

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Escola de Engenharia

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas,
Metalúrgica e de Materiais**
PPGEM

**MÉTODOS GEOESTATÍSTICOS PARA A INCORPORAÇÃO DA
TOPOGRAFIA COMO INFORMAÇÃO SECUNDÁRIA NO MAPEAMENTO
DO NÍVEL DE ÁGUA SUBTERRÂNEA**

Maria Noel Morales Boezio

**Dissertação para obtenção do título de
Mestre em Engenharia**

Porto Alegre - RS
2004

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
Escola de Engenharia**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas,
Metalúrgica e de Materiais
PPGEM**

**MÉTODOS GEOESTATÍSTICOS PARA A INCORPORAÇÃO DA
TOPOGRAFIA COMO INFORMAÇÃO SECUNDÁRIA NO MAPEAMENTO
DO NÍVEL DE ÁGUA SUBTERRÂNEA**

**Maria Noel Morales Boezio
Engenheira Química**

Trabalho realizado no Laboratório de Pesquisa Mineral e Planejamento Mineiro da Escola de Engenharia da UFRGS, dentro do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Minas, Metalúrgica e de Materiais (PPGEM), como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Metalurgia Extrativa e Tecnologia Mineral

**Porto Alegre - RS
2004**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia, área de concentração de Metalurgia Extrativa e Tecnologia Mineral e aprovada em sua forma final, pelo Orientador e pela Banca Examinadora do Curso de Pós-Graduação.

Orientador:

Prof. Dr. João Felipe Coimbra Leite Costa

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Giorgio F.C. de Tomi

Prof. Dr. Carlos André Mendes

Prof. Dr. Jair Carlos Koppe

Prof. Dr. Carlos Arthur Ferreira
Coordenador do PPGEM

"Sejam os Orientais tão instruídos quanto valentes."

*Gral. José Gervásio Artigas
Chefe dos Orientais*

Montevideu, 26 de maio de 1816.

Aos meus pais, Washington e Susana,
meu irmão Hernán
e o meu esposo Nicolás,
pelo apoio e amor incondicionais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor João Felipe C. L. Costa pela fundamental orientação nessa dissertação. Também pela sua confiança na minha capacidade, pelo seu apoio e ensinamentos a fim de me tornar uma melhor pesquisadora, profissional e pessoa.

Ao Professor Jair Carlos Koppe pelo apoio e disponibilidade permanentes.

Às empresas Rio Deserto e seus profissionais por disponibilizarem o banco de dados para o estudo de caso.

Ao Professor André Zíngano pela disponibilidade para consultas e fornecimento de material a respeito Mina do Trevo.

Ao LPM – Laboratório de Pesquisa Mineral e Planejamento Mineiro por oferecer a infra-estrutura necessária para a realização desse trabalho.

Aos meus colegas e amigos do LPM pela sua ajuda, carinho e amizade. Em especial Simone, Keli, Vanessa, Enrique, Paul, Mário, Sandro, Leandro, Fabrício, José Antonio e Daniele. Além da amizade, à fundamental ajuda no meu trabalho do Gustavo, assim como também de Daiane, Luiz Eduardo e Fernando.

Aos funcionários administrativos do LPM, PPGEM e da Fundação Luiz Englert, especialmente a Lorací e Vinícius.

A toda minha família, meus pais, sempre dispostos a virem me ajudar e cuidar. Ao meu irmão e a minha cunhada Natalia. À minha avó Elena, à Tia Juanita e à Tia Eugenia que desde perto de Deus continua a me cuidar.

Fundamentalmente ao meu marido Nicolás, pelo seu amor e por apoiar o meu crescimento profissional e pessoal desde sempre e especialmente nesta etapa, superando a distância.

Aos meus sogros, Malena e Julio, meus cunhados César e Sebastián e minhas cunhadas Lisandra e Ximena, pelo apoio e carinho.

Aos meus amigos em Montevideú, fundamentalmente às minhas queridas amigas Graziella, Maité, Danella, Verônica, Silvia e Marinella, por estarem sempre comigo, de fato e no meu coração. Também Walkiria desde Munich.

Ao meu grande amigo Leonardo, que desde Milão continua sendo meu conselheiro e apoio permanente.

Ao Engenheiro Químico Carlos Bonnet, meu chefe no PESMA (Uruguai), por me apresentar o mundo fascinante da mineração nas nossas viagens pelo interior do país para o assessoramento na utilização de explosivos.

Aos meus Professores de Projeto final no Uruguai, Patrícia Lema e Jorge Castro, pelo entendimento e apoio para a minha vinda à UFRGS.

Ao CNPq e a CAPES por oferecer a oportunidade a estudantes estrangeiros de realizarem os seus estudos de pós-graduação em universidades brasileiras por meio do programa de apoio financeiro PEC-PG.

A Deus pai pela vida cada dia. Também pela vocação do Padre Lívio Masuero, meu querido catequista e guia na Catedral Metropolitana de Porto Alegre.

SUMÁRIO

SUMÁRIO	viii
LISTA DE FIGURAS	xii
LISTA DE TABELAS	xxii
LISTA DE ABREVIATURAS	xxiii
RESUMO	xxiv
ABSTRACT	xxv

CAPÍTULO 1

Introdução.....	1
1.1 Trabalhos recentes	3
1.2 Objetivos.....	6
1.2.1 Objetivo Geral.....	6
1.2.2 Objetivos específicos.....	7
1.3 Metodologia	7
1.4 Organização dessa Dissertação	8
1.5 Considerações de Software	9

CAPÍTULO 2

Apresentação da área de estudo, análise exploratória dos dados e Krigagem	10
2.1 A área de Estudo	10
2.2 Geologia regional.....	11
2.3 Geologia local	12
2.4 Região Hidrográfica.....	14
2.5 Hidrogeologia local	16
2.6 Interações entre água subterrânea e superficial	17
2.7 Monitoramento das águas subterrâneas na Mina do Trevo	20
2.7.1 Construção de piezômetros e leituras do nível de água	22

2.8	Análise exploratória dos dados	22
2.9	Análise e modelagem da continuidade espacial	29
2.9.1	Conceitos preliminares	29
2.9.2	Caso de estudo	38
2.10	Validação e Krigagem.....	42
2.10.1	Conceitos preliminares	42
2.10.2	Caso de estudo	47

CAPÍTULO 3

Informação Secundária, Modelos de Correogionalização

e Cokrigagem.....	53	
3.1	Incorporação de informação secundária	53
3.2	Medidas de variabilidade conjunta.....	54
3.2.1	Coeficiente de correlação	54
3.2.2	Covariância cruzada.....	56
3.2.3	Variograma cruzado.....	57
3.2.4	Função de codispersão	60
3.3	Cokrigagem	60
3.4	Modelo linear de correogionalização MLC	68
3.5	Modelo de correlação intrínseca	71
3.6	Consistência das estimativas de cokrigagem.....	72
3.7	Autokrigabilidade.....	72
3.8	Cokrigagem colocada e Modelos de Correogionalização	73
3.8.1	Cokrigagem colocada estrita	75
3.8.1.1	Modelo de Markov 1 MM1	78
3.8.1.2	Modelo de Markov 2 MM2	79
3.8.2	Cokrigagem multicolocada e Modelo do Resíduo.....	83

CAPÍTULO 4

Modelagem da Correionalização e Cokrigagem Colocada	92
4.1 Banco de dados da topografia.....	92
4.2 Incorporação de informação secundária por cokrigagem.....	96
4.3 Regularização dos dados da topografia	97
4.4 Cokrigagem colocada estrita	102
4.4.1 Cokrigagem colocada estrita utilizando o MLC.....	103
4.4.1.1 Cokrigagem colocada utilizando MLC para os dados do 22 de Janeiro.....	103
4.4.1.2 Cokrigagem colocada utilizando MLC para os dados do 26 de Dezembro..	106
4.4.2 Cokrigagem colocada estrita utilizando o MM1	109
4.4.2.1 Cokrigagem colocada utilizando MM1 para os dados do 22 de Janeiro.....	110
4.4.2.2 Cokrigagem colocada utilizando MM1 para os dados do 26 de Dezembro.....	113
4.4.3 Cokrigagem colocada estrita utilizando o MM2	117
4.4.3.1 Cokrigagem colocada utilizando MM2 para os dados do 22 de Janeiro.....	118
4.4.3.2 Cokrigagem colocada utilizando o MM2 para os dados do 26 de Dezembro..	126
4.5 Cokrigagem Multicolocada.....	131
4.5.1 Cokrigagem multicolocada para os dados do 22 de Janeiro	132
4.5.2 Cokrigagem multicolocada para os dados do 26 de Dezembro... ..	136
4.6 Krigagem do resíduo	140
4.6.1 Krigagem do resíduo para os dados do 22 de Janeiro.....	141
4.6.2 Krigagem do resíduo para o os dados do 26 de Dezembro	146

CAPÍTULO 5

Análise e discussão dos resultados	153
5.1 Análise dos resultados da krigagem ordinária	153
5.2 Análise dos resultados da cokrigagem ordinária e comparação com a krigagem ordinária	160
5.2.1 Histogramas das estimativas e dos dados originais.....	161
5.2.2 Mapas das estimativas pontuais.....	165

5.2.3 Variância de Cokrigagem vs. Variância de Krigagem	167
5.2.4 Índice de qualidade matemática	169
5.2.5 Mapa das diferenças entre a topografia e o nível de água	171
5.2.6 Coeficientes de correlação regionalizados.....	187
5.2.7 Resumo da avaliação das diferentes metodologias aplicadas.....	188
5.3 Análise da influência da pluviometria e o do avanço da lavra.....	190

CAPÍTULO 6

Conclusões e Recomendações..... 194

6.1 Conclusões	194
6.2 Recomendações	196

Referências Bibliográficas..... 198

Apêndice A

Tradução das legendas nas figuras de saída dos programas utilizados	203
---	-----

Apêndice B

Estimativas de Krigagem Ordinária	208
---	-----

Apêndice C

Código do programa NEWCOKB3D	224
------------------------------------	-----

Apêndice D

Elementos utilizados na determinação do índice de qualidade matemática ...	254
--	-----

Apêndice E

Cokrigagem colocada estrita utilizando o MLC para o ano 2002	266
--	-----

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Mapa de localização da Mina do Trevo (mapas do Brasil e Santa Catarina extraídos de http://www.guianet.com.br/guiacidades/).....	11
Figura 2.2 – Mapa geológico do sul do Brasil com a localização da Bacia Carbonífera Sul-catarinense.	12
Figura 2.3 - Perfil Estratigráfico ao Longo do Eixo Principal da Mina do Trevo (LEÃO, 2002).	13
Figura 2.4 – Mapa Hidrográfico do Brasil, com a localização da Região Sudeste (extraído de http://www.guianet.com.br/guiacidades/).....	14
Figura 2.5 – A Região Hidrográfica Costeira do Sul e suas unidades hidrográficas (ANA, Abril 2003).	15
Figura 2.6 – Ciclo hidrológico, com representação dos fenômenos lentos (laranja) e rápidos (azul) (TEIXERA et al., 2001).	18
Figura 2.7 – Sistemas de fluxo próximo a dois lagos permanentes (A e B), onde se observam sistemas de fluxo locais e intermediários superpostos.	19
Figura 2.8 – Diagrama mostrando que zonas de maior elevação topográfica estão mais afastadas do nível de água, contrariamente ao caso de zonas de menor elevação topográfica (TEIXERA et al., 2001).....	20
Figura 2.9 – Esquema da sonda elétrica (eletrodo de água) para determinação do nível de água.	22
Figura 2.10 - Mapa da área de estudo, apresentando a localização dos piezômetros (vermelho) e o limite considerado (linha laranja).	25
Figura 2.11 - Mapa de localização das amostras coletadas em cada data de 2002 com respectiva leitura de nível de água.....	26
Figura 2.12 – Histogramas dos dados de nível de água (m) nas datas dos meses de Janeiro a Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).....	27
Figura 2.13 – Histograma do nível de água(m) desagrupados utilizando o método das células móveis (detalhe no Apêndice A).	28
Figura 2.14 – Esquema do variograma e seus parâmetros.	32

Figura 2.15 – Variogramas de superfície para os dados do nível de água para as datas consideradas desde Janeiro a Dezembro de 2002.....	37
Figura 2.16 – Variogramas experimentais e modelados nas datas dos meses de Janeiro a Abril de 2002 (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) (detalhe no Apêndice A).....	39
Figura 2.17 – Variogramas experimentais e modelados nas datas dos meses de Maio a Agosto de 2002 (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) (detalhe no Apêndice A).....	40
Figura 2.18 – Variogramas experimentais e modelados nas datas dos meses de Setembro a Dezembro de 2002 (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) (detalhe no Apêndice A).....	41
Figura 2.19 – Histograma do erro das validações cruzadas nas datas dos meses de Janeiro a Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).....	48
Figura 2.20 – Gráfico de dispersão para as estimativas vs. o valor verdadeiro, nas datas dos meses de Janeiro a Junho de 2002 (detalhe no Apêndice A).....	49
Figura 2.21 – Gráfico de dispersão para as estimativas vs. o valor verdadeiro, nas datas dos meses de Julho a Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A)....	50
Figura 2.22 – Mapas de localização do erro na validação cruzada nas datas dos meses de Janeiro a Dezembro de 2002.	51
Figura 3.1 – Gráfico de dispersão entre duas variáveis Z_1 e Z_2	54
Figura 3.2 – Esquema de cokrigagem colocada estrita, na qual os dados secundários são coincidentes com os nós da malha.	74
Figura 3.3 – Esquema de cokrigagem multicolocada, na qual os dados secundários são coincidentes com os nós da malha e com os dados primários.....	74
Figura 4.1 – Histograma (a) de freqüências e (b) acumulado dos dados da topografia (detalhe no Apêndice A).....	93
Figura 4.2 – Mapa de localização dos dados da topografia.	94
Figura 4.3 – Gráficos de dispersão dos valores de nível de água (m) e cota topográfica (m) nos piezômetros para cada data (detalhe no Apêndice A).....	95

Figura 4.4 – Quadro de opções de cokrigagem e modelos de corregeionalização disponíveis com comentários sobre possibilidades de implementação. (MLC: modelo linear de corregeionalização, MM1: modelo de Markov 1, MM2: modelo de Markov 2).	96
Figura 4.5 – Histograma (a) de freqüências e (b) acumulado dos dados regularizados da topografia em malha de 50 x 50 metros (detalhe no Apêndice A).	98
Figura 4.6 – Mapa de pontos dos dados da topografia regularizados em malha de 50 x 50 metros. (a) escala 80 a 270 metros, (b) escala 80 a 220 metros.	99
Figura 4.7 – Mapa de contorno dos dados da topografia regularizados em malha de 50 x 50 metros.	100
Figura 4.8 – Variograma de superfície $\gamma(h)$ dos dados de topografia regularizados.	100
Figura 4.9 – Variograma onidirecional da topografia regularizada.	101
Figura 4.10 – Variogramas direcionais e modelo da topografia regularizada (direção D1=Azimute 90°, D2=Azimute 135°, D3=Azimute 0°, D4= Azimute 45°) (detalhe no Apêndice A).	101
Figura 4.11 – Modelo linear de corregeionalização ajustado para o 22 de Janeiro de 2002 (detalhe no Apêndice A).	104
Figura 4.12 – Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo Linear de Corregeionalização (MLC) para os dados de 22 de Janeiro de 2002.	105
Figura 4.13 – Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo Linear de Corregeionalização (MLC) para os dados de 22 de Janeiro de 2002.	106
Figura 4.14 - Modelo linear de corregeionalização ajustado para os dados do 26 de Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).	107
Figura 4.15 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo Linear de Corregeionalização (MLC) para os dados de 26 de Dezembro de 2002.	108

- Figura 4.16 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo Linear de Corregionalização (MLC) para os dados de 26 de Dezembro de 2002. 109
- Figura 4.17 - Elementos necessários para a modelagem do MM1 para o 22 de Janeiro de 2002: (a) variograma experimental e modelo da variável primária (direção D1 =Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) e (b) coeficiente de correlação proveniente do gráfico de dispersão dos dados colocados (detalhe no Apêndice A)..... 110
- Figura 4.18 - Variogramas experimentais e modelados cruzado e direto ajustados utilizando o MM1 para os dados do 22 de Janeiro de 2002 (detalhe no Apêndice A)..... 111
- Figura 4.19 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 1 (MM1) para os dados de 22 de Janeiro de 2002. 112
- Figura 4.20 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 1 (MM1) para os dados 22 de Janeiro de 2002. 112
- Figura 4.21 - Elementos necessários para a modelagem do MM1 para o 26 de Dezembro de 2002: (a) variograma experimental e modelado da variável primária (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) e (b) coeficiente de correlação proveniente do gráfico de dispersão dos dados colocados (detalhe no Apêndice A). 114
- Figura 4.22 - Variogramas experimental e modelado cruzado e direto ajustados utilizando o MM1 para os dados de 26 de Dezembro de 2002. (detalhe no Apêndice A)..... 115
- Figura 4.23 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 1 (MM1) para os dados de 26 de Dezembro de 2002. 116
- Figura 4.24 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 1 (MM1) para os dados de 26 de Dezembro de 2002. 117

- Figura 4.25 - Elementos necessários para a modelagem do MM2 para os dados do 22 de Janeiro de 2002: (a) variograma experimental e modelado da variável secundária (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4=Azimute 135°) e (b) coeficiente de correlação proveniente do gráfico de dispersão dos dados colocados (detalhe no Apêndice A). 118
- Figura 4.26 - Variograma do resíduo γ_R para o MM2 com os dados do 22 de Janeiro de 2002: (a) direção azimutal 90°, (b) direção azimutal 0°. 122
- Figura 4.27 - Variogramas cruzado e direto da topografia ajustados utilizando o MM2 para o 22 de Janeiro de 2002 (detalhe no Apêndice A). 123
- Figura 4.28 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 2 (MM2) para os dados de 22 de Janeiro de 2002. 124
- Figura 4.29 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 2 (MM2) para os dados de 22 de Janeiro de 2002. 125
- Figura 4.30 - Elementos necessários para a modelagem do MM2 para o 26 de Dezembro de 2002: (a) variograma da variável secundária (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4=Azimute 135°) e (b) coeficiente de correlação proveniente do gráfico de dispersão dos dados colocados (detalhe no Apêndice A). 126
- Figura 4.31 - Variograma do resíduo γ_R para o MM2 nos dados de 26 de Dezembro de 2002: (a) direção azimutal 90°, (b) direção azimutal 0°. 128
- Figura 4.32 - Variogramas cruzado e direto da topografia ajustados utilizando o MM2 para os dados de 26 de Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A). 129
- Figura 4.33 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 2 (MM2) para os dados do 26 de Dezembro de 2002. 130
- Figura 4.34 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 2 (MM2) para os dados do 26 de Dezembro de 2002. 131
- Figura 4.35 - Modelo do resíduo ajustado para os dados de 22 de Janeiro de 2002 para cokrigagem multicolocada (detalhe no Apêndice A). 133

Figura 4.36 – Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Multicolocada Ordinária (CKMCO) utilizando o modelo do resíduo para os dados de 22 de Janeiro de 2002..	134
Figura 4.37 – Mapa do desvio padrão de Cokrigagem Multicolocada Ordinária para os dados do 22 de Janeiro de 2002 .	135
Figura 4.38 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Multicolocada Ordinária (CKMCO) utilizando o Modelo do Resíduo para os dados do 22 de Janeiro de 2002.	136
Figura 4.39 - Modelo do resíduo ajustado para o 26 de Dezembro de 2002 para cokrigagem multicolocada (detalhe no Apêndice A).	137
Figura 4.40 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Multicolocada Ordinária (CKMCO) utilizando o Modelo do Resíduo para os dados de 26 de Dezembro de 2002..	138
Figura 4.41 - Mapa do desvio padrão de Cokrigagem Multicolocada Ordinária para os dados do 26 de Dezembro de 2002.	139
Figura 4.42 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Multicolocada Ordinária (CKMCO) utilizando o Modelo do Resíduo para os dados de 26 de Dezembro de 2002.	140
Figura 4.43 – Curva de regressão entre os dados da Cota Topográfica e o Nível de água para os dados de 22 de Janeiro de 2002.	141
Figura 4.44 – Mapa de localização dos resíduos calculados para os dados de 22 de Janeiro de 2002.	142
Figura 4.45 – Histograma dos resíduo calculado para os dados de 22 de Janeiro de 2002..	142
Figura 4.46 – Variograma de superfície $\gamma(h)$ para o resíduo do 22 de Janeiro de 2002.	143
Figura 4.47 – Variograma omnidirecional para o resíduo do 22 de Janeiro de 2002.	143
Figura 4.48 – Variogramas direcionais para o 22 de Janeiro de 2002. (detalhe no Apêndice A).	144

Figura 4.49 – Mapa das estimativas pontuais para o resíduo com os dados de 22 de Janeiro de 2002.	144
Figura 4.50 – Mapa de desvio padrão da estimativa com os dados de 22 de Janeiro de 2002....	145
Figura 4.51 – Estimativas de nível de água calculadas a partir da krigagem do resíduo para os dados de 22 de Janeiro de 2002.	145
Figura 4.52 – Mapas de contorno das estimativas por krigagem do resíduo para os dados de 22 de Janeiro de 2002.	146
Figura 4.53 - Curva de regressão entre os dados da Cota Topográfica e o Nível de água para os dados de 26 de Dezembro de 2002.	147
Figura 4.54 - Mapa de localização dos resíduos calculados com os dados de 26 de Dezembro de 2002.	147
Figura 4.55 – Histograma dos resíduo calculado para os dados de 26 de Dezembro de 2002....	148
Figura 4.56 - Variograma de superfície $\gamma(h)$ para o resíduo do 26 de Dezembro de 2002..	148
Figura 4.57 - Variograma omnidirecional para o resíduo do 26 de Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).	149
Figura 4.58 - Variogramas direcionais para os resíduos calculados com os dados de 26 de Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).....	149
Figura 4.59 – Mapa das estimativas pontuais para o resíduo do 26 de Dezembro de 2002..	150
Figura 4.60 - Mapa do desvio padrão das estimativas de 26 de Dezembro de 2002.	150
Figura 4.61 – Estimativas de nível de água calculadas a partir da krigagem do resíduo para o 26 de Dezembro de 2002.....	151
Figura 4.62 - Mapas de contorno das estimativas por krigagem do resíduo para o 26 de Dezembro de 2002.....	151
Figura 5.1 – Histogramas das estimativas por krigagem ordinária do nível de água a partir dos dados provenientes das datas entre Janeiro e Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).	154

- Figura 5.2 - Mapa de localização dos dados originais re-locados na malha de estimativa utilizando a técnica do vizinho mais próximo (DAVIS, 1986, p.308). 156
- Figura 5.3 - Histograma dos dados originais re-locados na malha de estimativa (detalhe no Apêndice A). 157
- Figura 5.4 - Gráficos de dispersão das estimativas por krigagem ordinária de nível de água vs. dados originais re-locados na malha de estimativa para as datas consideradas do ano 2002 (detalhe no Apêndice A). 159
- Figura 5.5 - Histograma das estimativas realizadas para os dados de nível de água do 22 de Janeiro de 2002 por cokrigagem ordinária (a) Colocada estrita utilizando o MLC, (b) Colocada estrita utilizando o MM1, (c) Colocada estrita utilizando o MM2, (d) Multicolocada utilizando o MR e por (e) Krigagem do Resíduo (detalhe no Apêndice A). 162
- Figura 5.6 - Histograma das estimativas realizadas para os dados de nível de água do 26 de Dezembro de 2002 por cokrigagem ordinária (a) Colocada estrita utilizando o MLC, (b) Colocada estrita utilizando o MM1, (c) Colocada estrita utilizando o MM2, (d) Multicolocada utilizando o MR e por (e) Krigagem do Resíduo (detalhe no Apêndice A). 163
- Figura 5.7 - Mapas das estimativas pontuais realizadas sobre os dados do 22 de Janeiro de 2002 utilizando: (a) krigagem ordinária, cokrigagem (b) colocada estrita utilizando o MLC, (c) colocada estrita utilizando o MM1, (d) colocada estrita utilizando o MM2, (e) multicolocada utilizando o Modelo do Resíduo e (f) utilizando a krigagem do resíduo. 166
- Figura 5.8 - Mapas das estimativas pontuais realizadas sobre os dados do 26 de Dezembro de 2002 utilizando: (a) krigagem ordinária, cokrigagem (b) colocada estrita utilizando o MLC, (c) colocada estrita utilizando o MM1, (d) colocada estrita utilizando o MM2, (e) multicolocada utilizando o Modelo do Resíduo e (f) utilizando a krigagem do resíduo. 167
- Figura 5.9 - Mapas do desvio padrão de krigagem ordinária (KO) e de cokrigagem multicolocada ordinária utilizando o Modelo do Resíduo (CKMCO), para (a) 22 de Janeiro de 2002 e (b) 26 de Dezembro de 2002..... 168

Figura 5.10 – Mapa de localização das leituras de nível de água (m)na área de interesse para o 22 de Janeiro de 2002.	173
Figura 5.11 - Mapa de localização das leituras de nível de água (m)na área de interesse para o 26 de Dezembro de 2002..	173
Figura 5.12 – Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando krigagem ordinária (KO) dos dados do 22 de Janeiro de 2002... ..	175
Figura 5.13 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo Linear de Corregeionalização (MLC) dos dados do 22 de Janeiro de 2002.	176
Figura 5.14 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo de Markov 1 (MM1) dos dados do 22 de Janeiro de 2002.	177
Figura 5.15 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo de Markov 2 (MM2) dos dados do 22 de Janeiro de 2002.	178
Figura 5.16 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem multicolocada e o Modelo do Resíduo (MR) dos dados do 22 de Janeiro de 2002.	179
Figura 5.17 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando krigagem do resíduo (KR) dos dados do 22 de Janeiro de 2002..	180
Figura 5.18 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando krigagem ordinária (KO) dos dados do 26 de Dezembro de 2002..	181
Figura 5.19 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo Linear de Corregeionalização (MLC) dos dados do 26 de Dezembro de 2002.....	182
Figura 5.20 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo de Markov 1 (MM1) dos dados do 26 de Dezembro de 2002.	183

- Figura 5.21 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo de Markov 2 (MM2) dos dados do 26 de Dezembro de 2002. 184
- Figura 5.22 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem multicolocada e o Modelo do Resíduo (MR) dos dados do 26 de Dezembro de 2002. 185
- Figura 5.23 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando krigagem do resíduo (KR) dos dados do 26 de Dezembro de 2002. 186
- Figura 5.24 - Mapa da área de interesse mostrando a mina subterrânea de carvão (cinza) e as áreas de avanço da lavra nos diferentes bimestres do ano 2002. 190
- Figura 5.25 - Mapas de contorno do nível de água, com as áreas de avanço de lavra do ano 2002 marcadas em quadros brancos. (a) e (c) Mapas de contorno das estimativas do 22 de Janeiro e 26 de Dezembro de 2002 respectivamente, a partir das estimativas de krigagem ordinária. (b) e (d) Mapas de contorno das estimativas do 22 de Janeiro e 26 de Dezembro de 2002 respectivamente, a partir das estimativas de cokrigagem colocada estrita utilizando o modelo MLC..... 191
- Figura 5.26 - Gráfico de comparação da pluviometria anual durante o ano 2002 com a média das estimativas do nível de água realizadas por krigagem ordinária (KO) e cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o modelo MLC (CKCO). 192

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Datas de monitoramento e número de piezômetros monitorados em 2002	23
Tabela 2.2 - Datas e número de piezômetros monitorados em 2002 que compõem o Banco de Dados analisado	24
Tabela 4.1 – Tabela para construção do variograma do resíduo γ_R	121
Tabela 4.2 - Tabela para construção do variograma do resíduo γ_R	127
Tabela 5.1 – Parâmetros estatísticos globais dos dados originais aplicando técnicas de desagrupamento e das estimativas realizadas por krigagem ordinária	155
Tabela 5.2 – Quadro comparativo dos parâmetros estatísticos para os dados desagrupados e para as diferentes estimativas no 22 de Janeiro e no 26 de Dezembro de 2002	164
Tabela 5.3 – Tabela dos parâmetros de qualidade das estimativas e o índice de qualidade para os diferentes métodos. KO: krigagem ordinária, MLC: cokrigagem colocada estrita utilizando o Modelo Linear de Correogionalização, MM1: Cokrigagem colocada estrita utilizando o Modelo de Markov 1, MM2: Cokrigagem colocada estrita utilizando o Modelo de Markov 2, MR: Cokrigagem multicolocada utilizando o Modelo do Resíduo, KR: Krigagem do resíduo	170
Tabela 5.4 - Coeficientes de correlação regionalizados r_{12}^k para a estrutura k nos modelos de correogionalização linear (MLC) de Markov 2 (MM2) e do resíduo (MR)	187

LISTA DE ABREVIATURAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

ANA – Agência Nacional de Águas

CK - Cokrigagem

CKO – Cokrigagem Ordinária

CKS – Cokrigagem Simples

CCKO – Cokrigagem Colocada Ordinária Estrita

CKT – Cokrigagem com modelo de Tendência

CKMCO – Cokrigagem Multicolocada Ordinária

DNPM - Departamento Nacional de Produção Mineral

FATMA - Fundação do Meio Ambiente de Santa Catarina

KO – Krigagem Ordinária

KR – Krigagem do Resíduo

MLC – Modelo Linear de Correogionalização

MM1 – Modelo de Markov 1

MM2 – Modelo de Markov 2

MR – Modelo do Resíduo

ONU – Organização das Nações Unidas

SIH – Superintendência de Informações Hidrológicas

UNESCO – Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura

RESUMO

Freqüentemente nas investigações geológicas são amostradas múltiplas variáveis além daquela que quantifica o principal fenômeno geológico estudado. Em alguns casos, essas informações complementares podem apresentar correlação com a principal variável visada.

As informações secundárias podem melhorar a consistência das estimativas da variável primária. A incorporação da informação complementar utilizando cokrigagem apresenta várias vantagens. Porém, requer a modelagem conjunta da variabilidade espacial dessas variáveis correlacionadas, o que impõe algumas dificuldades no seu uso. Essas dificuldades motivaram o desenvolvimento de algoritmos de cokrigagem simplificados como a cokrigagem colocada. Também, vários modelos foram introduzidos para simplificar a modelagem da correionalização. Cada um deles apresenta vantagens e desvantagens.

Essa dissertação analisa os benefícios do uso de informações secundárias na estimativa de uma variável de interesse. Diferentes técnicas de co-estimativa e modelagem da correionalização são comparadas e avaliadas em termos das diferenças nas estimativas obtidas. Complementarmente, são fornecidas diretrizes para ajudar na escolha de um modelo de correionalização em particular para aplicações futuras.

As metodologias são aplicadas para estimar o nível de água subterrânea utilizando a topografia como informação secundária. O entendimento do nível de água subterrânea e do seu fluxo depende, entre outros fatores, dos dados do nível de água lido em poços ou piezômetros. Os dados da topografia são facilmente obtidos e a baixo custo, podendo ser utilizados como informação complementar para estimar o nível de água, dada a elevada correlação entre ambas variáveis.

Posteriormente à aplicação das metodologias escolheu-se a mais adequada ao caso de estudo e analisou-se a influência de fatores externos como a variação da pluviometria e o avanço da lavra na mina subjacente na variação do nível de água ao longo do ano 2002.

ABSTRACT

Frequently geological survey sample for multiple variables, in addition to the one used to quantify the main geological phenomenon studied. Sometimes, that complementary information can be correlated with the principal variable of interest.

Secondary information can improve the consistency of the primary variable estimates. Incorporating the complementary information through cokriging has various advantages. However, it requires modeling the joint spatial variability of these correlated variables, which impose some sort of difficulties in its use. These difficulties motivated the development of simplified cokriging algorithms such as collocated cokriging. Also, various models have been introduced to simplify the coregionalization modeling. Each of these has its advantages and disadvantages.

This dissertation analyses the benefits of using secondary information in estimating a primary interest variable. Different techniques for co-estimation and coregionalization analysis are compared and evaluated in terms of the difference of their estimates. Complementary, guidelines are provided to help choosing one particular model in future applications.

The different methodologies are applied in a study case for estimating water table level using topography as secondary information. Understanding groundwater level and flow depends, among other factors, on piz . This information is commonly obtained by interpolating water table information read at wells or piezometers. Topographic data is easily obtained at low cost as complementary information to improve water table mapping (primary data) due to their strong correlation.

This dissertation analyses the benefits of using topography as secondary information in estimating the primary one, water table level. The available co-estimation techniques are compared and evaluated in terms of differences on their estimates. The influence of external factors, such as pluviometry and mine advance on water table fluctuation along 2002, is also evaluated.

CAPÍTULO 1

Introdução

O ano 2003 foi declarado o Ano Internacional da Água Doce pela UNESCO (INTERNATIONAL YEAR OF FRESH WATER 2003, Outubro 2003). Mundialmente, existe uma forte preocupação em educar, remediar, gerar um marco legal adequado e utilizar racionalmente este recurso vital, necessário para o organismo, saúde, alimentos, transporte, agricultura e indústria.

Hoje, as regiões desenvolvidas, possuem a maior porcentagem da população urbana. As projeções para o ano 2015 mostram que a metade da população das regiões menos desenvolvidas estará concentrada em regiões urbanas. Acompanhando o crescimento urbano, está o crescimento da demanda de água e serviços sanitários. Para atender essas demandas, as autoridades têm muitas vezes, permitido uma utilização não sustentável dos recursos hídricos.

Em países em desenvolvimento, onde o tratamento de águas residuais e as instalações sanitárias são inexistentes ou inadequadas, a poluição de águas superficiais e subterrâneas está entre um dos mais importantes problemas a serem reparados e evitados. Uma alerta feita pela ONU - Organização das Nações Unidas (ANA, 2003a), indica que em 2025, cerca de 2,7 bilhões de pessoas enfrentarão a falta de água se o seu uso não for racionalizado. Nesse contexto, é importante destacar que do total da água doce mundial, cerca de 97% encontra-se no subsolo na forma de água subterrânea.

No Brasil, segundo a Superintendência de Informações Hidrológicas – SIH da ANA (Agência Nacional de Águas), mais da metade da água para abastecimento público provém das reservas subterrâneas. Acompanhando a

conscientização mundial (CAETANO, 2002), no ano 1997, com a Lei Federal N° 9.433, o Brasil incorporou uma significativa contribuição relativa aos aspectos de poluição e super-exploração de aquíferos. Posteriormente, com a criação da ANA em 2000, começou a implementação de uma Política Nacional de Recursos Hídricos.

Para conseguir uma melhor gestão dos recursos hídricos e satisfazer as normativas é essencial o conhecimento e entendimento dos sistemas hidrogeológicos. Na maioria dos casos, as informações disponíveis sobre as águas subterrâneas são ainda insuficientes e muito dispersas. Vários projetos (ANA, 2003b), estão sendo implementados no Brasil para a proteção ambiental e desenvolvimento sustentável dos aquíferos, onde o conhecimento dos sistemas envolvidos e sua interação é fundamental.

Os mapas de nível de água subterrânea são elementos básicos nas investigações hidrogeológicas (DESBARATS, 2002). São utilizados para a identificar a direção de fluxo da água subterrânea no aquífero livre, zonas de recarga e descarga, assim como para interpretar dados geoquímicos e de dispersão de contaminantes. Desse modo, pode-se avaliar as interações entre água superficial e subterrânea e possíveis efeitos da atividade humana.

A informação dos níveis de água subterrânea é proveniente de piezômetros que podem estar mais ou menos espaçados, dependendo de fatores como custo de perfuração ou dificuldades de construção dos mesmos em terrenos irregulares. A variável nível de água, constitui-se então, numa variável regionalizada a partir da qual podem ser gerados, modelos de blocos ou malhas de pontos para a construção dos mapas de nível.

A geoestatística, introduzida em 1962 por MATHERON para o estudo de variáveis regionalizadas, oferece formas de descrever a continuidade espacial, característica saliente de muitos fenômenos naturais. Oferece também (ISAACS e SRIVASTAVA, 1989), adaptações das clássicas técnicas de regressão, que levam em consideração o conhecimento dessa continuidade espacial, para estimar a variável de interesse em locais onde não foi amostrada.

Além de fornecer uma estimativa não tendenciosa, minimizando a variância do erro, também permite medir a incerteza da estimativa mediante simulação estocástica (SAMPER, 1996), o que é de fundamental importância no caso da tomada de decisões ou avaliações de risco. Inicialmente utilizada na área de Engenharia de Minas e Geologia, a geoestatística é utilizada hoje na maioria

das Ciências da Terra: Geologia, Geotécnica, Mineração, Agronomia, Medicina, Meteorologia, Hidrogeologia e Engenharia Ambiental, entre outras.

Muitas vezes, medições de um atributo de interesse são complementadas por medições de um ou vários atributos relacionados (GOOVAERTS, 1997), geralmente conhecidos em um suporte maior. A estimativa melhora quando essa informação secundária é levada em consideração. Na hidrogeologia, a utilização de um atributo altamente correlacionado com o nível de água e densamente conhecido, como é o caso da cota topográfica, tem sido utilizado em vários trabalhos utilizando diferentes técnicas geoestatísticas, chamadas multivariadas, por levarem em consideração mais de uma variável regionalizada.

Hoje, existem varias formas de incorporar informação secundária (GOOVAERTS, 1997), entre as quais está a cokrigagem, extensão natural da krigagem no caso de várias variáveis (WACKERNAGEL, 1994a). A cokrigagem, requer uma análise conjunta da variabilidade espacial. Essa análise da correionalização, necessita ser previamente modelada, para ser introduzida nos sistemas de regressão. Vários modelos tem sido desenvolvidos para levar em consideração a variabilidade espacial conjunta. Alguns são mais rigorosos desde o ponto de vista matemático, e outros são de mais fácil implementação computacional, apesar de serem aproximações.

Este trabalho, utilizando um estudo de caso, utiliza alguns desses diferentes modelos e métodos disponíveis, para estimar o nível do lençol freático sobre uma mina subterrânea de carvão, utilizando a cota topográfica como informação secundária. Depois de escolher o método de melhor desempenho no caso em estudo, analisa-se a dependência da variação do nível de água com alguns fatores externos, como a pluviometria e o avanço da mina.

1.1 Trabalhos recentes

Há muito, o homem tenta caracterizar matematicamente os fenômenos naturais. A análise estatística clássica, ignora a relação espacial dos dados disponíveis. Dessa forma, surgiram os métodos de interpolação para estimar o valor de um atributo em lugares onde ele não é conhecido, a partir de dados amostrais na sua vizinhança.

Os primeiros métodos são chamados de clássicos e calculam o valor desconhecido como uma combinação linear ponderada dos valores disponíveis. Os pesos a serem atribuídos a cada amostra, dependem do método. Por

exemplo, o método poligonal (ISAACS e SRIVASTAVA, 1989 p. 250) atribui pesos proporcionais a uma área de influência de cada dado. Outro caso, é a atribuição de pesos proporcionais ao inverso da distância ao quadrado (ISAACS e SRIVASTAVA, 1989 p. 257). Esses métodos não fornecem nenhum tipo de medida do erro associado. Também, não se baseiam num estudo de variabilidade espacial do atributo sob estudo.

MATHERON (1965, 1970) desenvolveu a teoria das variáveis regionalizadas e a sua estimativa. A krigagem surgiu (MATHERON, 1965), apoiada na análise das variáveis regionalizadas fornecendo um estimador não tendencioso que minimiza a variância do erro. Depois do seu surgimento, vários trabalhos foram escritos ao respeito entre os quais se destacam os de DAVID (1977) e JOURNEL e HUIJBREGTS (1978).

No que se refere a incorporação de informação secundária, a cokrigagem apresentada por MARECHAL (1970), surge como a extensão natural da krigagem no caso de várias variáveis. Apesar das vantagens que a cokrigagem apresenta, inicialmente a sua utilização ficou dificultada pela implementação computacional, o que levou a procura de modificações e simplificações (MATHERON, 1979). Depois da sua introdução, muitos trabalhos discutiram as vantagens que essa apresenta sobre a krigagem, assim como também os casos nos quais krigagem e cokrigagem fornecem iguais resultados (WACKERNAGEL, 1994b).

Para modelar a correogionalização e introduzir a variabilidade conjunta nos sistemas de cokrigagem, o modelo linear de correogionalização e o modelo de correlação intrínseca como caso particular, foram amplamente analisados e muitos trabalhos feitos ao respeito (MYERS, 1991; GOULARD e VOLTZ, 1992; WACKERNAGEL, 1994a, entre outros). De todas formas, observou-se que a cokrigagem ainda apresentava problemas na sua utilização, fundamentalmente quando as variáveis secundárias encontravam-se muito mais densamente amostradas que a variável de interesse.

Nesse contexto, XU et al. (1992) introduziram o conceito de cokrigagem colocada, onde a informação secundária é utilizada somente nos locais onde a variável de interesse será estimada. Na cokrigagem multicolocada (HAAS, BIVER e MOULIÈRE, 1998, RIVOIRARD, 2001), além de se considerar o dado colocado com o nó onde se estima a variável de interesse, também se consideram os dados colocados com os dados disponíveis da variável primária. Trabalhos como os de GOOVAERTS (1998a e 1999), comparam a cokrigagem colocada com

outros métodos de estimativa como a krigagem simples com médias locais variáveis (GOOVAERTS, 1997 p. 190) e a krigagem com tendência externa (GOOVAERTS, 1997, p. 194). A modelagem da correogionalização é feita mediante o modelo linear de correogionalização.

A dificuldade que ainda permanecia era a referente ao ajuste do modelo linear de correogionalização, pelas restrições que o mesmo impõe (MYERS, 1992). Pouco tempo depois, para a modelagem da correogionalização de uma maneira muito mais simples e posterior utilização em simulação estocástica conjunta de várias variáveis, surge o Modelo de Markov hoje chamado de MM1, introduzido por ALMEIDA (1993).

Posteriormente, foi introduzido o MM2 (JOURNEL, 1999; JOURNEL e SHMARYAN, 1999), outro Modelo de Markov, já que o MM1 não fornecia uma resposta satisfatória em muitos casos. CHILÈS e DELFINER (1999), paralelamente, também introduziram o mesmo modelo chamando-o de Markov reverso.

Tanto o MM1 como o MM2 foram desenvolvidos para serem aplicados nos casos de cokrigagem colocada. O MM2 ainda satisfaz as condições de um modelo linear de correogionalização, sendo assim um caso particular do mesmo, colocando em dúvida que a sua introdução seja realmente uma forma de simplificação.

Partindo da base que na cokrigagem muitas vezes é necessária uma redução da quantidade de informação secundária e que cokrigagem colocada representa uma forma adequada de resolver o assunto, RIVOIRARD (2001) faz uma análise a respeito das situações nas quais a cokrigagem colocada fornece os mesmos resultados que a cokrigagem. Introduce o Modelo do Resíduo previamente desenvolvido para a sua utilização com indicadores (RIVOIRARD 1989). O Modelo do Resíduo pode ser chamado de modelo de Markov, pela filtragem que resulta da sua aplicação.

Todo esse desenvolvimento de modelos e possíveis soluções para a simplificação da cokrigagem, foi acompanhado por um desenvolvimento paralelo de programas computacionais que permitissem a implementação dos mesmos. Muitas vezes, os resultados desses programas não são comparáveis, uma vez que partem de modelos conceituais diferentes.

No que se refere as primeiras aplicações da geoestatística na hidrologia subterrânea, as mesmas datam dos anos '70 com DELHOMME (1978). A maioria

dos modelos matemáticos utilizados em Hidrologia Subterrânea estão baseados na teoria clássica do fluxo em meios porosos. Alguns parâmetros que são introduzidos nos modelos matemáticos da teoria clássica são considerados uniformes, representando assim uma realidade mais suavizada.

Na realidade, os parâmetros hidrogeológicos apresentam uma variabilidade que não pode ser representada por funções matemáticas determinísticas. Por isso, o enfoque geoestatístico tem sido revolucionário na hidrogeologia quantitativa no que se refere à variabilidade espacial dos parâmetros e variáveis hidrogeológicas. A cokrigagem para a obtenção do nível de água utilizando a topografia como informação secundária, já foi realizada em vários trabalhos. SAMPER (1996) cita as primeiras estimativas do nível de água utilizando a topografia como variável secundária como sendo realizadas por FREEZE e CHERRY (1979). Anos mais tarde, um trabalho de elevada relevância na área é apresentado por HOEKSEMA (1989). Nesse trabalho, ainda não tinha sido desenvolvida a cokrigagem colocada (XU, 1992) e apresenta-se a modelagem da correionalização utilizando o modelo linear de correionalização (MLC). Destaca-se a evidente dificuldade matemática e computacional existente na época para o tratamento em conjunto de múltiplas variáveis. No Brasil, XAVIER (1999) aplica a técnica de cokrigagem para determinar o nível de água com a topografia como informação secundária, num estudo de caso relativo a geotécnica para Engenharia Civil.

Um trabalho recente, utiliza um modelo de elevação digital como informação secundária, mas a técnica aplicada é a krigagem com tendência externa (DESBARATS, 2002). Trabalhos que utilizem cokrigagem colocada, com diferentes modelos de correionalização para a determinação do nível de água, utilizando a topografia como informação secundária não foram encontrados na literatura.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo principal dessa dissertação é a aplicação de métodos geoestatísticos para a representação do nível de água acima de uma mina subterrânea de carvão, utilizando a cota topográfica como informação secundária.

1.2.2 Objetivos específicos

Como objetivos específicos tem-se:

- i. avaliar a incorporação da topografia como informação secundária nas estimativas do nível de água;
- ii. analisar a influência da utilização de diferentes modelos de correção regionalização nas estimativas por cokrigagem;
- iii. escolher o modelo mais adequado para o caso de estudo e analisar a influência de fatores externos como a pluviometria e o avanço de lavra na mina de carvão subjacente durante o ano 2002.

1.3 Metodologia

A metodologia utilizada para atingir os objetivos antes apresentados é realizada cumprindo as seguintes etapas:

(i) Preparação do banco de dados do nível de água, escolhendo dados coletados com uma frequência mensal ao longo do ano 2002.

(ii) Análise exploratória e krigagem ordinária dos dados do nível de água escolhidos no ano 2002.

(iii) Revisão das metodologias para incorporação de informação secundária, com ênfase na cokrigagem.

(iv) Revisão dos modelos disponíveis para modelagem da correção regionalização.

(v) Preparação do banco de dados da topografia e análise exploratória dos dados.

(vi) Regularização dos dados da topografia na malha de estimativa para realizar cokrigagem colocada, uma vez que a cokrigagem completa gera problemas de inversão de matrizes.

(vii) Dada a abundância de modelos disponíveis para modelar a correção regionalização e as importantes discrepâncias entre as vantagens e desvantagens dos mesmos, avaliam-se diferentes modelos disponíveis utilizando os dados do 22 de janeiro de 2002 e do 26 de dezembro de 2002.

(viii) Modelagem da correionalização utilizando os diferentes modelos (MLC - Modelo Linear de Correionalização, MM1 - Modelo de Markov 1, MM2 - Modelo de Markov 2 e MR - Modelo do Resíduo), e estimativa utilizando cokrigagem colocada.

(ix) Sob determinadas condições, a krigagem do resíduo (diferença entre os dados originais e os dados determinados por regressão linear entre as variáveis primária e secundária) é equivalente à cokrigagem colocada utilizando o MR. Essa metodologia tem o mesmo fundamento que krigagem do resíduo com médias locais variáveis. Avalia-se também esse método já que é de fácil e rápida implementação.

(x) Avaliação e análise dos resultados obtidos com os diferentes métodos comparando-os entre si e com a krigagem ordinária.

(xi) Cokrigagem colocada utilizando o MLC para os dados coletados ao longo do ano 2002.

(xii) Análise da influência de fatores externos como o avanço da lavra da mina de carvão subjacente e a pluviometria, na variação anual do nível de água.

1.4 Organização dessa Dissertação

Os capítulos dessa dissertação estão organizados da seguinte forma:

- O Capítulo 2, apresenta a área de estudo e a gestão de recursos hídricos sob a qual os dados foram coletados. Também, apresenta um tratamento clássico, realizando uma análise exploratória das informações de nível de água o que inclui estatística básica e análise espacial. São revisados os conceitos da krigagem ordinária e se utiliza a mesma no caso de estudo, gerando-se mapas das estimativas pontuais e de contorno para o nível de água.
- O Capítulo 3, revisa as diferentes formas disponíveis de incorporação de informação secundária e as razões pelas quais a cokrigagem é escolhida frente as outras. Também são apresentados os conceitos de cokrigagem e as suas simplificações, como é o caso da cokrigagem colocada em suas formas estrita e multicolocada. O Modelo Linear de Correionalização, os modelos de Markov e o Modelo do Resíduo são discutidos em profundidade.

- No Capítulo 4, é apresentada a informação secundária, com uma análise estatística básica. As metodologias de estimativa antes mencionadas, são utilizadas no estudo de caso utilizando os dados coletados para as datas consideradas nos meses de janeiro e de dezembro do ano 2002, gerando-se novos mapas das estimativas pontuais e de contorno para o nível de água.
- O Capítulo 5, inclui a análise e discussão dos resultados obtidos.
- O Capítulo 6 apresenta as conclusões e considerações finais, assim como as recomendações para trabalhos futuros.

1.5 Considerações de Software

Os softwares utilizados fornecem gráficos de saída com legendas em inglês. Dada a grande quantidade de dados de relevo topográfico e medidas de nível de água ao longo do ano 2002, assim como a introdução de vários métodos de estimativa, decidiu-se não editar e traduzir as legendas. Uma descrição detalhada dos gráficos é apresentada no Apêndice A.

CAPÍTULO 2

Apresentação da área de estudo, análise exploratória dos dados e Krigagem

Neste capítulo, apresenta-se a área de estudo e descreve-se brevemente a sua geologia. Descreve-se, também, de modo geral, a gestão dos recursos hídricos sob a qual os dados foram coletados. Apresenta-se uma análise exploratória dos dados de nível de água, revisam-se os conceitos da Krigagem Ordinária que são posteriormente utilizados no caso de estudo, gerando-se mapas das estimativas pontuais e de contorno para o nível de água.

O banco de dados, utilizado nessa dissertação está composto por informações disponibilizadas pela Industria Carbonífera Rio Deserto Ltda., correspondendo ao monitoramento do lençol freático realizado durante o ano 2002.

2.1 A área de Estudo

A área de estudo está definida pela localização dos piezômetros de monitoramento do nível de água no local onde opera a Mina do Trevo, pertencente à Industria Carbonífera Rio Deserto Ltda. Essa mina localiza-se no município de Siderópolis, no estado de Santa Catarina. A cidade de Siderópolis dista 11 km da cidade de Criciúma, acessando-se pela SC-445 e seguindo-se por mais 1 km de estrada secundária chega-se às instalações da Mina do Trevo (Figura 2.1).



● Mina do Trevo

Figura 2.1 – Mapa de localização da Mina do Trevo (mapas do Brasil e Santa Catarina extraídos de <http://www.guianet.com.br/guiacidades/>).

2.2 Geologia regional

A área de estudo está inserida na Bacia Carbonífera Sul-catarinense (Figura 2.2). Ela está localizada no sudeste da Bacia do Paraná e no estado de Santa Catarina encontra-se no sudeste, estendendo-se desde o sul de Araranguá até um pouco além de Lauro Müller em direção Norte-Sul num comprimento de 100 km e uma largura de aproximadamente 20 km (CAYE et al., 1975).

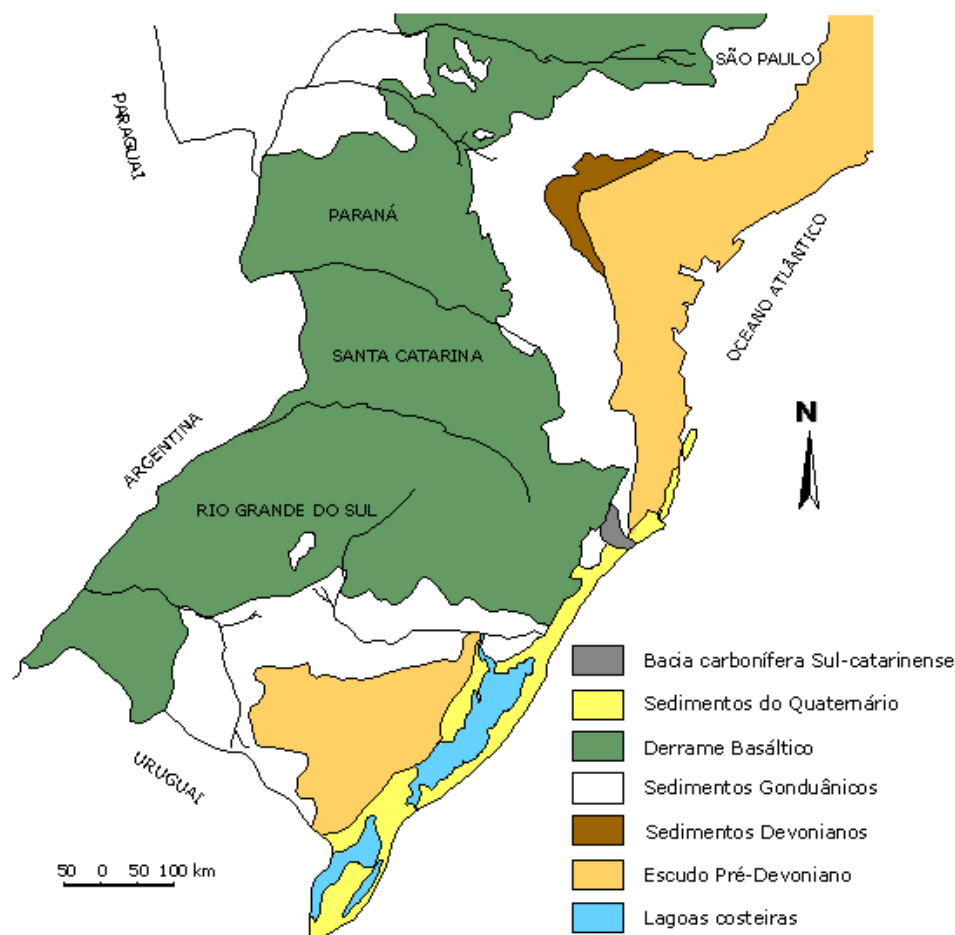


Figura 2.2 – Mapa geológico do sul do Brasil com a localização da Bacia Carbonífera Sul-catarinense.

Na região, desenvolvem-se fundamentalmente atividades mineiras para a exploração de carvão desde 1880. As camadas de carvão mais importantes da Bacia Carbonífera Sul-catarinense, são a camada Barro Branco e Bonito. Elas estão na parte superior da Formação Rio Bonito, no membro Siderópolis.

2.3 Geologia local

O banco de dados utilizado no estudo de caso foi fornecido pela Indústria Carbonífera Rio Deserto Ltda. pertencendo à área da Mina do Trevo. A Figura 2.3 apresenta um esquema do perfil estratigráfico ao longo do eixo principal da mina.

A mais antiga formação que aflora na área é a Rio Bonito com uma espessura média é de 150 metros. Na sua parte superior (Membro Siderópolis), encontram-se arenitos finos, médios e grosseiros intercalados com camadas de siltitos e carvões (CAYE et al., 1975).

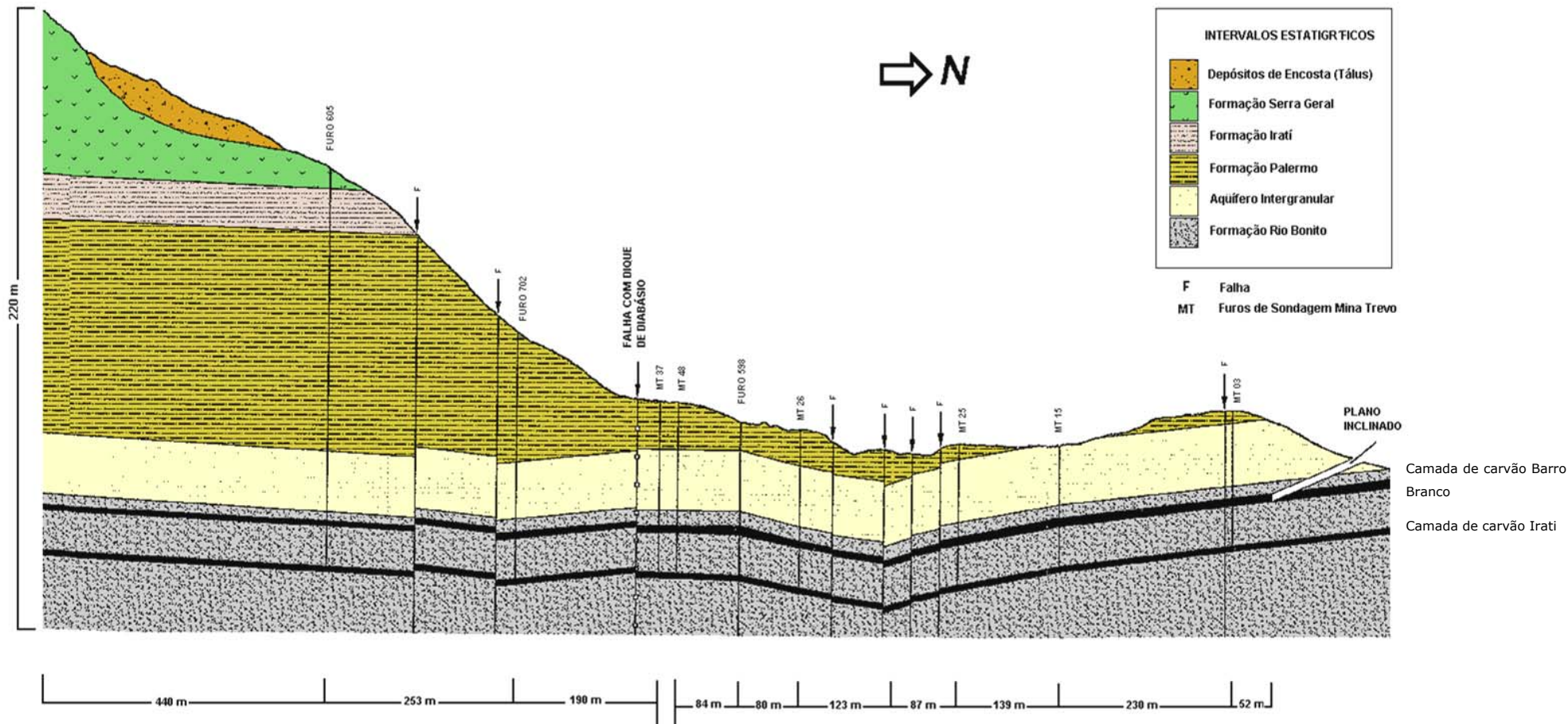


Figura 2.3 - Perfil Estratigráfico ao Longo do Eixo Principal da Mina do Trevo (LEÃO, 2002).

A Formação Palermo aflora por cima da Formação Rio Bonito. Ela tem uma espessura de 90 a 120 m e é formada por siltitos cor cinza a cinza-esverdeados e arenitos intercamadados.

Na seqüência, segue a Formação Iratí constituída por siltitos escuros e folhelhos com porções pirobetuminosas com uma espessura média de 40 metros. Freqüentemente, a formação é interceptada por dois sills de diabásio com 5 m de espesura da Formação Serra Geral (CAYE et al., 1975). A Formação Estrada Nova segue na seqüência e está formada por siltitos cinza escuros com uma espessura de 250 metros. Finalmente, a Formação Serra Geral está formada por rochas ígneas básicas com diques de diabásio sub-verticais de espessura menor a 5 m que preenchem juntas e planos de falhas (CAYE et al., 1975).

Observam-se na área, várias falhas menores que podem ser atribuídas a dobras causadas por eventos tectônicos ou variações na paleotopografia.

2.4 Região Hidrográfica

A área de estudo encontra-se situada dentro da Bacia Hidrográfica do Sudeste (Figura 2.4), também conhecida como Região Hidrográfica Costeira do Sul (ANA, Abril 2003).

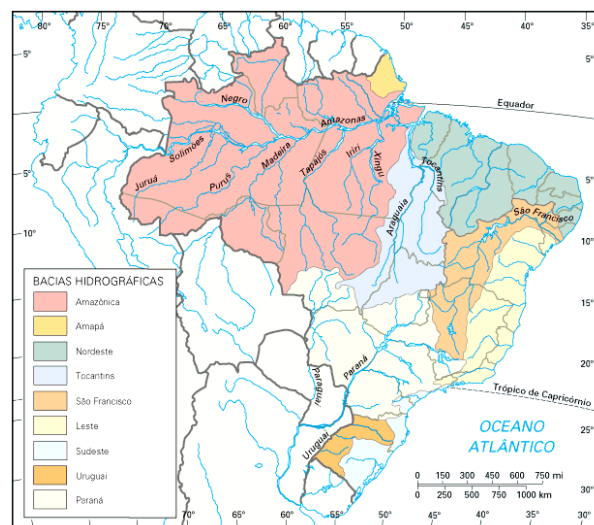


Figura 2.4 – Mapa Hidrográfico do Brasil, com a localização da Região Sudeste (extraído de <http://www.guianet.com.br/guaciudades/>).

Esta região se estende desde próximo à divisa dos estados de São Paulo e Paraná até o arroio Chuí no sul (Figura 2.5), estando dividida em cinco unidades hidrográficas denominadas Litoral do Paraná, Guaíba, Litoral do Rio Grande do Sul e Litoral de Santa Catarina. Nesta última unidade, encontra-se a área de estudo do presente trabalho.

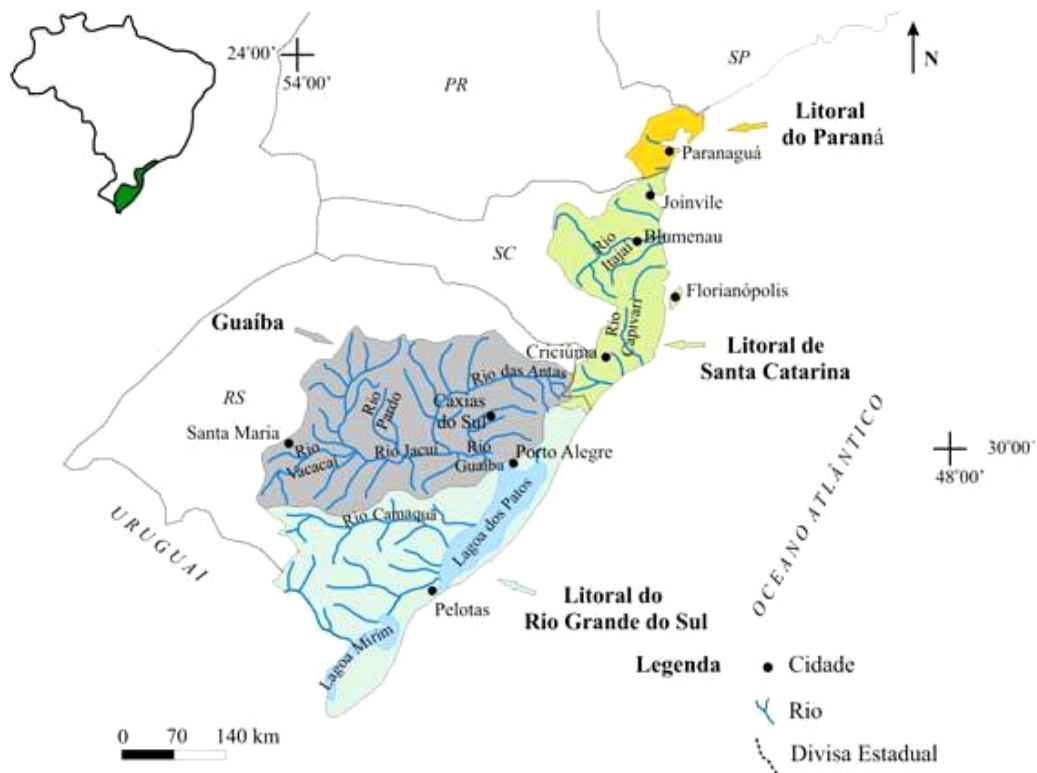


Figura 2.5 – A Região Hidrográfica Costeira do Sul e suas unidades hidrográficas (ANA, Abril 2003).

A unidade hidrográfica do Litoral de Santa Catarina apresenta um clima temperado e chuvoso com uma precipitação média de 1.749 mm e uma evapotranspiração anual que varia entre 731 e 998 mm (ANA, Abril 2003).

No que se refere aos solos da região, os estados de Paraná e Santa Catarina apresentam características semelhantes. De forma geral, na região oceânica encontram-se areias quartzosas marinhas. Em direção ao oeste, se tem cambissolos nas áreas mais elevadas e solos gleyzados nas partes baixas e planas (ANA, Abril 2003).

Os rios na região são de pequeno porte. Exceções são os rios Itajaí e Capivari em Santa Catarina. No Rio Grande do Sul, rios de grande porte são os Taquari-Antas, Jacuí, Vacacaí e Camaquã ligados aos sistemas lagunares da Lagoa Mirim e dos Patos. Mais especificamente, considerando a área de estudo, ela é integrante da Bacia do Rio Araranguá. O Rio Fiorita atua como delimitante natural da área onde está a Mina do Trevo, sendo o maior afluente do Rio Mãe Luzia. Ele tem como afluentes o Rio Kuntz e o Rio Albina.

Em relação às águas subterrâneas, nas porções norte e sul da região, os aquíferos tem a sua origem em rochas ígneas e metamórficas recobertas por um espesso manto de intemperismo de espessura média 10 m, podendo chegar a 100 m em algumas regiões. A circulação de água no maciço rochoso está condicionada à presença de discontinuidades como falhas e fraturas. Na região central, ocorrem rochas vulcânicas que dão origem aos aquíferos fraturados do sistema Serra Geral. A produtividade média dos poços é de 23 m³/h e a profundidade média de 123 metros. O Aquífero Guarani, nesta região, ocorre confinado pelas rochas da Serra Geral com vazão média dos poços que pode chegar a 50 m³/h para profundidades de 250 metros. Outros aquíferos porosos ocorrem ao longo da faixa costeira associados a sedimentos marinhos e aluvionares, com poços com vazões de 5 m³/h. A vulnerabilidade e risco de intrusão salina nestas regiões é alta.

2.5 Hidrogeologia local

A Formação Rio Bonito tem boas condições de armazenar e transmitir água, já que por baixo de folhelhos carbonosos as vezes apresenta horizontes de arenitos que são bons transmissores de água. Nas áreas onde está sob litologias confinantes da Formação Palermo e seqüências superiores, o aquífero está sob pressão, no entanto, nas áreas erodidas ele é livre ou semiconfinado. A sua carga se faz através da infiltração das camadas sobrepostas que permitem o descenso vertical.

As formações Palermo e Iratí estão conformadas por rochas de baixa transmissividade, caracterizando-se como aquíferos. Esta unidade atua como

fonte de recarga para o aquífero da Formação Rio Bonito através de fluxo vertical.

A Formação Serra Geral tem as características hidrodinâmicas dos basaltos com permeabilidade e porosidade desenvolvida em zonas de fissuras de forma restrita e localizada. Esta unidade não se comporta como um aquífero, mas a sua função hidrogeológica é de recarga de unidades litológicas encaixantes e sobrepostas através das fissuras.

Na área da Mina do Trevo, a variação da espessura de cobertura corresponde a um alto topográfico ao longo do qual afloram as formações Palermo e Iratí. A presença de água é constatada nas seguintes situações (VALIATI, 2002):

- i. Como nascentes, nas cotas mais elevadas, no contato entre a Formação Iratí de baixa permeabilidade com o diabásio. Drenagens superficiais são alimentadas pela água que se acumula nas fraturas do diabásio, fluindo para cotas topograficamente inferiores.
- ii. Como aquífero livre, no solo e na alteração dos siltitos da Formação Palermo, alimentado pela precipitação e as drenagens superficiais. Este aquífero está limitado inferiormente por siltitos inalterados de baixa permeabilidade.
- iii. Como aquífero confinado, nos arenitos da Formação Rio Bonito entre o topo da camada Barro Branco e o contato desta formação e a Formação Palermo.

A ocorrência de água como aquífero livre (ii) é de interesse para o presente trabalho.

2.6 Interações entre água subterrânea e superficial

Para uma melhor compreensão do estudo de caso considerado, apresenta-se uma breve descrição sobre a distribuição da água em superfície e subsuperfície, assim como o movimento existente entre os seus reservatórios naturais. O intercâmbio constante entre os diferentes reservatórios compreende o Ciclo hidrológico (Figura 2.6), que representa o processo mais

importante da dinâmica da Terra (Teixeira et al., 2001). O mesmo pode ser acompanhado iniciando com a precipitação meteórica que dá origem à chuva. Parte da precipitação retorna à atmosfera por evapotranspiração. Uma vez atingido o solo, pode ocorrer a infiltração ou o escoamento superficial, dependendo do material de cobertura. A infiltração abastece os corpos de água subterrânea e também volta à superfície a través das nascentes. O escoamento superficial converge para córregos, rios e lagos, constituindo a rede de drenagem. Durante o processo de escoamento, ocorre paralelamente uma evaporação realimentando o vapor de água atmosférico.

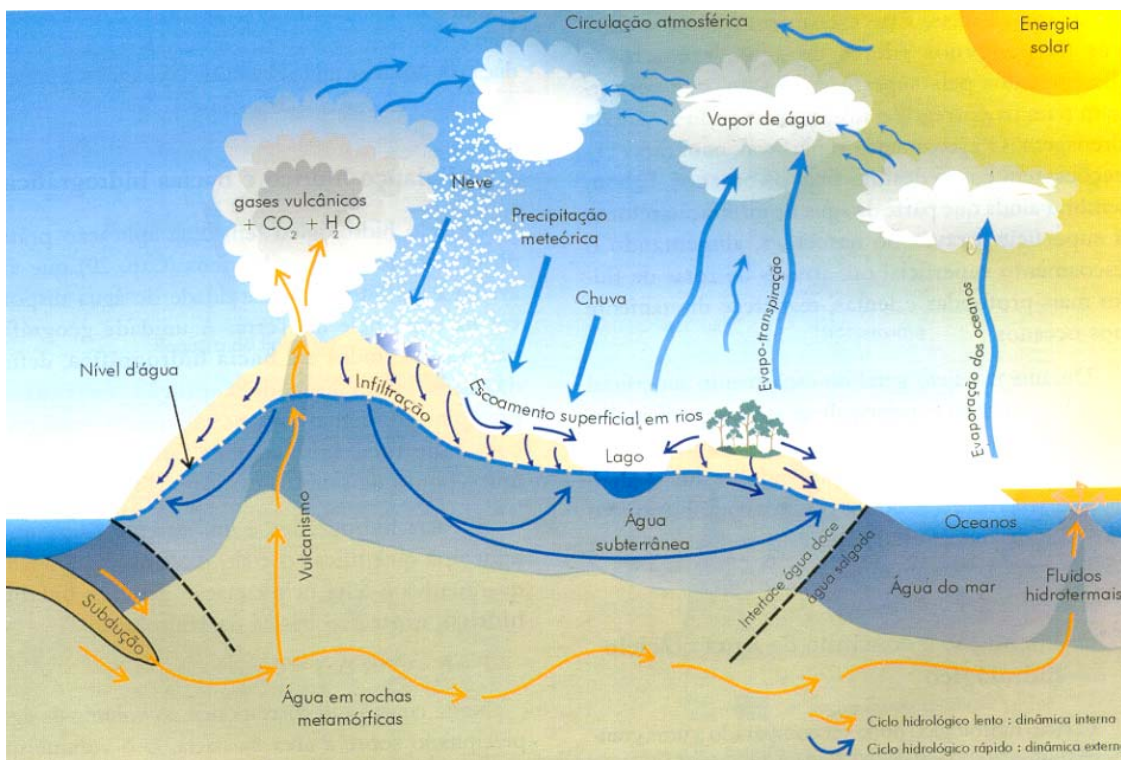


Figura 2.6 – Ciclo hidrológico, com representação dos fenômenos lentos (laranja) e rápidos (azul) (TEIXERA et al., 2001).

Vários fatores controlam as interações entre a água subterrânea e a superficial entre os quais estão a geomorfologia, a hidrogeologia, e fatores climáticos (SOPHOCLEOUS, 2002). Assim, as diferenças na topografia de superfície são geralmente espelhadas como diferenças de potencial. Em condições ideais, o nível de água seria uma réplica da topografia superficial. Mas, as linhas de fluxo não estão somente controladas pela configuração do

nível de água mas também pela distribuição da condutividade hidráulica nas rochas. Além dos fatores topográficos e geológicos, está o fator climático, sendo a precipitação a sua expressão mais saliente.

A água subterrânea se movimenta gerando sistemas de fluxo que podem estar superpostos numa determinada área, os quais apresentam uma hierarquia diferenciada. Em sistemas de fluxo locais, a água flui até zonas de descarga próximas como ser drenagens ou lagos. Em sistemas regionais a água se movimenta maiores distâncias descarregando em rios ou lagos de maior porte ou em oceanos. Sistemas intermediários são caracterizados por uma ou mais zonas de alta e baixa cota topográfica entre os locais de descarga e recarga. Contrariamente aos sistemas regionais, os intermediários não abrangem os locais de maior e menor cota absoluta da bacia. Esses sistemas de fluxo, dependem das características hidrogeológicas do material do solo e das rochas, assim como da posição topográfica. Áreas pronunciadas topograficamente apresentam sistemas de fluxo locais dominantes, entanto que áreas de relevo mais baixo apresentam sistemas de fluxo dominante intermediário e regional. Na Figura 2.7, como ilustração são mostrados diferentes sistemas de fluxo (locais e intermediários) próximos a dois lagos permanentes.

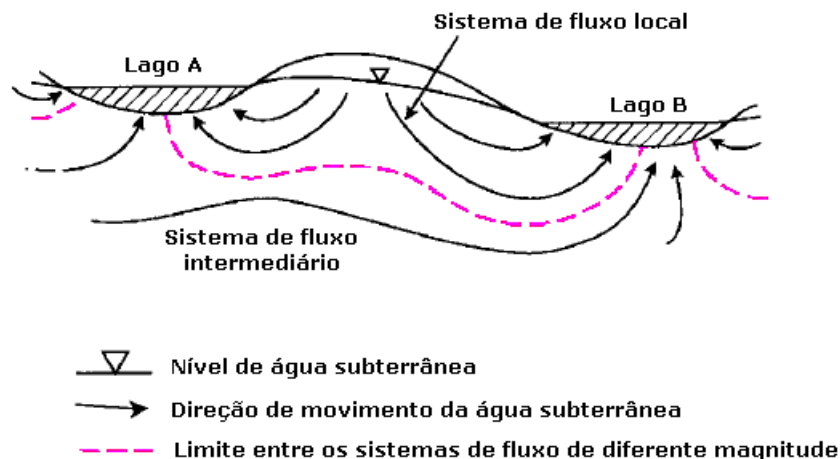


Figura 2.7 – Sistemas de fluxo próximo a dois lagos permanentes (A e B), onde se observam sistemas de fluxo locais e intermediários superpostos.

No caso de aquíferos livres, ocorre uma movimentação natural da água de regiões mais elevadas para regiões mais baixas. Portanto, regiões mais

altas topograficamente apresentam um nível de água subjacente mais afastado da superfície do que regiões topograficamente mais baixas, onde são observados rios, lagos, ou zonas de banhados (Figura 2.8). Processos eventuais, como a precipitação, provocam respostas rápidas no sistema de interação entre a água subterrânea e a água superficial. Essas respostas são mais acentuadas em locais topograficamente mais elevados, no entanto que em locais topograficamente mais baixos existe uma maior estabilidade.

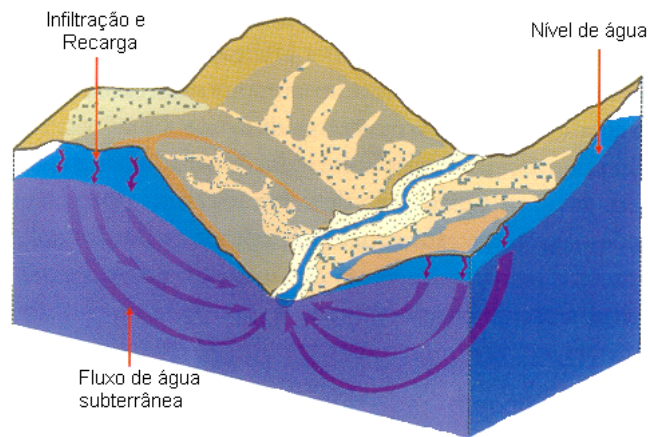


Figura 2.8 – Diagrama mostrando que zonas de maior elevação topográfica estão mais afastadas do nível de água, contrariamente ao caso de zonas de menor elevação topográfica (TEIXERA et al., 2001).

2.7 Monitoramento das águas subterrâneas na Mina do Trevo

Durante muitos anos, a lavra de carvão desenvolveu-se a céu aberto em locais onde as camadas ocorriam em profundidades de até 25 metros. Quando a profundidade era maior, utilizava-se a lavra subterrânea com o método de câmaras e pilares, com desmonte de pilares. Este desmonte de pilares provocava a ocorrência de subsidências, com fratura das rochas de cobertura, provocando o fluxo das águas freáticas para o interior das minas. A água dentro das minas já acidificada era retirada e disposta em cursos de água sem tratamento prévio.

Devido a poluição e gerenciamento inadequado dos recursos hídricos, o Decreto Federal 85.206 de 1980 determinou que a região carbonífera sul-

catarinense constituiria a 14ª Área Crítica Nacional para Efeitos de Controle da Poluição e Qualidade Ambiental. No início da década de 90, o Departamento Nacional de Produção Mineral (DNPM), exigiu que as empresas carboníferas modificassem seus métodos de lavra, não permitindo mais o desmonte de pilares. Isto eliminou a ocorrência de subsidências, preservando as águas superficiais e subterrâneas e diminuindo o volume de efluentes ácidos gerados.

A implantação da Mina do Trevo da Industria Carbonífera Rio Deserto Ltda., no município de Siderópolis, desenvolveu-se sob estas novas exigências. A área onde se encontra a mina caracteriza-se pelo desenvolvimento de atividades agropecuárias que dependem essencialmente da água. Portanto, houve uma solicitação por parte da comunidade de apoio dos órgãos reguladores como o DNPM e a Fundação do Meio Ambiente de Santa Catarina (FATMA), para o monitoramento de águas superficiais e subterrâneas com o objetivo de não terem as suas atividades prejudicadas.

Entre as exigências formuladas incluem-se as instalações hidrômetros em todas as bombas no subsolo, também hidrômetros na tubulação que abastece o subsolo com água potável, pluviômetros, régua de nível em todos os açudes, calhas de vazão em todas as drenagens e piezômetros de monitoramento para nível de água. No caso do monitoramento do nível de água, o número de piezômetros aumentou gradativamente com a expansão da área minerada, sendo posicionados até 150 m da frente de lavra. A frequência de monitoramento é inversamente proporcional à distância da frente de lavra (VALIATI, 2002).

Balanços hídricos e registro de variações bruscas nos monitores podem alertar sobre possíveis causas para o rebaixamento do lençol freático, que podem estar associados a presença de furos de sondagem não tamponados ou com a ocorrência de estruturas como fraturas, falhas ou diques de diabásio. Também, o avanço de lavra pode ser a causa, propondo-se então, modificações locais ao plano de lavra.

2.7.1 Construção de piezômetros e leituras do nível de água

Os piezômetros na área de estudo, sobre a Mina do Trevo, são construídos segundo a Norma ABNT NBR 13895 – Procedimento para construção de poços de monitoramento e amostragem.

O nível de água é medido com de sondas elétricas (eletrodo de água) (Figura 2.9). Um eletrodo é introduzido dentro do piezômetro e ao entrar em contato com a água conduz a eletricidade ativando um instrumento de leitura. Dessa forma, as leituras da profundidade do eletrodo são medidas e posteriormente corrigidas, utilizando a cota da boca do piezômetro.

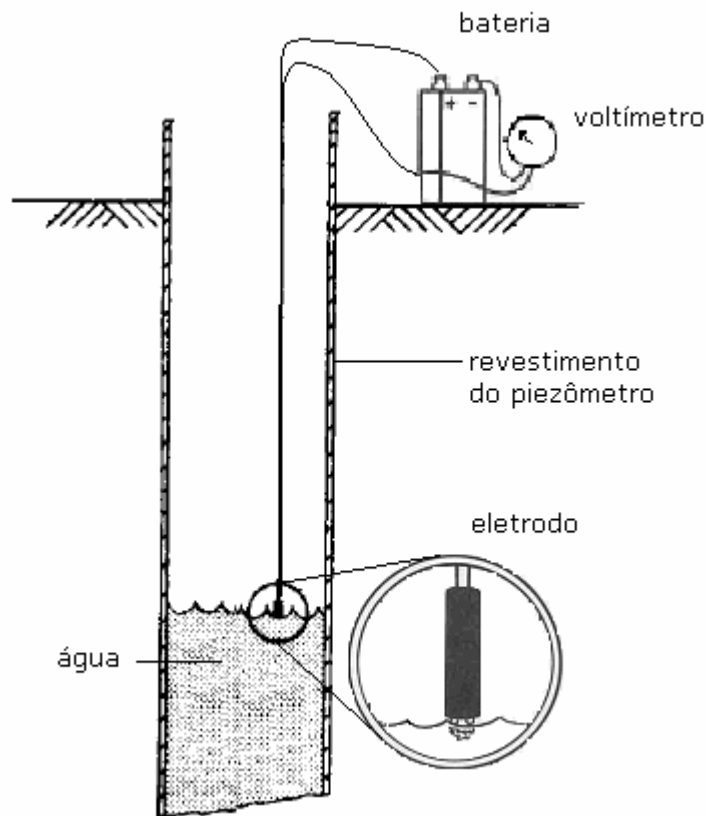


Figura 2.9 – Esquema da sonda elétrica (eletrodo de água) para determinação do nível de água.

2.8 Análise exploratória dos dados

O banco de dados está composto por dados de leituras de altura de nível de água em piezômetros de monitoramento ao longo do ano 2002. O total de

poços é de 175, mas o número de piezômetros lidos em cada mês não é constante. O número de piezômetros varia, conforme varia a frente de lavra, como foi mencionado no item 2.7. As datas de leituras nos piezômetros e o número de piezômetros lidos é apresentado na Tabela 2.1. As leituras estão expressas em metros ao longo de todo o estudo de caso.

Tabela 2.1 - Datas de monitoramento e número de piezômetros monitorados em 2002

Data	Nºpiezômetros	Data	Nº piezômetros
08 Jan 02	149	10Set 02	170
22 Jan 02	149	24 Set 02	171
12 Fev 02	150	08 Out 02	172
26 Fev 02	150	22 Out 02	175
12 Mar 02	150	07 Nov 02	64
26 Mar 02	148	14 Nov 02	64
09 Abr 02	150	21 Nov 02	64
23 Abr 02	150	28 Nov 02	64
14 Mai 02	162	02 Dez 02	64
28 Mai 02	164	05 Dez 02	64
11 Jun 02	169	09 Dez 02	65
25 Jun 02	169	12 Dez 02	65
09 Jul 02	169	16 Dez 02	65
23 Jul 02	169	23 Dez 02	65
13 Ago 02	169	26 Dez 02	65
27 Ago 02	169	30 Dez 02	65

O número de datas com as quais se trabalhará será reduzido de 30 para 12 para possibilitar análise da variação mensal. Escolheram-se dados pertencentes à segunda quinzena de cada mês, já que, excetuando o mês de março, em todos os casos tem-se um número igual ou maior de piezômetros ao avançar no tempo. Nos meses de novembro e dezembro, a brusca redução

no número de piezômetros monitorados corresponde a uma decisão da empresa de reduzir a quantidade de poços monitorados. Finalmente, o conjunto de datas de monitoramento que compõem o banco de dados analisado apresentam-se na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Datas e número de piezômetros monitorados em 2002 que compõem o Banco de Dados analisado

Data	Nº piezômetros	Data	Nº piezômetros
22 Jan 02	149	23 Jul 02	169
26 Fev 02	150	27 Ago 02	169
26 Mar 02	148	24 Set 02	171
23 Abr 02	150	22 Out 02	175
28 Mai 02	164	28 Nov 02	64
25 Jun 02	169	26 Dez 02	65

O mapa da área com a localização dos piezômetros é apresentado na Figura 2.10. A área que será considerada para a inferência do nível de água está representada pela linha laranja na figura. Pelo norte e oeste, os limites naturais são o Rio Fiorita e uma drenagem próxima do limite da área de proteção ambiental. Pelo leste, o limite está dado em parte pelo limite da concessão outorgada pelo DNPM (linha rosa). Pelo sul e o restante do leste, o limite tenta contemplar a maior quantidade de nascentes possíveis, dada a importância das mesmas, mas também não extrapolando a área muito além da localização dos piezômetros.

O mapa de localização das amostras para cada data está apresentado na Figura 2.11. Pode-se apreciar o agrupamento preferencial das amostras em zonas de baixo valor. Por isso, para a definição dos parâmetros estatísticos se faz necessária a aplicação de metodologias de desagrupamento (ISAACS e SRIVASTAVA, 1989, p. 237 - 248). O espaçamento médio amostral (ISAACS e SRIVASTAVA, 1989, p. 341), está entre 150 e 200 m, dependendo da quantidade de dados disponíveis em cada data.

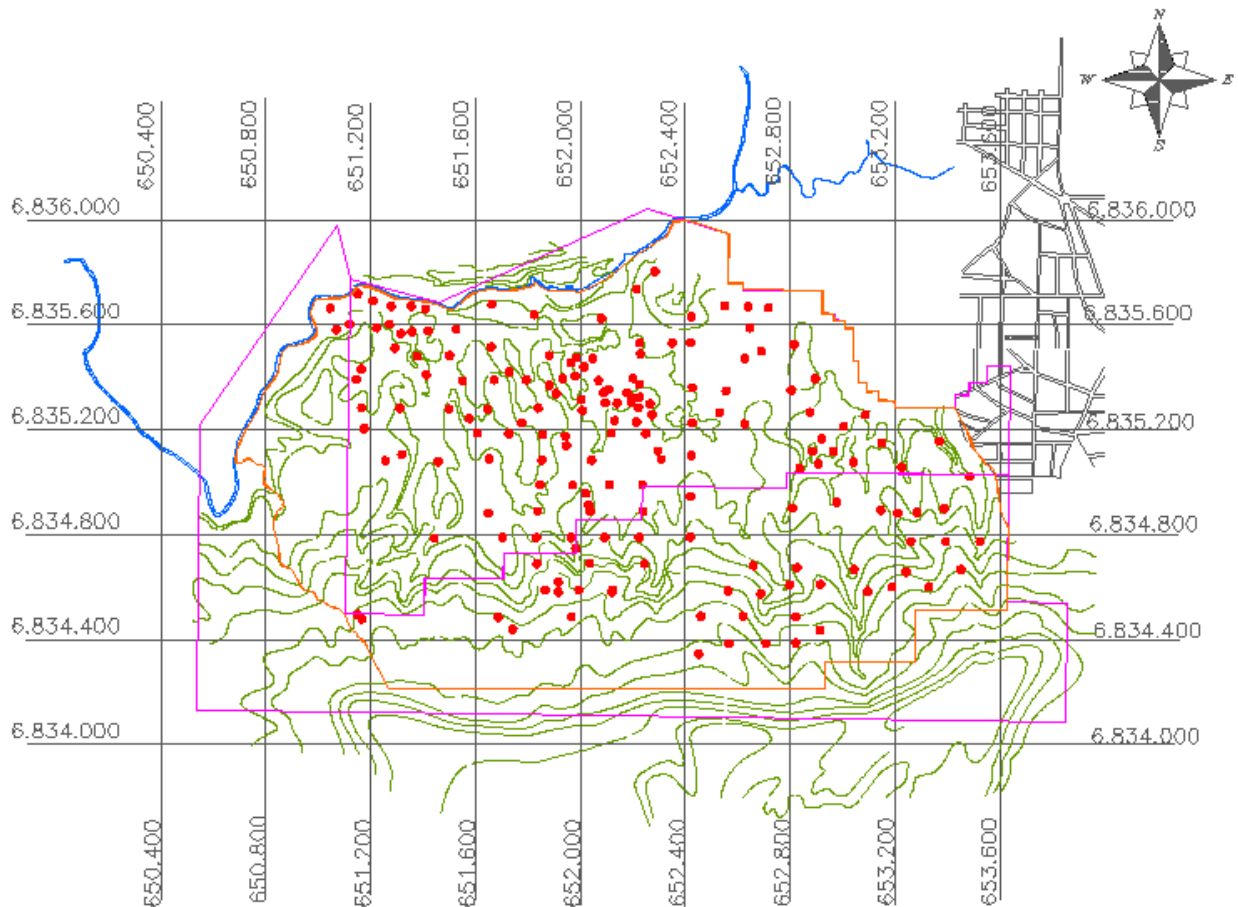


Figura 2.10 - Mapa da área de estudo, apresentando a localização dos piezômetros (vermelho) e o limite considerado (linha laranja).

A Figura 2.12 mostra os histogramas dos dados sem levar em consideração o agrupamento preferencial. Logo após o desagrupamento, utilizando o método das células móveis, obtém-se estatísticas diferentes, como se pode apreciar na Figura 2.13.

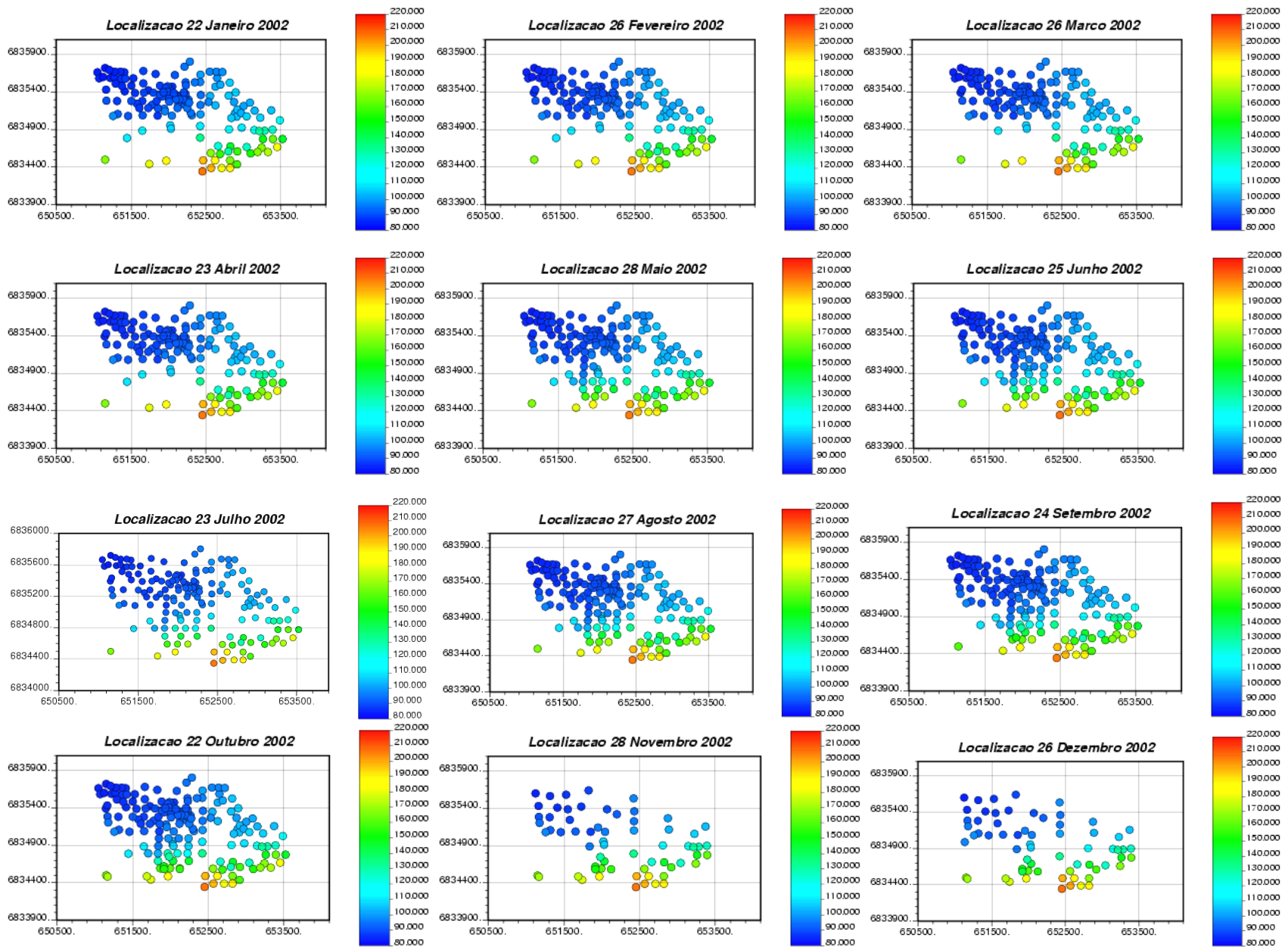


Figura 2.11 - Mapa de localização das amostras coletadas em cada data de 2002 com respectiva leitura de nível de água.

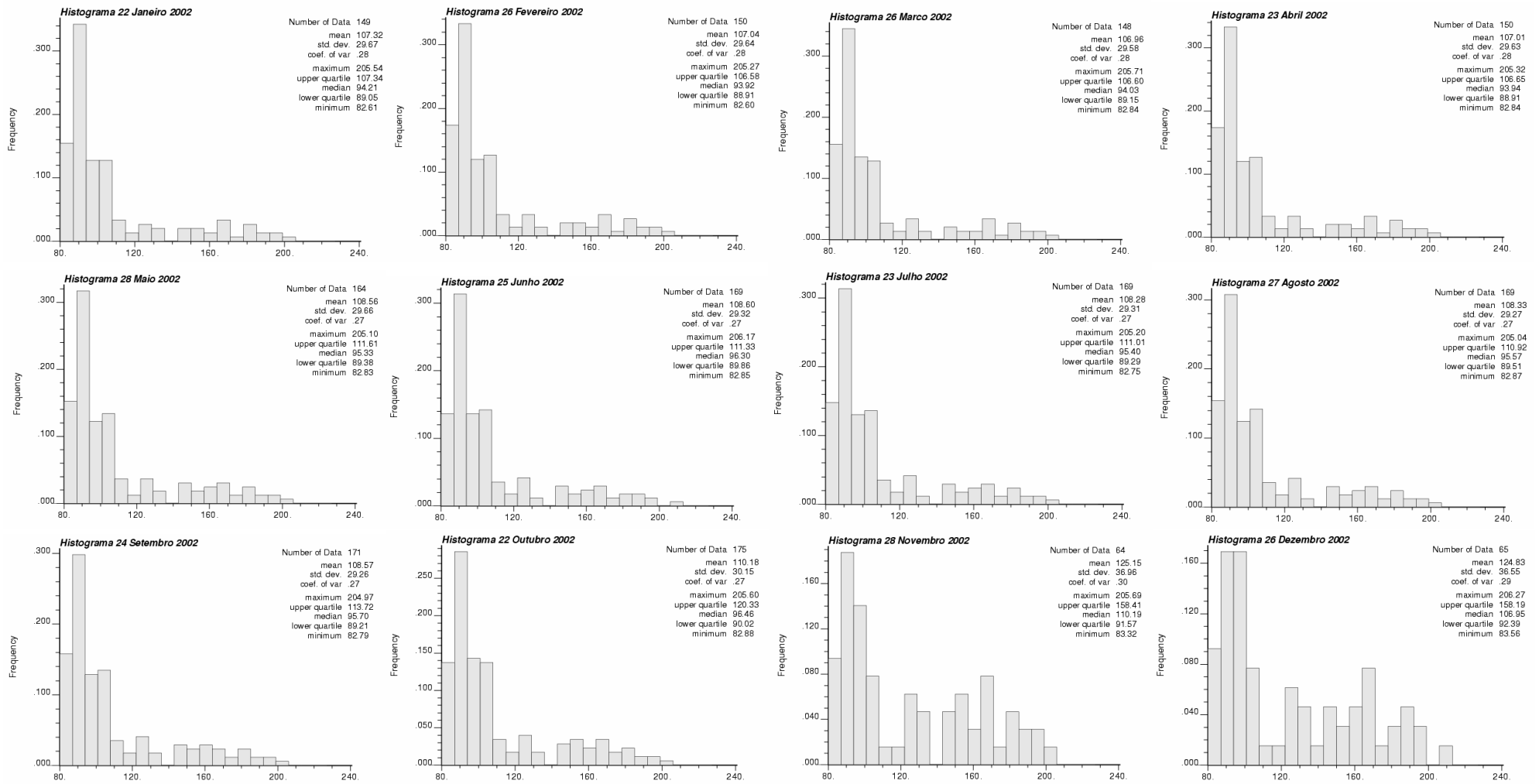


Figura 2.12 – Histogramas dos dados de nível de água (m) nas datas dos meses de Janeiro a Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

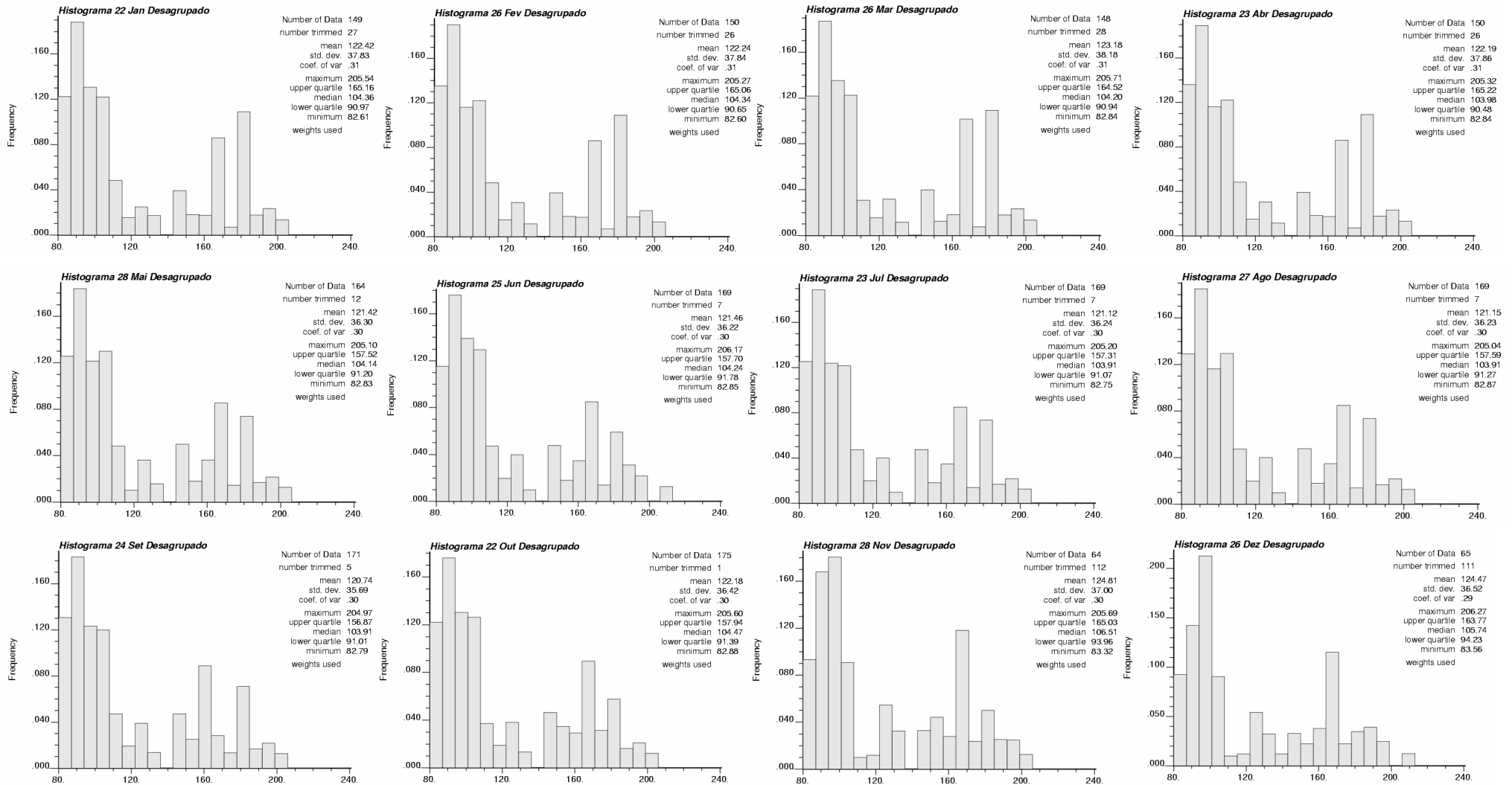


Figura 2.13 – Histograma do nível de água(m) desagrupados utilizando o método das células móveis (detalhe no Apêndice A).

