.

Estabelecendo uma relação de ordem no conjunto *R* que amplie a ordem de *Q*, definimos: se *s* é o irracional originado pelo corte *(A, B)*, então diremos que *s* é estritamente menor do que qualquer elemento de *B* e estritamente maior do que qualquer elemento de *A*. Observa-se, assim, que *Q* e *R* são conjuntos ordenados, e prova-se também que, mais do que isto, é possível definir operações de adição e multiplicação de reais, e ambos são *corpos ordenados.* Além disso, é também possível mostrar que *Q* e *R* são arquimedianos. Queremos então mencionar que a diferença entre eles, como corpos ordenados e arquimedianos, reside na *completude* do conjunto *R*.

De forma análoga ao feito para os racionais, definimos corte de *R*:

Definição 2: *Um corte de R é um par ordenado (A , B) onde A e B são subconjuntos não vazios de números reais tais que, A não possui elemento máximo,* $A \cup B = R$ *e, dados* $x \in A$ *e* $y \in B$*, tem–se* $x < y$.

O conjunto *Q* não é um conjunto completo, pois há cortes de *Q* sem elementos de separação (em *Q*). No entanto, o teorema a seguir expressa a completude dos reais.

Teorema: *Todo corte de números reais possui elemento de separação.*

4.2.2 A Representação decimal dos números reais

Preocupamo-nos agora com uma representação "confortável" para os números reais e que vai nos permitir expressar a medida de qualquer segmento de reta e melhor operar com os números reais. Quando este número for racional vamos simplesmente considerar sua representação decimal. Resumino-nos aqui a procurar uma representação para um número irracional.

Seja s um irracional que é elemento de separação de um corte (A, B). Como definido acima, s é menor do que qualquer elemento de B e maior que qualquer elemento de A, ou seja:

$$\forall r_1 \in A,\ r_2 \in B,\ r_1 < \mathbf{s} < r_2,$$

Como A e B são constituídos por números racionais, podemos considerar os racionais r_1, e r_2, aproximações para *s, por falta e por excesso*, respectivamente.

Detalhemos este processo para $s > 0$:

Como s está entre dois racionais, um deles elemento de A e outro de B, existe, pela propriedade arquimediana, um valor $m \in \boldsymbol{N}$ tal que $m \in A$, $m+1 \in B$; portanto, temos

$$m < s < m+1.$$

Podemos, numa próxima etapa, determinar, também utilizando a propriedade arquimediana, um dígito a_1 tal que $m,a_1 \in$ A e $m,a_1 + \frac{1}{10} \in B$, e portanto

$$m,a_1 < \text{s} < m,a_1 + \frac{1}{10}.$$

Observa-se que a diferença entre as duas aproximações consideradas acima é menor do que $\frac{1}{10}$.

Continuando com este processo indefinidamente, podemos obter, para cada $n \in N$, um conjunto de dígitos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tais que

$$m, a_1 a_2 \ldots a_n \in A \quad \text{e} \quad m, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n} \in B,$$

ou seja,

$$m, a_1 a_2 \ldots a_n < \mathbf{s} < m, a_1 a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}.$$

Assim, é um tanto natural associarmos então a este número irracional s a lista infinita $m, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, que vamos chamar de *expansão decimal do irracional s* e que tem o seguinte significado numérico:

$$\begin{aligned}
&m < s < m+1 \\
&m, a_1 < s < m, a_1 + \frac{1}{10} \\
&m, a_1 a_2 < s < m, a_1 a_2 + \frac{1}{100} \\
&\vdots \\
&onde \quad m, n \in N \\
&a_1, a_2, .. a_n \quad são \quad dígitos \quad entre \quad 0 \quad a \quad 9.
\end{aligned}$$

É fácil ao leitor dar-se conta que, se aplicarmos o mesmo processo a um elemento de separação racional, o que vamos obter é precisamente a expansão decimal deste racional.

4.3 A construção de Cantor dos números reais

Como no método de Dedekind, o método de Cantor (1845-1918) parte do pressuposto de que já estamos de posse dos números racionais, com todas as propriedades de corpo ordenado arquimediano.

4.3.1 A construção de *R*

Denotemos por S(*Q*) o conjunto de todas as seqüências de elementos de *Q*.

Definimos uma estrutura de anel comutativo com unidade sobre o conjunto S(*Q*) com as seguintes operações:

$$(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n)$$

$$(x_n)(y_n)=(x_n y_n)$$

cujo elemento neutro da adição é a seqüência nula $(e_n) = 0$ onde $e_n = 0$, para todo $n \in N$, e o elemento unidade é a seqüência $(u_n) = 1$ onde $u_n = 1$ para todo $n \in N$ e o simétrico de $(x_n) \in S(Q)$ é dado por

$$-(x_n) = (-x_n).$$

Definição 1: *Uma seqüência* (x_n) *de* S(*Q*) *é dita* ***limitada*** *se, e somente se, existe um racional positivo* M *tal que*

$$|x_n| \le M, \forall n \in N.$$

Indicaremos por $S_l(Q)$ o conjunto de todas as seqüências limitadas de elementos de Q.

Munidos das operações de adição e multiplicação, mostra-se que $S_l(Q)$ é subanel de S(*Q*).

Definição 2: *Uma seqüência* (x_n) *de S(Q) é dita* ***convergente*** *se existe* $x \in Q$ *tal que, para todo* $\varepsilon \in Q$, *com* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in N$ *que satisfaz*

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Indicamos por $S_c(Q)$ o conjunto de todas as seqüências convergentes de elementos de Q.

Mostra-se que toda seqüência convergente é limitada, ou seja,

$$S_c(Q) \subset S_l(Q),$$

e mais até: $S_c(Q)$ é subanel de $S_l(Q)$.

Seja $S_o(Q)$ o conjunto de todas as seqüências de elementos de Q que convergem para zero. Mostra-se aqui também que $S_o(Q)$ é subanel de $S_c(Q)$, de modo que temos então

$$S_o(Q) \subset S_c(Q) \subset S_l(Q) \subset \text{S}(Q) \text{ (inclusões todas como subanéis).}$$

Vamos construir agora um subanel intermediário entre $S_c(Q)$ e $S_l(Q)$.

Definição 3: *Uma seqüência* (x_n) *de números racionais é dita* ***seqüência de Cauchy*** *se, e somente se, para qualquer que seja o número racional* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in N$ *que satisfaz*

$$n, m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon .$$

Seja $\mathrm{C}(Q)$ o conjunto de todas as seqüências de Cauchy de números racionais.

Mostra-se que toda seqüência convergente é de Cauchy, ou seja,

$$S_c(Q) \subseteq \mathrm{C}(Q)$$

inclusão aqui também como subanel.

Mas nem toda seqüência de Cauchy é convergente em *Q:* basta tomarmos a seqüência (x_n) definida recursivamente da seguinte forma: $x_1 = 2$; daí como $x_1^2 = 2^2 > 2$ e $1^2 < 2$ tomamos para x_2 a média aritmética entre 1 e x_1, ou seja,

$$x_2 = \frac{3}{2};$$

como $x_2^2 = \frac{9}{4} > 2$ e $1^2 < 2$, tomamos para x_3 a média aritmética entre 1 e x_2, ou seja,

$$x_3 = \frac{5}{4}.$$

Agora, como $x_3^2 = \frac{25}{16} < 2$ e $2^2 > 2$, tomamos para x_4 a média aritmética entre x_2 e x_3, ou seja,

$$x_4 = \frac{11}{8},$$

e assim sucessivamente. Afirmamos que esta seqüência é de Cauchy e, no entanto, não converge para nenhum número racional.

Mostra-se também que toda seqüência de Cauchy é limitada, ou seja,

$\mathcal{C}(Q) \subseteq S_l(Q)$ (inclusão como subanel).

Mostra-se mais ainda: que $S_o(Q)$ é ideal maximal do anel $\mathcal{C}(Q)$ (note aqui outra maneira de mostrarmos que nem toda seqüência de Cauchy é convergente) e, portanto, faz sentido falarmos na relação de equivalência ~ induzida pelo ideal $S_o(Q)$, que, por ser maximal, vai até proporcionar uma estrutura de corpo no conjunto quociente. Mais precisamente:

Definição 4: *Definimos no conjunto $\mathcal{C}(Q)$* ***a relação ~*** *do seguinte modo: se (x_n) e (y_n) são dois elementos quaisquer de $\mathcal{C}(Q)$, então*

$$(x_n) \sim (y_n) \text{ se, e somente se, } (x_n - y_n) \in S_o(Q)$$

Por ser $S_o(Q)$ ideal de $C(Q)$, temos que a relação ~ definida acima é uma relação de equivalência no conjunto $C(Q)$, que é compatível com a adição e a multiplicação do anel $C(Q)$, ou seja, dados

$$(x_n),\ (y_n) \text{ e } (z_n) \in C(Q) \text{ e se } (x_n) \sim (y_n)$$

então

$$(x_n + z_n) \sim (y_n + z_n) \text{ e} (x_n z_n) \sim (y_n z_n)$$

Definição 5: *Uma seqüência (x_n) é **estritamente positiva** se, e somente se,* $\exists\, M \in Q_+$ *e* $\exists\, n_0 \in N$ *tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow x_n > M .$$

Mostra-se que se $(x_n),(y_n) \in C(Q)$ e se $(y_n) \sim (x_n)$ e (x_n) é estritamente positiva, então (y_n) também é estritamente positiva e, portanto, a relação de equivalência ~ conserva as seqüências estritamente positivas.

Definição 6: *Seja (x_n) um elemento qualquer de $C(Q)$, . Indicaremos por $\overline{(x_n)}$ a classe de equivalência módulo ~ determinada pela seqüência (x_n), ou seja,*

$$\overline{(x_n)} = \{ y_n \in C(Q) \,/\, (y_n) \sim (x_n) \}$$

Definição 7: *O conjunto quociente de $C(Q)$ pela relação de equivalência ~ é indicado por R, isto é, R = $C(Q)/\sim$, e seus elementos são chamados de **números reais**.*

Por ser $S_o(Q)$ ideal maximal de $C(Q)$, temos garantido que o conjunto *R*, munido das operações de adição e multiplicação naturalmente herdadas de $C(Q)$, tem a estrutura de corpo.

Definição 8: *Definimos a **soma** e o **produto** de dois elementos quaisquer $\alpha = \overline{(x_n)}$ e $\beta = \overline{(y_n)}$, de R da seguinte forma:*

$$\alpha + \beta = \overline{(x_n + y_n)}$$

e

$$\alpha\beta = \overline{(x_n y_n)}$$

Além disso, esta estrutura herda também naturalmente uma ordem, que a torna corpo ordenado:

Definição 9: *Um número real* $\alpha = \overline{(x_n)}$ *é dito* ***estritamente positivo*** *se, e somente se, a seqüência de Cauchy* (x_n) *é estritamente positiva.*

Denotamos por P o conjunto de todos os reais positivos.

Definição 10: *Se* $\alpha = \overline{(x_n)}$ *e* $\beta = \overline{(y_n)}$ *são dois números reais quaisquer então escrevemos* $\alpha \leq \beta$ *se, e somente se,*

$$\alpha = \beta \text{ ou } \beta - \alpha \in P,$$

ou seja, $\alpha \leq \beta$ *se, e somente se,*

$$(y_n - x_n) \in S_o(Q) \text{ ou } \exists M \in N, \exists n_o \in N$$

tal que

$$n > n_o \Rightarrow y_n - x_n > M.$$

Mostra-se que com as operações e relação de ordem acima definidas, R é um corpo ordenado e até arquimediano, ou seja, dado $\alpha = \overline{(x_n)} \in P$, existe $M \in N$, identificado a classe $\overline{(M)}$ tal que $\alpha < M$

Nesta construção dos números reais por seqüências de Cauchy, o conjunto Q pode ser identificado como um subcorpo ordenado de R, através do homomorfismo injetor $f : Q \to R$ que associa, a cada número racional x, a classe da seqüência constante $\overline{(x)}$.

Dessa forma, as classes que não pertencem à imagem de f correspondem ao que chamamos *números irracionais*.

Observa-se, assim, que Q e R são ambos corpos ordenados arquimedianos. Queremos então mencionar que a diferença entre eles, como corpos ordenados e arquimedianos, reside na *completude* do conjunto R.

De forma análoga ao feito para os racionais, definimos seqüências, seqüências convergentes e seqüências de Cauchy de números reais.

Como vimos acima, Q não é completo, pois existem seqüências de Cauchy que não são convergentes. No entanto, o teorema a seguir expressa a completude dos reais.

Teorema: *Toda seqüência de Cauchy de números reais converge.*

4.3.2 A representação decimal dos números reais

Novamente preocupamo-nos com uma representação "confortável" para os números reais, agora via seqüências de Cauchy, e que vai nos permitir expressar a medida de qualquer segmento de reta.

Resumimo-nos a determinar a expansão decimal de um número real positivo s, digamos,

$$s = \overline{(x_n)}$$

1º caso: A seqüência (x_n) converge para um natural *m*. Neste caso, tomamos para *s* a representação decimal de *m*.

2º caso: A seqüência (x_n) não converge para um natural. Neste caso, definimos *m* como sendo o maior natural com a seguinte propriedade: *existe um número finito de termos da seqüência menores do que m e infinitos termos maiores do que m.*

Afirmação 1: *Existem infinitos termos da seqüência no intervalo* $[m,m+1]$*, caso contrário estaríamos contradizendo o caráter maximal de m.*

Afirmação 2: *Apenas um número finito dos infinitos termos da seqüência maiores do que m são maiores do que m+1.*

De fato, caso contrário, teríamos infinitos termos da seqüência menores do que m+1 e infinitos termos maiores do que m+1. Mas sendo a seqüência em questão uma seqüência de Cauchy, isto só pode acontecer se ela convergir para o natural m+1, o que não é o caso.

Assim, a partir de um certo índice, todos os termos da seqüência pertencem ao intervalo [m,m+1].

Subdividimos agora este intervalo em dez partes iguais e, como anteriormente, tomamos para a_1 o maior dígito que satisfaz a propriedade: *existe um número finito de termos da seqüência menores do que* m,a_1 *e infinitos termos maiores do que* m,a_1. Com a mesma idéia acima, podemos mostrar que, a partir de um certo índice, todos os termos da seqüência pertencem ao intervalo

$$\left[m,a_1a_2...;m,a_1a_2+\frac{1}{10}\right]$$

Continuando este processo, garantimos a existência de dígitos $a_1,a_2,a_3,...a_n,...$ tais que, para cada n, existe um índice a partir do qual todos os termos da seqüência pertencem ao intervalo

$$\left[m,a_1a_2...a_n;m,a_1a_2...a_n+\frac{1}{10^n}\right]$$

Associamos então ao número real s a lista infinita

$$m,a_1a_2...a_n...$$

É fácil ver que, se s é *racional*, então a lista obtida é a *expansão decimal* do *racional s.* Por isso, em qualquer caso, a lista

$m,a_1a_2...a_n...$ é denominada *expansão decimal* de s.

4.4 A construção dos números reais via medição de segmentos de reta.

Nesta abordagem seremos um pouco menos resumidos do que nas anteriores, para que o capítulo 5 fique mais claro ao leitor.

4.4.1 Estabelecendo algumas terminologias, notações e resultados sobre a reta euclidiana:

Com um compasso e uma régua não graduada podemos estabelecer, sem a noção de medida:

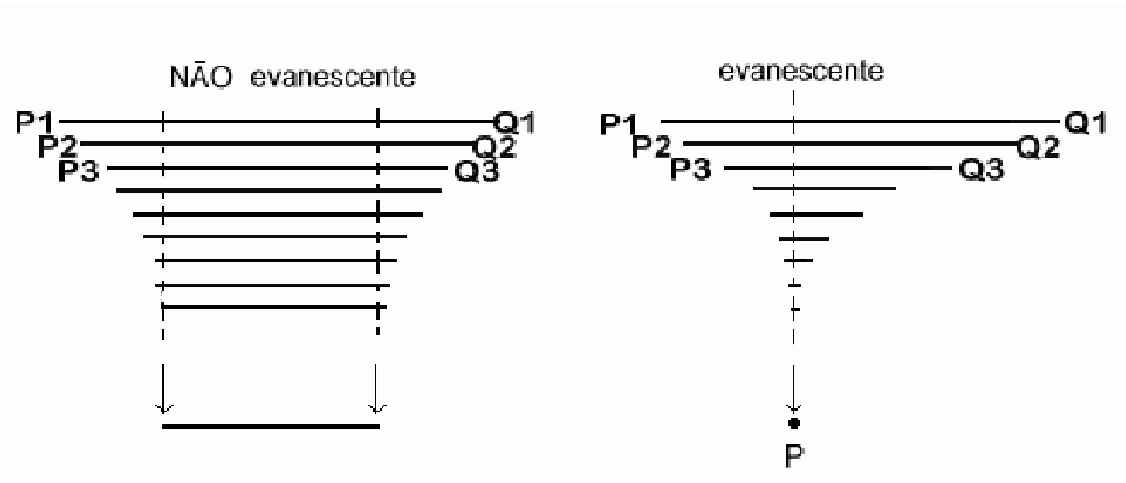
- a congruência de segmentos (aqui estamos fazendo uma abstração)
- a noção de um segmento ser menor do que outro
- a superposição de segmentos sobre uma reta
- a divisão de um segmento de reta em partes iguais (aplicação do Teorema de Tales).

Definição 1: Uma seqüência (infinita) de segmentos de reta P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3,... é dita *encaixante* se, para cada $n \in N^*$, tivermos

$$P_{n+1}Q_{n+1} \subseteq P_nQ_n.$$

Definição 2: Uma seqüência encaixante de segmentos P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3,... é dita *evanescente* se, dado um segmento qualquer AB, com $A \neq B$, sempre pudermos encontrar um natural n tal que P_nQ_n é menor do que AB.

Princípio dos segmentos evanescentes: Se P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3,... é uma seqüência de segmentos evanescentes da reta euclidiana, então existe um, e somente um ponto P comum a todos os segmentos desta seqüência.



4.4.2 A construção da régua decimal infinita.

Consideremos uma reta euclidiana *r* e fixemos sobre *r* um segmento de reta δ qualquer, com a única restrição que o mesmo não seja reduzido a um único ponto.

O segmento δ é então nossa *unidade de medida*, ou *segmento unitário*.

Denotamos por *O* a extremidade esquerda de δ. A construção desta régua é feita por etapas:

i. Em uma primeira etapa marcamos uma série de pontos de *r* do seguinte modo: o primeiro ponto é simplesmente o ponto extremo direito de δ. Denotamos este ponto por *P(1)*. Para marcarmos o segundo ponto, tomamos o compasso e com a abertura tal que suas duas pontas coincidam com os pontos extremos de δ, colocamos a ponta seca do compasso em *P(1)* e marcamos com a outra ponta do compasso um ponto de *r* à direita de *P(1)*. Denotamos este novo ponto por *P(2)*. A seguir colocamos a ponta seca do compasso em *P(2)* e marcamos com a outra ponta um novo ponto de *r*, que denotaremos por *P(3)*, à direita de *P(2)*. Repetindo este processo indefinidamente, obtemos um conjunto de infinitos pontos de *r*:

O, P(1), P(2), P(3), P(4),..., P(n),..., que constituem o que chamamos de *rede de graduação unitária da régua decimal infinita*.

ii. Numa segunda etapa colocamos no compasso uma abertura igual a um décimo do segmento unitário, e marcamos sucessivamente, à direita de *O*, de maneira inteiramente similar à feita para marcar os pontos da rede unitária, os pontos *P(1/10),P(2/10),P(3/10),..., P(10/10), P(11/10),...* . Ficamos, assim, com um novo conjunto infinito de pontos:

O, P (1/ 10), P (2/10), P (3/10)... P (10/10) =P (1),

P (11/10), P (12/10),..., P (20/10) =P (2),

P (21/10), P (22/10),... ,P (30/10) =P (3)

...

ou, usando a representação decimal dos racionais:

O, P (0, 1), P (0, 2), P (0, 3)... P (1, 0) =P (1),

P (1, 1), P (1, 2), P (2, 0) =P (2),

P (2,1), P (2,2),... P (3,0) =P (3),

...

A este conjunto de pontos chamamos de *rede de graduação decimal da régua decimal infinita.*

iii. Numa terceira etapa, usamos o compasso com abertura igual a um centésimo do segmento δ e marcamos, de maneira inteiramente análoga, os pontos do que chamamos *rede de graduação centesimal:*

O, P(1/100), P(2/100), P(3/100),..., P(10/100) =P(1/10), P(11/100),..., P(100/100) =P(1),

P (101/100), P (102/100),..., P (200/100) =P (2),

P (201/100), P (202/100),..., P (300/100) =P (3),

...

ou, usando expansão decimal:

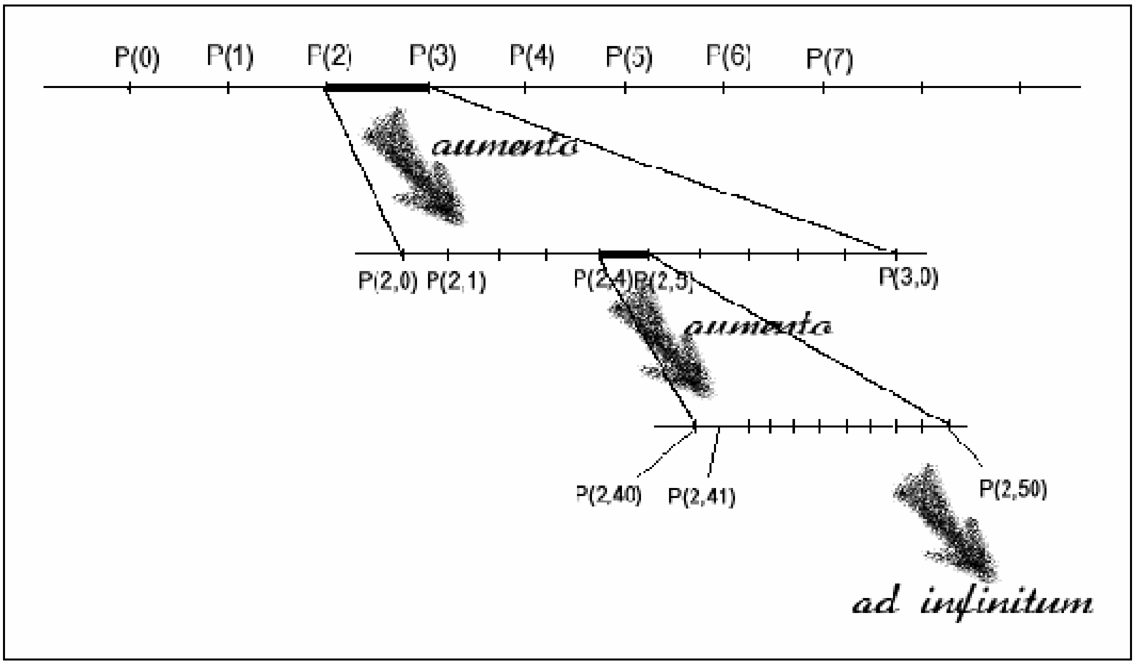
O, P (0, 01), P (0, 02), P (0, 03)... P (1, 00) =P (1),

P (1, 01), P (1, 02)... P (2, 00) =P (2),

P (2,01), P (2,02),..., P (3,00) =P (3),

...

e assim por diante: para cada número natural *n*, construímos ou marcamos os pontos da rede de graduação $\frac{1}{10^n}$ da régua decimal.