Os histogramas dos dados, depois da aplicação de técnicas de desagrupamento, apresentam características de distribuições multimodais. Esse comportamento corresponde a casos em que se poderia ter mais de uma população. No caso em estudo, não é de esperar a existência de populações diferentes para o nível de água, já que os dados correspondem ao mesmo aquífero livre, formado pelo de acúmulo de água na rocha alterada e no solo. O comportamento diferenciado em presença de cotas topográficas diferentes (ver item 2.6) e a amostragem mais abundante nos locais de baixo nível somada à pouca amostragem em regiões intermediárias, leva a esse tipo de histogramas, e não é compensado pelas técnicas de desagrupamento.

2.9 Análise e modelagem da continuidade espacial

2.9.1 Conceitos preliminares

A continuidade espacial existe na maioria dos parâmetros físicos e químicos analisados nas ciências da terra. Nesse conceito, apóia-se a teoria das variáveis regionalizadas (MATHERON, 1965) da qual surge a geoestatística. Nas variáveis regionalizadas, dois aspectos se contrapõem: uma certa aleatoriedade dos fenômenos naturais que explica irregularidades locais, e por outro lado um aspecto estruturado que reflete semelhanças numa escala maior. Na estatística clássica, a parte estruturada é representada por um termo determinístico e a parte aleatória colocada como um termo de erro. Na geoestatística, os dados disponíveis em N locais u_α são considerados realizações $z(u_\alpha)$ de uma variável randômica $Z(u)$. Nos locais u , onde não se possui informação, também podem ser considerados como posições onde pode haver realizações da mesma variável. O conjunto de variáveis randômicas é chamado de função randômica.

As funções randômicas, têm funções de distribuição de probabilidade que dependem da posição para cada variável (GOOVAERTS, 1997, p. 70). Assim chamada função de distribuição multivariada caracteriza a incerteza conjunta dos valores $\{z(u_\alpha); \alpha=1, \dots, N\}$. Para inferi-la, é necessário dispor de um conjunto de repetições em cada local u_α , o que na prática não é possível. Geralmente, assume-se que a variável em consideração é estacionária, significando que a sua distribuição de probabilidade não varia com a translação (ARMSTRONG, 1998, p. 18). Dessa forma, a inferência estatística pode ser feita numa realização única.

A estacionariedade requer que todos os momentos estatísticos não variem com a translação na área de estudo \mathcal{A} . Como isto não pode ser verificado pela quantidade limitada de dados experimentais, somente são considerados constantes os dois primeiros momentos (média e covariância). A média (Equação 2.1) é considerada constante em todos os locais u .

$$E(Z(u)) = m \quad (2.1)$$

onde,

$Z(u)$ é a função randômica,

m é a média da função randômica $Z(u)$.

A covariância (Equação 2.2) entre dois pontos quaisquer afastados por um vetor h é considerada dependente do vetor h e não da posição u .

$$C(h) = E[Z(u) \cdot Z(u+h)] - E[Z(u)] \cdot E[Z(u+h)] = E[Z(u) \cdot Z(u+h)] - m^2 \quad (2.2)$$

onde,

$C(h)$ é a função de covariância,

$Z(u)$ é a função randômica avaliada em locais u ,

$Z(u+h)$ é a função randômica avaliada em locais afastados do local u um vetor de separação h .

Muitas vezes, essas duas condições não são satisfeitas. A mais clara resulta que a média, geralmente, não é constante sobre toda a área de estudo. Por isso foi desenvolvida a hipótese intrínseca (MATHERON, 1965). Neste caso, são os incrementos da função que são assumidos como estacionários. A média (Equação 2.3) e variância (Equação 2.4) dos incrementos são dependentes do vetor de separação h .

$$E[Z(u+h) - Z(u)] = 0 \quad (2.3)$$

onde,

$[Z(u+h) - Z(u)]$ é a diferença que define o incremento.

$$\text{Var}[Z(u+h) - Z(x)] = \frac{1}{2} \cdot E\left[\{Z(u+h) - Z(u)\}^2\right] = 2\gamma(h) \quad (2.4)$$

onde,

$\gamma(h)$ é a função variograma.

Uma função intrínseca é estacionária mas a relação inversa nem sempre é verdadeira. A função de covariância só existe para funções estacionárias. Nesse caso, as suas propriedades se listam a seguir (ARMSTRONG, 1998):

$$C(0) = \sigma^2 \quad (2.5)$$

$$C(h) = C(-h) \quad (2.6)$$

$$|C(h)| \leq C(0) \quad (2.7)$$

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (2.8)$$

onde,

$C(0)$ é a variância a priori dos dados σ^2 ,

$C(h)$ é a função de covariância,

$\gamma(h)$ é a função variograma.

A Equação 2.8 é muito importante em análises subseqüentes. Independentemente da estacionariedade, as funções variograma, covariância e correlograma (covariância estandardizada pela variância), são utilizadas para avaliar o grau de semelhança de dados afastados por um vetor h . Seu cálculo a partir dos dados experimentais está definido pelas Equações 2.9, 2.10 e 2.11.

$$C(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} z(u_{\alpha}) \cdot z(u_{\alpha} + h) - m(h)^2 \quad (2.9)$$

$$\rho(h) = \frac{C(h)}{\sigma^2} \in [-1,1] \quad (2.10)$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [z(u_{\alpha}) - z(u_{\alpha} + h)]^2 \quad (2.11)$$

onde,

$C(h)$ é a função de covariância,
 $\rho(h)$ é a função correlograma,
 $\gamma(h)$ é a função variograma,
 σ^2 é a variância a priori dos dados,
 $m(h)$ é a média da variável $Z(u)$ calculada a partir dos valores $z(u_\alpha)$,
 $N(h)$ é o número de pares de valores $z(u_\alpha)$, $z(u_\alpha+h)$ afastados um vetor de separação h .

Essas funções são, geralmente, representadas para diferentes valores de vetor de separação h . Dessa forma, constituem funções que são características do fenômeno sob estudo, das quais a mais utilizada é o variograma (Figura 2.14).

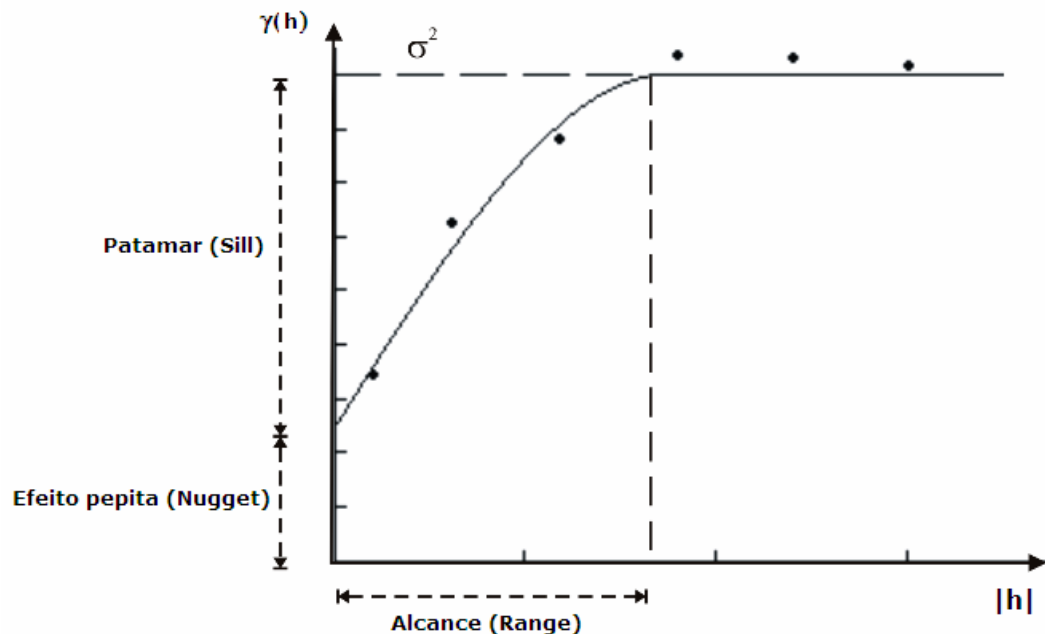


Figura 2.14 – Esquema do variograma e seus parâmetros.

No variograma, são identificados alguns parâmetros entre os quais estão:

- Alcance (*range*): em distâncias menores à do alcance os dados apresentam correlação entre si.
- Patamar (*sill*): para variáveis estacionárias, o patamar é alcançado para distâncias maiores ou iguais ao alcance, sendo aproximadamente igual à variância priori dos dados σ^2 .

- Efeito pepita (*nugget*): o comportamento do variograma na origem indica o comportamento para curtas distâncias (erro amostral e analítico).

A presença de tendências (*trends*) se observa em variogramas que não alcançam o patamar e que apresentam um crescimento maior que o da função quadrática h^2 (ARMSTRONG, 1998, p. 30). Isso é um claro sinal do não cumprimento da hipótese de estacionariedade. Nesses casos, pode-se optar por um tratamento diferenciado utilizando técnicas geoestatísticas específicas para casos de não estacionariedade. Isso nem sempre é necessário (JOURNEL e ROSSI, 1989).

Antes de utilizar-se o variograma, para estimar-se com krigagem, ele dever ser modelado. Os modelos utilizados devem satisfazer uma série de condições, entre elas, a de definição positiva.

Geralmente, as estimativas da variável z nos locais u onde a mesma não é conhecida, são calculadas por meio de combinações lineares de n dados disponíveis em locais u_α da vizinhança. Considerando uma variável estacionária $Z(u)$, com covariância $C(h)$, podemos escrever essa combinação linear como:

$$Z^*(u) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \cdot Z(u_\alpha) = \lambda_1 Z(u_1) + \lambda_2 Z(u_2) + \dots + \lambda_n Z(u_n) \quad (2.12)$$

onde,

$Z^*(u)$ é o estimador da variável $Z(u)$ no local u ,

$Z(u_\alpha)$ é o valor da variável $Z(u)$ no local u_α ,

$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha$ é o somatório dos pesos atribuídos a cada valor de $Z(u_\alpha)$ nos locais

u_α ,

n é o número total de locais u_α nos quais se dispõe dos dados $z(u_\alpha)$.

A média do estimador é:

$$E(Z^*(u)) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \cdot m$$

A variância do estimador é dada por:

$$\text{Var}(Z^*(u)) = E[(Z^*(u) - E(Z^*(u)))^2]$$

$$\text{Var}(Z^*(u)) = E\left[\left(\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot Z(u_{\alpha}) - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot m\right)^2\right]$$

$$\text{Var}(Z^*(u)) = E\left[\left(\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot Z(u_{\alpha})\right)^2 - 2 \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot Z(u_{\alpha})\right) \cdot \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot m + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \cdot m^2\right]$$

$$\text{Var}(Z^*(u)) = E\left[\left(\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot Z(u_{\alpha})\right)^2\right] - 2 \cdot \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot m \cdot E\left[\left(\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot Z(u_{\alpha})\right)\right] + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \cdot m^2$$

$$\text{Var}(Z^*(u)) = E\left[\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot Z(u_{\alpha}) \cdot \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \cdot Z(u_{\beta})\right] - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \cdot m^2$$

$$\text{Var}(Z^*(u)) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \cdot (E[Z(u_{\alpha}) \cdot Z(u_{\beta})] - m^2)$$

que segundo a Equação 2.2 pode ser expressa como

$$\text{Var}(Z^*(u)) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot \lambda_{\beta} \cdot C(u_{\alpha} - u_{\beta}) \geq 0 \quad (2.13)$$

onde,

$Z^*(u)$ é o estimador da variável $Z(u)$,

$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot \lambda_{\beta}$ são os somatórios dos pesos atribuídos a cada valor de $Z(u_{\alpha})$

e $Z(u_{\beta})$ nos locais u_{α} e u_{β} respectivamente,

$C(u_{\alpha}-u_{\beta})$ é a função covariância da função $Z(u)$,

Se forem expandidos, os somatórios se expressam da seguinte forma:

$$\text{Var}(Z^*(u)) = \lambda_1^2 \cdot C(u_1 - u_1) + \lambda_2^2 \cdot C(u_2 - u_2) + \dots + \lambda_n^2 \cdot C(u_n - u_n) + 2\lambda_1\lambda_2 \cdot C(u_1 - u_2) + \dots + 2\lambda_{n-1}\lambda_n \cdot C(u_{n-1} - u_n)$$

onde,

$Z^*(u)$ é o estimador da variável $Z(u)$,

λ_1 é peso atribuído ao dado $Z(u_{\alpha 1})$ no local $u_{\alpha 1}$,

$C(u_1 - u_1)$ é a covariância no local u_1 ,

λ_2 é peso atribuído ao dado $Z(u_{\alpha 2})$ no local $u_{\alpha 2}$,

$C(u_2 - u_2)$ é a covariância no local u_2 ,

λ_n é peso atribuído ao dado $Z(u_{\alpha n})$ no local $u_{\alpha n}$,

$C(u_1 - u_2)$ é a covariância entre dados nos locais u_1 e u_2 ,

λ_n é peso atribuído ao dado $Z(u_{\alpha n})$ no local $u_{\alpha n}$,

λ_{n-1} é peso atribuído ao dado $Z(u_{\alpha n-1})$ no local $u_{\alpha n-1}$,

$C(u_{n-1} - u_n)$ é a covariância entre dados nos locais u_{n-1} e u_n ,

A variância é positiva por definição. Portanto, utilizando a relação (2.8) a variância também pode ser expressa em termos do variograma sob a hipótese de estacionariedade:

$$\text{Var}(Z^*) = C(0) \cdot \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot \lambda_{\beta} - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot \lambda_{\beta} \cdot \gamma(u_{\alpha} - u_{\beta}) \geq 0 \quad (2.14)$$

onde,

$Z^*(u)$ é o estimador da variável $Z(u)$,

$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\alpha} \cdot \lambda_{\beta}$ são os somatórios dos pesos atribuídos a cada valor de $Z(u_{\alpha})$

e $Z(u_{\beta})$ nos locais u_{α} e u_{β} respectivamente,

$\gamma(u_{\alpha} - u_{\beta})$ é a função variograma da função $Z(u)$.

As funções que modelam o variograma devem ser permissíveis para cumprir também com a condição de definição positiva (GOOVAERTS, 1997, p. 88). Na maioria das situações, mais de um modelo deve ser combinado para satisfazer a forma do variograma experimental ou para a modelagem de anisotropias. No modelo linear de regionalização (MLR), os variogramas são expressos como combinações lineares de estruturas básicas. Isto pode ser interpretado como uma decomposição das variáveis em combinações lineares

das correspondentes componentes. Portanto, a variável $Z(u)$ pode ser interpretada como a soma de duas (ou mais) componentes independentes $Z^1(u)$ e $Z^2(u)$ com média zero e uma tendência constante m :

$$Z(u) = Z^1(u) + Z^2(u) + m \quad (2.15)$$

Os variogramas das componentes estão dados por:

$$\begin{aligned} \gamma_{Z^1}(h) &= b^1 \gamma^1(h) \\ \gamma_{Z^2}(h) &= b^2 \gamma^2(h) \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde,

$\gamma_{Z^1}(h)$ e $\gamma_{Z^2}(h)$ são os variogramas das componentes $Z^1(u)$ e $Z^2(u)$,
 $\gamma^1(h)$ e $\gamma^2(h)$ são variogramas de variância unitária,
 b^1 e b^2 são as contribuições para a variância total de cada componente.

O variograma de $Z(u)$, pode ser expresso como:

$$\gamma(h) = b^1 \gamma^1(h) + b^2 \gamma^2(h) \quad (2.17)$$

Generalizando, no MLR um variograma com k estruturas imbricadas,

$$\gamma(h) = \sum_k b^k \gamma^k(h) \quad (2.18)$$

pode ser interpretado como a decomposição da variável de interesse em k componentes independentes $Z^k(u)$ com média zero e variograma $b^k \gamma^k$ e uma tendência constante m ,

$$Z(u) = \sum_k Z^k(u) + m \quad (2.19)$$

A condição de definição positiva deve ser observada em cada estrutura do mesmo modo que foi apresentado anteriormente

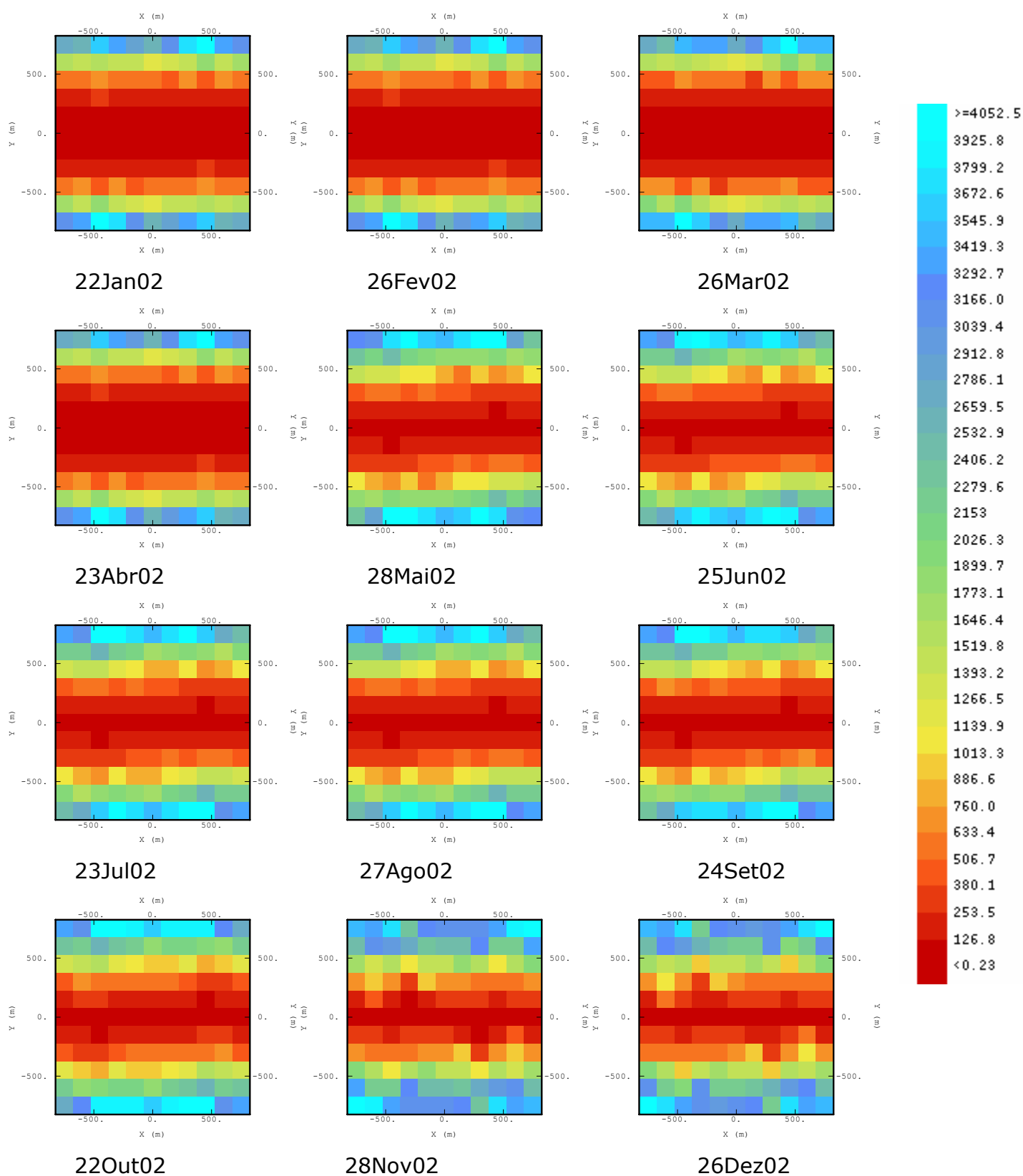


Figura 2.15 – Variogramas de superfície para os dados do nível de água para as datas consideradas desde Janeiro a Dezembro de 2002.

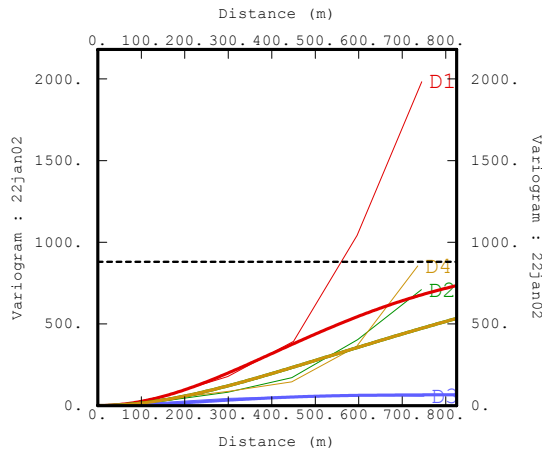
2.9.2 Caso de estudo

No caso de estudo, primeiramente são calculados os variogramas de superfície (Figura 2.15) para evidenciar possíveis direções de maior e menor continuidade. Na representação dos variogramas direcionais (Figura 2.16, Figura 2.17 e Figura 2.18), uma forte anisotropia zonal é evidenciada na direção leste-oeste assim como uma forte tendência na direção norte-sul. Para a modelagem dos variogramas experimentais, são utilizadas três estruturas: um efeito pepita e duas estruturas gaussianas. O patamar é equivalente à variância a priori dos dados. A maior importância se deu no ajuste dos primeiros passos, respeitando a concavidade positiva que revela a alta continuidade do fenômeno. O modelo gaussiano (Equação 2.20) apresenta problemas de instabilidade numérica quando utilizado na krigagem pela extrema continuidade que é atribuída ao fenômeno sob estudo (WACKERNAGEL, 1994, p. 83) nos primeiros passos. No entanto, eles são utilizados por muitos softwares de análise variográfica como o único modelo com concavidade positiva na origem. O alcance do modelo gaussiano é representado por a (assintótico), mas de forma prática é de $1.73 a$.

$$\gamma(h) = 1 - \exp\left(-\frac{|h|^2}{a^2}\right) \quad (2.20)$$

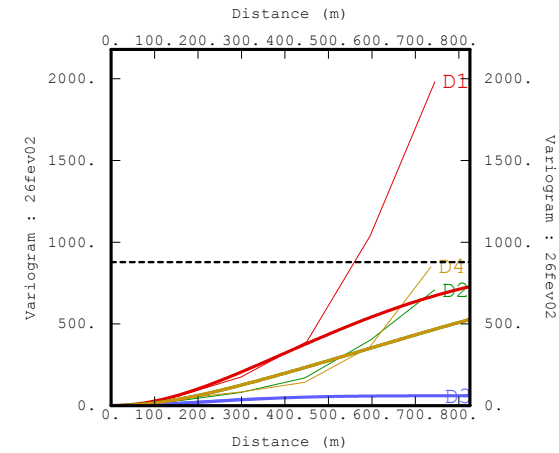
Os gráficos correspondentes aos variogramas experimentais e os modelos ajustados no caso de estudo, são apresentados na Figura 2.16, Figura 2.17 e na Figura 2.18.

22 Janeiro:



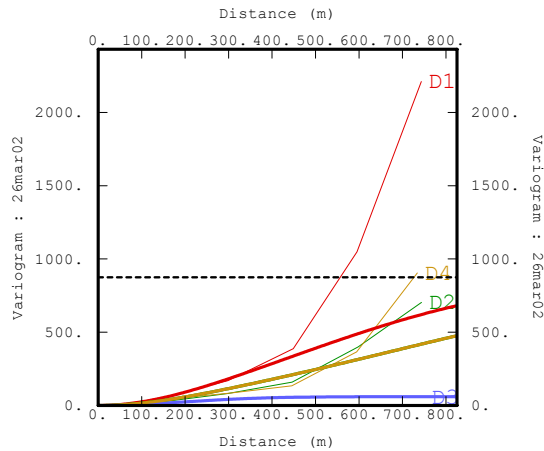
$$\gamma(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 810 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

26 Fevereiro:



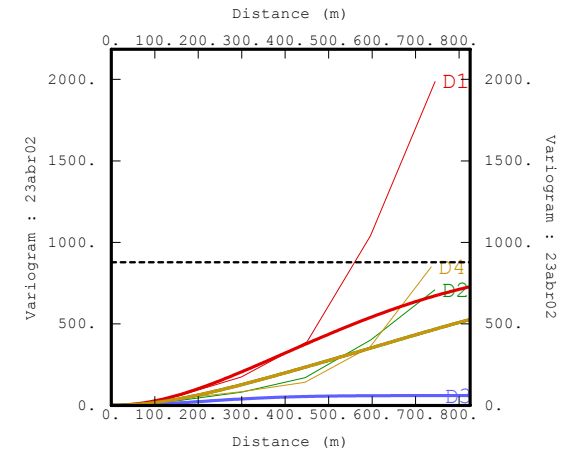
$$\gamma(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 810 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

26 Março:



$$\gamma(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{480m} \right) + 810 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

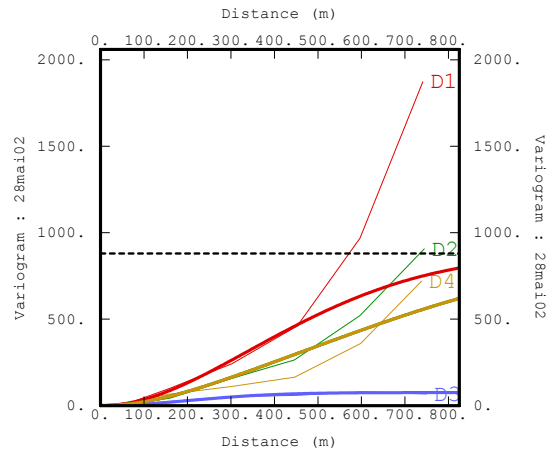
23 Abril:



$$\gamma(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{480m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 810 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

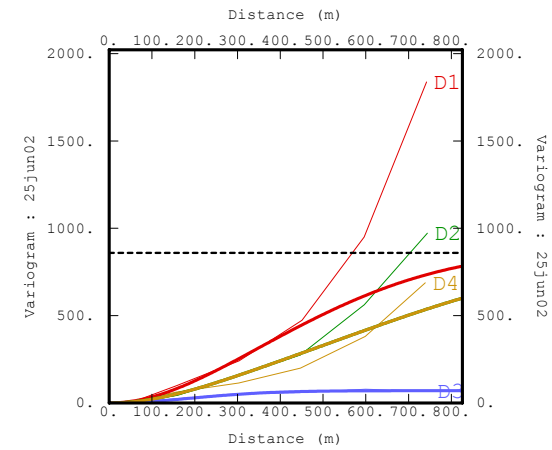
Figura 2.16 – Variogramas experimentais e modelados nas datas dos meses de Janeiro a Abril de 2002 (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) (detalhe no Apêndice A).

28 Maio:



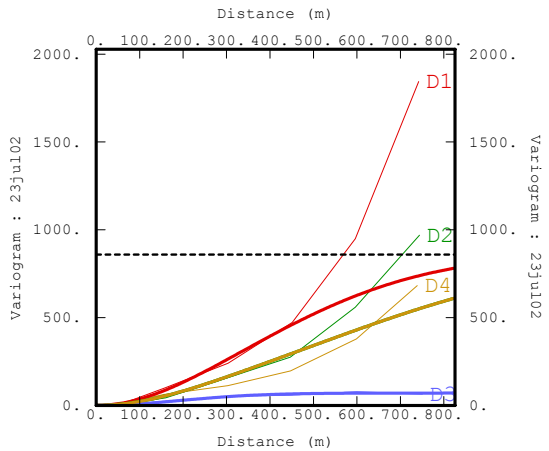
$$\gamma(h) = 10 + 65 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{matrix} 90^\circ & 0^\circ \\ 470m & 450m \end{matrix} \right) + 805 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{matrix} 90^\circ & 0^\circ \\ 100000m & 950m \end{matrix} \right)$$

25 Junho:



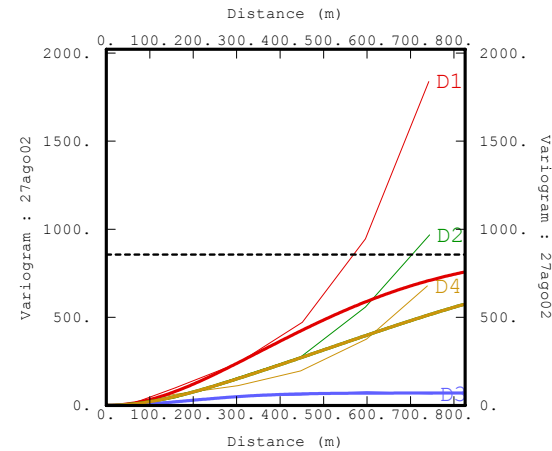
$$\gamma(h) = 10 + 70 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{matrix} 90^\circ & 0^\circ \\ 470m & 400m \end{matrix} \right) + 780 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{matrix} 90^\circ & 0^\circ \\ 100000m & 940m \end{matrix} \right)$$

23 Julho:



$$\gamma(h) = 10 + 65 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{matrix} 90^\circ & 0^\circ \\ 470m & 400m \end{matrix} \right) + 785 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{matrix} 90^\circ & 0^\circ \\ 100000m & 940m \end{matrix} \right)$$

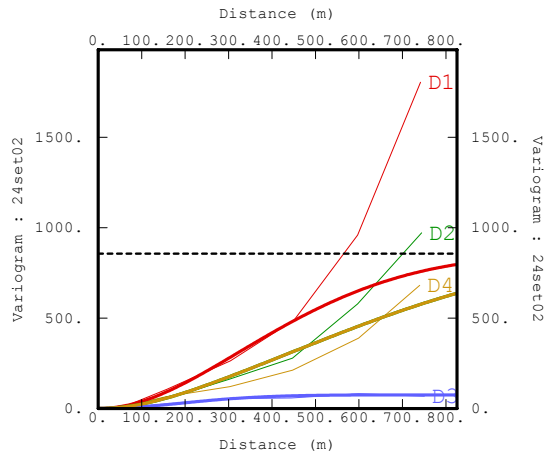
27 Agosto:



$$\gamma(h) = 10 + 65 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{matrix} 90^\circ & 0^\circ \\ 500m & 470m \end{matrix} \right) + 785 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{matrix} 90^\circ & 0^\circ \\ 100000m & 1080m \end{matrix} \right)$$

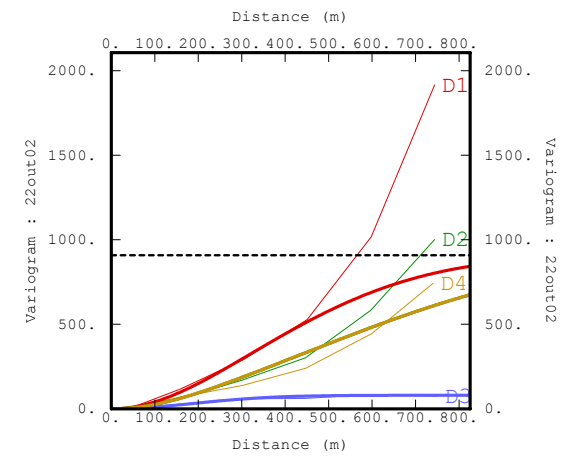
Figura 2.17 – Variogramas experimentais e modelados nas datas dos meses de Maio a Agosto de 2002 (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) (detalhe no Apêndice A).

24 Setembro:



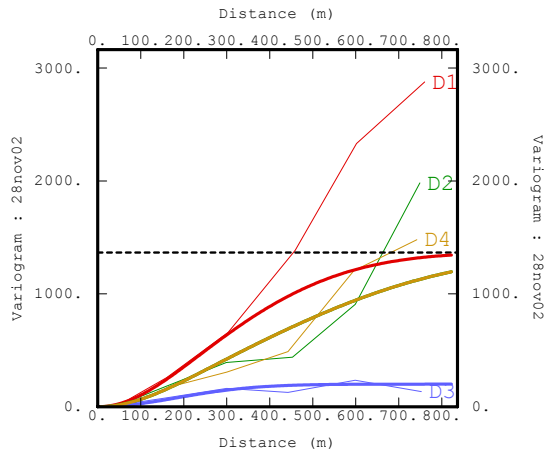
$$\gamma(h) = 10 + 70 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m}\right) + 780 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m}\right)$$

22 Outubro:



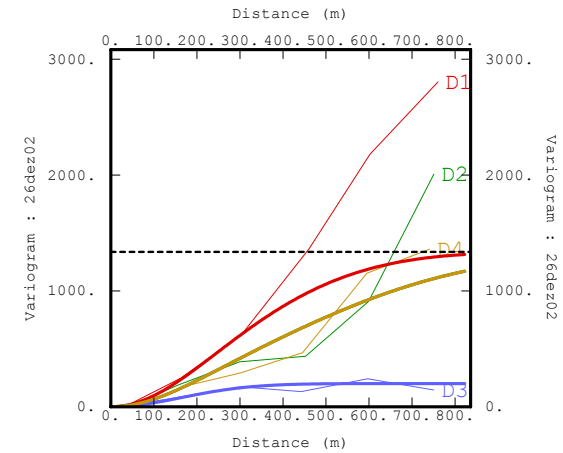
$$\gamma(h) = 10 + 70 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m}\right) + 830 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m}\right)$$

28 Novembro:



$$\gamma(h) = 10 + 205 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{450m} \frac{0^\circ}{370m}\right) + 1160 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{730m}\right)$$

26 Dezembro:



$$\gamma(h) = 10 + 190 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{400m} \frac{0^\circ}{380m}\right) + 1140 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{790m}\right)$$

Figura 2.18 – Variogramas experimentais e modelados nas datas dos meses de Setembro a Dezembro de 2002 (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) (detalhe no Apêndice A).

2.10 Validação e Krigagem

2.10.1 Conceitos preliminares

O nível de água é medido nos locais onde se conta com piezômetros. Para determinar o valor nos locais onde não se dispõe de medida, a krigagem, introduzida por MATHERON (1965) fornece uma estimativa cujo erro médio é nulo (não tendencioso) e cuja variância do erro é mínima.

Considerando que a função $Z(u)$ pode ser expressa como a soma entre um resíduo $R(u)$ com média zero e covariância $C_R(h)$ e um termo de tendência $m(u)$,

$$Z(u) = R(u) + m(u) \quad (2.21)$$

foram desenvolvidos diferentes tipos de krigagem, segundo o modelo considerado para essa tendência $m(u)$ dos quais os clássicos são (GOOVAERTS, 1997, p. 126):

- Krigagem Simples (KS), considera a tendência $m(u)$ como uma média estacionária constante em toda a área de estudo
- Krigagem Ordinária (KO), considera flutuações locais sobre média limitando a hipótese de estacionariedade a uma vizinhança local.
- Krigagem com um modelo de tendência (KT), considera que a média varia suavemente na área de estudo.

No presente trabalho, os variogramas acusam a presença de uma tendência. Na KT, a média é modelada utilizando funções polinomiais que são dependentes das coordenadas. Na maioria dos casos, são utilizados polinômios cujos coeficientes são inferidos inicialmente e depois determinados no sistema de krigagem. Posteriormente, são verificados se foram corretamente escolhidos checando-os por iteração. Também, se faz necessário o cálculo e modelagem do variograma dos resíduos $R(u_\alpha)$. Esse tipo de krigagem é utilizado para realizar estimativas com pouca densidade amostral e nos casos de extrapolações fora da área definida pelas amostras.

Na maioria dos casos, a KO é preferida já que provem resultados similares à KT sendo mais fácil de implementar (GOOVAERTS, 1997, p. 152; JOURNAL e

ROSSI, 1989). O método considera a média estacionária só na vizinhança do local aonde vai se estimar. A única limitante é se não houver uma quantidade suficiente de amostras nessa vizinhança. Como no caso de estudo essa limitante não está presente, será utilizada a KO.

O estimador de KO pode ser escrito da seguinte forma:

$$Z_{KO}^*(u) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} \cdot Z(u_{\alpha}) \quad (2.22)$$

onde,

$Z_{KO}^*(u)$ é o estimador de krigagem ordinária para a variável $Z(u)$ no local u ,

$Z(u_{\alpha})$ são os dados da variável $Z(u)$ disponíveis em n locais u_{α} ,

$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO}$ é o somatório dos pesos de krigagem atribuídos para cada valor $Z(u_{\alpha})$.

Assim, a estimativa em um local u , calcula-se como a combinação linear dos dados disponíveis em n locais u_{α} no entorno de u . Os pesos de krigagem são escolhidos para que, simultaneamente, o valor esperado do erro seja nulo e a variância mínima.

$$E[Z_{KO}^*(u) - Z(u)] = 0 \quad (2.23)$$

onde,

$[Z_{KO}^*(u) - Z(u)]$ é o erro da estimativa de krigagem ordinária para a variável $Z(u)$ no local u

$$\text{Var}[Z_{KO}^*(u) - Z(u)] = \sigma_{KO}^2 \quad \text{mínima} \quad (2.24)$$

onde,

$[Z_{KO}^*(u) - Z(u)]$ é o erro da estimativa de krigagem ordinária para a variável $Z(u)$ no local u ,

σ_{KO}^2 é a variância de krigagem ordinária.

A condição de não tendenciosidade (Equação 2.23) leva à condição sobre os somatórios dos pesos:

$$E[Z_{KO}^*(u) - Z(u)] = E\left[\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} \cdot Z(u_{\alpha}) - Z(u)\right] = 0$$

Como o valor esperado da variável $Z(u)$ é a média m , então,

$$E[Z_{KO}^*(u) - Z(u)] = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} \cdot m - m = 0$$

$$E[Z_{KO}^*(u) - Z(u)] = m \left[\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} - 1 \right] = 0$$

Portanto,

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} = 1 \quad (2.25)$$

Essa condição sobre os pesos, faz necessária a introdução do parâmetro de Lagrange μ (GOOVAERTS, 1997, p. 133). Os pesos de krigagem que minimizam a variância (Equação 2.26) são dados pelo seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} \cdot C(u_{\alpha} - u_{\beta}) + \mu(u) = C(u_{\alpha} - u) \\ \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO} = 1 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

onde,

$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha}^{KO}$ é o somatório dos pesos de krigagem ordinária atribuídos aos

dados da variável $Z(u_{\alpha})$ nos n locais u_{α} ,

$C(u_{\alpha}-u_{\beta})$ é a função de covariância da variável $Z(u)$ entre os locais u_{α} e u_{β} onde encontram-se as amostras

$C(u_\alpha - u)$ é a covariância da variável $Z(u)$ entre os locais u_α onde encontram-se as amostras e o local u onde se estima,

$\mu(u)$ é o parâmetro de Lagrange introduzido para levar em consideração a condição no peso da Equação 2.25.

De forma matricial:

$$\begin{vmatrix} C(u_1 - u_1) & \cdots & C(u_1 - u_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C(u_n - u_1) & \cdots & C(u_n - u_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \vdots \\ \lambda_n^{KO} \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C(u_1 - u) \\ \vdots \\ C(u_n - u) \\ 1 \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

Ou expresso usando variogramas $\gamma(h)$:

$$\begin{vmatrix} \gamma(u_1 - u_1) & \cdots & \gamma(u_1 - u_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(u_n - u_1) & \cdots & \gamma(u_n - u_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1^{KO} \\ \vdots \\ \lambda_n^{KO} \\ \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma(u_1 - u) \\ \vdots \\ \gamma(u_n - u) \\ 1 \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

A variância minimizada é chamada então de variância de krigagem e é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_{KO}^2(u) = C(0) - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^{KO} \cdot C(u_\alpha - u) - \mu(u) \quad (2.29)$$

onde,

$\sigma_{KO}^2(u)$ é a variância de krigagem no local u ,

$C(0)$ é a covariância para um vetor de separação nulo, igual à variância a priori dos dados σ^2 ,

$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^{KO}$ é o somatório dos pesos de krigagem ordinária atribuídos

aos dados da variável $Z(u_\alpha)$ nos n locais u_α ,

$C(u_\alpha - u)$ é a covariância da variável $Z(u)$ entre os locais u_α onde se encontram as amostras e o local u onde se estima,

$\mu(u)$ é o parâmetro de Lagrange introduzido para levar em consideração a condição no peso da Equação 2.25.

A variância de krigagem depende do modelo de covariância e da configuração dos dados, mas é independente dos valores desses dados. Dessa forma, transforma-se em um indicador da qualidade da geometria das amostras, não avaliando a dispersão local dos erros (DEUTSCH e JOURNAL, 1998, p. 15).

A maior importância da variância de krigagem aparece nos casos em que a incerteza deve ser avaliada para quantificar o risco na tomada de decisões. Por exemplo, no caso da Simulação Seqüencial Gaussiana (GOOVAERTS, 1997, p.380) uma função de distribuição condicional acumulada, cuja média é dada pela estimativa por krigagem e a variância é a variância de krigagem, é amostrada aleatoriamente. O espaço de incerteza determinado estará, então, estreitamente ligado à amplitude de variação permitida por esta variância.

Na krigagem, tem-se um efeito de suavização, já que a variância global diminui em relação à variância inicial dos dados (GOOVAERTS, 1997, p. 370). Isso acontece, já que o sistema de krigagem assegura que covariância entre as amostras e o ponto krigado seja correta, mas não é correta a covariância entre pontos krigados. Pela relação de Krige (ISAAKS e SRIVASTAVA, 1989, p. 479) a variância total *a priori* pode-se escrever como,

$$\sigma_B^2 = \sigma^2 - \sigma_{K0}^2 \quad (2.30)$$

onde,

σ^2 é a variância a priori dos dados,

σ_{K0}^2 é a variância de krigagem como foi definida na Equação 2.29,

σ_B^2 é a variância entre blocos.

A perda de variância global é igual à variância de krigagem e a suavização será menor, quanto menor ela seja. Portanto, apesar da variância de krigagem não avaliar realmente a dispersão local dos erros ela apresenta importância devido aos aspectos acima salientados sendo desejável que o seu valor seja o menor possível.

No sistema de krigagem, é utilizada a função de covariância apesar de ser mais comumente modelado o variograma. Previamente a krigagem, esses

modelos são validados utilizando a técnica de validação cruzada (ISAAKS e SRIVASTAVA, 1989, p. 351 – 368). Na validação cruzada, cada dado é retirado do banco de dados e estimado a partir dos remanescentes. O erro será a diferença entre o valor verdadeiro e o valor estimado. É desejável que esse erro esteja distribuído simetricamente em torno de zero e sua média seja nula com baixa variância. Também, ao construir-se um gráfico de dispersão entre os valores verdadeiros e os estimados é desejável que os pontos alinhem-se ao longo de uma reta com inclinação de 45° e com coeficiente de correlação próximo a um (1). Conjuntamente são validadas as estratégias e vizinhanças de busca, assim como o tipo de krigagem utilizada.

2.10.2 Caso de estudo

Primeiro procede-se à validação cruzada para validar os modelos dos variogramas apresentados no ponto 2.9.2. A vizinhança de busca se estabelece como uma janela móvel com forma de elipse com o eixo maior a leste-oeste, onde está a direção de maior continuidade e o eixo menor na direção norte-sul. A mesma é escolhida procurando conjuntamente restringir a influência da tendência (JOURNEL e ROSSI, 1989) e considerar a alta continuidade na leste-oeste. Os comprimentos dos eixos escolhidos são respectivamente 1000 e 600 metros. Assim, são considerados vetores de separação $|h|$ que não ultrapassam os 500 m no variograma na direção leste-oeste e os 300 m no variograma na direção norte-sul. Abaixo desses valores de h , os variogramas modelados apresentam uma boa aderência ao variograma experimental. Depois de testar diferentes estratégias de busca, os valores de validação cruzada mais apropriados são obtidos para um número mínimo de duas amostras e um máximo de 12, com um número máximo de amostras por quadrante de 3.

Os histogramas do erro são apresentados na Figura 2.19 e o gráfico de dispersão dos valores verdadeiros versus estimados nas Figura 2.20 e Figura 2.21. Também, apresentam-se mapas de localização dos erros (Figura 2.22) onde se observa que os erros de maior magnitude estão associados a locais onde as densidades amostrais são menores. Os dados que não foram incluídos (aparecem como "number trimmed") correspondem a dados que não foram determinados na validação cruzada utilizando essas estratégias e vizinhanças de busca. Em todas as datas o resultado é satisfatório e os modelos dos variogramas foram considerados validados.

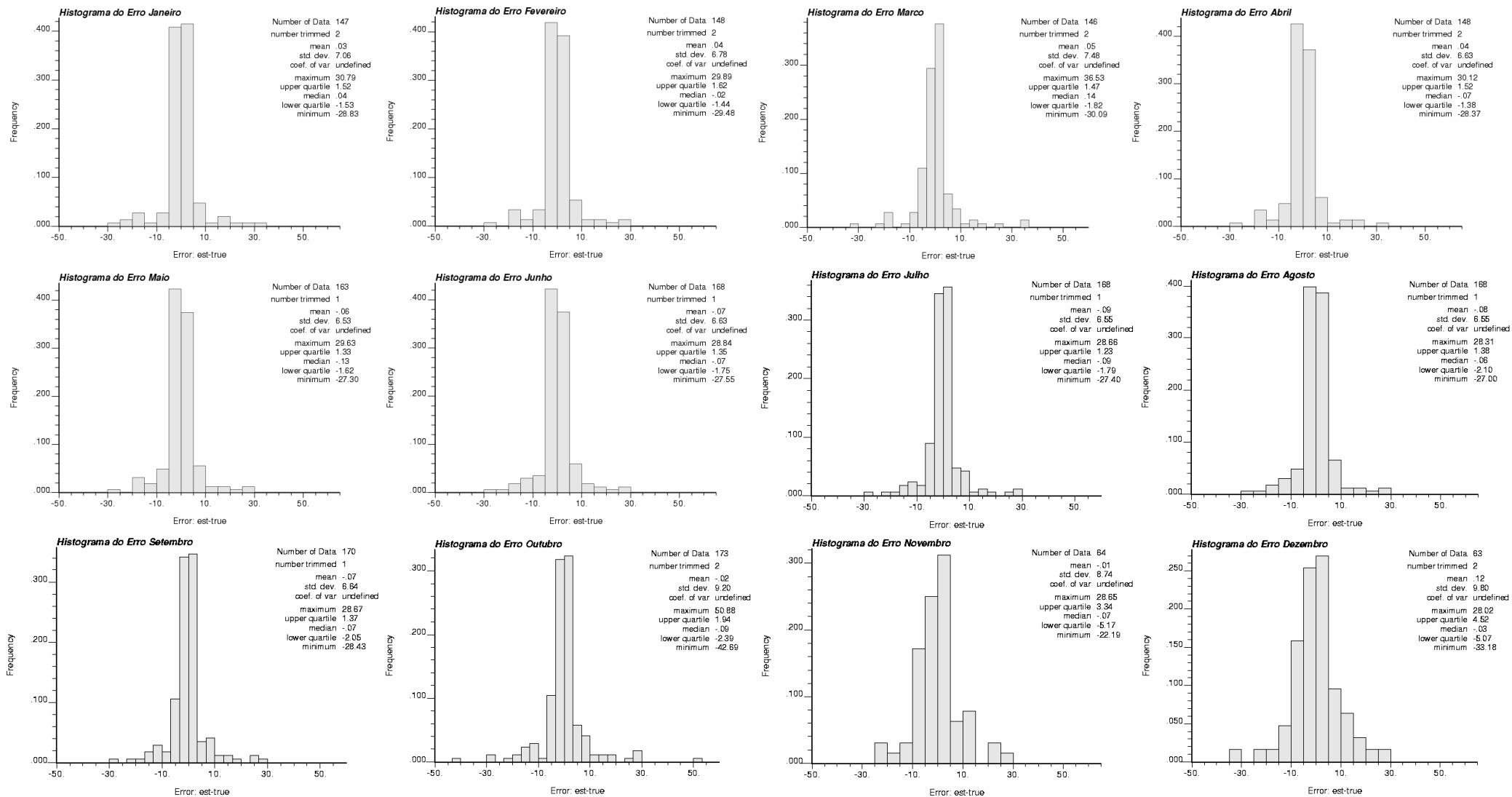
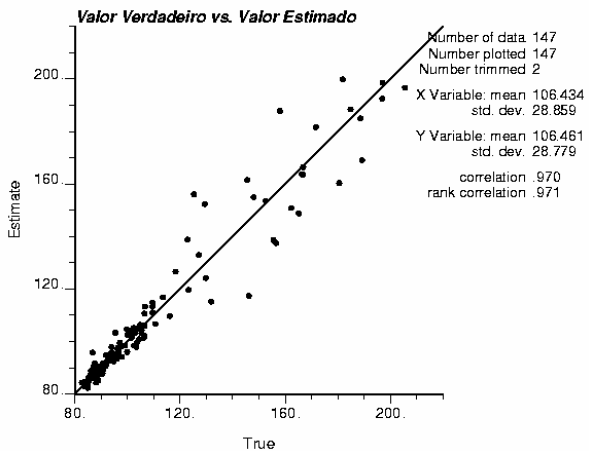
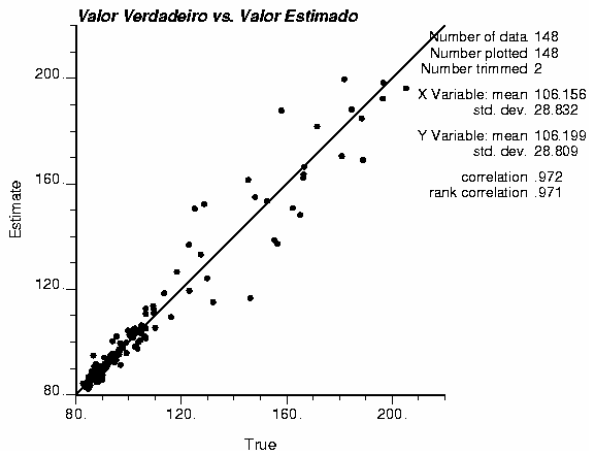


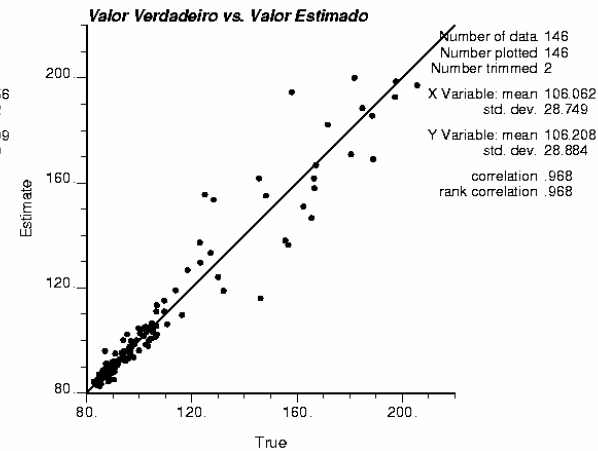
Figura 2.19 – Histograma do erro das validações cruzadas nas datas dos meses de Janeiro a Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).



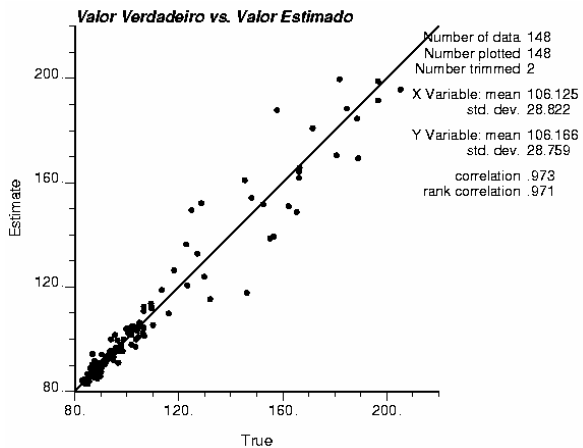
22 Janeiro 2002



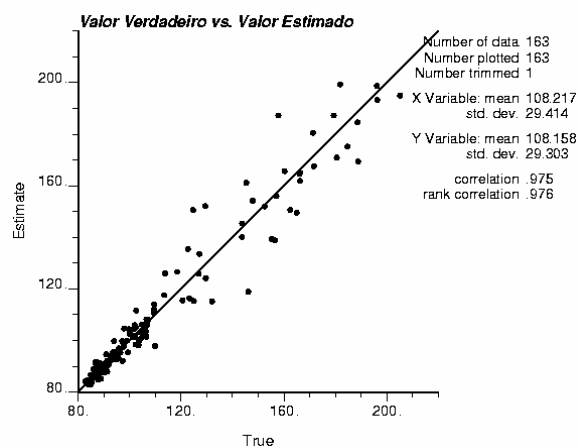
26 Fevereiro 2002



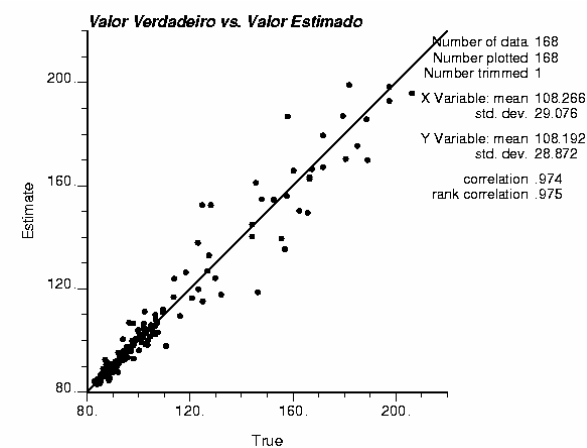
26 Março 2002



23 Abril 2002

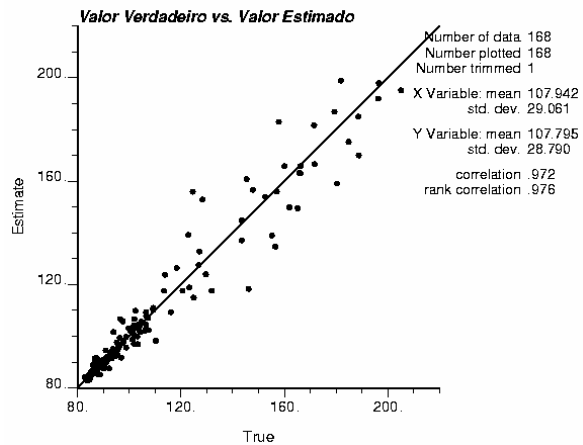


28 Maio 2002

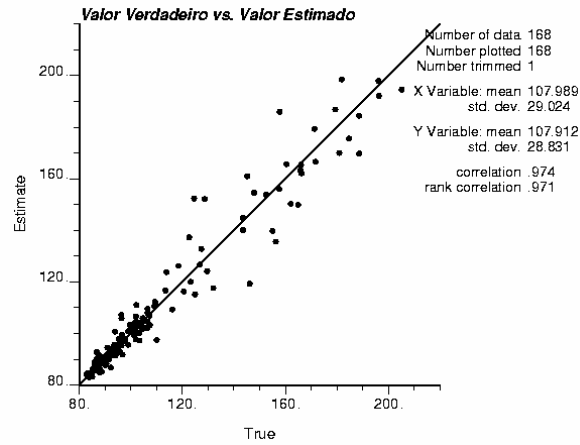


25 Junho 2002

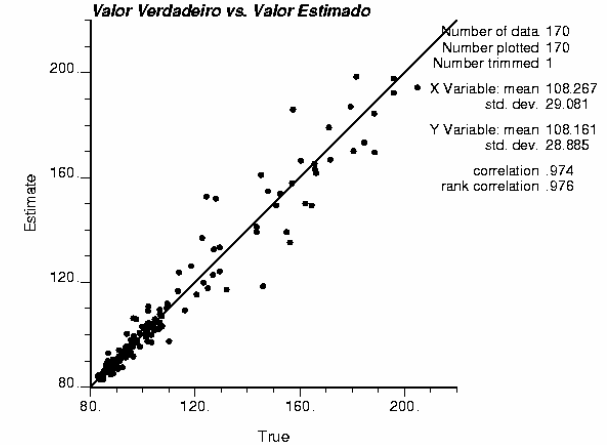
Figura 2.20 – Gráfico de dispersão para as estimativas vs. o valor verdadeiro, nas datas dos meses de Janeiro a Junho de 2002 (detalhe no Apêndice A).



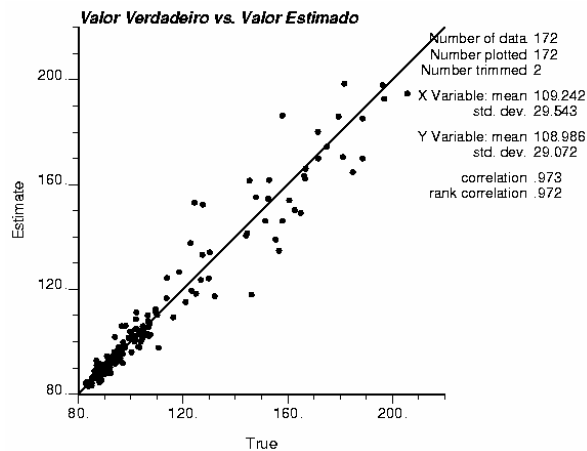
23 Julho 2002



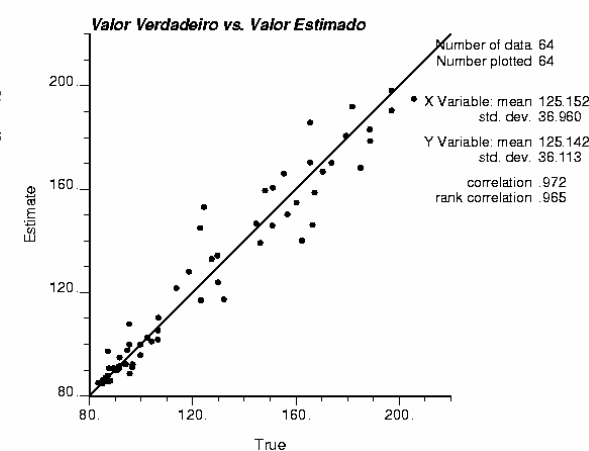
27 Agosto 2002



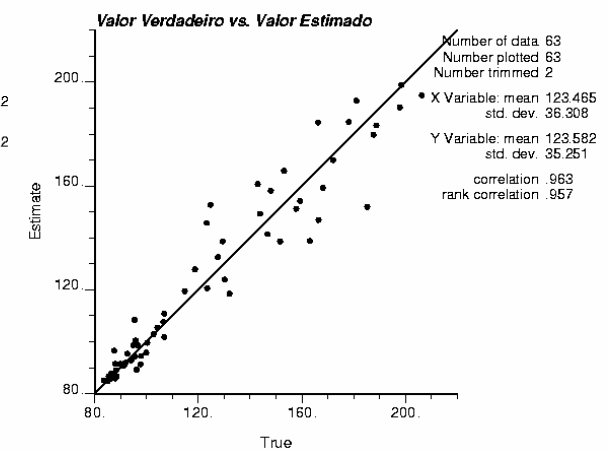
24 Setembro 2002



22 Outubro 2002



28 Novembro 2002



26 Dezembro 2002

Figura 2.21 – Gráfico de dispersão para as estimativas vs. o valor verdadeiro, nas datas dos meses de Julho a Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

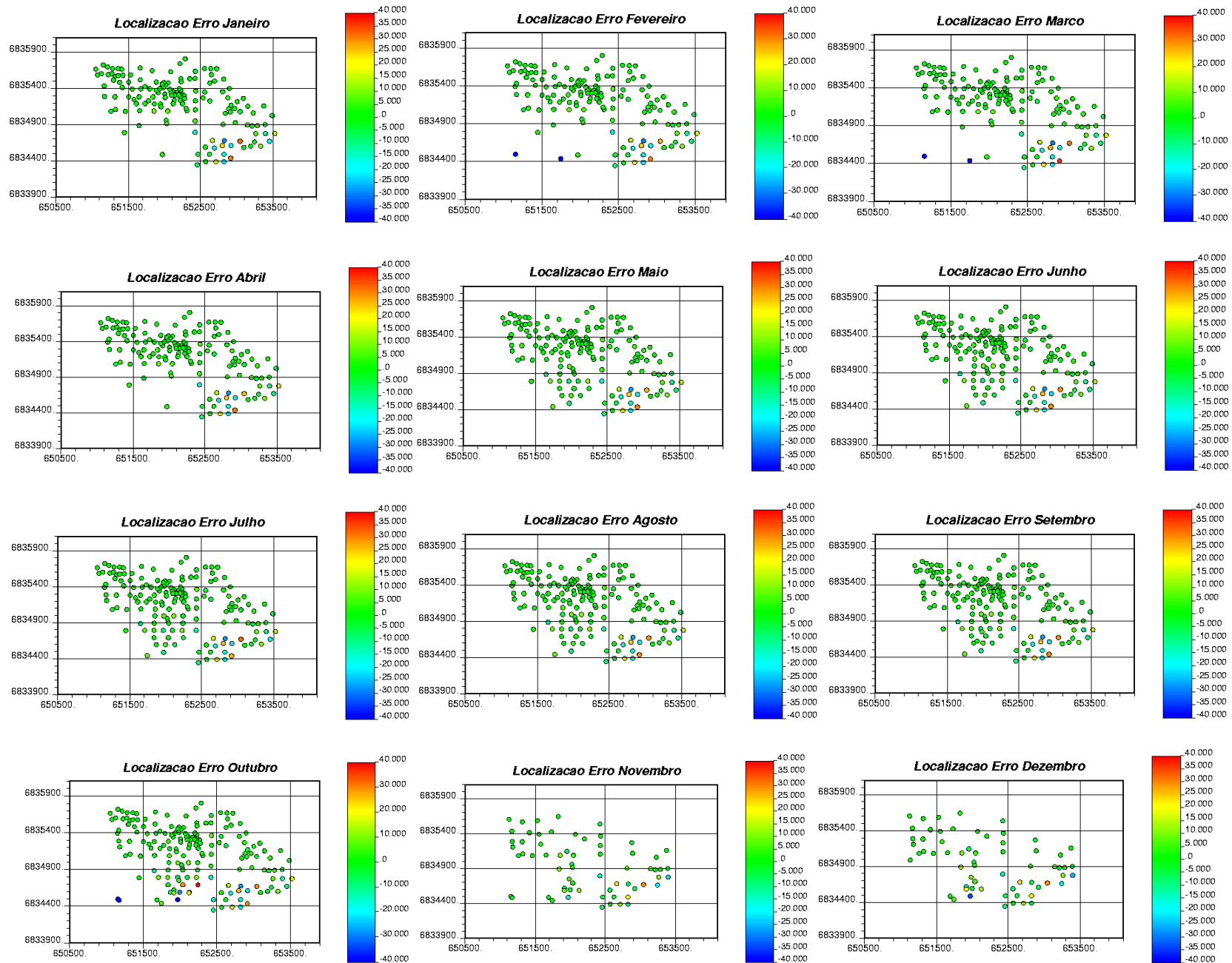


Figura 2.22 – Mapas de localização do erro na validação cruzada nas datas dos meses de Janeiro a Dezembro de 2002.

A krigagem é feita pontualmente para, posteriormente, gerar-se mapas de contorno. No Apêndice B (Figuras B.1 a B.12), são apresentados os mapas das estimativas pontuais e do desvio padrão de krigagem. Este último gerado a partir da variância de krigagem é apresentado na mesma unidade das leituras da variável de interesse, no caso o nível de água. Nas datas correspondentes dos meses de novembro e dezembro, os mapas das estimativas pontuais e do desvio padrão apresentam valores mais elevados, já que a quantidade de dados diminui marcadamente. Nas Figuras B.13 a B.24 do Apêndice B são apresentados os gráficos de contornos do nível de água. No Capítulo 5, esses resultados serão discutidos com maior profundidade.

CAPÍTULO 3

Informação Secundária, Modelos de Corregeionalização e Cokrigagem

No presente capítulo, são apresentadas diferentes formas disponíveis de incorporação de informação secundária. Entre elas a cokrigagem, que será revisada em profundidade incluindo simplificações como a cokrigagem colocada nas suas duas formas, estrita e multicolocada. Também, são apresentados vários modelos de corregeionalização como o Modelo Intrínseco, Modelo Linear de Corregeionalização, Modelos de Markov e o Modelo do Resíduo.

3.1 Incorporação de informação secundária

Muitas vezes, as medidas de um atributo de interesse são acompanhadas de medidas de um ou mais atributos relacionados. O atributo de interesse pode então ser estimado a partir de medidas dele próprio (informação primária) conjuntamente com medidas desses outros atributos (informações secundárias). A estimativa se vê melhorada, já que, geralmente, a informação secundária é mais facilmente adquirível e se encontra mais densamente amostrada que a informação primária. Disse-se que a informação secundária está *exaustivamente* amostrada quando ela é conhecida em todos os locais onde a informação de interesse (primária) foi amostrada assim como em todos os locais onde se deseja estimá-la (GOOVAERTS, 1997, p. 185). Para tratar este tipo de situações, existem vários tipos de krigagem entre as quais se incluem a Krigagem com

médias locais variáveis (KMLV) e a Krigagem com tendência externa (KTE). A Cokrigagem (CK) é a extensão natural da Krigagem no caso em que se dispõe de várias variáveis. Assim, fornece um estimador não tendencioso que minimiza a variância do erro da mesma forma que a krigagem tradicional. Além disso, ela apresenta a vantagem de que pode ser utilizada mesmo no caso no qual não se tem informação secundária exaustiva. Mas a vantagem mais importante da Cokrigagem, é que ela leva em consideração a correlação espacial entre a variável primária e as secundárias, ao inserir a função de covariância cruzada nos sistemas que determinam os pesos de cokrigagem. Esses conceitos serão abordados com maior profundidade ao longo desse capítulo.

3.2 Medidas de variabilidade conjunta

3.2.1 Coeficiente de correlação

Por simplicidade, consideremos duas variáveis uma primária $Z_1(u)$ e a outra secundária $Z_2(u)$. Inicialmente, consideremos somente os locais nos quais estão amostradas as duas, o que equivale a dizer que o vetor de separação h entre elas é zero. Nesse caso, é possível construir um gráfico de dispersão como se representa na Figura 3.1.

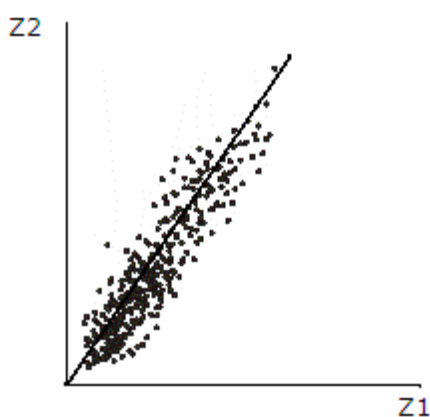


Figura 3.1 – Gráfico de dispersão entre duas variáveis Z_1 e Z_2 .

Para cada variável, a variância é definida de acordo à Equação 3.1 e analogamente, é possível definir a covariância cruzada entre elas como a variação conjunta de $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$ em torno a suas médias (Equação 3.2).

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= E[(Z_1 - m_1)^2] = \frac{1}{n_1} \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} (z_1(u_{\alpha_1}) - m_1)^2 \\ \sigma_2^2 &= E[(Z_2 - m_2)^2] = \frac{1}{n_2} \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} (z_2(u_{\alpha_2}) - m_2)^2\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde,

σ_1^2 é a variância da variável $Z_1(u)$,

σ_2^2 é a variância da variável $Z_2(u)$,

n_1 é o total de locais u_{α_1} onde se dispõe da informação $z_1(u_{\alpha_1})$,

n_2 é o total de locais u_{α_2} onde se dispõe da informação $z_2(u_{\alpha_2})$,

m_1 é a média da variável $Z_1(u)$,

m_2 é a média da variável $Z_2(u)$.

$$\sigma_{12} = C_{12}(0) = E[(Z_1 - m_1) \cdot (Z_2 - m_2)] = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n (z_1(u_\alpha) - m_1) \cdot (z_2(u_\alpha) - m_2)\tag{3.2}$$

onde,

σ_{12} é a covariância cruzada, $C_{12}(0)$ entre as variáveis $Z_1(u)$ e $Z_2(0)$ para um vetor de separação h nulo,

n é o total de locais u_α nos quais se dispõe conjuntamente das informações das variáveis $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$.

O coeficiente de correlação $\rho_{12}(0)$ é a medida da relação linear entre $Z_1(u)$ e $Z_2(0)$, e está definido como:

$$\rho_{12}(0) = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \in [-1,1]\tag{3.3}$$

O coeficiente de correlação é calculado utilizando dados das duas variáveis provenientes dos mesmos locais u_α ou seja, do subconjunto isotópico. Dessa forma, ele representa somente a correlação para um vetor de separação h nulo, e portanto o seu significado é limitado ao não levar em consideração a variação conjunta para $|h| > 0$.

3.2.2 Covariância cruzada

Quando considera-se uma variável só, a função de covariância direta, define-se, sob a hipótese de estacionariedade, pela Equação 2.2 vista anteriormente.

Considerando agora duas variáveis $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$, a variável primária $Z_1(u)$ está amostrada em n_1 locais $u_{\alpha 1}$ e a variável secundária $Z_2(u)$ que está amostrada em n_2 locais $u_{\alpha 2}$, que eventualmente podem coincidir ou não com os locais $u_{\alpha 1}$. A covariância cruzada calcula-se a partir de valores de atributos diferentes, $z_1(u_{\alpha 1})$ afastados um vetor h de valores de $z_2(u_{\alpha 2})$ segundo a seguinte equação:

$$C_{ij}(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} z_i(u_{\alpha}) \cdot z_j(u_{\alpha} + h) - m_i \cdot m_j \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j \quad (3.4)$$

onde,

$C_{ij}(h)$ é a função de covariância cruzada,

$N(h)$ é o número de pares de valores $z_i(u_{\alpha})$, $z_j(u_{\alpha}+h)$, afastados um vetor de separação h ,

m_i e m_j são as médias das variáveis $Z_i(u)$ e $Z_j(u)$ calculadas a partir dos valores experimentais $z_1(u_{\alpha 1})$ e $z_2(u_{\alpha 2})$.

É importante destacar, que os valores de covariância também são calculados a partir do subconjunto isotópico, mas para vetores de separação maiores ou iguais a zero ($|h| \geq 0$). No caso do vetor de separação nulo ($h=0$), a função de covariância cruzada será definida como já foi apresentada na Equação 3.2.

A função de correlograma cruzado é análoga a aquela vista anteriormente para o caso de uma única variável (Equação 2.2). No entanto, considera vetores de separação diferentes de zero e se expressa como:

$$\rho_{ij}(h) = \frac{C_{ij}(h)}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \in [-1, 1] \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j \quad (3.5)$$

onde,

$C_{ij}(h)$ é a função de covariância cruzada,

σ_i e σ_j são os desvios padrões das variáveis i e j respectivamente.

A função de covariância cruzada não é simétrica. Isto quer dizer que uma mudança na ordem das variáveis ou no sentido do vetor de separação h modifica o valor da função de covariância cruzada (WACKERNAGEL, 1994a, p.132). Essa característica é conhecida como efeito de retardo e se expressa por meio das relações a seguir:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{ij}(h) \neq C_{ji}(h) \\ C_{ij}(h) \neq C_{ij}(-h) \\ C_{ij}(h) = C_{ji}(-h) \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Uma consequência importante a destacar do efeito de retardo, é que a máxima correlação pode não estar associada ao vetor de separação nulo. O efeito de retardo geralmente é ignorado, e a função de covariância cruzada considerada é calculada como a média das funções covariância cruzada para vetores de separação positivos, $C_{ij}(+h)$ e para valores de vetores de separação negativos $C_{ij}(-h)$ (WACKERNAGEL, 1994a, p.133, GOOVAERTS, 1997, p. 49):

$$C_{ij}(h) = \frac{1}{2} (C_{ij}(+h) + C_{ij}(-h)) \quad (3.7)$$

Dessa forma, a assimetria da função covariância cruzada não é levada em consideração, salvo que seja muito relevante no fenômeno sob estudo, o que não é o caso no presente trabalho.

3.2.3 Variograma cruzado

O variograma direto para uma variável é calculado como o somatório das semidiferenças quadráticas dos incrementos da variável $Z_i(u)$, como se mostra na equação a seguir:

$$\gamma_i(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [z_i(u_\alpha) - z_i(u_\alpha + h)]^2 \quad (3.8)$$

onde,

$\gamma_i(h)$ é a função de variograma,

$N(h)$ é o número de pares de valores $z_i(u_\alpha)$, $z_i(u_\alpha+h)$ separados por um vetor de separação h .

Alguns autores (GOOVAERTS, 1997, p. 48, MYERS, 1992, WACKERNAGEL, 1994a, p. 135) têm introduzido o pseudo variograma cruzado, em analogia ao variograma direto, no qual, para duas variáveis $Z_i(u)$ e $Z_j(u)$ é definido como o somatório das semidiferenças quadráticas entre valores das duas variáveis afastados um vetor de separação h entre si:

$$\gamma_{ij}^p(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [z_i(u_\alpha) - z_j(u_\alpha + h)]^2 \quad (3.9)$$

onde,

$\gamma_{ij}^p(h)$ é a função pseudo variograma,

$N(h)$ é o número de pares de valores $z_i(u_\alpha)$, $z_j(u_\alpha+h)$ separados um vetor de separação h .

Essa função tem a vantagem de não ser simétrica. A desvantagem que apresenta, porém, é a consideração de incrementos cruzados estacionários, o que não é realista. Também, é inadequado considerar diferenças de valores que não tem as mesmas unidades, mesmo que sejam reescalados em uma etapa prévia. Outro aspecto negativo, é que não mostra a correlação negativa entre variáveis, já que ele é construído como a diferença quadrática de valores positivos. Portanto, a utilização do pseudo variograma cruzado é desaconselhada (WACKERNAGEL, 1994a, p. 136).

O variograma cruzado $\gamma_{ij}(h)$ é definido como a meia esperança matemática do produto dos incrementos das variáveis $Z_i(u)$, $Z_i(u+h)$ e $Z_j(u)$, $Z_j(u+h)$ separadas por h , ou seja:

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2} E[(Z_i(u+h) - Z_i(u)) \cdot (Z_j(u+h) - Z_j(u))] \quad (3.10)$$

E a partir dos valores experimentais calcula-se como:

$$\gamma_{ij}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{\alpha=1}^{N(h)} [z_i(u_\alpha) - z_i(u_\alpha + h)] \cdot [z_j(u_\alpha) - z_j(u_\alpha + h)] \quad (3.11)$$

onde,

$\gamma_{ij}(h)$ é o variograma cruzado entre as variáveis $Z_i(u)$ e $Z_j(u)$,

$N(h)$ é o número de pares de valores $z_i(u)$, $z_i(u_\alpha+h)$ e $z_j(u_\alpha)$, $z_j(u_\alpha+h)$.

Essa função é simétrica, já que, como é calculada a partir de incrementos, não se vê modificada pela ordem das variáveis consideradas, ou pela mudança no sentido no vetor de separação h .

Sob a hipótese de estacionariedade, o variograma cruzado pode expressar-se em função da covariância cruzada definida anteriormente na Equação 3.7,

$$\gamma_{ij}(h) = C_{ij}(0) - \frac{1}{2}(C_{ij}(-h) + C_{ij}(+h)) = C_{ij}(0) - C_{ij}(h) \quad (3.12)$$

onde,

$\gamma_{ij}(h)$ é o variograma cruzado entre as variáveis $Z_i(u)$ e $Z_j(u)$,

$C_{ij}(0)$ é a covariância cruzada entre $Z_i(u)$ e $Z_j(u)$ para um vetor de separação nulo,

$C_{ij}(+h)$ é a função de covariância cruzada entre $Z_i(u)$ e $Z_j(u)$ para vetores de separação h positivos ($h>0$),

$C_{ij}(-h)$ é a função de covariância cruzada entre $Z_i(u)$ e $Z_j(u)$ para vetores de separação h negativos ($h<0$)

$C_{ij}(h)$ é a função de covariância cruzada entre $Z_i(u)$ e $Z_j(u)$ média simétrica.

Na maioria dos casos, uma das variáveis está subamostrada com respeito à outra. Isso constitui um problema na hora de calcular o variograma cruzado, já que, é necessário dispor da informação das duas variáveis nos mesmos locais u_α e $u_\alpha+h$ para poder determinar os incrementos (MYERS, 1991). Portanto, a qualidade do variograma cruzado, está sujeita à quantidade de dados primários e secundários colocados.

3.2.4 Função de codispersão

O variograma cruzado é uma função simétrica e satisfaz a seguinte condição (WACKERNAGEL, 1994a, p. 133):

$$v_{ij}(h) = \frac{\gamma_{ij}(h)}{\sqrt{\gamma_{ii}(h) \cdot \gamma_{jj}(h)}} \in [-1,1] \quad (3.13)$$

A função da Equação 3.13 define o chamado coeficiente de dispersão $v_{ij}(h)$, calculado a partir do variograma cruzado $\gamma_{ij}(h)$ e dos variogramas diretos $\gamma_{ii}(h)$ e $\gamma_{jj}(h)$ das variáveis $Z_i(u)$ e $Z_j(u)$ respectivamente. Esse coeficiente pode ser interpretado como o coeficiente de correlação entre incrementos h , quando o gráfico de dispersão é gerado na sua forma simétrica (GOOVAERTS, 1997, p.51). O valor do coeficiente de dispersão está compreendido no intervalo $[-1,1]$, somente, se os variogramas direto e cruzado e determinados a partir do mesmo conjunto de dados.

3.3 Cokrigagem

A cokrigagem é a extensão natural da krigagem no caso de múltiplas variáveis fornecendo um estimador não tendencioso que minimiza a variância do erro. No caso de N_v atributos, cada função $Z_i(u)$, $i = 1, \dots, N_v$, pode ser expressa como a soma entre um resíduo $R_i(u)$ com média zero e covariância $C_{Ri}(h)$ e um termo de tendência $m_i(u)$,

$$Z_i(u) = R_i(u) + m_i(u) \quad (3.14)$$

Assim, do mesmo modo que foi apresentado anteriormente no item 2.9.1, no caso da krigagem, podem ser aplicados diferentes tipos de cokrigagem, dependendo do modelo assumido para a tendência $m_i(u)$:

- Cokrigagem Simples (CKS), considera que as tendências $m_i(u)$ são estacionárias e constantes em toda a área de estudo,

- Cokrigagem Ordinária (CKO), considera flutuações locais sobre a média limitando a hipótese de estacionariedade a uma vizinhança local,
- Cokrigagem com um modelo de tendência (CKT), considera que a média varia suavemente na área de estudo.

Geralmente, a CKO é preferida frente à CKT já que provê resultados similares aos demais, porém sendo mais fácil de implementar (GOOVAERTS, 1997, p. 152; JOURNEL e ROSSI, 1989). Assim, nesse caso as médias são consideradas estacionárias só na vizinhança do local aonde está se estimando. Como limitante, está a disponibilidade de uma quantidade suficiente de amostras nessa vizinhança. Como nesse trabalho essa limitante não está presente, será utilizada a CKO.

Consideremos duas variáveis correlacionadas $Z_1(u)$ primária e $Z_2(u)$ secundária conhecidas em n_1 locais $u_{\alpha 1}$ e em n_2 locais $u_{\alpha 2}$, respectivamente. O estimador de CKO para a variável de interesse Z_1 no local u é dado pela combinação linear dos dados disponíveis nos locais $u_{\alpha 1}$ e $u_{\alpha 2}$:

$$Z_{CKO1}^*(u) = \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \cdot Z_1(u_{\alpha 1}) + \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \cdot Z_2(u_{\alpha 2}) \quad (3.15)$$

onde,

$Z_{CKO1}^*(u)$ é a estimativa de CKO para a variável primária $Z_1(u)$ no local u ,

$Z_1(u_{\alpha 1})$ são os dados da variável $Z_1(u)$ disponíveis em n_1 locais $u_{\alpha 1}$,

$Z_2(u_{\alpha 2})$ são os dados da variável $Z_2(u)$ disponíveis em n_2 locais $u_{\alpha 2}$,

$\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO}$ é o somatório dos pesos de CKO atribuídos aos dados da

variável primária $Z_1(u_{\alpha 1})$,

$\sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO}$ é o somatório dos pesos de CKO atribuídos aos dados da

variável secundária $Z_2(u_{\alpha 2})$.

O estimador é definido como não tendencioso, portanto, o valor esperado do erro é nulo.

$$E[Z_{CKO_1}^*(u) - Z_1(u)] = 0$$

Substituindo $Z_{CKO_1}^*(u)$ pela expressão dada na Equação 3.15,

$$E[Z_{CKO_1}^*(u) - Z_1(u)] = E\left[\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \cdot Z_1(u_{\alpha 1}) + \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \cdot Z_2(u_{\alpha 2}) - Z_1(u)\right] = 0$$

E substituindo na expressão o valor esperado pelas médias m_1 e m_2 ,

$$E[Z_{CKO_1}^*(u) - Z_1(u)] = m_1 \cdot \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} + m_2 \cdot \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} - m_1 = 0$$

Portanto,

$$m_1 \cdot \left(1 - \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO}\right) - m_2 \cdot \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} = 0 \quad (3.16)$$

O que leva à condição nos pesos de CKO,

$$\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} = 1 \quad \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} = 0 \quad (3.17)$$

Essa condição é chamada de tradicional. Na prática, a condição sobre os pesos da variável secundária provoca a ocorrência de pesos negativos ou muito pequenos. Os pesos negativos podem ocasionar estimativas negativas ou muito pequenas. Também, os pesos muito pequenos tendem a diminuir a influência da variável secundária. Para solucionar esse problema, uma outra relação sobre os pesos foi desenvolvida (ISAAKS e SRIVASTAVA, 1989, p. 409 – 416, DEUTSCH e JOURNAL, 1998, p.70, GOOVAERTS, 1998b). As duas condições sobre os pesos são substituídas por uma única condição sobre o somatório deles:

$$\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} + \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} = 1 \quad (3.18)$$

Para utilizar-se esta condição, o estimador da Equação 3.15 deve ser reescalado pelas médias,

$$Z_{CKO_1}^*(u) = \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \cdot Z_1(u_{\alpha 1}) + \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \cdot [Z_2(u_{\alpha 2}) - m_2 + m_1] \quad (3.19)$$

onde m_1 e m_2 são as médias desagrupadas de Z_1 e Z_2 respectivamente. Apesar do estimador de CKO agora apresentar as médias globais, ainda recalcula as médias na vizinhança na qual é válida a hipótese de estacionariedade (GOOVAERTS, 1998b).

O estimador de CKO minimiza a variância do erro. No caso da CKO tradicional, os pesos que minimizam essa variância estão dados pelo seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \cdot C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1}) + \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \cdot C_{12}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 2}) + \mu_1(u) = C_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \cdot C_{21}(u_{\alpha 2} - u_{\alpha 1}) + \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \cdot C_{22}(u_{\alpha 2} - u_{\beta 2}) + \mu_2(u) = C_{21}(u_{\alpha 2} - u) \\ \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} = 1 \\ \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} = 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

onde,

$\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO}$ é o somatório dos pesos de cokrigagem atribuídos aos dados da

variável primária $Z_1(u_{\alpha 1})$,

$\sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO}$ é o somatório dos pesos de cokrigagem atribuídos aos dados da

variável secundária $Z_2(u_{\alpha 2})$,

$C_{11}(u_{\alpha 1}-u_{\beta 1})$ é a covariância direta da variável primária entre os locais $u_{\alpha 1}$ e $u_{\beta 1}$,

$C_{12}(u_{\alpha 1}-u_{\alpha 2})$ é a covariância cruzada entre a variável primária nos locais $u_{\alpha 1}$ e da variável secundária nos locais $u_{\alpha 2}$,

$C_{11}(u_{\alpha 1}-u)$ é a covariância direta da variável primária entre os locais $u_{\alpha 1}$ e o local u onde se estima,

$C_{21}(u_{\alpha 2}-u_{\alpha 1})$ é a covariância cruzada entre a variável primária nos locais $u_{\alpha 1}$ e da variável secundária nos locais $u_{\alpha 2}$, sendo igual ao valor de $C_{12}(u_{\alpha 1}-u_{\alpha 2})$ devido à simetria assumida para a função de covariância discutida no item 3.2.2,

$C_{22}(u_{\alpha 2}-u_{\beta 2})$ é a covariância direta da variável secundária entre os locais $u_{\alpha 2}$ e $u_{\beta 2}$,

$C_{21}(u_{\alpha 2}-u)$ é a covariância cruzada entre a variável secundária nos locais $u_{\alpha 2}$ e o local u onde se estima,

$\mu_1(u)$ e $\mu_2(u)$ são os parâmetros de Lagrange introduzidos para levar em consideração as duas condições nos pesos da Equação 3.17.

O sistema de equações (3.20) pode ser escrito em forma de matriz:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1}) & \mathbf{C}_{12}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 2}) & 1 & 0 \\ \mathbf{C}_{21}(u_{\alpha 2} - u_{\alpha 1}) & \mathbf{C}_{22}(u_{\alpha 2} - u_{\beta 2}) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{\alpha 1}^{CKO} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\alpha 2}^{CKO} \\ \boldsymbol{\mu}_1(u) \\ \boldsymbol{\mu}_2(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C}_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ \mathbf{C}_{21}(u_{\alpha 2} - u) \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

onde a letra em negrito indica que, por exemplo, $\mathbf{C}_{11}(u_{\alpha 1}-u_{\beta 1})$ é uma matriz de valores de covariância da seguinte forma,

$$\mathbf{C}_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1}) = \begin{vmatrix} C_{11}(u_1 - u_1) & \cdots & C_{11}(u_1 - u_{\alpha 1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{11}(u_{\alpha 1} - u_1) & \cdots & C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 1}) \end{vmatrix}$$

e $\boldsymbol{\lambda}_{\alpha 1}^{CKO}$ representa uma matriz de n_1 pesos para as amostras nos locais $u_{\alpha 1}$,

$$\boldsymbol{\lambda}_{\alpha 1}^{CKO} = \begin{vmatrix} \lambda_1^{CKO} & \cdots & \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \end{vmatrix}$$

Expressando as matrizes em função de variogramas $\mathbf{Y}(h)$, vem:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11}(u_{\alpha_1} - u_{\beta_1}) & \mathbf{Y}_{12}(u_{\alpha_1} - u_{\alpha_2}) & 1 & 0 \\ \mathbf{Y}_{21}(u_{\alpha_2} - u_{\alpha_1}) & \mathbf{Y}_{22}(u_{\alpha_2} - u_{\beta_2}) & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{\alpha_1}^{CKO} \\ \lambda_{\alpha_2}^{CKO} \\ \boldsymbol{\mu}_1(u) \\ \boldsymbol{\mu}_2(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11}(u_{\alpha_1} - u) \\ \mathbf{Y}_{21}(u_{\alpha_2} - u) \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.22)$$

Extendendo ao caso de N_v variáveis,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11}(u_{\alpha_1} - u_{\beta_1}) & \mathbf{Y}_{12}(u_{\alpha_1} - u_{\alpha_2}) & \cdots & \mathbf{Y}_{1N_v}(u_{\alpha_1} - u_{\alpha_{N_v}}) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{Y}_{21}(u_{\alpha_2} - u_{\alpha_1}) & \mathbf{Y}_{22}(u_{\alpha_2} - u_{\beta_2}) & \cdots & \mathbf{Y}_{2N_v}(u_{\alpha_2} - u_{\alpha_{N_v}}) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N_v 1}(u_{\alpha_{N_v}} - u_{\alpha_1}) & \mathbf{Y}_{N_v 2}(u_{\alpha_{N_v}} - u_{\alpha_2}) & \cdots & \mathbf{Y}_{N_v N_v}(u_{\alpha_{N_v}} - u_{\alpha_{N_v}}) & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{\alpha_1}^{CKO} \\ \lambda_{\alpha_2}^{CKO} \\ \vdots \\ \lambda_{\alpha_{N_v}}^{CKO} \\ \hline \boldsymbol{\mu}_1(u) \\ \boldsymbol{\mu}_2(u) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\mu}_{N_v}(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11}(u_{\alpha_1} - u) \\ \mathbf{Y}_{12}(u_{\alpha_2} - u) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{N_v}(u_{\alpha_{N_v}} - u) \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.23)$$

Quando se utiliza uma só condição no somatório dos pesos (Equação 3.18), o sistema de CKO da Equação 3.20 se transforma em

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1}^{CKO} \cdot C_{11}(u_{\alpha_1} - u_{\beta_1}) + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha_2}^{CKO} \cdot C_{12}(u_{\alpha_1} - u_{\alpha_2}) + \mu(u) = C_{11}(u_{\alpha_1} - u) \\ \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1}^{CKO} \cdot C_{21}(u_{\alpha_2} - u_{\alpha_1}) + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha_2}^{CKO} \cdot C_{22}(u_{\alpha_2} - u_{\beta_2}) + \mu(u) = C_{21}(u_{\alpha_2} - u) \\ \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1}^{CKO} + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha_2}^{CKO} = 1 \end{array} \right. \quad (3.24)$$

onde,

$\sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1}^{CKO}$ é o somatório dos pesos de cokrigagem atribuídos aos dados da

variável primária $Z_1(u_{\alpha_1})$,

$\sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO}$ é o somatório dos pesos de cokrigagem atribuídos aos dados da

variável secundária $Z_2(u_{\alpha 2})$,

$C_{11}(u_{\alpha 1}-u_{\beta 1})$ é a covariância direta da variável primária entre os locais $u_{\alpha 1}$ e $u_{\beta 1}$,

$C_{12}(u_{\alpha 1}-u_{\alpha 2})$ é a covariância cruzada entre a variável primária nos locais $u_{\alpha 1}$ e da variável secundária nos locais $u_{\alpha 2}$,

$C_{11}(u_{\alpha 1}-u)$ é a covariância direta da variável primária entre os locais $u_{\alpha 1}$ e o local u onde se estima,

$C_{21}(u_{\alpha 2}-u_{\alpha 1})$ é a covariância cruzada entre dados da variável primária nos locais $u_{\alpha 1}$ e da variável secundária nos locais $u_{\alpha 2}$, sendo igual ao valor de $C_{12}(u_{\alpha 1}-u_{\alpha 2})$ devido à simetria assumida para a função de covariância discutida no item 3.2.2,

$C_{22}(u_{\alpha 2}-u_{\beta 2})$ é a covariância direta da variável secundária entre os locais $u_{\alpha 2}$ e $u_{\beta 2}$,

$C_{21}(u_{\alpha 2}-u)$ é a covariância cruzada entre a variável secundária nos locais $u_{\alpha 2}$ e o local u onde se estima,

$\mu(u)$ é o parâmetro de Lagrange introduzido para levar em consideração a condição nos pesos da Equação 3.18.

Que em forma matricial pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1}) & \mathbf{C}_{12}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 2}) & 1 \\ \mathbf{C}_{21}(u_{\alpha 2} - u_{\alpha 1}) & \mathbf{C}_{22}(u_{\alpha 2} - u_{\beta 2}) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \\ \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \\ \mu(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C}_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ \mathbf{C}_{21}(u_{\alpha 2} - u) \\ 1 \end{vmatrix} \quad (3.25)$$

onde as matrizes estão expressas pelas letras em negrito.

E utilizando matrizes com função de variogramas $\mathbf{Y}(h)$, teremos:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1}) & \mathbf{Y}_{12}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 2}) & 1 \\ \mathbf{Y}_{21}(u_{\alpha 2} - u_{\alpha 1}) & \mathbf{Y}_{22}(u_{\alpha 2} - u_{\beta 2}) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \\ \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \\ \mu(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ \mathbf{Y}_{21}(u_{\alpha 2} - u) \\ 1 \end{vmatrix} \quad (3.26)$$

Extendendo para N_v variáveis a expressão é a seguinte:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1}) & \mathbf{Y}_{12}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha 2}) & \cdots & \mathbf{Y}_{1Nv}(u_{\alpha 1} - u_{\alpha Nv}) & 1 \\ \mathbf{Y}_{21}(u_{\alpha 2} - u_{\alpha 1}) & \mathbf{Y}_{22}(u_{\alpha 2} - u_{\beta 2}) & \cdots & \mathbf{Y}_{2Nv}(u_{\alpha 2} - u_{\alpha Nv}) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{Nv1}(u_{\alpha Nv} - u_{\alpha 1}) & \mathbf{Y}_{Nv2}(u_{\alpha Nv} - u_{\alpha 2}) & \cdots & \mathbf{Y}_{NvNv}(u_{\alpha Nv} - u_{\alpha Nv}) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \\ \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \\ \vdots \\ \lambda_{\alpha Nv}^{CKO} \\ \boldsymbol{\mu}(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{Y}_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ \mathbf{Y}_{12}(u_{\alpha 2} - u) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{Nv}(u_{\alpha Nv} - u) \\ 1 \end{vmatrix}$$

(3.27)

A variância minimizada é chamada de variância de cokrigagem e é dada por:

$$\sigma_{CKO}^2(u) = C_{11}(0) - \mu_1(u) - \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \cdot C_{11}(u_{\alpha 1} - u) - \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \cdot C_{21}(u_{\alpha 2} - u)$$

$$\sigma_{CKO}^2(u) = \sigma_{KO}^2(u) - \sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO} \cdot C_{21}(u_{\alpha 2} - u)$$

(3.28)

onde,

$\sigma_{CKO}^2(u)$ é a variância de CKO no local u ,

$\sigma_{KO}^2(u)$ é a variância de KO no local u ,

$C_{11}(0)$ é a variância a priori dos dados da variável $Z_1(u)$,

$\mu_1(u)$ é o parâmetro de Lagrange dos sistemas de cokrigagem,

$\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO}$ é o somatório dos pesos de cokrigagem atribuídos aos dados da

variável primária $Z_1(u_{\alpha 1})$,

$\sum_{\alpha 2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha 2}^{CKO}$ é o somatório dos pesos de cokrigagem atribuídos aos dados da

variável secundária $Z_2(u_{\alpha 2})$,

$C_{11}(u_{\alpha 1}-u)$ é a covariância direta da variável primária entre dados nos locais $u_{\alpha 1}$ e o local u onde se estima,

$C_{21}(u_{\alpha 2}-u)$ é a covariância cruzada entre dados da variável secundária nos locais $u_{\alpha 2}$ e o local u onde se estima

A variância de cokrigagem é menor que a variância de krigagem (item 2.10.1), já que leva em consideração a covariância cruzada entre amostras da variável secundária e o local onde a variável primária é estimada. Mas, de igual modo que a variância de krigagem, é independente da variabilidade dos dados da variável primária e da secundária, atuando assim somente como um indicador da qualidade da geometria das amostras, não avaliando a dispersão local dos dados.

Na cokrigagem, também há um efeito de suavização como na krigagem. Isto é, a variância global diminui em relação à variância inicial dos dados, já que o sistema de cokrigagem assegura que covariância entre as amostras e o ponto estimado é correta, mas não reproduz a covariância entre pontos estimados. Nesse caso, a perda de variância global (Equação 2.30) é igual à variância de cokrigagem. Como ela é menor que a variância de krigagem o efeito suavizador é menor.

O conhecimento de variáveis auxiliares melhora a estimativa da variável de interesse, destacando as relações estruturais entre elas e reproduzindo melhor a variabilidade natural dos fenômenos.

3.4 Modelo linear de correionalização MLC

A cokrigagem apresenta múltiplas vantagens entre as quais está a melhor consistência entre as estimativas de diferentes variáveis, e possibilidade de estimar uma variável a partir de outras mais facilmente determináveis. Mas, os sistemas de cokrigagem agora utilizados, incluem não somente as covariâncias da variável de interesse, mas também, as covariâncias das variáveis secundárias assim como todas as covariâncias cruzadas duas a duas entre elas.