A etapa final consiste em considerar o conjunto de todos esses pontos, ou equivalentemente, a união de todas essas redes, que é o que chamamos de *régua decimal infinita de unidade de medida δ*. Note que este conjunto consta de todos os pontos (à direita de *O*) da forma $P(\frac{m}{10^n})$, que são denominados *pontos graduados da reta.* O ponto *O* poderá, eventualmente, ser indicado por *P(0)*.

Resumindo:

A régua decimal infinita de unidade δ consiste de *O* e de todos os pontos *P* que estão à direita de *O* e que satisfazem seguinte propriedade: para algum *m* e algum *n*, ambos naturais, o segmento *OP* é a justaposição de *m* cópias da 10^n-ésima parte de δ, ou seja, $OP = \left(\frac{m}{10^n}\right)\delta$. Neste caso, este ponto *P* é denotado por $P\left(\frac{m}{10^n}\right)$, e, portanto concluímos:

$$OP\left(\frac{m}{10^n}\right) = \frac{m}{10^n}\,\delta.$$

Nesta altura surge-nos a seguinte questão:

Será que, com este processo, ficaram "rotulados" todos os pontos à direita de O?

A resposta é ***não***, pois a medida de qualquer segmento da forma *OP* quando *P* é um ponto graduado é dada por uma fração decimal. Então, se dividirmos a unidade de medida δ em três partes iguais e denotarmos por *OP* a primeira terça parte, temos que *P* não é um ponto graduado da reta, pois, $|OP| = \frac{1}{3}$, que não é igual a nenhuma fração decimal.

O Exemplo acima nos garante então que ***existem pontos à direita de O que não são graduados*** (e não é difícil convencer-se de que eles são infinitos!).

4.4.3 Medindo segmentos com a régua decimal infinita - parte 1

Dados quaisquer naturais *a* e *b* com $b \neq 0$, já sabemos construir um segmento *OP* tal que $|OP| = \left(\frac{a}{b}\right)$, uma vez que $\left(\frac{a}{b}\right) = a\left(\frac{1}{b}\right) = \left|a\left(\frac{1}{b}\right)\delta\right|$.

Outra questão que se coloca aqui é a seguinte:

Será que com tudo o que discutimos acima, consegue-se expressar a medida de qualquer segmento de reta?

Vamos considerar um segmento *AB* com $A \neq B$, já que, quando $A=B$, sabemos que $|AB|=0$.

Com a ajuda de régua não graduada e compasso, podemos transladar *AB* de tal forma que uma das suas extremidades coincida coma origem *O* da régua decimal infinita e a outra fique à direita de *O*.

Denotemos este segmento transladado por *OP,* que é então congruente ao segmento original *AB*. Assim, nosso problema agora é definir apenas medidas do tipo $|OP|$ com *P* um ponto da reta à direita de *O*. Sabemos que não temos problema nenhum em medir segmentos da forma $|OP|$ quando *P* é um ponto graduado da reta:

i. Quando *P* é um ponto graduado da reta a medida $|OP|$ é uma fração decimal da forma $\left(\dfrac{m}{10^n}\right)$;

ii. Existem pontos não graduados da reta que originam segmentos da forma *OP* para os quais também não temos problema nenhum em expressar sua medida. É o caso dos segmentos comensuráveis com a unidade δ, quando então chegaremos a uma fração $|OP| = \left(\dfrac{a}{b}\right)$ não necessariamente decimal.

Neste ponto surge-nos outra questão (natural, mas que representa toda a motivação para o que segue):

Será que os racionais positivos são suficientes para medir qualquer segmento de reta?

Em outras palavras:

Será que qualquer segmento de reta da forma OP com P à direita de O é tal que |OP| pode ser expressa por um número racional?

4.4.4 A insuficiência geométrica dos racionais

A resposta para a questão acima é *não:*

Teorema: *Existem segmentos de reta que não podem ser medidos através de um número racional.*

Prova: Construímos, a partir do segmento unitário δ na reta euclidiana, um quadrado no plano que tem como um dos lados o segmento δ; a seguir, com um compasso, construímos um segmento *S* de *r* que é congruente à diagonal deste quadrado. Se *S* pudesse ser medido por um racional, digamos, $|S|=\left(\frac{a}{b}\right)$, com $a,b \in N^*$, teríamos, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=1^2+1^2=2.$$

Isto, no entanto, é um absurdo, pois não existe um número racional cujo quadrado vale 2.

Conclusão:

Se quisermos expressar a medida exata de qualquer segmento de reta através de um número, somos forçados a expandir nosso conjunto numérico.

4.4.5 Medindo segmentos com a régua decimal infinita - parte 2

Seja *P* um ponto à direita de *O*. Para medirmos o segmento *OP,* a idéia é desdobrarmos o processo de medição em uma seqüência de etapas procurando, a cada etapa, obter uma medida aproximada do segmento, nos aproximando pela esquerda o mais possível do ponto *P* por pontos graduados de uma fixada rede da régua decimal infinita. E fazemos isto determinando pontos consecutivos desta rede que cercam *P:*

i. Numa primeira etapa, determinamos inteiros consecutivos m e m+1 tais que P está entre P(m) e P(m+1), de modo que

$$\mathrm{OP}(m) \subseteq \mathrm{OP} \subseteq \mathrm{OP}\,(m+1).$$

Daí:

-Se P é um ponto da rede de graduação unitária (isto é, $P=P(m)$), então o processo de medição está encerrado: $|OP|=|OP(m)|=m$.

-Se P não for um ponto da rede de graduação unitária (isto é, $OP \neq OP(m)$), então $OP(m) \subset OP \subset OP\,(m+1)$, e neste caso, m não pode ser tomado como a medida exata de *OP:* podemos apenas dizer que m é uma *medida aproximada* do que naturalmente imaginamos ser a medida de *OP,* e com esta aproximação temos um erro menor do que 1, já que, neste caso,

$$m = |\mathrm{OP}(m)| < |\mathrm{OP}(m)| + |\mathrm{P}(m)\mathrm{P}| = |\mathrm{OP}| < |\mathrm{OP}| + |\mathrm{PP}\,(m+1)| = |\mathrm{OP}\,(m+1)| = m+1,$$

e portanto

$$m < |\mathrm{OP}| < m+1.$$

Já que, quando P≠P(m), m não pode ser tomado como a medida exata de *OP,* buscamos então uma melhor aproximação para a "medida de *OP*", recorrendo à rede de graduação decimal:

ii. Numa segunda etapa, verificamos quantos segmentos congruentes a $\frac{1}{10}\delta$ (que medem $\frac{1}{10}$ cada um) cabem, a partir de P(m), no segmento *OP* (note aqui a semelhança com o processo prático de medição utilizado na Escola com régua de graduação finita). Seja a_1 tal quantidade. Afirmamos que $a_1 \in \{0, 1,..., 9\}$, e então a_1 é um dígito tal que

$$P = P\left(m+\frac{a_1}{10}\right) \text{ ou } P \text{ está entre } P\left(m+\frac{a_1}{10}\right) \; e \; P\left(m+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}\right),$$

onde

$$\mathrm{OP}\left(m+\frac{a_1}{10}\right)\subseteq \mathrm{OP}\subset \mathrm{OP}\left(m+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}\right)$$

ou ainda,

$$\mathrm{OP}\left(m,a_1\right)\subseteq \mathrm{OP}\subset \mathrm{OP}\left(m,a_1+\frac{1}{10}\right)$$

Daí:

-Se acontecer que $P=P(m, a_1)$, então P é um ponto da rede de graduação decimal, e o processo de medição está encerrado:

$OP=OP\ (m, a_1)$, donde $|OP|=|OP\ (m, a_1)|= m, a_1$.

-Se $P\neq P(m, a_1)$, então

$$\mathrm{OP}\left(m,a_1\right)\subset \mathrm{OP}\subset \mathrm{OP}\left(m,a_1+\frac{1}{10}\right),$$

e neste caso podemos no máximo dizer que m, a_1 é uma *aproximação* da medida de OP com erro menor que $\frac{1}{10}$, já que, neste caso,

$$m, a_1 =|OP\ (m, a_1)|<|OP\ (m, a_1)|+|P(m, a_1)P|$$

$$= |OP| < |OP| + \left|PP\left(m,a_1+\frac{1}{10}\right)\right| = \left|OP\left(m,a_1+\frac{1}{10}\right)\right|=m,\ a_1+\frac{1}{10},$$

e portanto

$$m,\ a_1 < |OP| < m,\ a_1+\frac{1}{10}$$

iii. Para obtermos uma ainda melhor aproximação da medida de OP no caso em que $P\neq P(m, a_1)$, recorremos à rede de graduação centesimal e repetimos o mesmo raciocínio, procurando um dígito a_2 que nos indique quantas vezes um segmento congruente a $\frac{1}{10^2}\delta$ cabe em OP a partir de $P(m, a_1)$, ou seja, tal que

$$OP\left(m,a_1+\frac{a_2}{100}\right)\subseteq OP\subset OP\left(m,a_1+\frac{a_2}{100}+\frac{1}{100}\right)$$

ou ainda, tal que

$$OP\left(m,a_1a_2\right)\subseteq OP\subset OP\left(m,a_1a_2+\frac{1}{100}\right)$$

Daí:

- Se $P\ =P\left(m,a_1a_2\right)$, então P é um ponto da rede de graduação centesimal de r, e neste caso $|OP|=\ m,a_1a_2$*;*

- Se $P\neq P\left(m,a_1a_2\right)$, então m,a_1a_2 é apenas um valor *aproximado* da medida de OP, com erro menor do que $\frac{1}{10^2}$.

Podemos repetir este processo quantas vezes forem necessárias. Mas aí nos surge naturalmente a seguinte questão:

Será que sempre encontraremos, após um número finito de repetições deste processo, digamos n, um racional $m,a_1...a_n$ *tal que* $P=P(m,a_1...a_n)$*?*

Ou, equivalentemente:

Será que qualquer ponto P à direita de O pertence a alguma rede de graduação da reta?

Já sabemos que a resposta à questão acima é negativa, basta tomarmos o ponto correspondente à medida $\frac{1}{3}$.

O que acontece com o processo de medição do segmento *OP* se o ponto *P* não é um ponto graduado da reta? Em alguns casos, o máximo que conseguimos, até agora foi obter valores numéricos *aproximados* para o que seria a medida de *OP* com erro arbitrariamente pequeno.

Salientamos que na prática, este método é suficiente. No entanto sabemos que, matematicamente falando, no caso em que *P* não é um ponto graduado, o número $m,a_1...a_n$ jamais poderá ser tomado como a medida exata de *OP* pois, como $P \neq P(m,a_1...a_n)$, o erro cometido na aproximação da medida de *OP* jamais será *exatamente* zero. O "erro zero" só será obtido "quando *n* for infinito".

Portanto, para obtermos a medida exata de *OP,* no caso em que *P* não é um ponto graduado da reta, não podemos nos contentar em considerar como expressão exata da medida de *OP* nenhuma "lista finita" do tipo $m,\ a_1...\ a_n$; passamos então a considerar, como expressão exata desta medida, a lista completa, portanto infinita,

$$m,a_1...a_k\ ...,$$

que está significando um processo de medição que não tem fim.

Esta maneira de expressar a medida exata de um segmento nos permite encaminhar de forma inteiramente satisfatória o problema da medição de um segmento qualquer de reta:

Definição: *A medida exata de um segmento é expressa por uma lista da forma* $|OP| = m,$ $a_1a_2...$ *onde* $m \in N$ *e* $a_1,a_2,...$ *são dígitos, com o seguinte significado: para cada n, o racional* $m,a_1...a_n$ *é uma aproximação da medida de OP com erro menor do que* $\frac{1}{10^n}$.

Resumindo:

Dado um segmento de reta *AB,* o processo de obtenção da medida de *AB* via régua decimal infinita associa a *AB:*

i. o número *0* se $A=B$;

ii. uma lista finita da forma $m,\ a_1a_2...\ a_n$, com $m \in N$ e $a_1, a_2,.. ,a_n$ dígitos, no caso de *AB* ser congruente a um segmento *OP* sendo *P* um ponto graduado da reta diferente de *O;*

iii. uma lista infinita da forma $m, a_1a_2...$, com $m \in N$ e $a_1, a_2, ... a_n$,... dígitos, no caso de AB ser congruente a um segmento OP sendo P um ponto não graduado da reta.

Com esta definição, antes de chamarmos tais listas de números, surgem ainda várias questões, as duas primeiras relativas a checar se tudo o que fizemos até agora é "coerente":

Questão 1: Já aprendemos a, dados quaisquer naturais a e b com $b \neq 0$, construir um segmento OP tal que $|OP| = \left(\frac{a}{b}\right)$, a saber: OP= $a\left(\frac{1}{b}\delta\right)$. A questão que podemos nos colocar é:

Que lista obtemos ao aplicarmos o processo acima a este ponto P? O quê tal lista tem a ver com o número racional $\frac{a}{b}$?

Afirmamos que o processo de medida de qualquer segmento de reta através da régua decimal infinita que descrevemos acima, para o caso de um segmento da forma $a\left(\frac{1}{b}\delta\right)$, nada mais é do que a tradução geométrica do processo de determinação da expansão decimal do número racional $\frac{a}{b}$. Portanto, quando $OP = a\left(\frac{1}{b}\delta\right)$ podemos escrever:

$$|OP| = m, a_1a_2... = \frac{a}{b},$$

sem ambigüidade de interpretação.

Questão 2: E, sobre o problema inverso:

Suponha que a lista obtida através do processo de medição de um segmento via régua decimal infinita seja igual à lista que representa a expansão decimal de um racional. Podemos então dizer que este racional é a medida deste segmento?

A resposta é *sim*. Mais precisamente: se pelo processo de medição via régua decimal infinita de um segmento OP obtivemos uma lista finita ou infinita periódica de período não composto só por 9's, e se $\frac{p}{q}$ é o racional cuja expansão decimal é dada por esta mesma lista, então

$$OP = \frac{p}{q}\delta ,$$

e portanto

$$|OP| = \frac{p}{q}$$

Conseqüência das duas considerações acima: vimos que existem segmentos cuja medida exata não pode ser expressa por um racional, e vimos agora que se a lista for finita ou infinita periódica então a medida do segmento é racional. Concluímos:

Se um segmento não tem medida racional, a lista que expressa sua medida não é finita nem periódica, e portanto, existem listas infinitas e não periódicas expressando medida de segmentos !

Assim, para que possamos medir de maneira exata *todos* os segmentos de reta através da régua decimal infinita, não nos resta alternativa a não ser a de ampliar nosso universo numérico, incluindo neste novo universo números representados por listas do tipo $m,a_1a_2...$ com $m \in N$ e a_i dígito, para todo i, e que não provêm da expansão decimal de nenhum racional (portanto infinitas e não periódicas).

No entanto, surgem aqui ainda duas questões fundamentais que devem ser ressaltadas e discutidas antes de adotarmos definitivamente esta estratégia:

Questão 3: *Será que qualquer lista tipo $m,a_1a_2...$ com $m \in N$ e a_i dígitos, representa sempre a medida de algum segmento de reta?*

Questão 4: *Não poderia uma situação análoga à que ocorre com os racionais (a saber, a de existirem frações distintas representando a mesma quantidade e, portanto, determinando um mesmo número racional) ocorrer com as listas acima definidas? Ou seja: não podem duas listas distintas estar representando uma mesma medida?*

Começaremos discutindo a questão 3. Consideremos inicialmente uma lista infinita $x = m, a_1a_2... a_n...$ Se existir um ponto P à direita de O tal que $|OP| = m, a_1a_2... a_n...$, então ele deverá pertencer a cada um dos segmentos

$$P\ (m)\ P\ (m+1),\ P\ (m,\ a_1)\ P\ (m,\ a_1+\frac{1}{10}),$$

$$P\ (m,\ a_1a_2)\ P\ (m,\ a_1a_2+\frac{1}{100}),$$

...

$$P\ (m,\ a_1a_2...\ a_n)\ P\ (m,\ a_1a_2...\ a_n+\frac{1}{10^n}),...$$

de modo que, para tal ponto ter a chance de existir, deveria pelo menos existir um ponto comum a todos os segmentos listados acima. E, de fato, a seqüência de segmentos acima é encaixante e evanescente; logo, pelo Postulado dos Segmentos Evanescentes, existe um único ponto Q comum a todos os seus segmentos. Assim, se existir um ponto P à direita de O tal que $|OP| = m, a_1a_2... a_n ...$, então necessariamente ele terá que ser igual a este ponto Q. Tentemos então determinar, via régua decimal infinita, a lista que expressa o comprimento do segmento OQ:

i. a lista não tem período só formado por 9's. Neste caso não é muito difícil se convencer que a lista obtida, via régua decimal infinita, para medir o segmento OQ, sendo Q o ponto acima construído, é precisamente a lista $m,a_1a_2...$.

ii. a lista é periódica de período só formado por 9's. Neste caso afirmamos que sabemos até dizer quem é o ponto *Q*. Vamos aqui fazer um exemplo para apenas dar a idéia do argumento:

a) Consideremos a lista infinita 12,344999... . A tal lista associamos a seguinte seqüência de segmentos evanescentes:

P(12)P(13),

...,

P(12,344)P(12,345),

P(12,3449)P(12,345),

P(12,34499)P(12,345),...,

que tem o ponto *P(12,345)* presente em todos os seus segmentos de modo que, como estes são evanescentes, *P(12,345)* é o único ponto comum a todos estes segmentos. Mas *P(12,345)* é um ponto graduado, e então, pelo método da régua decimal infinita, já conhecíamos a lista que expressa sua medida, a saber, a lista finita 12,345; que obviamente, em termos de lista, não é igual a 12,344999... .

Portanto, todas as possíveis listas da forma $m, a_1a_2...$ com $m \in N$ e $a_1, a_2,..$ dígitos com *exceção das listas periódicas de período formado só por 9's* expressam a medida de algum segmento da forma *OP* com *P* um ponto à direita de *O*.

Assim, se nosso problema é aumentar o conjunto numérico exclusivamente para conseguirmos expressar a medida exata de qualquer segmento, vemos que precisamos incluir as listas da forma $m,a_1a_2...$ com $m \in N$ e $a_1,a_2,..$ dígitos, que *não são periódicas de período formado só por 9's.*

Definição: *Dizemos que uma lista* $m, a_1a_2... a_s999...$ *com* $m \in N$ *e* $a_1,a_2,.. a_i$ *dígitos expressa a mesma quantidade numérica que a lista* $m, a_1a_2... a_{s-1}b000...$ *, onde* $b=a_s+1$*, a saber, a* *medida do segmento OP(m, a_1a_2... $a_{s-1}b$), enquanto que uma lista da forma m,999... expressa a mesma quantidade numérica que a lista b,000..., onde b=m+1.*

Passemos agora à questão 4 levantada acima: podem duas listas distintas estar representando uma mesma medida? Agora a resposta é evidente: *Sim,* pela definição acima.

Concluímos:

Todo segmento de reta pode ser medido por uma lista infinita m, a_1a_2... , onde m é um número natural e a_1,a_2,... são dígitos. Reciprocamente, *toda lista m, a_1a_2... é medida de algum segmento de reta. Além disso, um segmento admite duas listas distintas expressando sua medida se e somente se é congruente a um segmento OP sendo P um ponto graduado.*

Agora sim podemos ampliar o conceito de número, considerando também como números tais listas infinitas, criando assim os chamados *reais absolutos,* mas mediante a condição de igualdade explicitada:

Definição: *O conjunto dos* ***números reais absolutos*** *é o conjunto de todas as listas infinitas m, a_1a_2... com $m \in N$ e a_i dígitos, para i =1,2,...,submetidas ao seguinte critério de igualdade:*

m_1, a_1a_2...= m_2, b_1b_2... $\Leftrightarrow$ ambas as listas medem um mesmo segmento da reta euclidiana.

Com isso, o conjunto dos números reais absolutos inclui todos os números racionais positivos (as listas periódicas). As listas não periódicas são chamadas de *números irracionais absolutos*. Continuamos a denominar qualquer lista que representa um real absoluto *x* de *expansão decimal de x.*

4.4.6 Representação dos reais absolutos

Ao construirmos um número real, via *medição exata de segmentos de reta*, associamos ao segmento $\overline{OA}$ a lista $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ a esta lista chamamos de medida do segmento $\overline{OA}$, ou seja, OA = medida de $\overline{OA}$ = $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ e dessa forma expressamos a medida de qualquer segmento de reta através de uma lista (talvez infinita).

Por esta construção, o *conjunto dos Números Reais Absolutos* é o conjunto de todas as expressões da forma $m, a_1 a_2 a_3 \ldots$, onde m é um número natural e os demais a_n são números naturais entre 0 e 9 (chamados algarismos ou dígitos), com o seguinte significado numérico:

* 0,000... = 0

* um número real absoluto não nulo x=$m, a_1 a_2 a_3 \ldots$ expressa uma quantidade tal que:

$$
\begin{array}{l}
m \le x \le m+1 \\
m, a_1 \le x \le m, a_1 + \dfrac{1}{10} \\
m, a_1 a_2 \le x \le m, a_1 a_2 + \dfrac{1}{100} \\
\vdots \\
Donde: x = m, a_1 a_2 \cdots a_r
\end{array}
$$

CAPÍTULO 5

UMA PROPOSTA PARA A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL

A construção via *Medição exata de segmentos de reta* parte de uma motivação que já faz parte da vida do aluno de Ensino Fundamental: medir segmentos de reta. Além disso, utiliza-se de um instrumento com o qual um aluno de qualquer nível da Escola Básica tem muita familiaridade: *a régua escolar.*

Apresentamos a seguir a nossa proposta pedagógica para a construção do número real (positivo) no Ensino Fundamental. Paralelamente, apresentamos sua aplicação, em nove aulas, numa turma de 8ª série de uma escola municipal de Caxias do Sul, RS.

A proposta está especificada na primeira coluna das tabelas que seguem, referentes às nove aulas de sua aplicação. A segunda coluna lista os objetivos das atividades propostas. Abaixo da proposta encontram-se as observações e as conclusões extraídas durante a realização da proposta, observações e conclusões estas que foram influenciando as aulas seguintes.

Esta proposta pressupõe já terem sido abordados com os alunos os seguintes conteúdos:

- Fatoração em primos de inteiros positivos e unicidade desta fatoração, a menos de ordem na listagem de tais primos;
- Teorema de Pitágoras;

- Teorema de Tales;
- Relação de ordem nos racionais quando representados tanto na forma fracionária como na forma decimal.

Alguns destes conteúdos tiveram sua necessidade melhor diagnosticada a partir da própria implementação, conforme fica claro em algumas observações do professor, incluídas nas colunas à direita.

Após a apresentação da proposta e de sua implementação nesta turma de 8ª série, incluímos a tabulação do questionário aplicado antes da mesma, o questionário-avaliação aplicado após a implementação, com os objetivos de cada questão, e a tabulação do mesmo. Salientamos aqui que o questionário reaplicado era semelhante ao já aplicado. Apenas excluímos dele, alguns dos tópicos não abordados por nós, e mantivemos outros.

Encerramos com as conclusões sobre o desempenho da turma.

5.1 A proposta e sua implementação

Plano detalhado	Expectativas do professor (objetivos)
AULA 1: 28 de abril de 2006 **(2 períodos)** **1º)** Discussão sobre *números x utilidade*. Sondagem para ver o que os alunos pensam sobre a necessidade de trabalharmos com números naturais, inteiros e racionais no nosso dia a dia. **2º)** Ênfase nos números naturais e inteiros no sentido de representarem quantidades inteiras. **3º)** Construção de um texto com os alunos sobre o que foi discutido. Exemplo: É impossível imaginar o mundo se não existisse a escrita e o número. Utilizamos os números constantemente em nosso dia-a-dia. Quando trabalhamos, compramos algo ou brincamos, temos a necessidade de contar, ordenar, medir... Os números naturais: 0, 1, 2, 3,4... permitem, por exemplo, contar (o número de elementos de um conjunto, por exemplo), ordenar (identificar a posição de alguém numa fila, por exemplo), medir quantidades inteiras etc... Os números inteiros negativos: ...-3, -2, -; servem para identificar retiradas, dívidas, uma posição contrária a de um certo referencial (localização) etc... **4º)** Relações de ordem: Quem é maior que quem? **5º)** Lançar a questão: Como podemos representar quantidades não inteiras? **6º)** Questões adicionais: ➢ Como operar com frações? ➢ Como representar uma fração geometricamente? ➢ Como comparamos duas frações? (Aqui será dada ênfase na propriedade: $a, b, c, d \in N^*$; $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad > bc$) (*) ➢ Definição do conjunto dos racionais **7º)** Atividades:	Objetivo: revisar inteiros e racionais quanto aos aspectos que nos serão essenciais para introduzir os irracionais/reais. A partir da 1ª, 2ª, 3ª e 4ª atividades os alunos deverão concluir que os números naturais e inteiros surgiram da necessidade de se representar quantidades inteiras e relacioná-los em ordem crescente. 5º) Espera-se que vão surgir as seguintes respostas: decimais e frações. *Neste momento, será dada ênfase às frações* 7º) Espera-se que os alunos demonstrem domínio das técnicas para operar com frações, relação de ordem e também dominem o significado de uma quantidade fracionária (por exemplo, $\frac{1}{4}$ é uma quantidade não inteira; é *uma* parte de um inteiro que foi dividido em 4 partes iguais), pois isto é conteúdo de séries

1) Indique qual é a maior fração: a) $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{6}$ c) $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{5}$ 2) Resolva: a) $2.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ b) $\frac{-2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{8}$ c) $\left(\frac{-2}{7}\right)^3+\frac{\frac{1}{2}}{3}$ 3) Represente as frações abaixo geometricamente: a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{8}{2}$	anteriores.

Observações do professor (durante a aula)	**Conclusões do professor: Expectativas x Observações**
Os alunos corresponderam muito bem às minhas expectativas; identificam os inteiros como um instrumento para contar. Foram recolhidas algumas conclusões de nossa conversa escritas pelos alunos (anexo A) Obs: ocorreu-nos durante a aula de pedir redatores voluntários. Alunos que até então eram pouco participativos em aula imbuíram-se desta responsabilidade e passaram a participar bastante e também registrar suas conclusões e as dos colegas. 5º) De fato surgiram ambas as respostas. 6º) Os alunos dominam as técnicas para operar com frações. 7º) Sobre relação de ordem, senti que os alunos têm várias dúvidas, alguns construíram um argumento falso para verificar quem é maior que quem. (Veja anexo A)	Passamos a adotar a idéia de redatores em todas as aulas do projeto. 6º) A propriedade (*) poderia ter sido demonstrada para eles. Foi apenas informada. 7º)Propor em momento oportuno mais atividades para ordenar quantidades fracionárias.

Plano detalhado	Expectativas do professor (objetivos)
AULA 2: 03 de maio de 2006 **(2 períodos)** **1º)** Lançar a questão: Qualquer quantidade não inteira pode ser representada na forma de fração? Ou seja, dado qualquer segmento, ao dividi-lo em pedaços de quaisquer tamanhos (não necessariamente iguais), cada pedaço sempre vai ter uma medida expressa na forma de fração?	Objetivo 1: Sondar a intuição dos alunos quanto a expressar a medida exata de qualquer segmento de reta.
2º) Reflexões a partir das seguintes questões: ➢ Ao quebrarmos uma **barra de giz** de comprimento unitário, será que a medida de qualquer pedaço pode ser representada por uma fração? ➢ **elástico** (lançamos aqui a questão: ao esticá-lo até 1 metro, como "expressar a medida" dos comprimentos intermediários que certamente não são inteiros?) ➢ **régua escolar** (Eles estão acostumados a usar a régua escolar. Lançamos então a questão: Podemos medir qualquer segmento com esta régua? Atividades: 1) Medir com a régua um pedaço de barbante e anotar as conclusões. 2) Medir com a régua uma tira de papel e anotar as conclusões. 3) Construir um segmento, dividi-lo em 2 partes iguais (usando Tales) e medir uma parte com a régua. Anotar as conclusões. 4) Construir um segmento, dividi-lo em 3 partes iguais (usando Tales) e medir uma parte com a régua. Anotar as conclusões.	Objetivo 2: Convencer os alunos da precariedade da régua escolar para expressar a medida exata de qualquer segmento. 2º) A idéia aqui é fazer uma discussão intuitiva: explorar a régua escolar até convencê-los de sua precariedade para expressar a medida exata de qualquer segmento. Espera-se que os alunos percebam que alguns segmentos não podem ser medidos de maneira exata com a régua. *Sugestão de aperfeiçoamento:* Substituir o exemplo da barra de giz pelo exemplo do arame, pois este caracteriza melhor a unidimensionalidade.

Observações do professor (durante a aula)	**Conclusões do professor: Expectativas X Observações**
2º) Os alunos ficaram convencidos da precariedade da régua escolar apesar de sentirem dificuldades em medir usando a mesma, pois um décimo de centímetro foi muito pequeno para perceber com clareza diferenças entre duas marcações. Barbante não foi uma boa escolha, pois os alunos podiam esticá-lo até fazer sua extremidade coincidir com alguma marcação da régua. Em resumo: a “dobradinha” barbante x graduação em milímetros foi infeliz. Nas etapas 3 e 4 os alunos fizeram uso das frações para representar a medida do segmento. (Veja anexo B)	Percebemos que a primeira atividade ficou solta dentro do conjunto da aula. Refletindo agora, pensamos que ela deveria ser o início da próxima aula. Deve-se retomar e continuar a questão de medir qualquer segmento de forma exata na aula seguinte. Deverão ser retomadas na aula seguinte as conclusões desta aula e o uso da régua para medir qualquer segmento e a impossibilidade de se expressar esta medida de maneira exata em vários casos. Na próxima aula, será “imitada” a régua escolar no quadro com a unidade maior e duas graduações, discutindo novamente a idéia da precariedade da mesma para medir de maneira exata qualquer segmento de reta. Foi recolhido o relatório da aluna que apareceu no filme da aula 3 relendo suas conclusões da aula anterior. (Anexo C) *Sugestão de aperfeiçoamento:* (retomada na aula 3) Não usar a régua escolar e sim uma “cópia ampliada” da mesma, igual para todos os alunos, e trabalhar direto com ela.

Plano detalhado	**Expectativas do professor (objetivos)**
AULA 3: 05 de maio de 2006 **(2 períodos)** **1º)** Atividade: Retomada da aula anterior, reproduzindo no quadro, de forma ampliada (como se estivéssemos utilizando uma lupa), a régua escolar dos alunos e construindo um segmento cuja medida exata não possa ser expressa com tal instrumento. **2º)** Retomar a primeira questão da aula anterior: "Será que qualquer quantidade não inteira pode ser representada na forma de fração"? Ou seja: "Ao dividirmos qualquer segmento em pedaços de quaisquer tamanhos (não necessariamente iguais), será que cada pedaço sempre vai ter uma medida expressa na forma de fração"? **3º)** • Cada aluno deve construir um quadrado em seu caderno. • Cada aluno deve tomar para unidade de medida o lado deste quadrado. Terá assim construído um quadrado unitário. • Cada aluno deve, em seu caderno, traçar uma diagonal deste quadrado. • Lançamos então questão: existe uma fração que represente a medida exata desta diagonal? • Distribuir uma tira de papel para que os alunos cortem do tamanho da unidade e, com ela, fique facilitada a tarefa de estimar a medida da diagonal. Motivação: • Escolhendo denominador 4, qual o número mínimo e o máximo para ser numerador? **4º)** Após os alunos cansarem de procurar tal medida, lançamos a pergunta: "Como ficaremos convencidos que esta medida não pode ser expressa por uma fração" ? Fala do professor: "-Quando queremos provar que alguma propriedade numérica é sempre verdadeira, não podemos mostrar que ela é válida apenas para alguns números. Por exemplo, neste caso, como o conjunto dos racionais entre 1 e 2 é infinito, pode ser que para exatamente um valor que eu não escolhi ela não seja verdadeira. Para nos convencermos da real validade desta propriedade,	Objetivo: provar a insuficiência geométrica dos racionais 3º) Espera-se que os alunos usem a tira de papel para verificar que a medida da diagonal do quadrado é um número entre 1 e 2. Espera-se aqui que os alunos também usem o teorema de Pitágoras e também tentativas. 4º) Espera-se que os alunos, depois de tratarem alguns exemplos, se convençam da estratégia - genérica - que vamos assumir na próxima etapa. 5º) Espera-se que os alunos se convençam da prova por absurdo. 6º) Espera-se que existam alunos que não entendam nosso argumento e dessa forma serão trabalhados outros exemplos. 7º) Espera-se que os alunos concluam que não existe racional que expresse a medida exata da diagonal do quadrado.

precisaríamos testar para TODOS os números racionais entre 1 e 2. Mas eles são infinitos! Dessa forma, precisamos provar que ela é válida para um número genérico, que vamos representar por x . E uma das maneiras de provarmos que uma propriedade é verdadeira é fazer o seguinte raciocínio: supor o contrário do que eu quero mostrar, dada algumas condições, usar conceitos já conhecidos como verdadeiros e chegar a algum absurdo ou conflito. “É dessa maneira que vamos mostrar que não existe uma fração que represente a medida da diagonal de um quadrado unitário”.

5º) A prova por absurdo:

Suponhamos que existe uma fração *a/b* com $a, b \in Z; b \neq 0$; tal que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$.

Caso 1: Se $a = 1$ e $b \in Z^*; b \neq 1$ e então $1^2 = 2b^2 \Rightarrow 1 = 2b^2$ o que é um absurdo, já que $b \in Z$.

Caso 2: Se $b = 1$ e $a \in Z; a \neq 1$, então $a^2 = 2$ o que é um absurdo,

pois a^2 tem um número par de fatores primos e 2 é primo e portanto tem somente ele na sua fatoração.

Caso 3: $a, b \in Z; b \neq 0 ; a \neq 1; b \neq 1$
$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$. Mas a^2 tem um nº par de fatores primos e $2b^2$ um nº ímpar de fatores primos, o que é impossível já que a igualdade é verdadeira.

Lembre-se que um nº tem uma fatoração crescente em primos *única.*

Obs: Foi trabalhado anteriormente o significado de um número ter um nº par ou ímpar de fatores primos.

6°) Outros exemplos para os resistentes:

Labirinto: “será” que é por aqui?..(tenta)...Conclusão? Não é por aqui
No passo anterior (3°): será que é 3/2? ..(tenta)...Conclusão? Não é.
Em geral: será que é a/b? ..(tenta)...Conclusão? Não é.

7º) Que conclusão podemos tirar deste argumento?
Não existe uma fração cujo quadrado seja 2, ou seja, a medida exata da diagonal de um quadrado unitário não pode ser expressa na forma de fração.

Observações do professor (durante a aula)	**Conclusões do professor: Expectativas x Observações**
1º) Após reproduzir a régua deles no quadro, usando uma unidade maior, sentimos maior convicção por parte dos alunos na resposta à pergunta sobre a insuficiência da régua escolar para expressar a medida de qualquer segmento. 3º) Os alunos usaram a tira de papel e de fato estimaram que tal diagonal tivesse uma medida maior do que 1 e menor do que 2. Num segundo momento, utilizaram Pitágoras como o esperado. 4º) Os alunos concordaram com a idéia da "estratégia genérica". A etapa 6 acabou sendo antecipada para antes do início da demonstração por absurdo, com a conclusão: "Fazemos isto muitas vezes no nosso dia-a-dia." 5º) Partimos da medida representada por x, escrevemos x na forma de fração, que eles então reformularam para x/y. Com a motivação do labirinto e da resolução de uma equação por tentativa e erro, os alunos entenderam bem a idéia de uma prova por absurdo. Parece-nos que ficou muito claro para eles este raciocínio, o que superou nossas expectativas. O decorrer da demonstração foi construído com os alunos e, a maior oscilação deles foi reconhecer que um número tem fatoração crescente em primos única, coisa que nos parecia ser intuitivo. Registro da aula (Veja anexo D) 7º) Objetivo atingido (insuficiência dos racionais).	1º) Depois de encerrada esta atividade, consideramos o objetivo 2 da aula anterior completamente atingido . Deveria ter sido explorada com maior ênfase pelo professor, neste momento, a representação fracionária e decimal e ter aproveitado melhor a idéia do significado da quantidade. Isso será retomado na próxima aula. A antecipação da etapa 6 foi bem adequada, pois os alunos ficaram bem motivados a seguir um raciocínio deste tipo. E, sobre a demonstração por absurdo: Achávamos que para o aluno, a unicidade da fatoração em primos é intuitiva. No entanto, ela não estava suficiente clara a ponto de reconhecerem o absurdo gerado neste raciocínio. Retomar na próxima aula a conclusão da atividade e propor outro exemplo de raciocínio da prova por absurdo. *Sugestão de aperfeiçoamento:* Numa próxima experimentação, trabalhar a idéia da fatoração única antes, junto com a revisão de fatoração em primos. *Sugestão de aperfeiçoamento:* Ocorreu-nos que talvez uma melhor abordagem para tal objetivo seja substituir a segunda atividade por: Retomar as medidas da aula anterior, transformando-as em frações e salientar que as medidas exatas são aquelas que correspondem a frações decimais. Lançar então a questão: "Será que todo segmento pode ter uma medida exata expressa por uma fração, não necessariamente decimal?"

Plano detalhado	Expectativas do professor (objetivos)
AULA 4: 10 de maio de 2006 **(2 períodos)** **1º)** Retomar as aproximações feitas pelos alunos na aula anterior para a medida da diagonal do quadrado e aproveitá-las para transformar decimal para fração. Criar novos exemplos. **2º)** Relembrar a idéia da prova por absurdo. **3º)** Retomar a diagonal do quadrado unitário e as conclusões da prova por absurdo. **4º)** Propor a atividade: 1) Escolher uma unidade de medida e construir no caderno um retângulo de lados 2 unidades e 1 unidade. 2)Tentar encontrar a medida da diagonal de um retângulo de lados 2 unidades e 1 unidade. 3)Lançar a pergunta: e esta diagonal tem medida racional/fracionária? 4)Provar que esta medida não é racional, usando a prova por absurdo. *Atividade para casa: quem consegue "gerar" novos segmentos cuja medida exata não pode ser expressa por uma fração? (com demonstração e tudo!)* **5º)** Concluir: temos a necessidade então de se criar novos números para medir de maneira exata qualquer segmento de reta. **6º)** Antes de construirmos um instrumento capaz de medir qualquer segmento, vamos registrar alguns itens que chamaremos de *Princípios de Medição* e que até, em alguns momentos, já foram utilizados. Notações a serem utilizadas: mAB para a emenda de m cópias de AB $\|AB\|$ para a medida de AB. Princípios: - dois segmentos de reta são congruentes se for possível superpô-los exatamente; diremos neste caso	Objetvo1: Verificar a equivalência entre representação decimal na forma de fração. Objetivo2: Reforçar a idéia da prova por absurdo com novos exemplos. Espera-se que os alunos concluam que, ao terem dito "1,3", não estavam com isso experimentando números diferentes dos racionais. 4º) Espera-se que os alunos possam repetir, em conjunto, o argumento feito para a nova diagonal. 5º) Espera-se que os alunos reafirmem a necessidade de se criar novos números. 6º) Espera-se que os alunos tenham como intuitivos estes princípios 7º) Espera-se que os alunos reafirmem nesta atividade (que foi brevemente explorada na 1ª aula) a idéia de construir e medir de maneira exata um segmento e como fazê-lo, e que também se convençam do princípio iii).

que eles têm a mesma medida; - um segmento AB é menor ou igual a outro segmento CD se deslocando/transladando AB for possível deixá-lo totalmente contido em CD; - a) Se $CD=mAB$ então $\|CD\|=m\|AB\|$ b) Se $nCD=mAB$ então $\|CD\|=\|AB\|\ m/n$. Caso particular: AB=segmento unitário $\Rightarrow$ CD tem medida racional **7º)** Atividade de revisão: Copiar os princípios no caderno e ilustrar com alguns exemplos. a) Marcar segmentos e pedir aos alunos que meçam: 1/2, 3/4, 5/4 e 9/8 do unitário. (todos as potências de 2 no denominador para que possam medir de maneira *exata*, quando eles até poderão utilizar dobraduras do papel); b) Construir o segmento cuja medida exata seja: 2/3 do unitário, 5/7 do unitário. (aqui necessariamente vão usar Tales, para garantir *exatidão*).	

Observações do professor (durante a aula)	**Conclusões do professor: Expectativas x Observações**
Usando os exemplos mencionados por eles e remetendo-os à situação da aula anterior, os alunos não tiveram dificuldades de transformar decimal em fração. Registro da 1ª parte da aula (Anexo E) 4º) Esta aula afinal não foi de dois períodos. Assim, foram antecipadas as atividades 5 e 6, e a atividade 4 não foi realizada nesta aula, ficando também como atividade para casa. A atividade para casa foi repassada aos alunos como desafio e será retomada na aula 7. 5º) Pareceu-nos que os alunos se convenceram de que é preciso criar outro tipo de números para expressar a medida	Objetivo 1 atingido. Objetivo 2 completamente atingido. A atividade 3 saiu conforme o esperado. 5º) Conclusão intuitiva (a de se criar novos números) satisfatória 7º) Poderia ter sido explorada mais esta atividade, o que não foi feito por falta de tempo, mas o objetivo quanto aos princípios de medição foi atingido.

exata da diagonal de um quadrado unitário. 6º) Os princípios *i)* , *ii)* e *iii* (a) são realmente intuitivos; já o item *iii* (b) precisou ser induzido. 7º) Os alunos usaram as dobras de papel com muita facilidade para os denominadores potência de 2. Ao repetirem o procedimento para a letra b) tiveram dificuldade e recorreram a Tales. Registro da 2ª parte da aula (Veja anexo F)	

Plano detalhado	Expectativas do professor (objetivos)
AULA 5: 12 de maio de 2006 **(2 períodos)** **A construção da régua decimal infinita, instrumento que vai nos permitir expressar a medida exata de qualquer segmento de reta** Material: ➢ Papel pardo, suficientemente grande; ➢ Compasso; ➢ Régua. ➢ Fita **1º)** Construir em papel pardo, no chão da sala, duas réguas com uma unidade de medida a ser escolhida, em cada grupo, a saber: **o metrão**, formando a rede de graduação unitária; apresentar um segmento (previamente construído ou não) cuja medida exata não pode ser expressa por esta graduação. OBS: Levar material (talvez fita) já cortado ou talvez para eles cortarem e formarem um segmento cuja medida ainda não possa, nesta etapa, ser expressa de maneira exata. **2º)** Usando o Teorema de Tales e o compasso, dividir o "metrão" inicialmente em 10 partes, formando a rede de graduação decimal; Lançar a questão: esta rede é suficiente? Quem não conseguimos medir? **3º)** Fazer a rede de graduação centesimal. Lançar a questão: "Esta rede é suficiente? Quem não conseguimos medir?" **4º)** Questão a ser levantada a esta altura: "Haverá alguma graduação que será suficiente para expressar a medida exata de qualquer segmento?" **5º)** Analisar o segmento de medida $\frac{1}{3}$. **6º)** Conclusões: a) Tentar concluir com os alunos que este processo não tem fim, para termos chances de conseguir expressar a medida exata de qualquer segmento de reta.	Objetivo: construir a régua decimal infinita. Os alunos devem também perceber que este instrumento vai nos permitir medir de maneira exata qualquer segmento de reta, e dessa forma representar *qualquer* quantidade, inteira ou não inteira, mas para tal precisarão de listas infinitas. 1º) Os alunos devem perceber que esta rede é insuficiente representar *qualquer* quantidade não inteira. 2º) e 3º) Com a experiência deles das aulas anteriores, inferimos que eles conseguirão construir um segmento cuja medida não pode ser expressa de maneira exata por esta régua. 4º) Espera-se que os alunos percebam que este processo é interminável. Espera-se que alguém vá se dar conta disto sozinho. 5º) O objetivo final é convencer-se da necessidade de utilizar listas infinitas para representar a medida de qualquer segmento. Espero que alguém sugira esta solução b) Espera-se, com a

b) Responder a questão: Todos os pontos são graduados? Durante a construção será introduzida e utilizada a seguinte nomenclatura: - *Segmento unitário:* segmento não nulo da Reta Euclidiana a ser tomado como unidade de medida; - *Graduação unitária, decimal, centesimal etc.* - *Ponto graduado:* aquele que foi marcado por alguma graduação **7º)** Cada aluno vai construir a régua decimal infinita em seu caderno e registrar suas conclusões. **8º)** Socialização das conclusões escritas pelos alunos fechando a necessidade da lista infinita e o significado da quantidade. **9º)** Conclusão: com este instrumento, precisamos de listas infinitas para representar a medida exata de qualquer segmento de reta. **10º)** Tarefa de casa: Lista de exercícios (Veja anexo H)	experiência com calouros da graduação, que a resposta aqui seja afirmativa.