No modelo linear de correionalização (MLC), todos os modelos diretos e cruzados são expressos como combinações lineares das mesmas estruturas básicas. Para isso, cada variável $Z_i(u)$ pode ser interpretada como a soma da média da mesma m_i e de duas componentes independentes (não correlacionadas) $Z_i^1(u)$ e $Z_i^2(u)$ com média zero como no caso do modelo linear de regionalização (MLR) (item 2.9.1):

$$Z_i(u) = Z_i^1(u) + Z_i^2(u) + m_i \quad (3.29)$$

Os variogramas das componentes são dados por:

$$\begin{aligned}\gamma_{Z_i^1}(h) &= b_{ii}^1 \cdot \gamma^1(h) \\ \gamma_{Z_i^2}(h) &= b_{ii}^2 \cdot \gamma^2(h)\end{aligned}\tag{3.30}$$

onde,

$\gamma_{Z_i^1}(h)$ e $\gamma_{Z_i^2}(h)$ são os variogramas das componentes $Z_i^1(u)$ e $Z_i^2(u)$ respectivamente,

$\gamma^1(h)$ e $\gamma^2(h)$ são variogramas de variância unitária,

b_{ii}^1 e b_{ii}^2 as contribuições para a variância total de cada componente para a variável $Z_i(u)$.

O variograma de $Z_i(u)$; portanto, se escreve como:

$$\gamma_{ii}(h) = b_{ii}^1 \gamma^1(h) + b_{ii}^2 \cdot \gamma^2(h)\tag{3.31}$$

O variograma cruzado entre duas variáveis correlacionadas quaisquer $Z_i(u)$ e $Z_j(u)$ é dado por:

$$\gamma_{ij}(h) = b_{ij}^1 \gamma^1(h) + b_{ij}^2 \cdot \gamma^2(h) \quad i \neq j\tag{3.32}$$

Como exemplo, consideram-se três variáveis $Z_1(u)$, $Z_2(u)$ e $Z_3(u)$. O MLC, utilizando duas estruturas básicas $\gamma^1(h)$ e $\gamma^2(h)$, está conformados pelos seguintes variogramas diretos e cruzados,

$$\left\{ \begin{aligned}\gamma_{11}(h) &= b_{11}^1 \cdot \gamma^1(h) + b_{11}^2 \cdot \gamma^2(h) \\ \gamma_{22}(h) &= b_{22}^1 \cdot \gamma^1(h) + b_{22}^2 \cdot \gamma^2(h) \\ \gamma_{33}(h) &= b_{33}^1 \cdot \gamma^1(h) + b_{33}^2 \cdot \gamma^2(h) \\ \gamma_{12}(h) &= b_{12}^1 \cdot \gamma^1(h) + b_{12}^2 \cdot \gamma^2(h) \\ \gamma_{23}(h) &= b_{23}^1 \cdot \gamma^1(h) + b_{23}^2 \cdot \gamma^2(h) \\ \gamma_{13}(h) &= b_{13}^1 \cdot \gamma^1(h) + b_{13}^2 \cdot \gamma^2(h)\end{aligned}\right.\tag{3.33}$$

Expressado de forma matricial tem-se:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}(h) & \gamma_{12}(h) & \gamma_{13}(h) \\ \gamma_{21}(h) & \gamma_{22}(h) & \gamma_{23}(h) \\ \gamma_{31}(h) & \gamma_{32}(h) & \gamma_{33}(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^1 & b_{12}^1 & b_{13}^1 \\ b_{21}^1 & b_{22}^1 & b_{23}^1 \\ b_{31}^1 & b_{32}^1 & b_{33}^1 \end{pmatrix} \cdot \gamma^1(h) + \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{12}^2 & b_{13}^2 \\ b_{21}^2 & b_{22}^2 & b_{23}^2 \\ b_{31}^2 & b_{32}^2 & b_{33}^2 \end{pmatrix} \cdot \gamma^2(h) \quad (3.34)$$

De forma geral, o MLC está definido pelo conjunto de variogramas diretos e cruzados calculados como combinações lineares das mesmas estruturas básicas como se expressa na seguinte equação matricial:

$$\mathbf{y}_{ij}(h) = \sum_k \mathbf{b}_{ij}^k \cdot \gamma^k(h) \quad (3.35)$$

onde,

$\mathbf{y}_{ij}(h)$ é a matriz de variogramas diretos e cruzados,

\mathbf{b}_{ij}^k é a matriz de coeficientes de contribuição para a variância global de cada estrutura k ,

$\gamma^k(h)$ é o variograma para a estrutura k .

Então, pode ser interpretado como a decomposição de cada variável $Z_i(u)$ de em k componentes independentes $Z_i^k(u)$ com média zero e variograma $b_{ii}^k \gamma^k(h)$. A diferença do MLC com o MLR é que no primeiro tem-se variogramas cruzados quando $i \neq j$

A condição de definição positiva deve ser observada em cada estrutura do mesmo modo que foi apresentado para o caso do MLR. Além da definição positiva das estruturas, é necessário que as matrizes dos coeficientes satisfaçam as seguintes condições (GOOVAERTS, 1997, p. 113):

1. Todos os elementos das diagonais devem ser positivos:

$$b_{ii}^k \geq 0 \quad (3.36)$$

2. Os determinantes das matrizes de coeficientes devem ser positivos:

$$|\mathbf{b}_{ij}^k| \geq 0 \quad (3.37)$$

Os coeficientes de correlação regionalizados r_{ij}^k (WACKERNAGEL, 1994a, p. 158) devem estar incluídos no intervalo $[-1,1]$:

$$r_{ij}^k = \frac{b_{ij}^k}{\sqrt{b_{ii}^k \cdot b_{jj}^k}} \in [-1,1] \quad (3.38)$$

Estes coeficientes definem escalas de correlação características. Assim, o efeito pepita definirá uma correlação em micro-escala, e estruturas de maiores alcances definem correlações nas escalas correspondentes.

O ajuste do MLC se faz de forma tal, que as mesmas estruturas satisfaçam simultaneamente a modelagem dos variogramas experimentais diretos e cruzados, cumprindo as condições de definição positiva e obtendo coeficientes de correlação regionalizados permitidos. A modelagem, portanto, não é simples, dificultando com o aumento do número de variáveis. A dificuldade no ajuste do MLC é a principal desvantagem da cokrigagem.

3.5 Modelo de correlação intrínseca

Esse modelo é um caso particular do MLC (GOOVAERTS, 1997, p. 114). Nele, para diferentes escalas, o coeficiente de correlação regionalizado (Equação 3.38) é o mesmo. Os coeficientes de codispersão da Equação 3.13 são constantes com h e a correlação é independente da escala espacial (WACKERNAGEL, 1994a, p 142). Portanto, todos os variogramas diretos e cruzados são proporcionais a um mesmo variograma estandardizado $[\gamma(h)]$ que pode ter uma ou mais estruturas básicas:

$$\gamma_{ij}(h) = \varphi_{ij} \cdot [\gamma(h)] \quad (3.39)$$

onde,

$\gamma_{ij}(h)$ é o variograma direto ($i=j$) ou cruzado ($i \neq j$),

$[\gamma(h)]$ é um variograma com uma ou mais estruturas, de variância unitária ao qual são proporcionais todos os variogramas diretos e cruzados,

ϕ_{ij} é o coeficiente de proporcionalidade para cada variograma $\gamma_{ij}(h)$.

Os requisitos de definição positiva indicados pelas relações das Equações 3.36, 3.37 e 3.38 também devem ser observados. Como esse modelo é mais restritivo que o MLC, acaba sendo menos utilizado.

3.6 Consistência das estimativas de cokrigagem

No caso isotópico, no qual todas as variáveis são amostradas nos mesmos locais, a cokrigagem apresenta a vantagem sobre a krigagem de preservar a coerência do estimador (WACKERNAGEL, 1994a, p.148, WACKERNAGEL, 1994b, GOOVAERTS, 1997, p. 215). Consideremos a variável $S(u)$ como a soma de N_v variáveis $Z_i(u)$. Pode-se dizer que a estimativa de cokrigagem da soma $S(u)$, utilizando como variável auxiliar qualquer uma das variáveis $Z_i(u)$ é igual à soma das estimativas de cokrigagem das variáveis $Z_i(u)$ cada uma cokrigada frente as (N_v-1) variáveis restantes.

$$S_{CK}^*(u) = \sum_{i=1}^{N_v} Z_{iCK}^*(u) \quad (3.40)$$

onde,

$S_{CK}^*(u)$ é a estimativa da soma das N_v variáveis $Z_i(u)$,

$Z_{iCK}^*(u)$ é a estimativa de cokrigagem da variável $Z_i(u)$ utilizando as restantes N_v-1 variáveis como informação secundária.

Essa propriedade, também, se cumpre para a cokrigagem de diferenças entre variáveis.

3.7 Autokrigabilidade

Em virtude do esforço requerido na hora da modelagem do MLC e da determinação de um sistema com maior número de equações, é importante destacar os casos nos quais a cokrigagem fornece os mesmos resultados que a krigagem. Uma variável é autokrigável quando, no caso isotópico, as estimativas de krigagem e cokrigagem são equivalentes. Isto se dá em duas situações. A primeira é quando as variáveis não estão correlacionadas, e portanto todas as covariâncias cruzadas são nulas. A outra se dá no caso em que as covariâncias

cruzadas são proporcionais à covariância direta da variável de interesse. Por exemplo, se a variável $Z_1(u)$ é autokrigável os variogramas ou funções de covariância diretos e cruzados se expressam pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} C_{11}(h) &= \psi \cdot C_{1i}(h) \quad \forall i \\ \gamma_{11}(h) &= \varphi \cdot \gamma_{1i}(h) \quad \forall i \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde,

$C_{11}(h)$ é a função de covariância da variável autokrigável $Z_1(u)$,

$\gamma_{11}(h)$ é o variograma da variável autokrigável $Z_1(u)$,

$C_{1i}(h)$ é a função de covariância cruzada da variável autokrigável $Z_1(u)$ e a variável genérica $Z_i(u)$,

$\gamma_{1i}(h)$ é o variograma cruzado da variável autokrigável $Z_1(u)$ e a variável genérica $Z_i(u)$,

φ e ψ são coeficientes de proporcionalidade.

Este é um caso particular do modelo de correlação intrínseco no qual o sistema de cokrigagem é igual ao sistema de krigagem (GOOVAERTS, 1997, p. 217, WACKERNAGEL, 1994a, p. 149). Salienta-se, que a cokrigagem só irá melhorar as estimativas realizadas por krigagem quando as variáveis apresentarem alta correlação e quando a variável primária estiver amostrada em menor proporção que as secundárias.

3.8 Cokrigagem colocada e Modelos de Correionalização

Como foi destacado no ponto anterior, a cokrigagem apresenta vantagens sobre a krigagem quando a variável primária está subamostrada em relação as variáveis secundárias e quando apresenta alta correlação com elas. Muitas vezes, uma ou várias das variáveis secundárias estão muito mais densamente amostradas que a variável de interesse. Isso gera instabilidade nos sistemas de cokrigagem, já que, a covariância entre dados da variável secundária é maior que a covariância entre dados da variável primária e secundária. Por outra parte, os dados da variável secundária densamente amostrada próximos ao local u onde se deseja estimar a variável primária, filtram a influência de dados mais distantes (GOOVAERTS, 1997, p. 217-223). Portanto, para esses casos a cokrigagem foi simplificada, retendo só o dado secundário colocado com o local u

onde vai-se estimar o primário, chamada assim de cokrigagem colocada (XU et al., 1992). Na cokrigagem colocada, distinguem-se dois tipos (RIVOIRARD, 2001). O caso no qual a informação da variável secundária está disponível só no local u onde a variável primária será estimada chamado de cokrigagem colocada estrita (Figura 3.2).

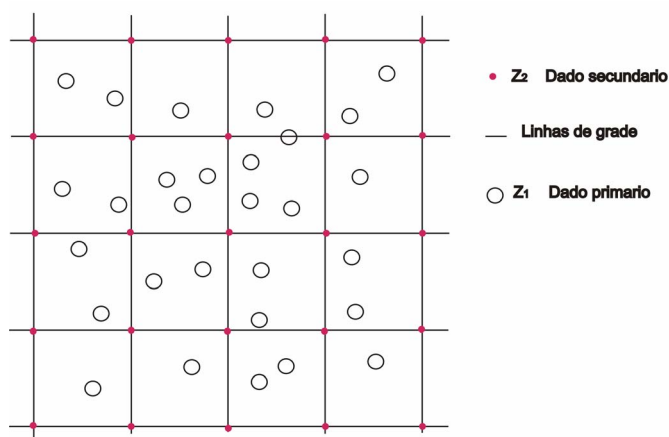


Figura 3.2 – Esquema de cokrigagem colocada estrita, na qual os dados secundários são coincidentes com os nós da malha.

No outro tipo, chamado de cokrigagem multicolocada (Figura 3.3), além das informações secundária disponíveis no local u onde a variável primária será estimada, também são utilizados os dados secundários colocados com os dados primários disponíveis nos locais $u_{\alpha 1}$.

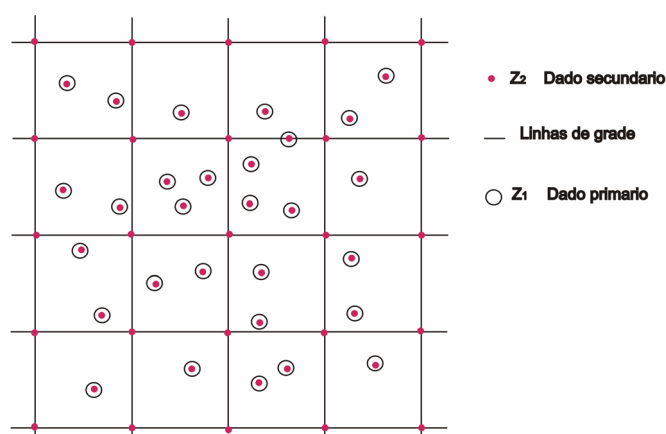


Figura 3.3 – Esquema de cokrigagem multicolocada, na qual os dados secundários são coincidentes com os nós da malha e com os dados primários.

Os modelos de Markov MM1 e MM2 foram desenvolvidos associados à cokrigagem colocada estrita. No caso da cokrigagem multicolocada, foi desenvolvido um modelo, a partir de resíduos, semelhante ao MM2.

Os dois tipos de cokrigagem colocada, assim como os modelos de correionalização acima mencionados serão revisados a seguir.

3.8.1 Cokrigagem colocada estrita

Como foi apresentada, a cokrigagem colocada estrita utiliza a informação da variável secundária só no local u onde a variável primária será estimada. Considerando duas variáveis, $Z_1(u)$ primária e $Z_2(u)$ secundária, o estimador de cokrigagem colocada ordinária CKCO para a variável primária no local u é calculado a partir dos dados primários nos locais $u_{\alpha 1}$ e do dado secundário colocado com o próprio local u .

$$Z_{CKCO1}^*(u) = \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKCO} \cdot Z_1(u_{\alpha 1}) + \lambda_2^{CKCO} \cdot Z_2(u) \quad (3.42)$$

onde,

$Z_{CKCO1}^*(u)$ é o estimador de CKCO, para a variável $Z_1(u)$ no local u ,

$\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKCO}$ é o somatório dos pesos de CKCO para a variável primária

$Z_1(u)$,

λ_2^{CKCO} é o peso de CKCO atribuído ao único dado colocado da variável

secundária $Z_2(u)$ no local u ,

$Z_1(u_{\alpha 1})$ são os dados da variável $Z_1(u)$ disponíveis em n_1 locais $u_{\alpha 1}$,

$Z_2(u)$ é o dado da variável $Z_2(u)$ disponível no local u .

Outros estimadores de cokrigagem colocada podem ser utilizados dependendo do modelo de tendência assumido. Como já foi discutido nos casos da krigagem e da cokrigagem, assume-se estacionariedade numa vizinhança local, e somente a cokrigagem colocada ordinária será revisada.

Na equação anterior, os pesos não podem ser determinados utilizando as condições tradicionais nos pesos (Equação 3.17), onde o dado colocado da variável secundária recebe um peso nulo. Portanto, utiliza-se a cokrigagem reescalada, com uma condição única no somatório dos pesos (Equação 3.18) e o

estimador de cokrigagem reescalado utilizado pode ser escrito da seguinte forma:

$$Z_{CKCO1}^*(u) = \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKCO} \cdot Z_1(u_{\alpha 1}) + \lambda_2^{CKCO} \cdot [Z_2(u) - m_2 + m_1] \quad (3.43)$$

Assim, o sistema de cokrigagem colocada ordinária que resolve os pesos $\lambda_{\alpha 1}$ e λ_2 é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKCO} \cdot C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1}) + \lambda_2^{CKCO} \cdot C_{12}(u_{\alpha 1} - u) + \mu(u) = C_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKCO} \cdot C_{21}(u - u_{\alpha 1}) + \lambda_2^{CKCO} \cdot C_{22}(0) + \mu(u) = C_{21}(0) \\ \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKCO} + \lambda_2^{CKCO} = 1 \end{array} \right. \quad (3.44)$$

onde,

$\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKCO}$ é o somatório dos pesos de cokrigagem atribuídos aos dados da

variável primária $Z_1(u_{\alpha 1})$,

λ_2^{CKCO} é o peso de cokrigagem atribuído ao dado da variável secundária

$Z_2(u)$ no local u onde se estima,

$C_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1})$ é a covariância direta da variável primária entre os locais $u_{\alpha 1}$ e $u_{\beta 1}$,

$C_{12}(u_{\alpha 1} - u)$ é a covariância cruzada entre a variável primária nos locais $u_{\alpha 1}$ e a variável secundária no local u onde se estima,

$C_{11}(u_{\alpha 1} - u)$ é a covariância direta da variável primária entre os locais $u_{\alpha 1}$ e o local u onde se estima,

$C_{21}(0)$ é a covariância cruzada entre a variável primária e a variável secundária para um vetor de separação nulo,

$C_{22}(0)$ é a variância a priori dos dados da variável secundária,

$C_{21}(u-u_{\alpha 1})$ é a covariância cruzada entre a variável secundária no local u onde se estima e a variável primária nos locais $u_{\alpha 1}$,

$\mu(u)$ é o parâmetro de Lagrange introduzido para levar em consideração a condição nos pesos da Equação 3.18.

Em forma matricial, pode ser expresso pela seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{C}_{11}(u_{\alpha 1} - u_{\beta 1}) & \mathbf{C}_{12}(u_{\alpha 1} - u) & 1 \\ \mathbf{C}_{21}(u - u_{\alpha 1}) & \mathbf{C}_{22}(0) & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_{\alpha 1}^{CKO} \\ \lambda_2^{CKO} \\ \mu(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C}_{11}(u_{\alpha 1} - u) \\ \mathbf{C}_{21}(0) \\ 1 \end{vmatrix} \quad (3.45)$$

onde as letras em negrito representam matrizes.

No sistema de cokrigagem, são necessárias as funções de covariância para a variável primária $C_{11}(h)$ e a função covariância cruzada entre a variável primária e secundária $C_{12}(h)$. A função de covariância para a variável secundária somente é necessária para o vetor de separação $|h| = 0$, caso no qual é igual à variância a priori dos dados secundários ($C_{22}(0) = \sigma_2^2$).

A variância de cokrigagem colocada estrita é dada pela seguinte equação:

$$\sigma_{CKCO}^2(u) = C_{11}(0) - \mu(u) - \sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKCO} \cdot C_{11}(u_{\alpha 1} - u) - \lambda_2^{CKCO} \cdot C_{21}(0) \quad (3.46)$$

onde,

$\sigma_{CKCO}^2(u)$ é a variância de CKCO no local u ,

$C_{11}(0)$ é a variância a priori dos dados da variável $Z_1(u)$,

$\mu(u)$ é o parâmetro de Lagrange do sistema de cokrigagem,

$\sum_{\alpha 1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha 1}^{CKO}$ é o somatório dos pesos de cokrigagem atribuídos aos dados da

variável primária $Z_1(u_{\alpha 1})$,

λ_2^{CKO} é o peso de cokrigagem atribuído ao dado da variável secundária

$Z_2(u)$ no local u onde se estima,

$C_{11}(u_{\alpha 1}-u)$ é a covariância direta da variável primária entre os locais $u_{\alpha 1}$ e o local u onde se estima,

$C_{21}(0)$ é a covariância cruzada entre a variável primária e a variável secundária para um vetor de separação nulo.

A variância ainda é menor que a variância de KO.

A cokrigagem colocada, assim definida, apresenta uma solução problema de inversão e instabilidade nos sistemas de cokrigagem com abundância de dados secundários. Também, os sistemas de cokrigagem são mais simples, já que a função de covariância da variável secundária não é utilizada para valores de vetor de separação $h \neq 0$. Uma desvantagem deste tipo de cokrigagem é que não se leva em consideração dados secundários, além do dado secundário colocado (GOOVAERTS, 1997, p. 239).

3.8.1.1 Modelo de Markov 1 MM1

O modelo de correionalização mais imediato, desenvolvido para o caso de cokrigagem colocada estrita (ALMEIDA, 1993) é o Modelo de Markov 1, MM1. No sistema de cokrigagem (Equação 3.44), somente são utilizadas as funções de covariância da variável primária e a covariância cruzada entre a variável primária e a secundária. A função de covariância da variável secundária somente é usada para o valor do vetor de separação $|h|=0$. Portanto, um modelo para as funções de covariância pode ser dado pela seguinte equação:

$$C_{12}(h) = \frac{C_{12}(0)}{C_{11}(0)} \cdot C_{11}(h) \quad (3.47)$$

onde a covariância cruzada $C_{12}(h)$ é proporcional à covariância da variável primária $C_{11}(h)$. Em termos de correlogramas pode ser escrito da seguinte forma:

$$\rho_{12}(h) = \rho_{12}(0) \cdot \rho_{11}(h) \quad (3.48)$$

onde o correlograma cruzado $\rho_{12}(h)$ é proporcional ao correlograma direto $\rho_{11}(h)$ da variável primária $Z_1(u)$ e o coeficiente de correlação entre as variáveis $\rho_{12}(h)$, apresentado no item 3.2.1 é o coeficiente de proporcionalidade.

A utilização de correlogramas ou de variáveis estandardizadas, compensa as diferenças de magnitude que possam existir entre os valores da função de covariância ou do variograma direto e cruzado.

Esse modelo é muito conveniente já que não necessita a modelagem completa do MLC. Mas é importante salientar, que não é verificada a condição de definição positiva. Outra limitação do MM1 surge da sua hipótese constitutiva (JOURNEL, 1999), na qual os dados secundários $Z_2(u)$ são condicionados pelos dados primários colocados $Z_1(u)$, filtrando a influência de outros dados primários $Z_1(u')$:

$$E[Z_2(u)|Z_1(u) = z_1, Z_1(u') = z_1'] = E[Z_2(u)|Z_1(u) = z_1] \quad \forall u, u', z_1, z_1' \quad (3.49)$$

Segundo essa hipótese constitutiva, o MM1 é um modelo razoável se $Z_1(u)$ está definido num suporte maior ou igual a $Z_2(u)$, o que geralmente não é o caso.

3.8.1.2 Modelo de Markov 2 MM2

Na maioria dos casos, a variável secundária $Z_2(u)$ está mais densamente amostrada que a variável primária $Z_1(u)$. A hipótese constitutiva do Modelo de Markov 2 (MM2) leva em consideração essa situação (JOURNEL, 1999):

$$E[Z_1(u)|Z_2(u) = z_2, Z_2(u') = z_2'] = E[Z_1(u)|Z_2(u) = z_2] \quad \forall u, u', z_2, z_2' \quad (3.50)$$

Assim, os dados secundários colocados $Z_2(u)$ filtram a influência de dados secundários mais distantes $Z_2(u')$. Essa hipótese justifica reter somente o dado secundário no local onde estima-se a variável primária.

Considerando as duas funções randômicas $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$ pode-se demonstrar (JOURNEL, 1999) que o correlograma cruzado está dado pela seguinte equação:

$$\rho_{12}(h) = \rho_{12}(0) \cdot \rho_{22}(h) \quad (3.51)$$

onde o correlograma cruzado $\rho_{12}(h)$ é proporcional ao correlograma direto $\rho_{22}(h)$ da variável secundária $Z_2(u)$ e o coeficiente de correlação entre as variáveis $\rho_{12}(h)$, apresentado no item 3.2.1, é o coeficiente de proporcionalidade.

A modelagem da covariância ou variograma cruzado a partir do modelo da variável secundária é mais apropriada por causa da maior densidade amostral.

No MM2, contrariamente ao caso do MM1, se faz necessária a modelagem de todas as covariâncias diretas e cruzadas. Dessa forma, o MM2 terá de satisfazer as condições de definição positiva do mesmo modo que no MLC (item 3.4). Portanto, o MM2 é um caso particular do MLC, no qual a covariância cruzada é proporcional à covariância da variável secundária. Assim, falta desenvolver uma equação para calcular a covariância da variável primária. Para isso, a variável primária $Z_1(u)$ é expressa em função da variável secundária e de um resíduo independente com valor esperado nulo (JOURNEL, 1999). Consideremos as variáveis $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$ estandardizadas para independizar as equações das variâncias e expressar as funções de covariância como correlogramas.

$$Z_1(u) = \rho_{12}(0) \cdot Z_2(u) + R(u) \quad (3.52)$$

onde,

$Z_1(u)$ é a variável primária estandardizada,

$Z_2(u)$ é a variável secundária estandardizada,

$R(u)$ é um resíduo de valor esperado nulo, não correlacionado com $Z_2(u)$,

$\rho_{12}(0)$ é o coeficiente de correlação como foi definido no item 3.2.1.

Então, o correlograma de $Z_1(u)$, $\rho_{11}(h)$, pode ser escrito como:

$$\rho_{11}(h) = E[Z_1(u)Z_1(u+h)] \quad (3.53)$$

$$\rho_{11}(h) = E[(\rho_{12}(0) \cdot Z_2(u) + R(u)) \cdot (\rho_{12}(0) \cdot Z_2(u+h) + R(u+h))]$$

$$\begin{aligned} \rho_{11}(h) = & \rho_{12}^2(0) \cdot E[Z_2(u)Z_2(u+h)] + E[R(u)R(u+h)] + \rho_{12}(0) \cdot E[Z_2(u) \cdot R(u)] + \\ & + \rho_{12}(0) \cdot E[Z_2(u+h) \cdot R(u)] + \rho_{12}(0) \cdot E[Z_2(u) \cdot R(u+h)] \end{aligned}$$

Como $R(u)$ e $Z_2(u)$ são independentes, a covariância entre elas é nula, e portanto:

$$\begin{aligned} E[Z_2(u) \cdot R(u)] &= 0 \\ E[Z_2(u+h) \cdot R(u)] &= 0 \\ E[Z_2(u) \cdot R(u+h)] &= 0 \end{aligned}$$

Assim, a Equação 3.53 finalmente escreve-se como:

$$\rho_{11}(h) = \rho_{12}^2(0) \cdot E[Z_2(u)Z_2(u+h)] + E[R(u)R(u+h)] \quad (3.54)$$

A covariância do resíduo $R(u)$, utilizando a definição da Equação 2.10 vista anteriormente, é:

$$E[R(u)R(u+h)] = \text{Var}[R(u)] \cdot \rho_R(h) \quad (3.55)$$

onde $\rho_R(h)$ é o correlograma do resíduo $R(u)$. A variância do resíduo é calculada a partir da Equação 3.52 e é dada por:

$$\text{Var}[R(u)] = \text{Var}[Z_1(u)] - 2 \cdot \rho_{12}(0) \cdot \text{Cov}[Z_1(u)Z_2(u)] + \rho_{12}^2(0) \cdot \text{Var}[Z_2(u)]$$

O termo da covariância cruzada entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$ é,

$$\text{Cov}[Z_1(u)Z_2(u)] = \text{Cov}[(\rho_{12}(0) \cdot Z_2(u) + R(u))Z_2(u)]$$

$$\text{Cov}[Z_1(u)Z_2(u)] = \rho_{12}(0) \cdot (\text{Cov}[Z_2(u)Z_2(u)] + \text{Cov}[Z_2(u)R(u)])$$

Como $Z_2(u)$ e $R(u)$ são independentes,

$$\text{Cov}[Z_2(u)R(u)] = 0$$

A covariância cruzada portanto é,

$$\text{Cov}[Z_1(u)Z_2(u)] = \rho_{12}(0)$$

Assim a variância do resíduo $R(u)$ é,

$$\text{Var}[R(u)] = 1 - \rho_{12}^2(0) \quad (3.56)$$

Portanto, a Equação 3.54 é reescrita como:

$$\rho_{11}(h) = \rho_{12}^2(0) \cdot \rho_{22}(h) + (1 - \rho_{12}^2(0)) \cdot \rho_R(h) \quad (3.57)$$

O correlograma da variável primária $Z_1(u)$ pode ser modelado como a combinação linear do correlograma da variável secundária $Z_2(u)$ e de um outro correlograma permitido $\rho_R(h)$, onde os coeficientes são determinados pelo coeficiente de correlação entre as duas variáveis $\rho_{12}(0)$. Esta equação surge do modelo introduzido para $Z_1(u)$ na Equação 3.52. Podem-se desenvolver outros modelos e outras relações diferentes da Equação 3.57 que provejam um modelo de correlograma permissível dada a relação da Equação 3.52.

O MM2, é definido então pelas expressões das Equações 3.51 e 3.57. Apesar do MM2 ser mais difícil de ajustar que o MM1, muitas vezes é o mais apropriado de utilizar, já que a sua hipótese constitutiva é mais adequada e a inferência do correlograma cruzado a partir dos dados secundários mais abundantes é mais apropriada. Na prática, o MM2 é preferido. O MM1 é utilizado quando o correlograma cruzado experimental é marcadamente semelhante (proporcional) ao correlograma experimental da variável primária (JOURNEL, 1999). Outra forma de avaliação é mediante gráficos ρ - ρ . Se os pontos $\{\rho_{12}(h_i), \rho_2(h_i), i = 1, \dots, N(h)\}$ estão melhor alinhados ao redor da reta a 45° que o conjunto de pontos $\{\rho_{12}(h_i), \rho_1(h_i), i = 1, \dots, N(h)\}$, então o MM2 é mais apropriado.

3.8.2 Cokrigagem multicolocada e Modelo do Resíduo

É muito comum dispor de dados da variável secundária nos locais onde a variável primária é conhecida. Na cokrigagem multicolocada (CKM), como no caso da cokrigagem colocada estrita, é utilizado um dado da variável secundária colocado no local u onde se estima a variável primária, mas também são utilizados dados secundários colocados com os dados da variável primária disponíveis (HAAS, BIVER e MOULIÈRE, 1998, RIVOIRARD, 2001). Nessa situação, disse-se que a informação secundária está exaustivamente amostrada, como foi descrito no item 3.1.

Dessa forma, um sistema de cokrigagem ordinária CKO pode ser estabelecido como foi feito anteriormente (Equação 3.20). O dado secundário colocado no local u , onde se estima a variável primária, pode filtrar os dados secundários mais distantes e uma forma de solucionar esse problema é a utilização de resíduos.

Para justificar o enfoque dos resíduos, inicialmente, consideremos duas variáveis correlacionadas colocadas $Z_1(u)$ primária e $Z_2(u)$ secundária. A melhor forma de estimar $Z_1(u)$ a partir de $Z_2(u)$ é por regressão linear:

$$Z_1^*(u) = a \cdot Z_2(u) + b \quad (3.58)$$

onde,

$Z_1^*(u)$ é o estimador da variável primária $Z_1(u)$ no local u ,

$Z_2(u)$ é o dado da variável secundária no local u onde se estima a variável primária,

a é o coeficiente angular da reta de correlação entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$,

b é a ordenada na origem dessa reta.

O erro entre o valor real $Z_1(u)$ e o valor estimado $Z_1^*(u)$ pode ser considerado como um resíduo $R(u)$ cujo valor esperado é zero (RIVOIRARD, 2001):

$$R(u) = Z_1(u) - Z_1^*(u) = Z_1(u) - a \cdot Z_2(u) - b \quad (3.59)$$

Então, o valor do termo independente b é

$$E[R(u)] = m_1 - a \cdot m_2 - b = 0 \Rightarrow b = m_1 - a \cdot m_2 \quad (3.60)$$

A variância do resíduo $R(u)$, a partir da Equação 3.59 é dada pela seguinte equação,

$$\text{Var}[R(u)] = \sigma_1^2 + a^2 \cdot \sigma_2^2 - 2 \cdot a \cdot C_{12}(0) \quad (3.61)$$

onde,

σ_1^2 é a variância da variável primária $Z_1(u)$,

σ_2^2 é a variância da variável secundária $Z_2(u)$,

a é o coeficiente angular da reta de correlação entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$,

$C_{12}(0)$ é a covariância cruzada dos dados colocados, já que a regressão é entre dados que estão em um mesmo local u .

Como a regressão linear fornece um estimador não tendencioso com variância do erro mínima, ao minimizar-se essa variância se obtém uma expressão para o coeficiente angular da reta a :

$$\frac{\partial}{\partial a} \text{Var}[R(u)] = 2 \cdot a \cdot \sigma_2^2 - 2 \cdot C_{12}(0) = 0$$

$$a = \frac{C_{12}(0)}{\sigma_2^2} = \rho_{12}(0) \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (3.62)$$

onde,

a é o coeficiente angular da reta de correlação entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$,

$C_{12}(0)$ é a covariância cruzada dos dados colocados,

σ_2^2 é a variância da variável secundária $Z_2(u)$,

$\rho_{12}(0)$ é o coeficiente de correlação como foi definido no item 3.2.1,

σ_1 é o desvio padrão da variável primária $Z_1(u)$,

σ_2 é o desvio padrão da variável secundária $Z_2(u)$.

O resíduo $R(u)$ e a variável secundária $Z_2(u)$ são independentes por definição:

$$\text{Cov}[Z_2(u), R(u)] = 0$$

$$\text{Cov}[Z_2(u), R(u)] = \text{Cov}[Z_2(u), Z_1(u) - a \cdot Z_2(u) - b] = 0$$

$$\text{Cov}[Z_2(u), R(u)] = \text{Cov}[Z_2(u), Z_1(u)] - a \cdot \text{Cov}[Z_2(u), Z_2(u)] = 0$$

Como

$$\text{Cov}[Z_2(u), Z_1(u)] = C_{12}(0)$$

$$\text{Cov}[Z_2(u), Z_2(u)] = C_{22}(0) = \sigma_2^2$$

então,

$$\text{Cov}[Z_2(u), R(u)] = C_{12}(0) - a \cdot \sigma_2^2 = 0$$

$$C_{12}(0) = a \cdot \sigma_2^2 \quad \Rightarrow \quad C_{12}(0) = a \cdot C_{22}(0) \quad \textbf{(3.63)}$$

onde ,

$C_{12}(0)$ é a covariância cruzada para os valores colocados,

$C_{22}(0)$ é a variância σ_2^2 da variável secundária $Z_2(u)$,

a é o coeficiente angular da reta de correlação entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$.

No caso estacionário, estendendo de dados colocados para dados afastados por um vetor de separação h , a Equação 3.63 pode ser escrita da seguinte forma (RIVOIRARD, 2001):

$$C_{12}(h) = a \cdot C_{22}(h) \quad \textbf{(3.64)}$$

onde,

$C_{12}(h)$ é a função de covariância cruzada entre as variáveis primária $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$,

$C_{22}(h)$ é a função de covariância para a variável secundária $Z_2(u)$,

a é o coeficiente angular da reta de correlação entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$.

Segundo a Equação 3.64, a variável $Z_2(u)$ é autokrigável. O modelo do resíduo, portanto, considera que a variável primária $Z_1(u)$ pode ser fatorizada na variável secundária correlacionada autokrigável $Z_2(u)$ e em um resíduo independente $R(u)$ com valor esperado nulo:

$$Z_1(u) = a \cdot Z_2(u) + b + R(u) \quad \textbf{(3.65)}$$

A covariância da variável primária, a partir da Equação 3.65 é:

$$C_{11}(h) = a^2 \cdot C_{22}(h) + C_R(h) \quad (3.66)$$

Dessa forma, o modelo de covariância é constituído pelas Equações 3.64 e 3.66 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C_{12}(h) &= a \cdot C_{22}(h) \\ C_{11}(h) &= a^2 \cdot C_{22}(h) + C_R(h) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ou utilizando correlogramas:

$$\begin{aligned} \rho_{12}(h) &= a \cdot \rho_{22}(h) \\ \rho_{11}(h) &= \rho_{12}^2(0) \cdot \rho_{22}(h) + (1 - \rho_{12}^2(0)) \cdot \rho_R(h) \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde,

$\rho_{11}(h)$ é o correlograma da variável primária $Z_1(u)$,

$\rho_{22}(h)$ é o correlograma da variável secundária $Z_2(u)$,

$\rho_{12}(0)$ é o correlograma cruzado colocado entre as variáveis primária $Z_1(u)$ secundária $Z_2(u)$,

$\rho_R(h)$ é o correlograma do resíduo $R(u)$ como foi definido na Equação 3.59.

Essa expressão é muito similar à expressão do Modelo de Markov 2, MM2 constituído pelas expressões das Equações 3.51 e 3.57. A diferença é que este modelo surge naturalmente como o modelo de correlogramas a ser utilizado no caso de cokrigagem multicolocada. Os resíduos $R(u)$ estão realmente definidos nos locais onde as duas variáveis $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$ estão colocadas.

Como foi apresentado anteriormente (ponto 3.6), as estimativas de cokrigagem são consistentes; portanto, o estimador na situação das variáveis $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$ multicolocadas para a variável primária $Z_1(u)$ pode ser expressado da seguinte forma:

$$Z_{CKMO_1}^*(u) = b + a \cdot Z_{CKMO_2}^*(u) + R_{CKMO}^*(u) \quad (3.69)$$

onde,

$Z_{CKMO_1}^*(u)$ é o estimador de cokrigagem multicolocada ordinária no local u da variável primária $Z_1(u)$,

$Z_{CKMO_2}^*(u)$ é o estimador de cokrigagem multicolocada ordinária no local u da variável secundária $Z_2(u)$,

$R_{CKMO}^*(u)$ é o estimador de cokrigagem multicolocada ordinária no local u do resíduo $R(u)$,

a é o coeficiente angular da reta de regressão linear entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$,

b é a ordenada na origem da reta de regressão linear entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$.

Como $Z_2(u)$ e $R(u)$ são independentes, a equação anterior pode ser reescrita utilizando as estimativas de krigagem ordinária (RIVOIRARD, 2001):

$$Z_{CKMO_1}^*(u) = b + a \cdot Z_{KO_2}^*(u) + R_{KO}^*(u) \quad (3.70)$$

onde,

$Z_{CKMO_1}^*(u)$ é o estimador de cokrigagem multicolocada ordinária no local u da variável primária $Z_1(u)$,

$Z_{KO_2}^*(u)$ é o estimador de krigagem ordinária no local u da variável secundária $Z_2(u)$,

$R_{KO}^*(u)$ é o estimador de krigagem ordinária no local u do resíduo $R(u)$,

a é o coeficiente angular da reta de regressão linear entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$,

b é a ordenada na origem da reta de regressão linear entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$.

A variável secundária $Z_2(u)$ é conhecida no local u onde se está estimando a variável primária e como a KO fornece um estimador exato que honra os dados, a equação anterior se escreve como:

$$Z_{CKMO_1}^*(u) = b + a \cdot Z_2(u) + R_{KO}^*(u) \quad (3.71)$$

onde,

$Z_{CKMO_1}^*(u)$ é o estimador de cokrigagem multicolocada ordinária no local u da variável primária $Z_1(u)$,

$Z_2(u)$ é o dado da variável secundária no local u onde se estimará a primária,

$R^*_{KO}(u)$ é o estimador de krigagem ordinária no local u do resíduo $R(u)$,
 a é o coeficiente angular da reta de regressão linear entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$,
 b é a ordenada na origem da reta de regressão linear entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$.

Assim, a cokrigagem multicolocada pode ser considerada como a krigagem do resíduo. O estimador de KO do resíduo é o seguinte:

$$R^*_{KO}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n_1} \lambda_{R\alpha} \cdot R(u_{\alpha})$$

onde,

$R^*_{KO}(u)$ é o estimador de krigagem ordinária no local u do resíduo $R(u)$,
 $R(u_{\alpha})$ é o valor do resíduo nos n_1 locais u_{α} onde estão definidos os dados primários $Z(u_{\alpha})$,

$\sum_{\alpha=1}^{n_1} \lambda_{R\alpha}$ é o somatório dos pesos de krigagem para os resíduos nos locais

u_{α} .

O variograma do resíduo a ser utilizado é (RIVOIRARD, 2001),

$$\gamma_R(h) = \gamma_1(h) - a^2 \cdot \gamma_2(h) \quad (3.72)$$

Portanto,

$$R^*_{KO}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n_1} \lambda_{R\alpha} \cdot Z_1(u_{\alpha}) - a \cdot \sum_{\alpha=1}^{n_1} \lambda_{R\alpha} \cdot Z_2(u_{\alpha}) - b \cdot \sum_{\alpha=1}^{n_1} \lambda_{R\alpha} \quad (3.73)$$

onde,

$R^*_{KO}(u)$ é o estimador de krigagem ordinária no local u do resíduo $R(u)$,
 $Z_1(u_{\alpha})$ são os dados primários disponíveis em n_1 locais u_{α} ,
 $Z_2(u_{\alpha})$ são os dados secundários disponíveis nos n_1 locais u_{α} onde se dispõe dos dados primários $Z_1(u_{\alpha})$,

$\sum_{\alpha=1}^{n_1} \lambda_{R\alpha}$ é o somatório dos pesos de krigagem para os resíduos nos locais

u_{α} ,

a é o coeficiente angular da reta de regressão linear entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$,
b é a ordenada na origem da reta de regressão linear entre $Z_1(u)$ e $Z_2(u)$.

Combinando as duas últimas equações temos o estimador de cokrigagem multicolocada:

$$Z_{CKMO_1}^*(u) = \sum_{\alpha 1=1}^{n1} \lambda_{R\alpha 1} \cdot Z_1(u_{\alpha 1}) + a \cdot \left(Z_2(u) - \sum_{\alpha 1=1}^{n1} \lambda_{R\alpha 1} \cdot Z_2(u_{\alpha 1}) \right) + b \cdot \left(1 - \sum_{\alpha 1=1}^{n1} \lambda_{R\alpha 1} \right)$$

(3.74)

Assim, a cokrigagem de $Z_1(u)$ no local u pode ser interpretada como a média ponderada dos dados $Z_1(u_{\alpha 1})$ nos locais $u_{\alpha 1}$ usando os pesos dos resíduos $\lambda_{R\alpha 1}$, corrigido pelo erro da determinação de $Z_2(u)$ no local u a partir de dados $Z_2(u_{\alpha 1})$ nos mesmos locais $u_{\alpha 1}$ e usando os mesmos pesos (RIVOIRARD, 2001).

Se os pesos $\lambda_{R\alpha 1}$ são nulos, o caso corresponde à cokrigagem colocada estrita, mas deve-se observar que o estimador passa a ser o estimador de regressão linear. Outro caso de interesse, é quando a função de covariância do resíduo é puro efeito pepita. Nesse caso, a cokrigagem também é colocada estrita com o estimador sendo o de regressão linear. Não é desejável que o estimador seja o de regressão linear, já que nesse caso não é considerada a correlação espacial (RIVOIRARD, 2001).

Na prática, pode-se utilizar o sistema de cokrigagem completo (Equação 3.20) com o modelo de correionalização da Equação 3.68. Outra opção é modelar a função de covariância do resíduo $C_R(h)$ e realizar a krigagem do resíduo, para posteriormente recompor a variável original. Esta cokrigagem multicolocada, utilizando o modelo de correionalização da Equação 3.68, fornece o mesmo resultado que a cokrigagem completa (RIVOIRARD, 2001). A expressão na variância é dada pela Equação 3.28.

No caso de dados estritamente colocados, os pesos dos resíduos são nulos já que eles não estão definidos, e o estimador nesse caso é o da regressão linear. A cokrigagem colocada estrita, utilizando o estimador da Equação 3.43 e o sistema da Equação 3.44 fornece uma solução, só que os resultados não são completamente iguais ao resultado obtido por cokrigagem completa.

No que se refere ao somatório dos pesos, em uma situação multicolocada, não é obrigatória a utilização de uma condição única, podendo-se utilizar as seguintes equações como no caso da cokrigagem completa (CKO):

$$Z_{CKMO_1}^*(u) = \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1} \cdot Z_1(u_{\alpha_1}) + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha_2} \cdot Z_2(u_{\alpha_2}) \quad (3.75)$$

onde,

$Z_{CKMO_1}^*(u)$ é o estimador de cokrigagem multicolocada ordinária no local u da variável primária $Z_1(u)$,

$Z_1(u_{\alpha_1})$ são os dados primários disponíveis em n_1 locais u_{α_1} ,

$Z_2(u_{\alpha_2})$ são os dados secundários disponíveis em n_2 locais u_{α_2} ,

$\sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1}$ é o somatório dos pesos dos dados da variável primária nos locais

u_{α_1} $Z_1(u_{\alpha_1})$,

$\sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha_2}$ é o somatório dos pesos dos dados da variável secundária nos

locais u_{α_2} $Z_2(u_{\alpha_2})$.

A condição nos pesos vista anteriormente (Equação 3.17) é,

$$\sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1} = 1 \quad \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \lambda_{\alpha_2} = 0 \quad (3.76)$$

Podemos dizer que o somatório dos dados primários deve ser igual a 1, e assim b é filtrado da Equação 3.74. Portanto,

$$\sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1} = \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{R\alpha_1} = 1 \quad (3.77)$$

e a Equação 3.74 pode ser reescrita de forma mais geral como:

$$Z_{CKMO_1}^*(u) = \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1} \cdot Z_1(u_{\alpha_1}) + a \cdot \left(Z_2(u) - \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \lambda_{\alpha_1} \cdot Z_2(u_{\alpha_1}) \right) \quad (3.78)$$

No presente trabalho, serão aplicados os diferentes tipos de cokrigagem, completa (CKO), colocada estrita (CKCO) ou multicolocada (CKMO) utilizando os modelos de correionalização correspondentes no estudo de caso. Os mesmos serão avaliados desde o ponto de vista matemático, no referente à consistência com os dados disponíveis do fenômeno sob estudo e, também, quanto à simplicidade da sua aplicação.

CAPÍTULO 4

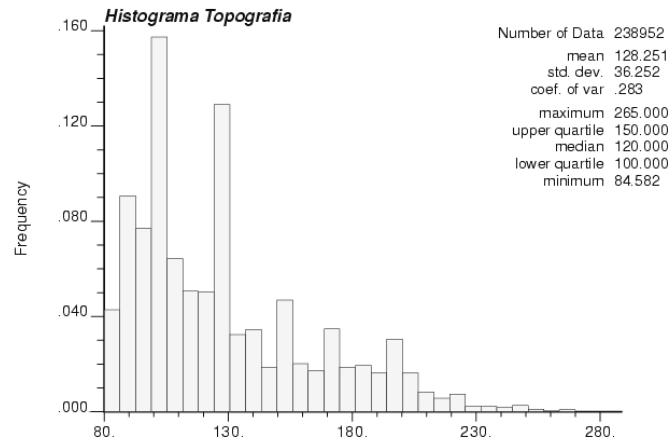
Modelagem da Corregionalização e Cokrigagem Colocada

Neste capítulo, apresentam-se os dados do relevo topográfico como informação secundária, realizando-se uma análise exploratória dos mesmos. As metodologias de estimativa mencionadas no Capítulo 3, são utilizadas no estudo de caso, gerando-se novos mapas das estimativas pontuais e de contorno para o nível de água. Os resultados obtidos serão discutidos com maior profundidade no Capítulo 5.

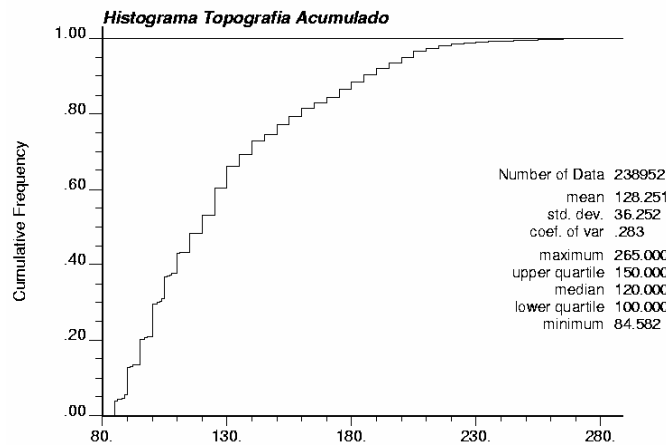
4.1 Banco de dados da topografia

Os dados da cota topográfica estão disponíveis nos locais onde existem piezômetros e, também, são extraídos de um mapa de curvas de nível. Desagregando as curvas de nível nos pontos constitutivos, gera-se um conjunto de aproximadamente 239000 dados. A cota topográfica está expressa em metros ao longo de todo o estudo de caso

O histograma dos dados apresenta-se na Figura 4.1. Observa-se uma assimetria positiva, com uma maior abundância de dados de baixo valor.



(a)



(b)

Figura 4.1 – Histograma (a) de freqüências e (b) acumulado dos dados da topografia (detalhe no Apêndice A).

O mapa de localização (Figura 4.2) não permite uma boa visualização por causa da excessiva densidade amostral.

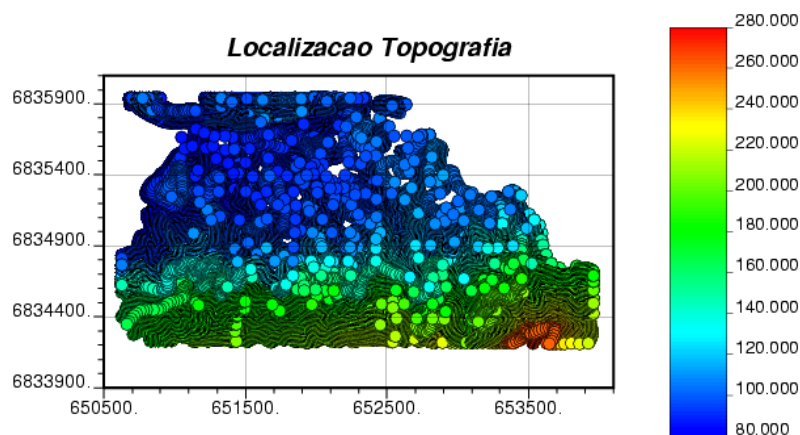


Figura 4.2 – Mapa de localização dos dados da topografia.

Os dados de nível de água e de cota topográfica lidos nos locais onde estão os piezômetros (colocados) estão fortemente correlacionados (Figura 4.3).

Observa-se, porém, que a correlação é mais forte até aproximadamente 140 m e que para valores maiores, os dados do nível de água e da cota topográfica apresentam uma correlação ligeiramente menor, ainda que a mesma seja elevada. Por tratar-se de um aquífero livre tem-se uma movimentação natural da água em direção a cotas topograficamente mais baixas (item 2.6). Portanto, nas regiões mais elevadas observa-se uma maior separação entre o nível de água e a cota topográfica que explica a correlação menos adequada.

Para avaliar o benefício da incorporação da informação secundária nas estimativas do nível de água escolheram-se os dados do 22 de janeiro, e posteriormente, os do 26 de dezembro. Nesse segundo caso há uma menor quantidade de dados primários (leituras em piezômetros).

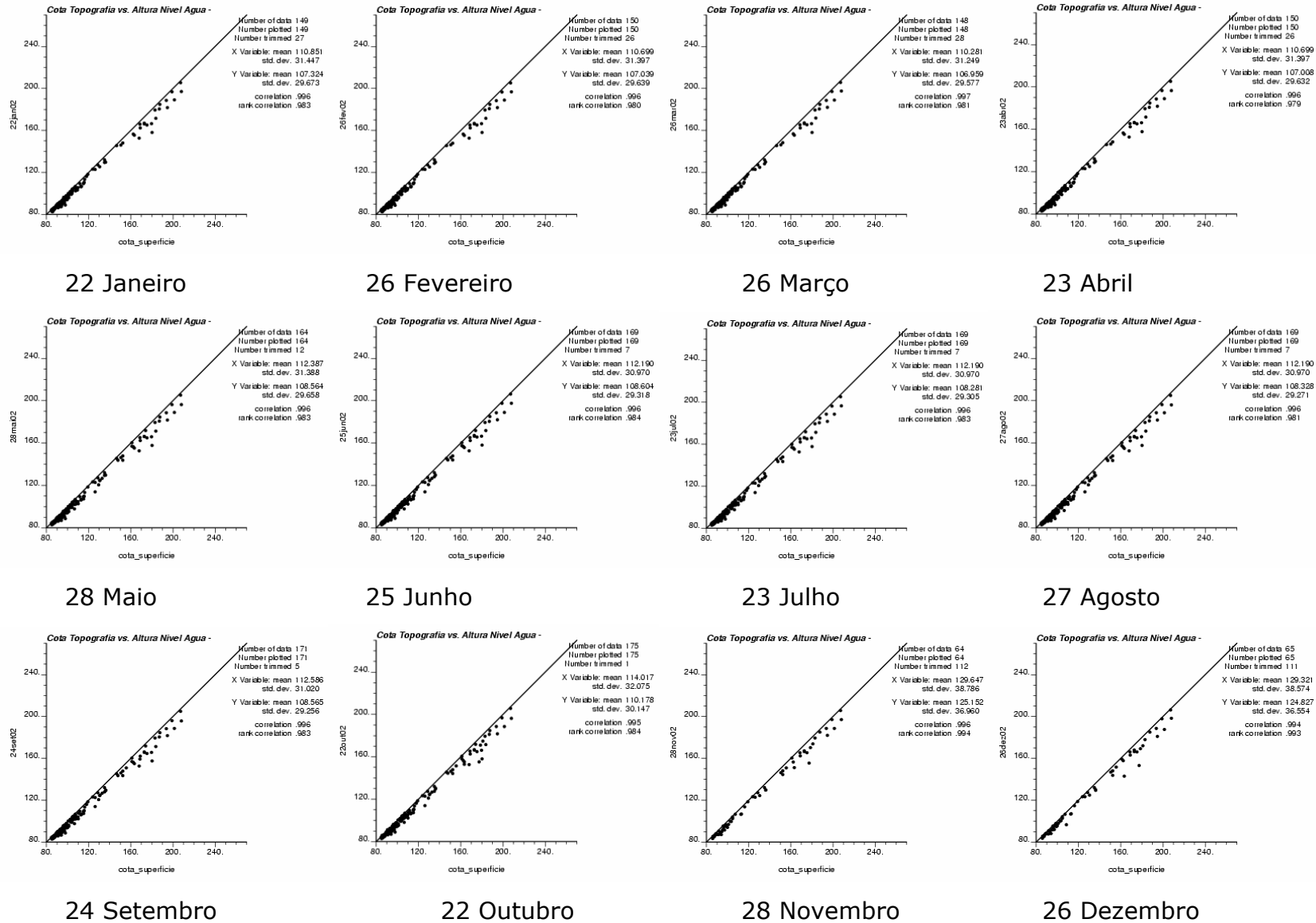


Figura 4.3 – Gráficos de dispersão dos valores de nível de água (m) e cota topográfica (m) nos piezômetros para cada data (detalhe no Apêndice A).

4.2 Incorporação de informação secundária por cokrigagem

A incorporação da informação secundária por cokrigagem pode ser realizada de diversas formas. As diferentes possibilidades consideradas são ilustradas no quadro da Figura 4.4.

		COKRIGAGEM		
		COMPLETA	COLOCADA ESTRITA	MULTICOLOCADA
MODELOS DE CORREGIONALIZAÇÃO	MLC	Implementado nos programas NEWCOKB3D e ISATIS. Problemas de inversão em presença de alta densidade amostral.	Implementado no programa NEWCOKB3D da biblioteca GSLIB. Aplicado no estudo de caso.	Implementado no programa ISATIS. Aplicado no estudo de caso como Modelo do Resíduo.
	MM1	Não implementado. O modelo foi desenvolvido para cokrigagem colocada estrita.	Implementado no programa NEWCOKB3D da biblioteca GSLIB. Aplicado no estudo de caso.	Não implementado.
	MM2	Implementado no programa NEWCOKB3D da biblioteca GSLIB. Problemas de inversão em presença de alta densidade amostral.	Implementado no programa NEWCOKB3D da biblioteca GSLIB. Aplicado no estudo de caso.	Não implementado. O MM2 tem a mesma forma que o Modelo do resíduo.
	MODELO DO RESÍDUO	Caso particular do MLC. A covariância cruzada é proporcional à covariância da variável secundária. Problemas de inversão em presença de alta densidade amostral.	Caso particular do MLC. A covariância cruzada é proporcional à covariância da variável secundária.	Implementado no programa ISATIS. Aplicado no estudo de caso. Fornece igual resultado que a krigagem do resíduo. Aplicado no estudo de caso.

Figura 4.4 – Quadro de opções de cokrigagem e modelos de correionalização disponíveis com comentários sobre possibilidades de implementação. (MLC: modelo linear de correionalização, MM1: modelo de Markov 1, MM2: modelo de Markov 2).

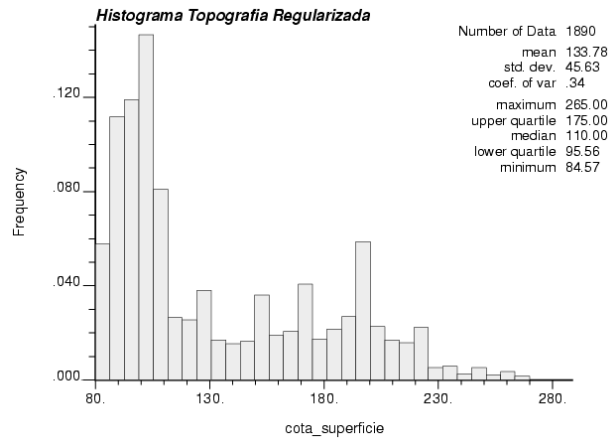
Os programas computacionais utilizados para implementar a cokrigagem são o NEWCOKB3D da biblioteca GSLIB (XIANLIN e JOURNAL, 1999, DEUTSCH e JOURNAL, 1998) e o ISATIS (BLEINES et al., 2002). O código do programa NEWCOKB3D é de domínio público, desenvolvido pela Universidade de Stanford, Califórnia, EE.UU. (<http://ekofisk.stanford.edu/SCRFweb/GSLIB/index.html>), permitindo a adaptação do mesmo aos requerimentos de cada caso em particular. No caso de estudo modificou-se o código original para que os dados secundários possam não estar definidos em todos os nós da malha de estimativa. Se esse for o caso, indica-se que a estimativa não seja realizada. O código e as suas modificações apresentam-se no Apêndice C.

A cokrigagem completa não é implementada por gerar problemas de inversão de matrizes na resolução do sistema de cokrigagem. Nos casos da cokrigagem colocada estrita, são utilizados tanto o Modelo Linear de Corregionalização MLC (ver item 3.4) como os Modelos de Markov, MM1 e MM2 (ver itens 3.8.1.1 e 3.8.1.2). Para o caso multicolocado, são utilizados o Modelo do Resíduo e a krigagem do resíduo (ver item 3.8.2). Em todos os casos são realizadas estimativas pontuais, para posterior geração de mapas de contorno.

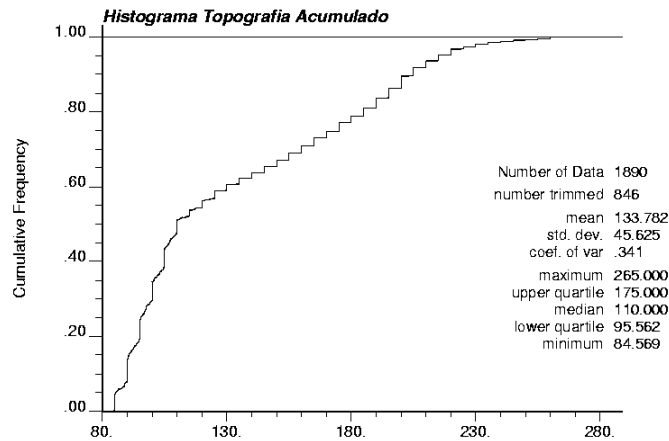
4.3 Regularização dos dados da topografia

Problemas de inversão não permitem realizar as estimativas utilizando cokrigagem completa, já que a elevada densidade amostral da topografia provoca que a covariância entre os dados seja muito alta (ver os itens 3.3 e 3.8). Assim, é necessário espaçar os dados da topografia. Os dados colocados com os locais nos quais se estima o nível de água filtram a influência de dados mais afastados (GOOVAERTS, 1997, p. 217 a 223). Portanto decide-se regularizar os dados da topografia na malha de estimativa do nível de água e aplicar cokrigagem colocada. A malha de estimativa para os dados primários de nível de água é a mesma utilizada na krigagem de 50 x 50 m, como foi apresentado no item 2.10.2. A regularização é realizada utilizando a técnica do vizinho mais próximo (DAVIS, 1986, p. 308). Dessa forma, o novo banco de dados consta de 1890 dados.

A Figura 4.5 e a Figura 4.6 apresentam o histograma e o mapa de pontos , respectivamente, dos dados regularizados.

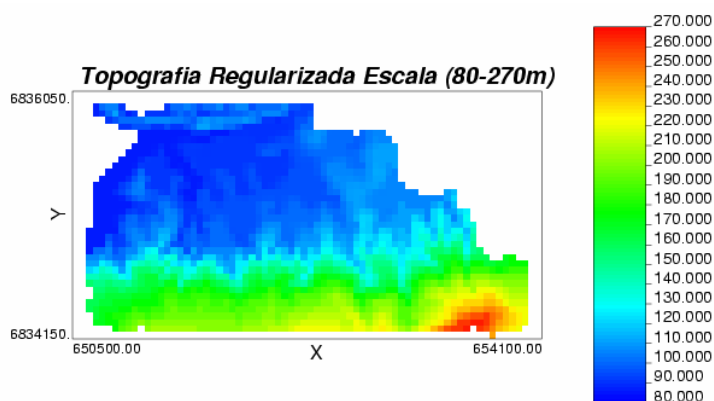


(a)

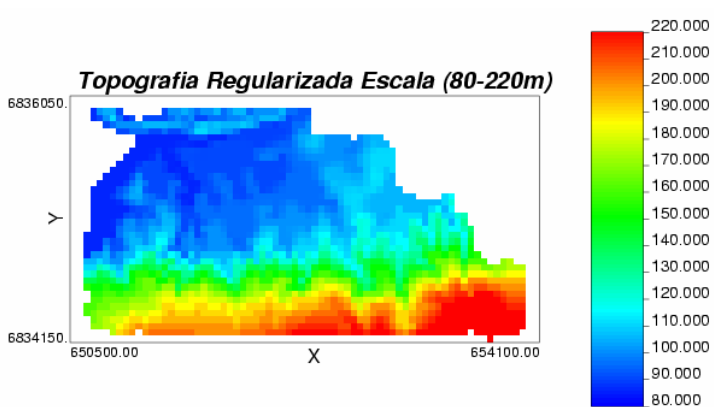


(b)

Figura 4.5 – Histograma (a) de freqüências e (b) acumulado dos dados regularizados da topografia em malha de 50 x 50 metros (detalhe no Apêndice A).



(a)



(b)

Figura 4.6 – Mapa de pontos dos dados da topografia regularizados em malha de 50 x 50 metros. (a) escala 80 a 270 metros, (b) escala 80 a 220 metros.

No histograma, verifica-se que tanto a média como o desvio padrão são maiores que no caso dos dados originais. No caso da média, o histograma da Figura 4.5 mostra uma maior proporção de dados pertencentes a classes mais altas do que o histograma da Figura 4.1 provocado pela regularização. Esse espalhamento provoca também o aumento do desvio padrão. De toda forma, o histograma ainda mantém uma assimetria positiva. A Figura 4.7 apresenta o mapa de contorno dos dados da topografia regularizados em malha de 50 x 50 metros.

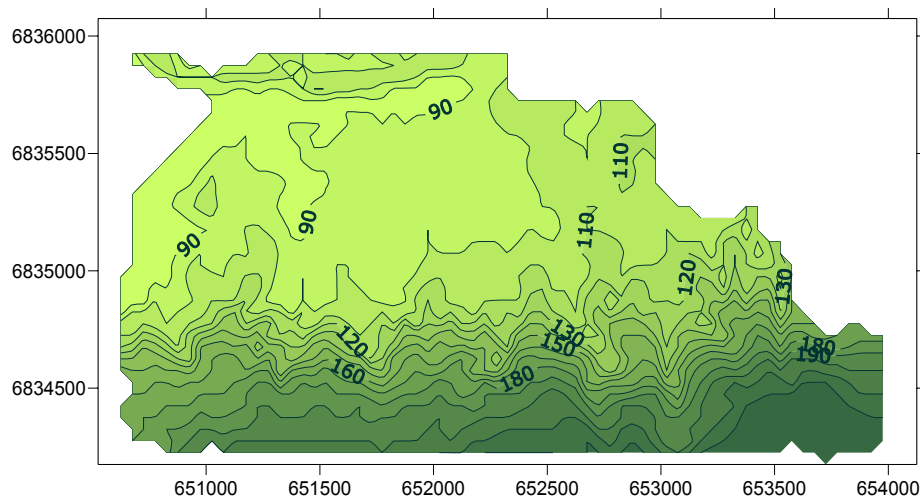


Figura 4.7 – Mapa de contorno dos dados da topografia regularizados em malha de 50 x 50 metros.

O variograma de superfície (Figura 4.8) mostra uma continuidade maior no entorno da direção leste-oeste. Para a modelagem da correlogramação é necessário assumir a mesma anisotropia para todas as variáveis envolvidas. Portanto, a direção de maior continuidade será considerada a direção de azimute 90° , igual que o anteriormente assumido para o nível de água.

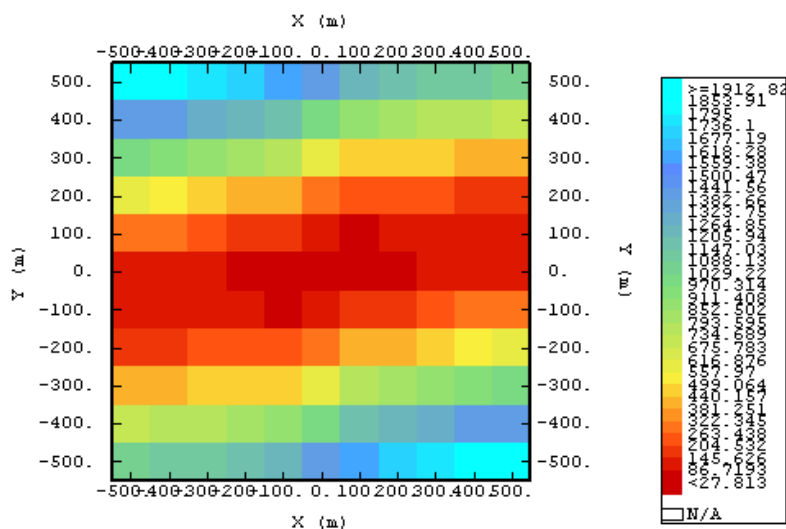


Figura 4.8 – Variograma de superfície $\gamma(h)$ dos dados de topografia regularizados.

Construindo o variograma onidirecional (Figura 4.9), pode-se apreciar que o mesmo também demonstra um baixo valor de efeito pepita (ver item 2.10.1) o que implica uma alta continuidade a curtas distâncias.

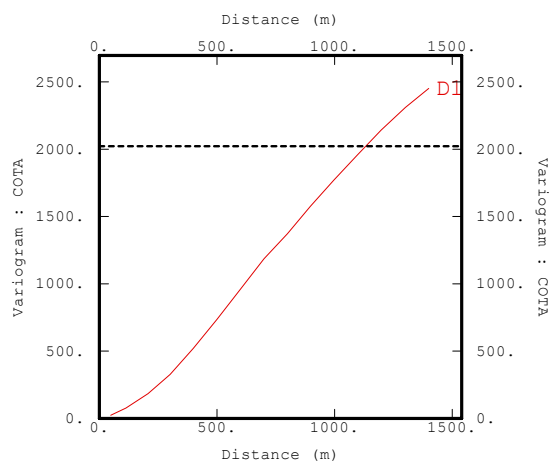
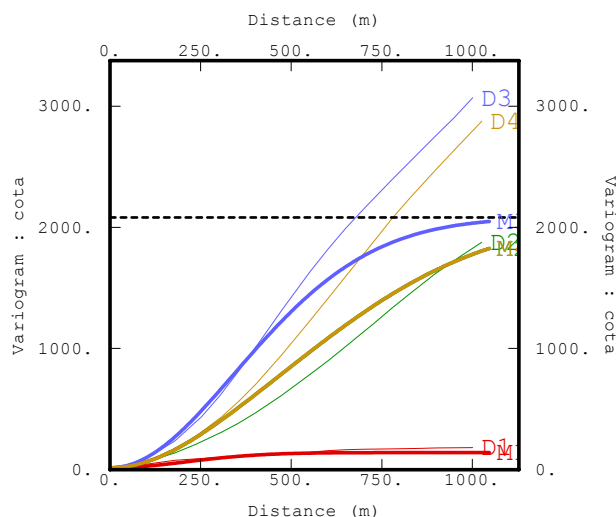


Figura 4.9 – Variograma onidirecional da topografia regularizada.

Os variogramas direcionais e o modelo do variograma se apresentam na Figura 4.10.



$$\gamma(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \quad \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \quad \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

Figura 4.10 – Variogramas direcionais e modelo da topografia regularizada (direção D1=Azimute 90°, D2=Azimute 135°, D3=Azimute 0°, D4=Azimute 45°) (detalhe no Apêndice A).

Os dados da topografia utilizados, a partir daqui, são os regularizados.

4.4 Cokrigagem colocada estrita

Para realizar a cokrigagem colocada estrita, utiliza-se o programa NEWCOKB3D da biblioteca GSLIB (XIANLIN e JOURNAL, 1999, DEUTSCH e JOURNAL, 1998). Nele, pode ser implementada a cokrigagem completa e a cokrigagem colocada estrita. Também, é possível escolher entre a utilização do Modelo Linear de Corregionalização (MLC) e os dois modelos de Markov (MM1 e MM2).

A informação secundária utilizada nos diferentes modelos é a correspondente à topografia regularizada na malha onde se estima. Essa informação secundária deve ser introduzida como um arquivo separado do arquivo que contém os dados primários. A estratégia de busca se mantém igual ao caso da krigagem para a variável primária (ver item 2.10.2) com um mínimo de duas amostras e um máximo de 12. Para a variável secundária, se dispõe somente de uma amostra colocada no nó de estimativa da variável primária. A busca é por quadrantes utilizando uma elipse de busca com eixos de 1000 e 600 m nas direções de azimute 90° e 0° respectivamente.

A validação cruzada (ISAACS e SRIVASTAVA, 1989, p. 351 – 368) não foi realizada. Na validação cruzada, cada dado é retirado do banco de dados e estimado a partir dos remanescentes. No caso da cokrigagem colocada estrita, deveria ser estimado a partir dos dados primários remanescentes, mantendo o dado secundário no local onde o primário foi retirado. Essa opção não está implementada no programa NEWCOKB3D já que considera cokrigagem colocada estrita somente, e portanto, os únicos dados secundários que podem ser utilizados são os colocados na malha na qual se realizam as estimativas. A avaliação da qualidade das estimativas e a discussão dos resultados são apresentadas no Capítulo 5.

As variâncias de cokrigagem colocada estrita obtidas utilizando o NEWCOKB3D apresentam valores negativos. A variância por definição não pode ser negativa. Alguns problemas contribuíram para essa incongruência matemática de gerar variância negativa. Um deles é a alta correlação existente entre os valores de nível de água e a topografia, de modo que a covariância cruzada no último termo da Equação 3.46 resulta muito elevada. Mas o motivo principal é a adoção de um modelo Gaussiano ao modelar os variogramas diretos

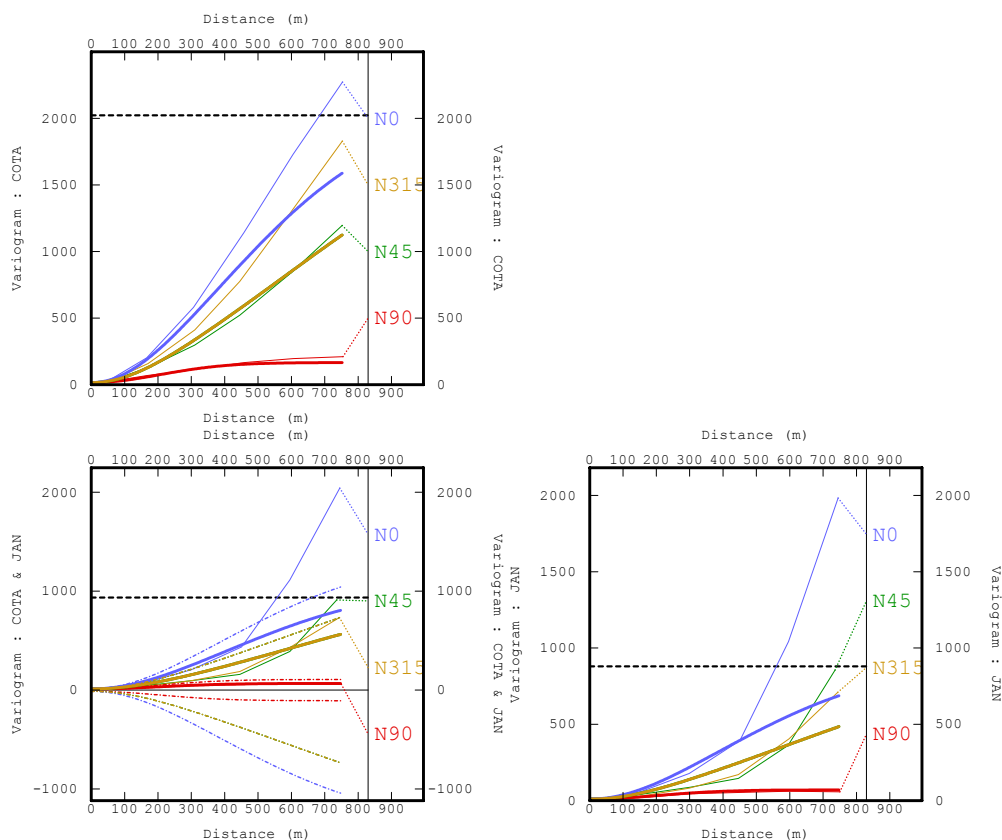
e cruzados. Como foi apresentado anteriormente no item 2.10.2, o modelo Gaussiano (Equação 2.20) apresenta problemas de instabilidade numérica pela extrema continuidade que é atribuída ao fenômeno sob estudo nos primeiros passos (WACKERNAGEL, 1994a, p. 83). O baixo valor do variograma que varia gradativamente nesses primeiros passos, provoca que a covariância seja muito elevada e assim a variância resulte negativa. Esse problema pode ser resolvido substituindo o modelo gaussiano por um modelo cúbico (GOOVAERTS, 2000). Este modelo não está disponível em todos os softwares de análise variográfica. Pelos motivos acima expostos, os mapas da variância não serão apresentados para a cokrigagem colocada estrita.

4.4.1 Cokrigagem colocada estrita utilizando o MLC

Para realizar a cokrigagem colocada utilizando o MLC, é necessária a modelagem do mesmo a partir dos variogramas construídos utilizando a informação primária para cada data (leituras piezométricas de janeiro e dezembro) e a informação secundária da topografia regularizada. As condições de definição positiva devem ser observadas (ver item 3.4). Os resultados e considerações assumidas são apresentados a seguir.

4.4.1.1 Cokrigagem colocada utilizando MLC para os dados do 22 de Janeiro

O variograma experimental e o modelo para a variável primária são apresentados na Figura 2.16. O modelo linear de correionalização ajustado aos dados do 22 de janeiro de 2002 e da topografia, apresenta-se na Figura 4.11.



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 810 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 12 + 55 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 970 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

Figura 4.11 – Modelo linear de correlogramização ajustado para o 22 de Janeiro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

As condições de definição positiva são cumpridas (item 3.4). As estruturas presentes no variograma cruzado estão presentes nos variogramas diretos. Os determinantes dos coeficientes são positivos, como se observa a seguir:

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 6 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 60 & 55 \\ 55 & 150 \end{vmatrix} = 5975 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 810 & 970 \\ 970 & 1857 \end{vmatrix} = 563270 \geq 0$$

Os coeficientes de correlação regionalizados pertencem ao intervalo $[-1,1]$:

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.98 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{55}{\sqrt{60 \cdot 150}} = 0.58 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{970}{\sqrt{810 \cdot 1857}} = 0.80 \in [-1,1]$$

Nas relações anteriores, observa-se a correlação assumida no MLC ajustado, para as diferentes escalas. No ajuste do modelo, existe um compromisso de utilizar-se as mesmas estruturas, a mesma anisotropia e ao mesmo tempo satisfazer as condições de definição positiva. Dessa forma, o resultado não é completamente satisfatório para todos os variogramas envolvidos.

O mapa das estimativas pontuais é apresentado na Figura 4.12.

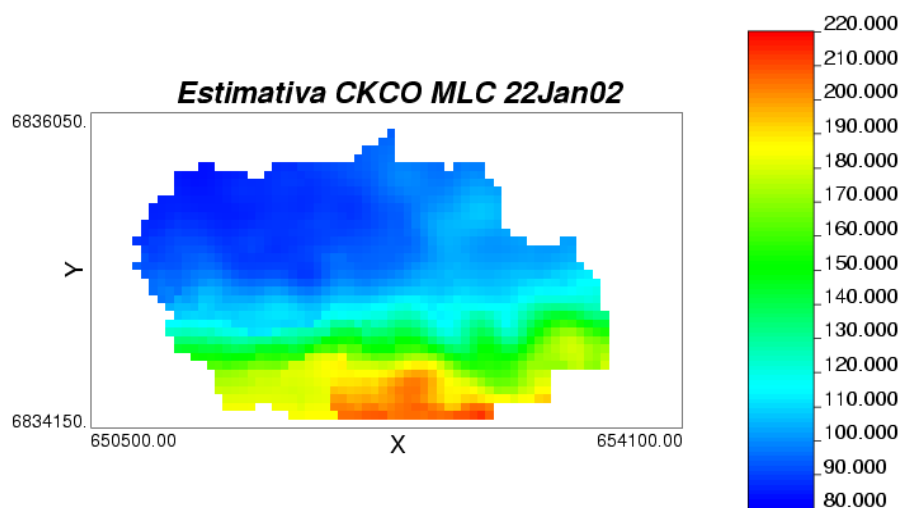


Figura 4.12 – Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo Linear de Correogionalização (MLC) para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

Quando comparado com o mapa da Figura B.1 (Apêndice B), verifica-se que não existe um contraste tão marcado de valores altos e baixos, o que é esperado de uma variável contínua como é o nível de água.

Os mapas de contorno são apresentados na Figura 4.13. Comparados com os mapas da Figura B.13 (Apêndice B), a irregularidade em $(X,Y) = (652900,6834700)$ m por exemplo, observa-se mais atenuada, acompanhando a topografia.

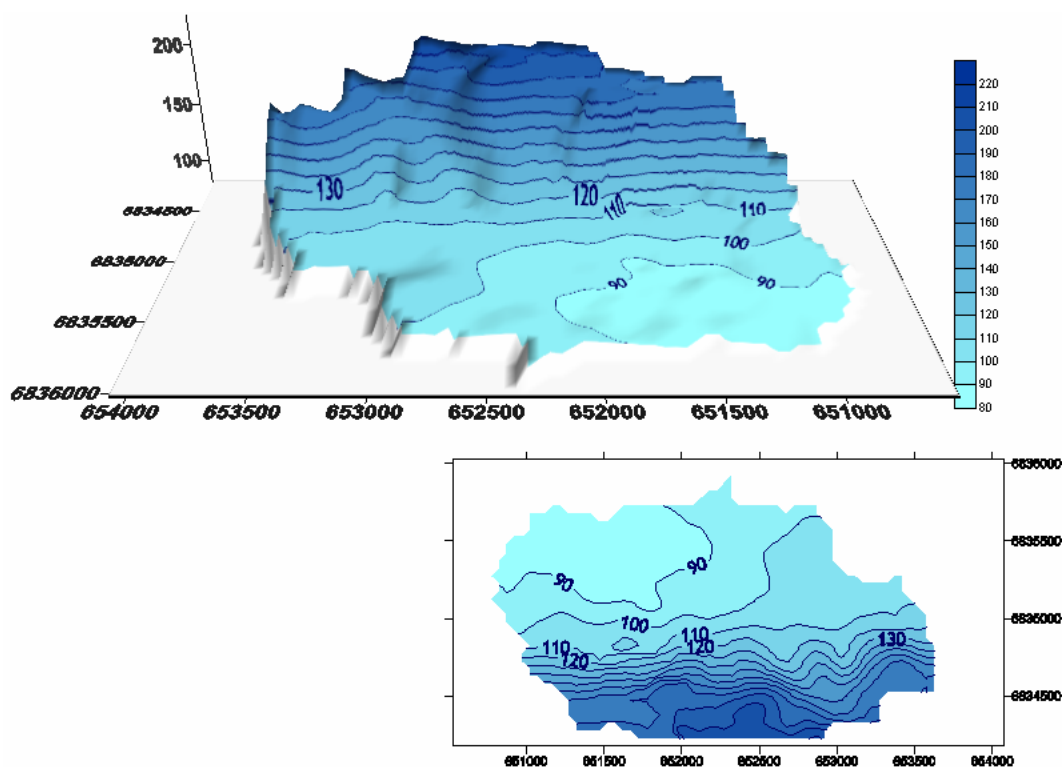
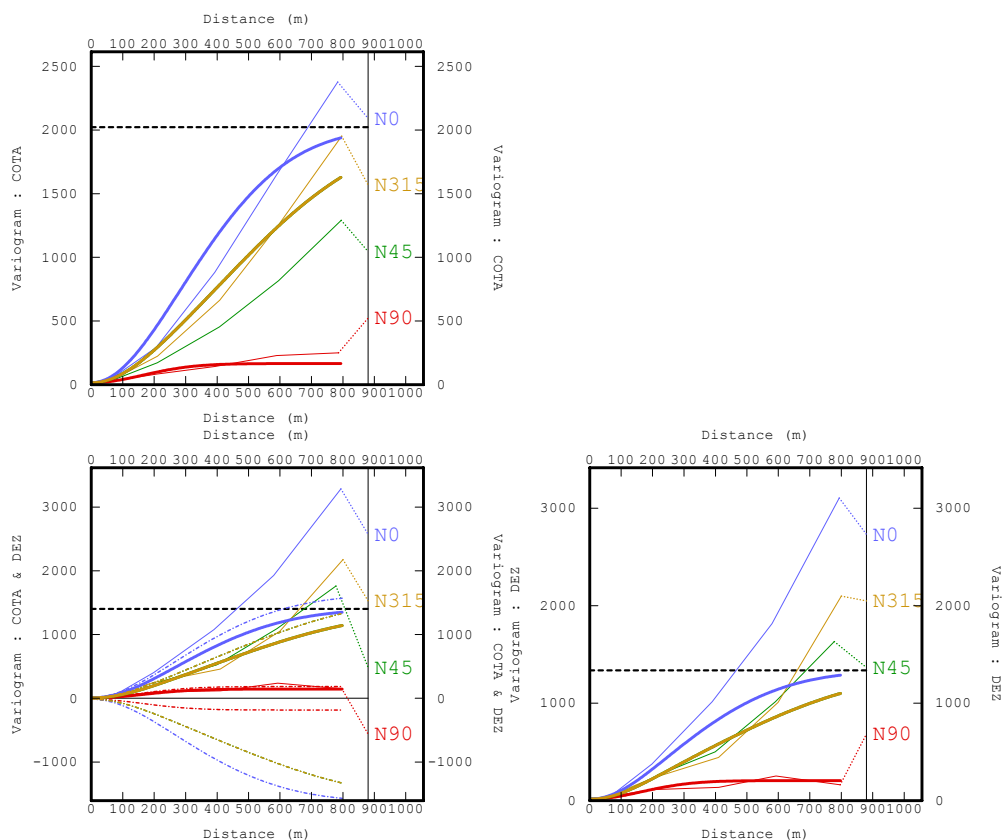


Figura 4.13 – Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo Linear de Corregionalização (MLC) para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

4.4.1.2 Cokrigagem colocada utilizando MLC para os dados do 26 de Dezembro

O variograma experimental e o modelo para a variável primária foram apresentados na Figura 2.18. O modelo linear de corregionalização ajustado aos dados do 26 de dezembro de 2002 e da topografia, apresenta-se na Figura 4.14.



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 190 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 1136 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 12 + 135 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 1260 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

Figura 4.14 - Modelo linear de correionalização ajustado para os dados do 26 de Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

Verifica-se que as condições de definição positiva são cumpridas (item 3.4). As estruturas presentes no variograma cruzado estão presentes nos variogramas diretos. Os determinantes dos coeficientes são positivos, como se observa a seguir:

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 6 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 190 & 135 \\ 135 & 150 \end{vmatrix} = 10275 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 1136 & 1260 \\ 1260 & 1857 \end{vmatrix} = 521952 \geq 0$$

E os coeficientes de correlação regionalizados pertencem ao intervalo $[-1,1]$:

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.98 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{135}{\sqrt{190 \cdot 150}} = 0.80 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{1260}{\sqrt{1136 \cdot 1857}} = 0.87 \in [-1,1]$$

As relações anteriores apresentam a correlação assumida no MLC ajustado, para as diferentes escalas. Do mesmo modo que no 22 de janeiro, o modelo linear de corregeionalização não fornece um ajuste adequado para os três variogramas envolvidos simultaneamente.

O mapa das estimativas pontuais é apresentado na Figura 4.15. Comparado com o mapa da Figura B.12 (Apêndice B), este acompanha de forma mais marcada os valores da topografia, o que é de esperar dada a menor densidade amostral disponível para o nível de água.

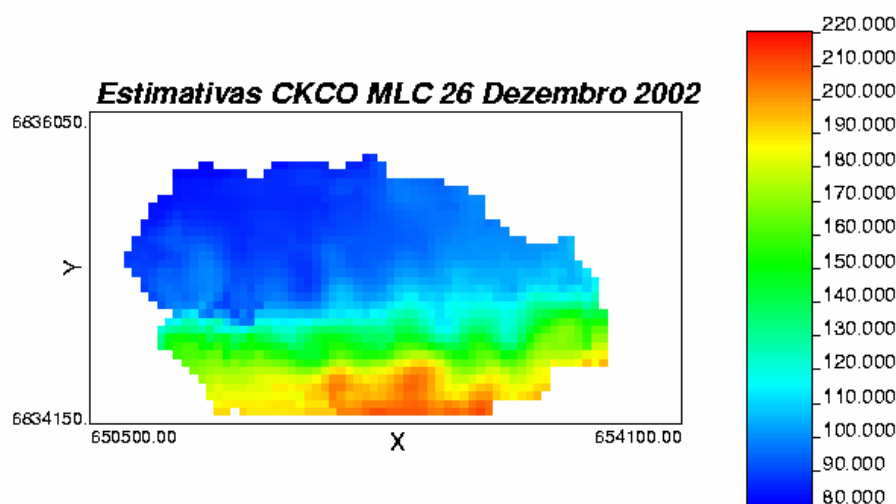


Figura 4.15 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo Linear de Corregeionalização (MLC) para os dados de 26 de Dezembro de 2002.

Os mapas de contorno são apresentados na Figura 4.16.

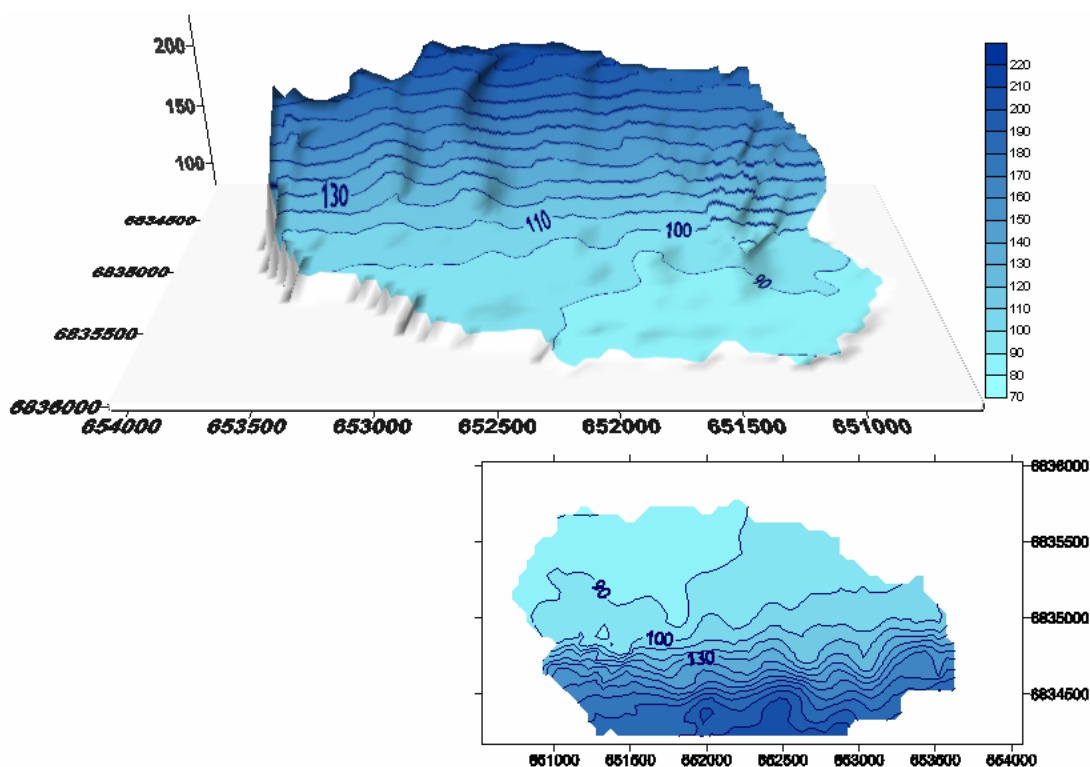


Figura 4.16 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo Linear de Corregionalização (MLC) para os dados de 26 de Dezembro de 2002.

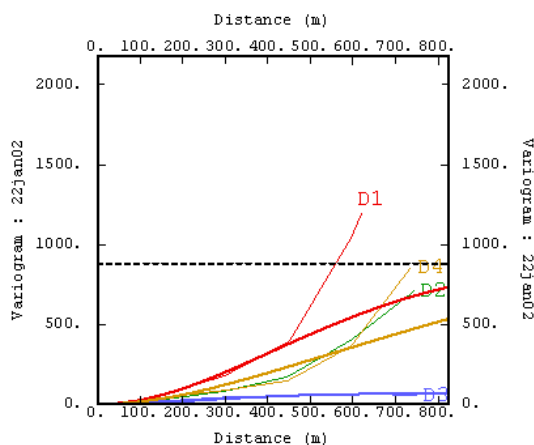
Os mapas apresentam valores mais baixos de nível de água quando comparados com os da Figura B.24 (Apêndice B), já que a cokrigagem força as estimativas a ficarem vinculadas (submetidas) aos valores da topografia.

4.4.2 Cokrigagem colocada estrita utilizando o MM1

Neste caso, são necessários somente a inferência do variograma da variável primária e do coeficiente de correlação entre as variáveis primária e secundária (XIANLIN e JOURNEL, 1999, SHMARYAN e JOURNEL, 1999, JOURNEL, 1999, ver item 3.8.1.1). Não são necessárias a verificação das condições de definição positiva, nem a inferência do variograma da variável secundária. Os resultados e considerações assumidas são apresentados a seguir.

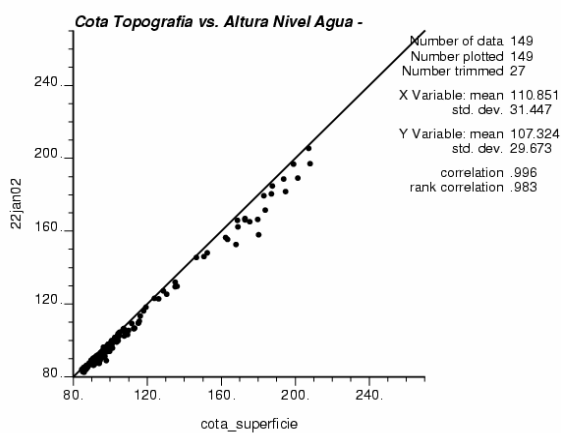
4.4.2.1 Cokrigagem colocada utilizando MM1 para os dados do 22 de Janeiro

O variograma e o modelo da variável primária foram apresentados na Figura 2.16. O coeficiente de correlação figura nos parâmetros ao lado do gráfico de dispersão correspondente ao 22 de janeiro de 2002 na Figura 4.3. Portanto na Figura 4.17 apresentam-se novamente estes elementos necessários para a modelagem do MM1.



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 500m & 470m \end{array} \right) + 810 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 100000m & 1080m \end{array} \right)$$

(a)



(b)

Figura 4.17 – Elementos necessários para a modelagem do MM1 para o 22 de Janeiro de 2002: (a) variograma experimental e modelo da variável primária (direção D1 =Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) e (b) coeficiente de correlação proveniente do gráfico de dispersão dos dados colocados (detalhe no Apêndice A).

A Equação 3.48, vista anteriormente, em termos de variogramas pode ser reescrita como (XIANLIN e JOURNAL, 1999):

$$\gamma_{12}(h) = \sqrt{\frac{C_2(0)}{C_1(0)}} \cdot \rho_{12}(0) \cdot \gamma_{11}(h) \quad (4.1)$$

onde,

$\gamma_{12}(h)$ é o variograma cruzado entre as variáveis primária e secundária,

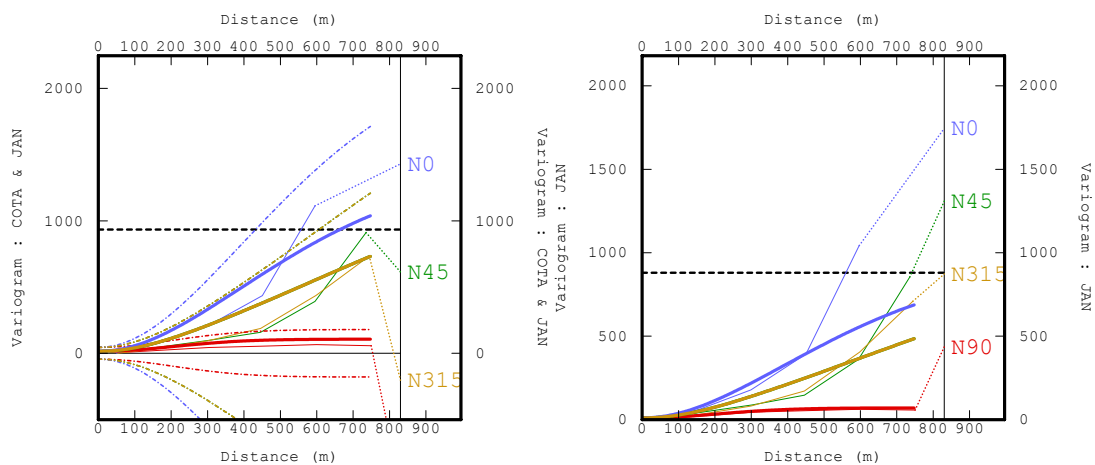
$\gamma_{11}(h)$ é o variograma da variável primária,

$C_1(0)$ é a variância σ_1^2 da variável primária,

$C_2(0)$ é a variância σ_2^2 da variável secundária (dados colocados),

$\rho_{12}(0)$ é o coeficiente de correlação entre as variáveis primária e secundária.

Assim, na Figura 4.18, apresentam-se os variogramas cruzado e direto para a variável primária utilizando o MM1. O ajuste do variograma cruzado não é completamente adequado.



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \quad \frac{0^\circ}{470m} \right) + 810 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \quad \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 15 + 91 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \quad \frac{0^\circ}{470m} \right) + 1223 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \quad \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

Figura 4.18 – Variogramas experimentais e modelados cruzado e direto ajustados utilizando o MM1 para os dados do 22 de Janeiro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

O mapa das estimativas pontuais estimados é apresentado na Figura 4.19.

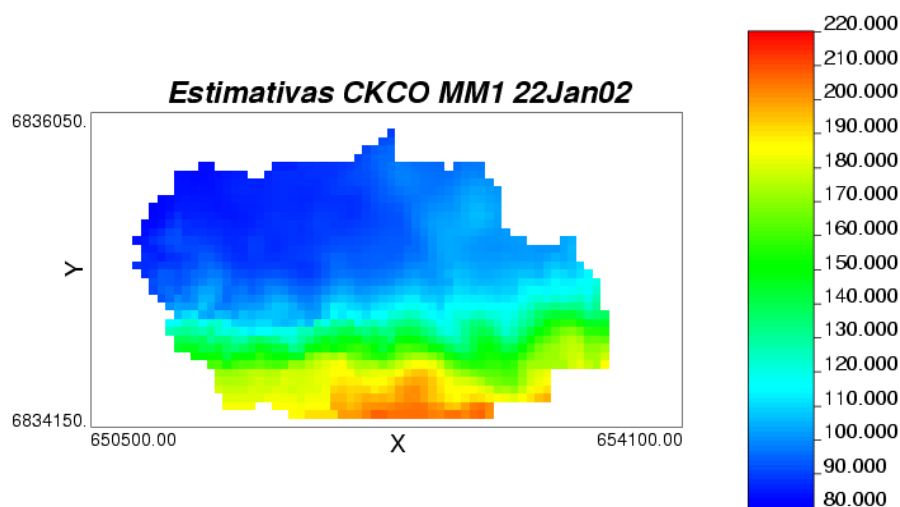


Figura 4.19 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 1 (MM1) para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

Os mapas de contorno são apresentados na Figura 4.20.