Observações do professor (durante a aula)	**Conclusões do professor: Expectativas x Observações**
1º) A construção de um segmento que não fosse medido de maneira exata pela graduação unitária foi rapidamente feita pelos alunos. 2º) Na hora de graduar os décimos, os alunos tiveram dificuldades de traçar as paralelas. Justificativas: 1 - O compasso grandão ficou de difícil manuseio na hora de dividir a reta auxiliar em 10 partes. 2 - A primeira paralela não foi feita rigorosamente pelos alunos, e ao "arrastar paralelamente a régua" foi gerado um erro, pois a distância era muito maior que a	2º) Deveria ter sido usada na reta auxiliar uma unidade de medida qualquer (como uma régua não graduada, de melhor manuseio pelos alunos) para substituir a abertura do compasso. A imprecisão da divisão em 10 partes não interferiu na seqüência de raciocínio utilizada pelos alunos. Eles seguiram corretamente na idéia de que posso construir um segmento que ainda não é medido de maneira exata pela graduação decimal. Objetivo atingido!

acostumada no caderno. Ao verem sua divisão em décimos imprecisa, os alunos ficaram um pouco frustrados, mas logo que perceberam os motivos da imprecisão, voltaram a se animar e continuaram a desenvolver o trabalho. Após graduarem a rede decimal ficou claro para os alunos, pelas suas manifestações, que podemos ter um segmento não medido de maneira exata por esta rede e sugeriram graduar em centésimos. 4º) Ao serem questionados se alguma rede de graduação era suficiente para medir de maneira exata qualquer segmento de reta, eles imediatamente responderam que NÃO!! 5º) Foi parcialmente intuitivo de que precisamos de infinitas graduações na régua para expressar a expansão decimal de 1/3. Na hora da formalização foi um pouco induzido pelo professor por falta de tempo. Essa questão será retomada na próxima aula e as conclusões finais também. As atividades 7), 8) e 9) não foram feitas por falta de tempo e serão realizadas na próxima aula. Registros da aula (Veja anexo G e anexo I)	A construção da régua demorou mais tempo que o previsto e por este motivo os questionamentos por parte do professor foram rápidos e muitas vezes induziram às respostas, mas ficou nítida a sensação de que os alunos teriam chegado nelas com muita tranqüilidade se houvesse mais tempo. A construção de duas réguas no chão da sala talvez tenha dispersado um pouco a atenção dos alunos, já que os dois grupos construíram-na em tempos diferentes. *Sugestão de aperfeiçoamento:* Numa próxima oportunidade a sugestão é que seja construída um só "reguão" e que sejam usados 3 períodos de aula para conseguir completar todo o raciocínio com os alunos de forma mais reflexiva. Observação: Sugerimos que se deva, se necessário, salientar aos alunos a passagem do concreto para o abstrato, refletindo sobre a régua decimal infinita, que é uma idealização/abstração da régua escolar.

Plano detalhado

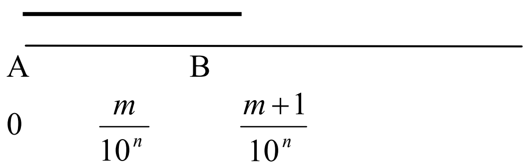
AULA 6: 17 de maio

(2 períodos)

1º) Retomar a régua decimal construída pelos alunos e verificar que existem segmentos com medida exata e não exata em cada graduação, construindo-os com fita e verificando o significado da quantidade expressa por cada lista e registrando na régua.
Obs: Isso será feito no quadro pelos alunos.

2º) Retomar a questão: Para termos chance de medir de maneira exata qualquer segmento de reta precisamos de infinitas graduações.
Justificativa:

Entre as marcações $\frac{m}{10^n}$ *e* $\frac{m+1}{10^n}$ não há ainda nenhum ponto graduado.



3º) Retomar a questão: Tendo agora a régua decimal infinita na mão, vamos conseguir que B (no desenho acima) se torne um ponto graduado?
Concluir negativamente com dois exemplos:

a) $\frac{1}{3}$ (retomando a aula passada);

$$\frac{1}{3} = \frac{m}{10^n} \Rightarrow 3m = 10^n \Rightarrow 3m = (2.5)^n \Rightarrow absurdo!$$

b) Diagonal do quadrado unitário, que já sabemos que não pode ser expressa por fração e dessa forma não é um ponto graduado.

4º) Concluir, registrando no caderno: Para expressar a medida exata de qualquer segmento de reta vamos fazer uso de listas infinitas com o seguinte significado numérico:

Expectativas doprofessor (objetivos)

Objetivos:

1) Reforçar a idéia que a cada etapa posso ter segmentos de medida exata e não exata.

2) Dizer o significado numérico de uma lista.

3) Concluir sobre a necessidade de fazermos infinitas graduações para termos chances de expressar a medida exata de qualquer segmento.

3º) Comprovar com o segmento de medida 1/3 e com a diagonal do quadrado unitário a necessidade de fazermos uso de listas infinitas para expressar a medida exata de *qualquer* segmento.

4º) As expectativas são que os alunos cheguem às conclusões indicadas ao lado.

Esperamos que seja intuitivo que a lista dos racionais é sua expansão decimal.

$$\lvert AB\rvert = m,a_1a_2\ldots \Leftrightarrow m \le \lvert AB\rvert \le m+1$$ $$m,a_1 \le \lvert AB\rvert \le m,a_1 + \frac{1}{10}$$ $$\ldots$$ Obs: 4) Usamos aqui ($\le$) à direita também porque não vamos comentar com os alunos sobre o período 9; 5) Vamos deixar intuitivo que a lista dos racionais é sua expansão decimal. **5º)** Corrigir alguns exercícios da lista (Anexo H) .	

Observações do professor (durante a aula)	**Conclusões do professor: Expectativas x Observações**
1º) Como os alunos construíram estes segmentos e os mediram com o "reguão do quadro", ficou claro, via construção, a existência de segmentos que podem e que não podem ser medidos de maneira exata em cada rede de graduação. 2º) Eles também souberam identificar o significado da quantidade nos segmentos construídos: tendo a régua decimal construída e em mãos fica muito fácil para eles, via construção, verificarem entre quais dois pontos graduados está a extremidade do segmento a ser medido. 3º) Como já havíamos trabalhado com o segmento de medida $\frac{1}{3}$ e sua expansão decimal, foi intuitivo para os alunos responderem que precisaríamos de infinitas graduações. *Fatos Interessantes:* - Durante a conversa sobre o segmento de medida $\frac{1}{3}$, verificando sua expansão decimal, perguntei aos alunos quem era o maior entre 0,3; 0,33; 0,333 e 0,333...	Pareceu-nos que às vezes estávamos perguntando coisas que para eles pareciam óbvias, como por exemplo: a) Posso medir todos os segmentos de maneira exata apenas com a graduação decimal ou com a centesimal? b) Quantas vezes teriam que graduar a régua para medir de maneira exata todos os segmentos? Observando os alunos, percebemos que esta construção é muito clara para eles, pois *demonstraram que entendem o significado* de uma lista do tipo $m,a_1a_2a_3\ldots a_s\ldots$. e o porquê de escrevê-la assim.

(Questão 6 do anexo H), e uma menina respondeu impulsivamente que era o 0,3 . Não demorou 2 segundos para que uns 10 alunos respondessem juntos, inclusive ela, que a resposta estava errada, que o maior era 0,333...pois "cada dígito a mais era um pedacinho a mais da reta." - Quando registramos as idéias no caderno, um aluno, ao responder a questão referente a infinitas graduações para ter chance de medir de maneira exata, usando a régua decimal, por exemplo, o segmento $\frac{1}{3}$, me perguntou: "Ta bom assim, profe"? $\frac{1}{3}$ = 0,33333333333333333 333333333333333333333 333333333333333333333 333333333333333333333 333333333333333333333 333333333333333333333 333333333333333333333 3333333... Preciso de infinitas graduações!!!!!!!!!! (Ele tinha feito duas linhas de 3 e pontinhos depois da vírgula!) . Registro de aula (Veja anexo J)	

Plano detalhado	Expectativas do professor (objetivos)
AULA 7: 19 de maio **(2 períodos)** Atividades: 1. Retomar a questão da diagonal do retângulo de lados 2 e 1 e a prova por absurdo. 2. Corrigir os exercícios da lista (Anexo H)	Objetivo: Revisar e fixar as idéias abordadas até aqui. 1) Espera-se que os alunos repitam o argumento da prova por absurdo já utilizado na diagonal do quadrado e reafirmem os conceitos já vistos.

Observações do professor (durante a aula)	Conclusões do professor: Expectativas x Observações
1) Os alunos repetiram a prova por absurdo sem maiores dificuldades. 2) Os alunos apresentaram dificuldade em construir segmentos que necessitassem da rede de graduação centesimal, pois estavam usando como unidade de medida o comprimento da folha do caderno. Então pedimos a eles que repetissem a tarefa em casa, com uma unidade mais conveniente. Eles passaram a emendar folhas do caderno para partirem de unidades maiores. Registro das tarefas: Veja anexo K (respostas da lista) e anexo L (exercício 1 refeito)	Esta aula foi muito produtiva e se mostrou bem necessária: serviu para reforçar os conceitos discutidos e organizar o fechamento do conteúdo.

Plano detalhado	Expectativas do professor (objetivos)
AULA 8: 24 de maio **(2 períodos)** **Voltando à diagonal do quadrado unitário** **1º)** Lançar a questão: Já sabemos que a diagonal de um quadrado de lado unitário não pode ser expressa por uma fração; então, como será a lista que produz esta medida? **2º)** Concluir: Possibilidades descartadas: lista finita e lista infinita periódica, pois estas podem ser geradas por frações. Possibilidade aceita: lista infinita e não periódica. **3º)** Estimar a diagonal do quadrado unitário **4º)** Concluir qual o significado numérico de uma lista. Por exemplo: dizer que $x = 1{,}23456...$ significa dizer que x é uma quantidade tal que $1 < x < 2;$ que $1{,}2 < x < 1{,}3$ etc. **5º)** Atividades: - Construa e estime a diagonal de um quadrado de lado medindo 3 unidades. - Qual o significado numérico desta quantidade? - Correção. **CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS:** • As listas infinitas não periódicas são a representação do que chamamos de números irracionais. • Definição de número real positivo. • Nomenclatura: As listas finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas são ditas *representações decimais* dos *números reais positivos*, e estão associadas ao processo de medição de segmentos da reta euclidiana.	Objetivo: Estimar a medida da diagonal de um quadrado unitário, gerando parte da lista que representa esta medida e descrever a quantidade representada por esta lista.

Observações do professor (durante a aula)	**Conclusões do professor: Expectativas x Observações**
Os alunos disseram rapidamente que a medida dessa diagonal era representada por uma lista infinita. Já não tão facilmente deram-se conta de que a lista não podia ser periódica. Após construirmos um quadrado de lado menor e outro de lado maior que o unitário, os alunos reafirmaram que $m=1$. Faltou detalhar mais a desigualdade $m, a_1 < x < m, a_1+1/10$ e seguir de maneira análoga para descobrir o valor de a_1 Ficou claro para os alunos, via manifestações deles em aula, que sempre teremos um erro ao estimar esta diagonal mas, que este erro pode ser tão pequeno quanto se queira. Por falta de tempo, a atividade 5 foi transferida para a aula seguinte, quando foi desenvolvida em duplas. A maioria dos alunos não teve problemas ao resolvê-la. Registro de aula (Veja anexo M)	Objetivo atingido!

Plano detalhado	Expectativas do professor (objetivos)
AULA 9: 31 de maio **(2 períodos)** **1º)** Atividades: - Construa e estime a diagonal de um quadrado de lado medindo 3 unidades. - Qual o significado numérico desta quantidade? - Correção. **2º)** Aplicação do questionário-avaliação. **3º)** Entrevista com os alunos sobre o projeto realizado em geral.	Objetivo 1: Obter a lista de mais um irracional. Objetivo 2: Obter mais subsídios para avaliação do trabalho de estágio e da proposta. 1º) Esperamos que os alunos reproduzam o raciocínio desenvolvido na aula anterior para gerar a lista que expressa a medida da diagonal do quadrado unitário. 2º) Esperamos que o resultado deste questionário seja melhor do que daquele aplicado no início do projeto.

Observações do professor (durante a aula)	Conclusões do professor: Expectativas x Observações
1º) Os alunos se contentaram com duas casas decimais e a seguir se manifestaram: “Chega! Já entendemos!” 2º) Os alunos mostraram-se mais confiantes em resolver o questionário desta vez. 3º) Além de produzir conhecimentos, os alunos referiram-se muito ao fato de a turma conseguir trabalhar mais unida. Disseram que foi divertido!	Objetivos atingidos Analisando-se a tabulação do questionário, verificamos que os resultados foram bem melhores.

5.2 Tabulação dos resultados do questionário pré-proposta

O questionário na turma piloto de oitava série não teve o objetivo de "detectar o problema", mas sim de fazer uma sondagem sobre o que eles traziam da sétima série.

Questão→	**1a**	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**
Respostas corretas e respectiva porcentagem	$\frac{7}{22}$ 31,81%	$\frac{5}{22}$ 22,72%	$\frac{5}{22}$ 22,72%	$\frac{0}{22}$ 0%	$\frac{0}{22}$ 0%	$\frac{0}{22}$ 0%
Número de alunos que não responderam e respectiva porcentagem	$\frac{5}{22}$ 22,72%	$\frac{5}{22}$ 22,72%	$\frac{5}{22}$ 22,72%	$\frac{22}{22}$ 100%	$\frac{22}{22}$ 100%	$\frac{22}{22}$ 100%

* *Alunos responderam que não lembravam de nada ou que não sabiam.*

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

Questões 3 e 4

- Nenhum aluno teve acerto significativo condizente com a questão 4. A maioria dos alunos respondeu "não sei". Alguns perguntaram: "O que é número irracional?", e os que se arriscaram a dizer o que é número irracional disseram: "é um número que não tem fim".

Questão →	**5**	**6** $(1 + \sqrt{6})$	**6** $(2\sqrt{6})$
Respostas corretas e respectiva porcentagem	$\frac{1}{22}$ 4,54%	$\frac{3}{22}$ 13,63%	$\frac{3}{22}$ 13,63%
Número de alunos que não responderam e respectivas porcentagens	$\frac{14}{22}$ 63,63%	$\frac{14}{22}$ 63,63%	$\frac{14}{22}$ 63,63%

Comentários:

Comparando estes resultados com os obtidos nos questionários aplicados nas turmas de 7ª série de escolas públicas e privadas, verifica-se que não houve melhor desempenho destes alunos em relação aos demais:

- Percebe-se que os erros mais freqüentes na questão 1, assim como nos outros questionários analisados, ocorreram durante o algoritmo da divisão;

- Nenhum aluno desta turma soube recuperar a fração que gerou a dízima periódica;

- Acrescenta-se que enquanto na escola pública houve 19,76% de acertos na questão 3 (identificação de racionais e irracionais) e na escola privada 55,35% de acertos, na turma em questão o percentual foi de 0%.

- O percentual de respostas incorretas, na questão 5 foi consideravelmente grande: 96,46% , além de ninguém comentar a questão da limitação da calculadora.

- Na questão 6 o desempenho destes alunos também foi mais baixo: apenas 13,63% de acertos contra 22% de acertos das outras escolas públicas e 75% das escolas privadas.

Independente agora de comparação, concluímos também que os alunos apresentam muitas lacunas em conceitos envolvendo representação decimal e fracionária e que não houve aprendizagem significativa sobre números racionais, irracionais e reais na 7ª série.

5.3 Questionário-avaliação

1) Escreva a representação decimal dos seguintes números:

a) $\frac{15}{20}$ **b)** $\frac{70}{33}$ **c)** $\frac{4}{7}$

Objetivo: Detectar se o aluno construiu algum conhecimento durante a revisão dos racionais, e dessa forma encontrar a expansão finita ou infinita periódica, expressando isto com clareza: chegando até o período zero em (a), chegando até o período 12 em (b) e chegando até o período 571428 em (c), que só aparece na sexta casa decimal.

2) Quais dos seguintes números podemos garantir que são racionais?

a) $\frac{2}{3}$ ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

b) 0,1234567891011121314151617181920... (listagem encadeada de todos os números naturais)

( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

c) 0,32 ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

d) 0,010101010101... (continua a lei de formação de ir-se intercalando 0's e 1's)

( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

e) 0,010101001000100001... (continua a lei de formação de ir-se aumentando em uma unidade a quantidade de zeros entre duas unidades consecutivas)

( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

f) 0,01001 ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

Objetivo: Até aqui, detectar se o aluno identifica racional com expansão infinita periódica.

g) $\sqrt{6}$ ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

Objetivo: Detectar se o aluno consegue intuir ou até calcular $\sqrt{6}$ *e concluir que é irracional.*

h) $1+\sqrt{6}$ ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

i) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ( ) é racional ( ) não é racional ( ) nada podemos garantir

Objetivo dos dois últimos itens: Detectar se o aluno consegue intuir sobre operações envolvendo irracionais, pois este assunto não foi abordado com eles.

3) Cite alguns fatos/raciocínios você usou para responder os itens da questão anterior.

Objetivo: Detectar se o aluno apossou-se de algum conhecimento ou se tudo foi chute.

4) Quem é maior: 2,1234567891011... ou 2,12291011121314.... ? Explique por que.

Objetivo: Detectar se o aluno apossou-se do significado da quantidade de um número expresso em notação decimal

5) Usando uma calculadora que pode apresentar no máximo 21 dígitos no seu visor e nela efetuando as operações indicadas, obtivemos os seguintes resultados.

a) $\frac{1}{3} = 0{,}3333333333333333333$ **b)** $\frac{16}{17} = 0{,}9411764705882352941$

c) $\sqrt{6} = 2{,}4494897427831780981$

Observando estes resultados, podemos concluir que todos estes números são racionais? Podemos concluir que todos estes números são irracionais? Justifique.

Objetivo: Detectar se o aluno tem a noção das deficiências de uma calculadora e da impotência da mesma em decidir por nós, na grande maioria dos casos, se um número é ou não irracional. (O assunto "calculadora" também não foi abordado com eles.)

6) Localize aproximadamente na reta numerada abaixo os números $1+\sqrt{6}$ e $2\sqrt{6}$

0	1	2	3	4	5	6

Objetivo: Detectar se o aluno consegue intuir sobre as operações com irracionais (o valor de $\sqrt{6}$ *já foi talvez calculado em questão anterior)*

7) Podemos garantir que a diagonal de um retângulo que tem para medidas do seu comprimento e largura números inteiros é sempre um número inteiro? É sempre um número racional? (Estamos aqui considerando sempre a mesma unidade de medida de comprimento). Justifique brevemente.

Objetivo: Detectar se o aluno convenceu-se da insuficiência geométrica dos racionais demonstrada durante a implementação da proposta.

5.4 Tabulação dos resultados do questionário-avaliação

Desempenho dos 20 alunos

Questão→	**1a**	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**	**2d**	**2e**	**2f**	**2g**	**2h**	**2i**	**4**
Respostas corretas	$\frac{12}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{15}{20}$
Porcentagem de acertos	60%	55%	75%	90%	80%	75%	90%	75%	45%	80%	45%	25%	75%
Número de alunos que não responderam	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$
Porcentagem de alunos que não responderam	0%	0%	0%	10%	0%	0%	0%	%	0%	0%	0%	0%	0%

Comentários:

- Não foi sempre o mesmo grupo de alunos que garantiu os acertos nas questões.

- O percentual de acertos aumentou consideravelmente em relação ao tabulamento pré-implementação: na questão **1a** 31,81% para 60%; **1b** 22,72% para 55% e **1c** 22,72% para 75%;

- Na questão 2, letras h) e i), houve maior número de resposta **"nada podemos garantir".** Como não trabalhamos operações com reais, eles não conseguiram raciocinar sozinhos e garantir, por exemplo, que $1 + \sqrt{6}$ é irracional, apesar de saberem que $\sqrt{6}$ é irracional. A análise destes resultados e a resposta dada por um aluno: "$\sqrt{6}$ não é racional e não pode ser fração então $\frac{\sqrt{6}}{2}$ sempre será irracional" indicam um ponto a ser reforçado e uma nova oportunidade de demonstração por absurdo;

- Também na questão 2, como as letras e) e f) eram seqüenciais e aparentemente parecidas, alguns alunos concluíram a mesma coisa sobre elas, não se dando conta da lista finita e infinita.