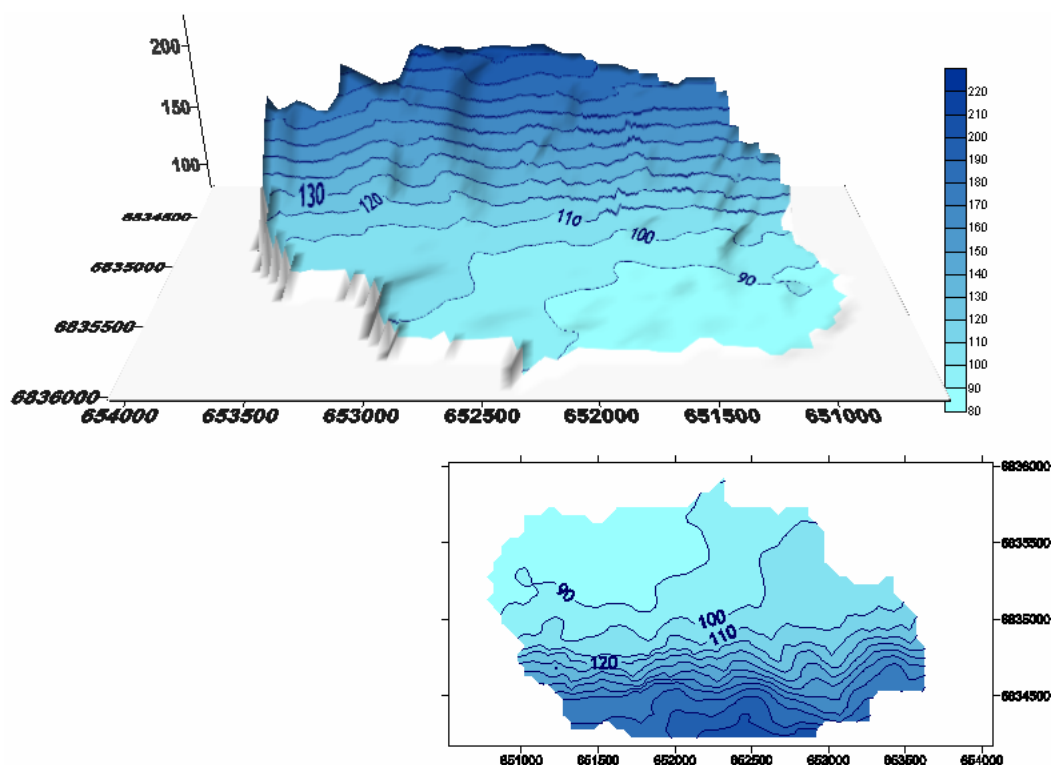
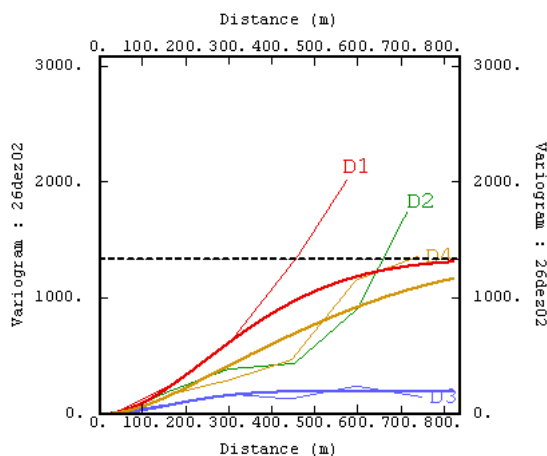


Figura 4.20 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 1 (MM1) para os dados 22 de Janeiro de 2002.

Nos mapas de contorno, são mais evidentes algumas diferenças quando comparados com os mapas apresentados na Figura 4.13, obtidos usando o MLC. Os valores da função variograma cruzado no caso do MM1 são, de modo geral, maiores que os valores para o MLC (Figura 4.11 e Figura 4.18). Isso representa uma maior correlação espacial entre ambas variáveis para o MM1 (coeficientes de correlação regionalizados da Equação 3.38) e portanto o mapa de contorno no caso do MLC está menos influenciado pelos dados da topografia. Comparados com os mapas da Figura B.13 (Apêndice B), obtidos por krigagem, as irregularidades mais notáveis são atenuadas pela introdução da topografia nas estimativas.

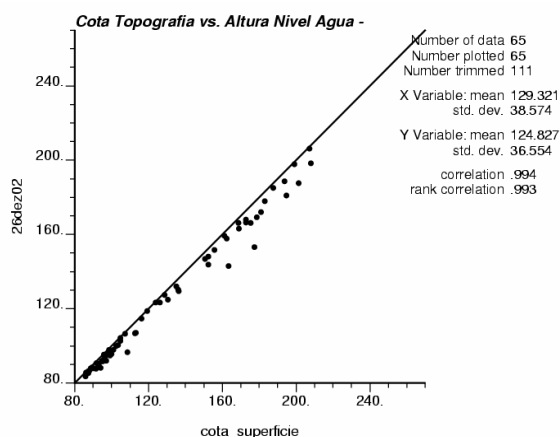
4.4.2.2 Cokrigagem colocada utilizando MM1 para os dados do 26 de Dezembro

Na Figura 4.21, apresentam-se os elementos necessários para a modelagem do MM1. Eles são o variograma experimental e o modelo correspondente da variável primária, já apresentados na Figura 2.18. O coeficiente de correlação figura nos parâmetros ao lado do gráfico de dispersão correspondente ao 26 de dezembro de 2002 na Figura 4.3.



$$\gamma(h) = 10 + 190 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{400m} \frac{0^\circ}{380m} \right) + 1140 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{790m} \right)$$

(a)



(b)

Figura 4.21 - Elementos necessários para a modelagem do MM1 para o 26 de Dezembro de 2002: (a) variograma experimental e modelado da variável primária (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4=Azimute 135°) e (b) coeficiente de correlação proveniente do gráfico de dispersão dos dados colocados (detalhe no Apêndice A).

Na Figura 4.22, apresentam-se os variogramas cruzado e direto para a variável primária utilizando o MM1.

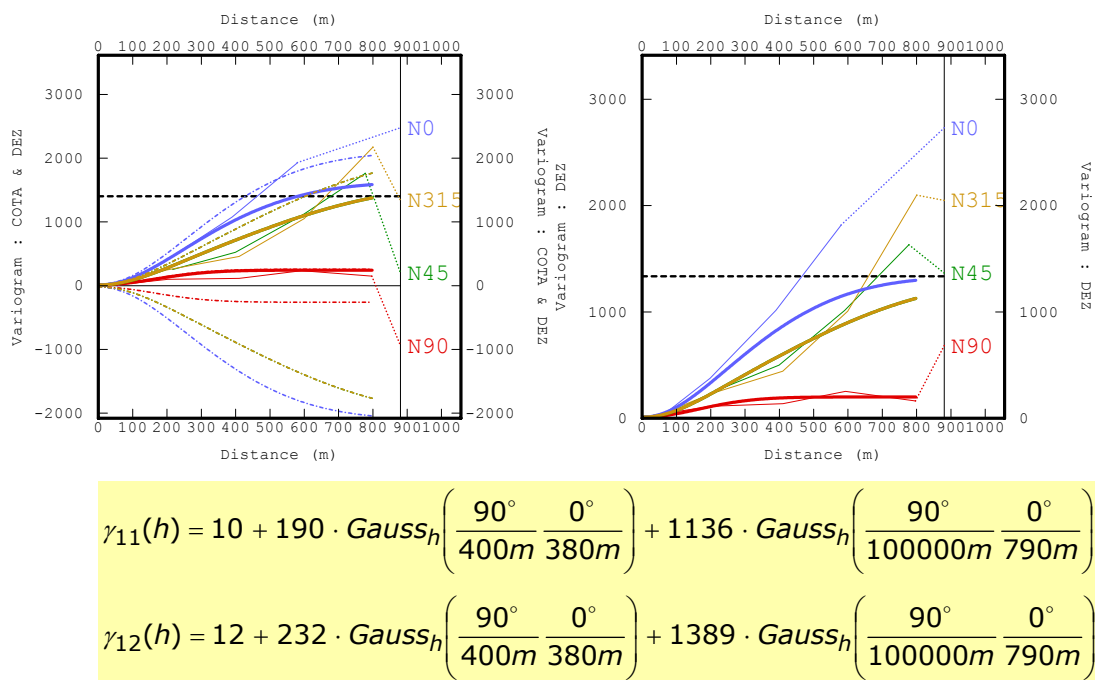


Figura 4.22 – Variogramas experimental e modelado cruzado e direto ajustados utilizando o MM1 para os dados de 26 de Dezembro de 2002. (detalhe no Apêndice A).

Na Figura 4.23, apresenta-se o mapa das estimativas pontuais. Os valores da função variograma cruzado com o modelo MM1, são maiores que os correspondentes obtidos no MLC (equações da Figura 4.14 e Figura 4.22). Valores maiores da função variograma cruzado, para os mesmos variogramas diretos, provocam um aumento no coeficiente de correlação regionalizado (Equação 3.38). Isso se pode interpretar como uma maior vinculação dos valores de nível de água à topografia no caso do MM1.

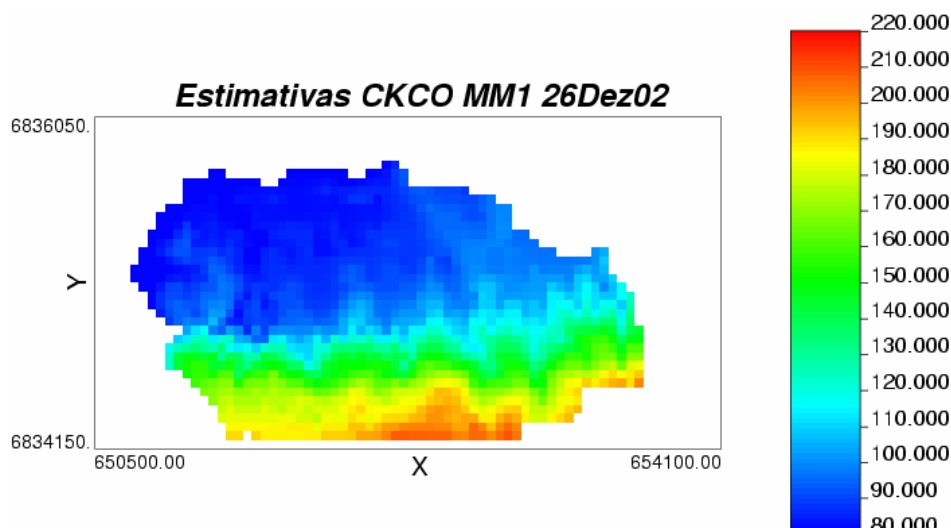


Figura 4.23 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 1 (MM1) para os dados de 26 de Dezembro de 2002.

Os mapas de contorno são apresentados na Figura 4.24.

Esses mapas de contorno do nível de água apresentam uma influência exagerada da topografia já que o variograma cruzado tem valores muito elevados nas contribuições para a variância total. Isso leva a coeficientes de correlação regionalizados (Equação 3.38) também muito elevados que podem inclusive superar o valor da unidade, o que não é correto. Apesar de que no MM1 essa verificação não é necessária, apresentam-se os coeficientes para destacar a elevada influência da topografia sobre os valores do nível de água. Para determinar os mesmos são utilizados os valores provenientes dos variogramas direto e cruzado do modelo MM1 e os valores da contribuição na variância do variograma direto da topografia (Figura 4.10).

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.98 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{232}{\sqrt{190 \cdot 150}} = 1.37 \notin [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{1389}{\sqrt{1136 \cdot 1857}} = 0.96 \in [-1,1]$$

Salienta-se que na escala intermédia o coeficiente de correlação regionalizado é superior à unidade. Dessa forma explica-se a elevada vinculação dos dados à topografia.

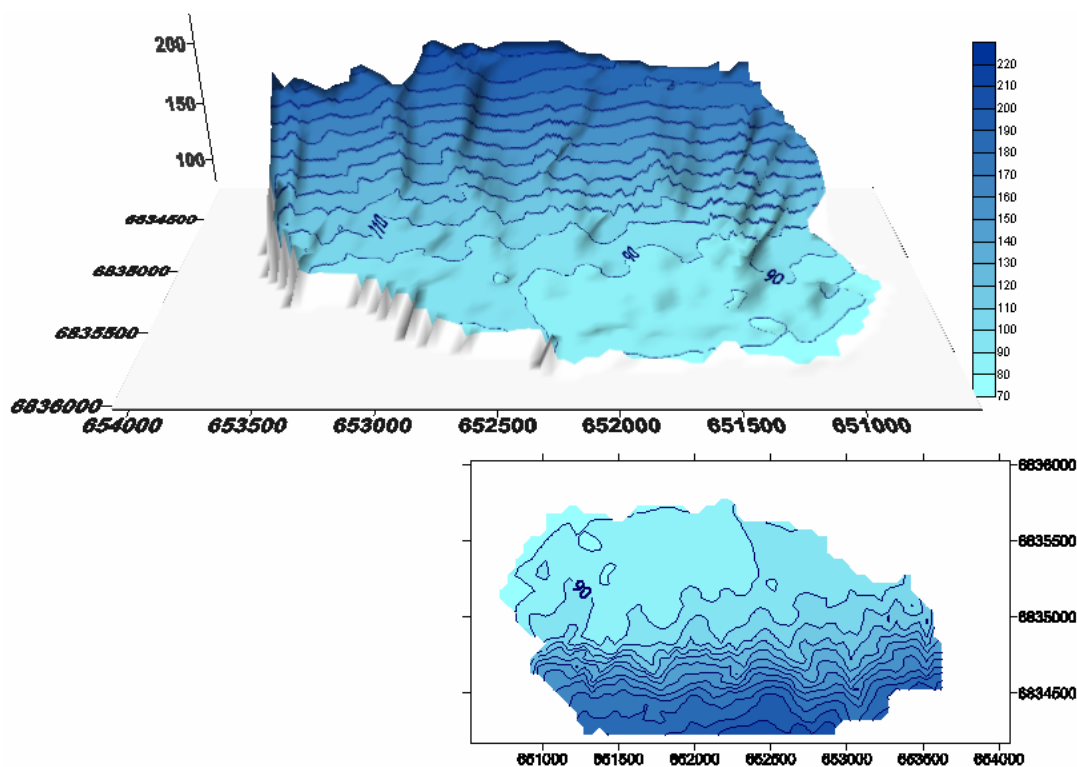


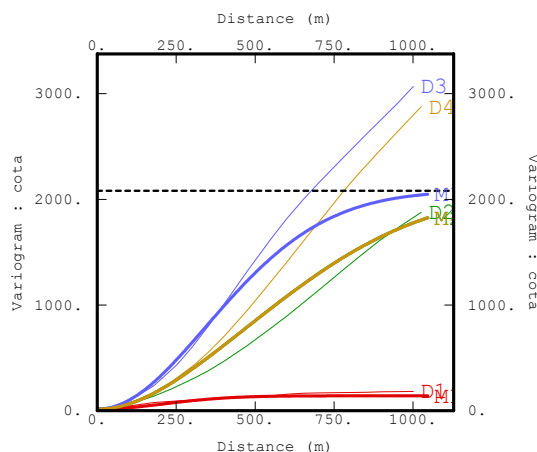
Figura 4.24 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 1 (MM1) para os dados de 26 de Dezembro de 2002.

4.4.3 Cokrigagem colocada estrita utilizando o MM2

Para realizar a cokrigagem colocada, utilizando o MM2, é necessária a inferência e modelagem do variograma construído utilizando a informação secundária (topografia) e o coeficiente de correlação entre os dados colocados das variáveis primária e secundária para os dados coletados em cada data. É necessária, também, a inferência de um variograma residual, que pode ter qualquer modelo que seja de variância total (patamar) unitária (XIANLIN e JOURNAL, 1999, SHMARYAN e JOURNAL, 1999, JOURNAL, 1999, ver item 3.8.1.2). O modelo resultante é um caso particular do MLC e deve cumprir com as condições de definição positiva. Os resultados e considerações assumidas são apresentados a seguir.

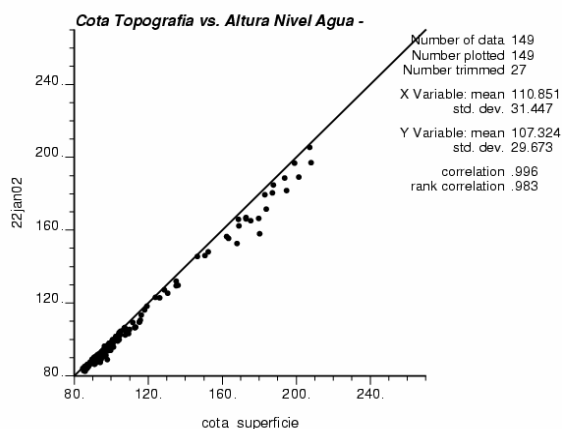
4.4.3.1 Cokrigagem colocada utilizando MM2 para os dados do 22 de Janeiro

O variograma e modelo da topografia foram apresentados na Figura 4.10. O coeficiente de correlação figura nos parâmetros ao lado do gráfico de dispersão correspondente aos dados do 22 de janeiro de 2002 na Figura 4.3. Na Figura 4.25, apresentam-se novamente estes elementos necessários para a modelagem do MM2.



$$\gamma(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 515m & 515m \end{array} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 100000m & 900m \end{array} \right)$$

(a)



(b)

Figura 4.25 - Elementos necessários para a modelagem do MM2 para os dados do 22 de Janeiro de 2002: (a) variograma experimental e modelado da variável secundária (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) e (b) coeficiente de correlação proveniente do gráfico de dispersão dos dados colocados (detalhe no Apêndice A).

A Equação 3.51, vista anteriormente, em termos de variogramas pode ser reescrita como (XIANLIN e JOURNAL, 1999):

$$\gamma_{12}(h) = \sqrt{\frac{C_1(0)}{C_2(0)}} \cdot \rho_{12}(0) \cdot \gamma_{22}(h) \quad (4.2)$$

onde,

$\gamma_{12}(h)$ é o variograma cruzado entre as variáveis primária e secundária,

$\gamma_{22}(h)$ é o variograma da variável secundária (dados colocados),

$C_1(0)$ é a variância σ^2_1 da variável primária,

$C_2(0)$ é a variância σ^2_2 da variável secundária,

$\rho_{12}(0)$ é o coeficiente de correlação entre as variáveis primária e secundária.

Portanto, os variogramas cruzado e direto para a variável secundária utilizando o MM2 são:

$$\begin{aligned} \gamma_{22}(h) &= 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m}\right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m}\right) \\ \gamma_{12}(h) &= 9.8 + 98.6 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m}\right) + 1220 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m}\right) \end{aligned}$$

Ainda, resta a inferência do variograma do resíduo. Para isso, foram utilizados o variograma experimental da variável primária e o variograma modelado (ou experimental) da variável secundária. O variograma do resíduo é inferido para cada vetor de separação h considerado, pela seguinte equação (XIANLIN e JOURNAL, 1999):

$$\hat{\gamma}_R(h) = \frac{1}{(1 - \rho_{12}^2(0))} \left[\frac{\hat{\gamma}_{11}(h)}{C_{11}(0)} - \rho_{12}^2(0) \cdot \frac{\gamma_{22}(h)}{C_{22}(0)} \right] \quad (4.3)$$

onde,

$\hat{\gamma}_R(h)$ é o valor do variograma experimental do resíduo,

$\hat{\gamma}_{11}(h)$ é o valor do variograma experimental da variável primária,

$\gamma_{22}(h)$ é o valor do variograma modelado (ou experimental) da variável secundária,

$C_{11}(0)$ é a variância σ_1^2 da variável primária,

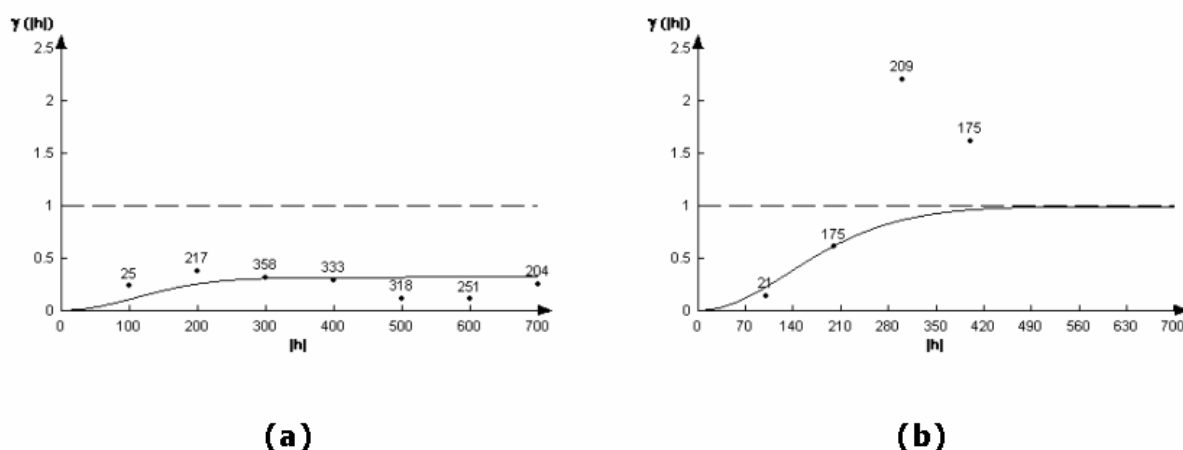
$C_{22}(0)$ é a variância σ_2^2 da variável secundária,

$\rho_{12}(0)$ é o coeficiente de correlação colocado entre as variáveis primária e secundária.

Portanto, a modelagem do MM2 requer a construção dos variogramas experimentais da variável secundária, da primária e, posteriormente, a partir deles, a construção do variograma do resíduo. A modelagem, porém, somente é necessária para o variograma da variável secundária e para o variograma do resíduo. A vantagem sobre o MLC é que a modelagem desses dois variogramas é independente, sem ter que se manter as mesmas estruturas em um e no outro. Na Tabela 4.1, apresentam-se os valores utilizados na construção do variograma do resíduo e na Figura 4.26 os modelos ajustados ao mesmo.

Tabela 4.1 – Tabela para construção do variograma do resíduo γ_R

Azimute 90°			
Vetor de separação h	Variograma experimental da variável primária $\hat{\gamma}_{11}(h)$	Variograma experimental da variável secundária $\hat{\gamma}_{22}(h)$	Variograma experimental do resíduo $\hat{\gamma}_R(h)$
100	19	40	0.14
200	35	77	0.60
300	51	114	2.20
400	64	147	1.61
500	67	164	8.33
600	69	164	2.81
Azimute 0°			
Vetor de separação h	Variograma experimental da variável primária $\hat{\gamma}_{11}(h)$	Variograma experimental da variável secundária $\hat{\gamma}_{22}(h)$	Variograma experimental do resíduo $\hat{\gamma}_R(h)$
100	45	84	0.23
200	123	248	0.37
300	227	503	0.31
400	347	778	0.28
500	450	1040	0.11
600	565	1288	0.10



$$\gamma_R(h) = 0.01 + 0.33 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{270m} \quad \frac{0^\circ}{270m}\right) + 0.66 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{100000m} \quad \frac{0^\circ}{400m}\right)$$

Figura 4.26 – Variograma do resíduo γ_R para o MM2 com os dados do 22 de Janeiro de 2002: (a) direção azimutal 90°, (b) direção azimutal 0°.

Apesar de não ser necessária a modelagem do variograma da variável primária, é necessário saber se ele cumpre a condição de definição positiva. O variograma do resíduo tem por definição variância unitária. Portanto, a Equação 3.57 escrita em termos de variogramas assegura essa condição (XIANLIN e JOURNAL, 1999):

$$\gamma_{11}(h) = C_{11}(0) \left[\rho_{12}^2 \cdot \frac{\gamma_2(h)}{C_{22}(h)} + (1 - \rho_{12}^2(0)) \cdot \gamma_R(0) \right] \quad (4.4)$$

onde,

$\gamma_{11}(h)$ é o modelo do variograma da variável primária,

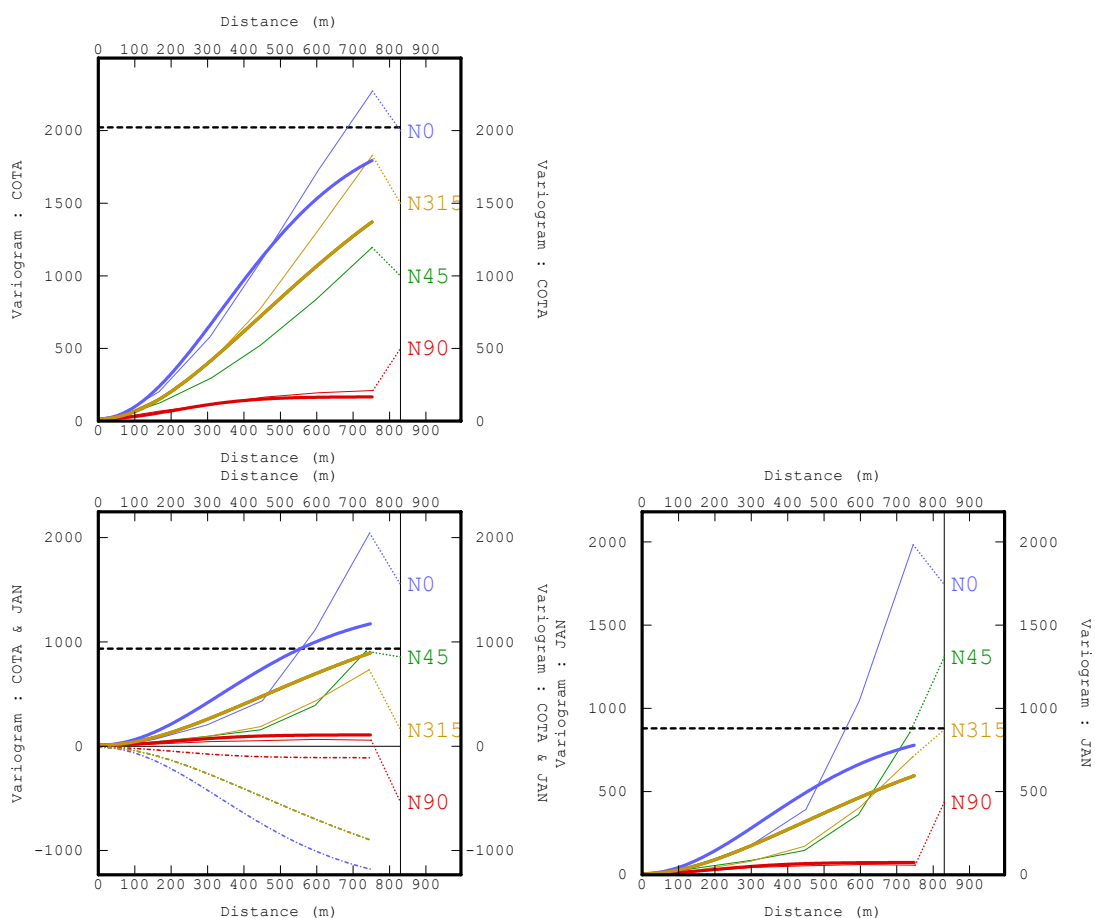
$\gamma_R(h)$ é o modelo do variograma do resíduo,

$C_{11}(0)$ é a variância da variável primária,

$C_{22}(0)$ é a variância da variável secundária,

$\rho_{12}(0)$ é o coeficiente de correlação colocado entre as variáveis primária e secundária.

O modelo completo é apresentado na Figura 4.27.



$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 9.8 + 98.6 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1220 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

$$\gamma_{11}(h) = 6.5 + 65 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 802 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right) + 7.03 \cdot \gamma_R$$

Figura 4.27 - Variogramas cruzado e direto da topografia ajustados utilizando o MM2 para o 22 de Janeiro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

Verifica-se que o ajuste do variograma cruzado não é adequado. As condições de definição positiva são cumpridas (item 3.4). As estruturas presentes no variograma cruzado estão presentes nos variogramas diretos e os determinantes dos coeficientes são positivos, como se observa a seguir:

$$\begin{vmatrix} 6.5 & 9.8 \\ 9.8 & 15 \end{vmatrix} = 1.46 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 65 & 98.6 \\ 98.6 & 150 \end{vmatrix} = 28.04 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 802 & 1220 \\ 1220 & 1857 \end{vmatrix} = 914 \geq 0$$

O variograma da variável primária conta com as estruturas do variograma do resíduo, mas como elas não estão incluídas nos variograma da variável secundária e no cruzado, o determinante nesses casos é nulo (pela sua pequena magnitude o efeito pepita no variograma do resíduo é desconsiderado na avaliação da definição positiva). Também, o coeficiente de correlação regionalizado para essas estruturas é nulo. Para as estruturas presentes no três variogramas, os coeficientes de correlação regionalizados pertencem ao intervalo $[-1,1]$:

$$r_{12}^1 = \frac{9.8}{\sqrt{6.5 \cdot 15}} = 0.992 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{98.6}{\sqrt{65 \cdot 150}} = 0.998 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{1220}{\sqrt{802 \cdot 1857}} = 0.999 \in [-1,1]$$

O mapa das estimativas pontuais das estimativas é apresentado na Figura 4.28.

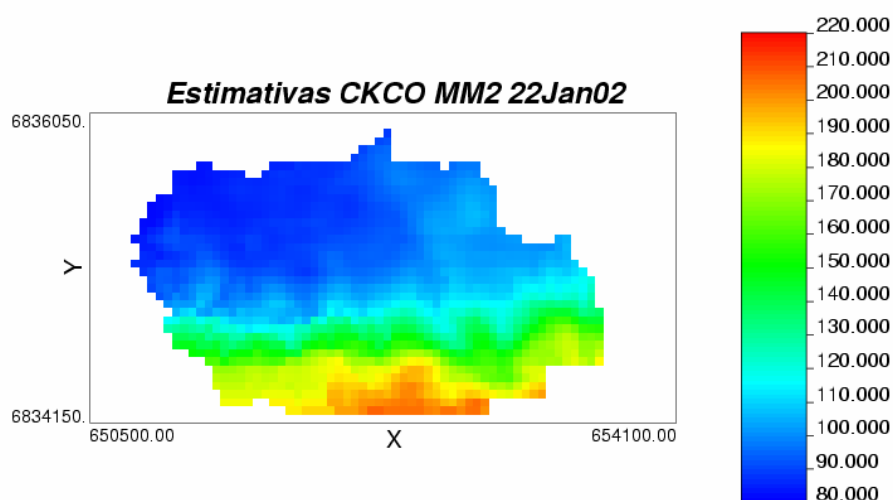


Figura 4.28 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 2 (MM2) para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

O mapa das estimativas pontuais é similar ao obtido na Figura 4.19. Os valores do variograma cruzado são maiores aos fornecidos pelo MLC e, portanto, assume-se uma maior correlação regionalizada entre dados primários e secundários. Portanto, os valores de nível de água estão mais vinculados aos valores da topografia, resultando menos elevados.

Os mapas de contorno são apresentados na Figura 4.29.

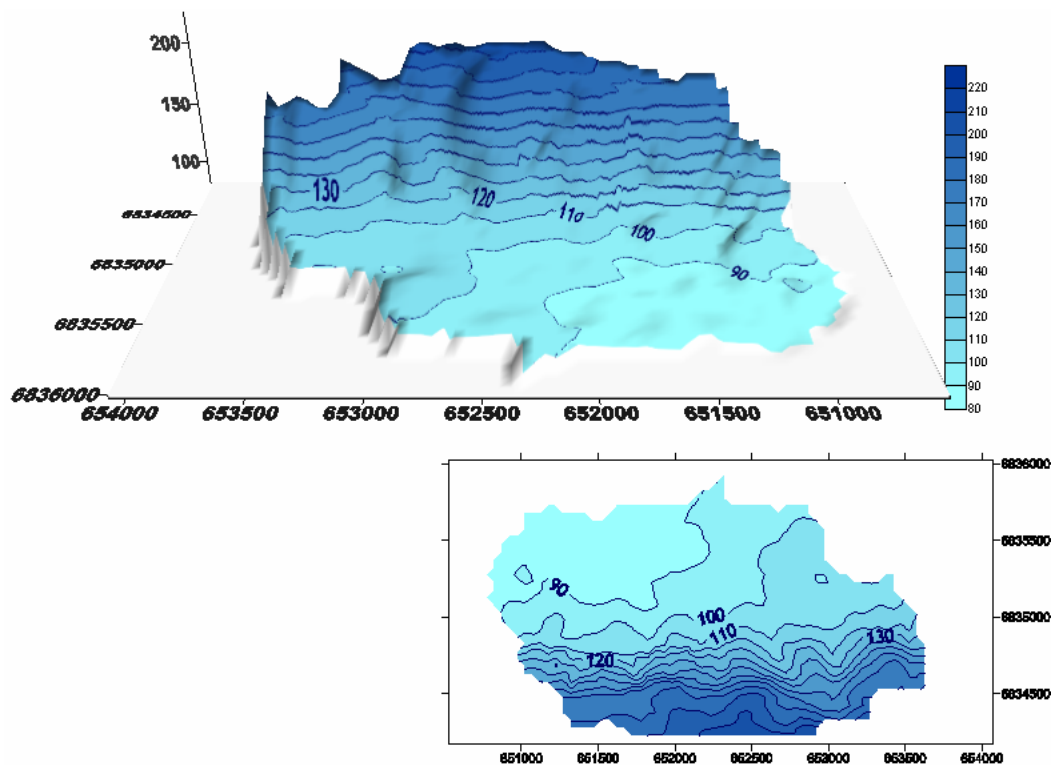
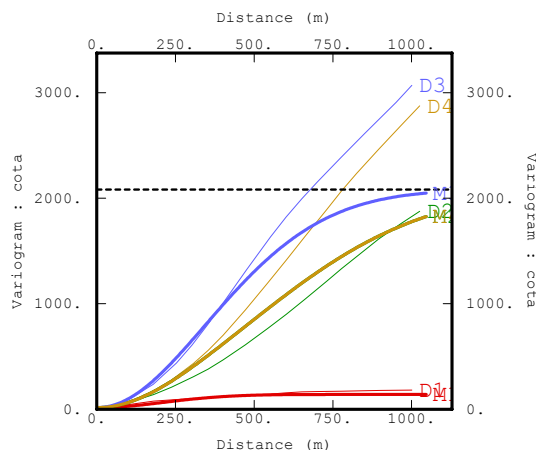


Figura 4.29 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 2 (MM2) para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

É importante destacar que o variograma cruzado obtido pelo MM2 não se ajusta, no presente estudo de caso, adequadamente ao variograma cruzado experimental. Dessa forma, as diferenças observadas entre os mapas das estimativas obtidas pelos diferentes métodos são atribuídas em grande parte a esse motivo.

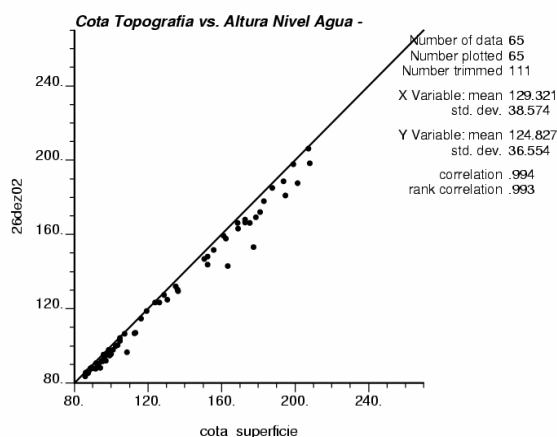
4.4.3.2 Cokrigagem colocada utilizando o MM2 para os dados do 26 de Dezembro

Os elementos necessários para a modelagem do MM2 para dezembro são apresentados na Figura 4.30.



$$\gamma(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 515m & 515m \end{array} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 100000m & 900m \end{array} \right)$$

(a)



(b)

Figura 4.30 - Elementos necessários para a modelagem do MM2 para o 26 de Dezembro de 2002: (a) variograma da variável secundária (direção D1=Azimute 0°, D2=Azimute 45°, D3=Azimute 90°, D4= Azimute 135°) e (b) coeficiente de correlação proveniente do gráfico de dispersão dos dados colocados (detalhe no Apêndice A).

Portanto, os variogramas cruzado e direto para a variável secundária utilizando o MM2 são:

$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

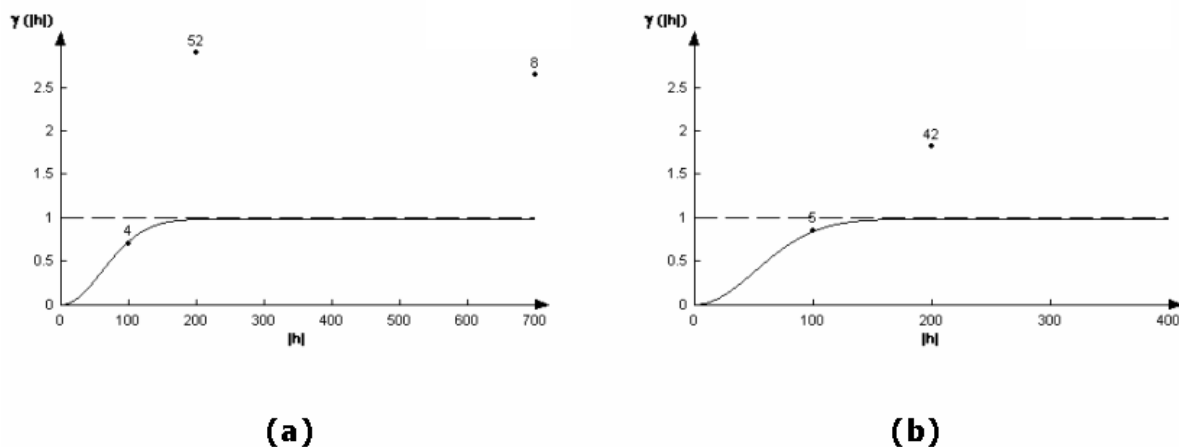
$$\gamma_{12}(h) = 12 + 121 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1500 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

Na Tabela 4.2 apresentam-se os valores utilizados na construção do variograma do resíduo.

Tabela 4.2 - Tabela para construção do variograma do resíduo γ_R

Azimute 90°			
Vetor de separação h	Variograma experimental da variável primária $\hat{\gamma}_{11}(h)$	Variograma experimental da variável secundária $\hat{\gamma}_{22}(h)$	Variograma experimental do resíduo $\hat{\gamma}_R(h)$
100	40	40	0.71
200	111	77	2.90
300	165	114	4.48
400	190	147	5.77
500	201	164	4.90
600	198	164	3.13
Azimute 0°			
Vetor de separação h	Variograma experimental da variável primária $\hat{\gamma}_{11}(h)$	Variograma experimental da variável secundária $\hat{\gamma}_{22}(h)$	Variograma experimental do resíduo $\hat{\gamma}_R(h)$
100	112	84	0.85
200	327	248	1.82
300	847	503	3.07
400	1038	778	4.01

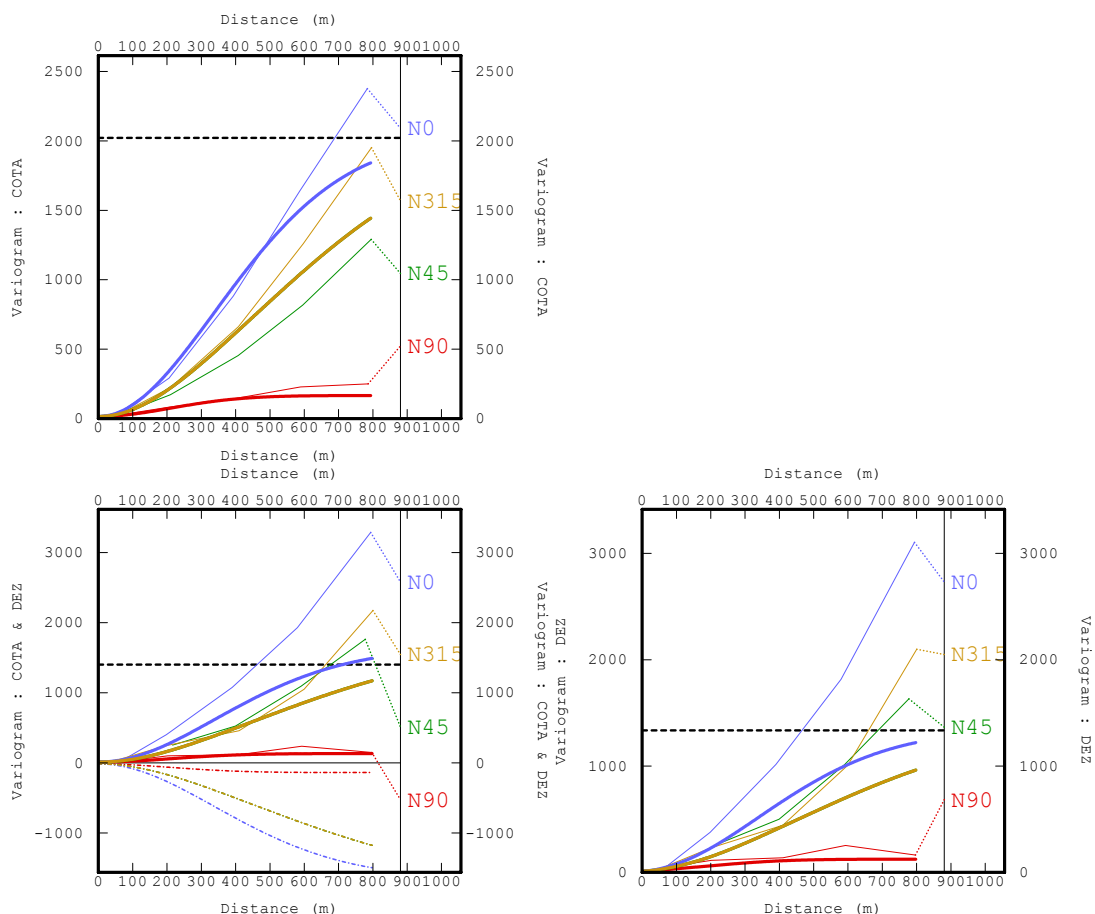
O variograma do resíduo modelado é apresentado na Figura 4.31.



$$\gamma_R(h) = 0.01 + 0.99 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 150m & 125m \end{array} \right)$$

Figura 4.31 - Variograma do resíduo γ_R para o MM2 nos dados de 26 de Dezembro de 2002: (a) direção azimutal 90°, (b) direção azimutal 0°.

Nesse caso, o variograma é praticamente isotrópico. O modelo do variograma do resíduo tem variância unitária por definição, limitando com isso a sua modelagem. O modelo completo incluindo os variogramas diretos e cruzado é apresentado na Figura 4.32. O ajuste do variograma cruzado nesse caso é mais adequado que no caso do modelo para o 22 de Janeiro.



$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 12 + 121 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1500 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

$$\gamma_{11}(h) = 9.8 + 98 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1212 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right) + 16 \cdot \gamma_R$$

Figura 4.32 - Variogramas cruzado e direto da topografia ajustados utilizando o MM2 para os dados de 26 de Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

Verifica-se que as condições de definição positiva são cumpridas (item 3.4). As estruturas presentes no variograma cruzado estão presentes nos variogramas diretos. Os determinantes dos coeficientes são positivos, como se observa a seguir:

$$\begin{vmatrix} 9.8 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 3 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 98 & 121 \\ 121 & 150 \end{vmatrix} = 59 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 1212 & 1500 \\ 1500 & 1857 \end{vmatrix} = 684 \geq 0$$

As estruturas do variograma do resíduo não estão presentes no variograma da variável secundária e no variograma cruzado. Portanto, o determinante para estas estruturas é nulo. Também, para estas estruturas são nulos os coeficientes de correlação regionalizados. Para as estruturas presentes nos três variogramas os coeficientes de correlação regionalizados pertencem ao intervalo $[-1,1]$:

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{9.8 \cdot 15}} = 0.900 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{121}{\sqrt{98 \cdot 150}} = 0.998 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{1500}{\sqrt{1212 \cdot 1857}} = 0.999 \in [-1,1]$$

O mapa das estimativas pontuais das estimativas é apresentado na Figura 4.33.

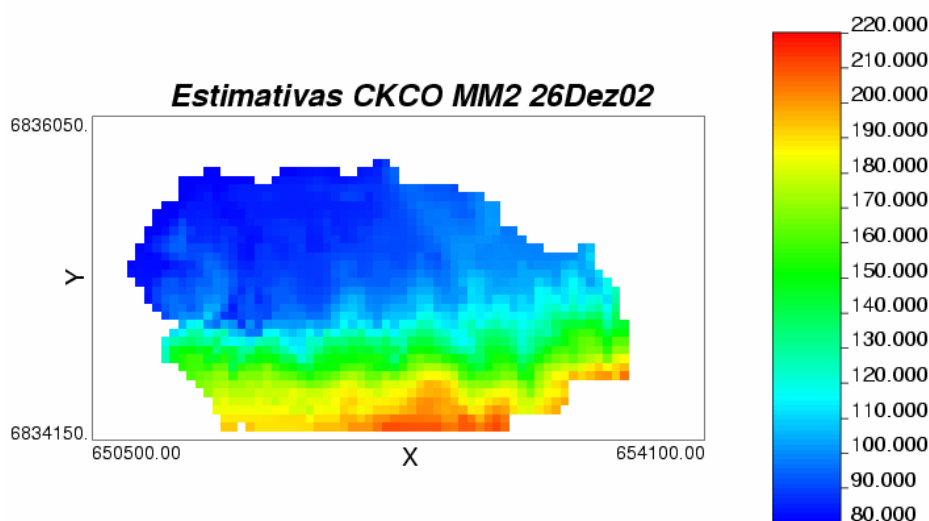


Figura 4.33 – Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 2 (MM2) para os dados do 26 de Dezembro de 2002.

O mapa das estimativas pontuais é similar ao obtido utilizando o modelo MM1 (Figura 4.23) e o MLC (Figura 4.15). Do mesmo modo que já foi discutido anteriormente, o valor dos coeficientes de correlação regionalizados elevados evidenciam a maior influência da topografia sobre os dados da variável nível de água.

Os mapas de contorno são apresentados na Figura 4.34.

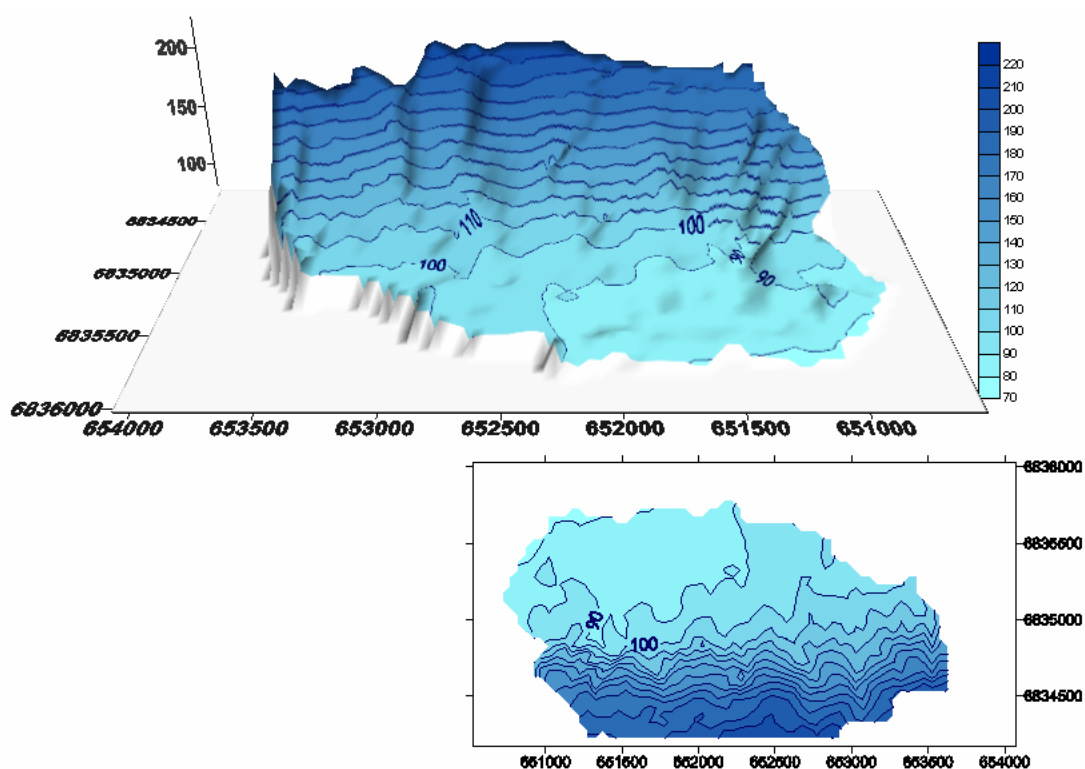


Figura 4.34 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Colocada estrita Ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 2 (MM2) para os dados do 26 de Dezembro de 2002.

4.5 Cokrigagem Multicolocada

O programa utilizado é o ISATIS (BLEINES et al., 2002). Neste caso, os dados secundários da topografia colocados com os dados primários do nível de água são utilizados nas estimativas. O modelo linear de correlogramação ajustado deve cumprir as condições apresentadas no item 3.8.2. O variograma cruzado deve ser proporcional ao variograma da variável secundária com o coeficiente de regressão como coeficiente de proporcionalidade.

Dessa forma, a cokrigagem multicolocada fornece os mesmos resultados que a cokrigagem completa dos mesmos dados e que a krigagem do resíduo

(RIVOIRARD, 2001), análoga à krigagem simples com médias locais móveis (GOOVAERTS, 1997, p. 190). O modelo deve cumprir, também, com as condições de definição positiva. Nesse estudo, as estratégias e vizinhanças de busca, são mantidas as mesmas escolhidas para krigagem e cokrigagem estrita. Portanto, é utilizada a busca por quadrantes, com um mínimo de 2 amostras e um número máximo de amostras por setor de 5, para incluir as 3 amostras primárias antes consideradas (máximo total de 12 amostras primárias) e também considerar a situação como multicolocada, escolhendo 2 amostras secundárias por quadrante. A vizinhança de busca repete a anterior com um eixo de 1000 m na direção azimutal 90° e de 600 m na direção azimutal 0° .

4.5.1 Cokrigagem multicolocada para os dados do 22 de Janeiro

O modelo linear de correionalização ajustado deve apresentar um variograma cruzado proporcional ao variograma da variável secundária com o coeficiente angular da reta de regressão como coeficiente de proporcionalidade. Assim, utilizando a Equação 3.62 e os valores de variância dos dados colocados (Figura 4.3), o coeficiente de proporcionalidade é:

$$a = \frac{C_{12}(0)}{\sigma_2^2} = \rho_{12}(0) \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = 0.66$$

onde,

a é o coeficiente angular da reta,

$C_{12}(0)$ é a covariância cruzada dos dados colocados,

σ_1^2 é a variância dos dados primários ,

σ_2^2 é a variância dos dados secundários,

$\rho_{12}(0)$ é o coeficiente de correlação entre dados primários e secundários.

O modelo ajustado apresenta-se na Figura 4.35.

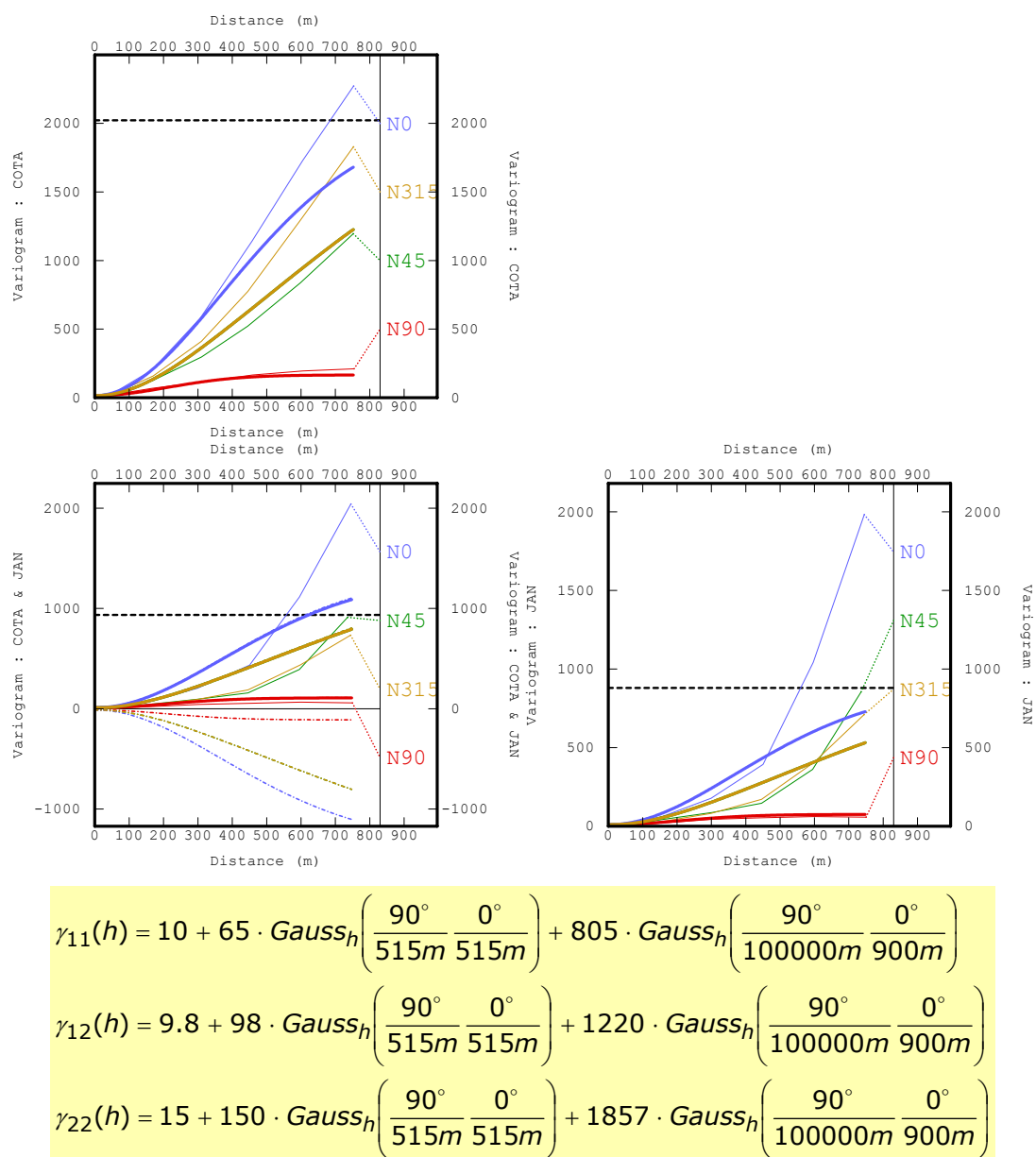


Figura 4.35 - Modelo do resíduo ajustado para os dados de 22 de Janeiro de 2002 para cokrigagem multicolocada (detalhe no Apêndice A).

Pequenas modificações são introduzidas no modelo do variograma da variável primária para garantir que as condições de definição positiva sejam cumpridas. As estruturas do variograma cruzado estão presentes nos variogramas diretos e os determinantes dos coeficientes são positivos como se apresenta a seguir:

$$\begin{vmatrix} 10 & 9.8 \\ 9.8 & 15 \end{vmatrix} = 53.96 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 65 & 98 \\ 98 & 150 \end{vmatrix} = 146 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 805 & 1207 \\ 1207 & 1857 \end{vmatrix} = 38036 \geq 0$$

E os coeficientes de correlação regionalizados pertencem ao intervalo $[-1,1]$:

$$r_{12}^1 = \frac{9.8}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.80 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{98}{\sqrt{65 \cdot 150}} = 0.992 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{1207}{\sqrt{805 \cdot 1857}} = 0.987 \in [-1,1]$$

O mapa das estimativas pontuais é apresentado na Figura 4.36. O mapa apresenta características similares ao da Figura B.1 (Apêndice B) obtido por krigagem, mas observando a zona em azul claro, compreendida entre 110 e 120 m, as características são mais semelhantes às do mapa da Figura 4.6, denotando a influência da topografia.

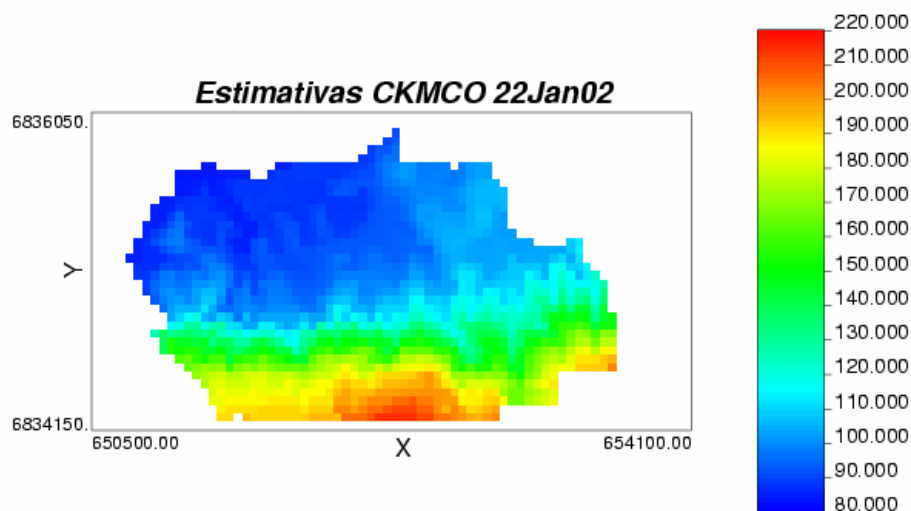


Figura 4.36 – Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Multicolocada Ordinária (CKMCO) utilizando o modelo do resíduo para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

Se comparado com o mapa da Figura 4.12 obtido por cokrigagem colocada estrita utilizando o MLC, vemos que para o caso do modelo do resíduo (MR) os valores se apresentam mostrando uma maior influência da topografia. Em ambos casos, são utilizados modelos lineares de correionalização, com a

particularidade da proporcionalidade do modelo cruzado no caso multicolocado. Os valores da função variograma cruzado são maiores no caso multicolocado e portanto, a topografia submete mais os valores do nível de água. No caso multicolocado, também são introduzidos na estimativa, valores da variável secundária que estão na vizinhança junto com o dado colocado no nó onde se estima a variável primária. Isso acentua ainda mais a influência da topografia incorporada nesses dados próximos.

Na Figura 4.37, apresentam-se os valores do desvio padrão de cokrigagem. Verifica-se que os valores são muito menores que no caso da krigagem, como é prognosticado pela Equação 3.28 para a expressão da variância de cokrigagem.

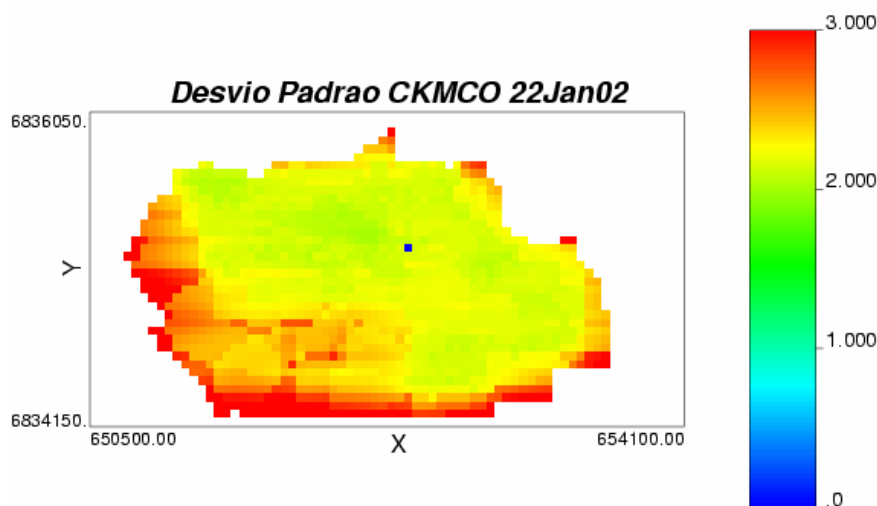


Figura 4.37 – Mapa do desvio padrão de Cokrigagem Multicolocada Ordinária para os dados do 22 de Janeiro de 2002 .

A escala de cores utilizada evidencia que em um dos pontos tem-se o valor de desvio padrão nulo. Isso corresponde a um valor da variável primária colocado com um nó da malha de estimativa, e o valor nulo mostra que o dado foi honrado, sendo que a cokrigagem fornece um estimador exato. A região, onde se dispõe de amostras, apresenta valores mais baixos de variância de cokrigagem.

Os mapas de contorno são apresentados na Figura 4.38. Os mapas guardam uma semelhança muito marcada com o mapa de contorno dos valores da topografia apresentado na Figura 4.7, mostrando, dessa forma, a influência da introdução de uma maior quantidade de dados da variável secundária na estimativa.

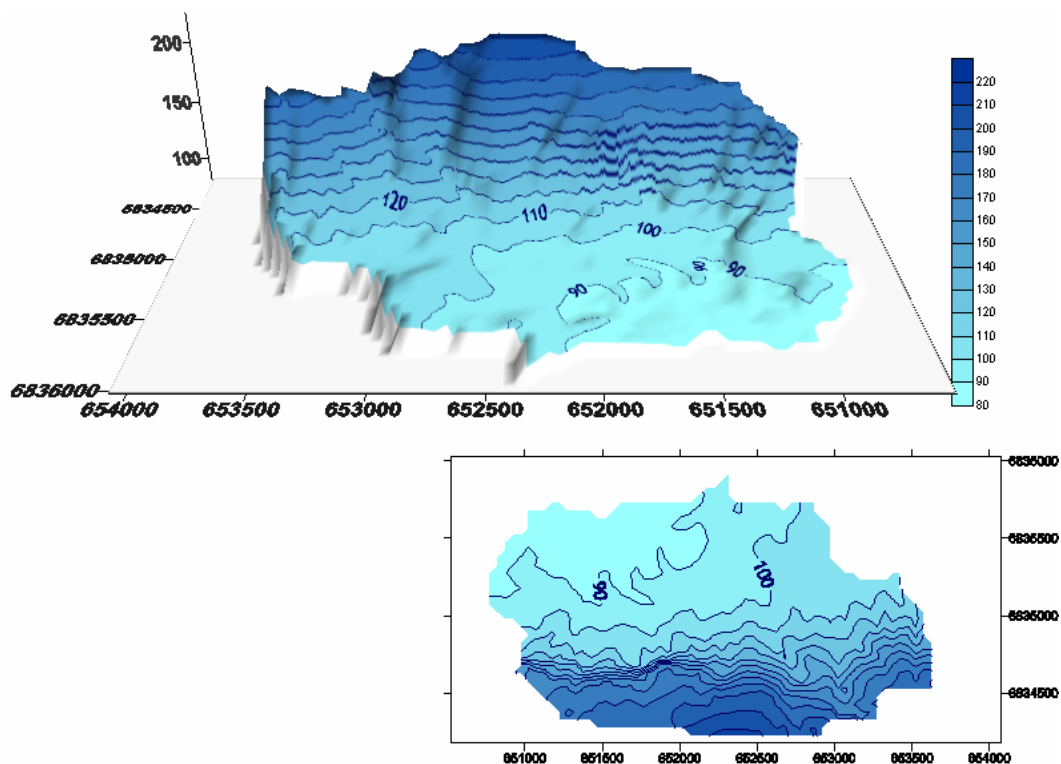


Figura 4.38 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Multicolocada Ordinária (CKMCO) utilizando o Modelo do Resíduo para os dados do 22 de Janeiro de 2002.

4.5.2 Cokrigagem multicolocada para os dados do 26 de Dezembro

Nesse caso, o modelo linear de correionalização ajustado deve apresentar um variograma cruzado proporcional ao variograma da variável secundária com o coeficiente angular da reta de regressão como coeficiente de proporcionalidade. Assim, utilizando a Equação 3.62 e os valores de variância dos dados colocados (Figura 4.3) o coeficiente de proporcionalidade é:

$$a = \frac{C_{12}(0)}{\sigma_2^2} = \rho_{12}(0) \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = 0.81$$

onde,

a é o coeficiente angular da reta,

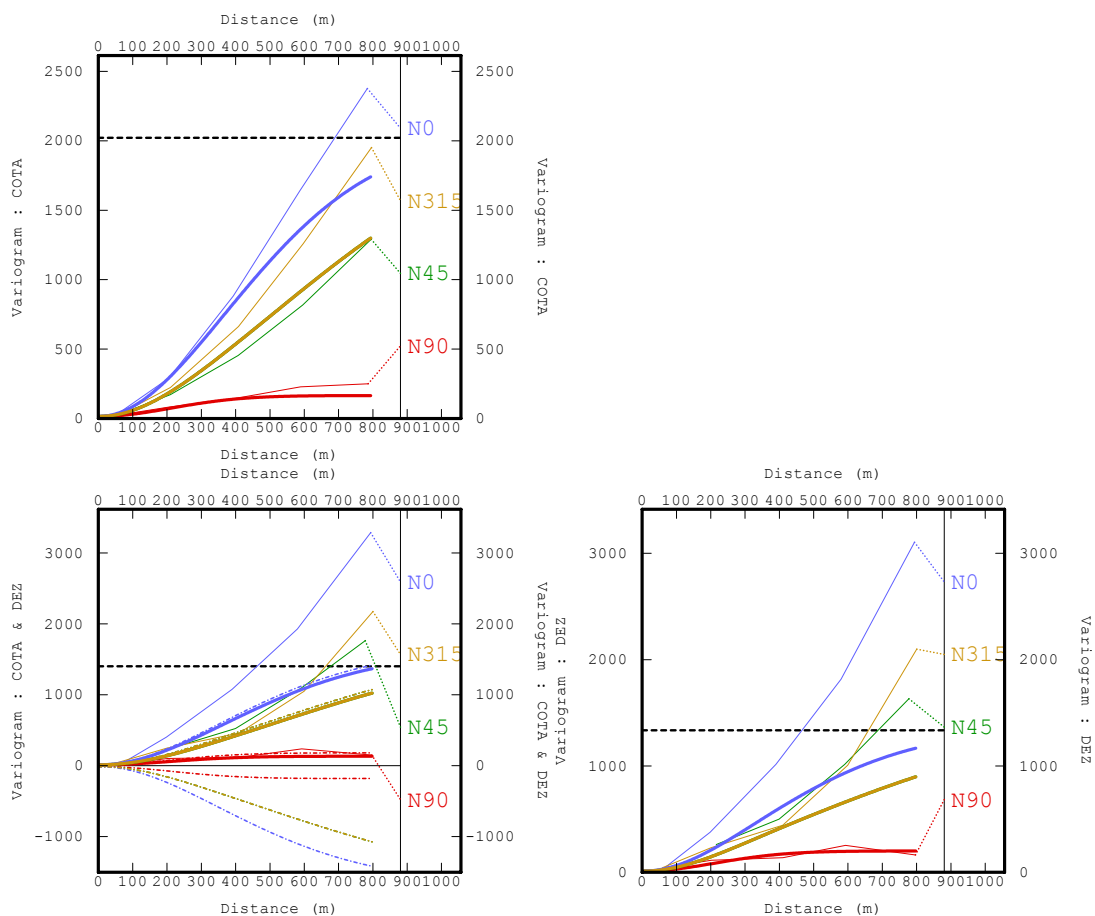
$C_{12}(0)$ é a covariância cruzada dos dados colocados,

σ_1^2 é a variância dos dados primários ,

σ_2^2 é a variância dos dados secundários,

$\rho_{12}(0)$ é o coeficiente de correlação entre dados primários e secundários.

O modelo ajustado apresenta-se na Figura 4.39.



$$\begin{aligned} \gamma_{11}(h) &= 10 + 190 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1136 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right) \\ \gamma_{12}(h) &= 12 + 121 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1450 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right) \\ \gamma_{22}(h) &= 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{515m} \frac{0^\circ}{515m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right) \end{aligned}$$

Figura 4.39 - Modelo do resíduo ajustado para o 26 de Dezembro de 2002 para cokrigagem multicolocada (detalhe no Apêndice A).

Realizando pequenas modificações no modelo do variograma cruzado, as condições de definição positiva são cumpridas. As estruturas do variograma cruzado estão presentes nos variogramas diretos e os coeficientes são positivos como se apresenta a seguir:

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 6 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 190 & 121 \\ 121 & 150 \end{vmatrix} = 13859 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 1136 & 1450 \\ 1450 & 1857 \end{vmatrix} = 7052 \geq 0$$

E os coeficientes de correlação regionalizados pertencem ao intervalo $[-1,1]$:

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.98 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{121}{\sqrt{190 \cdot 150}} = 0.72 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{1450}{\sqrt{1857 \cdot 1136}} = 0.99 \in [-1,1]$$

O mapa das estimativas pontuais é apresentado na Figura 4.40. O mapa apresenta características similares ao da Figura B.13 (Apêndice B) obtido por krigagem, mas também as zonas em azul claro, compreendidas entre 110 e 120 m, tem características mais semelhantes ao mapa da Figura 4.6, mostrando a influência da topografia

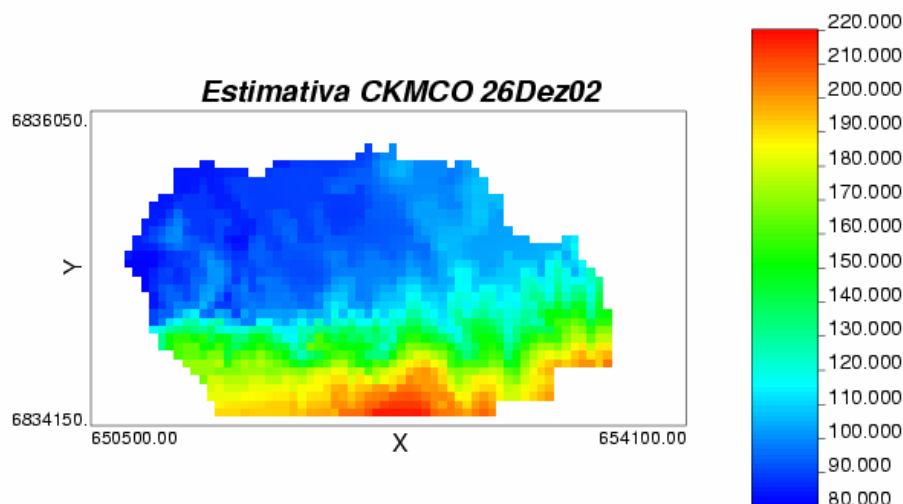


Figura 4.40 - Mapa das estimativas pontuais por Cokrigagem Multicolocada Ordinária (CKMCO) utilizando o Modelo do Resíduo para os dados de 26 de Dezembro de 2002.

Se comparado com o mapa da Figura 4.15 obtido por cokrigagem colocada estrita utilizando o MLC, não são evidenciadas diferenças muito marcadas. No

caso dos dados de 26 de dezembro, a quantidade de dados é menor que no 22 de janeiro, portanto a maior influência da informação secundária já se fazia evidente naquele caso.

Na Figura 4.41, apresenta-se os valores do desvio padrão de cokrigagem. Verifica-se que os valores são menores que no caso da krigagem, como é prognosticado pela Equação 3.28 para a expressão da variância de cokrigagem. De qualquer forma, são maiores que os obtidos para o 22 de Janeiro (Figura 4.37) já que a densidade amostral no 26 de dezembro é menor. Nos locais próximos aonde estão os dados primários, a variância é menor, da mesma forma que no caso do desvio padrão de krigagem.

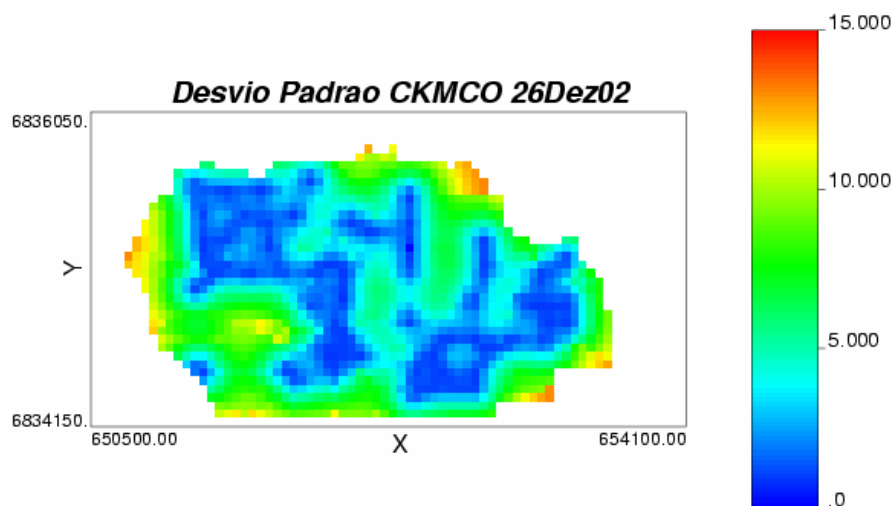


Figura 4.41 - Mapa do desvio padrão de Cokrigagem Multicolocada Ordinária para os dados do 26 de Dezembro de 2002.

Os mapas de contorno são apresentados na Figura 4.42. A influência da topografia nos mapas é muito marcada, notadamente ao compará-lo com o mapa de contorno dos valores da topografia apresentado na Figura 4.7. Como foi mencionado, a influência da introdução de uma maior quantidade de dados da variável secundária na estimativa é notória.

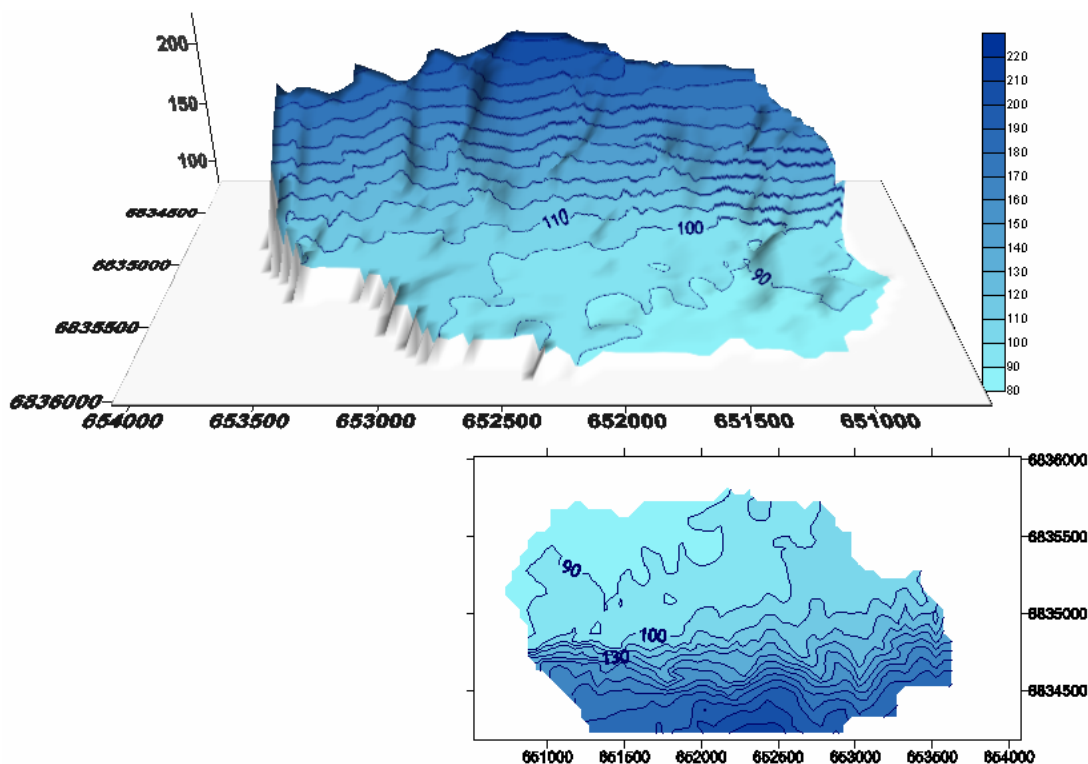


Figura 4.42 - Mapas de contorno das estimativas por Cokrigagem Multicolocada Ordinária (CKMCO) utilizando o Modelo do Resíduo para os dados de 26 de Dezembro de 2002.

4.6 Krigagem do resíduo

A estimativa com a krigagem do resíduo foi apresentada junto com a cokrigagem multicolocada no item 3.8.3. Segundo RIVOIRARD (2001), realizar a cokrigagem colocada com um modelo de resíduo é igual à krigagem do mesmo se o modelo variográfico do resíduo é o apresentado na Equação 3.72.

O resíduo é definido como a diferença entre o valor de nível de água disponível e o valor fornecido pela regressão linear com a topografia. Como as duas variáveis estão tão fortemente correlacionadas, seria uma opção considerar a simples regressão de uma sobre a outra. O resíduo R é então calculado como a diferença entre o valor disponível da variável primária (Nível de água_{real}) e o valor dado por regressão a partir da cota topográfica no mesmo local (Nível de água_{regressão}):

$$R = \text{Nível de água}_{real} - \text{Nível de água}_{regressao}$$

Krigando o resíduo pode ser levada em consideração de forma simples e rápida a correlação espacial para vetores de separação diferentes de zero.

Esse tipo de metodologia tem o mesmo fundamento que a Krigagem Simples com Médias Locais Variáveis (GOOVAERTS, 1997, p. 190) instrumentado no programa NEWCOKB3D da biblioteca GSLIB (XIANLIN e JOURNEL, 1999, DEUTSCH e JOURNEL, 1998). O resíduo pode ser calculado, variografado e krigado como uma variável independente, o que é realizado no presente estudo de caso. Pode ser observado que nesse método complementarmente se apresenta uma solução ao problema da não estacionariedade.

A estratégia de busca é realizada, como anteriormente, por quadrantes com um mínimo de 2 dados e um máximo de 12. A vizinhança de busca se escolhe como uma elipse com eixo maior de 1000 m na direção azimutal 90° e eixo menor de 600 m na direção azimutal 0° .

4.6.1 Krigagem do resíduo para os dados do 22 de Janeiro

Para calcular o resíduo, inicialmente é necessária a construção da curva de regressão entre a variável primária e secundária. A curva e a equação correspondente são apresentados na Figura 4.43.

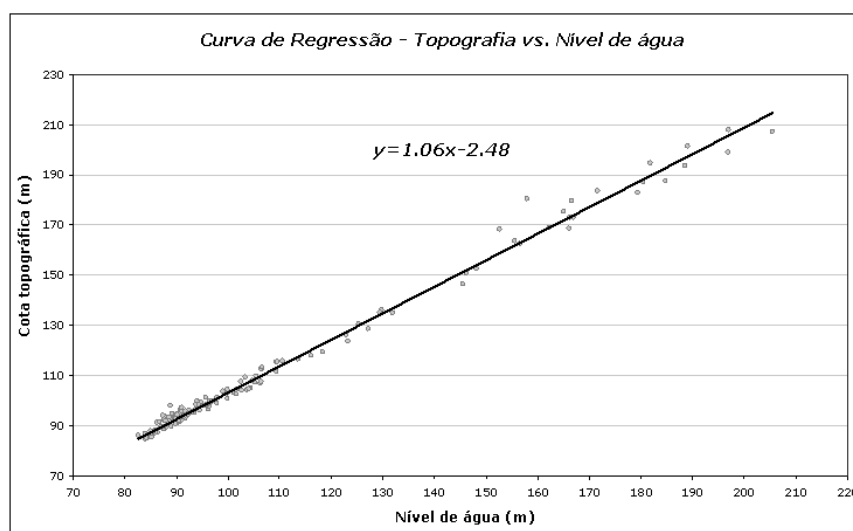


Figura 4.43 – Curva de regressão entre os dados da Cota Topográfica e o Nível de água para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

Na Figura 4.44, é mostrado o mapa de localização dos resíduos calculados. O valor mais elevado é negativo mostrando que nessa região a regressão fornece um valor mais elevado que o real. Também, são observados alguns valores positivos indicando o contrário.

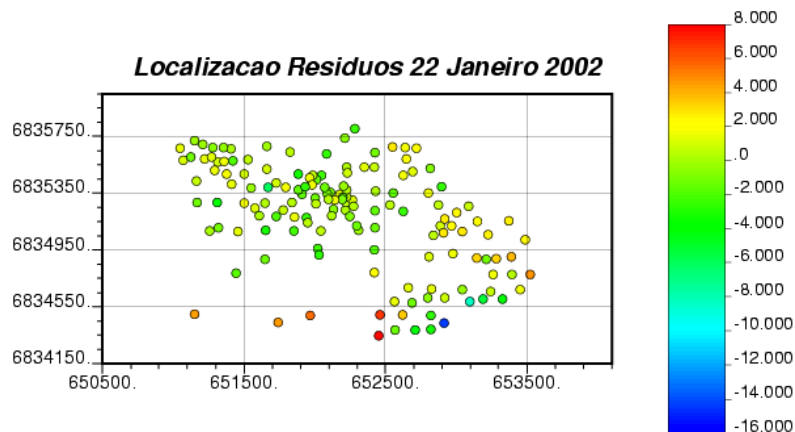


Figura 4.44 – Mapa de localização dos resíduos calculados para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

De qualquer forma, o resíduo entre o valor real e o dado pelo modelo de regressão tem uma média no entorno de zero, como se observa na Figura 4.45 onde se apresenta o histograma dos dados.

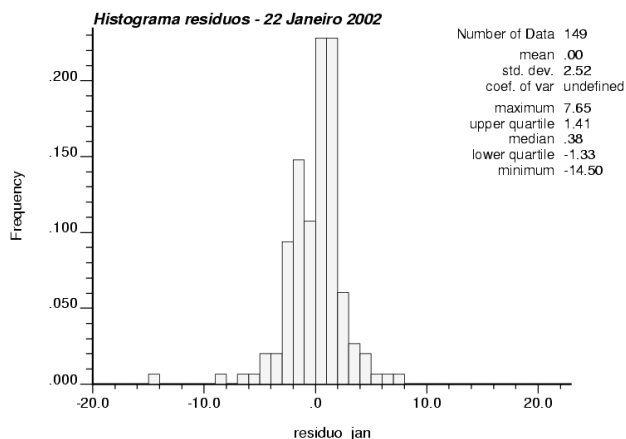


Figura 4.45 – Histograma dos resíduo calculado para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

O estudo variográfico se inicia com o variograma de superfície Figura 4.46. Nele, se aprecia uma certa continuidade na direção leste-oeste.

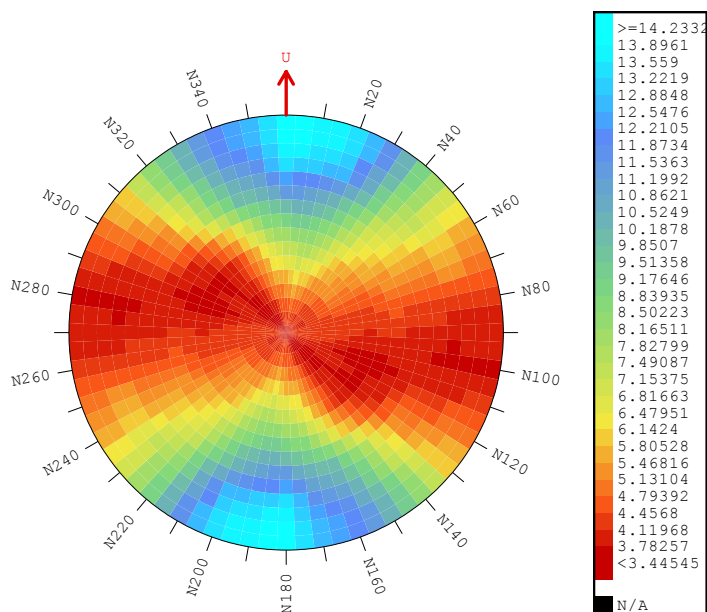


Figura 4.46 – Variograma de superfície $\gamma(h)$ para o resíduo do 22 de Janeiro de 2002.

O variograma omnidirecional apresentado na Figura 4.47 é utilizado para escolher o efeito pepita já que os variogramas direcionais apresentam-se erráticos, dificultando a escolha do mesmo. .

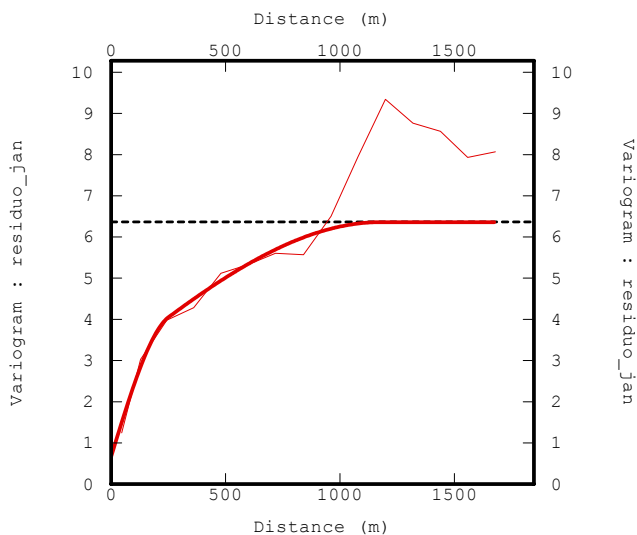
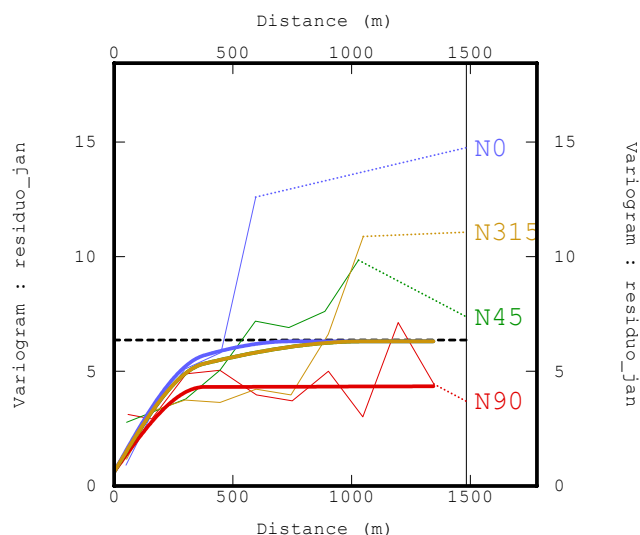


Figura 4.47 – Variograma omnidirecional para o resíduo do 22 de Janeiro de 2002.

Uma vez construídos os variogramas direcionais, compõem-se o modelo do variograma que se apresenta na Figura 4.48.



$$\gamma(h) = 0.61 + 3.70 \cdot Sph\left(\frac{90^\circ}{380m} \frac{0^\circ}{380m}\right) + 2.00 \cdot Sph\left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{750m}\right)$$

Figura 4.48 – Variogramas direcionais para o 22 de Janeiro de 2002. (detalhe no Apêndice A).

As estimativas são então realizadas para o resíduo por Krigagem Ordinária. O mapa das estimativas pontuais da Figura 4.49 mostra estes valores. Os valores que mostram as maiores diferenças estão nas zonas de maior elevação topográfica com uma tendência do modelo de regressão gerar sobre-estimativas na zona de cota topográfica maior (Figura 4.43). Isso concorda com o modelo físico (item 2.6) e com as diferentes zonas de correlação observadas na Figura 4.3 (valores altos apresentam maior espalhamento).

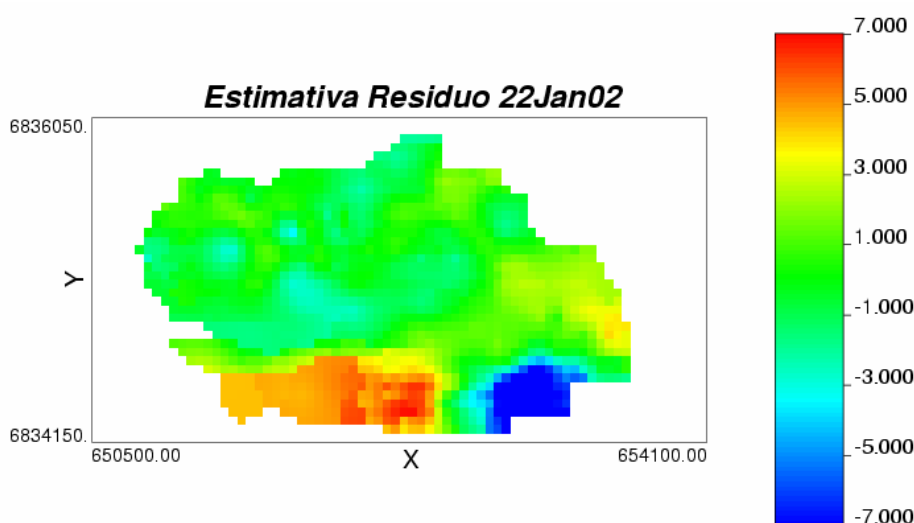


Figura 4.49 – Mapa das estimativas pontuais para o resíduo com os dados de 22 de Janeiro de 2002.

A Figura 4.50 mostra o mapa do desvio padrão de krigagem para os pontos estimados. Percebe-se, que este valor é baixo, já que inicialmente se parte de uma variância do resíduo menor que a variância dos dados de nível de água.

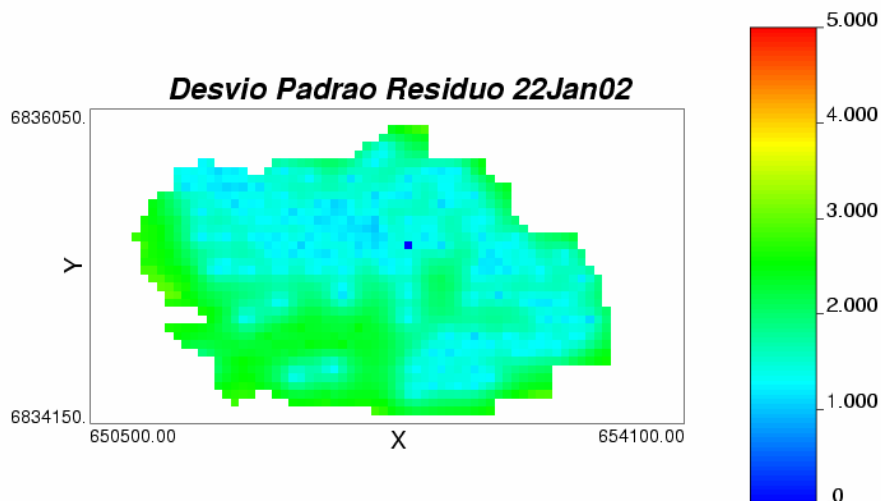


Figura 4.50 – Mapa de desvio padrão da estimativa com os dados de 22 de Janeiro de 2002.

Ao dispor do valor da topografia em todos os nós de estimativa, também se dispõe dos valores do nível de água que a regressão fornece. Portanto, utilizando as estimativas do resíduo pode se recompor o nível de água em cada nó. A Figura 4.51 apresenta o mapa das estimativas assim determinadas.

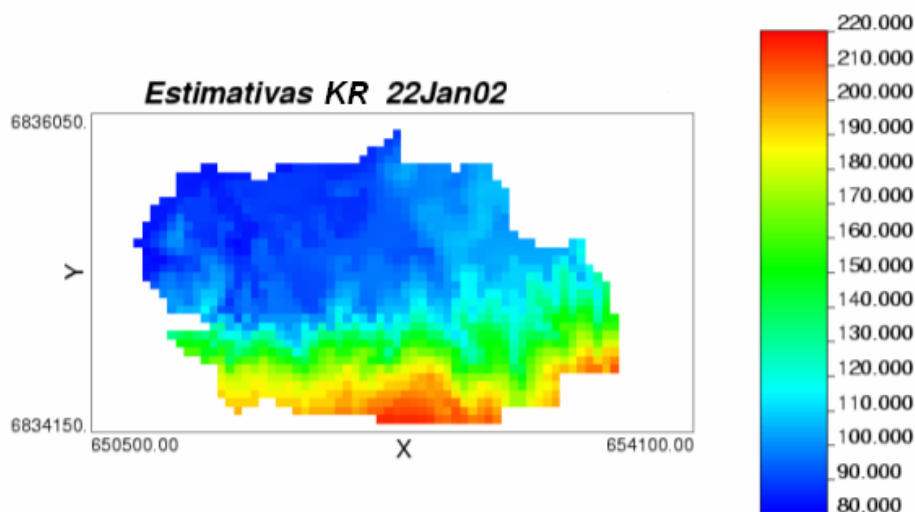


Figura 4.51 – Estimativas de nível de água calculadas a partir da krigagem do resíduo para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

O mapa é muito semelhante ao mapa obtido no caso da cokrigagem multicolocada (Figura 4.36) com uma maior semelhança ao mapa das estimativas pontuais da topografia (Figura 4.6).

Os mapas de contorno são apresentados na Figura 4.52. Os mapas guardam uma semelhança muito marcada com o mapa de contorno dos valores da topografia apresentado na Figura 4.7, e com o mapa obtido na cokrigagem multicolocada (Figura 4.38) como é esperado pela equivalência teórica existente entre ambos tipos de estimativa.

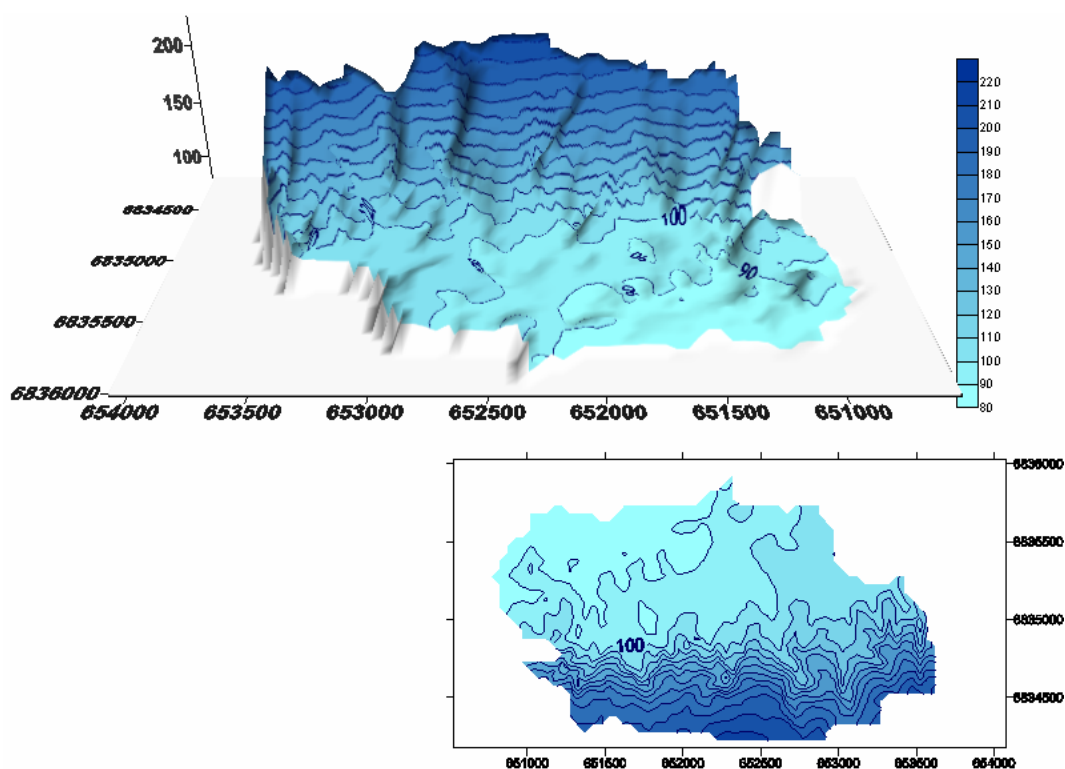


Figura 4.52 – Mapas de contorno das estimativas por krigagem do resíduo para os dados de 22 de Janeiro de 2002.

Uma análise mais detalhada destes mapas será realizada no Capítulo 5.

4.6.2 Krigagem do resíduo para o os dados do 26 de Dezembro

Analogamente, ao realizado com os dados de janeiro, também, nesse caso, é construída a curva de regressão entre a variável primária e a secundária. A curva e a equação correspondente se apresentam na Figura 4.53.

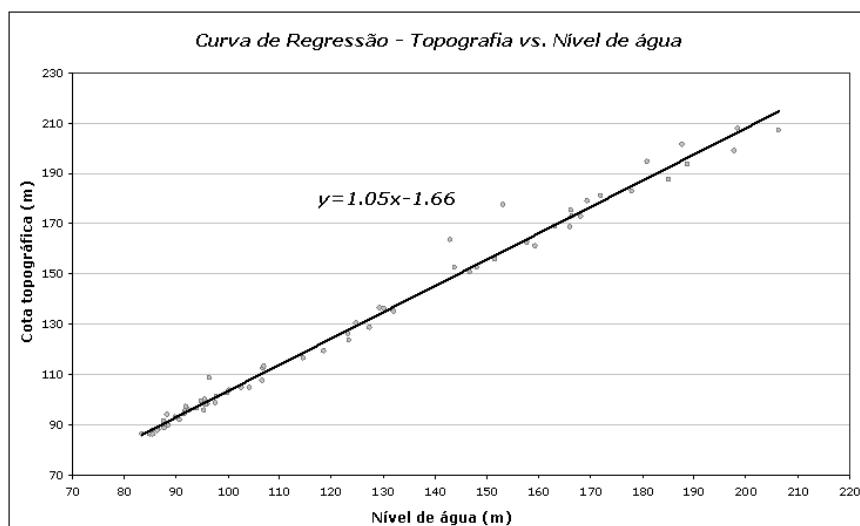


Figura 4.53 - Curva de regressão entre os dados da Cota Topográfica e o Nível de água para os dados de 26 de Dezembro de 2002.

O mapa de localização dos mesmos apresenta-se na Figura 4.54.

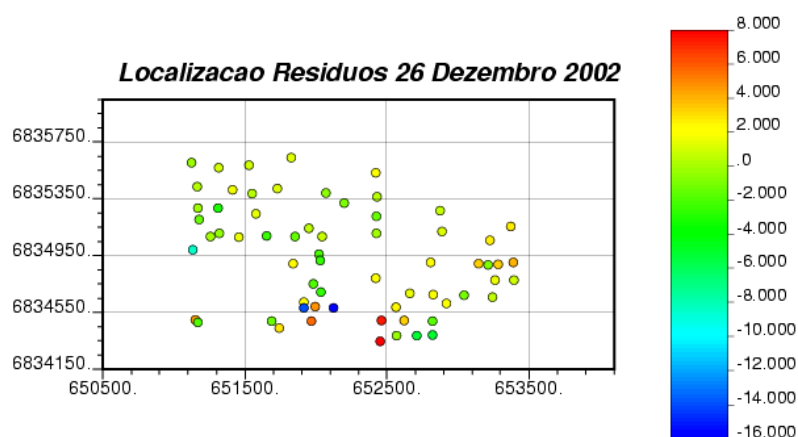


Figura 4.54 - Mapa de localização dos resíduos calculados com os dados de 26 de Dezembro de 2002.

O histograma da Figura 4.55 mostra, também, nesse caso, valores de resíduo com uma média próxima de zero, com a maior diferença sendo de superestimativa do modelo de regressão sobre o valor verdadeiro do nível de água.

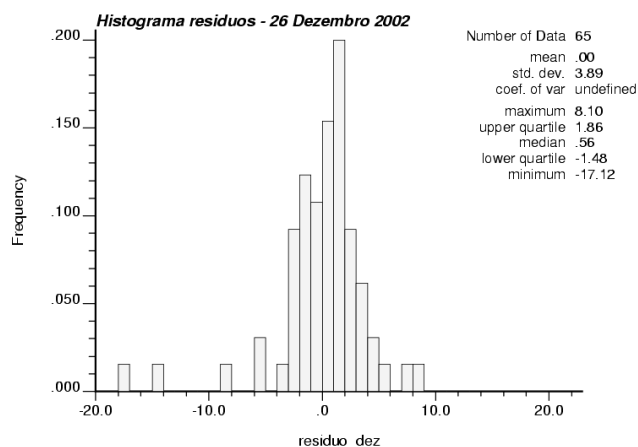


Figura 4.55 – Histograma dos resíduos calculados para os dados de 26 de Dezembro de 2002.

Para começar o estudo variográfico calcula-se o variograma de superfície (Figura 4.56) que não mostra uma direção marcada de anisotropia.

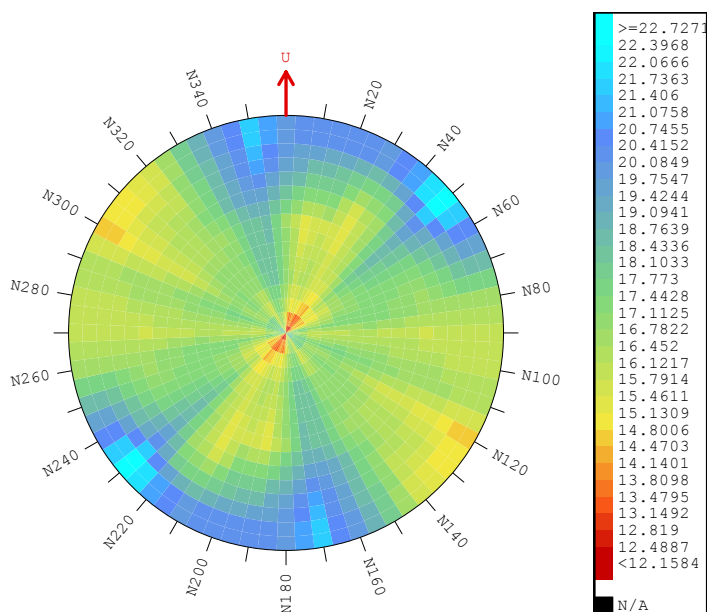


Figura 4.56 - Variograma de superfície $\gamma(h)$ para o resíduo do 26 de Dezembro de 2002.

Constrói-se o variograma omnidirecional (Figura 4.57).

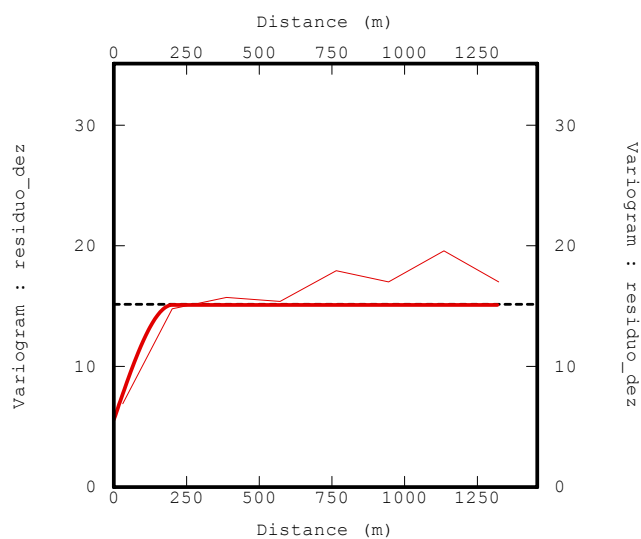
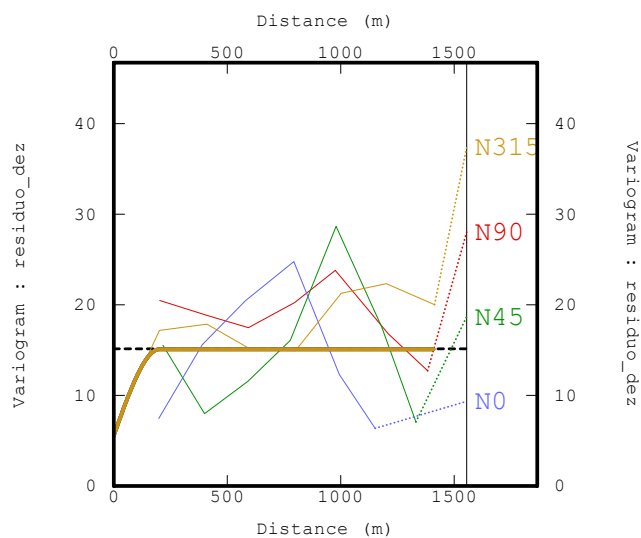


Figura 4.57 - Variograma omnidirecional para o resíduo do 26 de Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

Posteriormente, apresentam-se os variogramas direcionais (Figura 4.58) ajustando devidamente os modelos.



$$\gamma(h) = 5.60 + 9.51 \cdot Sph(202m)$$

Figura 4.58 - Variogramas direcionais para os resíduos calculados com os dados de 26 de Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

Assim, as estimativas são apresentadas no mapa das estimativas pontuais da Figura 4.59. As zonas de sub e sobre estimativa estão colocadas em regiões onde a densidade amostral é menor.

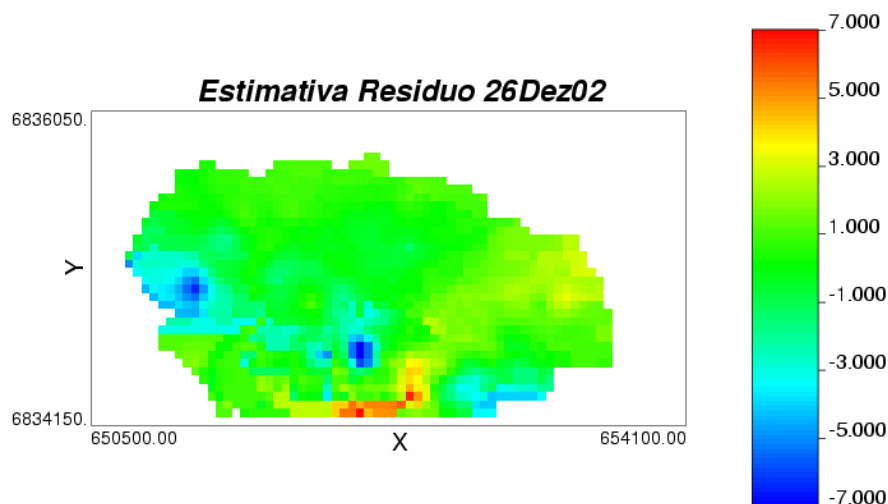


Figura 4.59 – Mapa das estimativas pontuais para o resíduo do 26 de Dezembro de 2002.

O desvio padrão das estimativas do resíduo (Figura 4.60) são de maior magnitude, que as correspondentes obtidas para os dados de janeiro (Figura 4.50) pela menor densidade amostral nesse segundo caso.

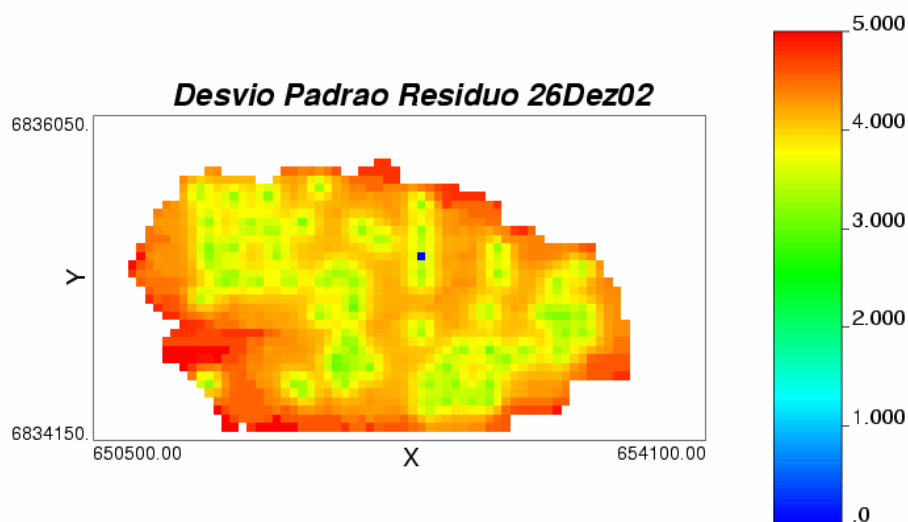


Figura 4.60 - Mapa do desvio padrão da estimativa com os dados de 26 de Dezembro de 2002.

Os valores reconstituídos a partir dos dados da topografia e dos resíduos são apresentados na Figura 4.61. O mapa é semelhante ao obtido utilizando cokrigagem multicolocada (Figura 4.40). Também, é muito semelhante ao mapa das estimativas obtidas para o 22 de janeiro (Figura 4.51), mas com valores um pouco mais elevados. Isso mostra uma maior independência da quantidade de dados primários nas estimativas, e uma dependência mais marcada com os dados da topografia (secundários).

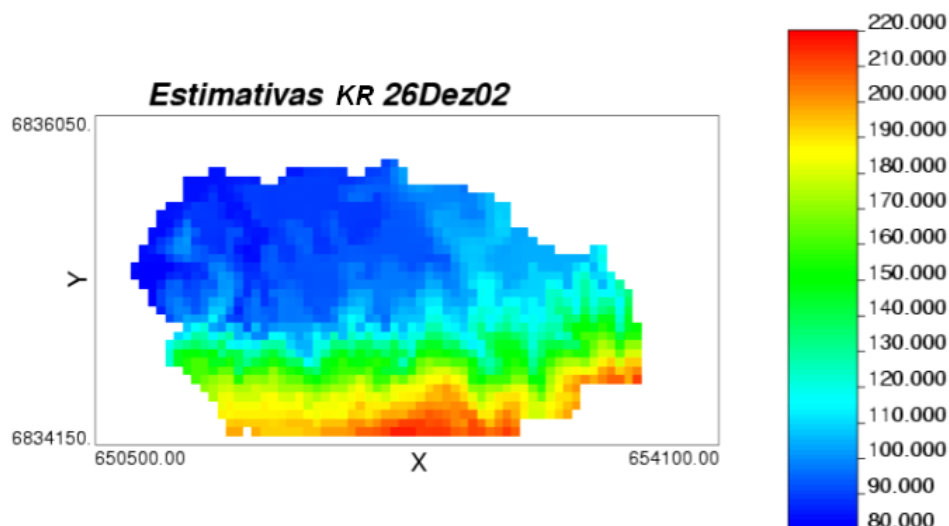


Figura 4.61 – Estimativas de nível de água calculadas a partir da krigagem do resíduo para o 26 de Dezembro de 2002.

Os mapas de contorno são apresentados na Figura 4.62. Eles são semelhantes ao mapa de contorno dos valores da topografia apresentado na Figura 4.7, e também com o mapa obtido na cokrigagem multicolocada (Figura 4.42) com algumas discrepâncias locais que podem ser atribuíveis à menor densidade amostral nesse segundo caso.

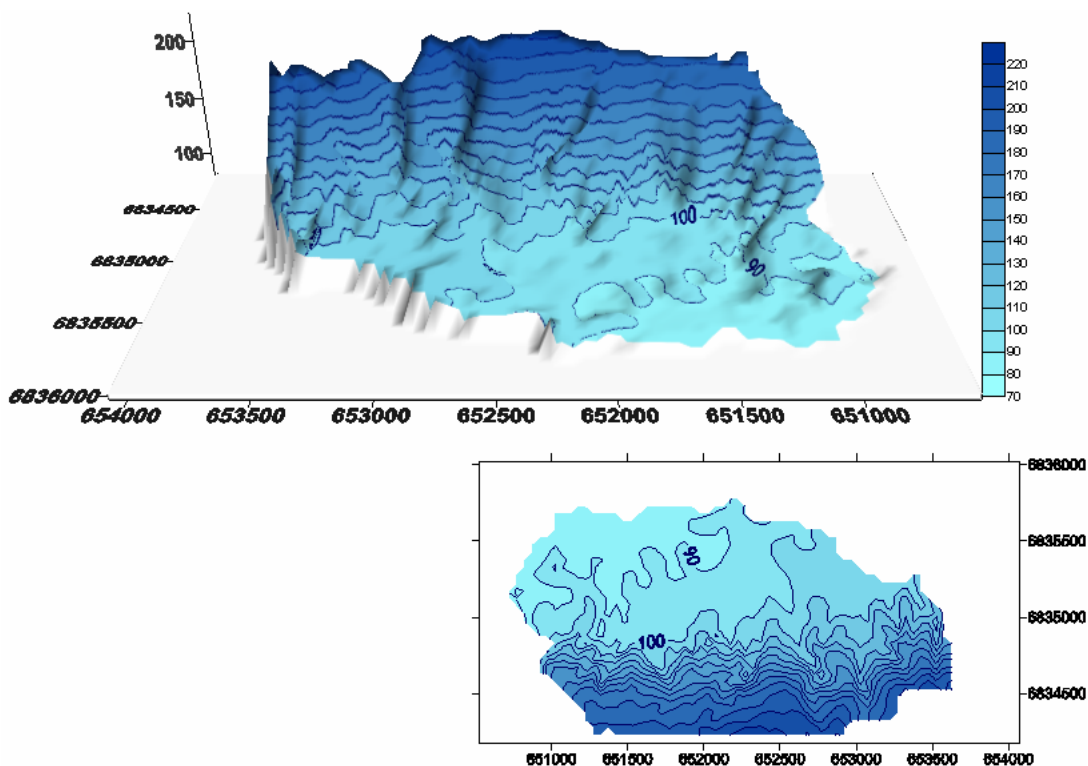


Figura 4.62 - Mapas de contorno das estimativas por krigagem do resíduo para o 26 de Dezembro de 2002.

Os resultados desse capítulo serão discutidos com maior profundidade no Capítulo 5.

CAPÍTULO 5

Análise e discussão dos resultados

Neste capítulo, são analisados os resultados apresentados no Capítulo 2 e no Capítulo 4. Comparam-se as estimativas utilizando a informação secundária com aquelas obtidas por krigagem ordinária da informação primária. Também, são comparados e avaliados as diferentes formas de introdução da informação secundária e os modelos de correionalização adotados. Posteriormente, analisa-se a influência do avanço da lavra e da pluviometria sobre a variação do nível de água ao longo do ano.

5.1 Análise dos resultados da krigagem ordinária

No Capítulo 2 e no Apêndice B, foram apresentados os mapas das estimativas pontuais e de contorno obtidos por krigagem ordinária a partir dos dados do nível de água medidos no ano 2002, assim como os mapas do desvio padrão de krigagem (ver item 2.10.2). Os histogramas das estimativas para cada data são apresentados na Figura 5.1

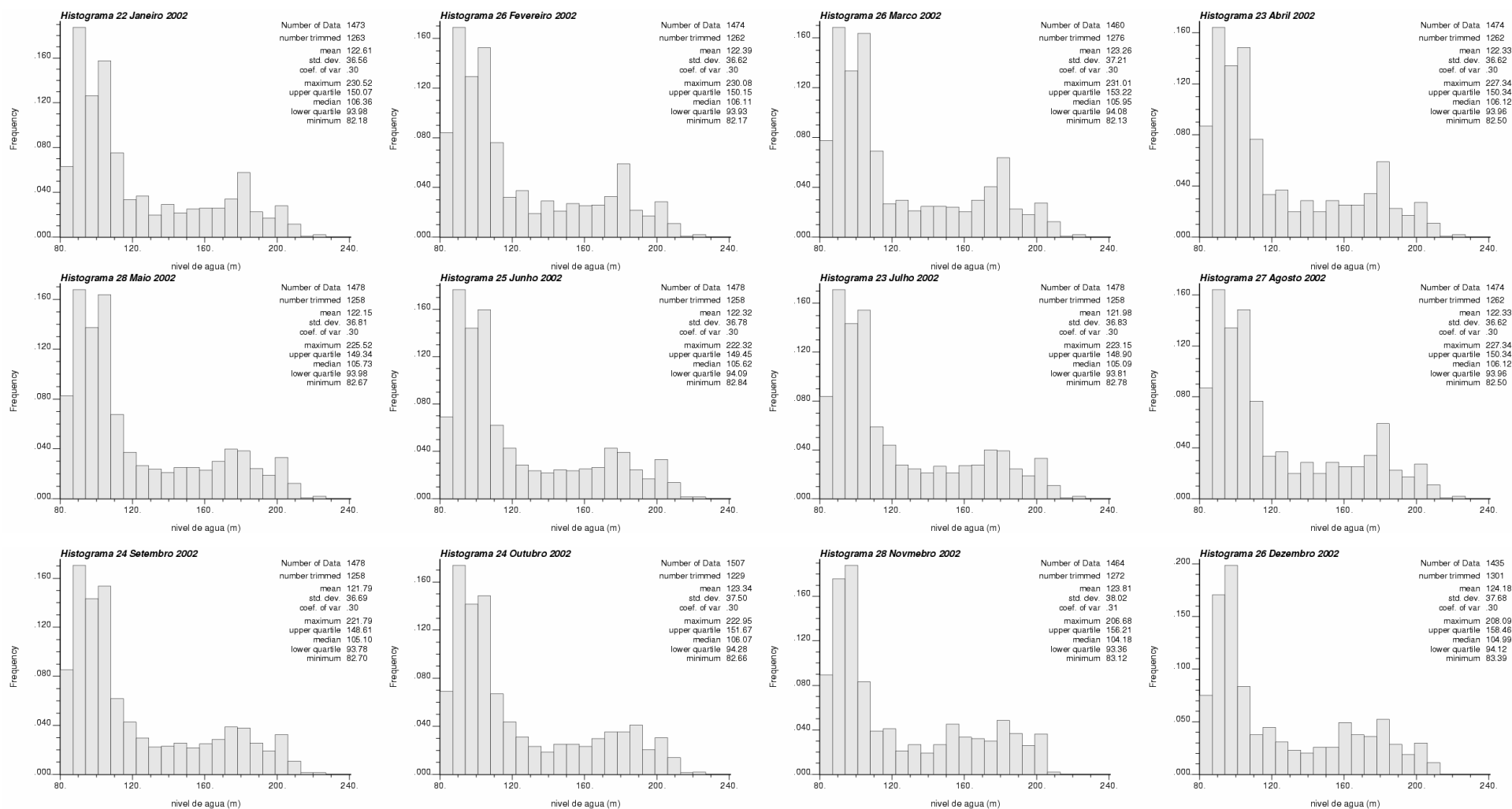


Figura 5.1 – Histogramas das estimativas por krigagem ordinária do nível de água a partir dos dados provenientes das datas entre Janeiro e Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

Comparando os histogramas com os da Figuras 2.12 dos dados originais e com os da Figura 2.13 obtidos aplicando técnicas de desagrupamento, pode-se observar que a krigagem provoca um desagrupamento dos valores, distribuindo-os mais homogeneamente nas diferentes classes do histograma. Na Tabela 5.1, são resumidos os parâmetros estatísticos globais (média, desvio padrão e coeficiente de variação) dos dados originais aplicando técnicas de desagrupamento e das estimativas por krigagem ordinária onde se observa a semelhança entre eles.

Tabela 5.1 – Parâmetros estatísticos globais dos dados originais aplicando técnicas de desagrupamento e das estimativas realizadas por krigagem ordinária

Data	Técnicas de desagrupamento			Krigagem Ordinária		
	Média (m)	Desvio Padrão (σ)	Coeficiente de Variação	Média (m)	Desvio Padrão (σ)	Coeficiente de Variação
22 Janeiro 2002	122.42	37.83	0.31	122.61	36.56	0.30
26 Fevereiro 2002	122.24	37.84	0.31	122.39	36.62	0.30
26 Março 2002	123.18	38.18	0.31	123.26	37.21	0.30
23 Abril 2002	122.19	37.86	0.31	122.33	36.62	0.30
28 Maio 2002	121.42	36.30	0.30	122.15	36.81	0.30
25 Junho 2002	121.46	36.22	0.30	122.32	36.78	0.30
23 Julho 2002	121.12	36.24	0.30	121.98	36.63	0.30
27 Agosto 2002	121.15	36.23	0.30	122.33	36.62	0.30
24 Setembro 2002	120.74	35.69	0.30	121.79	36.69	0.30
22 Outubro 2002	122.18	36.42	0.30	123.34	37.50	0.30
28 Novembro 2002	124.81	37.00	0.30	123.81	38.02	0.31
26 Dezembro 2002	124.47	36.52	0.29	124.18	37.68	0.30

Outra forma de avaliar as estimativas de krigagem ordinária é comparando os dados originais com as estimativas nos mesmos locais. Para isso, os dados originais são colocados na malha de estimativa utilizando a técnica do vizinho mais próximo (DAVIS, 1986, p. 308). Os mapas de localização dos dados re-locados e os histogramas correspondentes são apresentados na Figura 5.2 e na Figura 5.3 respectivamente. A técnica do vizinho mais próximo faz com que o número de dados seja menor ou igual ao número de dados original já que evita a redundância de dados muito próximos.

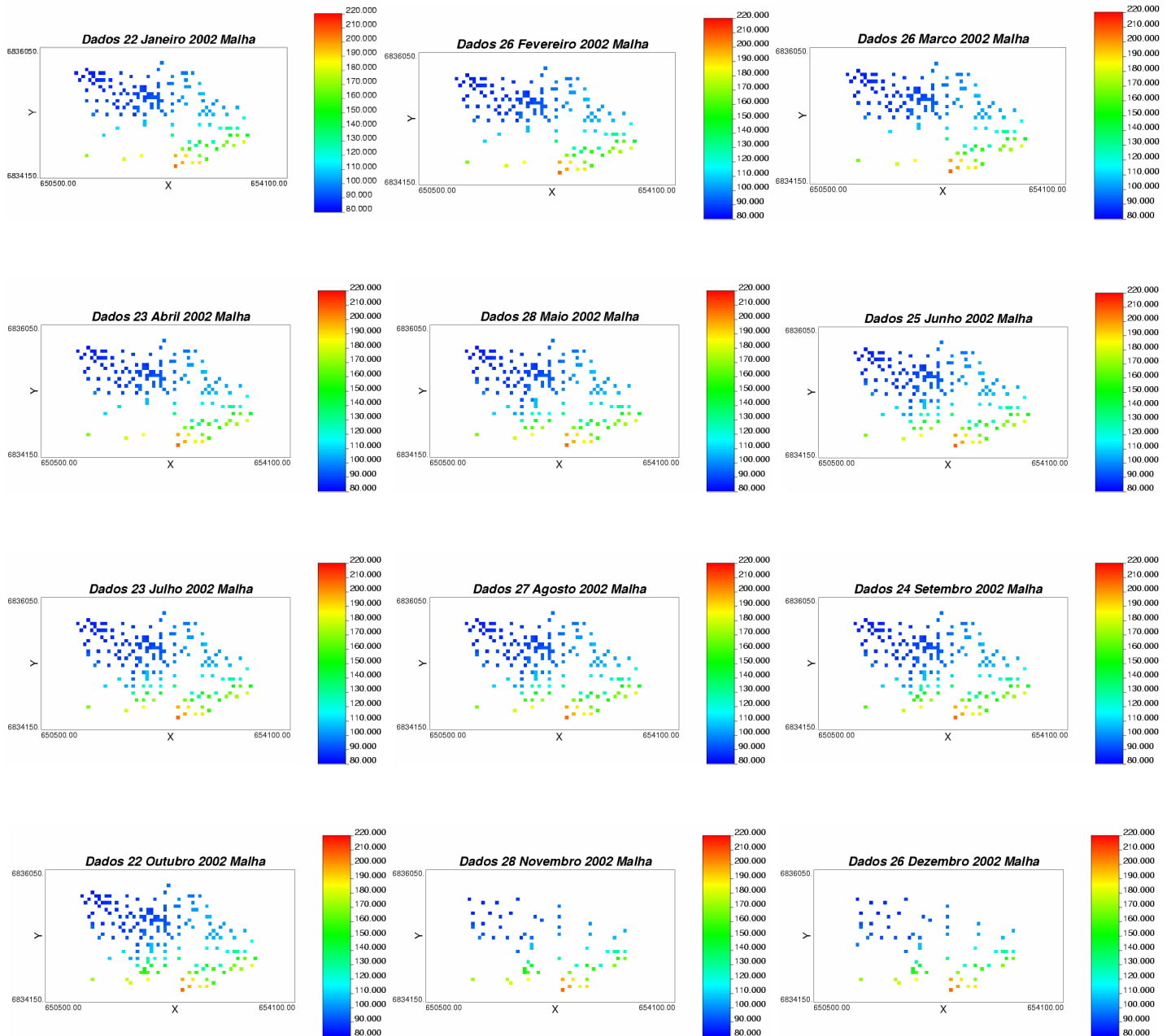


Figura 5.2 - Mapa de localização dos dados originais re-localados na malha de estimativa utilizando a técnica do vizinho mais próximo (DAVIS, 1986, p.308).

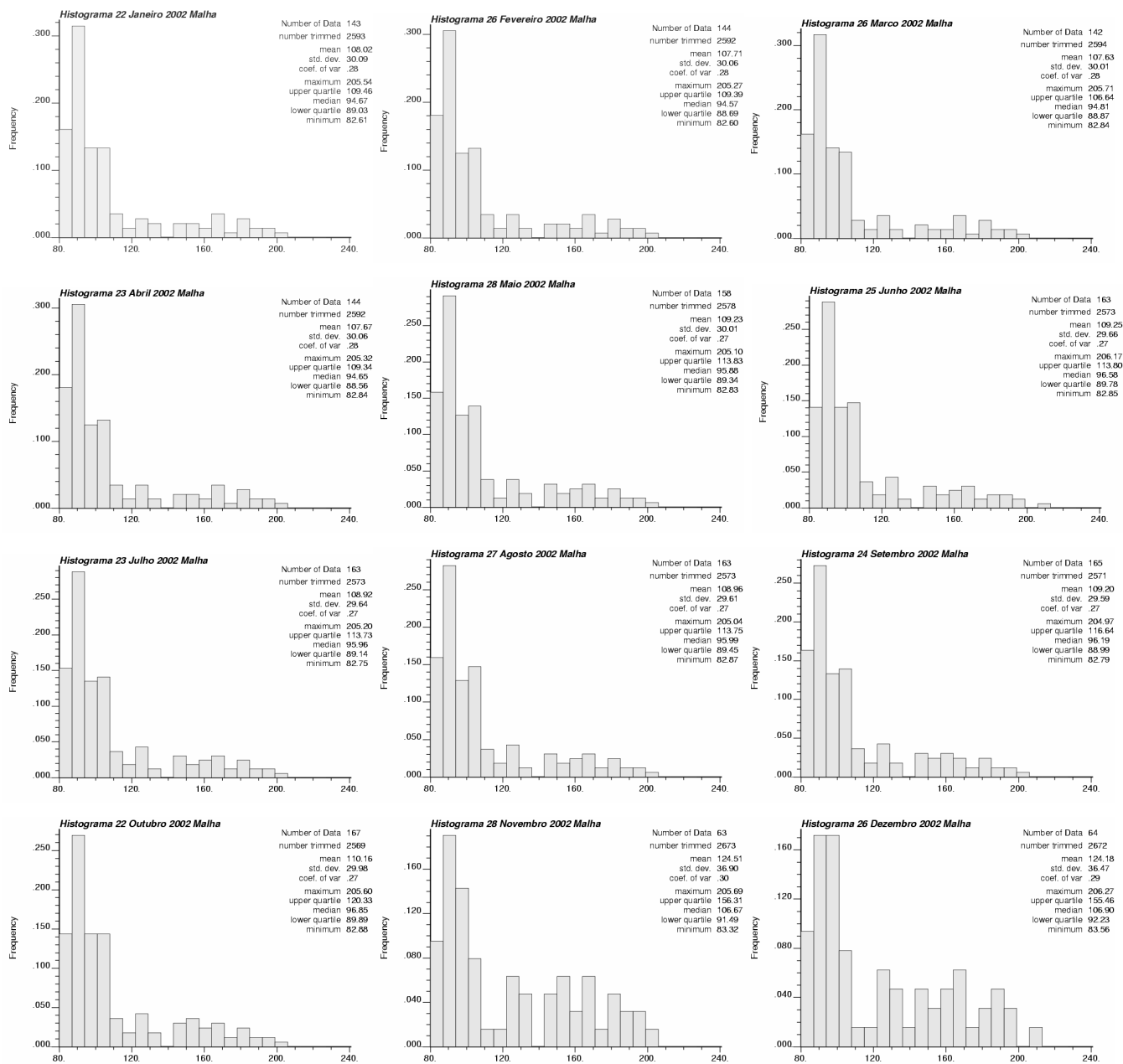


Figura 5.3 – Histograma dos dados originais re-locados na malha de estimativa (detalhe no Apêndice A).

Os gráficos de dispersão dos dados originais re-locados versus as estimativas nos mesmos locais são apresentados na Figura 5.4. O coeficiente de correlação entre ambos valores é um indicador da qualidade das estimativas. As estimativas por krigagem ordinária honram satisfatoriamente os dados originais, com coeficientes de correlação muito altos. Porém, as estimativas realizadas para as datas de 27 de Agosto, 24 de Setembro e 22 de Outubro apresentam uma dispersão maior entorno da reta $x=y$. Nestas datas, a densidade amostral é maior, e, portanto os dados re-locados não representam tão bem os dados originais.

No Capítulo 2, foi avaliada a krigagem ordinária utilizando validação cruzada (ver item 2.10.2). A qualidade das estimativas é considerada adequada, semelhante em todas as datas. A menor densidade amostral nas datas de 28 de Novembro e 26 de Dezembro provocam médias do erro e desvios padrões um pouco maiores quando comparados com as estimativas a partir dos dados de Janeiro a Outubro.

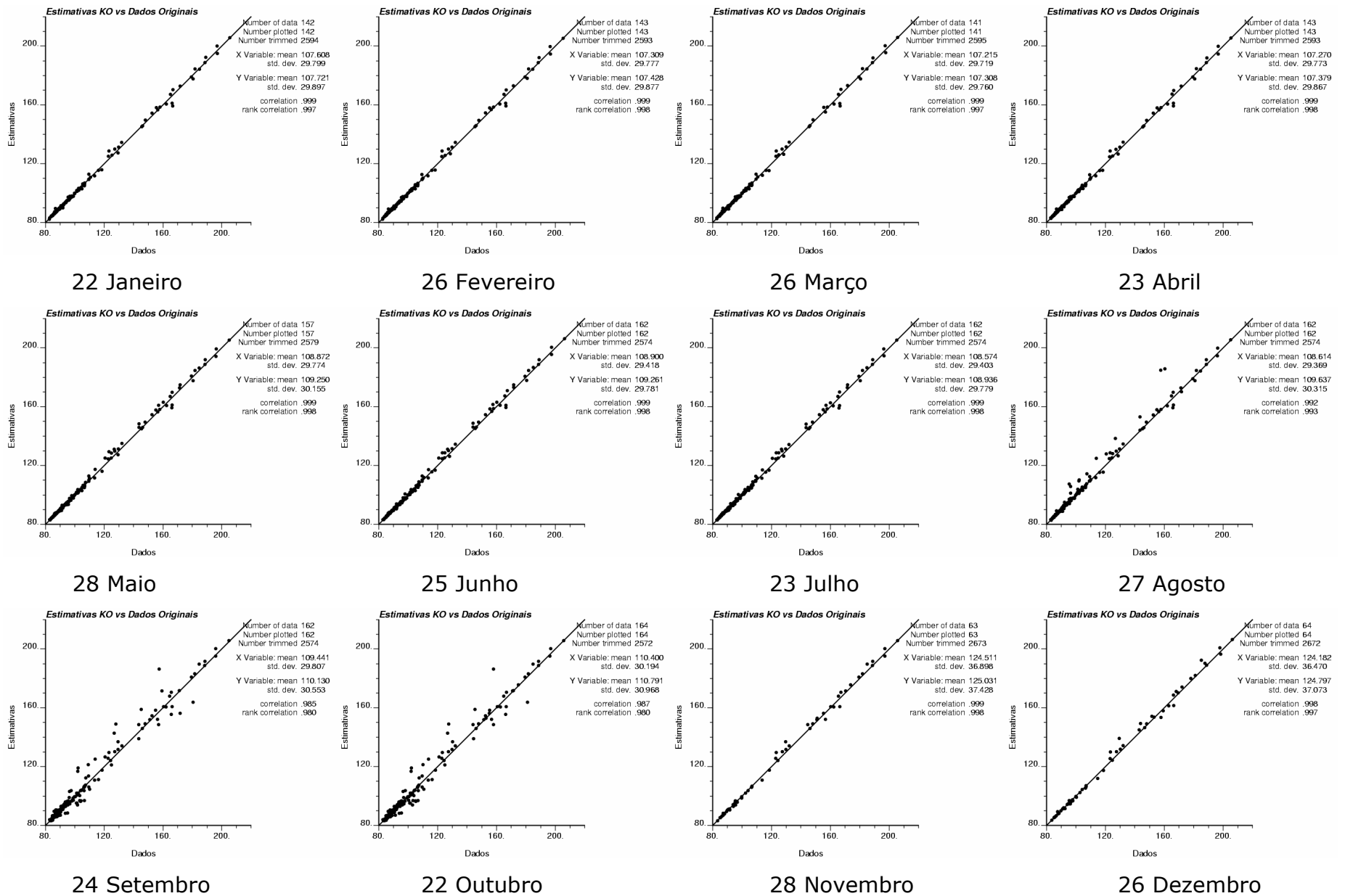


Figura 5.4 – Gráficos de dispersão das estimativas por krigagem ordinária de nível de água vs. dados originais relocalados na malha de estimativa para as datas consideradas do ano 2002 (detalhe no Apêndice A).

5.2 Análise dos resultados da cokrigagem ordinária e comparação com a krigagem ordinária

No Capítulo 4, foram apresentados os mapas das estimativas pontuais e de contorno das estimativas obtidas por cokrigagem colocada ordinária dos dados do nível de água para o 22 de Janeiro e o 26 de Dezembro, utilizando a topografia como informação secundária. As seguintes alternativas foram propostas:

- Cokrigagem colocada estrita ordinária (CKCO) utilizando o Modelo Linear de correionalização, MLC (ver item 4.4.1),
- Cokrigagem colocada estrita ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 1, MM1 (ver item 4.4.2),
- Cokrigagem colocada estrita ordinária (CKCO) utilizando o Modelo de Markov 2, MM2 (ver item 4.4.3),
- Cokrigagem multicolocada (CKMCO) utilizando o Modelo do Resíduo, MR (ver item 4.5), e
- Krigagem do resíduo, KR (ver item 4.6).

A qualidade dos modelos gerados por estes métodos é avaliada, comparando-a com a qualidade da krigagem ordinária e comparando-os entre eles. Um método é adequado quando conjuntamente fornece vantagens desde o ponto de vista matemático, sendo consistente fisicamente com o fenômeno sob estudo.

Para comparar os métodos são realizadas as seguintes avaliações:

i) Comparação dos histogramas das estimativas com os histogramas dos dados originais desagrupados.

ii) Comparação visual dos mapas das estimativas pontuais obtidas aplicando os diferentes métodos.

iii) Comparação da variância de cokrigagem multicolocada com a variância de krigagem ordinária.

iv) Utilização de um índice de qualidade matemática baseado na discrepância entre os valores estimados em relação aos dados originais re-locados.

v) Utilização dos mapas das diferenças entre a topografia e o nível de água para visualização dos locais onde aflora o aquífero livre. A superposição dos mesmos com os mapas de rios, drenagens e banhados assim como com as falhas, diques e fraturas, mostram a adequação do modelo proposto.

vi) Verificação da reprodução da correlação entre as variáveis nos coeficientes de correlação regionalizados (Equação 3.38, item 3.4).

5.2.1 Histogramas das estimativas e dos dados originais

Os histogramas das estimativas para o 22 de Janeiro e para o 26 de Dezembro, utilizando as diferentes alternativas que incorporam informação secundária, são apresentados na Figura 5.5 e Figura 5.6 respectivamente.

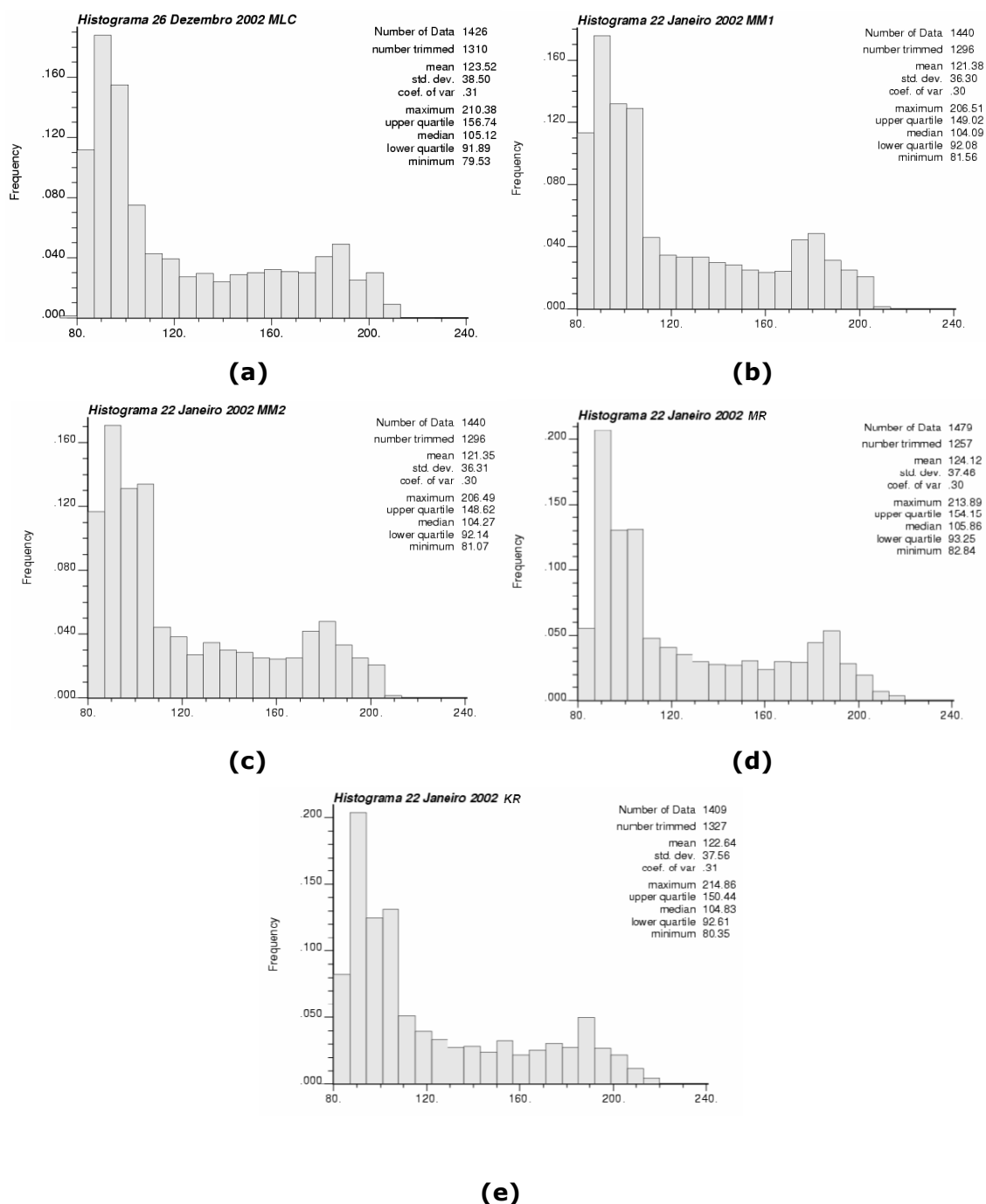


Figura 5.5 – Histograma das estimativas realizadas para os dados de nível de água do 22 de Janeiro de 2002 por cokrigagem ordinária (a) Colocada estrita utilizando o MLC, (b) Colocada estrita utilizando o MM1, (c) Colocada estrita utilizando o MM2, (d) Multicolocada utilizando o MR e por (e) Krigagem do Resíduo (detalhe no Apêndice A).

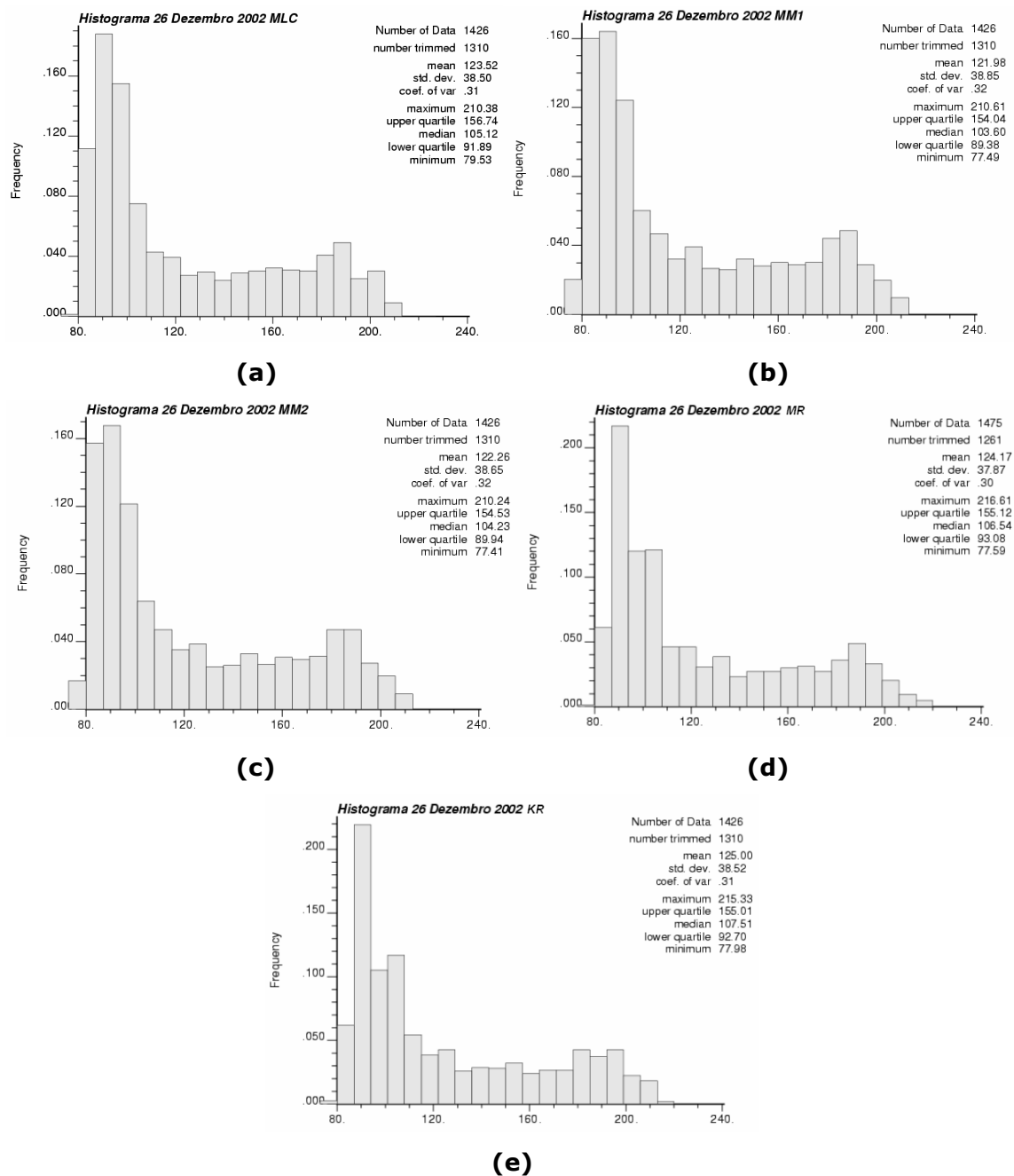


Figura 5.6 - Histograma das estimativas realizadas para os dados de nível de água do 26 de Dezembro de 2002 por cokrigagem ordinária (a) Colocada estrita utilizando o MLC, (b) Colocada estrita utilizando o MM1, (c) Colocada estrita utilizando o MM2, (d) Multicolocada utilizando o MR e por (e) Krigagem do Resíduo (detalhe no Apêndice A).

Na Tabela 5.2 se apresenta um quadro comparativo dos parâmetros estatísticos obtidos aplicando técnicas de desagrupamento, krigagem, cokrigagem e krigagem do resíduo.

Tabela 5.2 – Quadro comparativo dos parâmetros estatísticos para os dados desagrupados e para as diferentes estimativas no 22 de Janeiro e no 26 de Dezembro de 2002

22 de Janeiro de 2002							
	Tec. Des.	KO	MLC	MM1	MM2	MR	KR
Média	122.42	122.61	122.63	121.38	121.35	124.12	122.64
Desvio Padrão	37.83	36.56	36.39	36.30	36.31	37.46	37.56
Mediana	104.36	106.36	106.02	104.09	104.27	105.86	104.83
Coeficiente de Variação	0.31	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.31
26 de Dezembro de 2002							
	Tec. Des.	KO	MLC	MM1	MM2	MR	KR
Média	124.47	124.18	123.52	121.98	122.26	124.17	125.00
Desvio Padrão	36.52	37.68	38.50	38.85	38.65	37.87	38.52
Mediana	105.74	104.99	105.12	103.60	104.23	106.54	107.51
Coeficiente de Variação	0.29	0.30	0.31	0.32	0.32	0.30	0.31

Nota: Tec. Des: técnicas de desagrupamento, KO: krigagem ordinária, MLC: cokrigagem colocada estrita utilizando o Modelo Linear de Corregionalização, MM1: Cokrigagem colocada estrita utilizando o Modelo de Markov 1, MM2: Cokrigagem colocada estrita utilizando o Modelo de Markov 2, MR: Cokrigagem multicolocada utilizando o Modelo do Resíduo, KR: Krigagem do resíduo.

Como já foi discutido no item 2.8, as técnicas de desagrupamento não se mostraram adequadas para compensar a amostragem preferencial nas zonas de baixo nível de água. Portanto, a similitude dos parâmetros estatísticos das estimativas com os provenientes da análise preliminar dos dados desagrupados não é um indicador de maior qualidade dessas estimativas. Destaca-se, que no

caso do 26 de Dezembro de 2002, os valores do mínimo para as estimativas por cokrigagem (Figura 5.6) estão abaixo dos 80 metros. Assim, evidencia-se uma maior vinculação do nível de água à topografia, neste caso, em que se dispõe de uma menor quantidade de dados primários.

Observando os parâmetros da tabela, observa-se que a equivalência entre as estimativas realizadas utilizando cokrigagem multicolocada com o Modelo do Resíduo e as estimativas utilizando a krigagem do resíduo não é completa. Isso se deve à falta de equivalência entre os modelos variográficos utilizados para as duas metodologias. Para serem equivalentes, o modelo variográfico do resíduo deve ser determinado a partir dos variogramas diretos (item 3.8.2, RIVOIRARD, 2001).

5.2.2 Mapas das estimativas pontuais

Os mapas das estimativas pontuais realizadas utilizando as diferentes metodologias de incorporação de informação secundária, foram apresentados no Capítulo 4. Na Figura 5.7 e na Figura 5.8, são apresentados novamente para o 22 de Janeiro e para o 26 de Dezembro respectivamente. Como já foi salientado no Capítulo 4, as estimativas por cokrigagem e por krigagem do resíduo apresentam uma maior vinculação à topografia quando comparadas com as de krigagem ordinária. Também, aqui é evidenciado que no caso das estimativas para o 26 de Dezembro a influência da topografia é ainda maior.

O mapa suavizado das estimativas por krigagem ordinária contrasta com os mapas com maiores irregularidades provenientes da introdução da informação secundária. As estimativas que introduzem uma maior quantidade de dados secundários, como é o caso da cokrigagem multicolocada e a krigagem do resíduo, apresentam mais marcadamente as características da topografia (comparar com a Figura 4.7).

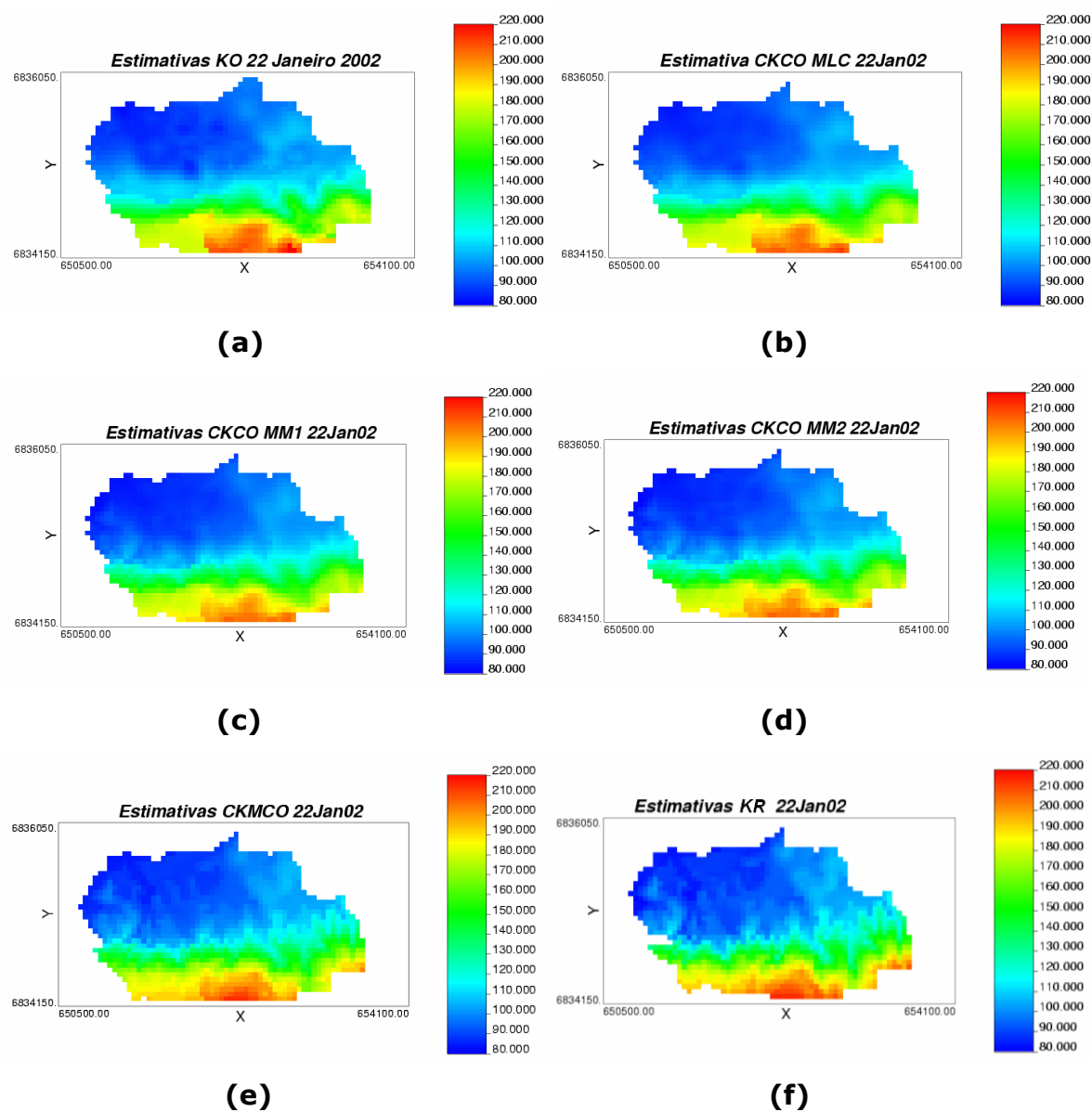


Figura 5.7 – Mapas das estimativas pontuais realizadas sobre os dados do 22 de Janeiro de 2002 utilizando: (a) krigagem ordinária, cokrigagem (b) colocada estrita utilizando o MLC, (c) colocada estrita utilizando o MM1, (d) colocada estrita utilizando o MM2, (e) multicolocada utilizando o Modelo do Resíduo e (f) utilizando a krigagem do resíduo.

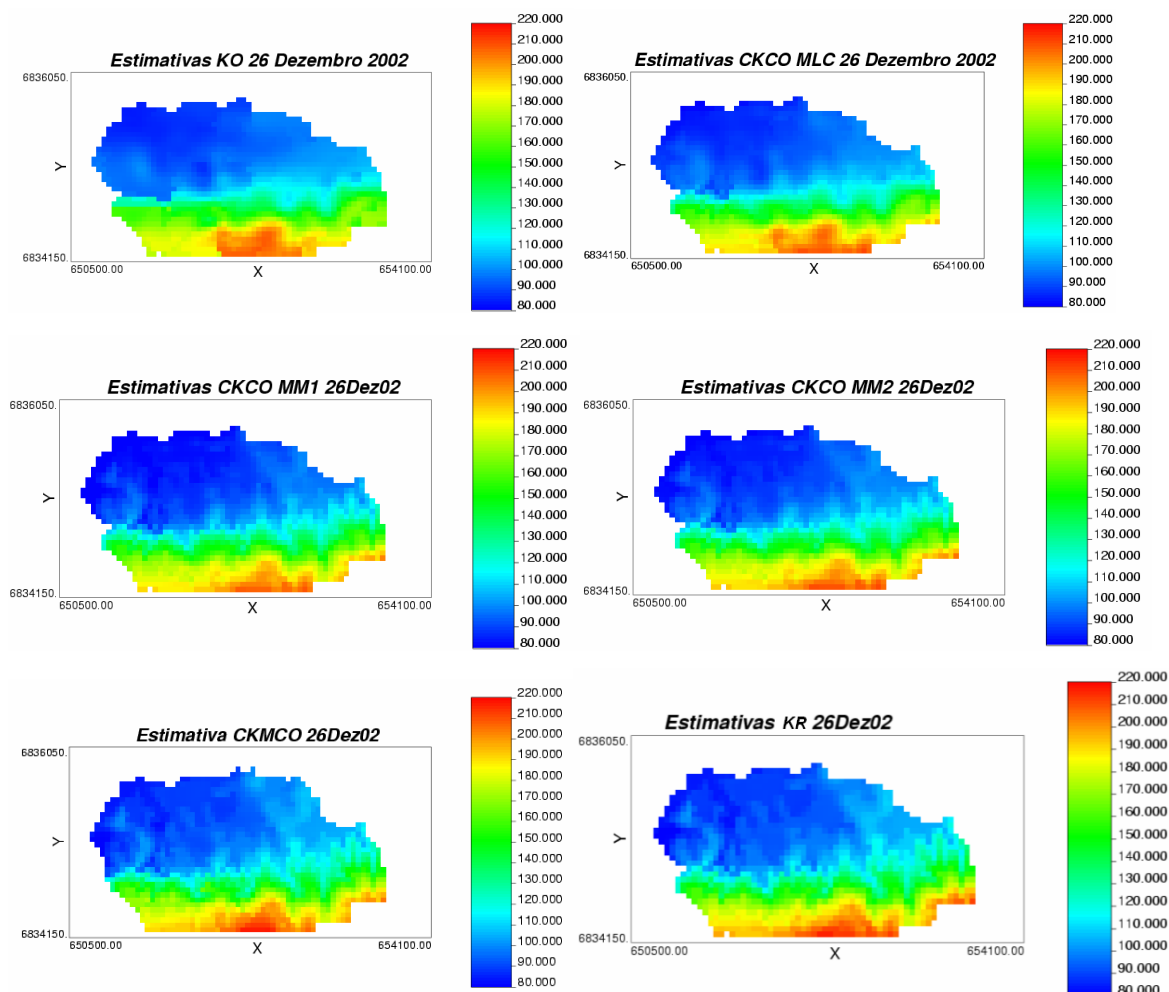


Figura 5.8 - Mapas das estimativas pontuais realizadas sobre os dados do 26 de Dezembro de 2002 utilizando: (a) krigagem ordinária, cokrigagem (b) colocada estrita utilizando o MLC, (c) colocada estrita utilizando o MM1, (d) colocada estrita utilizando o MM2, (e) multicolocada utilizando o Modelo do Resíduo e (f) utilizando a krigagem do resíduo.

5.2.3 Variância de Cokrigagem vs. Variância de Krigagem

Os mapas do desvio padrão de cokrigagem foram construídos somente para as estimativas realizadas utilizando cokrigagem multicolocada (item 4.6), já que, no caso da cokrigagem colocada estrita, alguns valores obtidos são negativos (item 4.5) devido fundamentalmente à adoção de um modelo Gaussiano para modelar os variogramas diretos e cruzados. A Figura 5.9 apresenta os mapas de desvio padrão de krigagem ordinária (item 2.10.2) e de cokrigagem multicolocada (item 4.5) para o 22 de Janeiro e para o 26 de Dezembro. Comprova-se assim a marcada diminuição no valor do desvio padrão

de cokrigagem quando comparado com o de krigagem. Dessa forma, a variância perdida é menor levando a uma redução do suavizado e reproduzindo melhor as características originais do fenômeno sob estudo (ver itens 2.9.1 e 3.3).

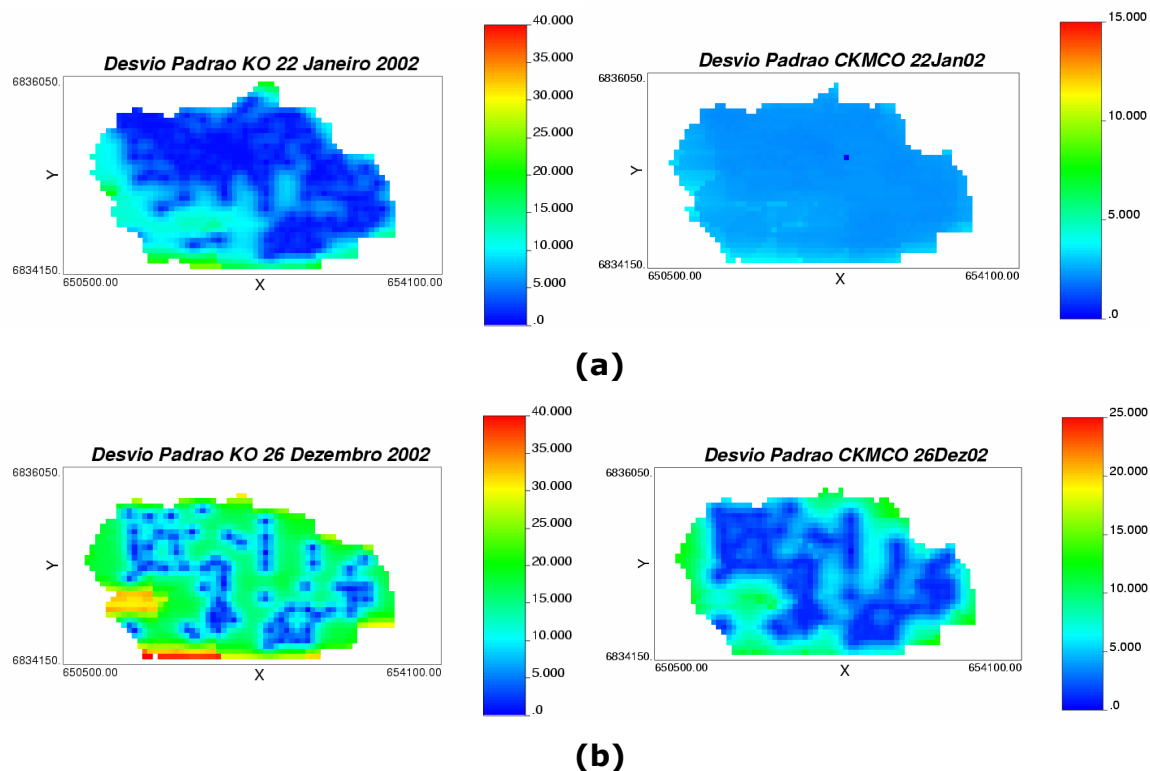


Figura 5.9 – Mapas do desvio padrão de krigagem ordinária (KO) e de cokrigagem multicolocada ordinária utilizando o Modelo do Resíduo (CKMCO), para (a) 22 de Janeiro de 2002 e (b) 26 de Dezembro de 2002.

5.2.4 Índice de qualidade matemática

Para avaliar matematicamente os modelos gerados, um índice (COSTA, 1997, p. 15) é usado para comparar as estimativas com os dados re-locados na malha de estimativa. A média (m) e a mediana (M) do erro, medem o viés do conjunto das estimativas. O erro quadrático médio (EQM) e o desvio padrão (σ) medem a imprecisão das estimativas. O valor ideal para esses valores é zero (0). O coeficiente de correlação (ρ) e o coeficiente angular B da regressão linear $y = Bx$, provenientes do gráfico de dispersão das estimativas versus os dados re-locados, verificam a precisão do método. Nesses casos, o valor ideal é um (1).

Calculando as diferenças entre a estimativa e o dado original re-locado para cada local se tem uma boa aproximação do erro cometido para cada valor. Assim, pode-se determinar a média, a mediana e o desvio padrão do mesmo, também, é calculado o erro quadrático médio. De gráficos de dispersão das estimativas versus os dados re-locados obtém-se o coeficiente de correlação e também, se realizam os gráficos de regressão linear para a determinação do coeficiente angular B . Os elementos necessários para a determinação do índice matemático são apresentados no Apêndice D.

Na Tabela 5.3, apresentam-se os parâmetros de qualidade das estimativas e o índice de qualidade para os diferentes métodos. Cada indicador de qualidade é comparado entre os diferentes métodos, recebendo pontuação crescente, a medida que se deteriora ficando mais afastado do valor ideal. O método que no final apresentar o menor índice de qualidade, é o mais adequado.

Tabela 5.3 – Tabela dos parâmetros de qualidade das estimativas e o índice de qualidade para os diferentes métodos. KO: krigagem ordinária, MLC: cokrigagem colocada estrita utilizando o Modelo Linear de Corregionalização, MM1: Cokrigagem colocada estrita utilizando o Modelo de Markov 1, MM2: Cokrigagem colocada estrita utilizando o Modelo de Markov 2, MR: Cokrigagem multicolocada utilizando o Modelo do Resíduo, KR: Krigagem do resíduo

22 de Janeiro de 2002						
	KO	MLC	MM1	MM2	MR	KR
m	0.11 ²	-0.10 ¹	-0.88 ⁶	-0.65 ⁵	0.27 ⁴	0.25 ³
M	0.04 ¹	-0.12 ²	-0.92 ⁶	-0.64 ⁵	0.28 ³	0.31 ⁴
EQM	1.88 ¹	4.54 ³	6.25 ⁴	4.28 ²	10.81 ⁵	11.56 ⁶
σ	1.37 ¹	2.13 ³	2.34 ⁴	1.96 ²	3.28 ⁵	3.39 ⁶
ρ	0.999 ¹	0.997 ³	0.997 ³	0.998 ²	0.996 ⁴	0.994 ⁵
B	0.999 ¹	1.001 ¹	1.008 ⁵	1.006 ⁴	0.998 ²	0.997 ³
Índice	7	13	28	20	23	27
26 de Dezembro de 2002						
	KO	MLC	MM1	MM2	MR	KR
m	0.62 ²	0.37 ¹	-0.81 ⁵	-0.69 ³	0.76 ⁴	0.82 ⁶
M	0.06 ¹	0.20 ²	-1.45 ⁶	-1.23 ⁵	-0.85 ⁴	0.49 ³
EQM	5.85 ¹	5.90 ²	8.89 ⁴	7.08 ³	10.75 ⁵	13.38 ⁶
σ	2.34 ²	2.31 ¹	2.87 ⁴	2.57 ³	3.19 ⁵	3.57 ⁶
ρ	0.998 ¹	0.998 ¹	0.997 ²	0.998 ¹	0.996 ³	0.995 ⁴
B	0.996 ¹	0.995 ²	1.005 ²	1.004 ¹	0.994 ³	0.993 ⁴
Índice	8	9	23	16	24	29

Nota: m, M e σ fazem referência à média, mediana e desvio padrão do erro (Estimativas - Dado re-locado), EQM é o erro quadrado médio e ρ e B são respectivamente o coeficiente de correlação e o coeficiente angular da reta de regressão. Os valores supra-escritos são os valores da pontuação para quantificar o índice de qualidade.

Analisando os índices de qualidade da Tabela 5.3, observa-se que para ambas datas, o melhor índice corresponde à krigagem ordinária. No sistema de krigagem ordinária, os pesos são determinados de forma tal, que a média do erro é nula e o desvio padrão é minimizado. O índice reflete essa otimização do estimador.

Com respeito às técnicas que introduzem informação secundária, comparadas entre si, pode-se dizer que o desempenho matemático do MLC mostrou-se mais adequado. No caso do MM1, a qualidade matemática apresentou-se menor que métodos comparáveis como o MM2 e o MLC. Isso demonstra o custo da simplificação que o modelo impõe. O MM2, é um caso particular do MLC que quando ajustado, depende marcadamente do modelo escolhido para o variograma do resíduo. A qualidade matemática da cokrigagem multicolocada e da krigagem do resíduo aparece menor que os outros métodos discutidos. A introdução de mais dados secundários, provoca uma maior diferença das estimativas com as da krigagem ordinária que são as ótimas quando somente a variável primária é considerada.

5.2.5 Mapa das diferenças entre a topografia e o nível de água

O índice de qualidade não mede a consistência das estimativas com os fenômenos físicos modelados. Ele somente fornece um indicador de quão boa é a estimativa nos locais nos quais se dispõe de informação primária. Mas, é também importante a consistência das estimativas nos locais onde essa não está disponível.

Todos os métodos de interpolação fornecem estimativas, nos locais onde não se dispõe da informação da variável de interesse, e estas apresentam um erro associado. As metodologias de estimativa utilizadas fornecem um erro de estimativa que em média é nulo e cuja variância é mínima. Dessa forma, em cada local onde se estima, existe um erro associado distribuído normalmente com média zero, mas não nulo. Um método será melhor frente ao outro, quando os valores estimados estejam em maior concordância com o fenômeno físico estudado.

Para avaliar essa concordância são utilizados os mapas das diferenças entre a topografia e o nível de água. Ao subtrair o valor do nível de água ao valor da topografia a diferença representa a espessura da zona não saturada. Em locais de cota topográfica mais elevada espera-se que essa diferença seja maior que em zonas de depressão topográfica (item 2.6).

No caso de estudo, se dispõe de locais onde é conhecida a cota topográfica e o valor da estimativa do nível de água, determinada por interpolação. A diferença entre esses valores apresenta o erro associado da estimativa do nível

de água. Se a diferença entre a topografia e o nível de água apresentar um valor menor do que zero, isso representaria um local onde o nível de água é superior ao valor da cota topográfica. É desejável que os valores onde isso acontece estejam de acordo com locais onde a água ocorre naturalmente.

Geralmente as drenagens e rios, estão conectados (SOPHOCLEOUS, 2002) com aquífero livre. Portanto, ao superpor os mapas das diferenças entre a topografia e o nível de água com os mapas de rios, drenagens e banhados, assim como com as falhas e diques presentes, é possível avaliar a adequação do modelo proposto para o nível de água, já que são os locais de ocorrência natural da insurgência de água.

Na Figura 5.12 a Figura 5.23, são apresentados esses mapas para as estimativas realizadas utilizando krigagem ordinária, cokrigagem com os diferentes modelos de correção e utilizando a krigagem do resíduo. Nas escalas coloridas, ao lado de cada figura, apresenta-se o valor da diferença entre a topografia e o nível de água. Os valores em azul (mínimo da escala) correspondem a locais onde se espera uma ocorrência natural de água. Ao subir na escala os valores correspondem com valores baixos, médios e altos da diferença entre as duas variáveis. Como é esperado, locais de maior cota topográfica (Figura 4.6), correspondem a valores da diferença mais elevados, como já foi mencionado (item 2.6).

Observando os mapas para as duas datas consideradas, se faz evidente que a diferença na abundância de dados primários é fundamental nas estimativas. Os dois casos são contrapostos. Os dados do 22 de janeiro apresentam-se densamente amostrados, com muitos piezômetros próximos uns dos outros na região da depressão topográfica (Figura 5.10). Os dados correspondentes ao 26 de dezembro apresentam uma quantidade de piezômetros muito menor, mas distribuídos de forma mais uniforme no total da área considerada (Figura 5.11).

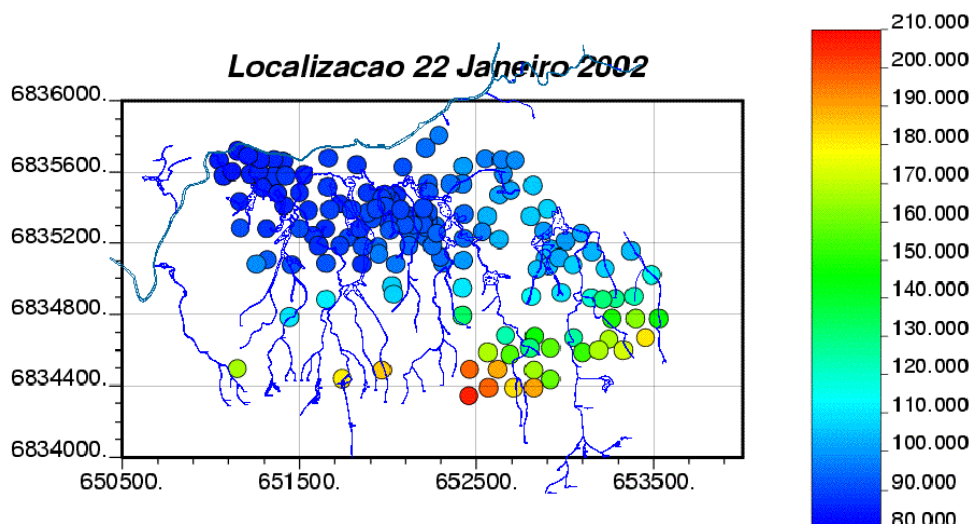


Figura 5.10 – Mapa de localização das leituras de nível de água (m) na área de interesse para o 22 de Janeiro de 2002.

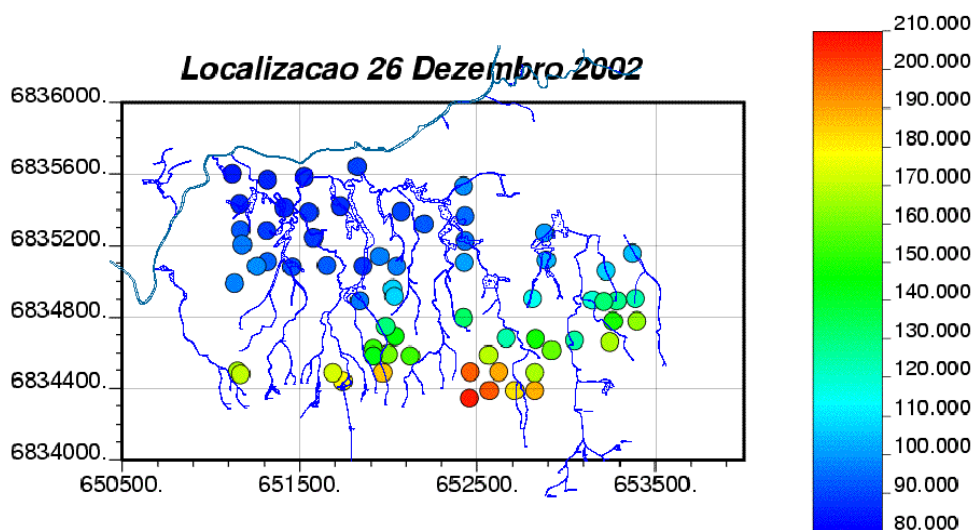


Figura 5.11 - Mapa de localização das leituras de nível de água (m) na área de interesse para o 26 de Dezembro de 2002..

Analisando os mapas das diferenças, observa-se que as maiores inconsistências correspondem a locais onde as cotas topográfica são mais elevadas. São esses locais onde a correlação entre a topografia e o nível de água se vê um pouco deteriorada (Figura 4.3) e onde os diferentes métodos utilizados apresentam as suas diferenças mais salientes entre eles.

Nos mapas correspondentes ao 22 de janeiro, muitos valores em azul aparecem em locais onde não é esperada a presença natural de água, tanto nos mapas que utilizam as estimativas de krigagem ordinária como nos mapas que utilizam as estimativas que incorporam a informação secundária. Isso pode

acontecer devido ao peso atribuído à variável secundária não ser suficiente para diminuir os valores de nível de água mais densamente amostrados. Técnicas que incorporam uma maior quantidade de dados secundários da topografia, como é o caso da cokrigagem multicolodada utilizando o Modelo do Resíduo, são mais efetivas para reduzir os valores do nível de água (Figura 5.16) e apresentar valores de presença de água concordantes. Outro aspecto a ser considerado é que o modelo variográfico Gaussiano ajustado fornece uma continuidade exagerada na direção leste-oeste, e então, a incorporação de um maior número de dados secundários compensa essa continuidade nos locais onde a densidade amostral dos dados primários é menor.

Nos mapas correspondentes ao 26 de dezembro, aprecia-se muito mais claramente as vantagens da incorporação de informação secundária com mapas que apresentam valores de presença de água nas imediações de drenagens, rios e banhados. Por outra parte, os mapas de cokrigagem colocada estrita (MLC, MM1 e MM2) se mostram mais eficientes na incorporação de informação secundária que os mapas de cokrigagem multicolocada utilizando o Modelo do Resíduo (MR). Nesse último caso, os mapas apresentem uma influência exagerada da topografia como é apreciado na Figura 5.22. Com respeito ao modelo MM2, para as estimativas do 26 de dezembro, observa-se que tanto o índice de qualidade como o mapa da diferença entre topografia e nível de água provém resultados satisfatórios. É importante salientar, que em todos os seus aspectos, o MM2 é um caso particular do MLC. O ajuste ao variograma cruzado experimental se apresenta adequado (Figura 4.32), justificando assim o aumento no índice de qualidade para o MM2 em dezembro a respeito de janeiro, que apresentava um ajuste inadequado (Figura 4.27). A principal desvantagem do MM2 é a modelagem do variograma do resíduo. No presente estudo de caso, essa modelagem se vê dificultada pela presença de uma tendência nos variogramas diretos (ver item 2.10.2).

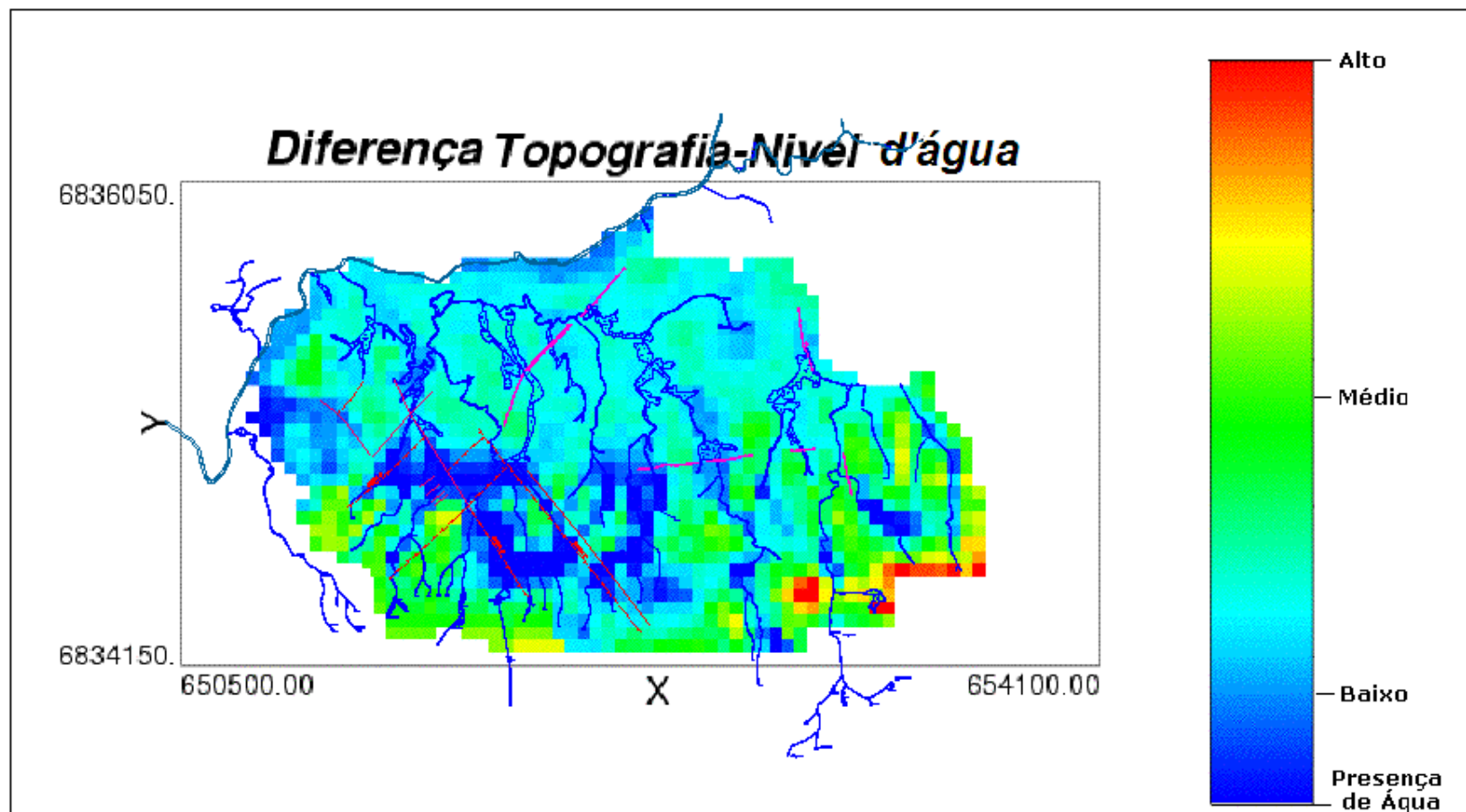


Figura 5.12 – Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando krigagem ordinária (KO) dos dados do 22 de Janeiro de 2002.

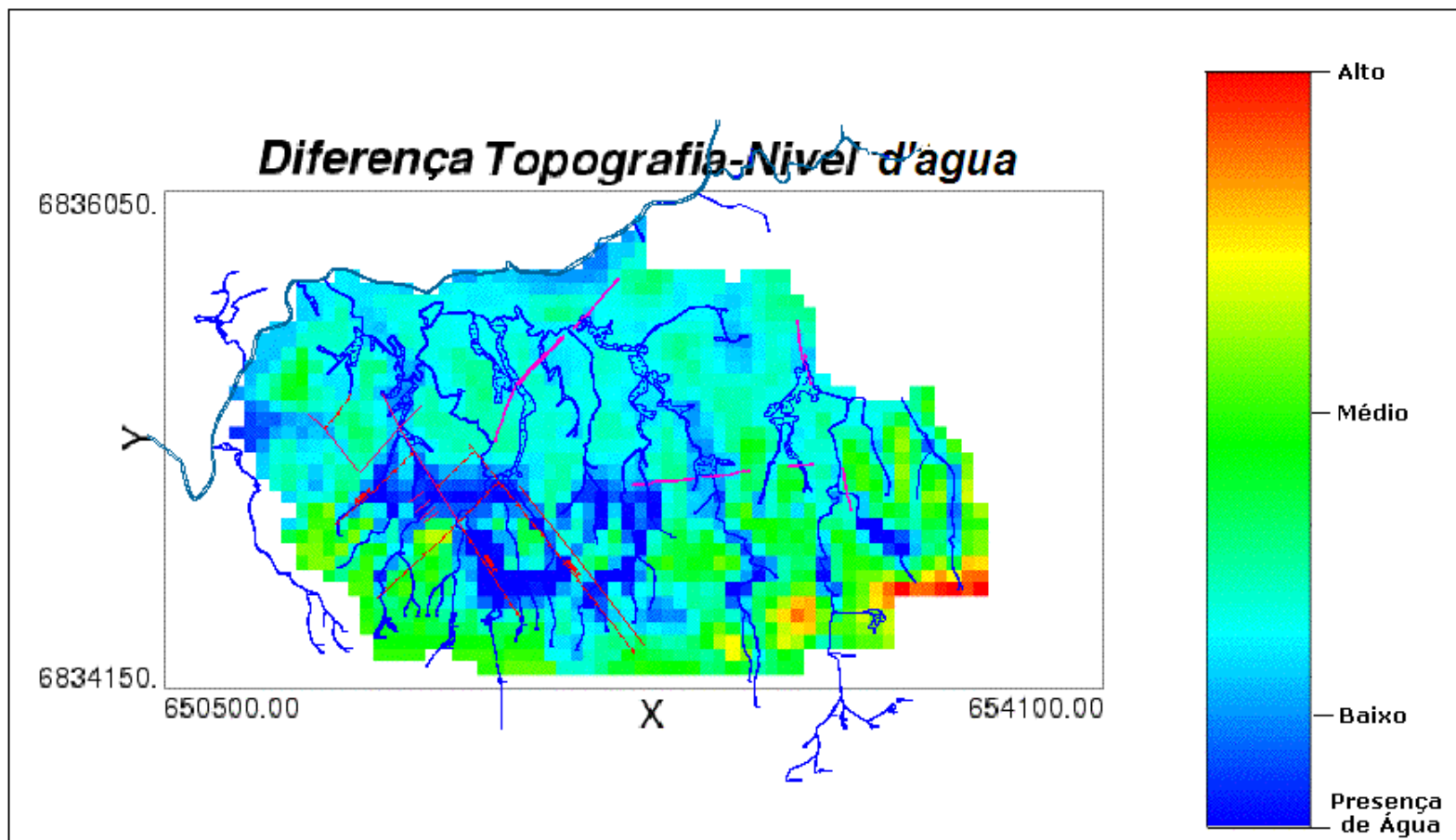


Figura 5.13 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo Linear de Corregionalização (MLC) dos dados do 22 de Janeiro de 2002.

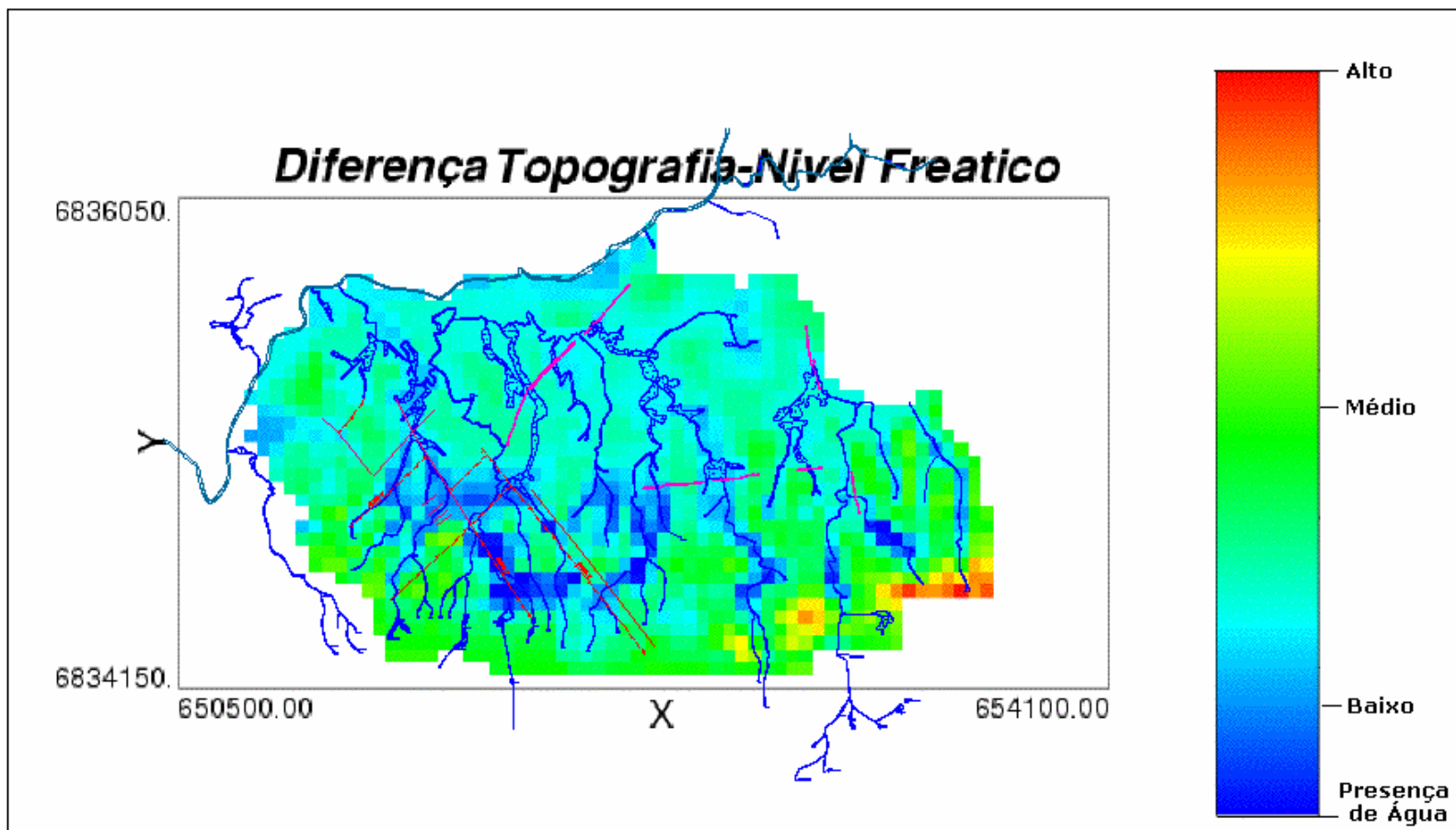


Figura 5.14 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo de Markov 1 (MM1) dos dados do 22 de Janeiro de 2002.

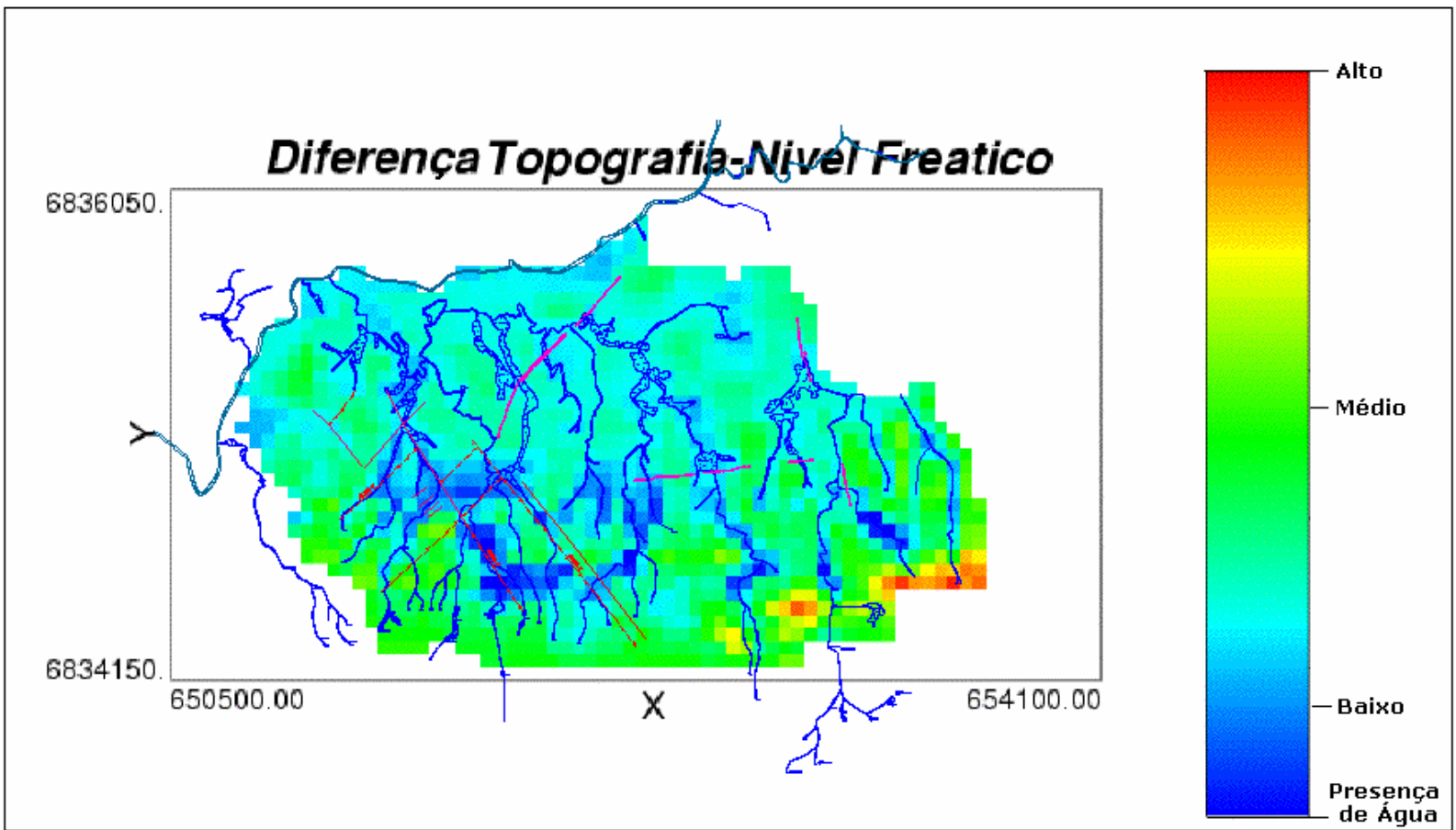


Figura 5.15 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo de Markov 2 (MM2) dos dados do 22 de Janeiro de 2002.

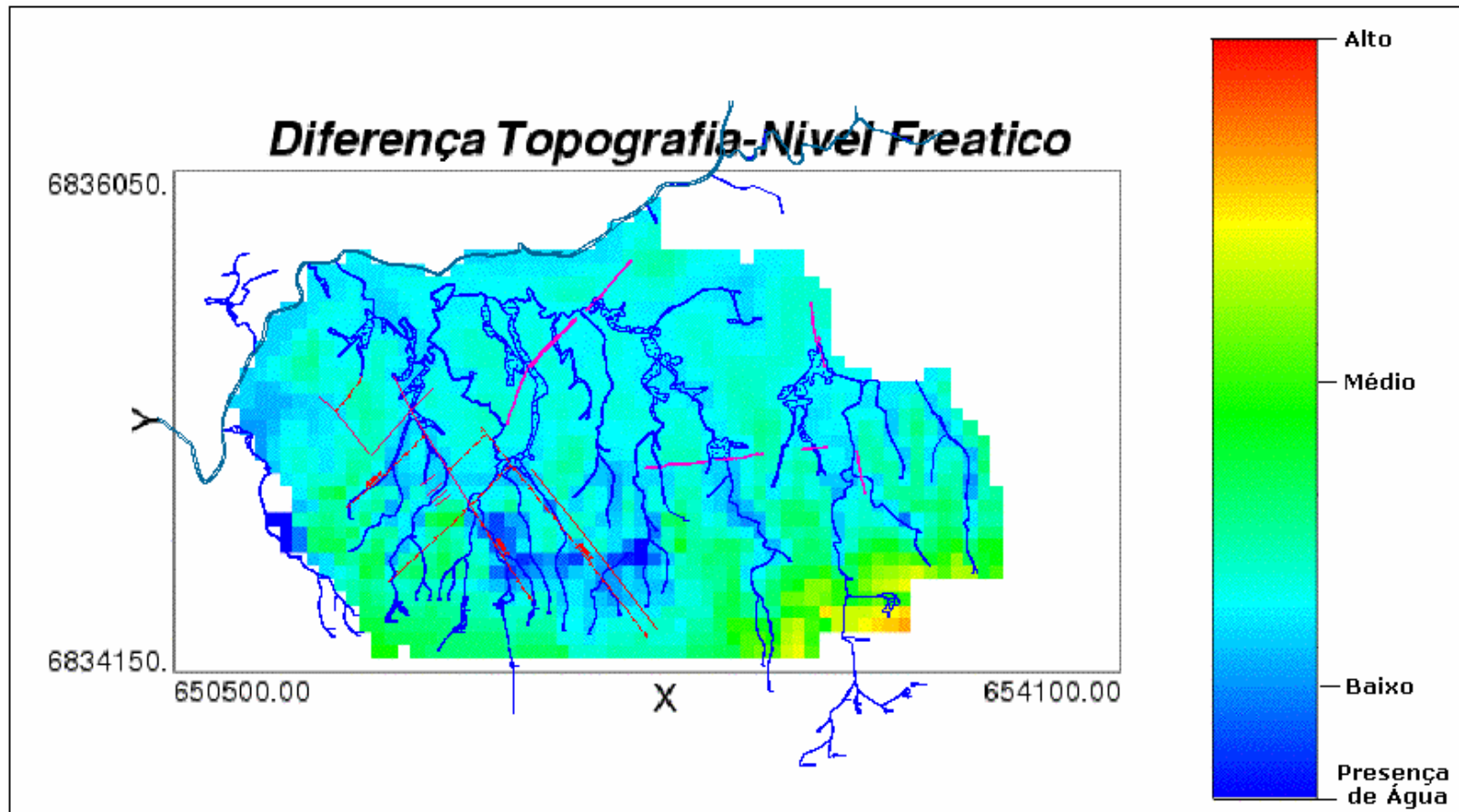


Figura 5.16 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem multicolocada e o Modelo do Resíduo (MR) dos dados do 22 de Janeiro de 2002.

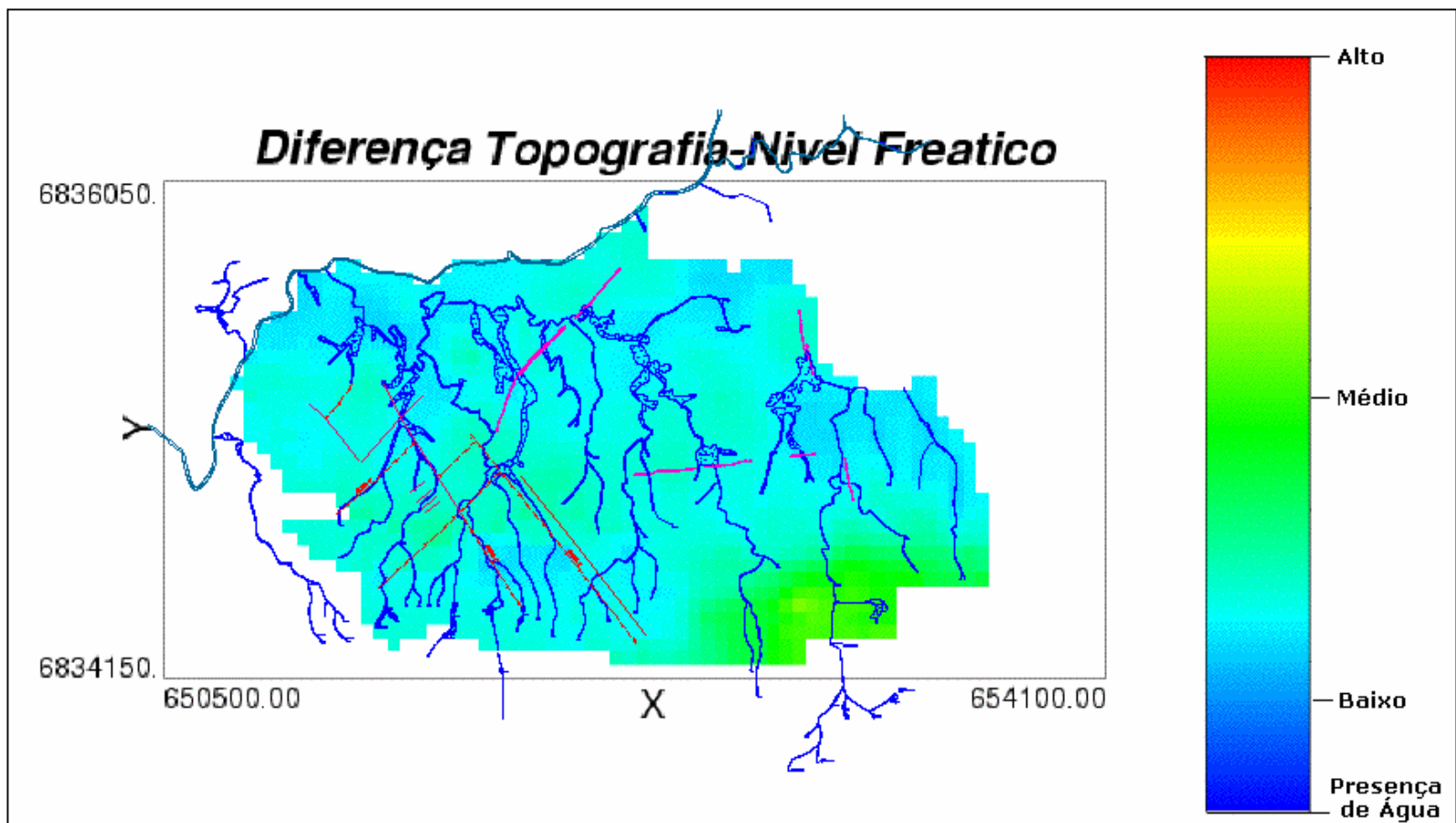


Figura 5.17 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando krigagem do resíduo (KR) dos dados do 22 de Janeiro de 2002.