Questão 3

- A maioria dos alunos (82%) justificou suas respostas dizendo o que é número racional e o que é irracional.

- *Respostas mais comuns:*
  - Número irracional tem infinitas casas depois da vírgula que não se repetem.
  - Racionais são finitos ou dízimas periódicas.
  - Irracionais não têm fim e não têm período.

Questão →	**5**	**6** $(1+\sqrt{6})$	**6** $(2\sqrt{6})$
Respostas corretas	$\frac{5}{20} = 25\%$	$\frac{12}{20} = 60\%$	$\frac{11}{20} = 55\%$
Número de alunos que não responderam	$\frac{2}{20} = 10\%$	$\frac{4}{20} = 20\%$	$\frac{3}{20} = 15\%$

Comentários:

- Nenhum aluno abordou a questão calculadora (limitação da calculadora e arredondamento);
- 40% dos alunos identificaram $\frac{16}{17}$ como irracional, talvez pelo fato de o período começar somente na 17ª casa decimal.

- Os alunos não intuíram muito bem sobre a localização dos reais na reta: 60% e 55% de acertos. Tendo em vista o reguão trabalhado no chão, esperava-se um percentual maior de alunos que conseguisse localizar estes pontos.

- *Respostas mais comuns:*
  - Só $\frac{1}{3}$ é racional pois é dízima periódica
  - Identificou $\frac{16}{17}$ como irracional
  - Nem todos são fração
  - $\frac{1}{3}$ é racional pois tem infinitas graduações

Questão →	**7**
Número de alunos que não responderam	$\frac{5}{20} = 25\%$

Comentários:

- O número de respostas em branco desapareceu dos questionários avaliação: de 63,63 % (questionário pré) na questão 1 para 0%.

- *Respostas mais comuns:*
    - Não, pois nem sempre dá em cima do risquinho.
    - Não, contra exemplo: diagonal do quadrado unitário.
    - Não, nem sempre, às vezes podem se repetir os decimais e às vezes não.
    - Não, nem todos os cálculos são racionais.
    - Não, pode ser fração ou número com vírgula.
    - Não, contra exemplo: diagonal do retângulo de lados 1 e 2

5.5 Considerações finais sobre a implementação

Baseando-nos em [R-R-S] para elaborar uma proposta para a construção do número irracional e, posteriormente, do número real, vislumbramos uma possibilidade de os alunos efetivamente participarem da elaboração deste conceito ao invés de, como é usual nos atuais livros didáticos, simplesmente receberem uma informação.

A abordagem possibilitou uma compreensão da quantidade e do conceito de número real mais adequada à maturidade de tais alunos. Nesta abordagem, ao associarmos o número real à medida de um segmento, tornamos este abstrato conceito "número real" mais próximo e efetivamente mais "real" para os alunos.

Esta proposta desenvolvida em uma turma de 8ª série conseguiu, a meu ver, atingir os objetivos propostos de forma bastante satisfatória, conforme depoimento dos próprios alunos que participaram das atividades. Na análise feita dos resultados dos questionários "pré-proposta" e "avaliação da proposta", percebe-se claramente o crescimento no desempenho dos alunos, confirmando-se assim, a viabilidade da proposta desenvolvida.

É relevante registrarmos que não foi intuitivo (como se pensava!) para os alunos de Ensino Fundamental, a limitação da calculadora, pois nenhum aluno que respondeu o questionário, fez qualquer menção a isto ao responder a questão 5. Dessa forma, seria muito interessante propor discussões onde os alunos pudessem tirar suas próprias conclusões sobre o assunto já em Nível Fundamental.

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho fizemos tudo o que nos ocorreu analisar sobre o assunto “construção dos números reais”:

i. Analisando os Parâmetros Curriculares Nacionais, encontramos lá muitas das nossas convicções sobre o ensino dos números irracionais e reais contempladas, o que já não aconteceu ao analisarmos alguns livros didáticos nacionais. No entanto, chamou-nos a atenção o fato de que, em nenhum momento, nem nos Parâmetros Curriculares Nacionais de 4º ciclo nem nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Ensino Médio, é mencionada a continuidade topológica dos números reais, que nos permite modelar e tratar fenômenos que envolvem grandezas contínuas, como muito ocorre na Física. Também em nenhum momento foi feita qualquer alusão à dificuldade de se operar com números irracionais (uma vez que os algoritmos usuais são inviáveis para números irracionais).

ii. Comparamos em dois momentos a situação nacional com algum outro país: nos parâmetros curriculares, quando chegamos à agradável conclusão de que os nacionais estão muito mais bem estruturados do que os norte-americanos. E, após concluir que os livros didáticos nacionais analisados não atingem todos os objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais, os comparamos com um livro didático alemão de 9ª. série (equivalente ao nosso 1º. ano do Ensino Médio), e tivemos constatado que nossos parâmetros podem sim ser seguidos de perto, sem exigir do aluno uma maturidade que ele não tem condições de ter, talvez apenas adiando por um ano a discussão do erro, fazendo este conteúdo passar de Ensino Fundamental para Ensino Médio.

iii. Elaboramos uma proposta de construção dos números reais para o Ensino Fundamental que julgamos seguir mais de perto os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Esperamos que, com este trabalho, tenhamos motivado os professores de Matemática da Escola Básica a darem um passo à frente na direção do cumprimento dos objetivos listados nos Parâmetros Curriculares Nacionais no que diz respeito a este assunto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[A-V] Andrini, Álvaro & Vasconcellos. *Novo Praticando Matemática*. Coleção Atualizada. 1ª edição. Editora do Brasil. 2002

[B] Barroso, Juliane Matsubara (Editora responsável), *Matemática - Ensino Fundamental 7*, Edição Especial. EditoraModerna.

[Bi] Bigode, Antônio José Lopes. *Coleção Matemática Hoje é feita assim*. Editora FTD, 2000.

[D] Dante, Luiz Roberto. *Coleção Tudo é Matemática*. 1ª edição. Editora Ática, 2004.

[Da] ________________. *Contexto e Aplicações*. 2ª edição. Volume único. Editora Ática, 2004

[G-P] Giovanni, José Ruy & Parente, Eduardo. *Coleção Aprendendo Matemática: novo*. Editora FTD, 1999.

[H] Hefez, Abramo. *Curso de Álgebra*. Volume 1. 2ª edição. IMPA, 1993.

[PCN] Ministério da Educação e do Desporto; Secretaria de Educação Fundamental, *Parâmetros Curriculares Nacionais, terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental.* Matemática. Brasília, outubro/1997.

[M] Monteiro, Jacy. *Elementos de Álgebra,* Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1974.

[NCTM] *National Council of Teachers of Mathematics*, More topics in Mathematics for elementary school teachers, Thirteen Yearbook, Virginia, The national Council of Teachers of Mathematics, 2nd edition, 1974.

[R-R-S] Ripoll, J.B. - Ripoll, C.C. - Silveira, J.F.P., *Números Racionais, Reais e Complexos*, Editora da UFRGS, 2006.

[R] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1964 (2nd. Edition)

[S] Scipione, Di Pierro Netto. *Matemática Conceitos e Histórias*. 8ª série. 6ª edição. Editora Scipione, 1998.

[W] Weidig, I. - Schmid, A., *Mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium, Ausgabe Nordhein-Westfalen,* Ernst Klett Schulbuchverlag, 1996.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

[F-M-S] Ferreira, M.C.C. – Moreira, P.C. - Soares, E.F., *Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na Licenciatura,* Zetetiké – CEMPEM – FE/UNICAMP, vol.7 (1999) 95-117.

[F-M-So] ______________*Números reais: As concepções dos alunos e a formação do professor*. Projeto de apoio à formação de professores e à docência em ciências e matemática nos ensinos médio e fundamental, UFMG-SPEC-CAPES.

[F] Figueiredo, D.G., *Números Irracionais e Transcendentes*, Coleção Iniciação Científica, SBM, 2002

[Fo] Fou-Lai lin, Yuan-Shun Lee, Jya-Yi Wu Yu, *Students' understanding of proof by contradiction,* Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA, Eds.

[G-S-F] Garcia, V.C. - Soares, D.S. – Fronza, J., *Ensino dos Números Irracionais no Nível Fundamenta*l, Volume 1, IM/DMPA-UFRGS, 2005.

[K] Klein, D., *Math Problems*, National School Board Association, 2000

[Ri] Richman, F. *Is 0.999...=1?,* Mathematics magazine. Volume 72, Nº 5.1999. 396-401

[Rip] Ripoll, C.C., *A Construção dos Números Reais nos Ensinos Fundamental e Médio,* II Bienal da SBM, http://www.bienasbm.ufba.br/M54.

[R-S] Ripoll, C.C. - Soares, D.S., *Sobre o estudo dos números reais em um curso de Licenciatura em Matemática*, preprint.

[Ro] Robinet, J., *Les réels: quells modèles em ont lês élèves?, Educational Studies Mathematics.* Vol. 17, pp.359-386, 1986.

APÊNDICE

1 - Tabulação dos resultados dos questionários aplicados em turmas de 7ª série

a) Desempenho dos 86 alunos de 2 escolas públicas

Questão→ Aluno ↓	1a	1b	1c	Nº de acertos	2a	2b	2c	Nº de acertos
1	E	E	E	$0/3$	C	E	E	$1/3$
2	E	E	E	$0/3$	E	E	E	$0/3$
3	E	E	E	$0/3$	E	E	E	$0/3$
4	E	E	E	$0/3$	E	E	E	$0/3$
5	E	E	E	$0/3$	-	-	-	$0/3$
6	E	E	E	$0/3$	C	-	-	$1/3$
7	-	-	-	$0/3$	E	E	E	$0/3$
8	E	E	E	$0/3$	E	E	E	$0/3$
9	-	-	-	$0/3$	C	E	E	$1/3$
10	E	E	E	$0/3$	E	E	E	$0/3$
11	E	E	E	$0/3$	E	-	-	$0/3$
12	E	E	E	$0/3$	C	E	E	$1/3$
13	E	E	E	$0/3$	E	E	E	$0/3$
14	C	C	C	$3/3$	C	E	E	$1/3$
15	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
16	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
17	C	C	E	$2/3$	C	-	-	$1/3$
18	E	E	C	$1/3$	-	-	-	$0/3$
19	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$

20	C	E	C	$2/3$	C	-	-	$1/3$
21	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
22	C	E	E	$1/3$	C	-	-	$1/3$
23	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
24	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
25	C	C	E	$2/3$	-	-	-	$0/3$
26	C	E	E	$1/3$	-	-	-	$0/3$
27	E	E	E	$0/3$	C	-	-	$1/3$
28	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
29	C	C	E	$2/3$	E	E	E	$0/3$
30	E	E	E	$0/3$	C	-	-	$1/3$
31	C	C	C	$3/3$	E	E	E	$0/3$
32	C	-	C	$2/3$	C	-	-	$1/3$
33	C	E	E	$1/3$	C	-	-	$1/3$
34	E	E	E	$0/3$	C	-	-	$1/3$
35	E	C	C	$2/3$	C	-	-	$1/3$
36	C	E	E	$1/3$	C	-	-	$1/3$
37	C	E	E	$1/3$	-	-	-	$0/3$
38	C	E	E	$1/3$	C	-	-	$1/3$
39	-	-	-	$0/3$	-	-	-	$0/3$
40	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
41	C	-	-	$1/3$	C	E	E	$1/3$
42	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
43	C	C	C	$3/3$	C	E	E	$1/3$
44	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
45	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
46	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$

47	C	C	E	$\frac{2}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
48	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
49	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
50	C	C	E	$\frac{2}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
51	E	C	E	$\frac{1}{3}$	C	E	E	$\frac{1}{3}$
52	E	C	C	$\frac{2}{3}$	C	E	E	$\frac{1}{3}$
53	E	C	E	$\frac{1}{3}$	C	E	E	$\frac{1}{3}$
54	E	E	E	$\frac{0}{3}$	E	E	E	$\frac{0}{3}$
55	C	E	-	$\frac{1}{3}$	-	-	-	$\frac{0}{3}$
56	C	E	E	$\frac{1}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
57	E	E	E	$\frac{0}{3}$	E	E	E	$\frac{0}{3}$
58	E	E	E	$\frac{0}{3}$	E	-	-	$\frac{0}{3}$
59	-	-	-	$\frac{0}{3}$	C	E	E	$\frac{1}{3}$
60	C	E	C	$\frac{2}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
61	E	C	E	$\frac{1}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
62	E	E	E	$\frac{0}{3}$	-	-	-	$\frac{0}{3}$
63	E	E	E	$\frac{0}{3}$	C	E	E	$\frac{1}{3}$
64	E	E	E	$\frac{0}{3}$	-	-	-	$\frac{0}{3}$
65	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
66	C	E	E	$\frac{1}{3}$	E	-	-	$\frac{0}{3}$
67	C	C	C	$\frac{3}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
68	E	C	C	$\frac{2}{3}$	-	-	-	$\frac{0}{3}$
69	C	C	E	$\frac{2}{3}$	C	-	-	$\frac{1}{3}$
70	E	E	E	$\frac{0}{3}$	-	-	-	$\frac{0}{3}$
71	E	E	E	$\frac{0}{3}$	E	-	-	$\frac{0}{3}$
72	E	E	E	$\frac{0}{3}$	C	E	E	$\frac{1}{3}$
73	C	E	E	$\frac{1}{3}$	C	E	E	$\frac{1}{3}$

74	C	-	-	1/3	-	-	-	0/3
75	C	C	C	3/3	-	-	-	0/3
76	E	E	E	0/3	-	-	-	0/3
77	-	-	-	0/3	-	-	-	0/3
78	C	C	E	2/3	C	-	-	1/3
79	C	C	C	3/3	-	-	-	0/3
80	C	C	C	3/3	-	-	-	0/3
81	E	-	E	0/3	E	-	-	0/3
82	C	E	C	2/3	E	E	E	0/3
83	E	E	E	0/3	E	E	E	0/3
84	E	E	E	0/3	E	E	E	0/3
85	E	E	E	0/3	E	E	E	0/3
86	E	E	E	0/3	E	E	E	0/3
Número de acertos na questão	45/86	35/86	30/86		48/86	0/86	0/86	
Número de alunos que não responderam	5/86	9/86	8/86		17/86	57/86	55/86	

Questão → Aluno ↓	**3a**	**3b**	**3c**	**3d**	**3e**	**3f**	**3g**	**3h**	**3i**	**3j**	**Nº de acertos**
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
2	E	E	E	E	C	E	E	E	E	E	1/10
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
6	C	C	E	C	E	C	E	C	C	E	6/10

7	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9/10
8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
9	E	C	C	C	E	C	C	C	C	C	8/10
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
11	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9/10
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
13	C	E	C	C	C	E	C	E	E	E	5/10
14	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
15	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
16	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
17	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
18	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
19	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
20	C	C	E	C	C	E	E	C	C	C	7/10
21	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
23	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9/10
24	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9/10
25	C	E	E	C	C	E	E	C	C	C	6/10
26	C	E	E	C	C	E	E	C	C	C	6/10
27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
28	C	C	E	C	E	E	C	C	C	C	7/10
29	C	C	E	C	E	E	C	C	C	C	7/10
30	C	C	E	C	E	E	C	C	C	C	7/10
31	C	E	C	C	C	E	C	C	C	C	8/10
32	C	C	E	C	E	E	C	C	C	C	7/10
33	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10

34	C	C	E	C	E	E	C	C	C	C	8/10
35	C	C	E	C	E	E	C	C	C	C	8/10
36	E	E	E	C	C	E	E	C	C	C	5/10
37	E	E	E	C	C	E	E	C	C	C	5/10
38	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
40	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
41	C	E	C	C	C	E	C	C	C	C	8/10
42	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
43	E	E	E	C	C	E	C	C	C	C	6/10
44	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
45	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
46	E	E	E	C	C	E	E	C	C	C	5/10
47	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
48	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
49	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
50	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
51	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
52	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
53	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
54	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9/10
55	C	E	C	E	C	E	C	E	E	E	4/10
56	C	C	E	C	E	C	E	C	C	C	7/10
57	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
58	C	C	E	E	E	C	E	C	C	C	6/10
59	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9/10
60	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9/10

61	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9/10
62	C	C	E	C	E	C	E	C	C	C	7/10
63	C	C	E	C	E	C	E	C	C	C	7/10
64	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
65	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
66	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
67	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
68	C	E	C	E	C	E	C	E	E	E	4/10
69	E	C	C	C	E	C	C	C	C	C	8/10
70	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
71	E	C	C	C	E	C	C	C	C	C	8/10
72	E	C	C	C	E	C	C	C	C	C	8/10
73	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
74	C	C	E	C	E	C	E	C	C	C	7/10
75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
76	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
77	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
78	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
79	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
80	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
81	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
82	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
83	C	C	E	C	E	C	E	C	C	C	7/10
84	E	C	C	C	C	C	E	C	C	C	8/10
85	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
86	C	C	C	C	E	C	E	C	C	C	8/10
Número de	47/86	45/86	36/86	53/86	31/86	38/86	41/86	53/86	53/86	52/86	

acertos											
Número de alunos que não respon-deram	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	$29/86$	

Questão→ Aluno ↓	**4 e 5**	**6** $(1 + \sqrt{6})$	**6** $(2\sqrt{6})$
1	-	-	-
2	-	E	E
3	-	E	E
4	-	E	E
5	-	-	-
6	-	E	E
7	Racionais são frações	E	E
8	-	E	E
9	Fazendo a raiz quadrada	-	-
10	Racionais são finitos e infinitos periódicos	-	-
11	-	C	C
12	Fazendo os cálculos	E	E
13	Observando as regras	E	E
14	-	-	-
15	-	-	-
16	Os números se repetem ou não	-	-
17	Racionais são finitos e infinitos periódicos	-	-
18	Irracionais não têm fim	-	-
19	Fração são racionais	-	-
20	-	-	-
21	-	-	-
22	Irracionais não têm fim	-	-
23	Se tem raiz desconhecida é irracional	-	-
24	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
25	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
26	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
27	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
28	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
29	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
30	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
31	Irracionais, irreais e confusos.	-	-
32	-	-	-
33	Racionais são dízimas	-	-
34	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
35	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
36	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-

37	-	-	-
38	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
39	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
40	Racionais são dízimas	-	-
41	Irracionais são infinitos e não periódicos	-	-
42	-	-	-
43	Racionais são dízimas periódicas e irracionais não	-	-
44	-	-	-
45	Racionais são dízimas periódicas e irracionais não	-	-
46	Racionais são dízimas periódicas e irracionais não	-	-
47	-	-	-
48	Racionais se repetem e irracionais não se repetem	-	-
49	Racionais se repetem e irracionais não se repetem	-	-
50	Racionais se repetem e irracionais não se repetem	-	-
51	-	-	-
52	-	C	C
53	Não sei o que é racional nem irracional	C	C
54	Racionais sempre terminam	C	C
55	Racionais são resultados de divisão	C	C
56	-	C	C
57	-	C	C
58	Racionais são exatos e irracionais não são exatos	C	C
59	Só tinha dízima	E	E
60	Racional tem resultado exato e não quebrado	E	E
61	Finitos são racionais e infinitos são irracionais.	C	C
62	Racionais são números sem vírgula	-	-
63	Racionais dão um resultado completo (que não tem vírgula)	C	C
64	Racionais são dízimas	E	E
65	Irracionais são impossíveis de se calcular	C	C
66	-	C	C
67	-	C	C
68	Racionais têm lógica / seqüência	C	C
69	-	C	C
70	Racionais são isentos de raiz quadrada	E	E
71	Racionais são isentos de raiz quadradas	E	E
72	Racionais são definidos (têm um final). Têm resultados concretos	E	E
73	-	C	C
74	-	E	E

75	-	C	C
76	-	C	C
77	-	-	-
78	-	-	-
79	-	E	E
80	-	-	-
81	-	C	C
82	Racionais são comuns para mim, já trabalhei com eles.	E	E
83	-	E	E
84	-	-	-
85		-	-
86	Calcular para deixar racional	-	-
Número de acertos na questão	-	$^{19}/_{86}$	$^{19}/_{86}$
Número de alunos que não responderam	$^{36}/_{86}$	$^{49}/_{86}$	$^{49}/_{86}$

b) Desempenho dos 56 alunos de 3 escolas privadas

Questão→ Aluno ↓	**1a**	**1b**	**1c**	**Nº de acertos por aluno**	**2a**	**2b**	**2c**	**Nº de acertos por aluno**
1	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
2	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
3	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
4	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
5	E	C	C	2/3	C	E	C	2/3
6	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
7	C	C	E	2/3	C	E	C	2/3
8	E	C	C	2/3	C	E	C	2/3
9	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
10	C	C	E	2/3	C	E	C	2/3
11	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
12	E	E	E	0/3	C	E	C	2/3
13	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
14	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
15	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
16	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
17	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
18	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
19	C	C	E	2/3	C	E	C	2/3
20	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
21	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
22	E	E	E	0/3	C	E	C	2/3
23	-	-	-	0/3	-	-	-	0/3
24	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3

25	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
26	E	C	E	1/3	C	E	C	2/3
27	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
28	C	C	E	2/3	C	E	C	2/3
29	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
30	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
31	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
32	C	E	E	1/3	C	E	C	2/3
33	E	C	C	2/3	C	E	C	2/3
34	E	C	C	2/3	C	E	C	2/3
35	E	E	E	0/3	C	E	C	2/3
36	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
37	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
38	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
39	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
40	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
41	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
42	C	E	C	2/3	C	E	C	2/3
43	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
44	C	C	C	3/3	C	E	C	2/3
45	C	C	E	2/3	C	E	C	2/3
46	E	E	E	0/3	E	E	E	0/3
47	C	C	C	3/3	E	E	E	0/3
48	C	C	E	2/3	-	-	-	0/3
49	C	C	E	2/3	-	-	-	0/3
50	C	C	C	3/3	-	-	-	0/3
51	C	C	C	3/3	C	-	-	0/3

52	C	C	C	3/3	-	-	-	0/3
53	E	E	E	0/3	E	E	E	0/3
54	C	C	C	3/3	-	-	-	0/3
55	E	E	E	0/3	-	-	-	0/3
56	E	E	E	0/3	-	-	-	0/3
Número de acertos na questão	43/56	46/56	38/56		45/56	0/56	44/56	
Número de alunos que não responderam	1/56 Aluno 23	1/56 Aluno 23	1/56 Aluno 23		8/56	8/56	8/56	