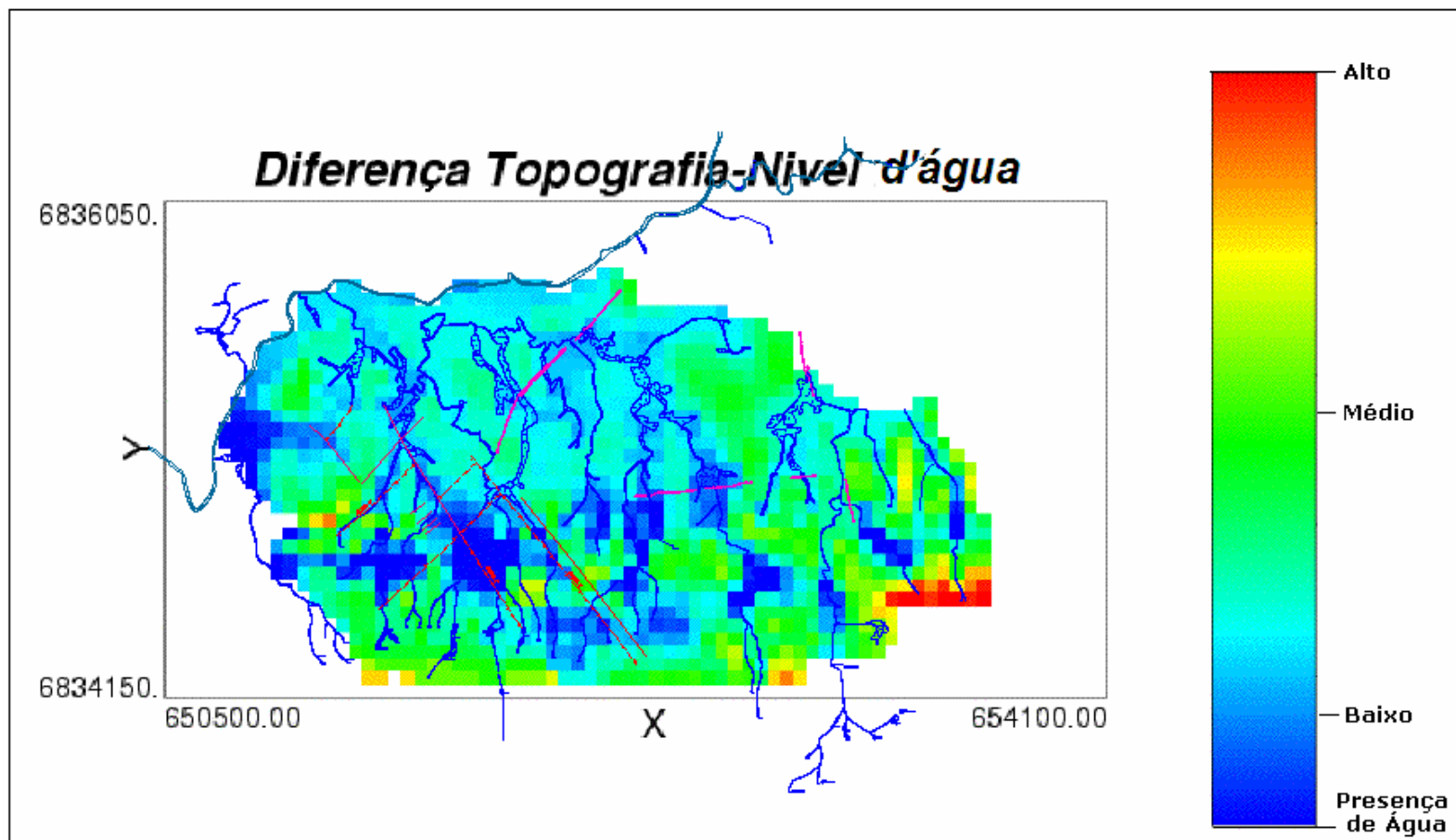


Figura 5.18 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando krigagem ordinária (KO) dos dados do 26 de Dezembro de 2002.

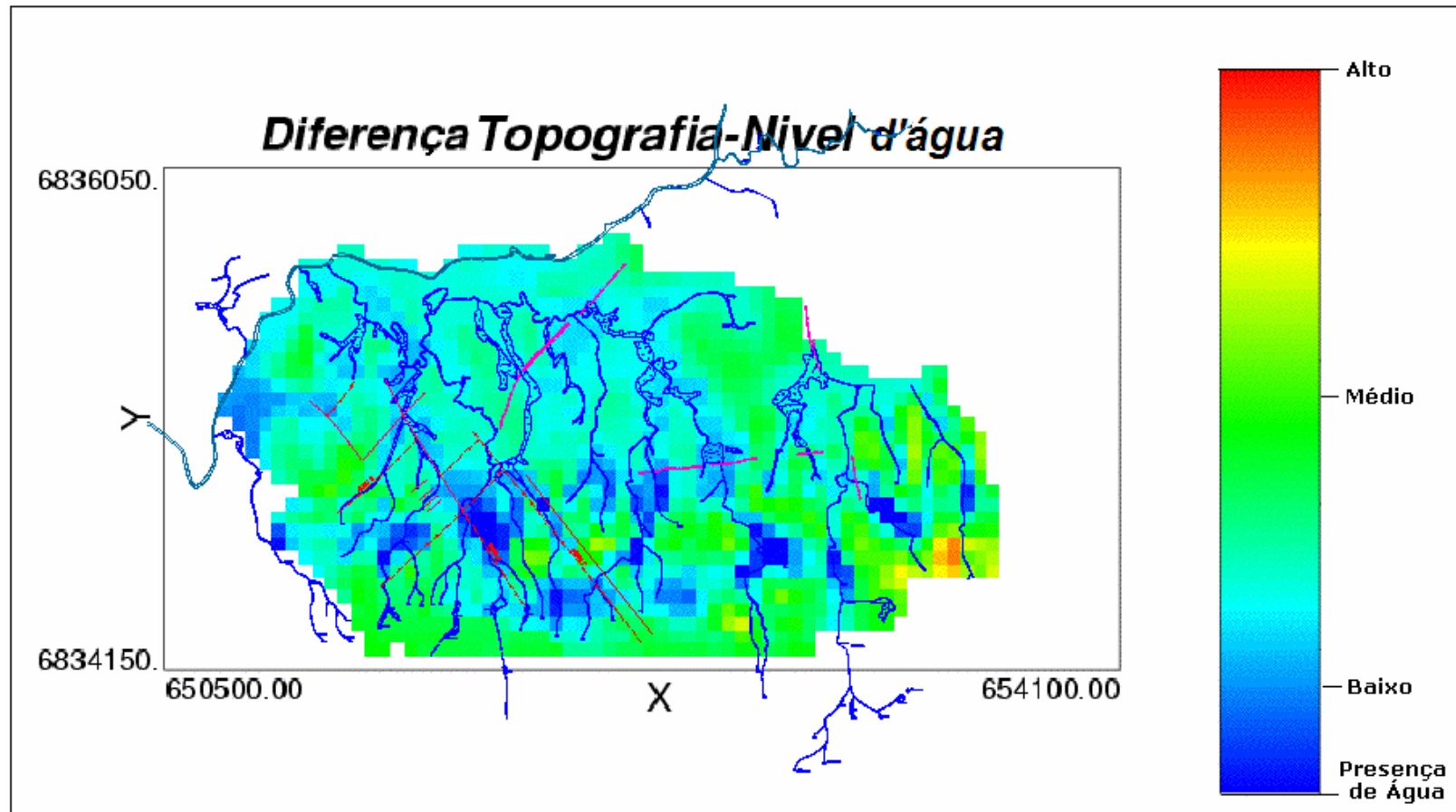


Figura 5.19 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo Linear de Corregionalização (MLC) dos dados do 26 de Dezembro de 2002.

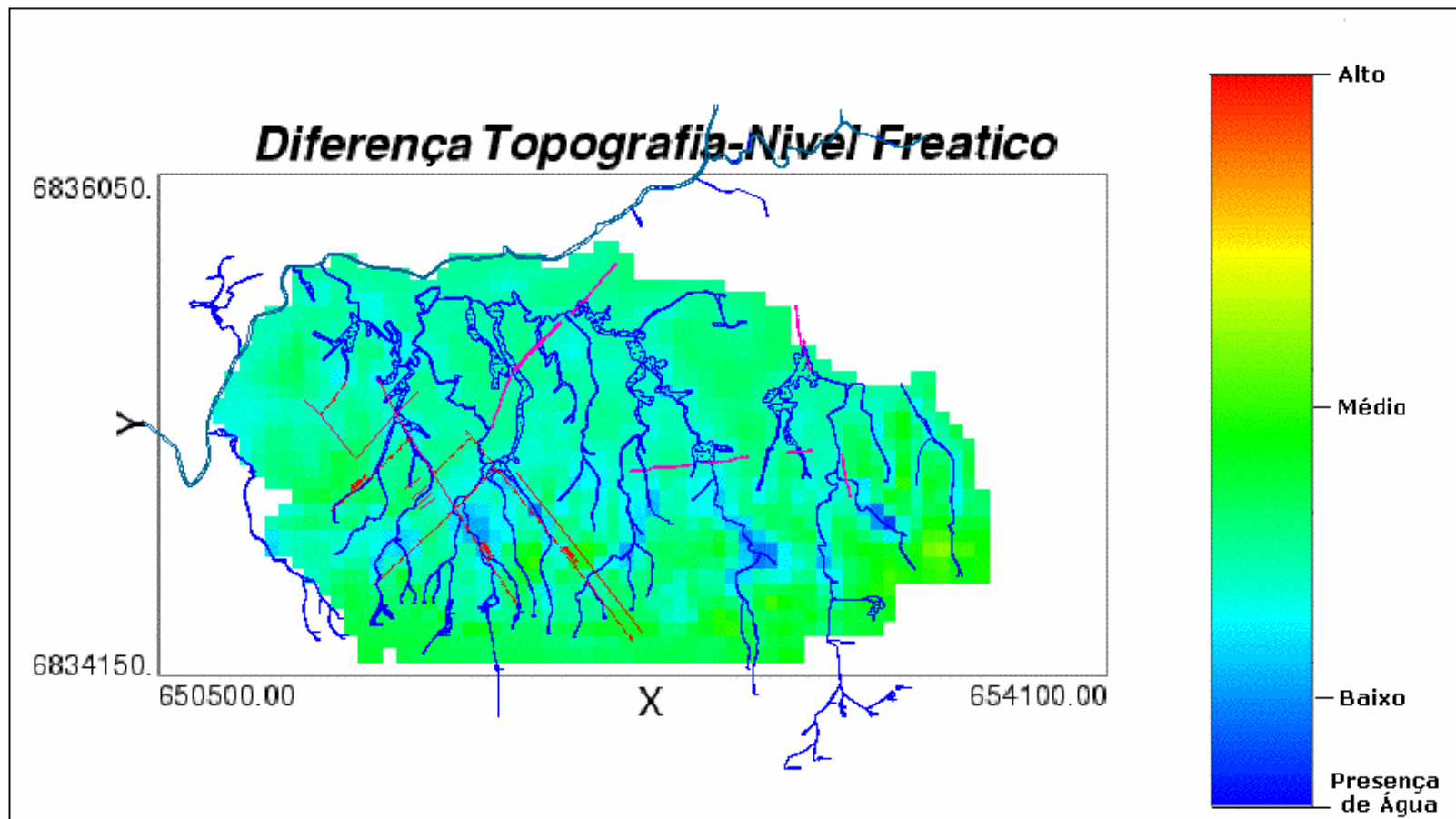


Figura 5.20 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo de Markov 1 (MM1) dos dados do 26 de Dezembro de 2002.

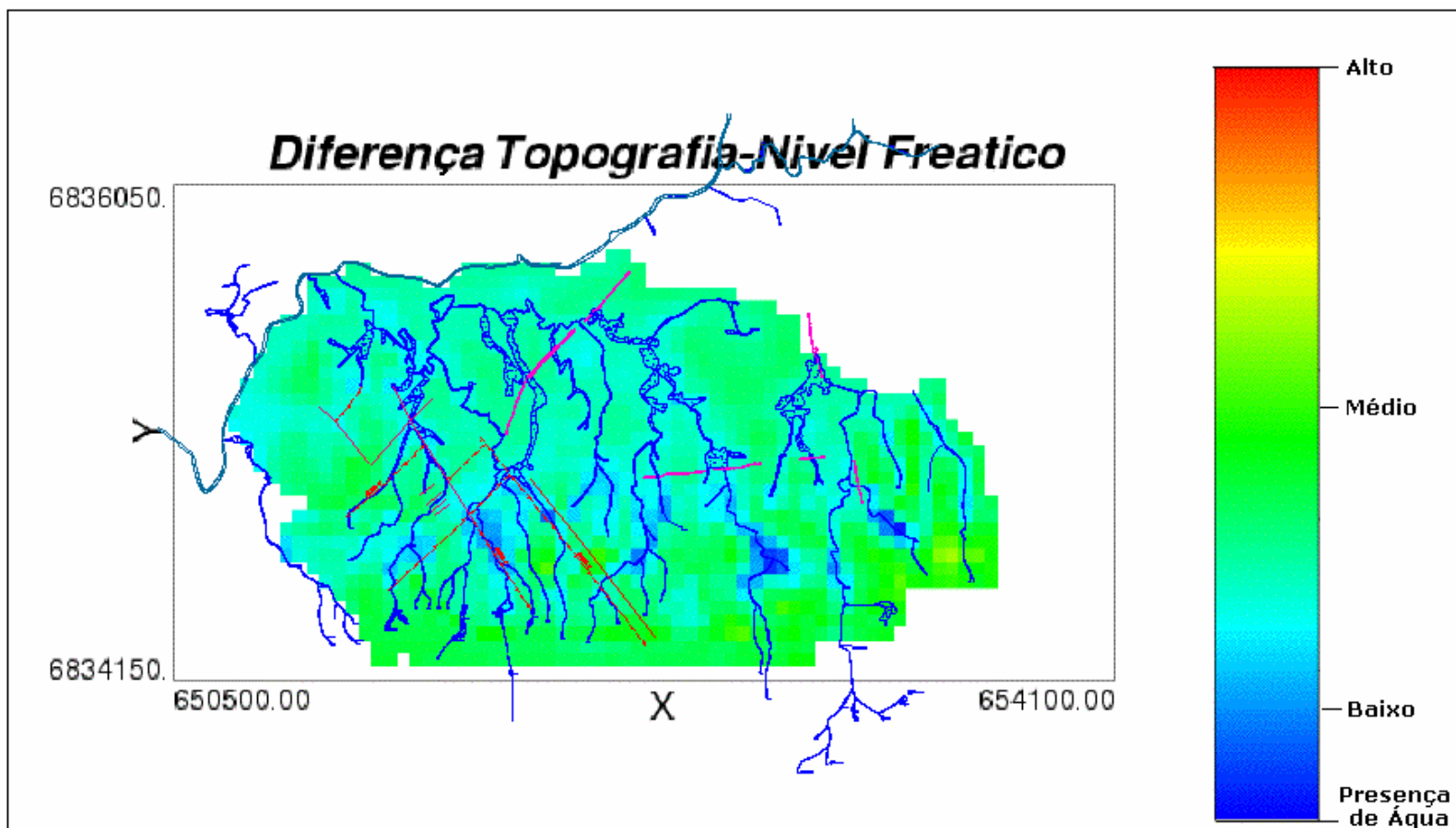


Figura 5.21 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem colocada estrita e o Modelo de Markov 2 (MM2) dos dados do 26 de Dezembro de 2002.

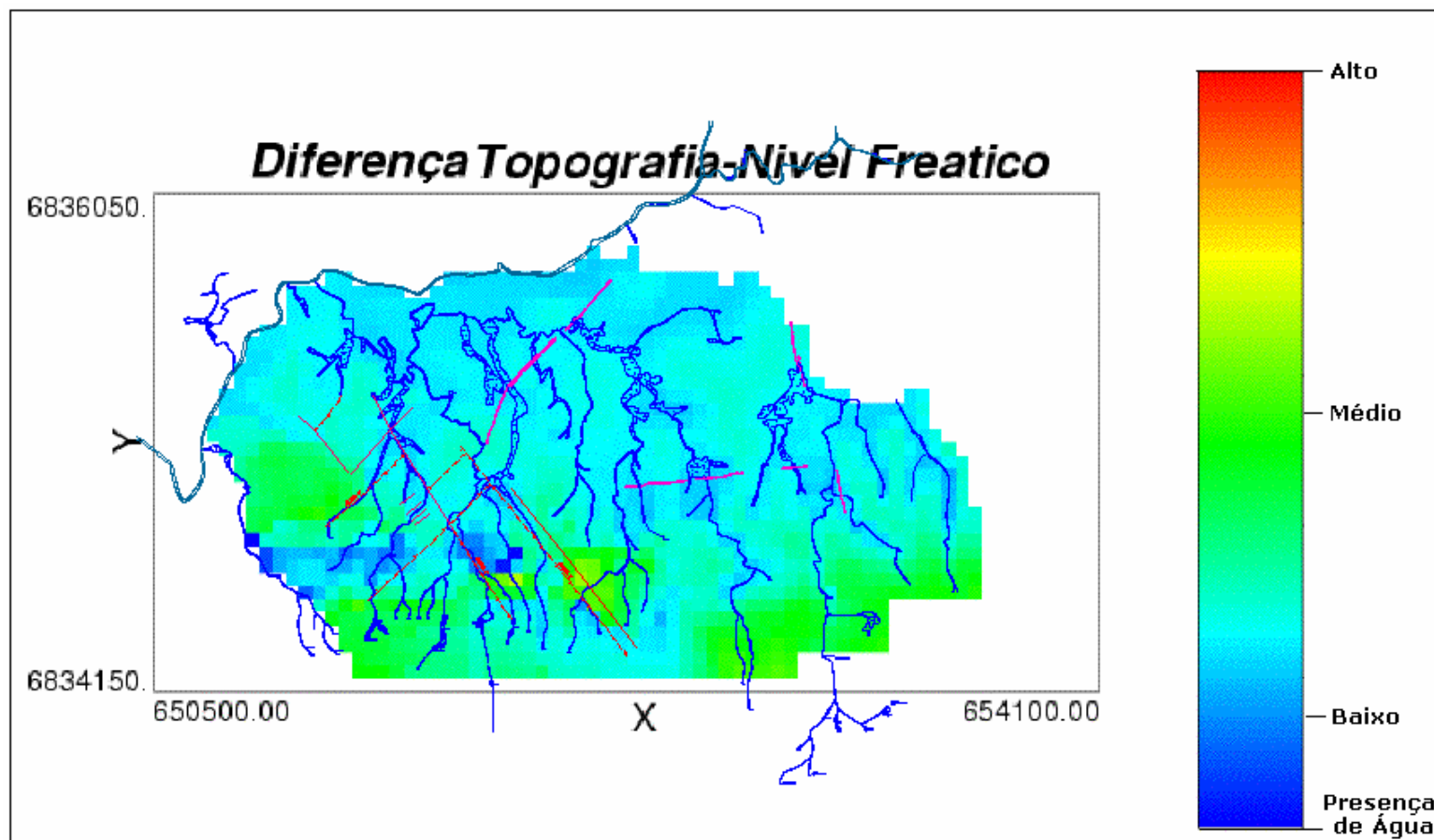


Figura 5.22 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando cokrigagem multicolocada e o Modelo do Resíduo (MR) dos dados do 26 de Dezembro de 2002.

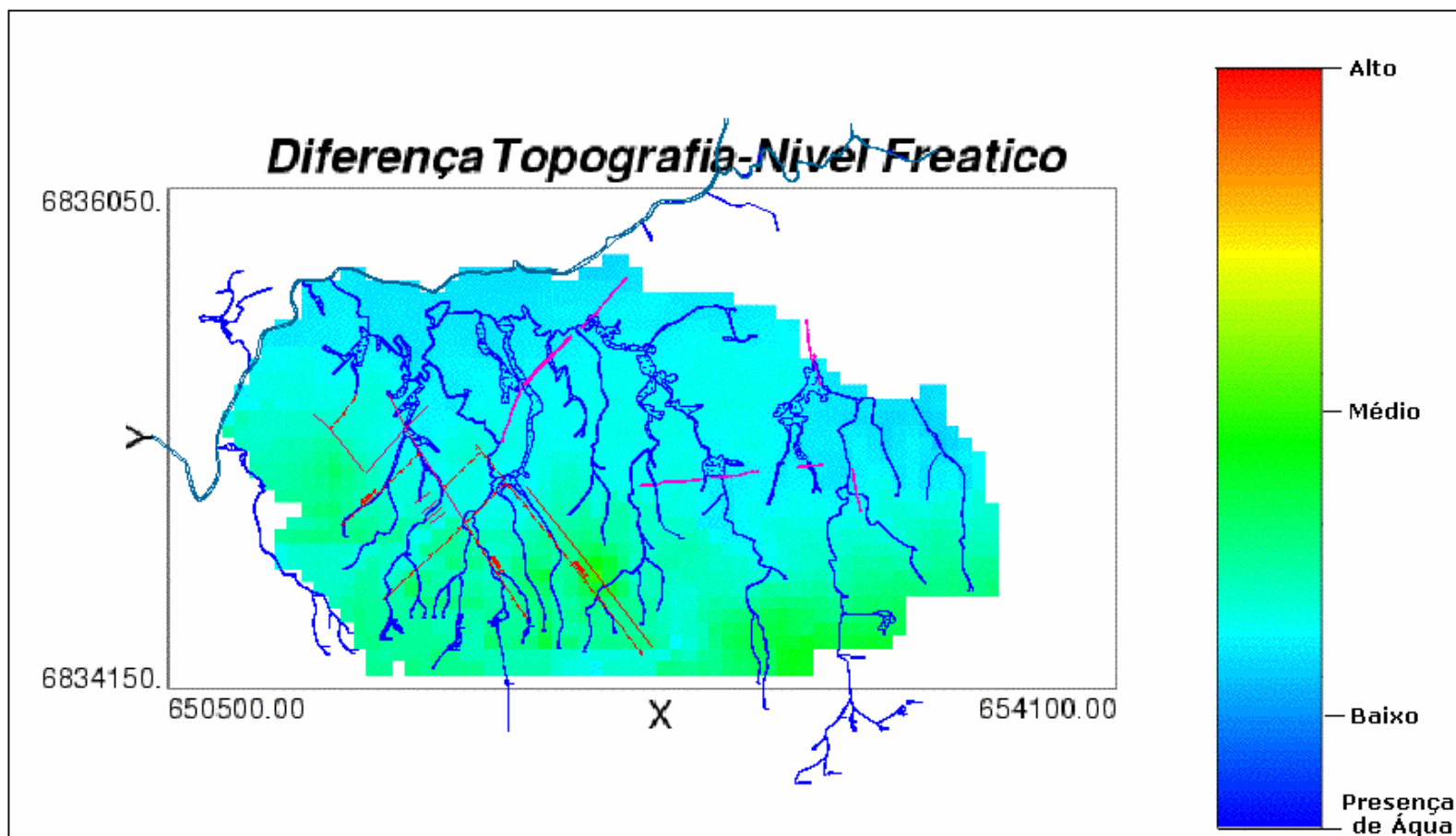


Figura 5.23 - Mapa dos valores da diferença entre a topografia e o nível de água estimado utilizando krigagem do resíduo (KR) dos dados do 26 de Dezembro de 2002.

5.2.6 Coeficientes de correlação regionalizados

Os coeficientes de correlação regionalizados fornecem uma medida da correlação espacial entre as variáveis. Os mesmos podem ser comparados com o coeficiente de correlação dos dados colocados. Coeficientes de correlação regionalizados mais elevados demonstram uma maior correlação entre as variáveis nas escalas correspondentes. Os coeficientes foram determinados para comprovar as condições de definição positiva nos casos da utilização dos modelos MLC, MM2 e MR, no capítulo 4. Na Tabela 5.4, são apresentados os valores para as diferentes escalas k consideradas.

Tabela 5.4 - Coeficientes de correlação regionalizados r_{12}^k para a estrutura k nos modelos de corregionalização linear (MLC) de Markov 2 (MM2) e do resíduo (MR).

	22 de Janeiro de 2002 $\rho_{12}(0)=0.996$			26 de Dezembro de 2002 $\rho_{12}(0)=0.994$		
	r_{12}^1	r_{12}^2	r_{12}^3	r_{12}^1	r_{12}^2	r_{12}^3
MLC	0.980	0.580	0.800	0.980	0.800	0.870
MM2	0.992	0.998	0.999	0.900	0.998	0.999
MR	0.800	0.992	0.987	0.980	0.720	0.990

Assim, as células marcadas em vermelho, mostram valores afastados dos valores do coeficiente de correlação para os dados colocados ($\rho_{12}(0)$) justamente nas estruturas de alcance mediano que são as importantes dadas as estratégias e vizinhanças de busca. Isso poderia explicar a menor efetividade do MLC para rebaixar os dados primários adequando-os à informação secundária no caso do 22 de Janeiro (Figura 5.12), assim como os valores incorretos no mapa das diferenças da topografia e o nível de água utilizando o MR no 26 de Dezembro. Nesses aspectos, o MM2, pela sua construção, leva a uma reprodução da correlação entre os dados colocados. Só que a facilidade na sua modelagem fica sujeita a cada caso em particular. Também, é importante destacar que a correlação dos dados colocados não tem por que se manter nas diferentes escalas.

5.2.7 Resumo da avaliação das diferentes metodologias aplicadas

Os diferentes modelos de correionalização utilizados mostraram influência apreciável nas estimativas do nível de água. A seguir são resumidas algumas considerações finais sobre os modelos e tipos de cokrigagem colocada utilizados:

- A cokrigagem colocada resolve eficientemente os problemas de inversão da cokrigagem completa, provocados pela elevada densidade amostral da topografia.
- O Modelo Linear de Correionalização (MLC) é de difícil entendimento e muito restritivo na sua construção. Porém, é mais flexível para modelar variogramas experimentais do que outros modelos que, além das restrições próprias do MLC, impõem mais uma restrição no variograma cruzado: ser proporcional a um dos variogramas diretos com o coeficiente de correlação como coeficiente de proporcionalidade. Uma vez compreendida a sua mecânica de construção, adapta-se melhor aos variogramas experimentais que os outros modelos, fornecendo uma correlação regionalizada adequada nas diferentes escalas. No caso de mais de duas variáveis, a modelagem pode tornar-se muito complexa.
- O Modelo de Markov 1 (MM1) é simplista na sua concepção: não é necessária a verificação das condições de definição positiva, nem da adequação dos coeficientes de correlação regionalizados. Isso se vê refletido na influência exagerada da topografia nos mapas das estimativas pontuais e de contorno construídos a partir dele.
- O Modelo de Markov 2 (MM2) é mais adequado que o modelo MM1. A modelagem do mesmo é simples e leva a um caso particular do MLC. A dificuldade na modelagem do mesmo, no presente estudo de caso, encontra-se principalmente na dificuldade da modelagem do variograma dos resíduos. O coeficiente de correlação dos dados colocados vê-se melhor reproduzido nos coeficientes de correlação regionalizados das diferentes escalas, pela própria construção do mesmo. Mas a correlação não tem por que ser similar à dos dados colocados além do vetor de separação nulo. Em esse aspecto apresenta uma flexibilidade limitada.
- O Modelo do Resíduo (MR) é outro caso particular do MLC, mas impõe mais uma restrição na modelagem do variograma cruzado, sendo que deve ser

proporcional ao variograma da variável secundária. Não impõe restrições sobre a modelagem do variograma da variável primária, além das próprias do MLC.

- Tanto o MM2 como o MR, são de utilidade quando os dados primários são realmente escassos comparados com os dados secundários. Nesses casos, os variogramas experimentais cruzado e direto da variável primária podem ser de muita difícil modelagem. Modelos apoiados na maior densidade amostral da variável secundária fornecem melhores resultados. Mas no caso de estudo, a densidade amostral dos dados primários permite a construção de variogramas experimentais diretos e cruzados adequados. Portanto, esses modelos não apresentam vantagens significativas no presente estudo de caso.
- A cokrigagem colocada estrita utilizando o MLC e o MM2 mostraram um melhor índice de qualidade matemática que a cokrigagem multicolocada utilizando o MR. No caso de alta densidade de dados primários, o maior número de amostras da topografia incluídas no sistema de cokrigagem multicolocada mostrou-se mais eficiente para reduzir os dados do nível de água. Pelo contrário, no caso em que se dispõe de menor quantidade de dados primários, a influência de uma maior quantidade de dados secundários mostrou-se mais inadequada.
- A krigagem do resíduo mostrou-se como uma forma simples e rápida para a incorporação de informação secundária com a vantagem adicional de levar em consideração a não estacionariedade. Porém, o seu índice de qualidade não é muito favorável quando comparado com os outros métodos. Forneceu resultados um pouco diferentes que a cokrigagem multicolocada utilizando o MR já que a continuidade espacial do resíduo foi analisada independentemente como no método da krigagem com médias locais variáveis (GOOVAERTS, 1997, p. 190). Para que seja observada a equivalência, o variograma deve ser construído a partir dos variogramas diretos (item 3.8.2, RIVOIRARD, 2001).

Dada a disponibilidade de dados primários que possibilitam o ajuste do MLC aos variogramas experimentais, também a que o mesmo fornece não só um melhor índice de qualidade, mas também uma reprodução mais adequada dos coeficientes de correlação regionalizados e considerando que os mapas das diferenças entre a topografia e o nível de água apresentaram uma maior consistência com o fenômeno natural que no caso da krigagem ordinária, esse modelo é o escolhido para realizar as estimativas por cokrigagem colocada estrita para todas as datas consideradas do ano 2002.

5.3 Análise da influência da pluviometria e o do avanço da lavra

Para realizar a análise da variação estacional do lençol freático e compará-lo com a pluviometria e o avanço da lavra, o MLC é escolhido para realizar a cokrigagem colocada estrita nas datas correspondentes de fevereiro a novembro. O MLC mostra um adequado índice de qualidade e também fornece uma metodologia de modelagem bem estabelecida, com um coeficiente de correlação regionalizado que pode ser corrigido dentro dos limites das condições de definição positiva. Os modelos ajustados e os mapas das estimativas pontuais e de contorno são apresentados no Apêndice E.

O avanço da lavra na mina subterrânea de carvão pode ser observado na Figura 5.24.

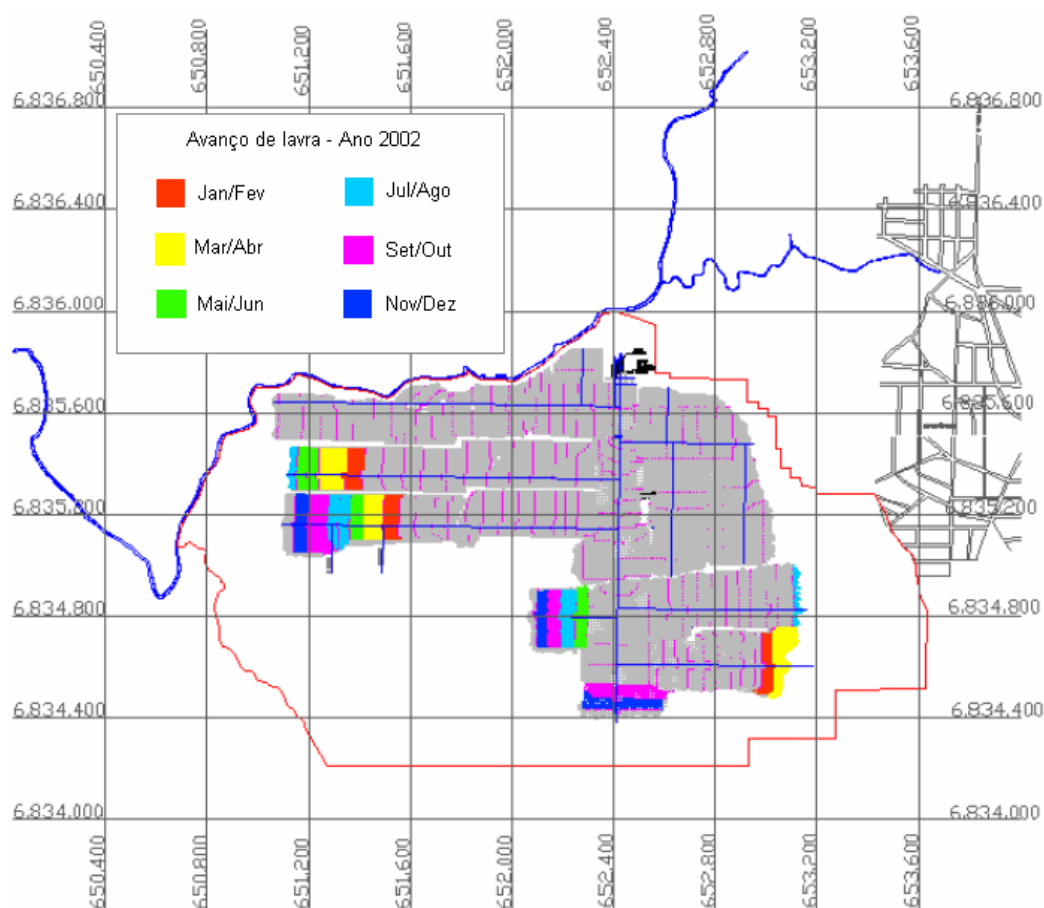


Figura 5.24 - Mapa da área de interesse mostrando a mina subterrânea de carvão (cinza) e as áreas de avanço da lavra nos diferentes bimestres do ano 2002.

Em cinza está indicada a mina, com diferentes painéis. Neles, linhas em rosa indicam os avanços mensais ou bimestrais. As áreas correspondentes ao avanço durante o ano 2002 estão indicadas em cores por bimestres. Pode-se apreciar, que a área afetada sobre o total da área de estudo é pequena. Dessa forma, o total das áreas modificadas, é considerado em conjunto ao longo do ano e superposta aos mapas de contorno do 22 de janeiro e do 26 de dezembro de 2002 construídos a partir das estimativas de krigagem ordinária e a partir das estimativas de cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o modelo MLC (Figura 5.25).

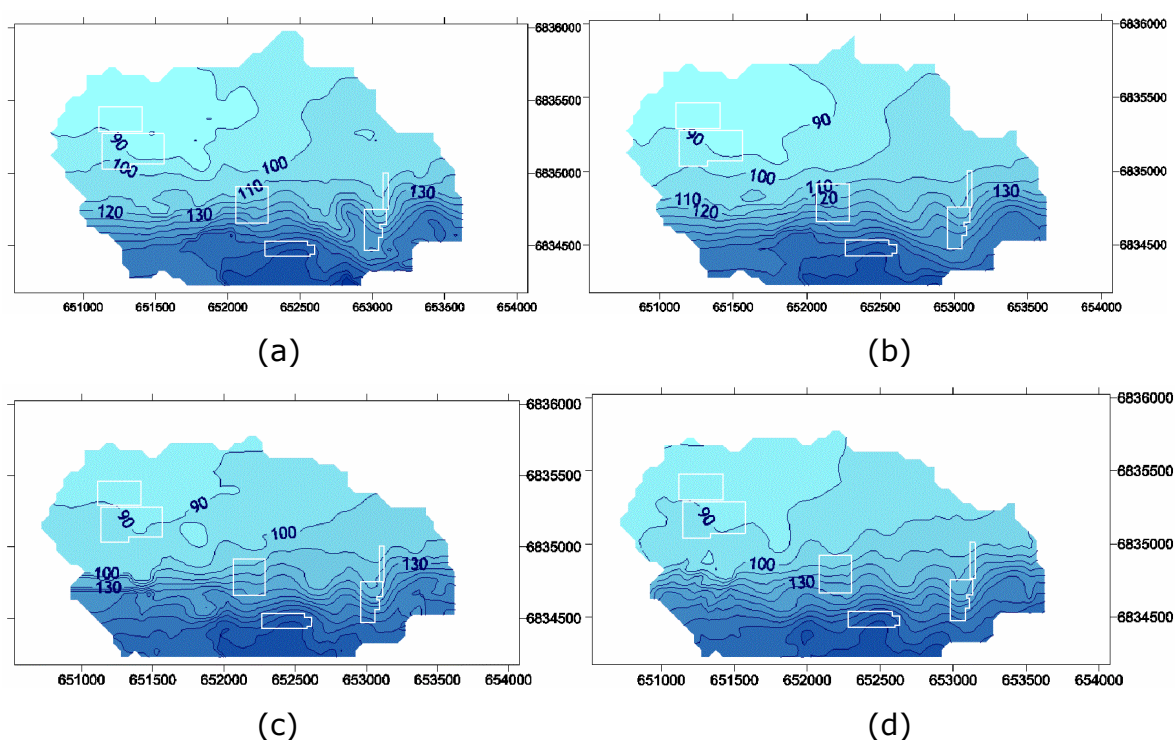


Figura 5.25 – Mapas de contorno do nível de água, com as áreas de avanço de lavra do ano 2002 marcadas em quadros brancos. (a) e (c) Mapas de contorno das estimativas do 22 de Janeiro e 26 de Dezembro de 2002 respectivamente, a partir das estimativas de krigagem ordinária. (b) e (d) Mapas de contorno das estimativas do 22 de Janeiro e 26 de Dezembro de 2002 respectivamente, a partir das estimativas de cokrigagem colocada estrita utilizando o modelo MLC.

Nos mapas de contorno apresentados na Figura 5.25 não são observadas modificações significativas nas regiões do avanço da lavra.

Para analisar a influência da pluviometria na variação do nível de água, é comparada a média das estimativas em cada data com a pluviometria mensal lida em estações pluviométricas na Mina do Trevo. Assim, o gráfico da Figura 5.26 mostra na parte superior a pluviometria nos meses do ano 2002 e na parte inferior, a média das estimativas realizadas por krigagem ordinária e por cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o modelo MLC em cada data analisada durante o ano 2002.

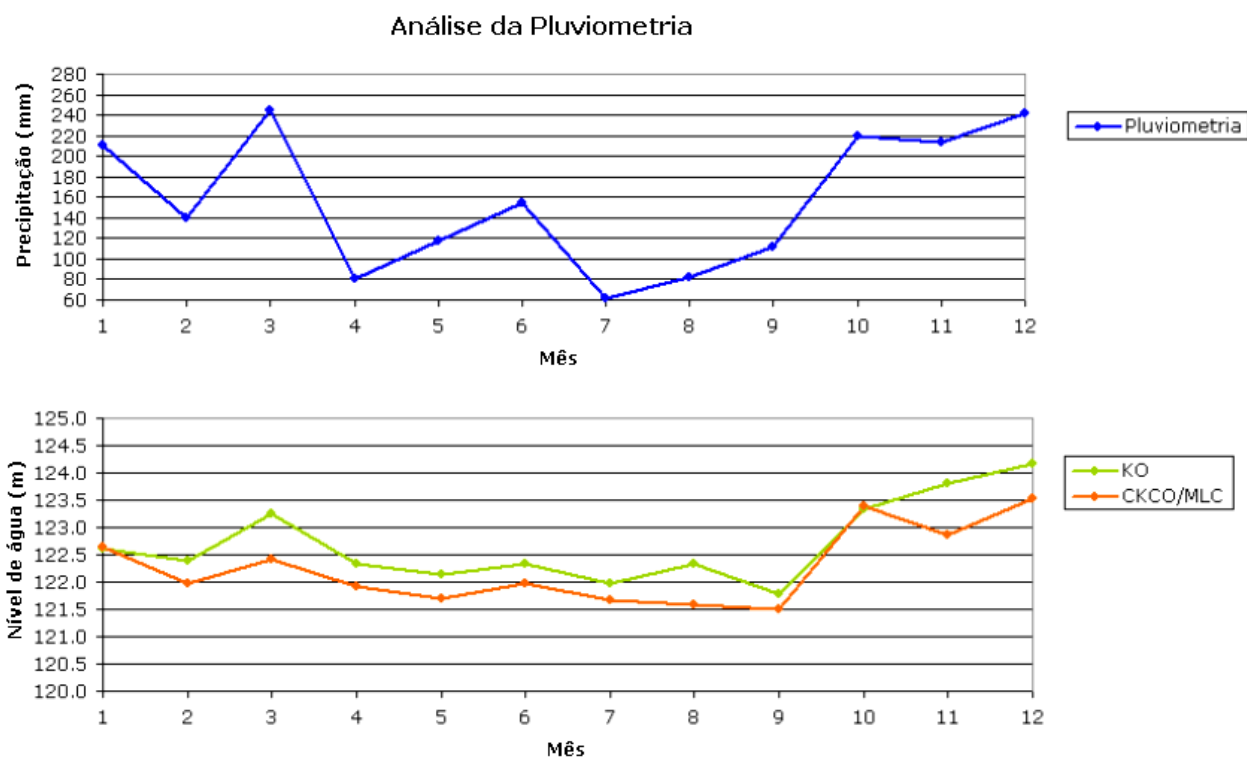


Figura 5.26 - Gráfico de comparação da pluviometria anual durante o ano 2002 com a média das estimativas do nível de água realizadas por krigagem ordinária (KO) e cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o modelo MLC (CKCO).

De modo geral, o nível de água acompanha as oscilações pluviométricas, com exceções nos meses de maio e setembro. As discrepâncias nesses meses podem ser devidas à comparação da pluviometria numa base mensal com o valor do nível de água em uma data determinada. Observando os meses de novembro e dezembro, onde a quantidade de leituras do nível de água é menor, o acompanhamento da pluviometria é mais adequado quando são utilizados dados da topografia nas estimativas.

No gráfico inferior, observa-se que as estimativas obtidas por cokrigagem (utilizando a topografia como informação secundária) são, em média, inferiores

das obtidas por krigagem. Também se observa que com uma menor densidade amostral (meses de dezembro e novembro) a vinculação do nível de água à topografia é maior.

Analisando conjuntamente a influência da pluviometria e do avanço da lavra na variação estacional do nível de água, pode-se dizer que em média este acompanha a pluviometria anual, sem demonstrar variações locais importantes provocadas pelo avanço da lavra realizada na mina de carvão subjacente no mesmo período.

O sistema de fluxo na área em estudo pode então se interpretar como fundamentalmente local (item 2.6), controlado pela topografia, que leva à descarga nas drenagens e rios presente. A mina de carvão subjacente, portanto, não afeta o principal sistema de fluxo o qual responde mais marcadamente a fatores externos eventuais como a pluviometria.

CAPÍTULO 6

Conclusões e Recomendações

Neste capítulo, apresentam-se as conclusões e considerações finais sobre a metodologia utilizada e a sua aplicabilidade. Os resultados anteriormente analisados são confrontados com os objetivos apresentados no Capítulo 1. Finalmente, são colocadas algumas considerações finais e recomendações para trabalhos futuros.

6.1 Conclusões

Os mapas de nível de água subterrânea, são elementos básicos nas investigações hidrogeológicas. São utilizados para a identificar a direção de fluxo da água subterrânea no aquífero livre, zonas de recarga e descarga, assim como para interpretar dados geoquímicos e de dispersão de contaminantes.

O nível de água é medido em piezômetros ou poços de monitoramento. A partir desses dados são gerados modelos como mapas de contorno ou superfícies (malhas de pontos) do nível de água. Assim, diferentes métodos de interpolação podem ser utilizados para determinar o valor da variável de interesse onde a mesma não foi amostrada. A krigagem, como método de interpolação, fornece uma estimativa com um erro distribuído normalmente com média nula e variância mínima. Nesse método, a variabilidade espacial do atributo é levada em consideração, utilizando a covariância (ou variograma) nos sistemas que outorgam os diferentes pesos aos dados disponíveis.

A utilização de um atributo altamente correlacionado com o nível de água e densamente conhecido, como é o caso da cota topográfica, leva a estimativas mais concordantes com o fenômeno estudado.

A cokrigagem é a extensão natural da krigagem para o caso de múltiplas variáveis, fornecendo uma estimativa cujo erro também está distribuído normalmente com média nula e cuja variância é mínima. Nela, a variável de interesse é calculada a partir dela própria e também utilizando a variável altamente correlacionada. A vantagem principal, frente a outros métodos de incorporação de informação secundária, é a consideração, não só da correlação existente entre as variáveis envolvidas, mas também da variabilidade espacial conjunta que as mesmas apresentam.

Quando a densidade da variável secundária é muito elevada, os sistemas que determinam os pesos se tornam instáveis apresentando problemas de inversão. Utilizando cokrigagem colocada resolve-se esse problema.

A modelagem da variabilidade espacial conjunta requer a modelagem dos variogramas diretos das variáveis envolvidas, assim como a modelagem do variograma cruzado entre as mesmas. Para essa modelagem vários modelos tem sido propostos, os quais surgem sob distintas hipóteses e apresentam diferentes requerimentos.

Os procedimentos utilizados nessa dissertação permitiram atingir satisfatoriamente o objetivo geral inicial da aplicação de métodos geoestatísticos para a representação do nível de água acima de uma mina subterrânea de carvão, utilizando a cota topográfica como informação secundária.

A incorporação da topografia utilizando cokrigagem colocada mostrou-se muito vantajosa quando comparada com a krigagem ordinária:

(i) a consistência com o fenômeno estudado é mais adequada, o que é observado principalmente, nos mapas da diferença entre os dados da topografia e as estimativas do nível de água;

(ii) a suavização é menor que a provocada pela krigagem devido a uma diminuição na variância perdida. Isso é observado nos mapas das estimativas pontuais (malha de pontos) e nos mapas de contorno que se apresentam mais irregulares.

A cokrigagem colocada apresentou-se mais vantajosa nos casos de menor densidade amostral do nível de água. Nos casos de elevada densidade amostral

do nível de água, o peso atribuído à topografia (variável secundária) é menor, e portanto, os resultados são mais semelhantes aos obtidos por krigagem ordinária, sem a utilização de uma variável secundária. O custo mais elevado provocado pela construção de um número maior de piezômetros e o tempo de monitoramento dos mesmos pode ser substituído por um menor número de piezômetros distribuídos adequadamente, acompanhados pela leitura de uma outra variável altamente correlacionada com o nível de água e de fácil e econômica aquisição, como é a topografia.

A utilização de diferentes modelos de correção mostrou uma influência apreciável nas estimativas do nível de água por cokrigagem colocada. No caso de estudo, o MLC apresentou-se como o modelo mais adequado.

As estimativas para o nível de água em todas as datas do ano 2002 são realizadas por cokrigagem colocada estrita utilizando o MLC. Analisando a influência da pluviometria e do avanço da lavra na variação estacional do nível de água, conclui-se que o sistema de fluxo presente é fundamentalmente local, sem demonstrar variações importantes provocadas pelo avanço da lavra realizada na mina de carvão subjacente no mesmo período.

6.2 Recomendações

Os seguintes aspectos devem ser considerados para trabalhos futuros ou para a aplicação desta metodologia em novos estudos de caso:

- Desaconselha-se completamente a utilização do modelo Gaussiano na modelagem de fenômenos de alta continuidade como é o caso do nível de água e em qualquer outro caso. O mesmo provoca que, para vetores de separação pequenos, a função de covariância seja muito elevada. Isso, no caso de estudo, leva a valores de variância de cokrigagem negativos para a cokrigagem colocada estrita. Também, apresenta problemas de instabilidade nos sistemas de matrizes que determinam os pesos de cokrigagem. Portanto, o mesmo deve ser substituído por modelos como o cúbico. A influência comparativa entre ambos modelos nas estimativas deve ser avaliada.

- A influência da tendência presente pode ser avaliada utilizando técnicas como a krigagem em presença de tendência (KT) que modela a tendência como uma função das coordenadas ou como a krigagem com tendência externa (KED) na qual a tendência se modela como uma função de uma variável secundária, que no presente caso, seria a topografia. As estimativas podem então ser comparadas com as obtidas no presente estudo de caso.
- A modelagem da correção regionalização utilizando modelos como o MLC ou o MM2 podem ser incorporados em softwares de domínio público (acesso livre) de forma que sejam facilmente entendíveis e visualizáveis as restrições construtivas dos mesmos.
- Aplicação de técnicas de cossimulação para determinar o espaço de incerteza do nível de água em avaliações de risco.

Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, A., 1993. *Joint Simulation of Multiple Variables with a Markov-type Coregionalization Model*. Dissertação de Doutorado, Stanford University, Stanford, California, Estados Unidos, 199p.
- ANA, Agência Nacional de Águas, Gestão de Águas, Ações, Águas Subterrâneas, http://www.ana.gov.br/gestaoRechidricos/InfoHidrologicas/projetos_aguasSubterr2.asp, Outubro 2003a.
- ANA, Agência Nacional de Águas, Gestão de Águas, Ações, Projetos e Programas, <http://www.ana.gov.br/gestaoRechidricos/ConservacaoAguaSolo/default2.asp>, Outubro 2003b.
- ANA, Agência Nacional de Águas, Região Hidrográfica Costeira do Sul, http://www.ana.gov.br/mapaincial/doc_Mapas/5PanoramaporRH4_04_03.pdf, Abril 2003.
- ARMSTRONG, M., 1998. *Basic Linear Geostatistics*. Springer – Verlag, Berlin, 1998, 149p.
- BLEINES, C., DERAISME, J., GEFFROY, F., JEANNÉE, N., PERSEVAL, S., RAMBERT, F., RENARD, D. e TOUFFAIT, Y., 2002. *Isatis Software Manual*, 4th Edition. Geovariances, Avon, França, 645p.
- CAETANO, C. A., 2002. *Água Subterrânea*, Agência Nacional de Águas, <http://www.ana.gov.br/gestaoRechidricos/InfoHidrologicas/aguasSubterr/EstudoAguasSubterraneas/ANA22-08-02.doc>, Outubro 2003, 85p.
- CAYE, B. R., POZA, E. V., FABRÍCIO, J. A. C. e SÜFFERT, B. R., 1975. *Projeto de Carvão no Pré-Barro Branco*. MME, DNPM/CPRM, Supervisão do Departamento de Geologia Econômica, Superintendência Regional de Porto Alegre, 149p.
- CHILÉS, J. P. e DELFINER, P., 1999. *Geostatistics: modeling spatial uncertainty*. Wiley-Interscience, New York, 695p.

- COSTA, J. F. C. L., 1997. *Developments in Recoverable Reserves Estimation and Ore Body Modelling*. Dissertação de Doutorado, Universidade de Queensland, Brisbane, Austrália, 330p.
- DAVID, M., 1977. *Geostatistical Ore Reserve Estimation*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 364p.
- DAVIS, J. C., 1986. *Statistics and Data Analysis in Geology*. John Wiley & Sons, New York, 646p.
- DELHOMME, J.P., 1978. *Kriging in the hydrosiences*. *Advances in Water Resources*, 1(5), p. 251 – 266.
- DESBARATS, A. J., LOGAN, C. E., HINTON, M. J. e SHARPE, D. R., 2002. *On the kriging of water table elevations using collateral information from a digital elevation model*. *Journal of Hydrology*, 255, p. 25 – 38.
- DEUTSCH, C. V. e JOURNAL, A. G., 1998. *GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide*. Oxford University Press, New York, 340p.
- FREEZE, R. A. e CHERRY, J., 1979. *Groundwater*. Prentice Hall Inc., New Jersey, 594p.
- GOOVAERTS, P., 1997. *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press, New York, 483p.
- GOOVAERTS, P., 1998a. *Using elevation to aid the geostatistical mapping of rainfall erosivity*. *Catena*, 34, p. 227 – 242.
- GOOVAERTS, P., 1998b. *Ordinary Cokriging Revisited*. *Mathematical Geology*, 30(1), p. 21 – 42.
- GOOVAERTS, P., 2000. *Geostatistical approaches for incorporating elevation into the spatial interpolation of rainfall*. *Journal of Hydrology*, 228, p. 113 – 129.
- GOULARD, M. e VOLTZ, M., 1992. *Linear coregionalization model: Tools for estimation and choice of cross-variogram matrix*. *Mathematical Geology*, 24(3), p. 269 – 286.
- HAAS, A., BIVER, P. e MOULIÈRE, D., 1998. *Simulations stochastiques en cascade*. *Cahiers de Géostatistique* 6, Ecole de Mines de Paris, p. 31 - 43.

- HOEKSEMA, R. J., CLAPP, R.B. , THOMAS, A. L., HUNLEY, A. E., FARROW, N. D. e DEARSTONE, K. C., 1989. *Cokriging Model for Estimation of Water Table Elevation*. Water Resource Research, 25(3), p. 429 – 438.
- INTERNATIONAL YEAR OF FRESH WATER 2003, Ano Internacional da Água 2003, UNESCO, ONU, <http://www.wateryear2003.org>, Outubro 2003.
- ISAAKS, E. H. e SRIVASTAVA, M. R., 1989. *An Introduction to Applied Geostatistics*. Oxford University Press, New York, 561p.
- JOURNEL, A. G. e HUIJBREGTS, CH., 1978. *Mining Geostatistics*, Academic Press, London, 600p.
- JOURNEL, A., 1999. *Markov Models for Cross-Covariances*. Mathematical Geology, 31(8), p. 955 – 964.
- JOURNEL, A. e ROSSI, M. E., 1989. *When do we need a Trend Model in Kriging*. Mathematical Geology, 21(7), p. 715 - 739.
- JOURNEL, A. e SHMARYAN, L. E., 1999. *Two Markov Models and Their Application*, Mathematical Geology, 31(8), p. 965 – 988.
- LEÃO, M. I., 2002. *Mina do Trevo. Laudo de avaliação do monitoramento julho/2001 a março/2002. Siderópolis-SC*. Instituto de Pesquisas Hidráulicas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 31p.
- MARECHAL, A., 1970. *Cokrigeage et regression en correlation intrinsique*,. Publication N-205, Centre de Geostatistique, Ecole des Mines de Paris, Fontainebleau.
- MATHERON, G., 1965. *Les variables regionalisées et leur estimation*, Ed. Masson, Paris, 306p.
- MATHERON, G., 1970. *The Theory of Regionalized Variables and its Applications*. Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fascicule 5, Ecole des Mines de Paris, 212p
- MATHERON, G., 1979. *Recherche de simplification dans um problème de cokrigeage*. Publication N – 628, Centre de Geoestatistique, Ecole de Mines de Paris, Fontainebleau, 19p.
- MYERS, D. E., 1991. *Pseudo-cross variograms, positive definiteness, and cokriging*. Mathematical Geology, 23(6), p. 805 – 816.

- MYERS, D. E., 1992. *Kriging, cokriging, radial basis functions and the role of positive definiteness*. Computers Mathematics Applications, 24(12), p. 139 – 148.
- OLEA, R. A., 1991. *Geostatistical Glossary and Multilingual Dictionary*. Oxford University Press Inc., New York, 161p.
- RIVOIRARD, J., 1989. *Models with orthogonal indicator residuals*. M. Armstrong Editor, Geostatistics, Kluwer Academic Publ., Dordrecht, p. 91 – 107.
- RIVOIRARD, J., 2001. *Which Models for Collocated Cokriging?*. Mathematical Geology, 33(2), p. 117 – 131.
- SAMPER CALVETE, F. J. e CARRERA RAMIREZ, J., 1996. *Geoestadística. Aplicaciones a la hidrogeología subterránea*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 2ª edição, Barcelona, 484p.
- SOPHOCLEOUS, M., 2002. *Interactions between groundwater and surface water: the state of the science*. Hydrogeology Journal, 10, p. 52 – 67.
- TEIXEIRA, W., TOLEDO, M. C. M. de, FAIRCHILD, T. R. e TAIOLI, F., 2001. *Decifrando a Terra*. USP – Oficina de Textos, São Paulo, 557 p.
- VALIATI, D., 2002. *Exemplo de Gestão de Recursos Hídricos na Mineração de Carvão*. XII Congresso Brasileiro de Águas Subterrâneas – “Aqüíferos Transfronteiriços”, Associação Brasileira de Água Subterrânea, Florianópolis, p. 1 - 17.
- WACKERNAGEL, H., 1994a. *Multivariate Geostatistics. An introduction with applications*. Springer-Verlag, Berlim, 275p.
- WACKERNAGEL, H., 1994b. *Cokriging versus kriging in regionalized multivariate data analysis*. Geoderma, 62, p. 83 – 92.
- XAVIER, S. R., 1999. *Estudo Geoestatístico do Subsolo da Usina Nuclear de Angra 2, RJ*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil, 229p.
- XIANLIN, M. e JOURNEL, A., 1999. *An expanded GSLIB cokriging program allowing for two Markov models*. Computers & Geosciences, 25, p. 627 – 639.

XU, W., TRAN, R., SRIVASTAVA, M. e JOURNEL, A., 1992. *Integrating seismic data in reservoir modeling: The collocated cokriging alternative*. Proceedings of 67th Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers, SPE # 24742, Washington, p. 833 - 842.

Apêndice A

Tradução das legendas nas figuras de saída dos programas utilizados

A.1 Saídas do programa GSLIB

A.1.1 Histogramas

Os arquivos do tipo postscript (.ps) de saída do programa HISTPLT da biblioteca GSLIB (DEUTSCH e JOURNEL, 1998) possuem uma legenda em inglês indicando os parâmetros estatísticos mais importantes. Na Figura A.1, é colocado como exemplo, o histograma dos dados de nível de água para o 22 de Janeiro de 2002. A legenda é acompanhada de uma outra traduzindo os termos.

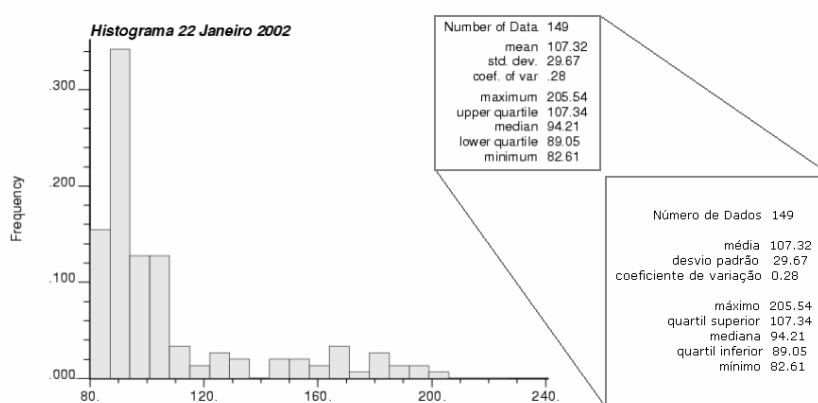


Figura A.1– Postscript de saída do programa HISTPLT: Histograma dos dados do 22 de Janeiro com legendas em inglês e português, mostrando os parâmetros estatísticos mais relevantes.

Na Tabela A.1 são colocados os termos traduzidos na legenda da figura assim como também acrescentado o número de dados excluídos e não considerados.

Tabela A.1 – Tradução dos termos na legenda do arquivo de postscript de saída do programa HISTPLT.

Termos em Inglês	Termos em Português
Number of Data	Número de Dados
Number trimmed	Número de excluídos
mean	média
std. dev.	desvio padrão
maximum	máximo
upper quartile	quartil superior
median	mediana
lower quartile	quartil inferior
minimum	mínimo

A.1.2 Gráficos de dispersão

Os arquivos do tipo postscript (.ps) de saída do programa SCATPLT da biblioteca GSLIB (DEUTSCH e JOURNAL, 1998) possuem uma legenda em inglês indicando o número de dados total, o número de dados impresso, o número de dados excluídos e a média e desvio padrão dos dados em abscissas (eixo X) e dos dados em ordenadas (eixo Y). Na Figura A.2, é colocado a modo de exemplo, o gráfico de dispersão das estimativas da validação cruzada (ISAAKS e SRIVASTAVA, 1989, p. 351 – 368) versus os dados originais dos dados de nível de água para o 22 de Janeiro de 2002. A legenda é acompanhada de uma outra que traduz os termos.

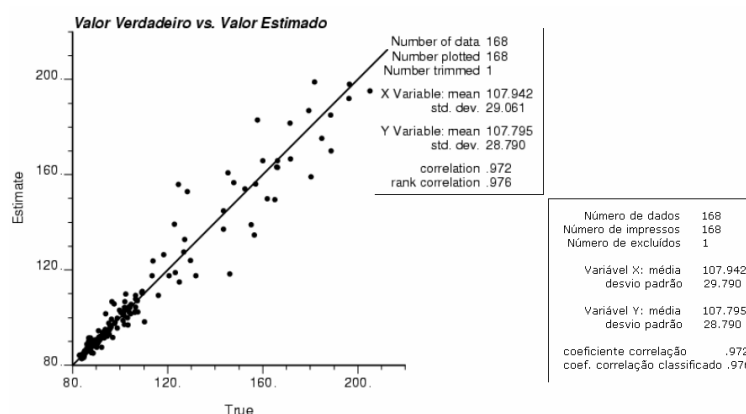


Figura A.2 - Postscript de saída do programa SCATPLT: Gráfico de dispersão das estimativas da validação cruzada versus os dados de nível de água do 22 de Janeiro com legendas em inglês e português.

Na Tabela A.2 são colocados os termos traduzidos na legenda da figura.

Tabela A.2 - Tradução dos termos na legenda do arquivo de postscript de saída do programa SCATPLT.

Termos em Inglês	Termos em Português
Number of Data	Número de Dados
Number trimmed	Número de excluídos
X Variable	Variável X
Y Variable	Variável Y
mean	média
std. dev.	desvio padrão
correlation	coeficiente de correlação
rank correlation	correlação classificada

A.2 Saídas do programa ISATIS

Os arquivos de saída do programa ISATIS (BLEINES, 2002) podem ser salvados como arquivos do tipo metafiles. As legendas dos mesmos podem ser modificadas e editadas. Nos casos em que isso não é realizado, uma legenda padrão aparece nas figuras. A seguir são apresentadas figuras exemplificando as saídas utilizadas nessa dissertação.

A.2.1 Variogramas diretos

Nos variogramas diretos, são apresentadas várias direções na mesma figura. Essas direções correspondem ao programa ISATIS na versão 4.1.6 utilizada inicialmente. As direções representadas são detalhadas na Tabela A.3.

Tabela A.3 - Direções representadas nos variogramas diretos do programa ISATIS.

Legenda	Direção Azimutal
D1	N0°
D2	N45°
D3	N90°
D4	N135°

Como exemplo, na Figura A.3, apresenta-se o variograma obtido a partir dos dados do 22 de Janeiro de 2002.

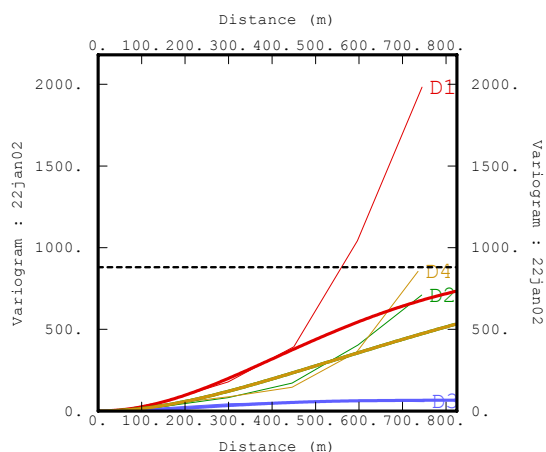


Figura A.3 – Saída do programa ISATIS: Variograma direto dos dados do 22 de Janeiro de 2002 com legendas em inglês.

As legendas na figura acima apresentadas são traduzidas na Tabela A.4.

Tabela A.4 – Tradução das legendas da figura do variograma direto de saída do programa ISATIS

Legenda em Inglês	Legenda em Português
Distance (m)	Distância (m)
Variogram: 22jan02	Variograma $\gamma(h)$ dos dados do 22 de janeiro de 2002

A.2.2 Variogramas diretos e cruzados

Quando são realizados os variogramas cruzados, estes são acompanhados pelos variogramas diretos na mesma figura. Também, nesse caso, todos são apresentados em várias direções. Os variogramas são obtidos utilizando o ISATIS versão 5.0.2. Na Figura A.4, o variograma superior corresponde ao variograma direto da cota topográfica. Dos variogramas inferiores, na direita se apresenta o variograma direto do nível de água e na esquerda o variograma cruzado das duas variáveis. As linhas pontilhadas nesse último variograma delimitam a região na qual o variograma cruzado satisfaz as condições de definição positiva para o sistema. As direções dos variogramas estão indicadas nas legendas da própria figura.

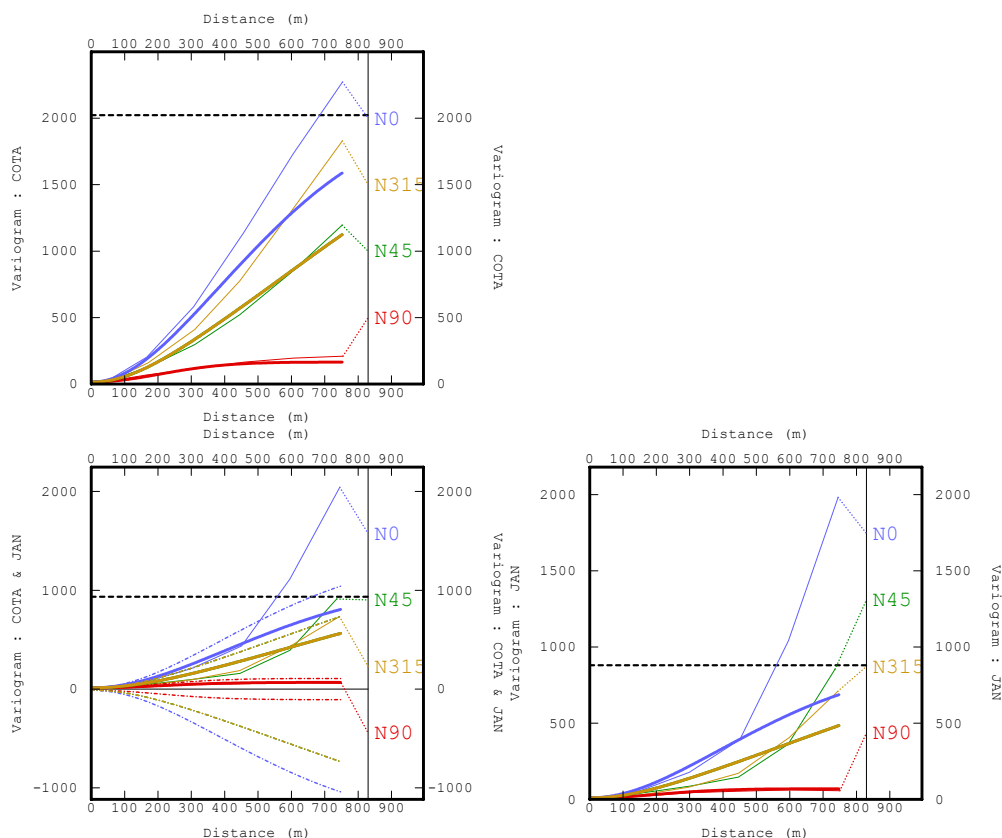


Figura A.4 - Saída do programa ISATIS v. 5.0.2: Variogramas diretos e cruzados dos dados do 26 de Fevereiro de 2002 e da cota topográfica regularizada em malha de 50 x 50 m, com legendas em inglês.

As legendas nas figuras apresentadas são traduzidas na Tabela A.5.

Tabela A.5 – Tradução das legendas da figura do variograma direto de saída do programa ISATIS

Legenda em Inglês	Legenda em Português
Distance (m)	Distância (m)
Variogram: 22jan02	Variograma direto $\gamma(h)$ dos dados de nível de água do 22 de janeiro de 2002
Variogram: 26fev02	Variograma direto $\gamma(h)$ dos dados de nível de água do 26 de fevereiro de 2002
Variogram: cota	Variograma direto $\gamma(h)$ dos dados da cota topográfica
Variogram: cota e 22jan02	Variograma cruzado $\gamma(h)$ dos dados do nível de água do 22 de janeiro de 2002 e da cota topográfica
Variogram: cota e 26fev02	Variograma cruzado $\gamma(h)$ dos dados do nível de água do 26 de fevereiro de 2002 e da cota topográfica

Apêndice B

Estimativas de Krigagem Ordinária

B.1 Mapas das estimativas pontuais do desvio padrão de krigagem ordinária

A seguir, são apresentados os mapas das estimativas pontuais por krigagem ordinária (KO) correspondentes as datas do ano 2002.

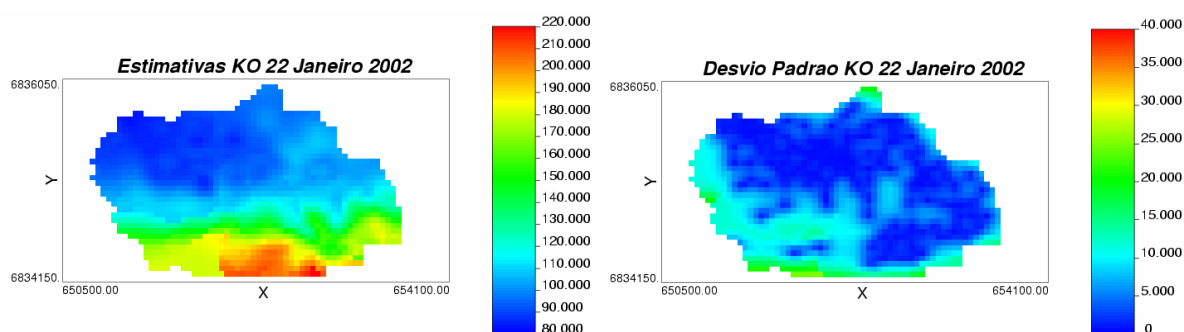


Figura B.1– Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 22 de Janeiro de 2002.

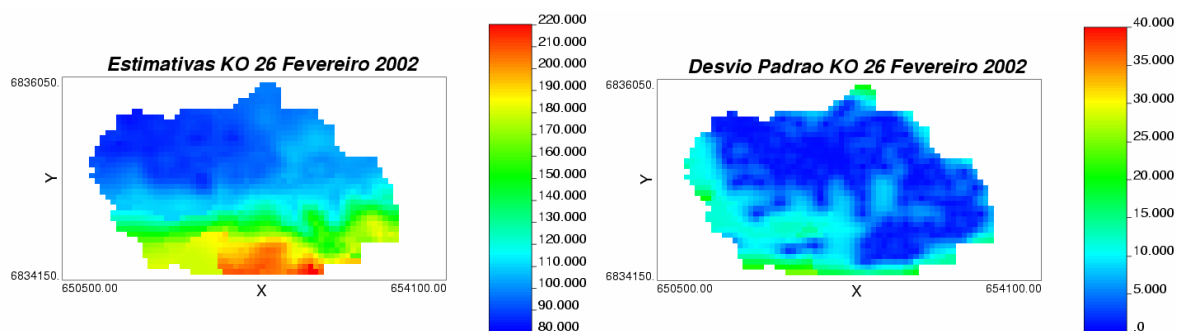


Figura B.2 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 26 de Fevereiro de 2002.

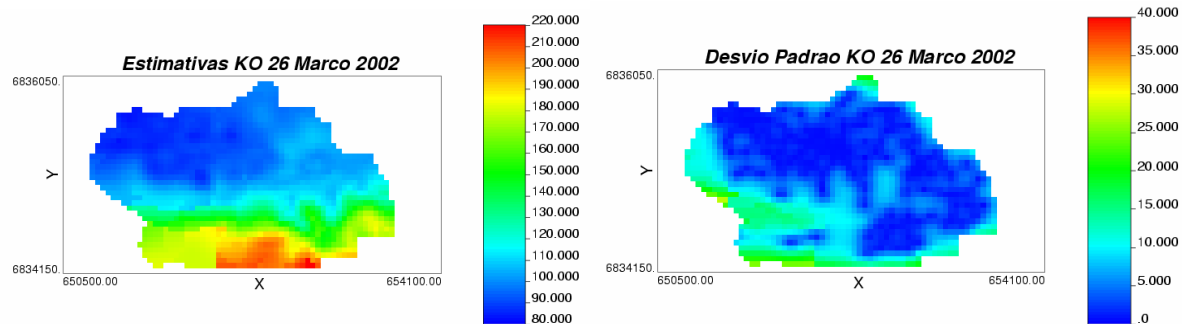


Figura B.3 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 26 de Março de 2002.

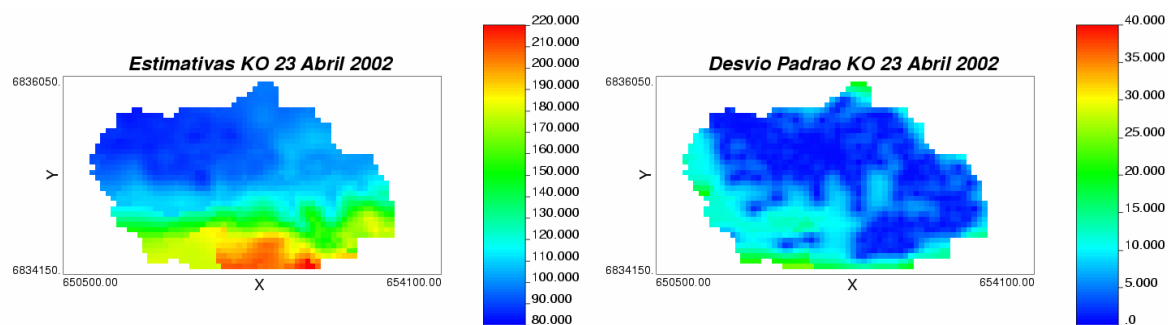


Figura B.4 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 23 de Abril de 2002.

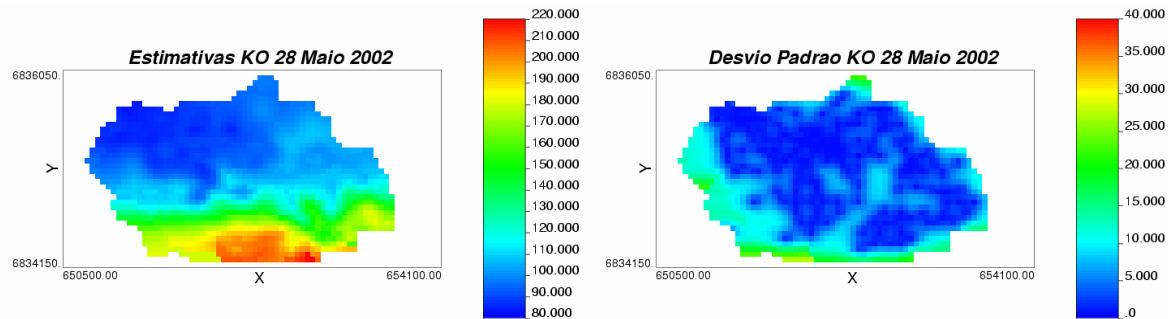


Figura B.5 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 28 de Maio de 2002.

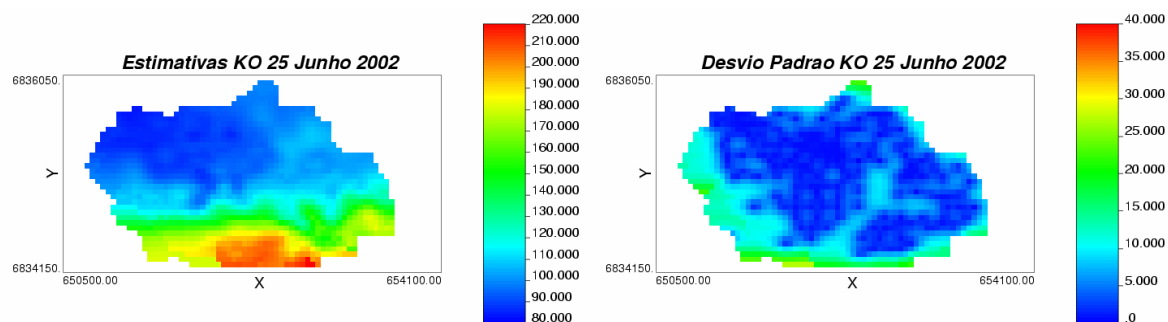


Figura B.6 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 25 de Junho de 2002.

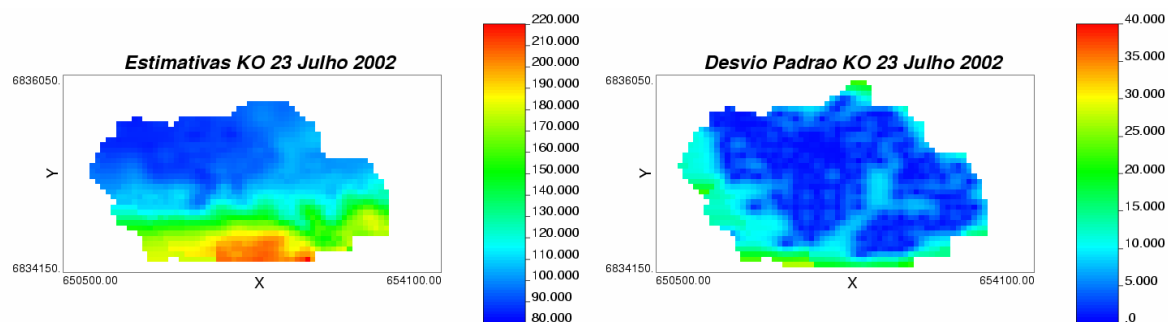


Figura B.7 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 23 Julho de 2002.

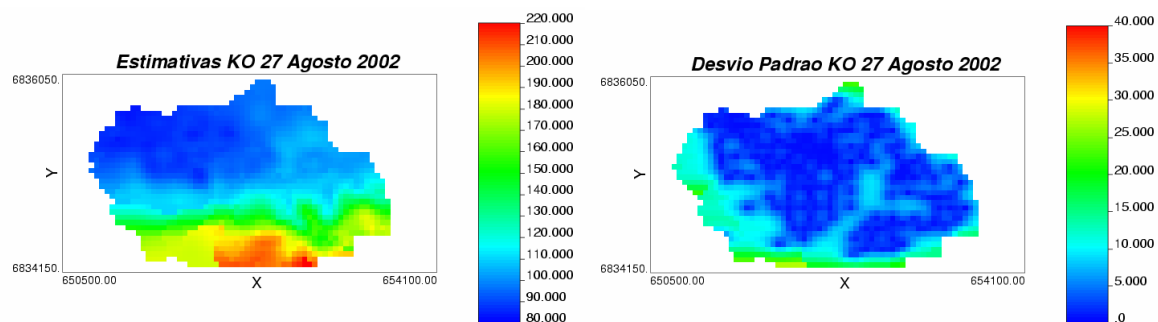


Figura B.8 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 27 de Agosto de 2002.

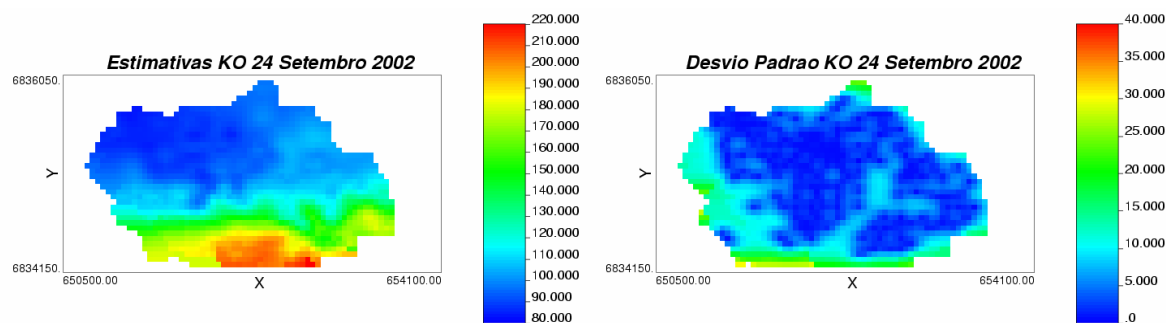


Figura B.9 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 24 de Setembro de 2002.

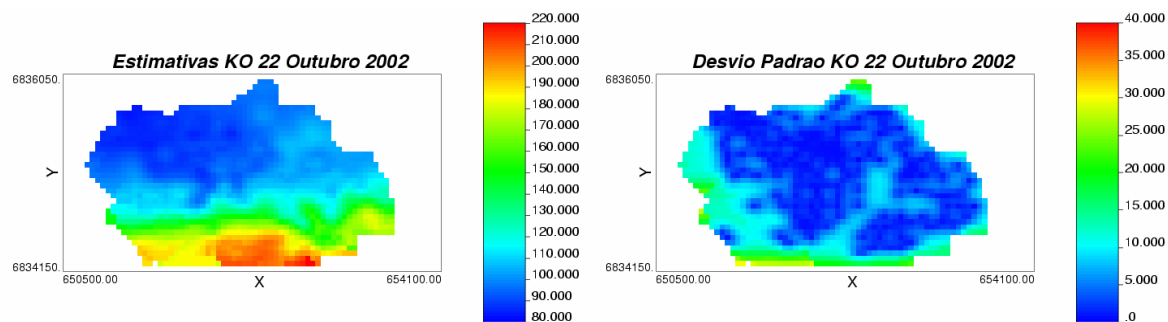


Figura B.10 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 22 de Outubro de 2002.

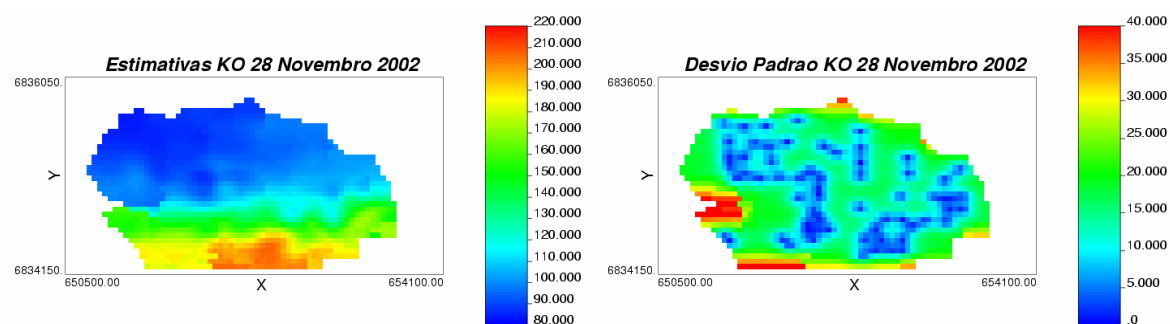


Figura B.11 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 28 Novembro de 2002.

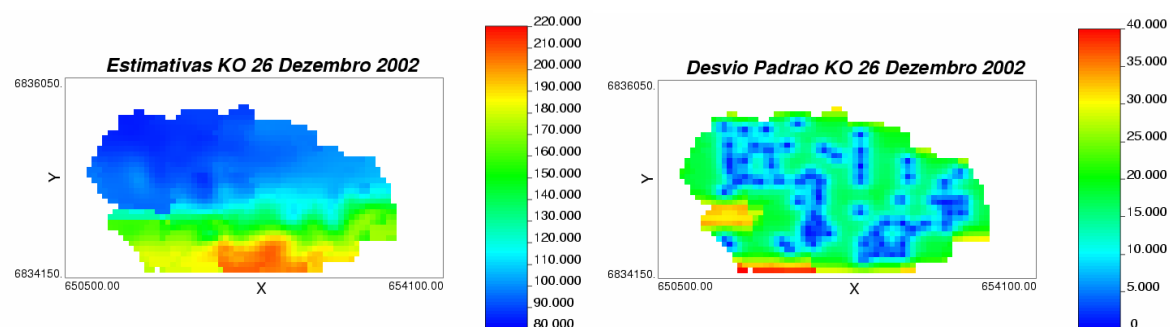


Figura B.12 – Mapas das estimativas pontuais de nível de água e do desvio padrão de KO para o 26 de Dezembro de 2002.

B.2 Mapas de contorno do nível de água

A partir dos mapas das estimativas pontuais, são construídos os mapas de contorno do nível de água. Os mesmos são apresentados nas figuras a seguir.

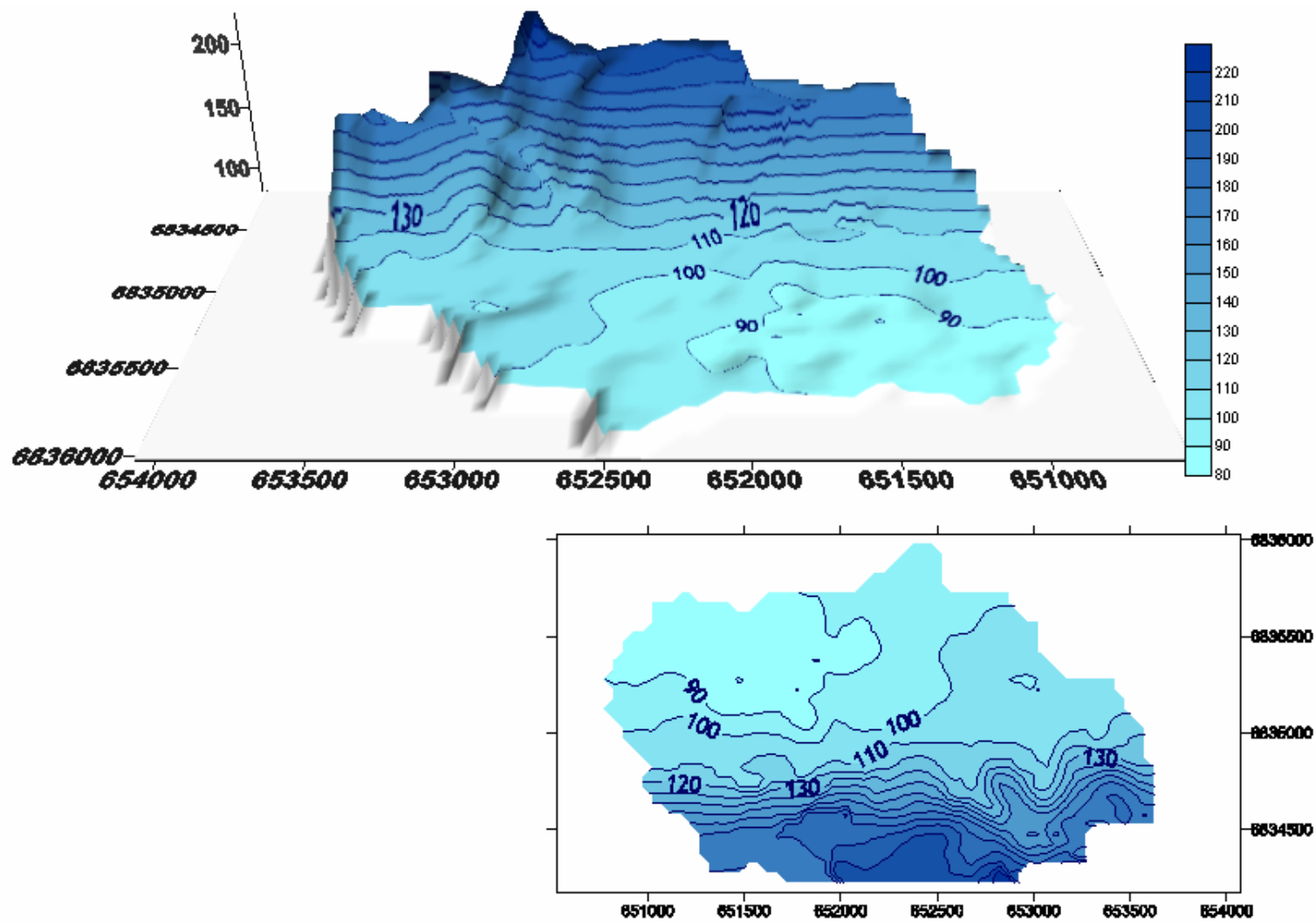


Figura B.13 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 22 de Janeiro de 2002.

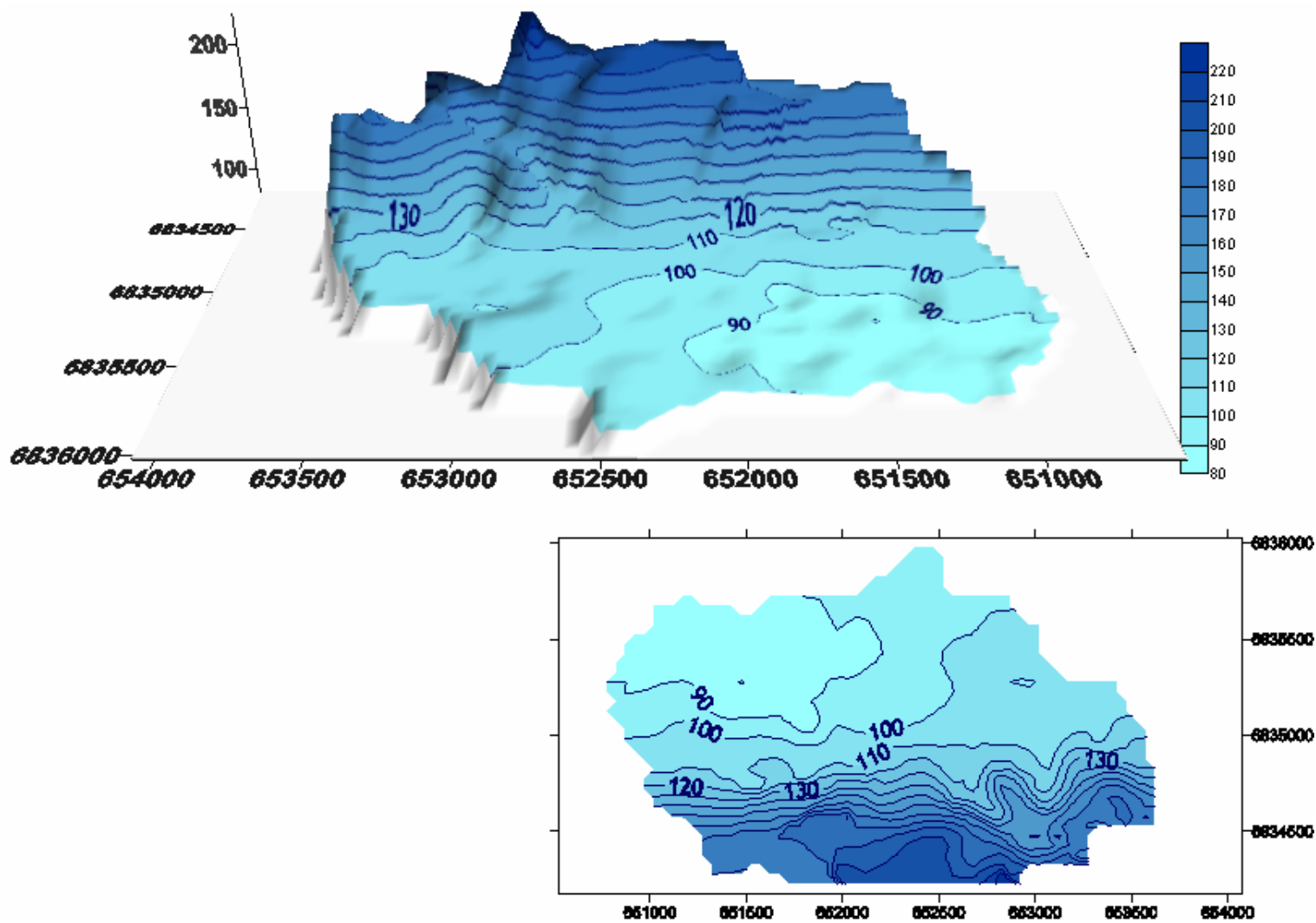


Figura B.14 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 26 de Fevereiro de 2002.

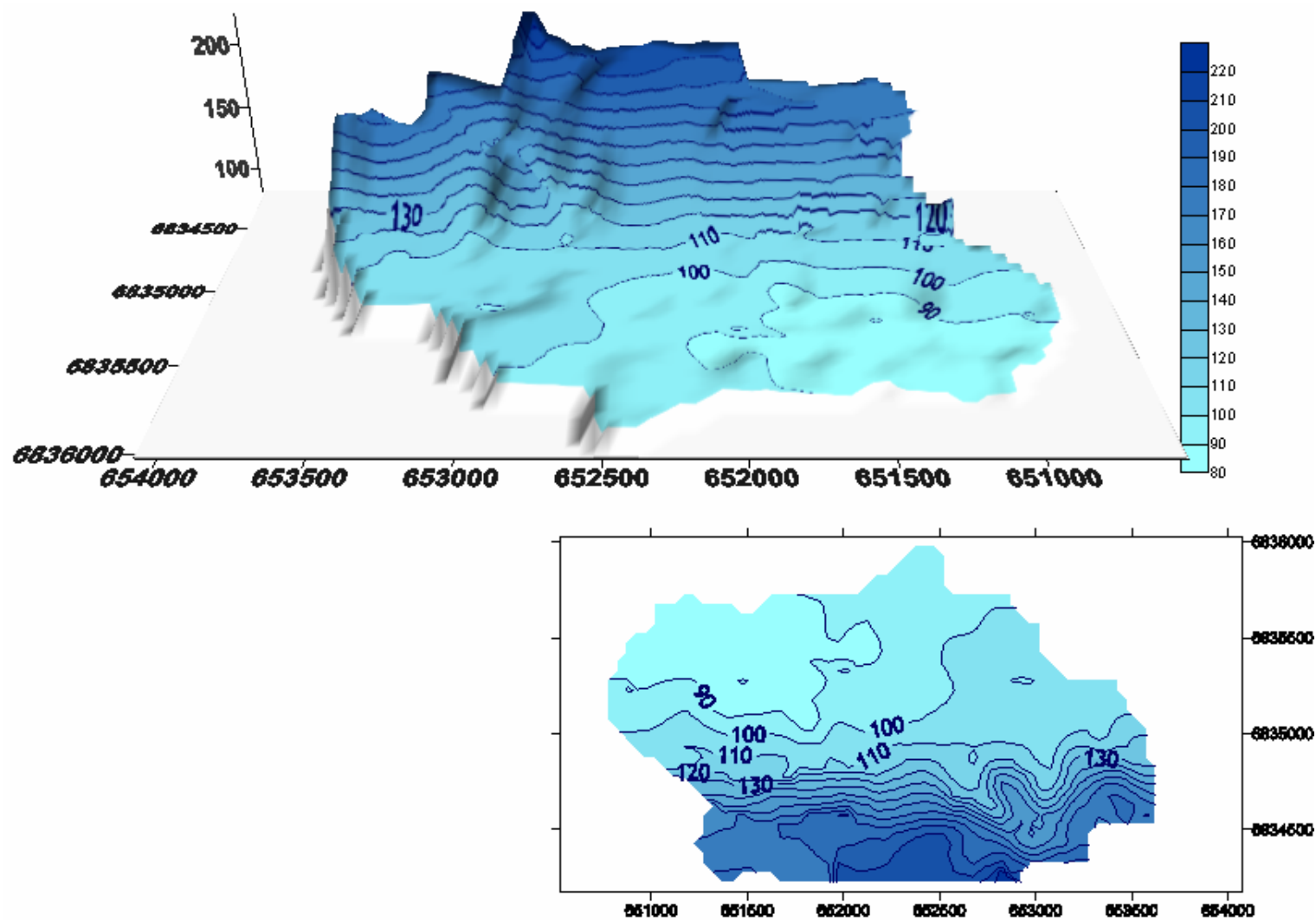


Figura B.15 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 26 de Março de 2002.

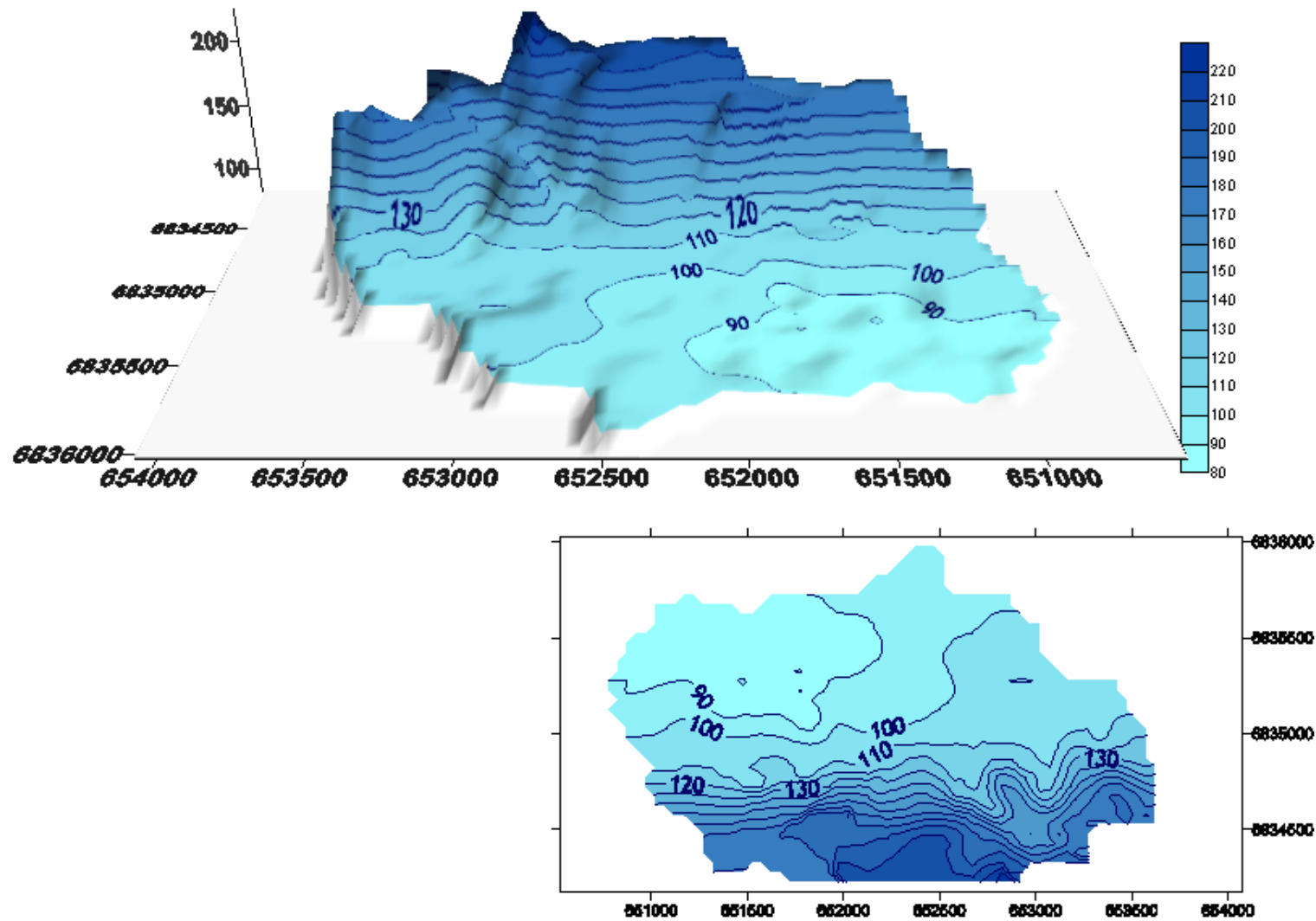


Figura B.16 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 23 de Abril de 2002.