Questão→ Aluno ↓	3a	3b	3c	3d	3e	3f	3g	3h	3i	3j	Nº de acertos por aluno
1	C	C	C	C	E	C	C	C	C	E	8/10
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
4	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	8/10
5	E	C	E	C	C	C	E	C	E	C	6/10
6	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	8/10
7	E	C	E	C	C	C	E	E	C	C	6/10
8	C	C	C	C	C	C	C	C	E	E	8/10
9	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
10	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
11	E	C	E	C	C	C	E	C	C	C	7/10
12	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0/10
13	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
14	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
15	C	E	C	E	E	C	C	E	C	E	5/10

16	C	E	C	E	C	C	E	C	E	E	5/10
17	E	C	E	C	C	C	E	C	C	C	7/10
18	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	9/10
19	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C	9/10
20	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
21	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
22	E	E	E	E	E	E	E	E	C	E	1/10
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
24	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
25	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
26	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
27	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
28	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
29	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
30	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
31	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
32	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
33	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
34	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
35	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
36	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
37	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
38	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
39	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
40	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
41	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
42	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10

43	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
44	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
45	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
46	E	C	C	C	E	C	C	C	C	C	8/10
47	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9/10
48	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
49	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
50	C	E	C	E	C	E	C	E	E	E	4/10
51	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
52	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	9/10
53	E	C	C	E	E	C	C	E	C	C	6/10
54	E	C	C	E	E	C	C	E	C	C	6/10
55	E	C	C	E	E	C	C	E	C	C	6/10
56	C	E	C	E	E	E	C	E	C	E	4/10
Número de acertos na questão	43/56	50/56	50/56	47/56	46/56	41/56	49/56	46/56	48/56	46/56	
Número de alunos que não respon deram	3/56	3/56	3/56	3/56	3/56	3/56	3/56	3/56	3/56	3/56	

Questão→ Aluno ↓	**4 e 5**	**6a** ($1+\sqrt{6}$)	**6b** ($2\sqrt{6}$)
1	-	C	C
2	-	C	C
3	Os números que se repetem e fração são racionais	E	E
4	Os irracionais são dízimas sem seqüência	C	C
5	-	C	C
6	-	C	C
7	π e dízimas não periódicas	C	C
8	-	C	C
9	-	C	C
10	-	C	C

11	Racionais não aceitam dízimas não periódicas	C	C
12	-	C	C
13	-	C	C
14	-	C	C
15	Não eram π nem números diferentes	C	E
16	-	C	C
17	Ver se os números se repetiram ou não	C	C
18	-	C	E
19	-	C	C
20	-	C	C
21	-	C	C
22	-	E	E
23	-	-	-
24	-	E	E
25	-	E	C
26	-	C	C
27	-	C	C
28	-	C	C
29	-	E	C
30	-	C	C
31	-	E	C
32	-	E	C
33	-	C	E
34	-	C	C
35	-	C	C
36	Separei os irracionais, exemplo π	C	C
37	-	C	C
38	-	C	C
39	-	C	C
40	-	C	C
41	-	C	C
42	-	C	C
43	-	C	C
44	-	C	C
45	-	C	C
46	Algum número que tem vírgula e não dízima periódica	-	-
47	Naturais e fracionários são racionais	C	C
48	Chute	C	C
49	-	-	-
50	Que tem fração	C	C
51	Números inteiros, frações e dízimas.	C	C
52	-	E	E
53	-	-	-
54	-	-	-
55	-	-	-
56	Números com vírgula e que não têm mais fim	-	-
Número			

de acertos na questão	$^{8}/_{56}$	$^{41}/_{56}$	$^{42}/_{56}$
Número de alunos que não respon deram	$^{43}/_{56}$	$^{7}/_{56}$	$^{7}/_{56}$

2 Tabulação dos resultados dos questionários aplicados em turmas de 3º ano do Ensino Médio

a) Desempenho dos 40 alunos de 2 escolas públicas

Questão→ Aluno ↓	**1a**	**1b**	**1c**	**Nº de acertos por aluno**	**2a**	**2b**	**2c**	**Nº de acertos por aluno**
1	C	C	C	$3/3$	-	E	-	$0/3$
2	E	C	C	$2/3$	E	E	E	$0/3$
3	C	C	C	$3/3$	-	-	-	$0/3$
4	C	C	C	$3/3$	C	-	E	$1/3$
5	-	-	-	$0/3$	C	-	E	$1/3$
6	C	C	C	$3/3$	C	-	E	$1/3$
7	C	C	C	$3/3$	C	-	E	$1/3$
8	C	C	C	$3/3$	C	-	E	$1/3$
9	C	E	C	$2/3$	C	-	E	$1/3$
10	E	E	C	$1/3$	C	-	-	$1/3$
11	C	E	C	$2/3$	C	E	-	$1/3$
12	C	E	C	$2/3$	C	E	-	$1/3$
13	C	E	C	$2/3$	C	C	-	$2/3$
14	C	E	C	$2/3$	C	C	-	$2/3$
15	C	C	E	$2/3$	C	C	-	$2/3$
16	C	C	C	$3/3$	C	C	C	$3/3$
17	C	C	C	$3/3$	C	C	E	$2/3$
18	C	C	C	$3/3$	C	E	E	$1/3$
19	C	C	C	$3/3$	C	E	E	$1/3$
20	C	C	C	$3/3$	C	E	E	$1/3$
21	C	C	C	$3/3$	E	E	E	$0/3$

22	E	E	E	$0/3$	C	E	E	$1/3$
23	E	E	E	$0/3$	E	E	E	$0/3$
24	C	C	C	$3/3$	C	E	E	$1/3$
25	C	C	E	$2/3$	E	E	E	$0/3$
26	C	C	C	$3/3$	C	E	E	$1/3$
27	C	C	E	$2/3$	C	E	E	$1/3$
28	C	C	C	$3/3$	C	E	E	$1/3$
29	C	C	E	$2/3$	C	C	E	$2/3$
30	C	C	C	$3/3$	C	E	E	$1/3$
31	C	C	C	$3/3$	C	E	E	$1/3$
32	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
33	C	C	C	$3/3$	C	-	-	$1/3$
34	E	C	C	$2/3$	C	-	-	$1/3$
35	E	E	C	$1/3$	C	-	-	$1/3$
36	C	E	C	$2/3$	C	-	-	$1/3$
37	C	C	E	$2/3$	C	-		$1/3$
38	C	C	E	$2/3$	C	C	E	$2/3$
39	C	C	E	$2/3$	C	C	C	$3/3$
40	C	E	C	$2/3$	C	E	E	$1/3$
Número de acertos	$33/40$	$28/40$	$30/40$		$34/40$	$8/40$	$2/40$	
Número de alunos que não responderam	$1/40$	$1/40$	$1/40$		$2/40$	$14/40$	$14/40$	

Questão→ Aluno ↓	**3a**	**3b**	**3c**	**3d**	**3e**	**3f**	**3g**	**3h**	**3i**	**3j**	**Nº de acertos por aluno**
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$0/10$

2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$0/10$
3	C	-	-	-	-	-	-	C	E	C	$3/10$
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$0/10$
5	C	C	C	E	E	C	C	C	E	C	$7/10$
6	-	C	C	E	E	C	C	E	E	C	$5/10$
7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$0/10$
8	C	C	C	E	E	C	E	E	E	E	$4/10$
9	C	C	E	C	E	E	E	E	E	E	$3/10$
10	C	C	C	E	E	E	E	E	E	E	$3/10$
11	C	C	C	E	E	C	C	E	E	E	$5/10$
12	C	E	C	C	C	C	E	E	E	E	$5/10$
13	C	C	C	E	E	E	E	E	E	E	$3/10$
14	C	C	C	C	E	E	E	C	E	E	$5/10$
15	C	C	C	C	E	E	C	C	E	E	$6/10$
16	C	C	C	E	E	E	C	C	E	E	$5/10$
17	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	$10/10$
18	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	$10/10$
19	C	E	C	C	C	E	C	C	C	C	$8/10$
20	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C	$9/10$
21	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$9/10$
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$0/10$
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$0/10$
24	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	$10/10$
25	C	E	C	C	C	E	C	C	C	C	$8/10$
26	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C	$9/10$
27	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$9/10$
28	C	C	C	C	E	E	C	C	C	C	$8/10$

29	C	E	C	C	E	C	C	E	E	E	5/10
30	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C	9/10
31	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C	9/10
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
33	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	9/10
34	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
36	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0/10
37	C	E	C	C	E	E	C	C	C	C	7/10
38	C	C	C	C	E	E	C	C	C	C	8/10
39	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
40	C	E	C	C	C	E	C	C	C	C	8/10
Número de acertos na questão	29/40	23/40	25/40	22/40	12/40	13/40	23/40	22/40	17/40	20/40	
Número de alunos que não respon-deram	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	11/40	

Questão→ Aluno ↓	**4 e 5** (anotações relevantes)	**6** $(1+\sqrt{6})$	**6** $(2\sqrt{6})$
1	O produto resulta num número inteiro.	C	C
2	O produto resulta num número inteiro.	-	-
3	Todos são irracionais (não são inteiros)	-	-
4	Irracionais, pois não têm fim.	-	-
5	O número tem fim.	E	E
6	Todos são irracionais (não são inteiros)	E	E
7	-	E	E
8	-	-	-
9	-	-	-
10	-	-	-
11	-	-	-
12	-	-	-
13	-	-	-

14	-	-	-
15	-	-	-
16	-	-	-
17	Racionais são finitos e dízimas	C	C
18	Racionais são finitos e dízimas	C	C
19	-	-	-
20	Irracionais não têm fim	E	E
21	Racionais são finitos e dízimas	C	C
22	-	-	-
23	-	-	-
24	-	-	-
25	-	-	-
26	-	-	-
27	-	-	-
28	-	-	-
29	-	-	-
30	-	-	-
31	-	-	-
32	-	-	-
33	Irracionais são infinitos e sem período	C	E
34	-	-	-
35	-	-	-
36	-	-	-
37	-	-	-
38	-	-	-
39	Racionais são frações	C	C
40	-	-	-
Número de acertos na questão	$5/40$	$6/40$	$5/40$
Número de alunos que não responderam	$28/40$	$29/40$	$30/40$

Questões 7 e 8:

- Sim, pois a hipotenusa resultará da soma dos catetos elevados ao quadrado.
- Número complexo (2+3i)

b) Desempenho dos 33 alunos de 2 escolas privadas

Questão→ Aluno ↓	**1a**	**1b**	**1c**	**Nº de acertos por aluno**	**2a**	**2b**	**2c**	**Nº de acertos por aluno**
1	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
2	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
3	C	C	C	3/3	E	E	E	1/3
4	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
5	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
6	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
7	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
8.	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
9	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
10	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
11	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
12	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
13.	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
14	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
15	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
16	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
17	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
18	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
19.	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
20	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
21	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
22	C	C	E	2/3	C	E	E	1/3
23	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3
24	C	C	C	3/3	C	E	E	1/3

25	E	C	C	$^2/_3$	C	E	E	$^1/_3$
26	C	C	C	$^3/_3$	C	E	E	$^1/_3$
27	C	C	C	$^3/_3$	C	E	E	$^1/_3$
28	C	C	C	$^3/_3$	C	E	E	$^1/_3$
29	E	C	C	$^2/_3$	C	E	E	$^1/_3$
30	C	C	C	$^3/_3$	C	E	E	$^1/_3$
31	C	C	E	$^2/_3$	C	E	E	$^1/_3$
32	C	C	C	$^3/_3$	C	E	E	$^1/_3$
33	C	C	E	$^2/_3$	-	-	-	$^0/_3$
Número de acertos na questão	$^{31}/_{33}$	$^{33}/_{33}$	$^{30}/_{33}$		$^{31}/_{33}$	$^0/_{33}$	$^0/_{33}$	
Número de alunos que não responderam	$^0/_{33}$	$^0/_{33}$	$^0/_{33}$		$^1/_{33}$	$^1/_{33}$	$^1/_{33}$	

Questão→ Aluno ↓	**3a**	**3b**	**3c**	**3d**	**3e**	**3f**	**3g**	**3h**	**3i**	**3j**	**Nº de acertos por aluno**
1	C	E	E	E	C	E	-	E	C	C	$^4/_{10}$
2	C	C	C	C	C	C	-	C	C	C	$^9/_{10}$
3	C	E	E	E	C	E	C	C	C	C	$^6/_{10}$
4	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$^9/_{10}$
5	E	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$^8/_{10}$
6	E	E	C	C	C	C	E	C	C	C	$^7/_{10}$
7	C	C	C	C	E	C	C	E	E	E	$^6/_{10}$
8	C	C	C	E	E	C	C	C	C	C	$^8/_{10}$
9	C	E	C	E	C	E	C	C	C	C	$^7/_{10}$
10	C	C	C	E	E	C	C	E	C	E	$^6/_{10}$

11	C	C	C	E	E	C	C	C	C	C	$8/10$
12	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$9/10$
13	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	$9/10$
14	C	E	C	C	C	E	C	C	C	C	$8/10$
15	E	C	C	E	E	C	C	C	C	C	$7/10$
16	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$9/10$
17	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$9/10$
18	C	C	C	E	E	C	C	C	C	C	$8/10$
19	C	C	C	E	E	C	C	C	C	C	$8/10$
20	C	C	C	E	E	C	C	C	C	C	$8/10$
21	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$9/10$
22	C	C	C	C	E	C	C	E	C	C	$8/10$
23	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$9/10$
24	C	C	C	C	E	C	C	E	C	E	$7/10$
25	E	C	C	E	C	C	-	C	C	C	$7/10$
26	C	E	C	E	C	E	C	C	C	C	$7/10$
27	C	C	C	E	E	C	C	C	C	C	$8/10$
28	E	C	C	E	C	C	C	E	E	E	$5/10$
29	C	C	C	E	C	C	C	C	E	E	$7/10$
30	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$9/10$
31	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$9/10$
32	C	C	C	E	E	C	C	C	C	C	$8/10$
33	C	C	C	E	E	C	E	C	C	C	$7/10$
Número de acertos na questão	$28/33$	$27/33$	$31/33$	$16/33$	$11/33$	$28/33$	$27/33$	$27/33$	$30/33$	$28/33$	
Número de alunos que não	$0/33$	$0/33$	$0/33$	$0/33$	$0/33$	$0/33$	$3/33$	$0/33$	$0/33$	$0/33$	

respon-deram											

Questão→ Aluno ↓	**4**
1	Números que podem ser escritos sob forma de fração e as dízimas
2	Números que podem ser escritos sob forma de fração e as dízimas
3	Que tem respostas definitivas
4	Todas as dízimas
5	Números que podem ser escritos sob forma de fração e as dízimas
6	Números que podem ser escritos sob forma de fração e as dízimas
7	Números que podem ser escritos sob forma de fração e as dízimas
8	Números que podem ser divididos em frações
9	Racionais são todos os que têm final definido
10	Racionais finitos
11	Irracionais infinitos
12	Racionais são todos os que têm final definido
13	Racionais finitos (primeira é racional)
14	Números após a vírgula, finitos ou previsíveis. Dízimas periódicas
15	Números que podem ser escritos sob forma de fração
16	Racionais são todos os que têm final definido
17	Racionais, fração e finitos.
18	Números que podem ser escritos sob forma de fração
19	Racionais são todos os que têm final definido
20	Têm que ser inteiro não decomposto.
21	Racionais são as dízimas
22	Número que posso pensar e contar, são finitos.
23	Fração e finitos
24	Racionais finitos
25	Que têm raiz quadrada
26	Racionais, fração e finitos.
27	Números que podem ser escritos sob forma de fração e as dízimas
28	Racionais, fração e finitos.
29	Racionais, fração e finitos.
30	Racionais finitos
31	Números que podem ser escritos sob forma de fração e as dízimas
32	-
33	-
Número de acertos na questão	$\frac{12}{33}$
Número de alunos que não respon-deram	$\frac{2}{33}$

Questão→ Aluno ↓	**5**	**6** $(1+\sqrt{6})$	**6** $(2\sqrt{6})$
1	E (não são irracionais)	-	-
2	C (não possuem fim e não são dízimas)	-	-
3	E (são irracionais infinitos)	-	-
4	E (todos são irracionais)	C	C
5	E (todos são irracionais)	-	-
6	C	-	-
7	E (são irracionais)	-	-
8	C	C	C
9	E	C	C
10	C	C	C
11	C	C	C
12	C	-	-
13	E (todos são irracionais)	C	C
14	E (todos são irracionais)	-	-
15	E (todos são irracionais)	C	C
16	-	-	-
17	-	C	C
18	-	C	C
19	-	C	C
20	-	-	-
21	-	-	-
22	-	-	-
23	-	-	-
24	-	-	-
25	-	-	-
26	C	C	C
27	C	C	C
28	C	C	C
29	C	C	C
30	C	C	C
31	C	C	C
32	C	C	C
33	C	C	C
Número de acertos na questão	$14/33$	$18/33$	$18/33$
Número de alunos que não respon-deram	$10/33$	$15/33$	$15/33$

Questão 7

- ✓ Não, pode ser real: $16/33$
- ✓ Sim, é sempre racional (ou inteira): $8/33$
- ✓ Não responderam: $9/33$

Questão 8

- ✓ Sim, números irreais: $2/33$ (sem exemplo).
- ✓ Sim, números complexos: $19/33$ (com exemplos).
- ✓ Não: $2/33$
- ✓ Não responderam: $9/33$ (os mesmos da questão anterior)

3 Tabulação dos resultados dos questionários aplicados nos calouros do Curso de Licenciatura em Matemática

Desempenho dos 39 alunos

Questão→ Aluno ↓	1a	1b	1c	Nº de acertos por aluno	2a	2b	2c	Nº de acertos por aluno
1	C	C	E	2/3	C	---	--	1/3
2	C	E	C	2/3	C	C	C	3/3
3	C	E	E	1/3	E	---	--	0/3
4	C	E	E	1/3	C	---	C	2/3
5	C	E	E	1/3	C	C	--	2/3
6	C	E	C	2/3	C	C	C	3/3
7	C	E	E	1/3	C	E	C	2/3
8	C	C	E	2/3	C	E	C	2/3
9	C	E	C	2/3	C	C	C	3/3
10	C	---	C	2/3	C	C	--	2/3
11	C	E	E	1/3	C	C	E	2/3
12	C	E	E	1/3	E	C	E	1/3
13	C	E	E	1/3	C	---	--	1/3
14	C	E	E	1/3	C	---	--	1/3
15	C	E	E	1/3	E	E	C	1/3
16	E	E	E	0/3	C	---	--	1/3
17	C	E	E	1/3	C	C	C	3/3
18	E	E	E	0/3	C	E	C	2/3
19	C	E	C	2/3	C	C	C	3/3
20	C	E	C	2/3	C	---	C	2/3
21	C	C	C	3/3	C	---	--	1/3

22	C	E	E	1/3	C	C	E	2/3
23	C	E	C	2/3	---	---	--	0/3
24	C	E	E	1/3	C	---	C	2/3
25	E	E	E	0/3	C	C	C	3/3
26	E	E	E	0/3	E	C	E	1/3
27	C	E	E	1/3	C	---	--	1/3
28	C	E	C	2/3	E	C	--	1/3
29	C	C	E	2/3	C	E	E	1/3
30	C	C	E	2/3	C	C	E	2/3
31	E	---	--	0/3	C	C	--	2/3
32	C	E	E	1/3	C	---	--	1/3
33	C	C	E	2/3	C	---	--	1/3
34	C	E	E	1/3	C	C	E	2/3
35	C	E	E	1/3	C	---	--	1/3
36	C	E	--	1/3	C	C	C	3/3
37	C	E	E	1/3	---	C	C	2/3
38	C	E	E	1/3	C	C	E	2/3
39	C	E	E	1/3	C	C	C	3/3
Número de acertos na questão	34/39	6/39	9/39		32/39	20/39	16/39	
Número de alunos que não respon-deram	0/39	2/39	2/39		2/39	14/39	15/39	

Questão → Aluno ↓	**3a**	**3b**	**3c**	**3d**	**3e**	**3f**	**3g**	**3h**	**3i**	**3j**	**Nº de acertos por aluno**
1	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10

2	E	C	C	C	E	C	C	C	C	C	8/10
3	C	E	C	E	C	--	C	E	E	E	4/10
4	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
5	C	C	C	C	C	C	E	C	C	E	8/10
6	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
7	C	E	C	C	C	E	E	C	C	C	7/10
8	C	E	C	C	C	E	C	E	E	E	5/10
9	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
10	C	C	C	C	E	C	E	C	C	C	8/10
11	C	C	C	C	--	--	---	C	--	--	5/10
12	C	C	C	C	C	E	C	C	E	E	7/10
13	E	E	C	E	E	E	E	C	C	E	3/10
14	E	C	C	C	E	C	C	C	C	C	8/10
15	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	0/10
16	E	C	E	C	E	C	E	C	C	C	6/10
17	E	E	C	C	E	E	C	C	E	E	4/10
18	C	---	C	E	C	---	C	E	E	E	4/10
19	C	C	C	C	C	C	E	E	E	E	6/10
20	---	C	C	E	C	C	C	C	C	C	8/10
21	E	C	C	C	E	C	C	C	C	C	8/10
22	C	E	C	C	C	E	---	C	C	--	6/10
23	E	C	C	E	E	C	C	E	E	E	4/10
24	C	E	C	---	C	E	E	---	--	--	3/10
25	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	9/10
26	C	E	C	C	---	---	E	C	E	E	4/10
27	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	10/10
28	C	---	C	---	--	--	C	---	--	--	3/10