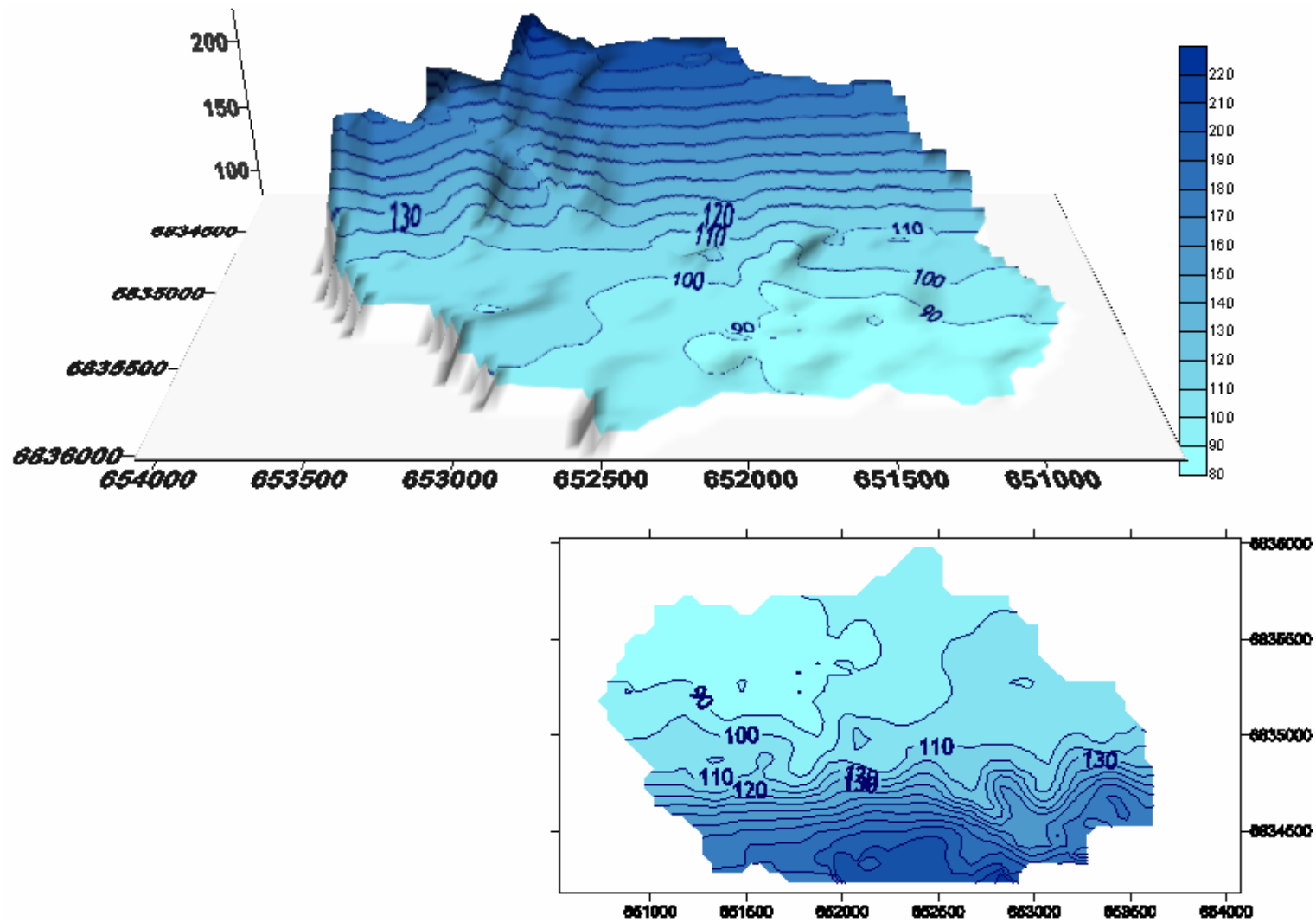


Figura B.17 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 28 de Maio de 2002.

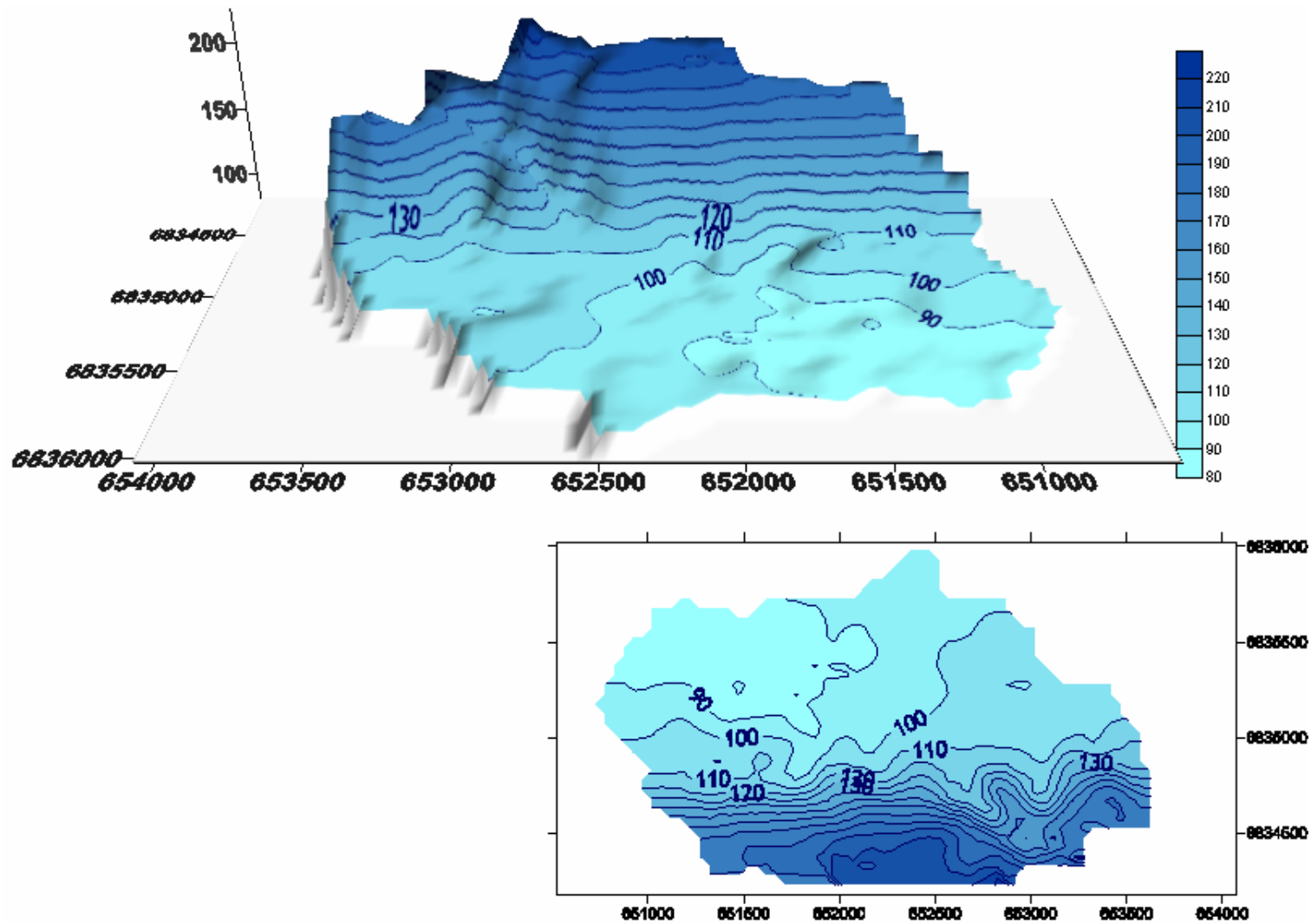


Figura B.18 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 25 de Junho de 2002.

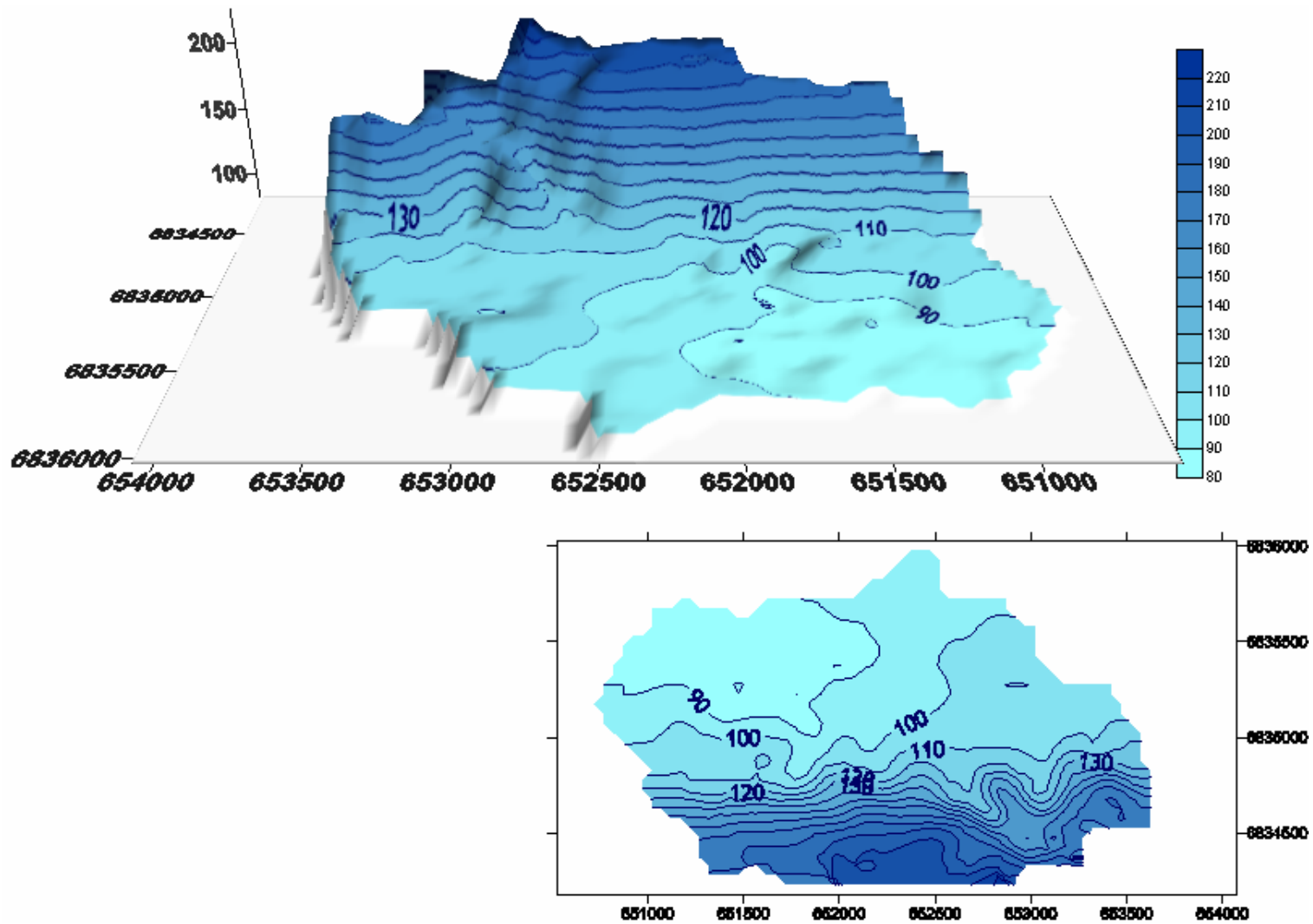


Figura B.19 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 23 de Julho de 2002.

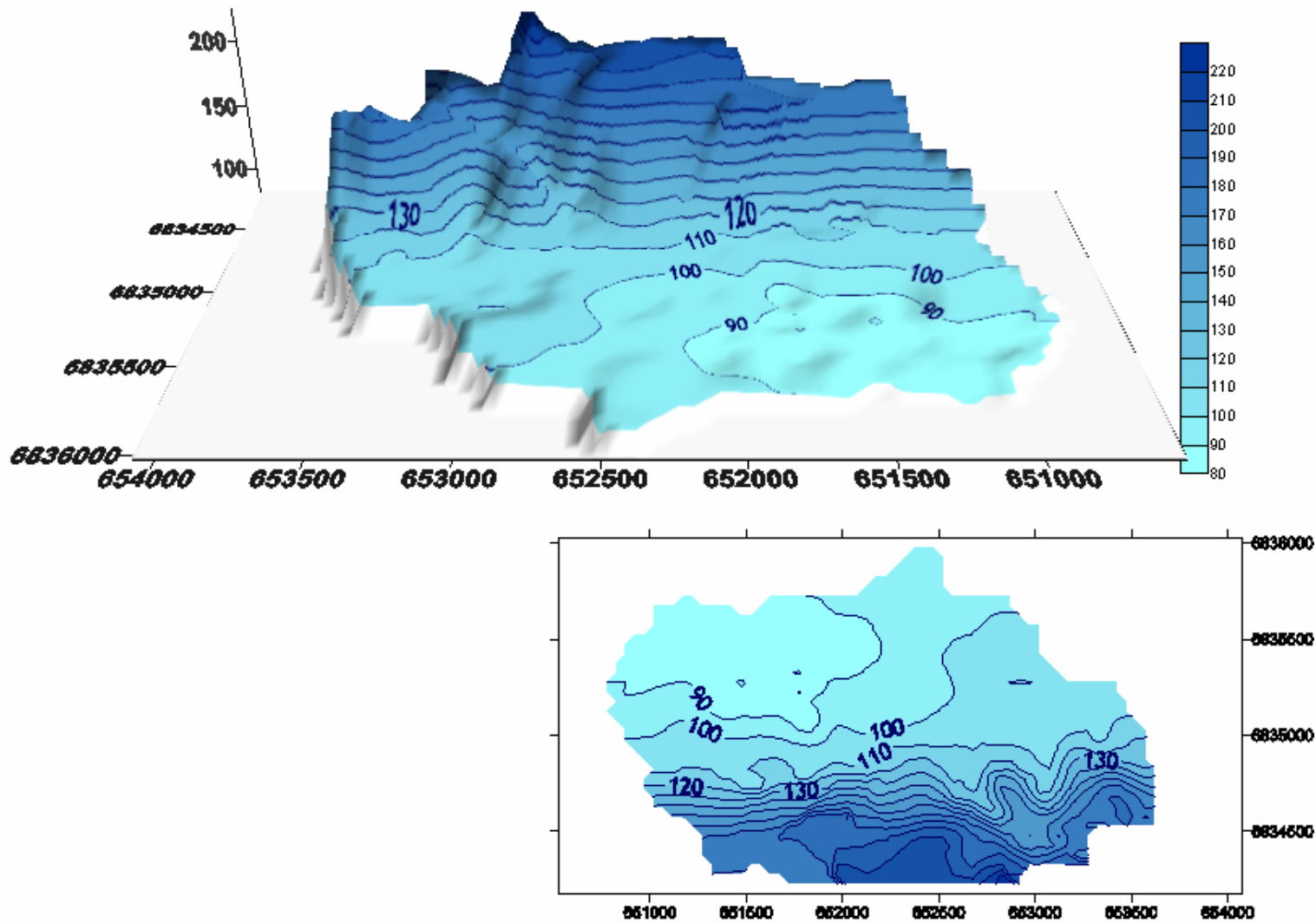


Figura B.20 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 27 de Agosto de 2002.

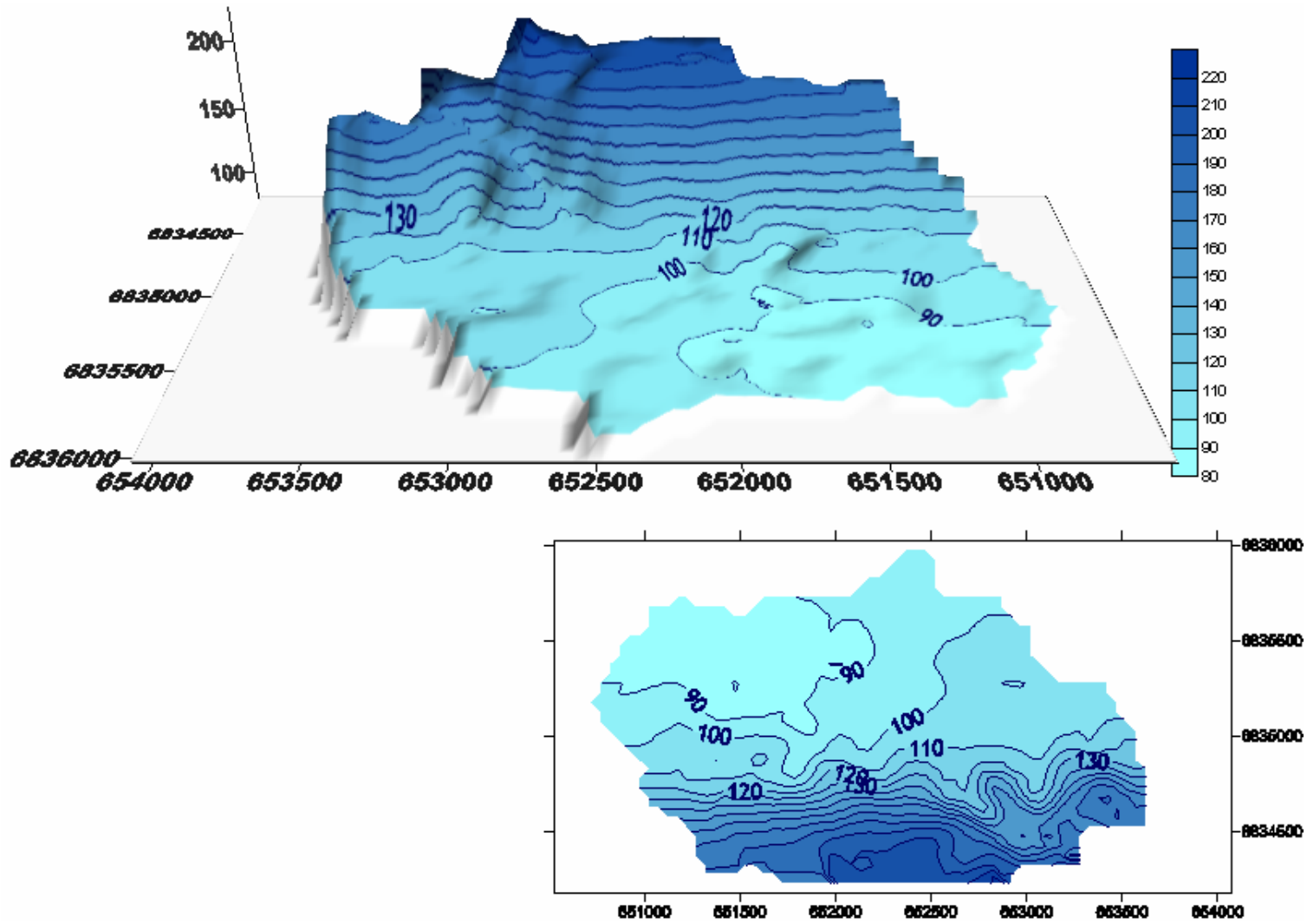


Figura B.21 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 24 de Setembro de 2002.

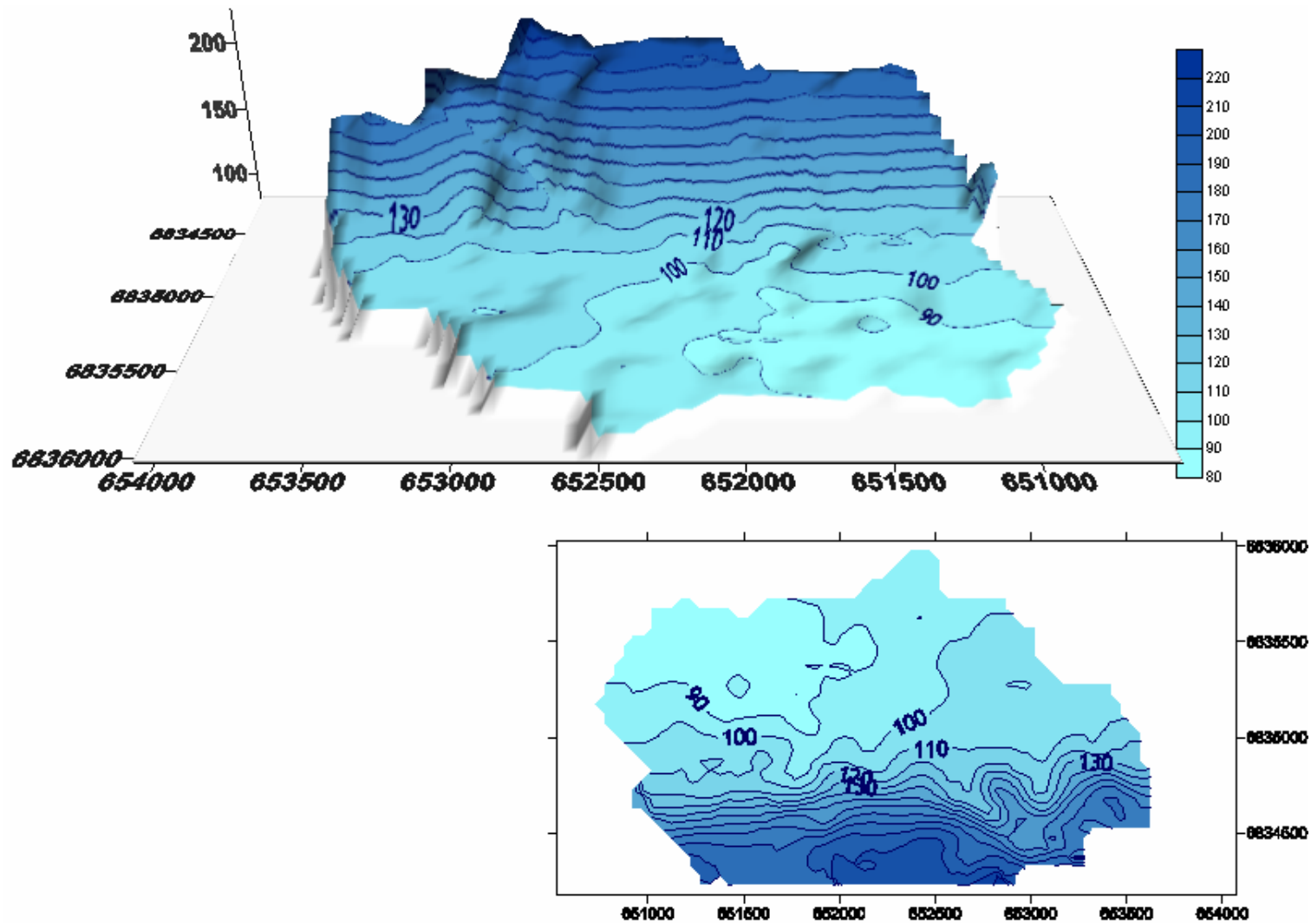


Figura B.22 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 22 de Outubro de 2002.

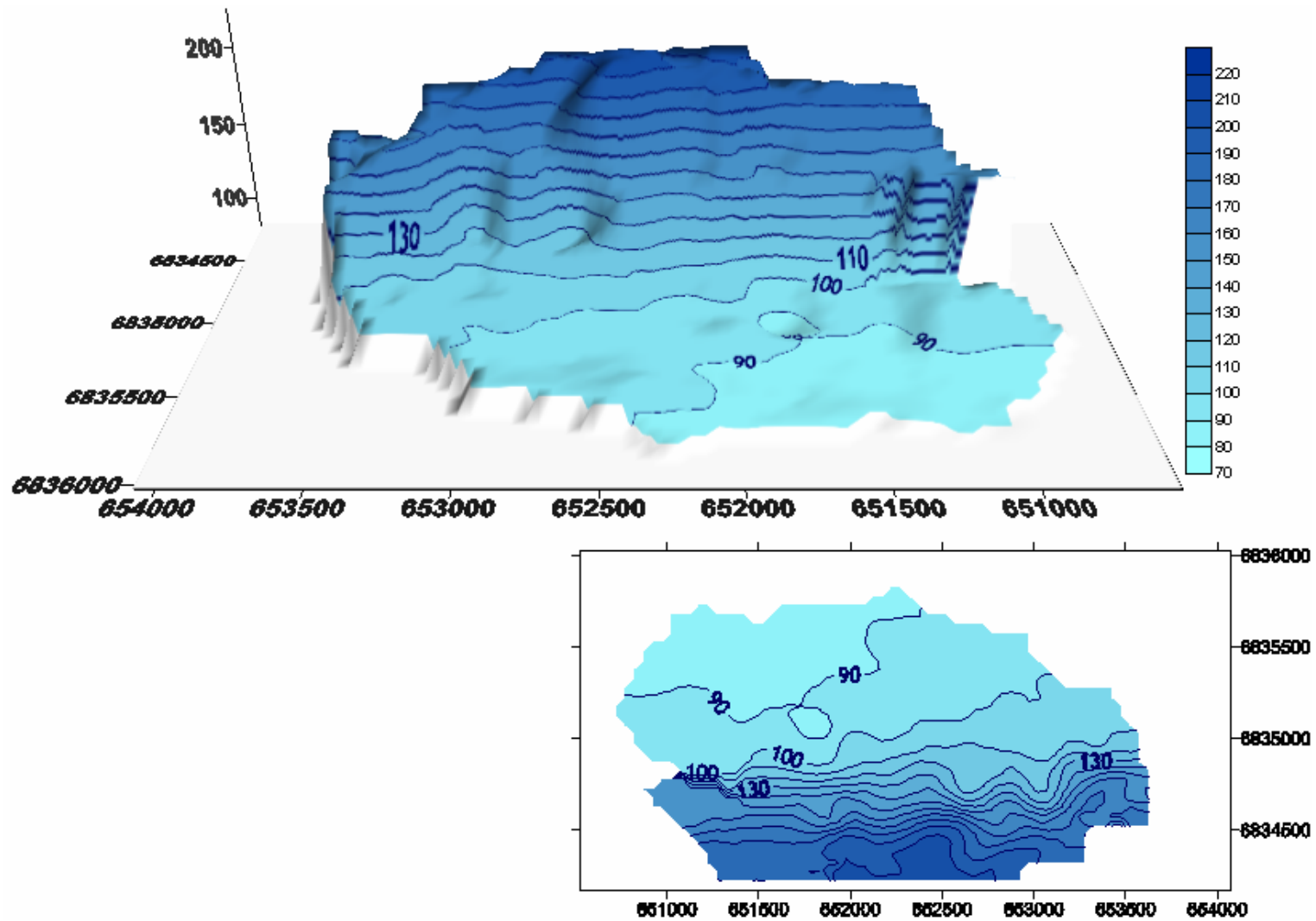


Figura B.23 – Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 28 de Novembro de 2002.

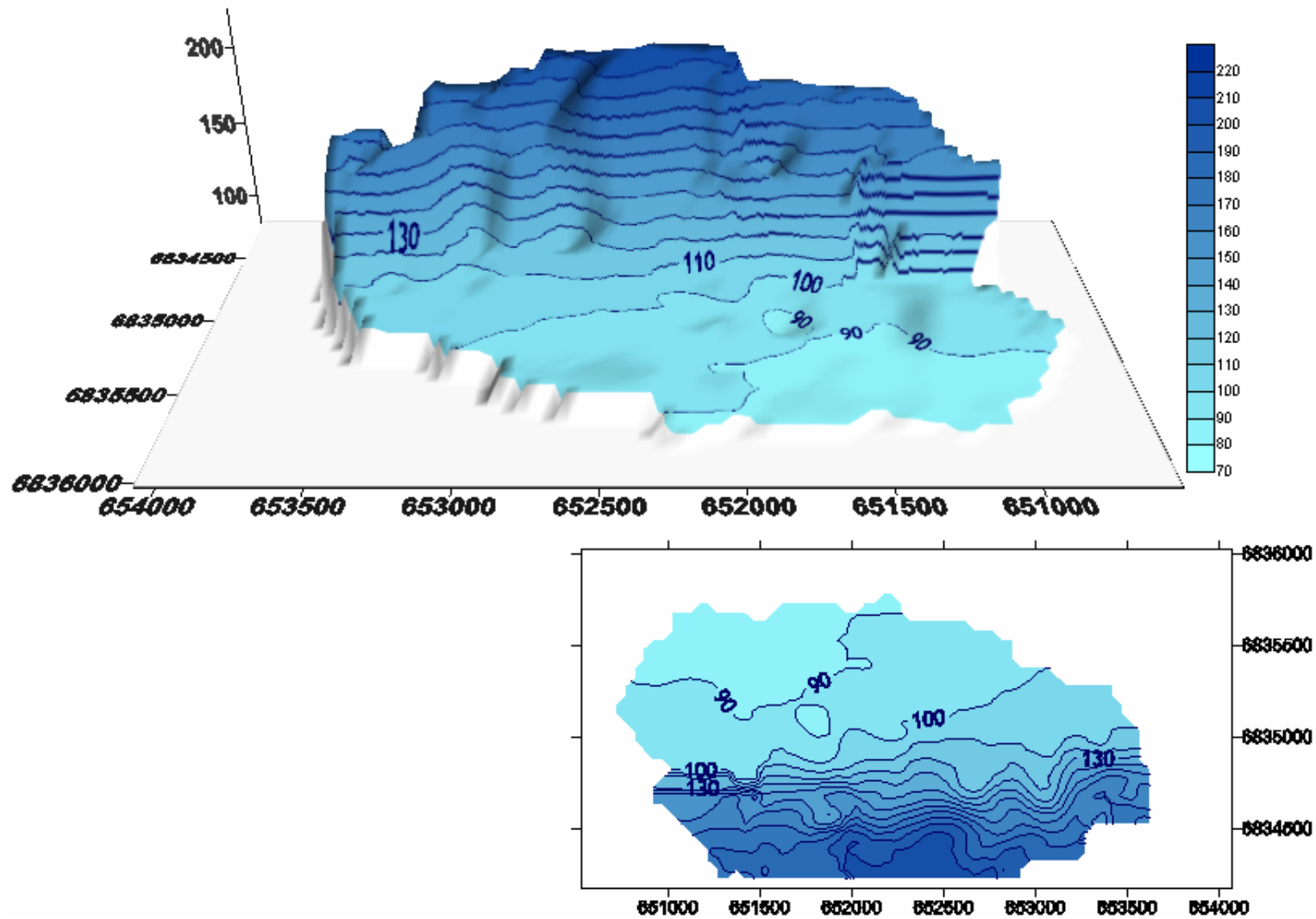


Figura B.24– Mapas de contorno das estimativas de nível de água por KO para o 26 de Dezembro de 2002.

Apêndice C

Código do programa NEWCOKB3D

Nesse apêndice apresenta-se o código do programa NEWCOKB3D (XIANLIN & JOURNEL, 1999). O mesmo é de acesso livre, disponibilizado pela Universidade de Stanford, Califórnia, EE.UU. (<http://ekofisk.stanford.edu/SCRFweb/GSLIB/index.html>), permitindo a sua adaptação aos requerimentos de cada caso em particular. No caso de estudo modifica-se para que os dados secundários possam estar não definidos em todos os nós da malha de estimativa. Se esse for o caso, indica-se que a estimativa não seja realizada. Todas as sub-rotinas chamadas pelo programa são pertencentes à biblioteca GSLIB (DEUTSCH & JOURNEL, 1998). A linguagem utilizada é Fortran 77 padrão.

```

program main
C%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C
C Copyright (C) 1996, The Board of Trustees of the Leland Stanford
C Junior University. All rights reserved.
C
C The programs in GSLIB are distributed in the hope that they will be
C useful, but WITHOUT ANY WARRANTY. No author or distributor accepts
C responsibility to anyone for the consequences of using them or for
C whether they serve any particular purpose or work at all, unless he
C says so in writing. Everyone is granted permission to copy, modify
C and redistribute the programs in GSLIB, but only under the condition
C that this notice and the above copyright notice remain intact.
C%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
C-----
C
C
C          CoKriging of a 3-D Rectangular Grid
C          *****
C
C This program estimates the value of a "primary" variable with primary
C and secondary data. The program could be modified to jointly predict
C primary and secondary data.
C
C-----
C          include 'newcokb3d.inc'
C
C Read the Parameter File and the Data:
C
C          call readparm
C
C Call cokb3d to kriging the grid:
C
C          call cokb3d
C
C Finished:
C
C          write(*,9998) VERSION
C          9998 format(/' COKB3D Version: ',f5.3, ' Finished'/)
C          stop
C          end
C          subroutine readparm
C-----
C
C          Initialization and Read Parameters
C          *****
C
C The input parameters and data are read, some quick error checking is
C performed, and the statistics of all the variables being considered
C are written to standard output.
C-----
C          include 'newcokb3d.inc'
C          parameter(MV=20)
C          real      var(MV),av(MV),ss(MV)
C          integer   ivrl(MV),nn(MV)
C          character datafl*40,outfl*40,dbgfl*40,secfl*40,str*40,lvml*40
C          logical   testfl,linmod,posdef
C          common /varpar2/ssec,gvar
C          common /sill123/c11,c12,c22,crr

```

```

c
c I/O units:
c
    lin = 1
    lout = 2
    ldbg = 3
    llsec=4
c
c Note VERSION number:
c
    write(*,9999) VERSION
9999 format(/' COKB3D Version: ',f5.3/)
c
c Get the name of the parameter file - try the default name if no input:
c
    write(*,*) 'Which parameter file do you want to use?'
    read (*,'(a40)') str
    if(str(1:1).eq.' ')str='newcokb3d.par'
    inquire(file=str,exist=testfl)
    if(.not.testfl) then
        write(*,*) 'ERROR - the parameter file does not exist,'
        write(*,*) '          check for the file and try again '
        write(*,*)
        if(str(1:20).eq.'newcokb3d.par' ) then
            write(*,*) '          creating a blank parameter file'
            call makepar
            write(*,*)
        end if
    end if
    stop
endif
open(lin,file=str,status='OLD')
c
c Find Start of Parameters:
c
1   read(lin,'(a4)',end=98) str(1:4)
    if(str(1:4).ne.'STAR') go to 1
c
c Read Input Parameters:
c
    read(lin,'(a40)',err=98) datafl
    call chknam(datafl,40)
    write(*,*) ' data file = ',datafl

    read(lin,*,err=98) nvr
    write(*,*) ' number of variables = ',nvr
    if(nvr.gt.MAXVAR) stop 'nvr is too big - modify .inc file'
    if(nvr.gt.4) stop 'can not use more than 3 secondary variables'

    read(lin,*,err=98) ixl,iyl,izl,(ivrl(i),i=1,nvr)
    write(*,*) ' columns = ',ixl,iyl,izl,(ivrl(i),i=1,nvr)

    read(lin,*,err=98) tmin,tmax
    write(*,*) ' trimming limits = ',tmin,tmax

    read(lin,*,err=98) icoloc
    write(*,*) ' co-located cokriging flag = ',icoloc

    read(lin,'(a40)',err=98) secfl
    call chknam(secfl,40)
    write(*,*) ' collocated cokriging file = ',secfl

```

```

read(lin,*,err=98) icoll
write(*,*) ' column for covariate = ',icoll

read(lin,*,err=98)ilvm
write(*,*)' local varying mean flag=',ilvm

read(lin,'(a40)',err=98) lvmfl
call chknam(lvmfl,40)
write(*,*) ' Local varing mean file = ',lvmfl
read(lin,*,err=98) icollvm
write(*,*) ' column for local varying mean = ',icollvm

read(lin,*,err=98) idbg
write(*,*) ' debug level = ',idbg

read(lin,'(a40)',err=98) dbgfl
call chknam(dbgfl,40)
write(*,*) ' debug file = ',dbgfl
write(*,*)
write(*,*) ' Some input parameters are now echoed to debug file'
write(*,*)

open(ldbg,file=dbgfl,status='UNKNOWN')

read(lin,'(a40)',err=98) outfl
call chknam(outfl,40)
write(*,*) ' output file = ',outfl

read(lin,*,err=98) nx,xmn,xsiz
write(*,*) ' nx, xmn, xsiz = ',nx,xmn,xsiz

read(lin,*,err=98) ny,ymn,ysiz
write(*,*) ' ny, ymn, ysiz = ',ny,ymn,ysiz

read(lin,*,err=98) nz,zmn,zsiz
write(*,*) ' nz, zmn, zsiz = ',nz,zmn,zsiz

read(lin,*,err=98) nxdis,nydis,nzdis
write(*,*) ' nxdis,nydis,nzdis = ',nxdis,nydis,nzdis
if((nxdis*nydis*nzdis).gt.MAXDIS) then
    write(*,*) 'ERROR COKB3D: Too many discretization points '
    write(*,*) '          Increase MAXDIS or lower n[xy]dis'
    stop
endif

read(lin,*,err=98) ndmin,ndmaxp,ndmaxs
write(*,*) ' ndmin,ndmaxp,ndmaxs = ',ndmin,ndmaxp,ndmaxs

read(lin,*,err=98) radiusp,radius1,radius2
write(*,*) ' primary search radii = ',radiusp,radius1,radius2
if(radiusp.lt.EPSLON) stop 'radius must be greater than zero'
radsqdp = radiusp * radiusp
sanisp1 = radius1 / radiusp
sanisp2 = radius2 / radiusp

```



```

read(lin,*,err=98) radiuss,radius1,radius2
write(*,*) ' secondary search radii = ',radiuss,radius1,radius2
if(radiuss.lt.EPSLON) stop 'radius must be greater than zero'
radsqds = radiuss * radiuss
saniss1 = radius1 / radiuss
saniss2 = radius2 / radiuss

read(lin,*,err=98) sang1,sang2,sang3
write(*,*) ' search anisotropy angles = ',sang1,sang2,sang3

read(lin,*,err=98) ktype
write(*,*) ' kriging type = ',ktype
if(ktype.lt.0.or.ktype.gt.2) stop ' ERROR: invalid kriging type'
if(icoloc.eq.1 .and. ktype.eq.2) stop'ERROR: invalid kriging type'
if(ilvm.eq.1 .and. ktype.ne.0) stop' ERROR: LVM must be SK'

if(icoloc.eq.1) then
  read(lin,*,err=98) (vmean(i),i=1,2)
  write(*,*) ' variable means = ',(vmean(i),i=1,2)
else if(icoloc.eq.0)then

read(lin,*,err=98) (vmean(i),i=1,nvr)
write(*,*) ' variable means = ',(vmean(i),i=1,nvr)

endif

read(lin,*,err=98) imodel
write(*,*) 'imodel type=',imodel

read(lin,*,err=98) colocorr
write(*,*) ' correlation coefficient=', colocorr

read(lin,*,err=98) var2
write(*,*) ' variance of secondary variable=', var2

read(lin,*,err=98) var1
write(*,*) 'variance of primary variable=', var1

if(imodel.eq.1) then
  read(lin,*,err=98) i,j
  write(*,*) ' i, j=',i,j
  if(i.gt.MAXVAR.or.j.gt.MAXVAR) then
    write(*,*) ' Variogram specified for variable beyond MAXVAR'
    stop
  end if
  read(lin,*,err=98) nst(1),c0(1)
  c11 = c0(1)
  write(*,*) ' nst, c0 = ',nst(1),c0(1)

c
c Calculating the C11 for MM1
c
  do i=1,nst(1)
    read(lin,*,err=98) it(i),cc(i),ang1(i),ang2(i),ang3(i)
    read(lin,*,err=98) aa(i),aa1,aa2
    anis1(i) = aa1 / max(aa(i),EPSLON)
    anis2(i) = aa2 / max(aa(i),EPSLON)
    c11 = c11 + cc(i)

    write(*,*) ' it,cc,ang[1,2,3]; ',it(i),cc(i),

```

```

+           angl(i),ang2(i),ang3(i)
      write(*,*) ' a1 a2 a3: ',aa(i),aal,aa2
    end do
c
c C22 equals to the variance of the secondary variable
c
      c22=var2

    endif

    if (imodel.eq.2) then
c
c reading the residual's structure
c
      read(lin,*,err=98) i,j
      write(*,*) ' i, j=',i,j
      if(i.gt.MAXVAR.or.j.gt.MAXVAR) then
        write(*,*) ' Variogram specified for variable beyond MAXVAR'
        stop
      end if

      read(lin,*,err=98) nst(2),c0(2)
      crr=c0(2)
      write(*,*) ' nst, c0 = ',nst(2),c0(2)

      do i=MAXNST+1,MAXNST+nst(2)

        read(lin,*,err=98) it(i),cc(i),angl(i),ang2(i),ang3(i)
        read(lin,*,err=98) aa(i),aal,aa2
        crr=crr+cc(i)
        anis1(i) = aal / max(aa(i),EPSLON)
        anis2(i) = aa2 / max(aa(i),EPSLON)
        write(*,*) ' it,cc,ang[1,2,3]; ',it(i),cc(i),
+           angl(i),ang2(i),ang3(i)
        write(*,*) ' a1 a2 a3: ',aa(i),aal,aa2

      end do

c reading secondary attribute's structure

      read(lin,*,err=98) i,j
      write(*,*) ' i, j=',i,j
      if(i.gt.MAXVAR.or.j.gt.MAXVAR) then
        write(*,*) ' Variogram specified for variable beyond MAXVAR'
        stop
      end if

      read(lin,*,err=98) nst(1),c0(1)
      c22 = c0(1)
      write(*,*) ' nst, c0 = ',nst(1),c0(1)

c
c Calculating the C22 for MM2
c
      do i=1,nst(1)
        read(lin,*,err=98) it(i),cc(i),angl(i),ang2(i),ang3(i)
        read(lin,*,err=98) aa(i),aal,aa2
        anis1(i) = aal / max(aa(i),EPSLON)
        anis2(i) = aa2 / max(aa(i),EPSLON)
        c22 = c22 + cc(i)
        if(it(i).eq.4) then

```

```

        write(*,*) ' A power model is NOT allowed '
        write(*,*) ' Choose a different model and re start '
        stop
    endif
    write(*,*) ' it,cc,ang[1,2,3]; ',it(i),cc(i),
+           angl(i),ang2(i),ang3(i)
    write(*,*) ' a1 a2 a3: ',aa(i),aa1,aa2
end do

c
c C11 equals to the variance of the primary variable
c
    c11=var1

endif

c imodel=1 for MM1, =2 for MM2, =3 for LMC
if(imodel.eq.3) then
c
c Now, initialize nst value to -1 to flag all missing variograms:
c
    if(icoloc.eq.1) nvr=2
    do i=1,nvr
        do j=1,nvr
            ind = i + (j-1)*MAXVAR
            nst(ind) = -1
        end do
    end do

c
c Read as many variograms as are in the parameter file:
c
3   read(lin,*,end=4,err=98) i,j

    if(i.gt.MAXVAR.or.j.gt.MAXVAR) then
        write(*,*) ' Variogram specified for variable beyond MAXVAR'
        stop
    end if
    ind = i + (j-1)*MAXVAR
    read(lin,*,err=98) nst(ind),c0(ind)
    write(ldbg,103) i,j,nst(ind),c0(ind)

    1start = 1 + (ind-1)*MAXNST
    do i=1,nst(ind)
        index = 1start + i - 1

        read(lin,*,err=98) it(index),cc(index),ang1(index),
+           angl(index),ang2(index),ang3(index)

        read(lin,*,err=98) aa(index),aa1,aa2

        anis1(index) = aa1 / max(aa(index),EPSLON)
        anis2(index) = aa2 / max(aa(index),EPSLON)
        if(it(index).eq.4.and.ktype.eq.0)
+           stop 'No Power model with SK'
    end do
    write(ldbg,104) (it(1start+i-1), i=1,nst(ind))
    write(*,104) (it(1start+i-1), i=1,nst(ind))
    write(ldbg,105) (aa(1start+i-1), i=1,nst(ind))
    write(ldbg,106) (cc(1start+i-1), i=1,nst(ind))
    write(ldbg,107) (ang1(1start+i-1), i=1,nst(ind))
    write(ldbg,108) (ang2(1start+i-1), i=1,nst(ind))
    write(ldbg,109) (ang3(1start+i-1), i=1,nst(ind))

```

```

write(ldbg,110) (anis1(istart+i-1),i=1,nst(ind))
write(ldbg,111) (anis2(istart+i-1),i=1,nst(ind))
103 format(//,' USER input variogram for variables ',i2,' and ',i2,/,
+      '      number of structures=',i2,' nugget effect=',f12.4)
104 format('      types of structures: ',10i2)
105 format('      aa values:           ',10f12.4)
106 format('      cc values:           ',10f12.4)
107 format('      angl values:         ',10f12.4)
108 format('      ang2 values:         ',10f12.4)
109 format('      ang3 values:         ',10f12.4)
110 format('      anis1 values:        ',10f12.4)
111 format('      anis2 values:        ',10f12.4)
      go to 3
4      close(lin)
c
c calculating sill for colocated cokriging[c12(0)]{LMC}
c
      if(icoloc.eq.1) then
          ind=1+MAXVAR
          istart = 1 + (ind-1)*MAXNST
          c12=c0(ind)
          do i=1,nst(ind)
              index = istart + i - 1
              c12=c12+cc(index)
          end do

          ind=2+MAXVAR
          istart = 1 + (ind-1)*MAXNST
          c22=c0(ind)
          do i=1,nst(ind)
              index = istart + i - 1
              c22=c22+cc(index)
          end do
      endif

c
c Fill in cross variograms j=i if they have not been explicitly entered:
c
      do i=1,nvr
          do j=1,nvr
              ind1 = i + (j-1)*MAXVAR
              ind2 = j + (i-1)*MAXVAR
              if(nst(ind1).eq.-1.and.nst(ind2).eq.-1) then
                  write(*,*) ' Need variogram between variables ',i,j
                  stop
              end if
              if(nst(ind1).eq.-1) then
                  nst(ind1) = nst(ind2)
                  c0(ind1) = c0(ind2)
                  istart1 = 1 + (ind1-1)*MAXNST
                  istart2 = 1 + (ind2-1)*MAXNST
                  do ist=1,nst(ind1)
                      index2 = istart2 + ist - 1
                      index1 = istart1 + ist - 1
                      it(index1) = it(index2)
                      cc(index1) = cc(index2)
                      aa(index1) = aa(index2)
                      angl(index1) = angl(index2)
                      ang2(index1) = ang2(index2)
                      ang3(index1) = ang3(index2)
                      anis1(index1) = anis1(index2)
                  end do
              end if
          end do
      end do

```

```

        anis2(index1) = anis2(index2)
    end do
else if(nst(ind2).eq.-1) then
    nst(ind2) = nst(ind1)
    c0(ind2) = c0(ind1)
    istart1 = 1 + (ind1-1)*MAXNST
    istart2 = 1 + (ind2-1)*MAXNST
    do ist=1,nst(ind2)
        index2 = istart2 + ist - 1
        index1 = istart1 + ist - 1
        it(index2) = it(index1)
        cc(index2) = cc(index1)
        aa(index2) = aa(index1)
        angl(index2) = angl(index1)
        ang2(index2) = ang2(index1)
        ang3(index2) = ang3(index1)
        anis1(index2) = anis1(index1)
        anis2(index2) = anis2(index1)
    end do
end if
end do
end do
c
c Has the linear model of coregionalization been used?
c
c Check for LMC

    linmod = .true.
    do i=1,nvr
    do j=1,nvr
    ind1 = i + (j-1)*MAXVAR
    do i2=1,nvr
    do j2=1,nvr
    ind2 = i2 + (j2-1)*MAXVAR
    if(nst(ind1).ne.nst(ind2)) linmod = .false.
    istart1 = 1 + (ind1-1)*MAXNST
    istart2 = 1 + (ind2-1)*MAXNST
    do ist=1,nst(ind1)
    index2 = istart2 + ist - 1
    index1 = istart1 + ist - 1
    if(it(index1).ne.it(index2).or.
+         abs(aa(index1) - aa(index2)).gt.EPSLON.or.
+         abs(ang1(index1) - angl(index2)).gt.EPSLON.or.
+         abs(ang2(index1) - ang2(index2)).gt.EPSLON.or.
+         abs(ang3(index1) - ang3(index2)).gt.EPSLON.or.
+         abs(anis1(index1) - anis1(index2)).gt.EPSLON.or.
+         abs(anis2(index1) - anis2(index2)).gt.EPSLON)
+         linmod = .false.
    end do
    end do
    end do
    end do
    end do
    if(linmod) then
c
c Yes, the linear model of coregionalization has been used, now check
c to ensure positive definiteness:
c
        posdef = .true.
        do i=1,nvr
        do j=1,nvr

```

```

        if(i.ne.j) then
            ii = i+(i-1)*MAXVAR
            jj = j+(j-1)*MAXVAR
            ij = i+(j-1)*MAXVAR
            ji = j+(i-1)*MAXVAR
            istartii = 1 + (ii-1)*MAXNST
            istartjj = 1 + (jj-1)*MAXNST
            istartij = 1 + (ij-1)*MAXNST
            istartji = 1 + (ji-1)*MAXNST
c
c First check the nugget effects:
c
        if(c0(ii).le.0.0.or.c0(jj).le.0.0.or.
+          (c0(ii)*c0(jj)).lt.(c0(ij)*c0(ji)) ) then
            posdef = .false.
            write(ldbg,120) i,j
        endif
        do ist=1,nst(ii)
            indexii = istartii + ist - 1
            indexjj = istartjj + ist - 1
            indexij = istartij + ist - 1
            indexji = istartji + ist - 1
            if(cc(indexii).le.0.0.or.cc(indexjj).le.0.0.or.
+              (cc(indexii)*cc(indexjj)).lt.
+              (cc(indexij)*cc(indexji)) ) then
                posdef = .false.
                write(ldbg,121) ist,i,j
            endif
        end do
    end if
end do
end do
120 format(//,'Positive definiteness violation on nugget effects'
+         //,' between ',i2,' and ',i2)
121 format(//,'Positive definiteness violation on structure ',i2
+         //,' between ',i2,' and ',i2)
c
c The model is not positive definite:
c
        if(.not.posdef) then
            write(*,*)
            write(*,*) ' The linear model of coregionalization is NOT'
write(*,*) ' positive definite! This could lead to singular'
            write(*,*) ' matrices and unestimated points.'
            write(*,*)
            write(*,*) ' Do you want to proceed? (y/n)'
            read (*,'(a40)') str
            if(str(1:1).ne.'y'.and.str(1:1).ne.'Y') stop
        end if
        else
c
c No linear model of coregionalization:
c
            write(*,*)
            write(*,*) ' A linear model of coregionalization has NOT'
            write(*,*) ' been used!! This could lead to many singular'
            write(*,*) ' matrices and unestimated points.'
            write(*,*)
            write(*,*) ' Do you want to proceed? (y/n)'
            read (*,'(a40)') str
            if(str(1:1).ne.'y'.and.str(1:1).ne.'Y') stop

```

```

endif

c endif for(imodel=3)
endif

c
c Perform some quick error checking:
c
if(ndmin .le.0) stop ' NDMIN too small'
if(ndmaxp.gt.MAXSAM) stop ' NDMAXP too large'
if(ndmaxs.gt.MAXSAM) stop ' NDMAXS too large'
if((ndmaxs/2).le.nvr.and.ktype.eq.2) then
write(*,100) nvr,ndmaxs
100 format('WARNING: with traditional ordinary cokriging the ',
+         /,'sum of the weights applied to EACH secondary data',
+         /,'is zero. With ndmaxs set low and nvr large the',
+         /,'secondary data will not contribute to the estimate')
endif

c
c Check to make sure the data file exists, then either read in the
c data or write an error message and stop:
c
inquire(file=datafl,exist=testfl)
if(.not.testfl) then
write(*,*) 'ERROR data file ',datafl,' does not exist!'
stop
endif

c
c The data file exists so open the file and read in the header
c information. Initialize the storage that will be used to summarize
c the data found in the file:
c
open(lin,file=datafl,status='OLD')
read(lin,'(a40)',err=99) str
read(lin,*,err=99) nvari
do i=1,nvari
read(lin,'()',err=99)
end do
do i=1,nvr
nn(i) = 0
av(i) = 0.0
ss(i) = 0.0
end do

c
c Some tests on column numbers:
c
if(ixl.gt.nvari.or.iyl.gt.nvari.or.izl.gt.nvari.or.
+ ivrl(1).gt.nvari) then
write(*,*) 'There are only ',nvari,' columns in input data'
write(*,*) ' your specification is out of range'
stop
end if

c
c Read all the data until the end of the file:
c
nd = 0
7 read(lin,*,end=9,err=99) (var(j),j=1,nvari)
nd = nd + 1
if(nd.gt.MAXDAT) then
write(*,*) ' ERROR: Exceeded available memory for data'
stop
end if

```

```

c
c Store data values (all secondary data must be transformed such that
c their mean is the same as the primary variable (if the first type of
c ordinary kriging is being used)):
c
  vr(nd) = var(ivr1(1))
  if(vr(nd).ge.tmin.and.vr(nd).lt.tmax) then
    nn(1) = nn(1) + 1
    av(1) = av(1) + vr(nd)
    ss(1) = ss(1) + vr(nd)*vr(nd)
  endif
  if(nvr.ge.2 .and. icoloc.eq. 0) then
    sec1(nd) = var(ivr1(2))
    if(sec1(nd).ge.tmin.and.sec1(nd).lt.tmax) then
      nn(2) = nn(2) + 1
      av(2) = av(2) + sec1(nd)
      ss(2) = ss(2) + sec1(nd)*sec1(nd)
    endif
  endif
  end if
  if(nvr.ge.3) then
    sec2(nd) = var(ivr1(3))
    if(sec2(nd).ge.tmin.and.sec2(nd).lt.tmax) then
      nn(3) = nn(3) + 1
      av(3) = av(3) + sec2(nd)
      ss(3) = ss(3) + sec2(nd)*sec2(nd)
    endif
  endif
  end if
  if(nvr.ge.4) then
    sec3(nd) = var(ivr1(4))
    if(sec3(nd).ge.tmin.and.sec3(nd).lt.tmax) then
      nn(4) = nn(4) + 1
      av(4) = av(4) + sec3(nd)
      ss(4) = ss(4) + sec3(nd)*sec3(nd)
    endif
  endif
  end if
c
c Assign the coordinate location of this data:
c
  if(ixl.le.0) then
    x(nd) = xmn
  else
    x(nd) = var(ixl)
  endif
  if(iyl.le.0) then
    y(nd) = ymn
  else
    y(nd) = var(iyl)
  endif
  if(izl.le.0) then
    z(nd) = zmn
  else
    z(nd) = var(izl)
  endif
  go to 7
9   close(lin)
c
c Compute the averages and variances as an error check for the user:
c
  if(icoloc.eq.1) then
    i=1
    av(i) = av(i) / max(real(nn(i)),1.0)

```



```

        ss(i) =(ss(i) / max(real(nn(i)),1.0)) - av(i) * av(i)
        write(*,*) 'COKB3D Variable ',i,' in data file: ',ivrl(i)
        write(*,*) '   Number   = ',nn(i)
        write(*,*) '   Average   = ',av(i)
        write(*,*) '   Variance  = ',ss(i)
    else
        do i=1,nvr
            av(i) = av(i) / max(real(nn(i)),1.0)
            ss(i) =(ss(i) / max(real(nn(i)),1.0)) - av(i) * av(i)
            write(*,*) 'COKB3D Variable ',i,' in data file: ',ivrl(i)
            write(*,*) '   Number   = ',nn(i)
            write(*,*) '   Average   = ',av(i)
            write(*,*) '   Variance  = ',ss(i)
        end do
    endif
    gvar=ss(1)
c
c read local varying mean
c
    if (ilvm.eq.1) then
        write(*,*) 'Reading local varying mean file'
        inquire(file=lvmfl,exist=testfl)
        if(.not.testfl) then
            write(*,188) lvmfl
188          format('Warning local varying mean file ',a40)
            stop
        endif
        open(llsec,file=lvmfl,status='old')
        read(llsec,'(a40)',err=99) str
        read(llsec,*,err=99)nlvm
        write(*,*)'test1: number of data=',nlvm
        do i=1,nlvm
            read(llsec,'()',err=99)
        end do

        index=0
        do iz=1,nz
            do iy=1,ny
                do ix=1,nx
                    index=index+1
                    read(llsec,*,err=99) (var(j),j=1,nlvm)
                    lvm(index)=var(icollvm)
                end do
            end do
        end do

c
c Calculation of residual moved to krige subroutine: vr(i)=vr(i)-sec(i)
c
        do i=1,nn(1)
            call getindx(nx,xmn,xsiz,x(i),ix,testind)
            call getindx(ny,ymn,ysiz,y(i),iy,testind)
            call getindx(nz,zmn,zsiz,z(i),iz,testind)
            index = ix + (iy-1)*nx + (iz-1)*nx*ny
            sec(i) = lvm(index)
        end do
    endif
    close(llsec)

```

```

c
c Read secondary attribute
c
  if(icoloc.eq.1) then
    write(*,*) 'Reading secondary attribute file'
    inquire(file=secfl,exist=testfl)
    if(.not.testfl) then
      write(*,118) secfl
118      format('Warning secondary attribute file ',a40)
      stop
    endif
    open(llsec,file=secfl,status='old')
    read(llsec,'(a40)',err=99) str
    write(*,*) 'secfile =',str
    read(llsec,*,err=99)      nseci
    do i=1,nseci
      read(llsec,'()',err=99)
    end do
    nsecdata=0
    secav=0.0
    ssec=0.0
    index=0
    do iz=1,nz
      do iy=1,ny
        do ix=1,nx
          index=index+1
        end do
      end do
    end do
    if(index.gt.MAXDAT) then
      write(*,*) ' ERROR: Exceeded available memory for data'
      stop
    end if
    read(llsec,*,err=99) (var(j), j=1,nseci)

c   for rescalling the secondary attribute

      secdat(index)=var(icol1)
      if(secdat(index).ge.tmin.and.secdat(index).lt.tmax) then
        nsecdata = nsecdata + 1
        secav = secav + secdat(index)
        ssec = ssec + secdat(index)*secdat(index)
      endif
    end do
  end do
  secav=secav/max(real(nsecdata),1.0)
  ssec=(ssec/max(real(nsecdata),1.0))-secav*secav

  write(*,119) nsecdata, secav, ssec
119  format(/,' Secondary Data: Number of data           = ',i8,/,
+      '           Equal Weighted Average           = ',f12.4,/,
+      '           Equal Weighted Variance           = ',f12.4,/)

  endif
  close(llsec)

```

```

c-----
c
c Modified May 2004
c Maria Noel Morales Boezio
c Mineral Research Laboratory
c Mining Department
c Federal University of Rio Grande do Sul
c Brazil
c
  index=0
  do iz=1,nz
    do iy=1,ny
      do ix=1,nx
        index=index+1
        if(ilvm.eq.0.) then
          if(secdat(index).ge.tmin.and.secdat(index).lt.tmax) then
            secdat(index)=secdat(index)-vmean(2)+vmean(1)
          endif
        else
          if(secdat(index).ge.tmin.and.secdat(index).lt.tmax) then
            secdat(index)=secdat(index)-vmean(2)+lvm(index)
          endif
        endif
      end do
    end do
  end do

c End 2004
c-----
c
c Open output files and write headers:
c
  open(lout,file=outfl,status='UNKNOWN')
  write(lout,101) str
101 format('COKB3D with:',a40,/, '2',/, 'estimate',/,
+        'estimation variance')
  write(ldbg,102) str
102 format(/, 'DEBUGGING COKB3D with:',a40)
  return
c
c Error in an Input File Somewhere:
c
98  stop 'ERROR in parameter file!'
99  stop 'ERROR in data file!'
  end

      subroutine getmean(ind,index)

c-----
c
c Find the index of local varying mean
c-----
  include 'newcokb3d.inc'
  call getindx(nx,xmn,xsiz,x(ind),ix,testind)
  call getindx(ny,ymn,ysiz,y(ind),iy,testind)
  call getindx(nz,zmn,zsiz,z(ind),iz,testind)
  index = ix + (iy-1)*nx + (iz-1)*nx*ny
  return
  end

```

```

subroutine cokb3d
c-----
c
c          CoKriging of a 3-D Rectangular Grid
c          *****
c
c This subroutine estimates point or block values of one variable by
c ordinary cokriging using up to MAXVAR variables.
c
c Original:  A.J. Desbarats                                1984
c-----
      include 'newcokb3d.inc'
      parameter(PMX=999.)
      real      distp(MAXSAM),dists(MAXSAM)
      integer   nump(MAXSAM),nums(MAXSAM),vars(MAXSAM)
      common /ddd/secdat
      common /varpar2/ssec,gvar
      common /sill123/c11,c12,c22,crr
c
c Set up the search and covariance rotation matrices:
c
      do is=1,nst(1)
          call setrot(ang1(is),ang2(is),ang3(is),anis1(is),anis2(is),
+                 is,MAXROT,rotmat)
      end do
      isrot = MAXNST + 1
      call setrot(sang1,sang2,sang3,sanispl,sanisps2,isrot,MAXROT,rotmat)
c
c Set up for super block searching:
c
      if(icoloc.eq.0) nsec = nvr - 1
      write(*,*) 'Setting up super block search strategy'
      call setsupr(nx,xmn,xsiz,ny,ymn,ysiz,nz,zmn,zsiz,nd,x,y,z,
+              vr,tmp,nsec,sec1,sec2,sec3,MAXSBX,MAXSBY,MAXSBZ,nisb,
+              nxsup,xmnsup,xsizsup,nysup,ymnsup,ysizsup,nzsup,
+              zmnsup,zsizsup)
      call picksup(nxsup,xsizsup,nysup,ysizsup,nzsup,zsizsup,
+              isrot,MAXROT,rotmat,radsqdp,nsbtosr,ixsbtosr,
+              iysbtosr,izsbtosr)
c
c Set up the discretization points per block.  Figure out how many
c are needed, the spacing, and fill the xdb, ydb and zdb arrays with
c the offsets relative to the block center (this only gets done once):
c
      ndb = nxdis * nydis * nzdis
      xdis = xsiz / max(real(nxdis),1.0)
      ydis = ysiz / max(real(nydis),1.0)
      zdis = zsiz / max(real(nzdis),1.0)
      xloc = -0.5*(xsiz+xdis)
      i = 0
      do ix =1,nxdis
          xloc = xloc + xdis
          yloc = -0.5*(ysiz+ydis)
          do iy=1,nydis
              yloc = yloc + ydis
              zloc = -0.5*(zsiz+zdis)
              do iz=1,nzdis
                  zloc = zloc + zdis
                  i = i+1
                  xdb(i) = xloc
                  ydb(i) = yloc

```

```

                zdb(i) = zloc
            end do
        end do
    end do
c
c Initialize accumulators:
c
    uk   = 0.0
    vk   = 0.0
    nk   = 0
c
c Calculate Block Covariance. Check for point kriging.
c
    if(imodel.eq.2) then
        unbiased=c11
    else
c
c call cova3(0.,0.,0.,0.,0.,0.,1,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,vi
c +          1,MAXROT,rotmat,cmax,cova)
c call cova3(0.,0.,0.,0.,0.,0.,1,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,
c +          1,MAXROT,rotmat,cmax,cova)
        unbiased = dble(cova)
    endif
    if(ndb.le.1) then
        cbb = cova
    else
        cbb = 0.0
        do i=1,ndb
            do j=1,ndb
                call cova3(xdb(i),ydb(i),zdb(i),xdb(j),ydb(j),zdb(j),
c +                    1,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
c +                    rotmat,cmax,cova)
                if(i.eq.j) cova = cmax - c0(1)
                cbb = cbb + cova
            end do
        end do
        cbb = cbb/real(ndb*ndb)
    endif
    if(imodel.eq.2) then
        write(ldbg,*) 'Block average covariance ', c11
    else
        write(ldbg,*) 'Block average covariance ',cbb
    endif
c
c MAIN LOOP OVER ALL THE BLOCKS IN THE GRID:
c
    do 4 iz=1,nz
        zloc = zmn + (iz-1)*zsiz
        do 4 iy=1,ny
            yloc = ymn + (iy-1)*ysiz
            do 4 ix=1,nx
                xloc = xmn + (ix-1)*xsiz
c
c Find the nearest samples:
c
                call srchsupr(xloc,yloc,zloc,radsqdp,isrot,MAXROT,rotmat,nsbtosr,
c +                    ixsbtostr,iysbtosr,izsbtostr,noct,nd,x,y,z,tmp,
c +                    nisb,nxsup,xmnsup,xsizsup,nysup,ymnsup,ysizsup,
c +                    nzsupt,zmnsup,zsizsup,nclose,close,infoc)

```

```

c
c Load the nearest data in xa,ya,za,vra:
c
      np = 0
      ns = 0
      na = 0
      do i=1,nclose

          if(np.eq.ndmaxp.and.ns.eq.ndmaxs) go to 32
          ind = int(close(i)+0.5)

c
c Load primary data until there are enough:
c
      if(vr(ind).ge.tmin.and.vr(ind).lt.tmax.
+         and,np.lt.ndmaxp) then
          np = np + 1
          na = na + 1
c for colocated cokriging
          if(icoloc.eq.1) ns=np

          xa(na) = x(ind)
          ya(na) = y(ind)
          za(na) = z(ind)
          vra(na) = vr(ind)
          iva(na) = 1
          if(ilvm.eq.1) vra(na)=vr(ind)-sec(ind)

          end if

c
c Load secondary data until maximum is met:
c
      if(sec1(ind).ge.tmin.and.sec1(ind).lt.tmax.
+         and.icoloc.eq.0.and.nvr.ge.2.and.ns.lt.ndmaxs) then
          ns = ns + 1
          na = na + 1
          xa(na) = x(ind)
          ya(na) = y(ind)
          za(na) = z(ind)
          vra(na) = sec1(ind)
          ivar = 2
          if(ktype.ne.2 .and. ilvm.eq.0)
+
c if selected LVM
          vra(na) = vra(na) - vmean(ivar) + vmean(1)

          if(ilvm.eq.1) then
              call getmean(ind,index)
              vra(na)=vra(na)-vmean(ivar) +lvm(index)
          endif

          iva(na) = 2
          end if
          if(sec2(ind).ge.tmin.and.sec2(ind).lt.tmax.
+         and.nvr.ge.3.and.ns.lt.ndmaxs) then
          ns = ns + 1
          na = na + 1
          xa(na) = x(ind)
          ya(na) = y(ind)
          za(na) = z(ind)
          vra(na) = sec2(ind)
          ivar = 3
          if(ktype.ne.2 .and. ilvm.eq.0)
+
          vra(na) = vra(na) - vmean(ivar) + vmean(1)

```

```

c if selected LVM
      if(ilvm.eq.1)then
        call getmean(ind,index)
        vra(na)=vra(na)-vmean(ivar) +lvm(index)
      endif

      iva(na) = 3
    end if
    if(sec3(ind).ge.tmin.and.sec3(ind).lt.tmax.
+     and.nvr.ge.4.and.ns.lt.ndmaxs) then
      ns = ns + 1
      na = na + 1
      xa(na) = x(ind)
      ya(na) = y(ind)
      za(na) = z(ind)
      vra(na) = sec3(ind)
      ivar = 4
+     if(ktype.ne.2 .and. ilvm.eq.0)
      vra(na) = vra(na) - vmean(ivar) + vmean(1)
      if(ilvm.eq.1)then
        call getmean(ind,index)
        vra(na)=vra(na)-vmean(ivar) +lvm(index)
      endif

      iva(na) = 4
    end if
  end do
32   continue
c
c Solve the Kriging System:
c
c Determine the number of the systems
c
  if(icoloc.eq.1) then
    if(ktype.eq.0) then
      neq=na+1
    else if(ktype.eq.1) then
      neq=na+2
    endif
  else
    if(ktype.eq.0) neq = na
    if(ktype.eq.1) neq = na + 1
    if(ktype.eq.2) neq = na + nvr
  endif

  if((neq-na).gt.na.or.na.lt.ndmin) then
    write(lout,100) UNEST,UNEST
    go to 4
  end if
c
c Set up kriging matrices:
c
  do i=1,neq*neq
    a(i) = 0.0
  end do
  do i=1,neq
    r(i)=0.0
  end do

  in=0

```

```

c Left-hand COV matrix for MM2
  if(imodel.eq.2) then
    do j=1,na
      do i=1,j
        in=in+1

c calculate COV between secondary attribute

          call cova3(xa(i),ya(i),za(i),xa(j),ya(j),za(j),
+
+          1,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
          rotmat,cmax,cov)

c calculate COV between residual of primary attribute

          call cova3(xa(i),ya(i),za(i),xa(j),ya(j),za(j),
+
+          2,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
          rotmat,cmax,covr)

c calculate COV between primary attribute using MM2 model

          a(in)= (dbble(colocorr*colocorr)*(cov/c22)+
+
+          (1-dble(colocorr*colocorr))*(covr/crr))*c11
          end do

c Right-hand COV matrix for MM2

          xx = xa(j) - xloc
          yy = ya(j) - yloc
          zz = za(j) - zloc

c calculate COV between secondary attribute and estimate

          if(ndb.le.1) then
            call cova3(xx,yy,zz,xdb(1),ydb(1),zdb(1),
+
+            1,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
            rotmat,cmax,cova)
            cb = cova
          else
            cb = 0.0
            do j1=1,ndb
              call cova3(xx,yy,zz,xdb(j1),ydb(j1),zdb(j1),
+
+              1,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
              rotmat,cmax,cova)
              dx = xx - xdb(j1)
              dy = yy - ydb(j1)
              dz = zz - zdb(j1)
              if((dx*dx+dy*dy+dz*dz).lt.EPSLON) then
                cb = cb + cova - c0(1)
              else
                cb = cb + cova
              end if
            end do
            cb = cb / real(ndb)
          endif
          rb(j)=cb

```



```

c
c calculate COV between residual and estimate
c
      if(ndb.le.1) then
          call cova3(xx,yy,zz,xdb(1),ydb(1),zdb(1),
+                2,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
+                rotmat,cmax,cova)
          cb2 = cova
      else
          cb2 = 0.0
          do j1=1,ndb
              call cova3(xx,yy,zz,xdb(j1),ydb(j1),zdb(j1),
+                    2,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
+                    rotmat,cmax,cova)
              dx = xx - xdb(j1)
              dy = yy - ydb(j1)
              dz = zz - zdb(j1)
              if((dx*dx+dy*dy+dz*dz).lt.EPSLON) then
                  cb2 = cb2 + cova - c0(2)
              else
                  cb2 = cb2 + cova
              end if
          end do
          cb2 = cb2 / real(ndb)
      endif
c
c calculate COV between primary attribute and estimate
c
      r(j)= (dbble(colocorr*colocorr))*(cb/c22)+
+         (1-dble(colocorr*colocorr))*(cb2/crr))*c11
      rr(j)=r(j)
    end do
c
c calculate lift hand side covariance for MM1 and LMC
c
    else
      do j=1,na
          do i=1,j
              in=in+1
              ind = iva(i) + (iva(j)-1)*MAXVAR
              call cova3(xa(i),ya(i),za(i),xa(j),ya(j),za(j),
+                    ind,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
+                    rotmat,cmax,cova)
              a(in) = dble(cova)
          end do
          xx = xa(j) - xloc
          yy = ya(j) - yloc
          zz = za(j) - zloc
      end do
    end if
  end do
end sub

```

```

c
c Right hand side covariance:
c
      iv = 1
      ind = iv + (iva(j)-1)*MAXVAR
      if(ndb.le.1) then
+         call cova3(xx,yy,zz,xdb(1),ydb(1),zdb(1),
+                   ind,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
+                   rotmat,cmax,cova)
          cb = cova
      else
          cb = 0.0
          do j1=1,ndb
+             call cova3(xx,yy,zz,xdb(j1),ydb(j1),zdb(j1),
+                       ind,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
+                       rotmat,cmax,cova)
          dx = xx - xdb(j1)
          dy = yy - ydb(j1)
          dz = zz - zdb(j1)
          if((dx*dx+dy*dy+dz*dz).lt.EPSLON) then
              cb = cb + cova - c0(ind)
          else
              cb = cb + cova
          end if
          end do
          cb = cb / real(ndb)
      endif
      r(j) = dble(cb)
      rr(j) = r(j)
  end do

  endif

c
c Form the last row in right-hand matrix for colocated cokriging
c
      if(icoloc.eq.1) then

          do i=1,na
              in=in+1

c if MM1
                  if(imodel.eq.1) then
                      a(in)=sqrt(c22/c11)*dble(colocorr)*r(i)

c if MM2

                  else if(imodel.eq.2) then
                      a(in)=sqrt(c11/c22)*dble(colocorr)*rb(i)

c if LMC(form last row in right-hand matrix)
                  else if(imodel.eq.3) then
                      iv = 1
                      ind = iv +MAXVAR
                      xx = xa(i) - xloc
                      yy = ya(i) - yloc
                      zz = za(i) - zloc
                      if(ndb.le.1) then
+                         call cova3(xx,yy,zz,xdb(1),ydb(1),zdb(1),
+                                   ind,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
+                                   rotmat,cmax,cova)

```

```

        cb = cova
    else
        cb = 0.0
        do j1=1,ndb
            call covas3(xx,yy,zz,xdb(j1),ydb(j1),zdb(j1),
+                               ind,nst,MAXNST,c0,it,cc,aa,1,MAXROT,
+                               rotmat,cmax,cova)
            dx = xx - xdb(j1)
            dy = yy - ydb(j1)
            dz = zz - zdb(j1)
            if((dx*dx+dy*dy+dz*dz).lt.EPSLON) then
                cb = cb + cova - c0(ind)
            else
                cb = cb + cova
            end if
        end do
        cb = cb / real(ndb)
    endif
    a(in)=dble(cb)
endif
end do

in=in+1
a(in)=c22
ii=na+1

c C12(0)

if(imodel.eq.1 .or. imodel.eq.2) then
    r(ii)=dble(colocorr)*sqrt(c22*c11)
endif

if(imodel.eq.3) r(ii)=c12

rr(ii)=r(ii)

endif

c
c Set up for either simple or ordinary cokriging:
c
    if(ktype.eq.1) then
        if(icoloc.eq.1) inna=na+1
        if(icoloc.eq.0) inna=na
        do i=1,inna
            in=in+1
            a(in) = unbias
        end do
        in=in+1
        a(in)=0.0
        if(icoloc.eq.1) then
            r(na+2) = unbias
            rr(na+2) = unbias
        else
            r(na+1) = unbias
            rr(na+1) = unbias
        endif
    else if(ktype.eq.2.and.icoloc.eq.0) then
        do i=1,nvr
            lim = na + i
            r(lim) = 0.0
        end do
    end if
end if

```

```

        rr(lim) = 0.0
        do j=1,lim
            if(j.gt.na.or.iva(j).ne.i) then
                in=in+1
                a(in) = 0.0
            else
                in=in+1
                a(in) = unbias
            endif
        end do
    end do
    r(na+1) = unbias
    rr(na+1) = unbias
endif

c Write out the kriging Matrix if Seriously Debugging:
c
    if(idbg.ge.3) then
        is = 1
        do i=1,neq
            ie = is + i-1
            write(ldbg,103) i,r(i),(a(j),j=is,ie)
            is=is+i
103         format('    r(',i2,',) =',f8.3,' a= ',9(10f8.3))
        end do
    endif
    call ksol(1,neq,1,a,r,s,ising)
c
c Write a warning if the matrix is singular:
c
    if(ising.ne.0) then
        write(ldbg,*) 'WARNING COKB3D: singular matrix'
        write(ldbg,*) '    for block',ix,iy,iz
        write(lout,100) UNEST,UNEST
        go to 4
    endif
c
c Write the kriging weights and data if requested:
c
    if(idbg.ge.2) then
        write(ldbg,*) '    '
        write(ldbg,*) 'BLOCK: ',ix,iy,iz,' at ',xloc,yloc,zloc
        write(ldbg,*) '    at ',xloc,yloc,zloc
        write(ldbg,*) ' '
        if(icoloc.eq.0) then
            if(ktype.eq.1) then
                write(ldbg,*) ' Lagrange multiplier: ',s(na+1)
            else if(ktype.ge.2) then
                do i=1,nvr
                    write(ldbg,*) ' Lagrange multiplier: ',s(na+i)
                end do
            endif
        endif
        if(icoloc.eq.1.and.ktype.eq.1) then
            write(ldbg,*) ' Lagrange multiplier: ',s(na+2)
        endif
        write(ldbg,*) ' BLOCK EST: x,y,z,vr,wt'
    endif

```

```

        do i=1,na
            write(ldbg,'(5f12.3)') xa(i),ya(i),za(i),vra(i),s(i)
        end do
        if(icoloc.eq.1) then
            ind=ix+(iy-1)*nx+(iz-1)*nx*ny
            write(ldbg,'(5f12.3)') xloc,yloc,zloc,secdat(ind),s(na+1)
        endif
    endif
c
c Compute the estimate and the kriging variance:
c
    sumw = 0.0
    ook  = 0.0
    if(imodel.eq.2) then
        ookv=c11
    else
        ookv = cbb
    endif
    if (icoloc.eq.1 ) then
        do i=1,na
            ookv = ookv - real(s(i)*rr(i))
            sumw = sumw + real(s(i))
            ook  = ook  + real(s(i))*vra(i)
        end do

c   added by the secondary variable

            ind=ix+(iy-1)*nx+(iz-1)*nx*ny
            ook=ook+real(s(na+1))*secdat(ind)

c Kriging variance minused by secondary variable

            ookv=ookv-real(s(na+1))*rr(na+1)

            if(ktype.eq.0.and.ilvm.eq.0) then

c since secdat=secdat(i)-vmean(2)+vmean(1)

                ook = ook + (1.0-sumw-real(s(na+1)))*vmean(1)
            endif
            if(ktype.eq.1) ookv=ookv-real(s(na+2))
            else
                do i=1,neq
                    if(i.le.na) then
                        ookv = ookv - real(s(i)*rr(i))
                        sumw = sumw + real(s(i))
                        ook  = ook  + real(s(i))*vra(i)
                    else
                        ookv = ookv - real(s(i))
                    endif
                end do

c
c Add mean if SK:
c
            if(ktype.eq.0.and.ilvm.eq.0) ook = ook + (1.0-sumw)*vmean(1)
            endif

```

```

c
c Add mean if LVM
c
      if(ktype.eq.0 .and. ilvm.eq.1) then
          ind=ix+(iy-1)*nx+(iz-1)*nx*ny
          ook=ook+lvm(ind)
      endif
c
c Write results:
c
c-----
c
c Modified May 2004
c Maria Noel Morales Boezio
c Mineral Research Laboratory
c Mining Department
c Federal University of Rio Grande do Sul
c Brazil

          if(secdat(ind).eq.real(-999)) then

              ook=real(-999)
              ookv=real(-999)

          endif

c End 2004
c-----
      write(lout,100) ook,ookv

100      format(f12.4,1x,f12.4)

c
c Accumulate statistics of kriged blocks:
c
c-----
c
c Modified May 2004
c Maria Noel Morales Boezio
c Mineral Research Laboratory
c Mining Department
c Federal University of Rio Grande do Sul
c Brazil
c
          if(ook.ne.real(-999)) then

c Enc 2004
c-----

              nk = nk + 1
              uk = uk + ook
              vk = vk + ook*ook

          end if

          if(idbg.ge.4) write(ldbg,*) ' estimate, variance ',ook,ookv
c
c END OF MAIN LOOP OVER ALL THE BLOCKS:
c
4      continue
c

```

```

c Write statistics of kriged values:
c
  if(nk.gt.0.and.idbg.gt.0) then
    vk = (vk-uk*uk/real(nk))/real(nk)
    uk = uk/real(nk)
    write(ldbg,*)
    write(ldbg,*) 'Estimated ',nk,' blocks '
    write(ldbg,*) ' average ',uk
    write(ldbg,*) ' variance ',vk
    write(*,*)
    write(*,*) 'Estimated ',nk,' blocks '
    write(*,*) ' average ',uk
    write(*,*) ' variance ',vk
  endif
  return
end

subroutine makepar
-----
c
c
c           Write a Parameter File
c           *****
c
c-----
  lun = 99
  open(lun,file='newcokb3d.par',status='UNKNOWN')
  write(lun,10)
10  format('                Parameters for COKB3D',/,/,
+        '                *****',/,/,/,
+        'START OF PARAMETERS:')

  write(lun,11)
11  format('somedata.dat                ',
+        '-file with data')
  write(lun,12)
12  format('3                ',
+        '- number of variables primary+other',/,/,
+        '35x,'only primary if colocated cokriging')
  write(lun,13)
13  format('1  2  0  3  4  5                ',
+        '- columns for X,Y,Z and variables')
  write(lun,14)
14  format('-0.01      1.0e21                ',
+        '- trimming limits')
  write(lun,15)
15  format('0                ',
+        '-co-located cokriging? (0=no, 1=yes)')
  write(lun,16)
16  format('somedata.dat                ',
+        '- file with single gridded covariate')
  write(lun,17)
17  format('4                ',
+        '- column for covariate')

```

```

c    modified by ma

    write(lun,55)
55  format('0                                     ',
+        '- local varying mean (0=no, 1=yes)')
    write(lun,56)
56  format('lvmfl.dat                             ',
+        '- file with local varying mean')
    write(lun,60)
60  format('4                                     ',
+        '- column for local varying mean')

    write(lun,18)
18  format('3                                     ',
+        '-debugging level: 0,1,2,3')
    write(lun,19)
19  format('newcokb3d.dbg                         ',
+        '-file for debugging output')
    write(lun,20)
20  format('newcokb3d.out                         ',
+        '-file for output')
    write(lun,21)
21  format('50  0.5  1.0                          ',
+        '-nx,xmn,xsiz')
    write(lun,22)
22  format('50  0.5  1.0                          ',
+        '-ny,ymn,ysiz')
    write(lun,23)
23  format('10  0.5  1.0                          ',
+        '-nz,zmn,zsiz')
    write(lun,24)
24  format('1   1   1                              ',
+        '-x, y, and z block discretization')
    write(lun,25)
25  format('1  12   8                              ',
+        '-min primary,max primary,max all sec')
    write(lun,26)
26  format('25.0 25.0 25.0                        ',
+        '-maximum search radii: primary')
    write(lun,27)
27  format('10.0 10.0 10.0                        ',
+        '-maximum search radii: all secondary')
    write(lun,28)
28  format(' 0.0  0.0  0.0                        ',
+        '-angles for search ellipsoid')
    write(lun,29)
29  format('2                                     ',
+        '-kriging type (0=SK, 1=OK, 2=OK-trad)')
    write(lun,30)
30  format('3.38 2.32 0.00 0.00                    ',
+        '-mean(i),i=1,nvar')

    write(lun,57)
57  format('1                                     ',
+        '- model type (1=MM1, 2=MM2,3=LMC)')
    write(lun,58)
58  format('0.50                                   ',
+        '- correlation coefficient for MM1 or MM2')
    write(lun,61)
61  format('10.0                                  ',
+        '- variance of secondary variable for MM1')

```



```
write(lun,50)
50  format('          60.0  60.0  60.0      ',
+        '- a_hmax, a_hmin, a_vert')
write(lun,51)
51  format('3      3      ',
+        '-semivariogram for "i" and "j"')
write(lun,52)
52  format('1      1.1      ',
+        '- nst, nugget effect')
write(lun,53)
53  format('1      1.8  0.0  0.0  0.0      ',
+        '- it,cc,ang1,ang2,ang3')
write(lun,54)
54  format('          60.0  60.0  60.0      ',
+        '- a_hmax, a_hmin, a_vert')
close(lun)
return
end
```

Apêndice D

Elementos utilizados na determinação do índice de qualidade matemática

No Capítulo 5, para avaliar matematicamente os modelos gerados, é utilizado um índice (COSTA, 1997, p. 15) para comparar as estimativas com os dados re-locados na malha de estimativa. A média (m) e a mediana (M) do erro, medem o viés do conjunto das estimativas. O erro quadrático médio (EQM) e o desvio padrão (σ) medem a imprecisão das estimativas. O valor ideal para esses valores é zero (0). O coeficiente de correlação (ρ) e o coeficiente angular B da regressão linear $y = Bx$, provenientes do gráfico de dispersão das estimativas versus os dados re-locados, verificam a precisão do método. Nesses casos, o valor ideal é um (1).

D.1 Histogramas e mapas de localização do erro.

Nas legendas dos histogramas do erro, apresentados nas figuras a seguir, são observados os valores da média, mediana e do desvio padrão do mesmo.

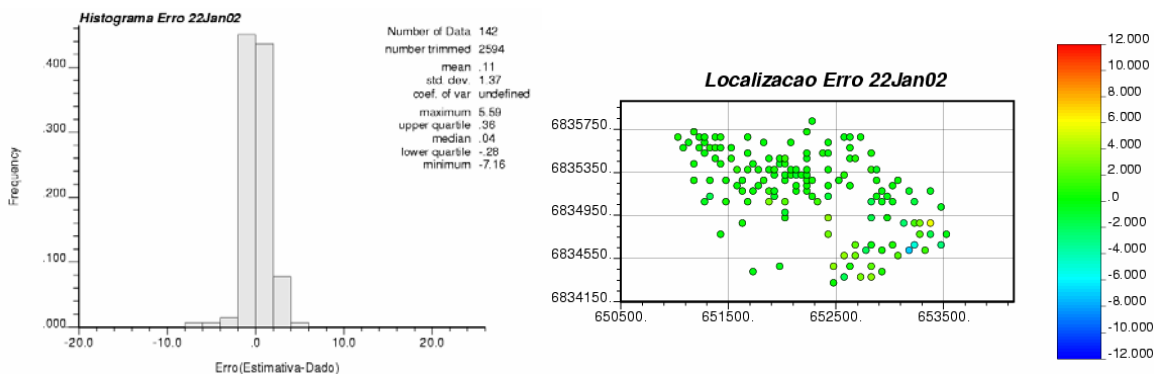


Figura D.1– Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 22 de Janeiro de 2002, utilizando Krigagem Ordinária (detalhe no Apêndice A).

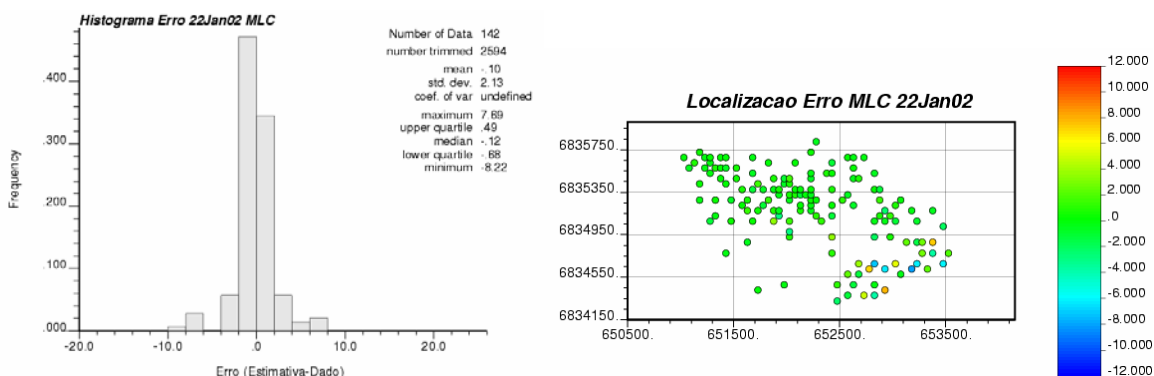


Figura D.2 - Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 22 de Janeiro de 2002, utilizando Cokrigagem Colocada estrita e o MLC (detalhe no Apêndice A).

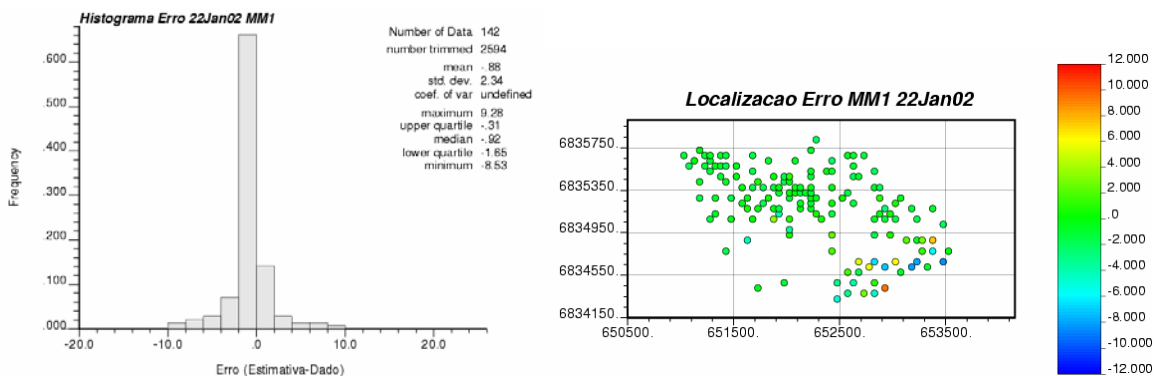


Figura D.3 - Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 22 de Janeiro de 2002 utilizando Cokrigagem colocada estrita e o MM1 (detalhe no Apêndice A).

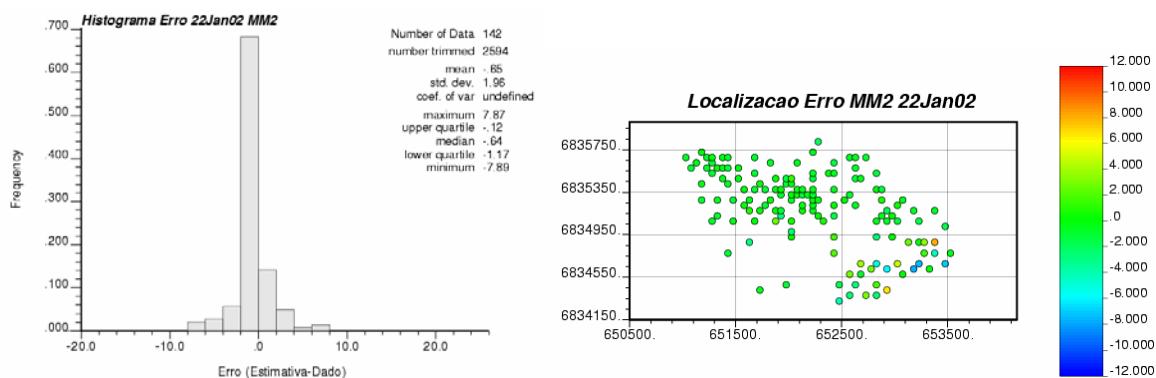


Figura D.4 - Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 22 de Janeiro de 2002 utilizando Cokrigagem colocada estrita e o MM2 (detalhe no Apêndice A).

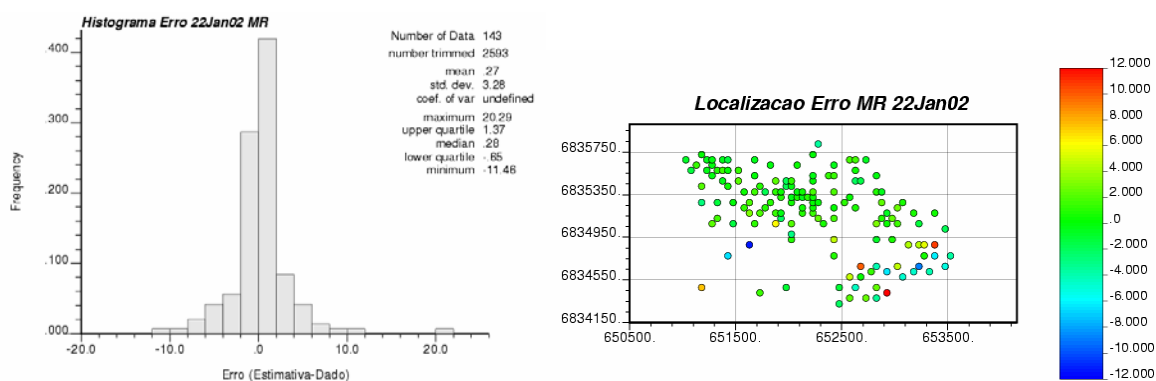


Figura D.5 – Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 22 de Janeiro de 2002 utilizando Cokrigagem multicolocada e o Modelo do Resíduo (detalhe no Apêndice A).

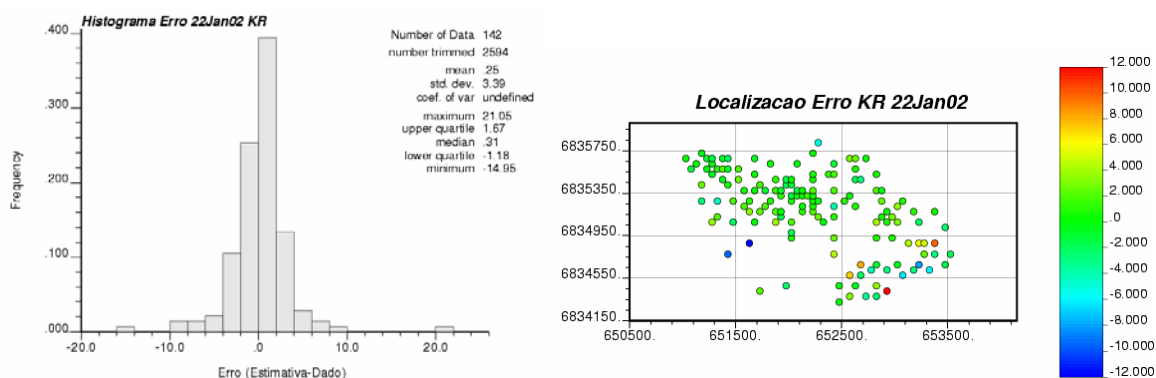


Figura D.6 - Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 22 de Janeiro de 2002 utilizando Krigagem do Resíduo (detalhe no Apêndice A).

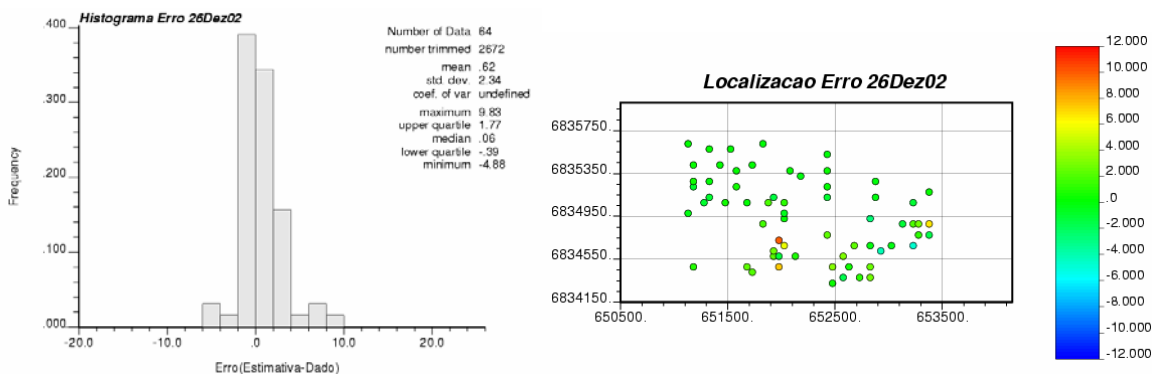


Figura D.7 – Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 26 de Dezembro de 2002, utilizando Krigagem Ordinária (detalhe no Apêndice A).

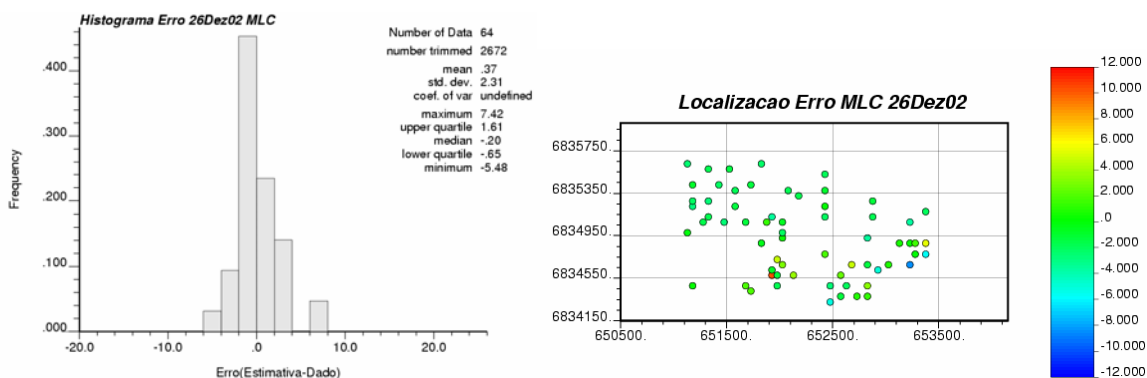


Figura D.8 - Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 26 de Dezembro de 2002 utilizando Cokrigagem colocada estrita e o MLC (detalhe no Apêndice A).

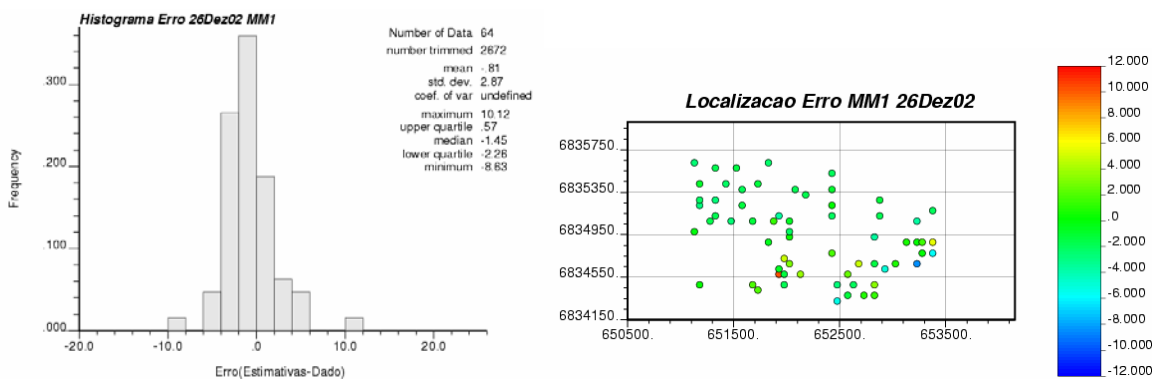


Figura D.9 - Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 26 de Dezembro de 2002 utilizando Cokrigagem colocada estrita e o MM1 (detalhe no Apêndice A).