29	C	---	C	C	C	--	---	C	C	C	$7/10$
30	C	E	E	C	E	C	E	C	E	C	$5/10$
31	C	---	C	C	E	C	---	E	C	E	$5/10$
32	C	C	C	E	C	C	C	E	E	E	$6/10$
33	C	C	C	C	E	C	C	C	C	C	$9/10$
34	C	E	C	---	C	C	E	C	C	C	$7/10$
35	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	$9/10$
36	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	$9/10$
37	C	E	C	E	C	E	C	C	C	C	$7/10$
38	C	E	C	E	--	E	C	E	E	E	$3/10$
39	C	C	C	C	C	C	C	E	E	C	$8/10$
Número de acertos na questão	$29/39$	$22/39$	$30/39$	$27/39$	$23/39$	$23/39$	$17/39$	$21/39$	$23/39$	$20/39$	
Número de alunos que não respon-deram	$1/39$	$4/39$	$0/39$	$3/39$	$4/39$	$6/39$	$4/39$	$2/39$	$3/39$	$4/39$	

Questão 4
Para ser racional o número pode ser escrito na forma de fração;
Números com dízimas periódicas podem ser representados na forma de fração, por isso são racionais, enquanto que os que não possuem dízimas e tendem o infinito são irracionais;
Dízima não é racional;
Racionais são números que não incluem imaginários;
Números cujas casas depois da vírgula são finitas / infinitas periódicas / infinitas e não periódicas são racionais / racionais / irracionais;
Se não puder se expressar na forma de fração é irracional;
Se o número, quando na forma calculada, apresenta ou não periodicidade (mas não argumentou nada nem apresentou os cálculos de 3h, 3i, 3j);
Seqüência lógica de números (o que o levou a responder que a constante de champernowne é racional);
Se apresentar período é racional (e se não apresenta "nada podemos garantir");
Números racionais são representados por todas as frações exatas possíveis;
Com números muito grandes como dízimas não consigo fazer tal cálculo, portanto não

encontro a resposta;
O infinito é irracional (sendo coerente em não saber recuperar a fração em 2(b) e 2(c) e afirmando que 3(e) não é racional);
Não respondeu nada (e errou quase todas as respostas anteriores!);
Fração der resultado inteiro = racional; fração der resultado não inteiro = irracional (sendo coerente ao dizer que $2/3$ não é racional);
Procurei enxergar o número, de uma maneira que ele tivesse fim, considerei irracionais as dízimas periódicas e os números sem qualquer regra de formação. (sendo coerente ao dizer que $2/3$ é irracional);
Racionais são todos os números que podem ser escritos sob a forma de fração (e marcou que π e $\sqrt{6}$ são racionais!);
Seqüência lógica e não saber como descobrir o $\sqrt{6}$ (marcou que nada podemos garantir sobre o $\sqrt{6}$);
Todos os números que apresentam “vírgula” e que também são “infinitos” (sendo coerente com a marcação de $2/3$ e também 0,010101... Serem irracionais);
Analisei se existe um padrão que se repete (e, portanto champernowne é racional).
Ser racional=limitação de casas decimais e dízimas periódicas; ser irracional=não há regularidade nas casas decimais (e praticamente só não soube recuperar a fração);
Poder ou não transformar-se em fração (mas não soube reconhecer os irracionais)
π e dízima periódica não são racionais (sendo incoerente ao recuperar corretamente a fração em 2(b) e 2(c));
Considerei raízes com resultado não inteiro irracionais (e não teve oportunidade de errar alguma questão porque não apresentamos, por exemplo, $\sqrt{9/4}$);
Números finitos são racionais (o que o levou a marcar que 2/3 é racional, mas também $\sqrt{6}$ e $1+\sqrt{6}$, enquanto “não sabe” se 0,0101010... é ou não racional);
Dízima periódica é racional, mas não sei se $\sqrt{6}$ é racional ou não. (o que o fez dizer que “não podemos garantir” que $\sqrt{6}$ é racional, mas ele respondeu que $\frac{\sqrt{6}}{2}$ não é racional...);
$\sqrt{6}$ é irracional (raiz não exata); já $\sqrt{6}+1$ dá racional, mas $\frac{\sqrt{6}}{2}$ dá irracional.

Questão→ Aluno ↓	**5** (abordou a questão calculadora?)
1	Não, apenas mencionou o arredondamento em (b)
2	Não
3	Não
4	Não (mencionou os erros)
5	Não
6	Sim, no item (b), apesar de racional, não apareceu a periodicidade
7	Sim (não foram utilizados todos os dígitos, logo são racionais)
8	Sim (não temos a garantia de que existe um período)
9	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
10	Não e concluiu que (b) é irracional
11	Não sei
12	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
13	Sim
14	Não e disse apenas que (a) é irracional
15	---
16	Não, todos irracionais porque não são inteiros.
17	Não e disse apenas que (a) é irracional
18	Não, todos são racionais.
19	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
20	Sim e disse que “calculadora não demonstra dízimas, e, portanto só podemos supor que os números são irracionais”.
21	Sim conclusões corretas (inclusive “arredondamento”)
22	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
23	Sim mas concluiu que todos são irracionais por não apresentarem “divisão exata”
24	Sim
25	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
26	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
27	Não
28	Não, afirmando que todos são racionais.
29	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
30	Sim: afirmou que todos são irracionais

31	Não
32	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
33	Sim argumentando corretamente
34	Não
35	Não
36	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
37	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
38	Sim mas concluiu que todos são irracionais porque nenhum deles é raiz de número negativo
39	Sim mas concluiu então que (b) era irracional por não apresentar período
Número de acertos na questão	$^{22}\!/_{39}$
Número de alunos que não respon-deram	$^{1}\!/_{39}$

Questão→ Aluno ↓	**6**	**7**	**8a**	**8b**	**9a**	**9b**
1	Maior	C	C	Infinitos	C	Infinitos
2	Maior	C	C	Infinitos	E	Infinitos
3	Maior	E	---	---	---	---
4	Maior	C	C	Infinitos	C	Infinitos
5	menor	E	---	9	---	---
6	Igual	C	C	Infinitos	C	Infinitos
7	maior	E	C	8	---	Infinitos
8	Não sei	C	C	Infinitos	---	---
9	Igual	E	---	Infinitos	---	Infinitos
10	Igual	C	---	---	---	---
11	Igual	E	---	---	---	---
12	Maior	C	---	Infinitos	---	---
13	menor	C	---	---	---	---
14	maior	C	E	---	---	Infinitos
15	maior	C	0	---	0	---
16	Maior	C	E	---	---	Infinitos

17	maior	C	---	---	---	---
18	Maior	E	---	---	---	---
19	Igual	C	---	Infinitos	---	Infinitos
20	Igual	C	---	---	---	---
21	Maior	C	C	---	E	---
22	Maior	E	---	---	---	---
23	Maior	C	---	---	E	---
24	Igual	C	---	---	---	---
25	Igual	C	---	---	---	---
26	Menor	---	E	2	0	---
27	Maior	E	C	---	---	---
28	maior	E	---	Infinitos	0	---
29	Maior	C	---	---	---	---
30	Maior	C	0	---	---	Infinitos
31	---	C	---	---	---	---
32	Maior	E	---	---	---	---
33	Tende a zero	-----	---	Infinitos	---	Infinitos
34	Maior	C	---	---	---	---
35	Maior	E	---	Infinitos	---	Infinitos
36	Maior	C	---	---	---	---
37	Maior	E	0		---	---
38	Maior	C	---	Infinitos	---	---
39	Maior	C	C	---	---	---
Número de acertos na questão	Igual: $8/39$ Maior: $25/39$ Menor: $3/39$ Não sei: $2/39$ Tende a zero: $1/39$	$25/39$	$9/39$	$12/39$	$3/39$	$12/39$
Número de alunos que não respon-deram	$1/39$	$2/39$	$24/39$	$22/39$	$30/39$	$27/39$

Questão→ Aluno ↓	**10** (inteiro /racional/ argumento)	**11**	**12**
1	C C Porque é raiz	C	C C
2	C E Todo comprimento é racional	E	C E
3	C ----	---	E --
4	C C	C	E --

5	C C Não existem segmentos de medidas negativas	C	C C
6	C C Contra-exemplo	C	C --
7	C C Nunca vai dar inteiro se os lados forem iguais	C	E --
8	C C Extração de raiz não é uma operação fechada	C	C --
9	C C ---	C	C C
10	---	E	---
11	---	C	---
12	C C Contra-exemplo	E	C C
13	C C Contra-exemplo	C	C --
14	C C ----	C	-- C
15	C C ----	C	-- E
16	C-- ---	E	C --
17	C C Raiz irracional	E	-- E
18	C-- Raiz de inteiro nem sempre é inteiro	---	E --
19	C-- Raiz de inteiro nem sempre é inteiro	E	-- E
20	C C ---	C	-- E
21	C C Contra-exemplo	E	---
22	---	---	C C
23	C E Uma medida possui limites	E	C E
24	---	---	C C
25	E E Argumentou para a diagonal ao quadrado	C	C C
26	-- E A $\sqrt{2}$ é sempre racional	E	---
27	C C Contra-exemplo	C	C --
28	C E Argumentação errada	C	---

29	C C Envolve raiz	E	C --
30	C C ---	C	E --
31	C C Envolve raiz	C	---
32	E E Fez um exemplo achando $\sqrt{5}$ e dizendo que $\in Q$	C	---
33	C C ---	E	---
34	C C Contra-exemplo	C	C C
35	C C Quase totalmente correta a argumentação	C	C E
36	C C ---	C	C C
37	E E Trata-se de uma multiplicação	C	---
38	C E Raiz de número negativo	E	C E
39	C -- Contra-exemplo	E	C --
Respostas corretas com argumentações corretas (com palavras)	$\frac{8}{39}$	$\frac{22}{39}$	$\frac{9}{39}$
Respostas corretas com argumentações corretas (com contra-exemplo)	$\frac{7}{39}$		
Respostas corretas com argumentações erradas	$\frac{2}{39}$		$\frac{4}{39}$
Número de alunos que não justificaram ou não responderam	$\frac{14}{39}$	$\frac{4}{39}$	$\frac{9}{39}$

Questão→ Aluno ↓	**13**
1	O comprimento da circunferência é um número aproximado
2	---
3	---

4	Falso, pois π é irracional.
5	---
6	π é irracional
7	A circunferência tem que ser divisível pelo diâmetro
8	Não sei se existe situação em que numerador é múltiplo do denominador
9	Falso, pois π é irracional.
10	---
11	---
12	C
13	“Raciocínio correto” (coerente com sua resposta 3d)
14	“O cálculo está incorreto”
15	---
16	“c e d são racionais”
17	---
18	---
19	C
20	π é irracional
21	---
22	---
23	Acredito queπ é irracional
24	C
25	---
26	π é irracional
27	---
28	Atribuiu valores inteiros
29	π é irracional
30	π é irracional
31	---
32	“Não podemos afirmar”
33	---
34	π é irracional
35	“Um fato não justifica o outro”
36	π é irracional
37	Inteiro
38	“Raciocínio correto” (coerente com sua resposta 3d)
39	π é irracional
Respostas corretas com argumentações corretas	$5/39$
Respostas corretas comargumentações razoáveis	$20/39$
Número de alunos que não respon-deram	$14/39$

Questão→ Aluno ↓	14	15
1	Justificativa errada	Números que não podem ser representado na forma de fração; os números de casas decimais tendem ao infinito.
2	E	Números dizimais
3	E	São números imaginários
4	C	Números com infinitas casas depois da vírgula e que não têm nenhuma dízima periódica
5	E	Números que não pode ser representado na forma de fração
6	C	Números reais não racionais Todas as dízimas aperiódicas são irracionais, número de Euler, pi.
7	---	Número que não pode ser representado na forma de fração que se colocado na forma decimal não representa uma seqüência lógica
8	C	Número que não pode ser representado na forma de fração de inteiros com denominador não nulo
9	E	Número que não apresenta periodicidade em sua dízima
10	---	Inclui raízes inexatas
11	---	---
12	E	Número na forma decimal, em que não há uma seqüência de repetição de números.
13	---	---
14	E	Número que não tem fim
15	E	---
16	C, mas não justificou.	Divisão de números inteiros, com resultados de números inteiros.
17	E	---
18	E	---
19	---	Número que não pode ser definido por nenhuma seqüência lógica
20	C, mas não justificou.	Número que escrito na forma decimal não tem valor exato.
21	---	Números com vírgula ou apresenta dízimas periódicas ou que seja finito
22	E	---
23	C	Números que quando divididos apresentam uma seqüência indefinida

		de decimais
24	E	Número infinito que não apresenta padrão de repetição
25	C	---
26	---	Aqueles que ficam separados dos decimais. Ex: pi e as raízes não exatas
27	---	Número cuja regularidade das casas decimais não está bem definida
28	C, sem justificar	---
29	---	Não tem soma, multiplicação, divisão e demais operações exatas.
30	C, sem justificar.	Pi, raízes, número sem dízima periódica.
31	E	---
32	---	Número que não pode ser representado na forma de fração
33	---	---
34	C, sem justificar.	Número que não pode ser transformado em fração (deu ex. de uma dízima não periódica e de uma que podia ser recuperada: 0,345345... =345/999).
35	---	---
36	E	Número que não segue uma seqüência contínua de repetição de números.
37	E	---
38	E	---
39	C, justificativa errada	Número que apresenta uma dízima aperiódica
Número de acertos: **- Com justificativa correta:** **- Sem justificativa:**	 $^{3}/_{39}$ $^{8}/_{39}$	
Número de alunos que não responderam	$^{12}/_{39}$	$^{13}/_{39}$

Questão→ Aluno ↓	**16**	**17**
1	Áreas e volumes	S

2	---	N
3	Dinheiro	N
4	Gráficos	S
5	---	S
6	---	S
7	---	S
8	“O mundo lá fora não é discreto”	S
9	Facilidade de calcular com reais	S
10	Contagem, ordenação e falta.	S
11	---	---
12	---	E
13	Contagem e facilidade nos cálculos	S
14	Facilidade o trabalho com os números	S
15	---	N
16	Sem eles não existe a matemática	N
17	---	S
18	---	E
19	Cálculos. Quantidades de alimento/habitante	N
20	---	S
21	**Medida**	S
22	---	E
23	Cálculos: escalas	N
24	Computação	S
25	---	N
26	---	S
27	---	S
28	Contar o número de pessoas do mundo	N
29	---	S
30	**Medida** / temperatura	S
31	---	N
32	---	S
33	---	N
34	---	S
35	---	S
36	---	N
37	---	N
38	Todos os cálculos precisam dos reais	S
39	**Medida**	S
Número de acertos na questão	$^{7}/_{39}$	$^{23}/_{39}$
Número de alunos que não responderam	$^{22}/_{39}$	$^{1}/_{39}$

4 Tabulação dos resultados do questionário pré proposta

Questão→ Aluno ↓	1a	1b	1c	2a	2b	2c
1	E	E	E	*	*	*
2	E	E	E	*	*	*
3	C	C	C	*	*	*
4	C	E	E	*	*	*
5	C	C	C	*	*	*
6	C	E	E	*	*	*
7	C	C	C	*	*	*
8	E	E	E	*	*	*
9	E	E	E	*	*	*
10	C	E	E	*	*	*
11	E	E	C	*	*	*
12	E	E	E	*	*	*
13	E	C	C	*	*	*
14	*	*	*	*	*	*
15	*	*	*	*	*	*
16	E	E	E	*	*	*
17	C	C	E	*	*	*
18	*	*	*	*	*	*
19	E	E	E	*	*	*
20	*	*	*	*	*	*
21	*	*	*	*	*	*
22	E	E	E	*	*	*
Respostas corretas e respectiva porcentagem	$\frac{7}{22}$ 31,81%	$\frac{5}{22}$ 22,72%	$\frac{5}{22}$ 22,72%	$\frac{0}{22}$ 0%	$\frac{0}{22}$ 0%	$\frac{0}{22}$ 0%
Número de alunos que não responderam e respectiva porcentagem	$\frac{5}{22}$ 22,72%	$\frac{5}{22}$ 22,72%	$\frac{5}{22}$ 22,72%	$\frac{22}{22}$ 100%	$\frac{22}{22}$ 100%	$\frac{22}{22}$ 100%

* *Alunos responderam que não lembravam de nada ou que não sabiam.*

Questões 3 e 4

- Nenhum aluno teve acerto significativo condizente com a questão 4. A maioria dos alunos respondeu “não sei”. Alguns perguntaram: “O que é número irracional?”, e os que se arriscaram a dizer o que é número irracional disseram: “é um número que não tem fim”.

Questão→ Aluno ↓	**5**	**6** $(1+\sqrt{6})$	**6** $(2\sqrt{6})$
1	*	C	C
2	*	*	*
3	E	E	E
4	*	*	*
5	*	C	C
6	*	C	C
7	C	E	E
8	*	*	*
9	E	E	E
10	*	*	*
11	E	C	E
12	*	*	*
13	*	*	*
14	*	*	*
15	*	*	*
16	*	*	*
17	E	E	E
18	E	*	*
19	E	*	*
20	E	*	*
21	*	*	*
22	*	*	*
Respostas corretas e respectiva porcentagem	$\frac{1}{22}$ 4,54%	$\frac{3}{22}$ 13,63%	$\frac{3}{22}$ 13,63%
Número de alunos que não responderam e respectivas porcentagens	$\frac{14}{22}$ 63,63%	$\frac{14}{22}$ 63,63%	$\frac{14}{22}$ 63,63%

5 Tabulação dos resultados do questionário-avaliação

Desempenho dos 20 alunos

Questão→ Aluno ↓	**1a**	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**	**2d**	**2e**	**2f**	**2g**	**2h**	**2i**	**4**
1	C	E	C	C	C	C	C	C	E	C	E	E	E
2	E	E	E	C	E	E	C	C	C	C	E	C	C Usou o sistema posicional
3	E	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C idem
4	E	E	E	C	C	C	E	E	C	E	E	E	C idem
5	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	E	E	E Justificou certo
6	C	E	C	---	E	C	E	C	C	C	E	E	C Usou o sistema posicional
7	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C Usou o sistema posicional
8	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C Usou o sistema posicional
9	C	E	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C Fica entre 2,123 e 2,124 e o outro menor entre 2,122 e 2,123.
10	E	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C Usou o sistema posicional
11	E	E	E	C	C	C	C	C	E	C	C	C	C Usou o sistema posicional
12	C	C	C	C	C	E	E	C	E	E	E	E	E
13	E	E	C	C	E	E	C	E	E	E	E	E	C
14	E	E	E	C	C	E	C	C	E	C	E	E	E Porque tem mais casas
15	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	E	E	C

16	E	E	E	C	C	C	C	E	C	E	C	C	C
17	C	C	C	E	C	C	C	C	E	C	C	C	E
18	C	C	C	---	E	E	E	E	C	C	E	E	C Porque a casa milesimal é maior
19	C	C	C	C	C	E	C	C	E	C	E	C	C
20	C	C	C	C	C	C	C	C	E	C	C	E	C
Respostas corretas	$\frac{12}{20}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{15}{20}$
Porcentagem de acertos	60 %	55 %	75 %	90 %	80 %	75 %	90 %	75 %	45 %	80 %	45 %	25 %	75%
Número de alunos que não responderam	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$	$\frac{0}{20}$
Porcentagem de alunos que não responderam	0 %	0 %	0 %	10 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0%

Questão 3

- A maioria dos alunos (82%) justificou suas respostas dizendo o que é número racional e o que é irracional.

- *Respostas mais comuns:*
  - Número irracional tem infinitas casas depois da vírgula que não se repetem.
  - Racionais são finitos ou dízimas periódicas.
  - Irracionais não têm fim e não têm período.

Questão→ Aluno ↓	**5**	**6** $(1+\sqrt{6})$	**6** $(2\sqrt{6})$
1	E	E	E
2	Só $\frac{1}{3}$ é racional pois é dízima periódica	C	E
3	Identificou $\frac{16}{17}$ como irracional	C Está entre 3 e 4; entre 3,4 e 3,5 entre 3,44 e 3,45	C Está entre 4 e 5
4	Identificou	C	C

	$\frac{16}{17}$ como irracional		
5	C Nem todos são fração	---	C
6	Identificou $\frac{16}{17}$ como irracional	E	E
7	C	C	C
8	Identificou $\frac{16}{17}$ como irracional	C	C
9	C	C	C
10	Identificou $\frac{16}{17}$ como irracional	C Graduou a reta	C
11	---	---	---
12	E	E	E
13	$\frac{1}{3}$ é racional pois tem infinitas graduações	---	---
14	Identificou $\frac{16}{17}$ como irracional	E	E
15	C	C	C
16	E	C	C
17	Identificou $\frac{16}{17}$ como irracional	C	C
18	---	---	---
19	Identificou $\frac{16}{17}$ como irracional	C	C
20	C	C	C
Respostas corretas	$\frac{5}{20}$ = 25%	$\frac{12}{20}$ = 60%	$\frac{11}{20}$ =55%
Número de alunos que não responderam	$\frac{2}{20}$ = 10%	$\frac{4}{20}$ ==20%	$\frac{3}{20}$ = 15%

Questão→ Aluno ↓	**7**
1	Não, pois nem sempre dá em cima do risquinho.
2	---
3	Não, contra exemplo: diagonal do quadrado unitário.
4	Não, sem justificativa.
5	E
6	E
7	Não, contra exemplo: diagonal do quadrado unitário.
8	E, exemplo certo: diagonal do quadrado unitário.
9	Não, nem sempre, às vezes podem se repetir os decimais e às vezes não.
10	Não, nem todos os cálculos são racionais.
11	---
12	Não, sem justificativa.
13	Não, contra exemplo: diagonal do quadrado unitário.
14	---
15	Não, pode ser fração ou número com vírgula.
16	---
17	Não, sem justificativa.
18	---
19	Não, mas justificou errado.
20	Não, contra exemplo: diagonal do retângulo de lados 1 e 2
Número de alunos que não responderam	$\frac{5}{20} = 25\%$

ANEXOS

ANEXO A – Relatório da aula 1

Os números servem para termos mais certeza sobre as medidas objetos e coisas que utilizamos, o dinheiro também é representado por números; e também facilita a compreenção da quantidade

É impossível imaginar o mundo se não excistisse a escrita e os números.

Os números 0, 1, 2, 3, 4, 5... são usados para contar, medir quantidades inteiras.

Os números -1, -2, -3, -4, -5... são usados para representar saldos negativos, temperaturas negatívas inteiras...

Quem é maior que quem nos números inteiros?

O sucessor é maior que o antessessor. É mior quem vem depois da reta númerica.

Como podemos representar quantidades não inteiras

Podemos representar quantidades não inteiros com frações e números decimais

Operando com Frações

+ −

Qual o significado de $\frac{1}{2}$?

É a metade de um objeto.

Qual o significado de $\frac{4}{6}$

São quatro partes de seis.

a) $\frac{1}{2} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$

b) $\frac{1}{2} - \frac{4}{6} = -\frac{1}{6}$

c) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2} : \frac{4}{6} = \frac{3}{4}$

e) $-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

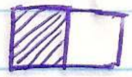
f) $\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{64}{216}$

ou

$\frac{\cancel{4}^2}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{6}_3} = \frac{8}{27}$

Quem é maior $\frac{1}{2}$ ou $\frac{4}{6}$?

→ Tem gente que acha que $\frac{1}{2}$ é maior porque no desenho ele tem menos repartições.



Léo

→ Tem outros que acham que $\frac{1}{2}$ é 0,5 e $\frac{4}{6}$ é 0,6 e 0,5 é menor que 0,6

Thaís

→ Tem gente que acha que $\frac{4}{6}$ vem depois que $\frac{1}{2}$

Daniel.

Propriedade usada para comparar frações.

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow$ se e somente se $ad > bc$

$b \neq 0$
$d \neq 0$

a, b, c, d são números inteiros

$\cancel{\frac{1}{3} > \frac{1}{2}}$ → errado

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ porque $1.3 > 2.1$
$3 > 2$

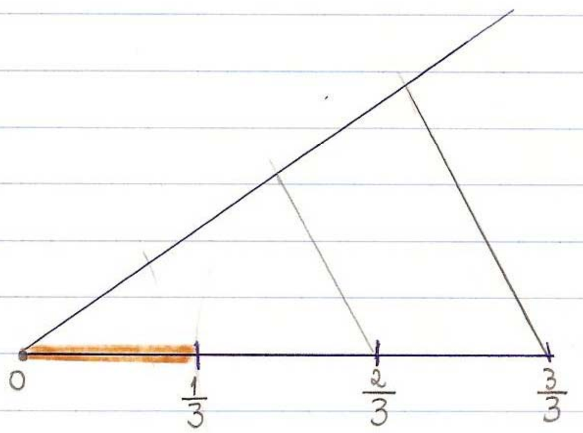
ANEXO B – Relatório da aula 2

Dia 03/05

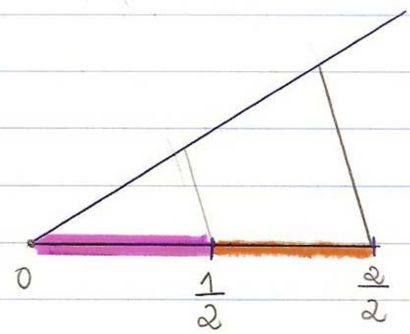
Bom dia!

Matemática

Medindo um barbante com a régua escolar encontrei 25,6 cm.



1/3



1/2

ANEXO C – Relatório da aula 2

Conclusoeŝ
das
Atividades
em Realizadas
aula

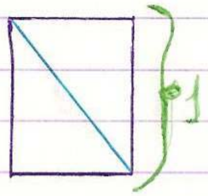
Usando a régua escolar nem sempre conseguimos medir de maneira exata segmentos de reta pois ela tem apenas duas graduaçoẽs (centímetro e milímetro), nem sempre dá exatamente em cima do risquinho.

ANEXO D – Relatório da aula 3

05/05

05/05
Bom dia!

A prova por absurdo...



$x^2 = 1^2 + 1^2$
$x^2 = 1 + 1$
$x^2 = 2$

Estou procurando uma quantidade que elevado ao quadrado seja 2.
Esta quantidade tem que estar entre 1 e 2.
Afinal, essa medida existe em forma de fração?
Seja $\frac{x}{y}$ uma fração, x e y são números inteiros.
y não pode ser 0 (zero). Então:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

$$\frac{x^2}{y^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 2y^2$$

$$x^2 = 2y^2$$

x^2: tem um nº par de fatores primos

$2y^2$: tem um nº ímpar de fatores primos.

É um absurdo, pois um nº tem uma fatoração crescente única em primos.

• Então não existe nenhuma fração que ao quadrado dê 2.

ANEXO E – Relatório da aula 4

No início da aula começamos a transformar decimal para fraçaõ a partir do exemplo do colega Anderson.

Ex. $1,3 = \frac{1}{1} + \frac{3}{10} = \frac{10+3}{10} = \frac{13}{10}$

$\left(\frac{13}{10}\right)^2 = \frac{169}{100} = 1,69$

Sabemos que:

$1 < x < 2$

$x^2 = 2$

Conclusaõ.

(x está entre 1,4 e 1,5)

$1,4 < x \quad 1,5$

ou

$1 + \frac{4}{10} < x < 1 + \frac{5}{10}$

$\frac{14}{10} < x < \frac{15}{10}$

$x^2 = 2;$ 1 fator primo

nº par de fatores primos

Absurdo

Se $x = 1$ ou $y = 1$ Naõ concluímos nada de diferente da aula passada.

___/___/___

Seja $\frac{x}{y}$ onde $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$ tal que

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

$$\frac{x^2}{y^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 2y^2$$

$\underline{x}$ pode ser fatorado nos seguintes primos:

$$\begin{array}{c|l} x & p^1 \\ & p^2 \\ & \vdots \\ & p^k \end{array}$$

Então x^2 tem um nº par de fatores primos p_1, p_2; $p_2, p_2 \ldots$

y^2 da mesma forma tem um nº par de fatores primos.

Então:

$$\underbrace{x^2}_{\text{nº par de fatores primos}} = \underbrace{2y^2}_{\text{nº ímpar de fatores primos (par+1)}}$$

Mas isso é impossível pois a igualdade é verdadeira e um nº não pode ter ao mesmo tempo um nº par e um nº impar de fatores primos.

Portanto não existe uma fração que elevada ao quadrado dê 2, ou seja,

ACABAMOS DE ENCONTRAR
UM SEGMENTO CUJA MEDIDA
NÃO É RACIONAL
(forma de fração)

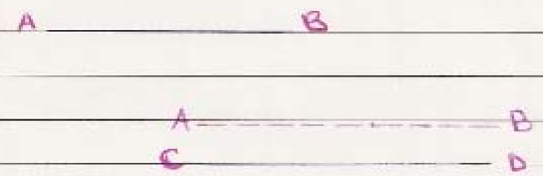
ANEXO F – Relatório da aula 4

Segunda parte da aula:

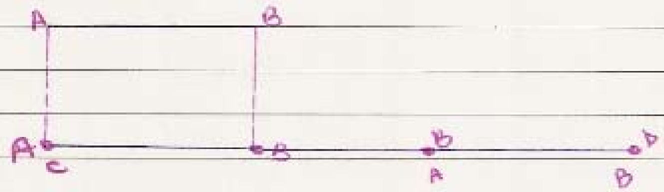
Como então podemos medir de maneira exata a diagonal do quadrado unitário e talvez outros segmentos cuja a medida não seja racional?

Princípios de medição

1º Dois segmentos de reta são congruentes se for possível superpô-los exatamente. Diremos que neste caso eles têm a mesma medida.



2º Um segmento AB é menor ou igual a outro segmento CD, se deslocando / transladando AB for possível deixá-lo totalmente contido em CD.



3º Se CD = m AB então (CD) = m (AB)

lê-se comprimento de CD

m = 3, ou seja, 3 cópias de AB geram o CD

$CD = 3\,AB$

Caso particular

Se $AB = 1$ então $CD = \frac{m}{y}$

Se $y\,CD = m\,AB$ então $CD = \frac{m}{y}\,AB$

ANEXO G – Relatório da aula 5

Relatório da aula do dia 12.05.2006

★ A sala se dividiu em 2 grupos, onde esses grupos fizeram uma régua unitária e construiram um segmento que não podia medir com está graduação. então usando Tales e compasso dividiram em 10 partes iguais;

★ Pegaram uma tira para medir, mas essa tira ficou entre 0,5 < x < 0,6;

★ entre 0,5 e 0,6 foi dividido em 10 partes iguais, para ver se iria dar certo, mas também ficou entre duas marcações;

★ essas marcações foram divididas em 10 partes formando a graduação centesimal e ficou entre 0,51 e 0,52. Se dividirmos em 10 partes também esse intervalo não daria pra medir de maneira exata;

★ uma reta é infinita.
e a tira ficou também entre 0,52 < x < 0,53, na reta decimal infinita.
Kéia Tamara Santin   t: 81

ANEXO H – Lista de exercícios

Exercícios

1) Escolha, sobre uma reta horizontal, um ponto e uma unidade de medida conveniente. A seguir, construa segmentos de medidas:

i) 0,72 ii) 0,725 iii) 0,3 iv) 0,33

v) 0,5 vi) 0,25 vii) 0,241

2) Qual a lista associada ao segmento de medida:

i) 1/4 ii) 1/3 iii) 1/10 iv) 2/5

v) 2/3 vi) 2/7

3) A partir do Exercício 1, responda:

i) quem é maior: 0,72 ou 0,725? Por quê?

ii) quem é maior: 0,33 ou 0,333 ou 0,3? Por quê?

iii) quem é maior: 0,25 ou 0,241 ou 0,2389? Por quê?

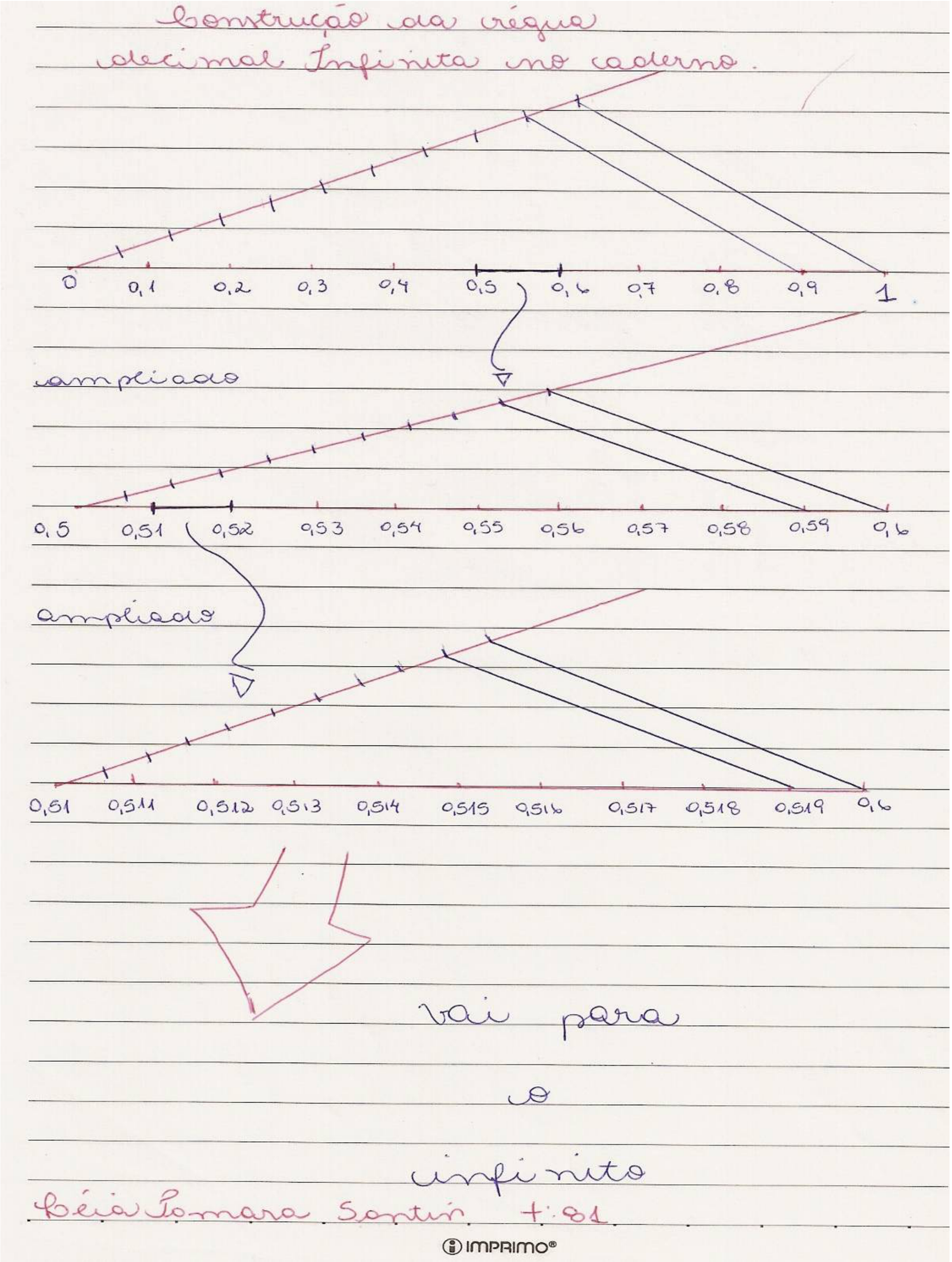
4) i) quem é maior: 1/4 ou 1/3? Por quê?

ii) quem é maior: 1/4 ou 2/5? Por quê?

5) Olhando agora para as listas que você determinou no exercício 2, responda os itens (i) e (ii) da questão 4.

6) Quem é maior: 0,3 ou 0,33 ou 0,333 ou 1/3? Por quê?

ANEXO I – Relatório da aula 5



ANEXO J – Relatório da aula 6

17/05/06

Registro das conclusões

* Sendo agora a régua decimal infinita construída conseguiremos que a extremidade de qualquer segmento coincida com o ponto já graduado?

* O processo utilizado para graduar a régua pode ser infinito pois sempre podemos construir um segmento cuja extremidade coincida entre dois pontos graduados;

* Para termos chance de medir de maneira exata qualquer segmento de reta precisamos de infinitos graduações: exemplo:

→ O segmento de medida 1/3 precisa de infinitos graduações pois 1/3 é igual a 0,3333....

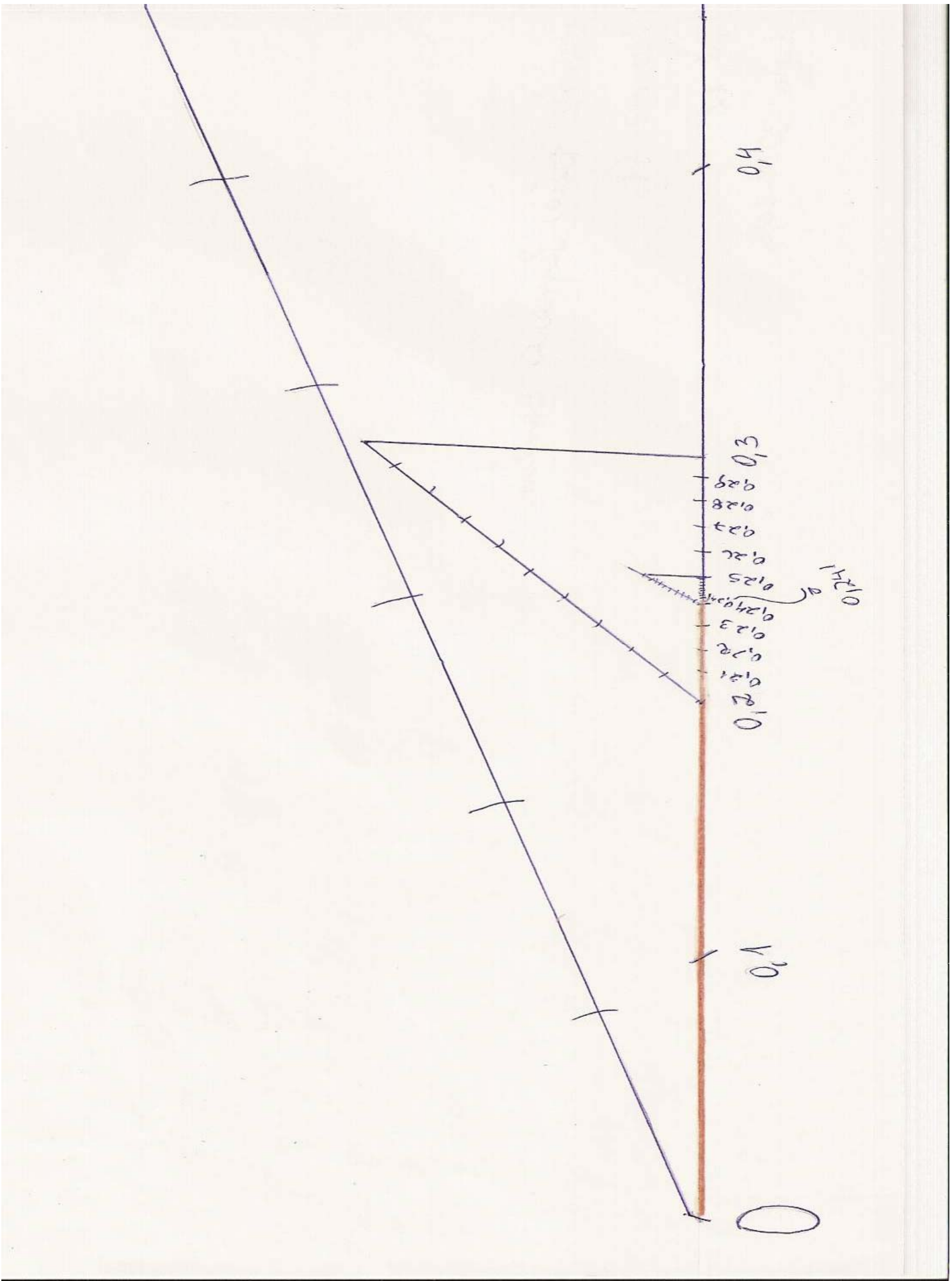
Régua decimal infinita

A ________________ B

Sabemos que: B é algum ponto graduado

$\Rightarrow |AB| = m, a_1 a_2 \ldots a_5 \Rightarrow |AB|$ pode ser escrito na forma de fração $\Rightarrow |AB|$ é racional

ANEXO K – Resolução da lista de exercício

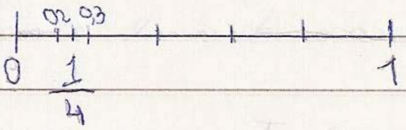


ANEXO L – Resolução da lista de exercício

Nome: Leonardo T: 81

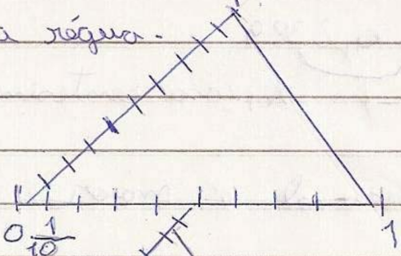
2- Qual a lista associada ao segmento de medida:

I) $\frac{1}{4} = 0{,}25$

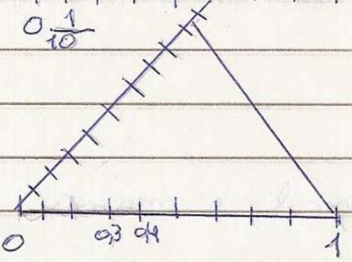


II) $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ indica que teria que graduar infinitos vezes a régua.

III) $\frac{1}{10} = 0{,}1$



IV) $\frac{2}{5} = 0{,}4$



V) $\frac{2}{3} = 0{,}666..$ indica que graduaria infinitos vezes

VI) $\frac{2}{7} = 0{,}285714...$ indica que graduaria infinitos vezes a régua.

3- A partir do exercício 1 responda quem é o maior e justifique.

I) 0,72 ou 0,725   0,72 < 0,725 → por que graduamos mais uma vez, Tem uma casa decimal a mais

II) 0,33 ou 0,333 ou 0,3 Tem mais casas decimais, foi graduados mais vezes.

III) 0,25 ou 0,241 ou 0,2389

A casa centesimal é maior.

0,23 0,24 0,25

IV) $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ A casa decimal é maior

V) $\frac{1}{4}$ ou $\frac{2}{5}$ a casa decimal é maior

4- Quem é maior: 0,3 ou 0,33 ou 0,333 ou $\frac{1}{3}$.

Por que ele tem infinitos casas decimais, e os dígitos estão entre 0,3 e 0,4 entre 0,33 e 0,34 entre 0,333 e 0,334...

ANEXO M – Relatório da aula 8

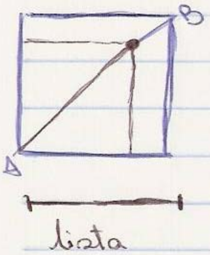
24/05/06

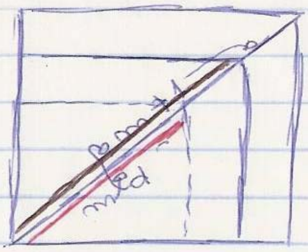
Para medir de maneira exata a diagonal do quadrado unitário, eu preciso de uma lista infinita, infinitas graduações

A lista que mede esta diagonal é infinita e não periódica.

O objetivo da aula de hoje é descobrir esta lista

$$d = m, a_1 a_2 a_3 \ldots$$





a e b são nº positivos

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot a < b\cdot a \Rightarrow a^2 < ab \\ a\cdot b < b\cdot b \Rightarrow ab < b^2 \end{array}\right\} a^2 < b^2$$

Encontrando m já sabemos que $d = m, a_1, a_2, a_3, \ldots$

$$m^2 < 2 < (m+1)^2$$

$\boxed{m = 1}$ $\quad a = 1, a_1, a_2, a_3 \ldots$

Para o a_1 temos 10 possibilidades

$(1,a_1)^2 < 2 < \left(1,a_1 + \frac{1}{10}\right)^2$

$(1,3)^2 < 2 < \left(1,3 + \frac{1}{10}\right)^2$

$(1,3)^2 < 2 < (1,4)^2$

$1,69 < 2 < (1,96)$

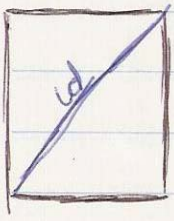
Quem é o a_2?

Para a_2, temos 10 possibilidades!

$(1,43)^2 < 2 < (1,44)$
testamos o $a_2 = 3$ e não deu certo

A diagonal mede $d = 1,41\, a_3\, a_4$

$d = 1,41\ldots$



$1 < a < 2$
$1,4 < d < 1,5$
$1,4 < d < 1,42$

e assim por diante...