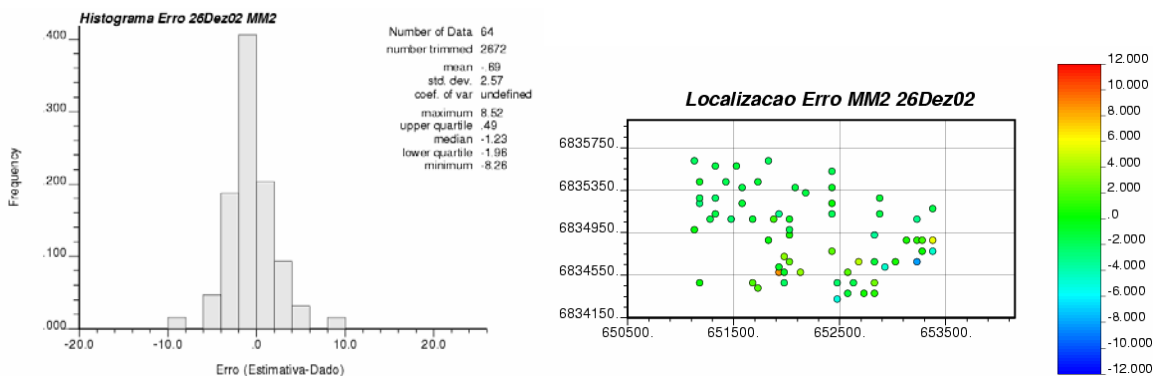


Figura D.10 - Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 26 de Dezembro de 2002 utilizando Cokrigagem colocada estrita e o MM2 (detalhe no Apêndice A).

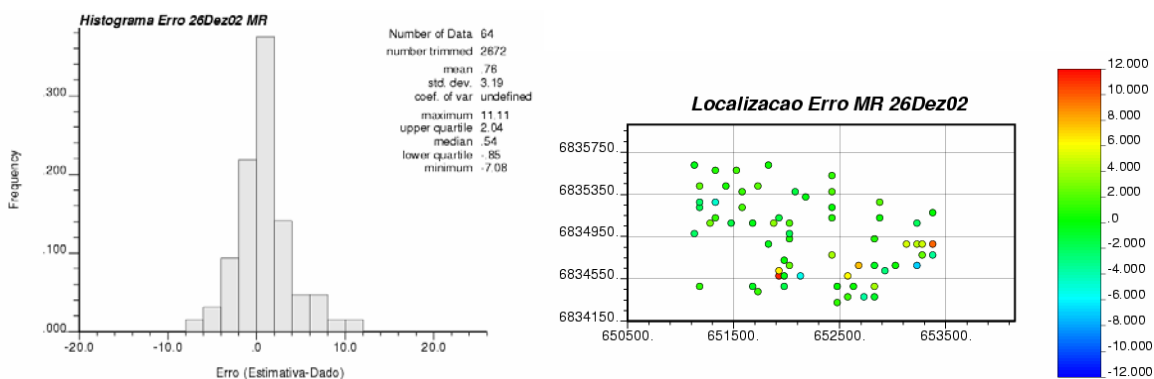


Figura D.11 - Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 26 de Dezembro de 2002 utilizando Cokrigagem multicolocada e o Modelo do Resíduo (detalhe no Apêndice A).

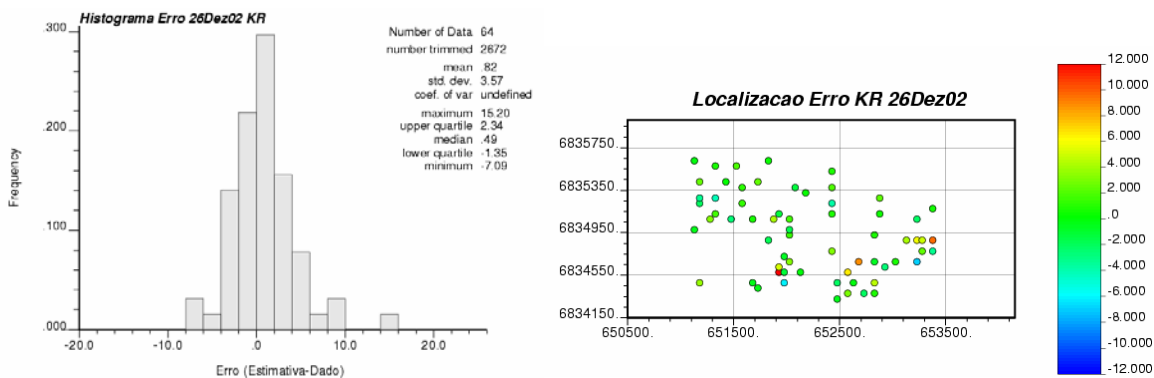


Figura D.12 - Histograma e mapa de localização do erro (Estimativa – Dado re-locado) para o 26 de Dezembro de 2002 utilizando Krigagem do Resíduo.

D.2 Gráficos de dispersão das estimativas vs. os dados originais re-locados

O coeficiente de correlação apresenta-se nas legendas dos gráficos de dispersão das estimativas versus os dados originais re-locados.

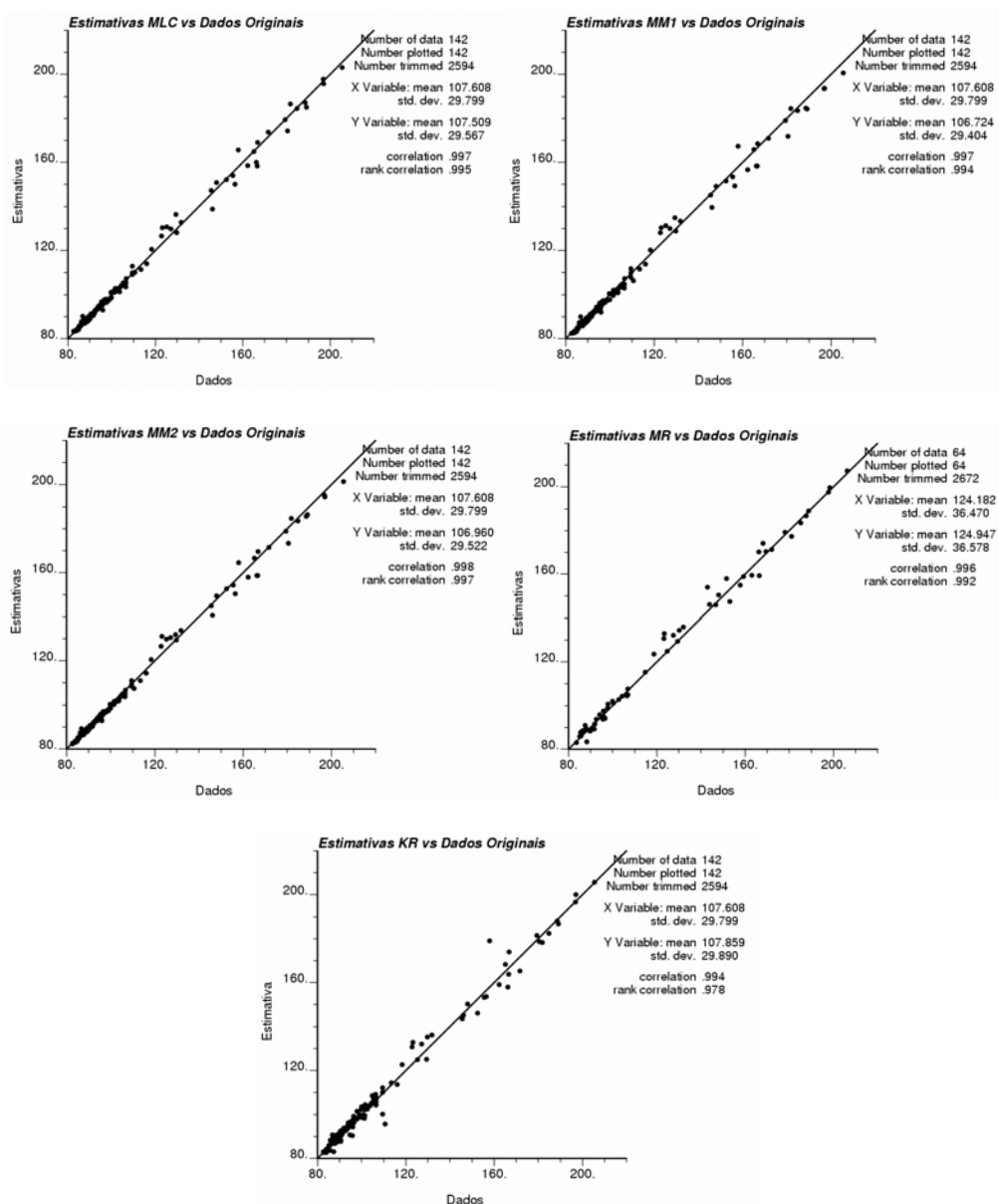


Figura D.13 – Gráficos de dispersão das estimativas de Cokrigagem Ordinária utilizando os diferentes modelos de correionalização e Krigagem do Resíduo vs. Dados originais re-locados na malha de estimativa para os dados de 22 de Janeiro de 2002 (detalhe no Apêndice A) .

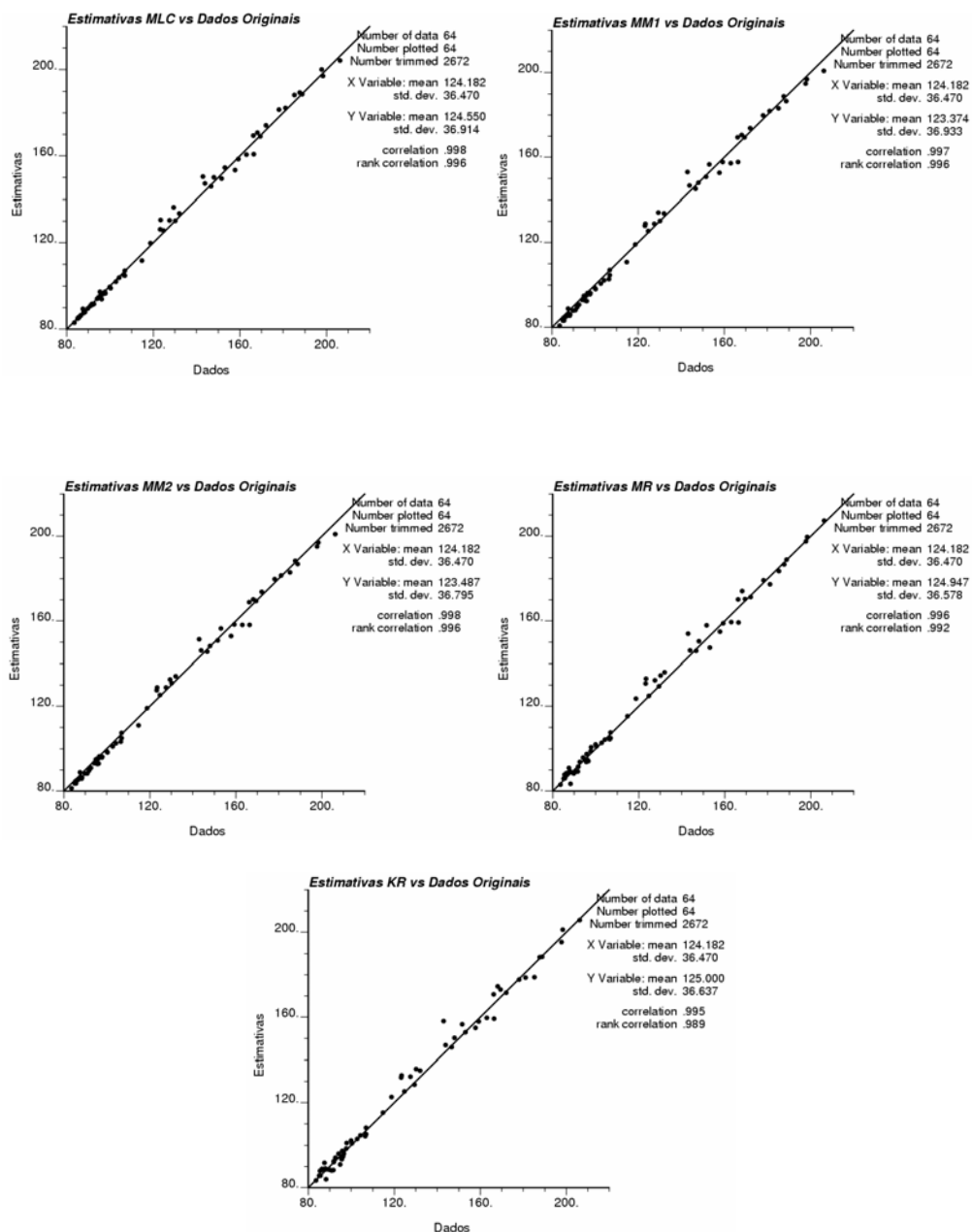


Figura D.14 - Gráficos de dispersão das estimativas de Cokrigagem Ordinária utilizando os diferentes modelos de correionalização e Krigagem do Resíduo vs. Dados originais re-locados na malha de estimativa para os dados de 26 de Dezembro de 2002 (detalhe no Apêndice A).

D.3 Coeficiente angular B da reta de regressão

As curvas de regressão linear são construídas para determinação do coeficiente angular B da reta $y = Bx$ das estimativas versus os dados re-locados.

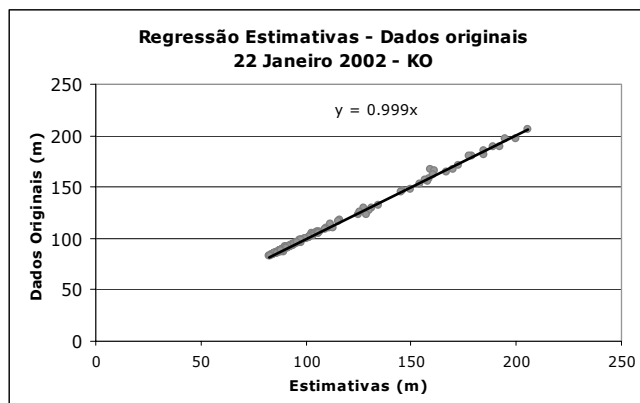


Figura D.15 – Reta de regressão linear entre as estimativas para o 22 de Janeiro por Krigagem Ordinária para determinação do coeficiente angular B = 0.999.

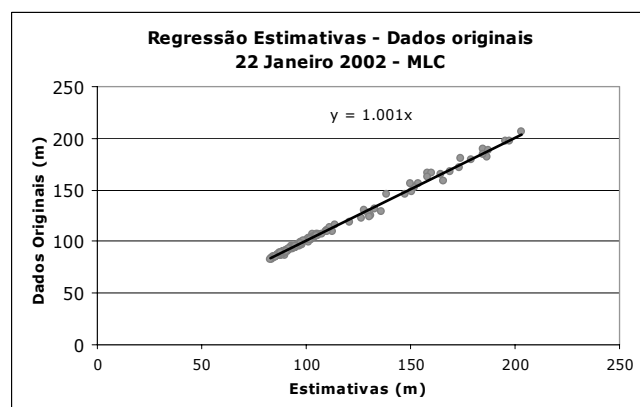


Figura D.16 - Reta de regressão linear entre as estimativas para o 22 de Janeiro por Cokrigagem colocada estrita utilizando o MLC para determinação do coeficiente angular B = 1.001.

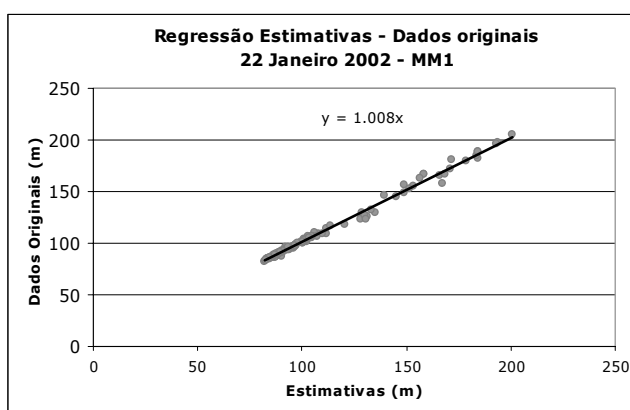


Figura D.17 - Retas de regressão linear entre as estimativas para o 22 de Janeiro por Cokrigagem colocada estrita utilizando o MM1 para determinação do coeficiente angular $B = 1.008$.

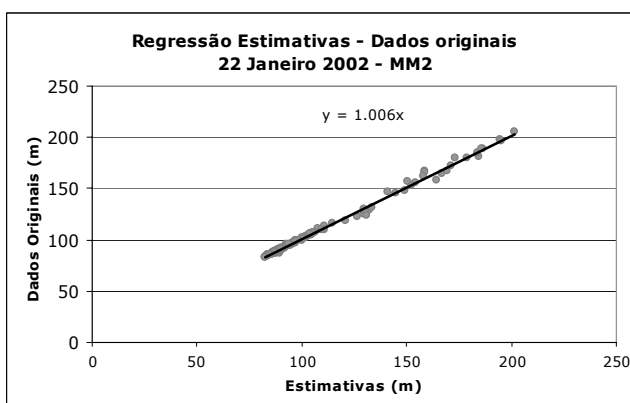


Figura D.18 - Retas de regressão linear entre as estimativas para o 22 de Janeiro por Cokrigagem colocada estrita utilizando o MM2 para determinação do coeficiente angular $B = 1.006$.

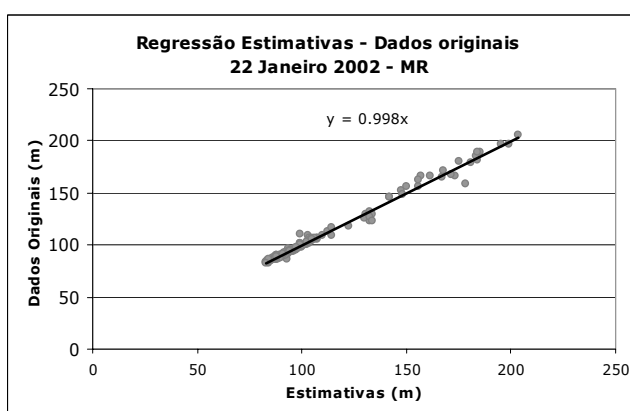


Figura D.19 - Retas de regressão linear entre as estimativas para o 22 de Janeiro por Cokrigagem Multicolocada utilizando o MR para determinação do coeficiente angular $B = 0.998$.

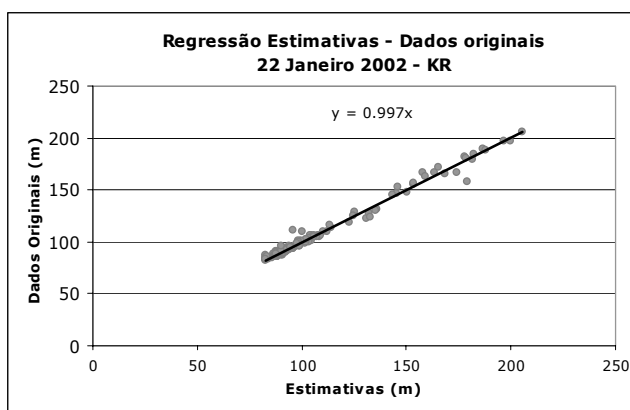


Figura D.20 - Retas de regressão linear entre as estimativas para o 22 de Janeiro por Krigagem do Resíduo para determinação do coeficiente angular $B = 0.997$.

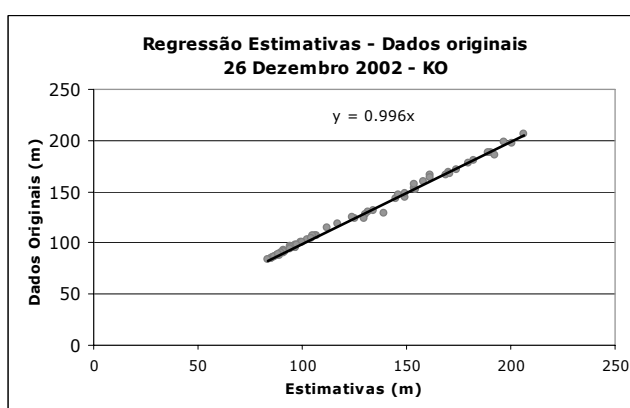


Figura D.21 - Retas de regressão linear entre as estimativas para o 26 de Dezembro por Krigagem Ordinária para determinação do coeficiente angular $B = 0.996$.

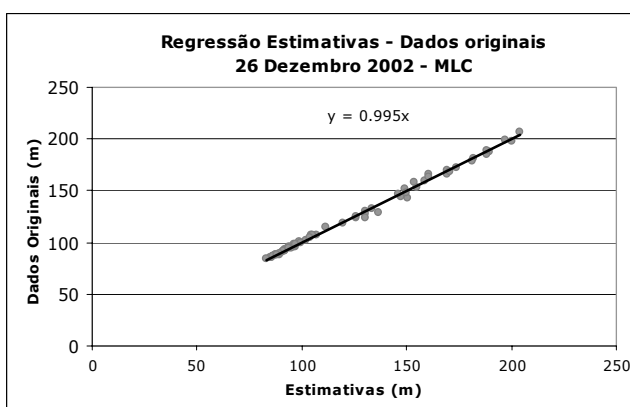


Figura D.22 - Retas de regressão linear entre as estimativas para o 26 de Dezembro por Cokrigagem colocada estrita utilizando o MLC para determinação do coeficiente angular $B = 0.995$.

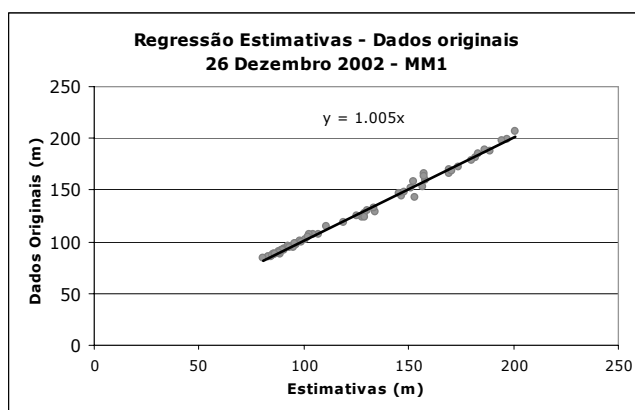


Figura D.23 - Retas de regressão linear entre as estimativas para o 26 de Dezembro por Cokrigagem colocada estrita utilizando o MM1 para determinação do coeficiente angular $B = 1.005$.

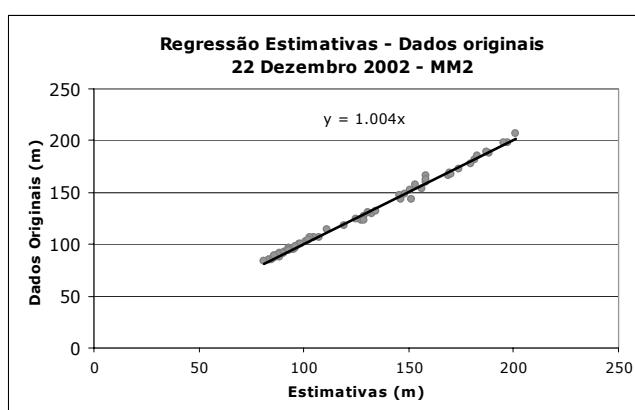


Figura D.24 - Retas de regressão linear entre as estimativas para o 26 de Dezembro por Cokrigagem colocada estrita utilizando o MM2 para determinação do coeficiente angular $B = 1.004$.

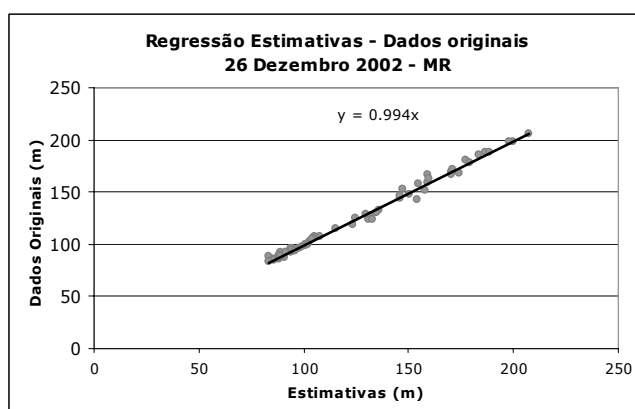


Figura D.25 - Retas de regressão linear entre as estimativas para o 26 de Dezembro por Cokrigagem Multicolocada utilizando o MR para determinação do coeficiente angular $B = 0.994$.

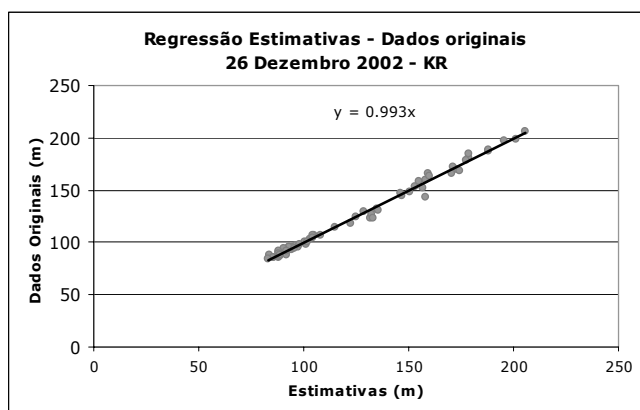


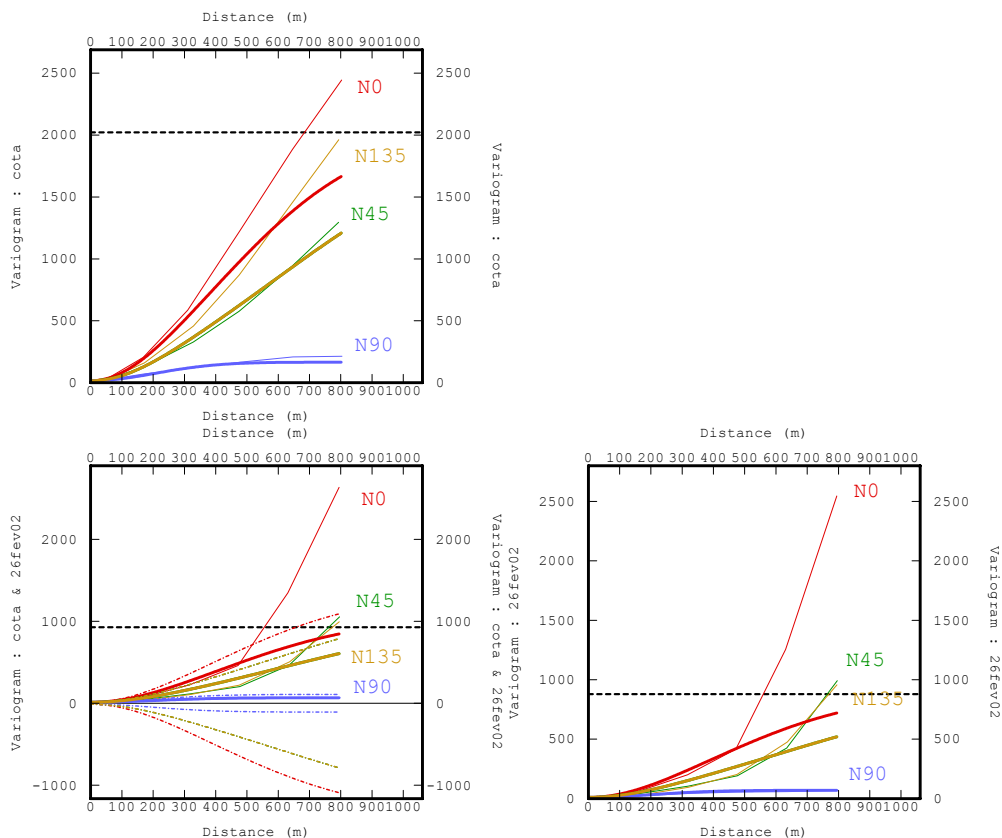
Figura D.26 - Retas de regressão linear entre as estimativas para o 22 de Janeiro por Krigagem do Resíduo para determinação do coeficiente angular $B = 0.993$.

Apêndice E

Cokrigagem colocada estrita utilizando o MLC para o ano 2002

E.1 Ajuste do Modelo linear de correionalização MLC

As figuras a seguir, apresentam os Modelos Lineares de Correionalização (MLC) dos meses de Fevereiro a Novembro de 2002 junto com a verificação das condições matemáticas de definição positiva.



$$\begin{aligned} \gamma_{11}(h) &= 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 810 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right) \\ \gamma_{12}(h) &= 12 + 55 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 970 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right) \\ \gamma_{22}(h) &= 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{470m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right) \end{aligned}$$

Figura E.1 - Modelo linear de correlogramização ajustado para o 26 de Fevereiro de 2002 nas direções de azimute N0°, N45°, N90° e N135° (detalhe no Apêndice A).

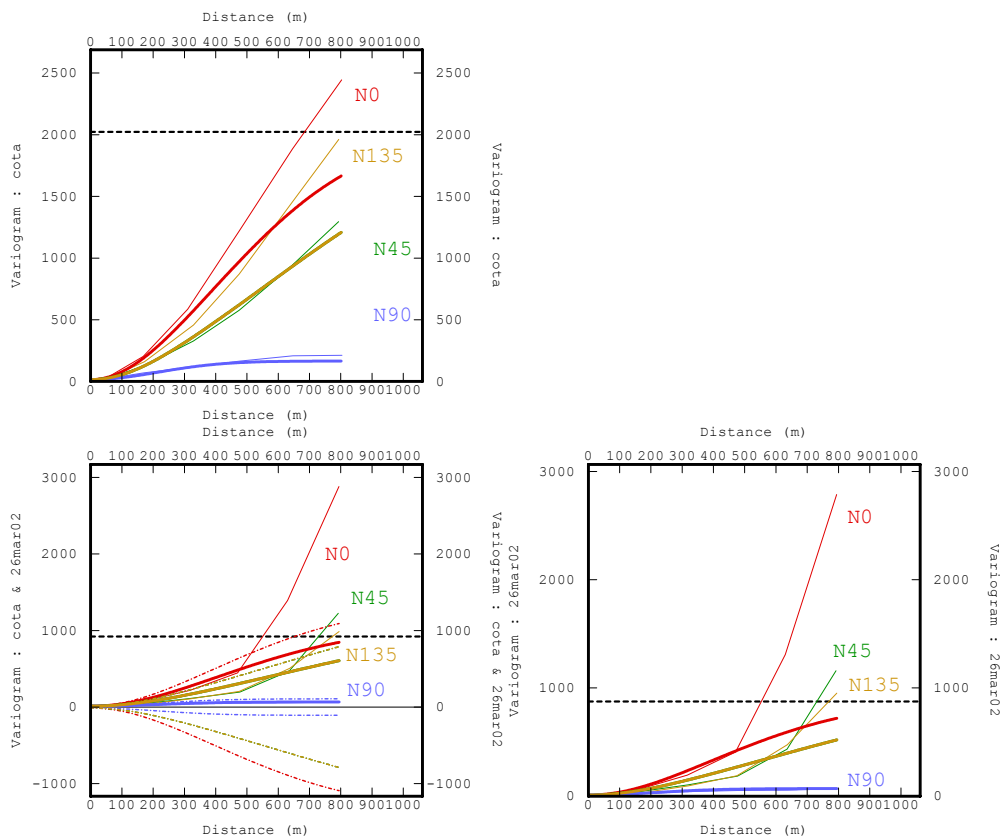
Condição de definição positiva:

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 6 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 60 & 55 \\ 55 & 150 \end{vmatrix} = 5975 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 810 & 970 \\ 970 & 1875 \end{vmatrix} = 563270 \geq 0$$

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.98 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{55}{\sqrt{60 \cdot 150}} = 0.58 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{970}{\sqrt{810 \cdot 1875}} = 0.80 \in [-1,1]$$



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{480m} \right) + 810 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 12 + 55 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{480m} \right) + 970 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{500m} \frac{0^\circ}{480m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m} \right)$$

Figura E.2 - Modelo linear de correlogramação ajustado para o 26 de Março de 2002 nas direções de azimute N0°, N45°, N90° e N135° (detalhe no Apêndice A).

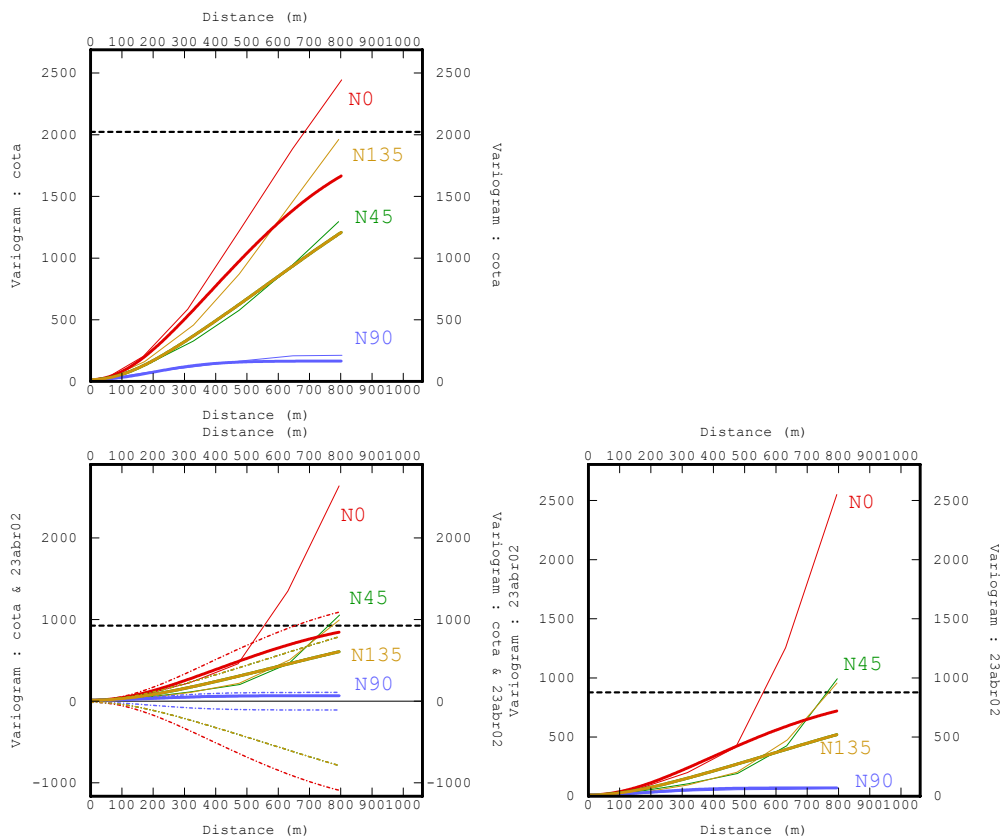
Condição de definição positiva:

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 6 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 60 & 55 \\ 55 & 150 \end{vmatrix} = 5975 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 810 & 970 \\ 970 & 1875 \end{vmatrix} = 563270 \geq 0$$

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.98 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{55}{\sqrt{60 \cdot 150}} = 0.58 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{970}{\sqrt{810 \cdot 1875}} = 0.80 \in [-1,1]$$



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{480m} \frac{0^\circ}{470m}\right) + 810 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m}\right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 12 + 55 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{480m} \frac{0^\circ}{470m}\right) + 970 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m}\right)$$

$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{480m} \frac{0^\circ}{470m}\right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h\left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{1080m}\right)$$

Figura E.3 - Modelo linear de correlogramação ajustado para o 23 de Abril de 2002 nas direções de azimute N0°, N45°, N90° e N135° (detalhe no Apêndice A).

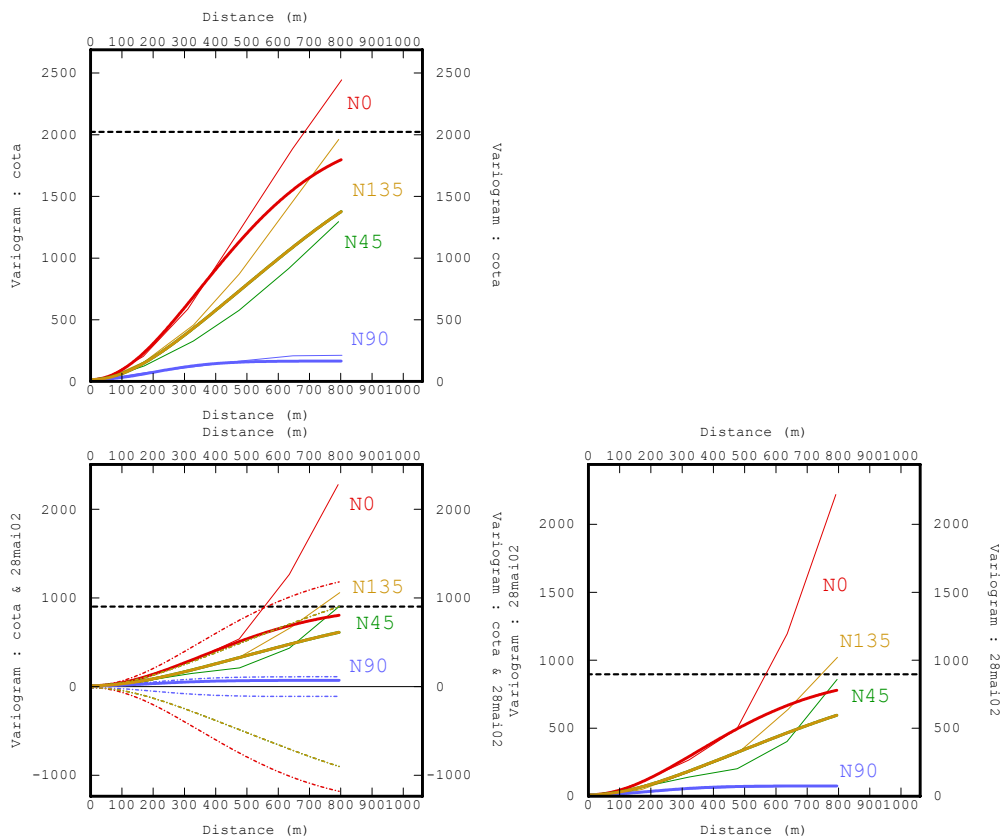
Condição de definição positiva:

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 6 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 60 & 55 \\ 55 & 150 \end{vmatrix} = 5975 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 810 & 970 \\ 970 & 1875 \end{vmatrix} = 563270 \geq 0$$

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.98 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{55}{\sqrt{60 \cdot 150}} = 0.58 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{970}{\sqrt{810 \cdot 1875}} = 0.80 \in [-1,1]$$



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 65 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{450m} \right) + 805 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{950m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{450m} \right) + 840 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{950m} \right)$$

$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{450m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{950m} \right)$$

Figura E.4 - Modelo linear de correlogramma ajustado para o 28 de Maio de 2002 nas direções de azimute N0°, N45°, N90° e N135° (detalhe no Apêndice A).

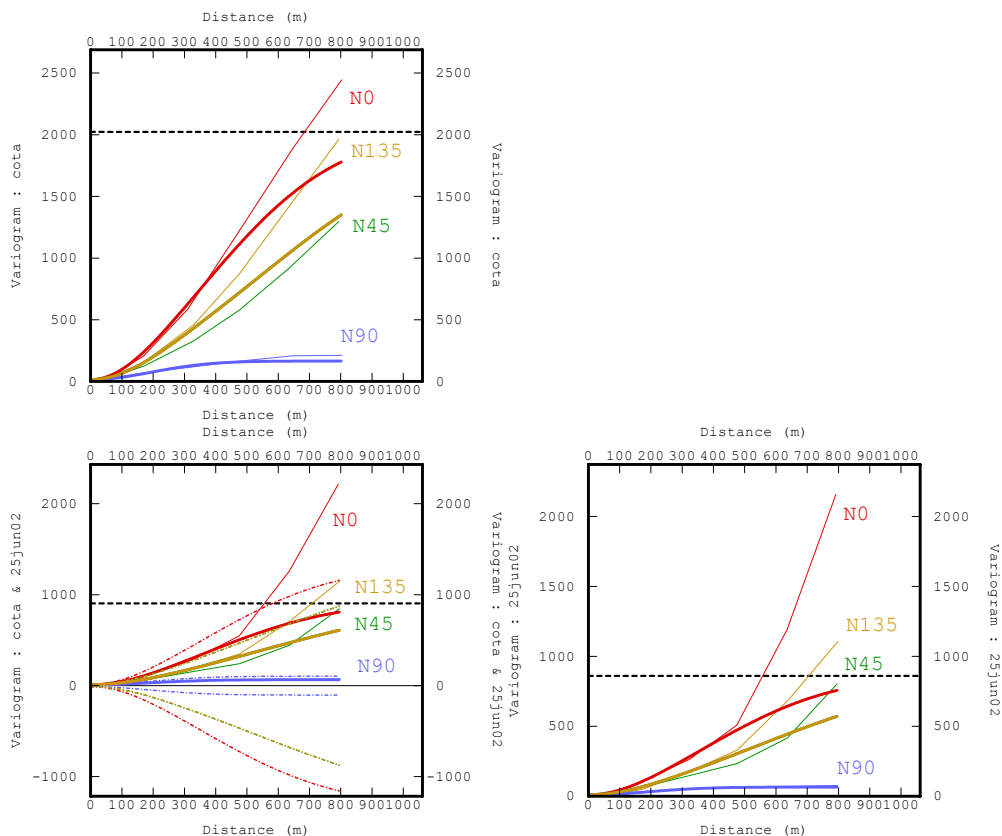
Condição de definição positiva:

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 50 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 65 & 60 \\ 60 & 150 \end{vmatrix} = 6150 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 805 & 840 \\ 840 & 1875 \end{vmatrix} = 705600 \geq 0$$

$$r_{12}^1 = \frac{10}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.82 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{60}{\sqrt{65 \cdot 150}} = 0.61 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{840}{\sqrt{805 \cdot 1857}} = 0.69 \in [-1,1]$$



$$\begin{aligned} \gamma_{11}(h) &= 10 + 70 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 470m & 400m \end{array} \right) + 780 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 100000m & 940m \end{array} \right) \\ \gamma_{12}(h) &= 12 + 55 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 470m & 400m \end{array} \right) + 860 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 100000m & 940m \end{array} \right) \\ \gamma_{22}(h) &= 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 470m & 400m \end{array} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\begin{array}{cc} 90^\circ & 0^\circ \\ 100000m & 940m \end{array} \right) \end{aligned}$$

Figura E.5 - Modelo linear de correlograma ajustado para o 25 de Junho de 2002 nas direções de azimute $N0^\circ$, $N45^\circ$, $N90^\circ$ e $N135^\circ$ (detalhe no Apêndice A).

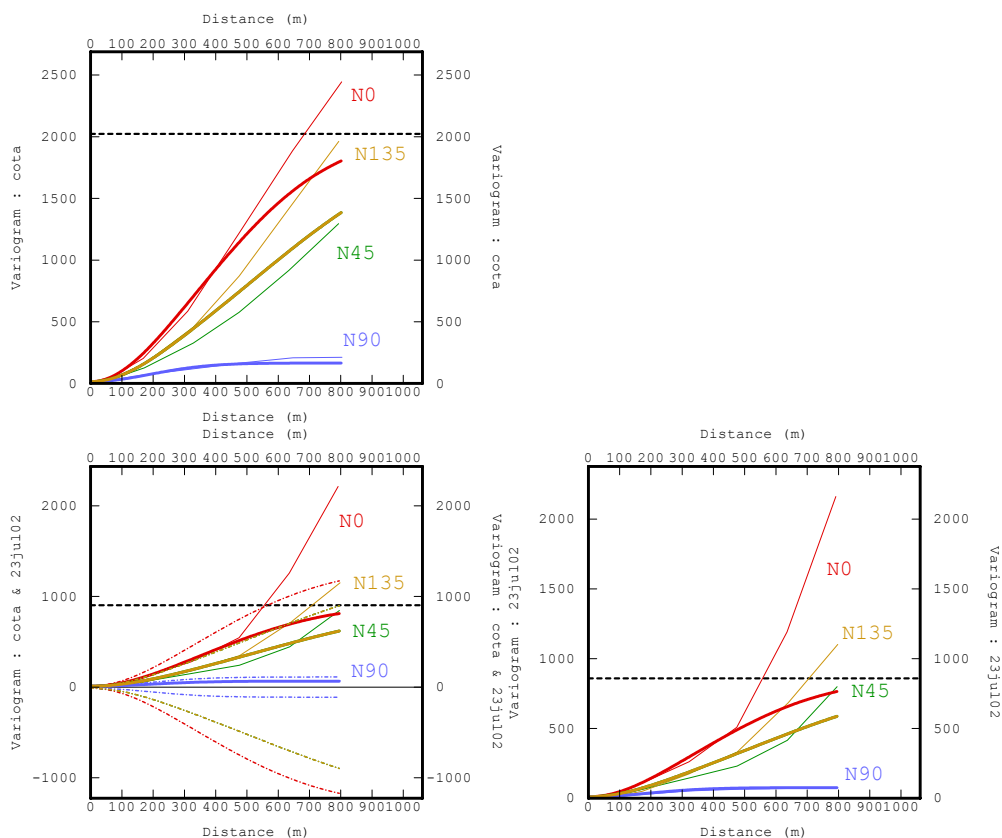
Condição de definição positiva:

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 6 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 70 & 55 \\ 55 & 150 \end{vmatrix} = 7475 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 780 & 860 \\ 860 & 1875 \end{vmatrix} = 708860 \geq 0$$

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.98 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{55}{\sqrt{70 \cdot 150}} = 0.58 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{970}{\sqrt{810 \cdot 1857}} = 0.80 \in [-1,1]$$



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 65 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m} \right) + 785 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{940m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 10 + 55 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m} \right) + 850 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{940m} \right)$$

$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{940m} \right)$$

Figura E.6 - Modelo linear de correlogramação ajustado para o 23 de Julho de 2002 nas direções de azimute N0°, N45°, N90° e N135° (detalhe no Apêndice A).

Condição de definição positiva:

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 50 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 65 & 55 \\ 55 & 150 \end{vmatrix} = 6725 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 785 & 850 \\ 850 & 1875 \end{vmatrix} = 735245 \geq 0$$

$$r_{12}^1 = \frac{10}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.82 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{55}{\sqrt{65 \cdot 150}} = 0.56 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{850}{\sqrt{785 \cdot 1857}} = 0.70 \in [-1,1]$$

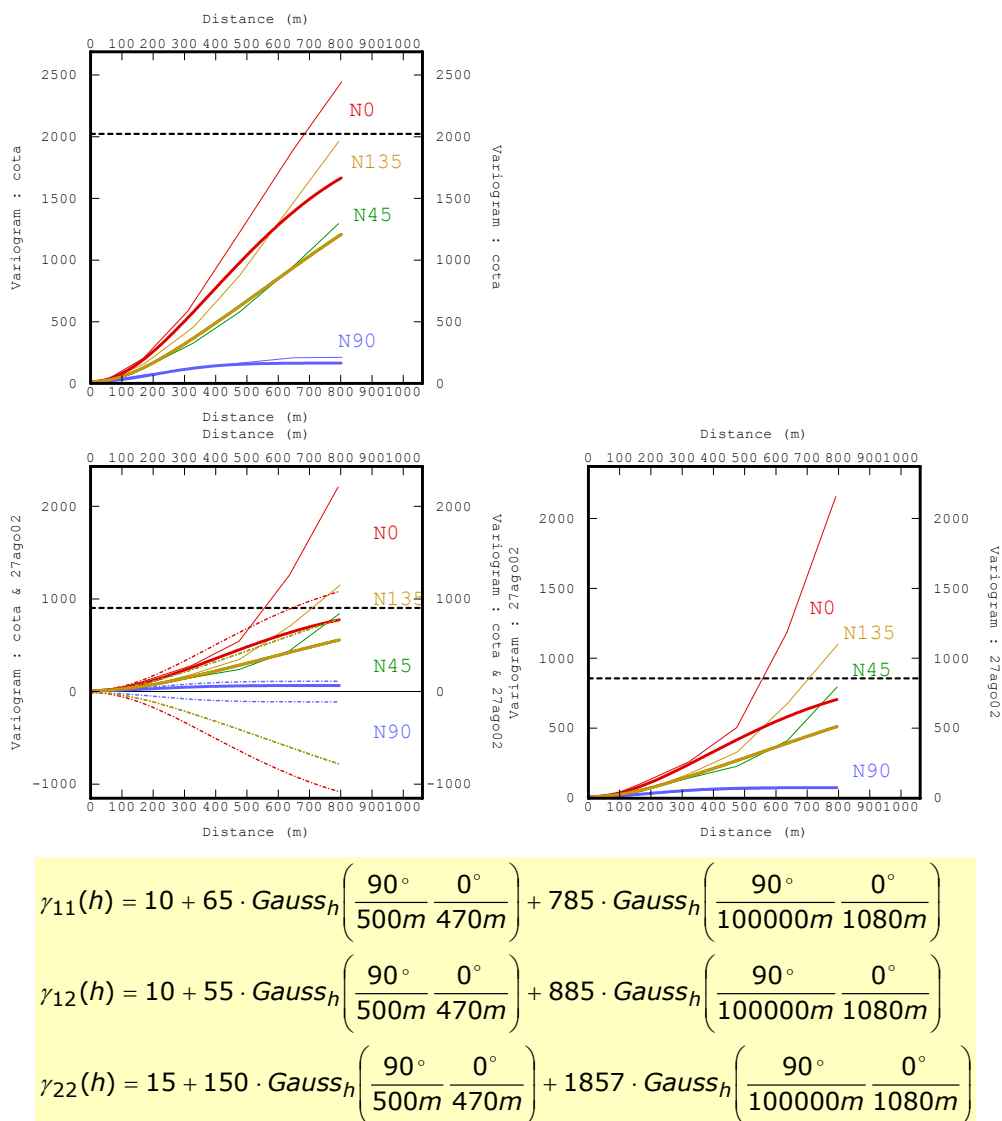


Figura E.7 - Modelo linear de correlogramização ajustado para o 27 de Agosto de 2002 nas direções de azimute N0°, N45°, N90° e N135° (detalhe no Apêndice A).

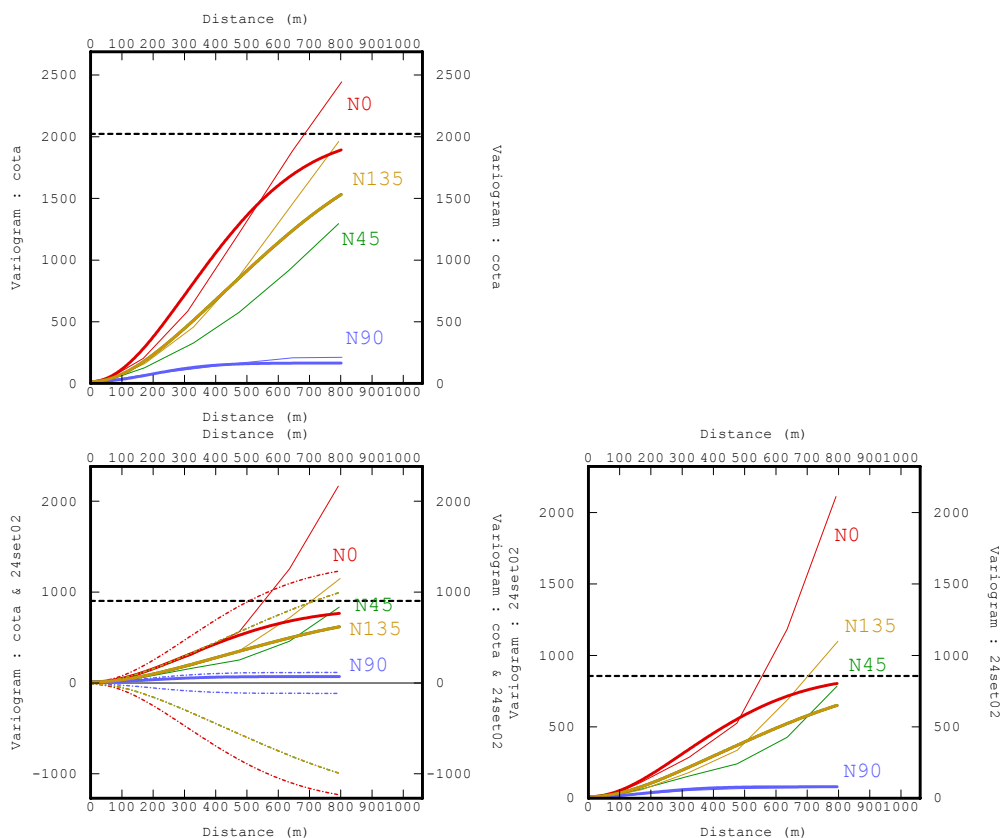
Condição de definição positiva:

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 50 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 65 & 55 \\ 55 & 150 \end{vmatrix} = 6725 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 785 & 885 \\ 885 & 1875 \end{vmatrix} = 688650 \geq 0$$

$$r_{12}^1 = \frac{10}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.82 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{55}{\sqrt{65 \cdot 150}} = 0.56 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{885}{\sqrt{785 \cdot 1857}} = 0.73 \in [-1,1]$$



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 70 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m} \right) + 780 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m} \right) + 750 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

Figura E.8 - Modelo linear de correlogramação ajustado para o 24 de Setembro de 2002 nas direções de azimute N0°, N45°, N90° e N135° (detalhe no Apêndice A).

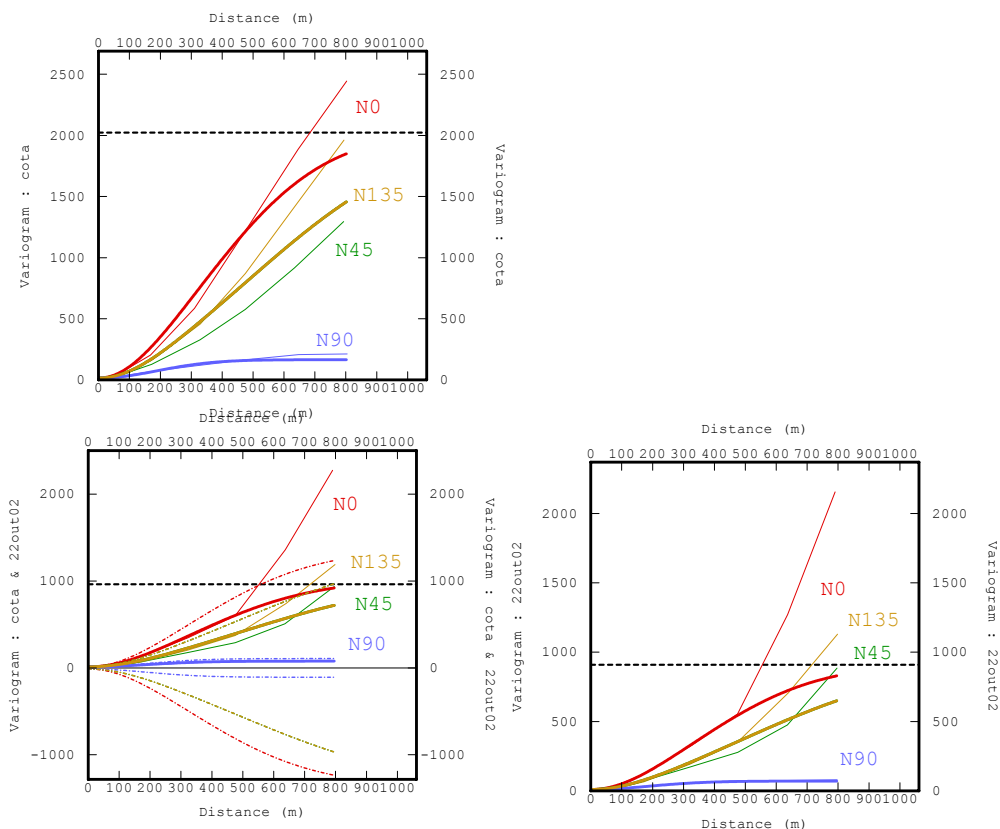
Condição de definição positiva:

$$\begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 50 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 70 & 60 \\ 60 & 150 \end{vmatrix} = 6900 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 780 & 750 \\ 750 & 1875 \end{vmatrix} = 885960 \geq 0$$

$$r_{12}^1 = \frac{10}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.82 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{60}{\sqrt{70 \cdot 150}} = 0.59 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{750}{\sqrt{780 \cdot 1857}} = 0.62 \in [-1,1]$$



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 60 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m} \right) + 840 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 12 + 65 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m} \right) + 933 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{470m} \frac{0^\circ}{400m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{900m} \right)$$

Figura E.9 - Modelo linear de correlogramação ajustado para o 22 de Outubro de 2002 nas direções de azimute N0°, N45°, N90° e N135° (detalhe no Apêndice A).

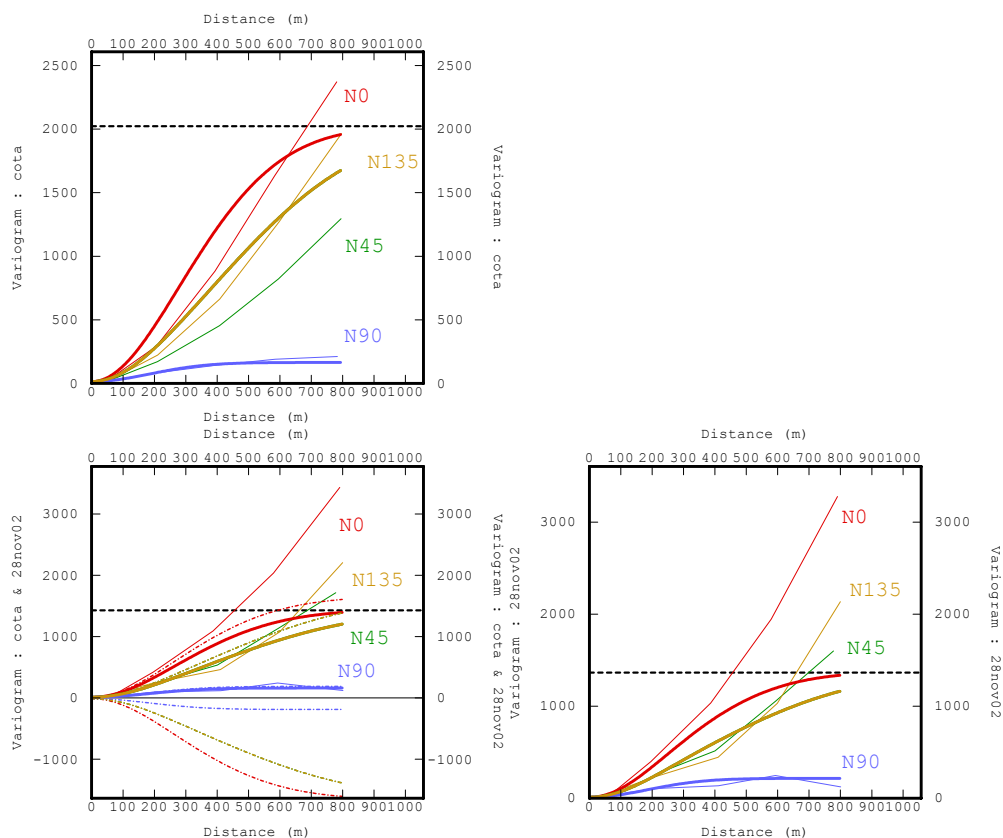
Condição de definição positiva:

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 6 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 60 & 65 \\ 65 & 150 \end{vmatrix} = 4775 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 840 & 933 \\ 933 & 1857 \end{vmatrix} = 689391 \geq 0$$

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.98 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{65}{\sqrt{60 \cdot 150}} = 0.69 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{933}{\sqrt{840 \cdot 1857}} = 0.75 \in [-1,1]$$



$$\gamma_{11}(h) = 10 + 205 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{450m} \frac{0^\circ}{370m} \right) + 1160 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{700m} \right)$$

$$\gamma_{12}(h) = 12 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{450m} \frac{0^\circ}{370m} \right) + 1275 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{700m} \right)$$

$$\gamma_{22}(h) = 15 + 150 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{450m} \frac{0^\circ}{370m} \right) + 1857 \cdot \text{Gauss}_h \left(\frac{90^\circ}{100000m} \frac{0^\circ}{700m} \right)$$

Figura E.10 - Modelo linear de correlograma ajustado para o 28 de Novembro de 2002 nas direções de azimute N0°, N45°, N90° e N135° (detalhe no Apêndice A).

Condição de definição positiva:

$$\begin{vmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 15 \end{vmatrix} = 6 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 205 & 150 \\ 150 & 150 \end{vmatrix} = 8250 \geq 0 \quad \begin{vmatrix} 1160 & 1275 \\ 1275 & 1857 \end{vmatrix} = 528495 \geq 0$$

$$r_{12}^1 = \frac{12}{\sqrt{10 \cdot 15}} = 0.98 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^2 = \frac{150}{\sqrt{205 \cdot 150}} = 0.58 \in [-1,1]$$

$$r_{12}^3 = \frac{1275}{\sqrt{1160 \cdot 1857}} = 0.87 \in [-1,1]$$

E.2 Mapas das estimativas pontuais de nível de água para o ano 2002

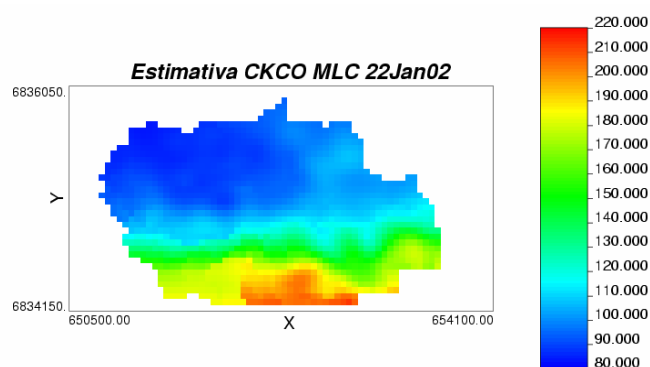


Figura E.11 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 22 de Janeiro de 2002.

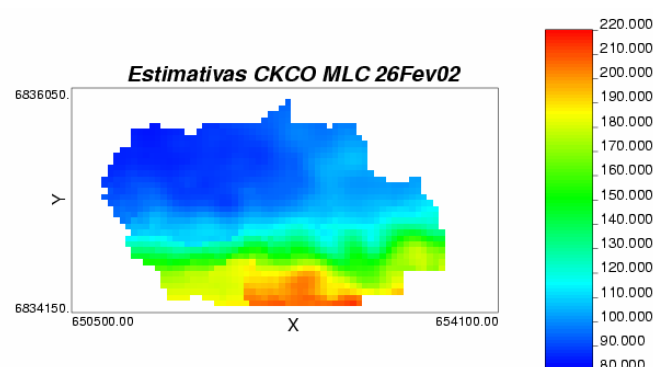


Figura E.12 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 26 de Fevereiro de 2002.

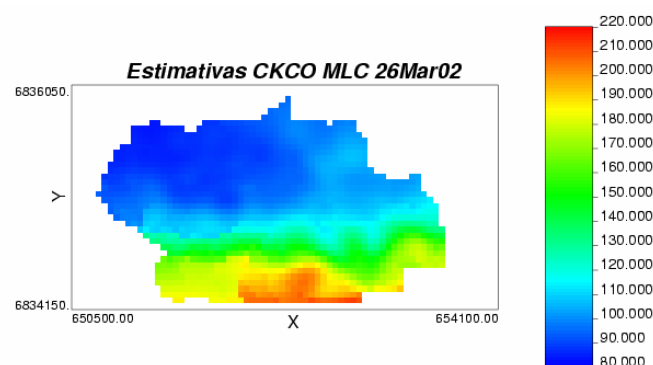


Figura E.13 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 26 de Março de 2002.

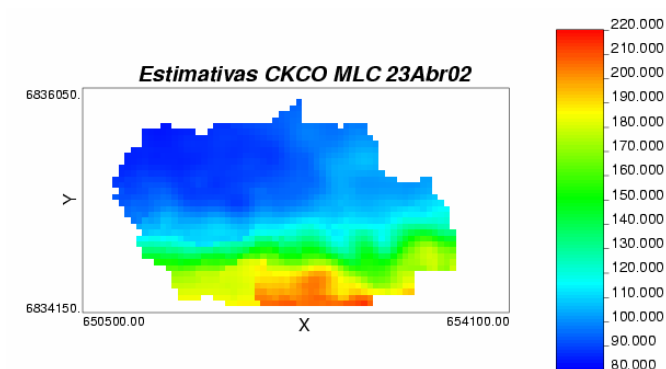


Figura E.14 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 23 de Abril de 2002.

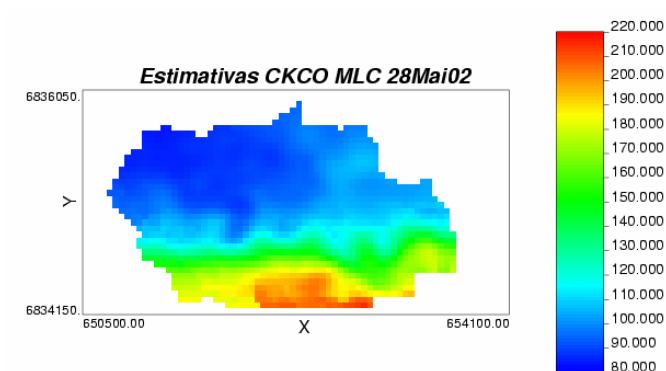


Figura E.15 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 28 de Maio de 2002.

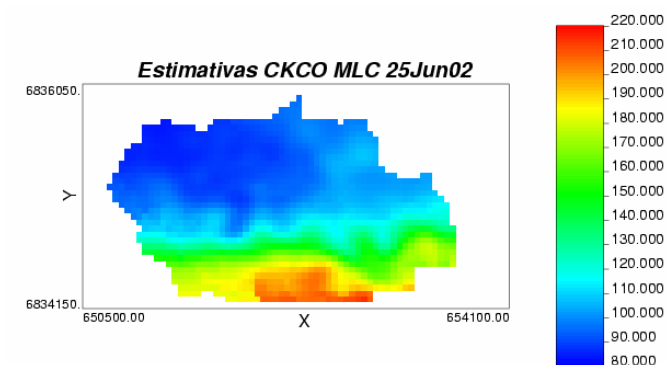


Figura E.16 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 25 de Junho de 2002.

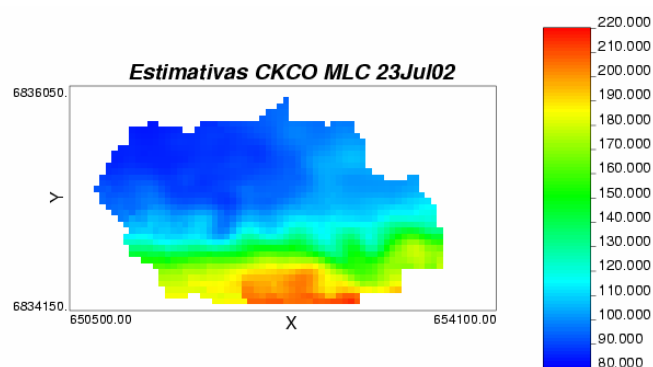


Figura E.17 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 23 de Julho de 2002.

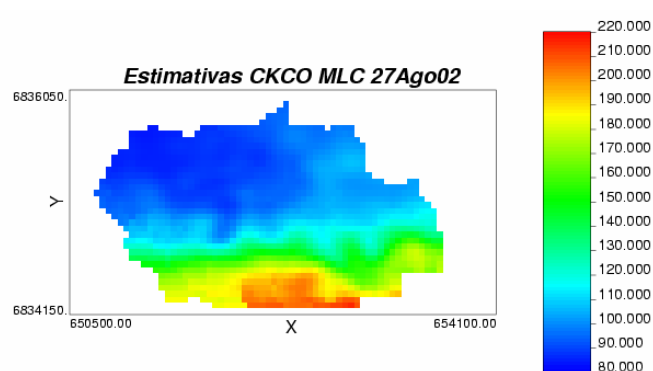


Figura E.18 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 27 de Agosto de 2002.

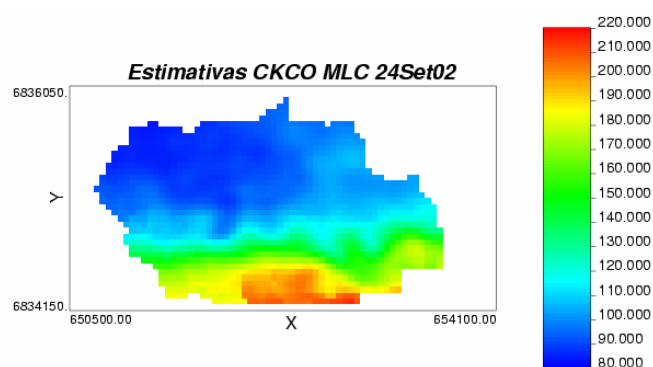


Figura E.19 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 24 de Setembro de 2002.

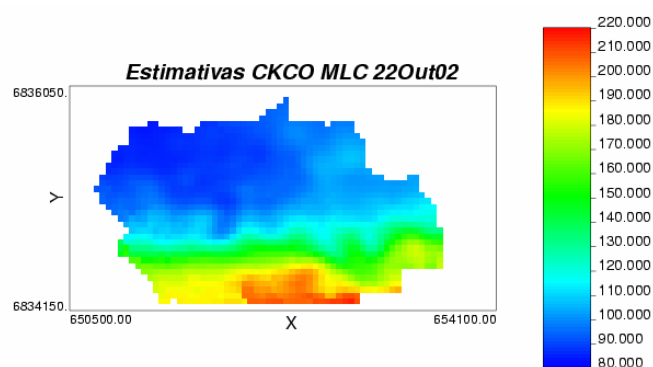


Figura E.20 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 22 de Outubro de 2002.

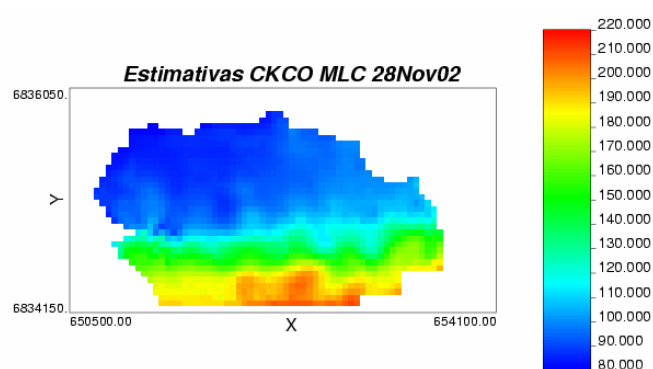


Figura E.21 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 28 de Novembro de 2002.

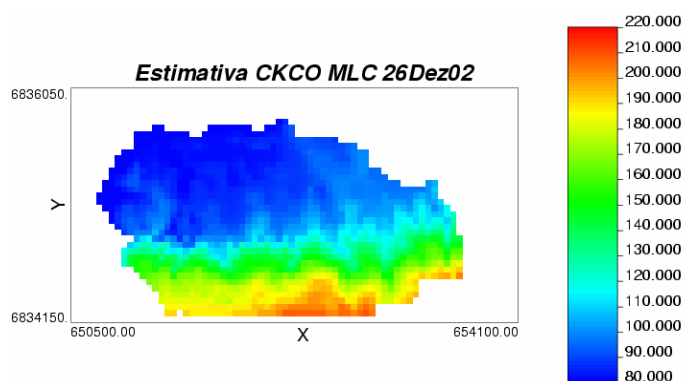


Figura E.22 – Mapa das estimativas pontuais de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 26 de Dezembro de 2002.

E.3 Mapas de contorno das estimativas de nível de água para o ano 2002

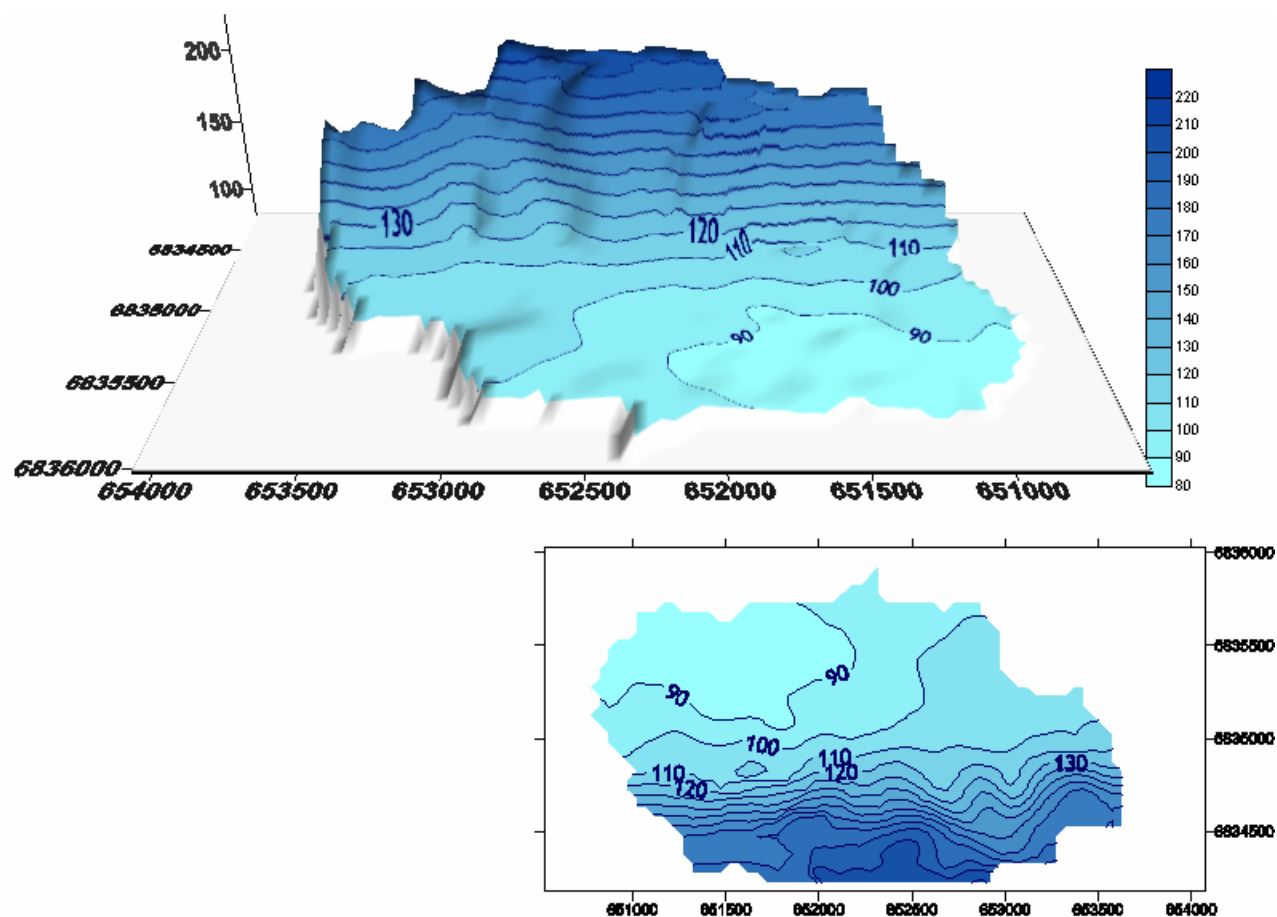


Figura E.23 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 22 de Janeiro de 2002.

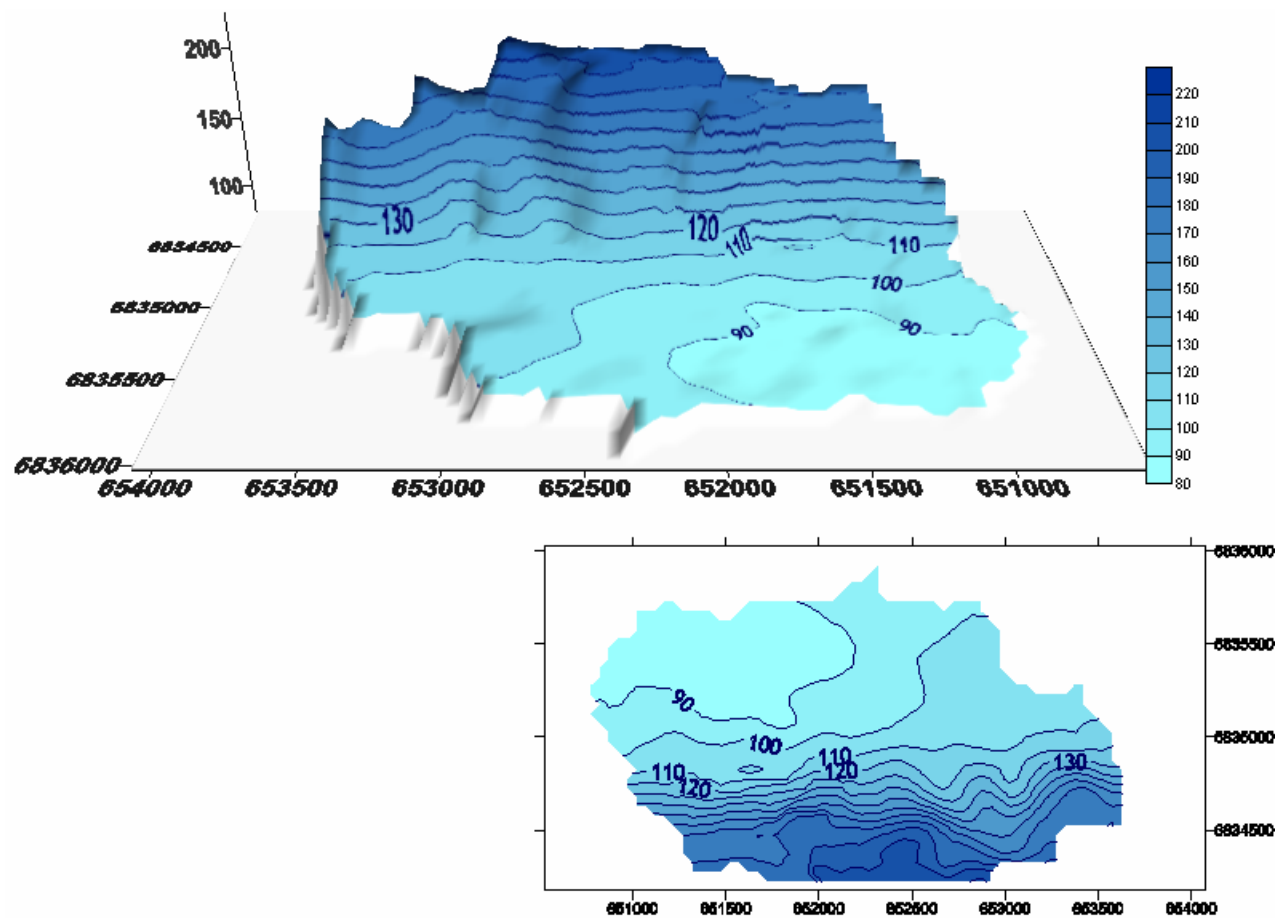


Figura E.24 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 26 de Fevereiro de 2002.

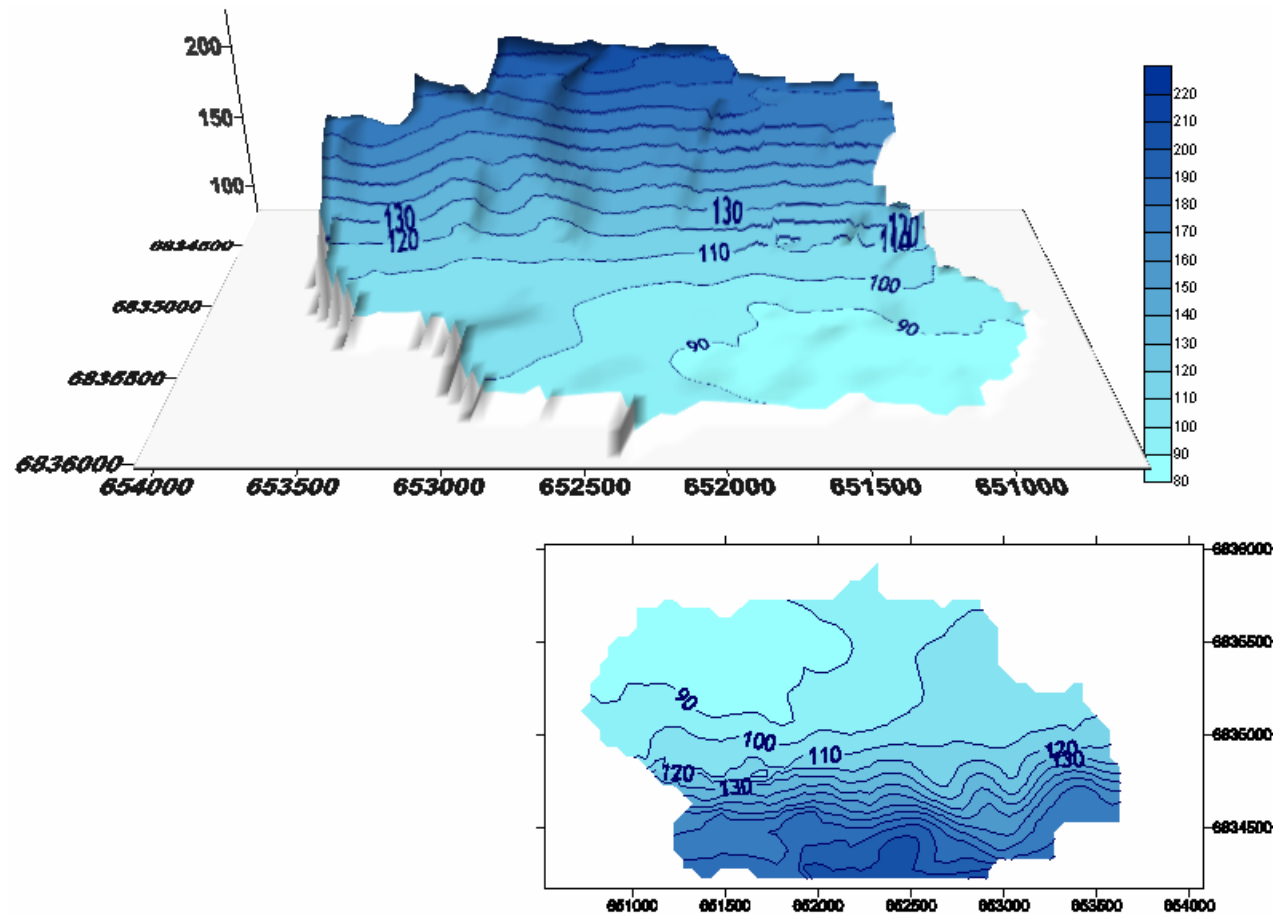


Figura E.25 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 26 de Março de 2002.

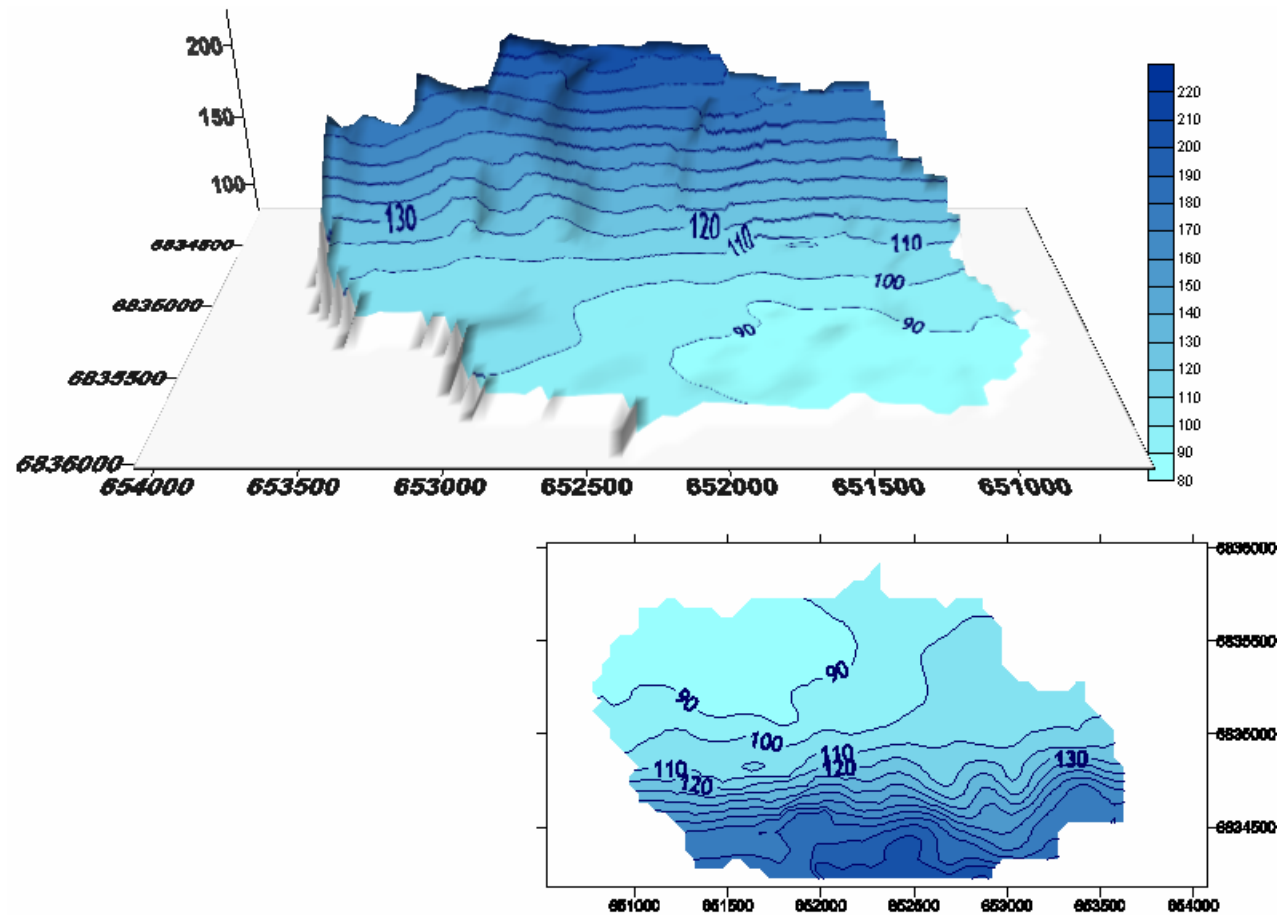


Figura E.26 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 23 de Abril de 2002.

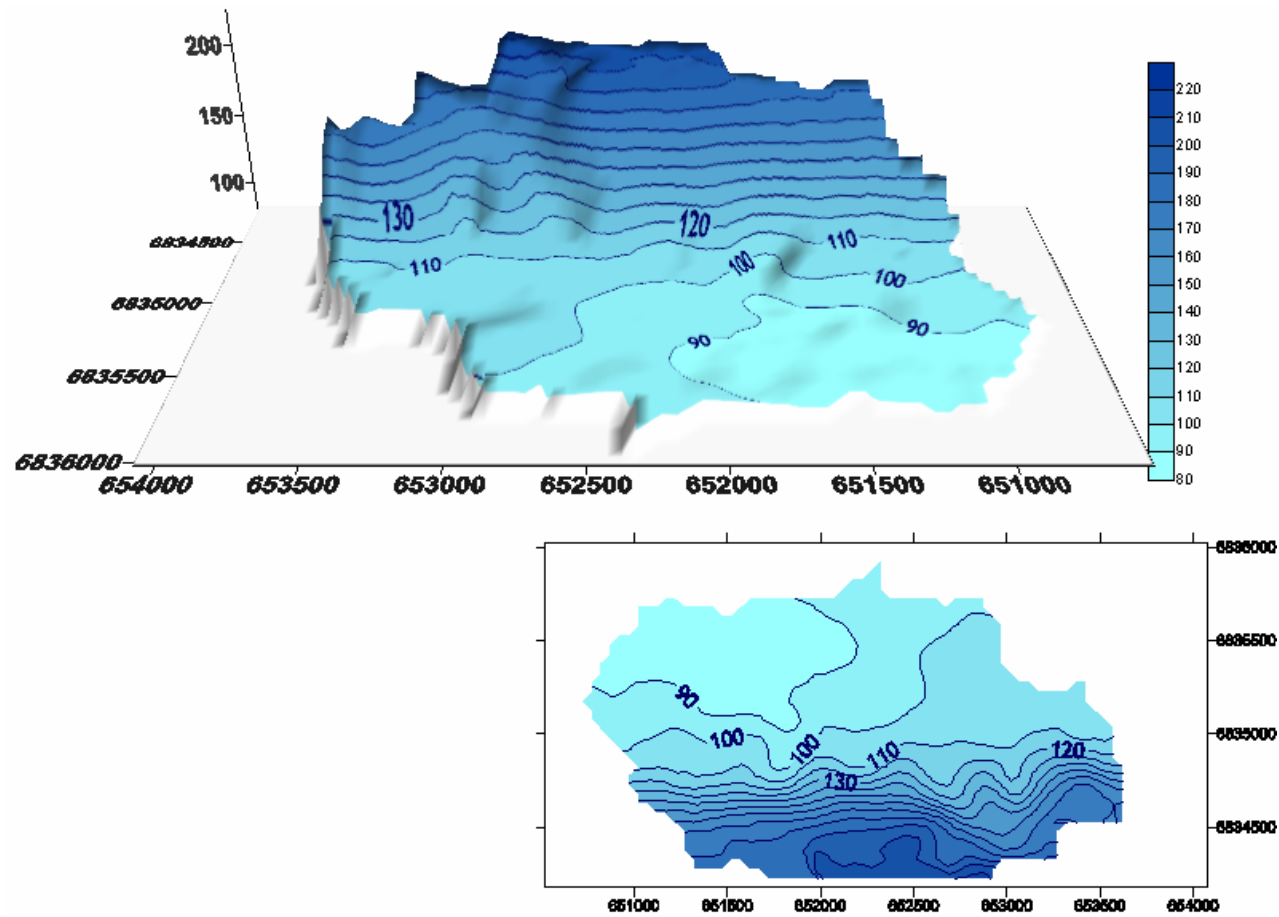


Figura E.27 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 28 de Maio de 2002.

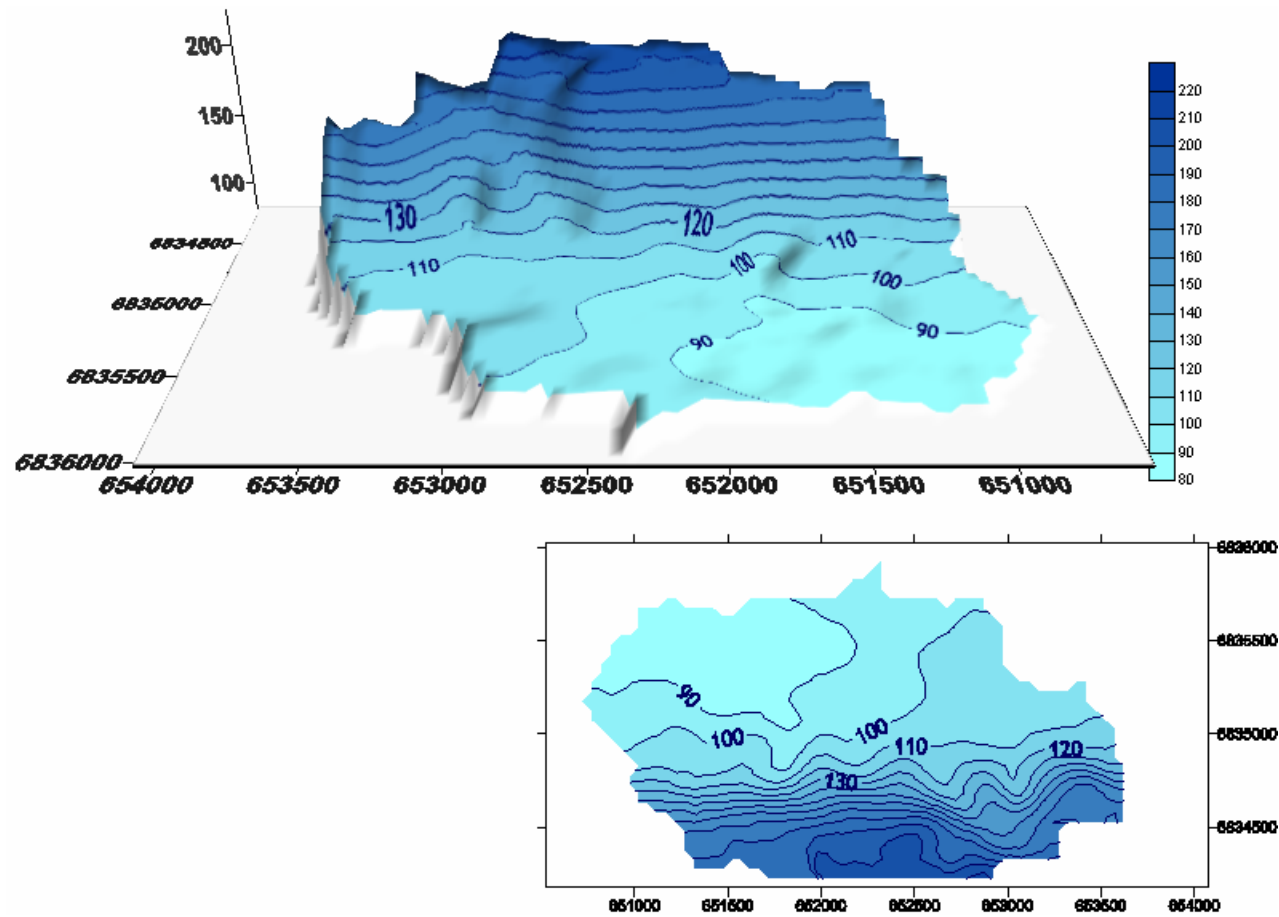


Figura E.28 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 25 de Junho de 2002.

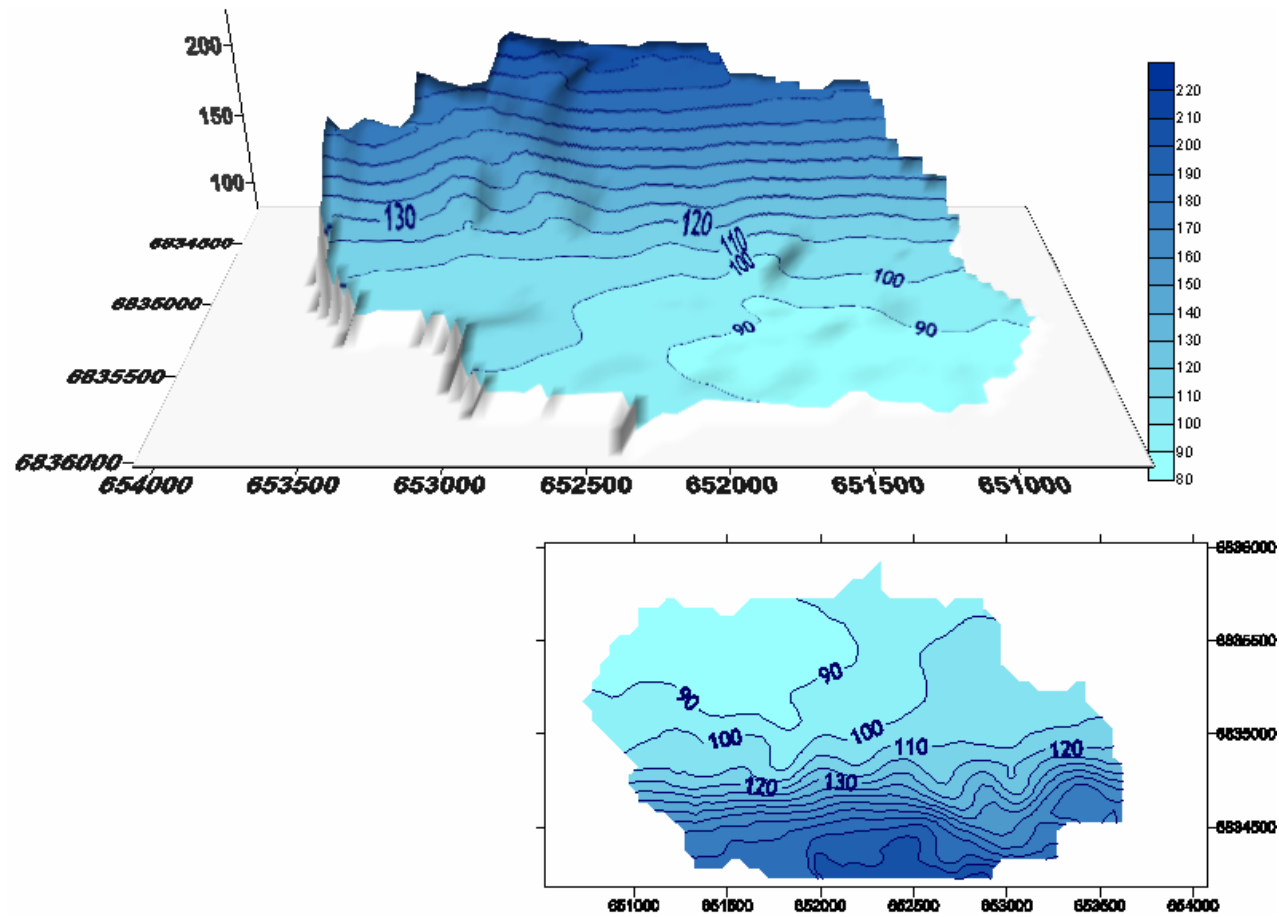


Figura E.29 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 23 de Julho de 2002.

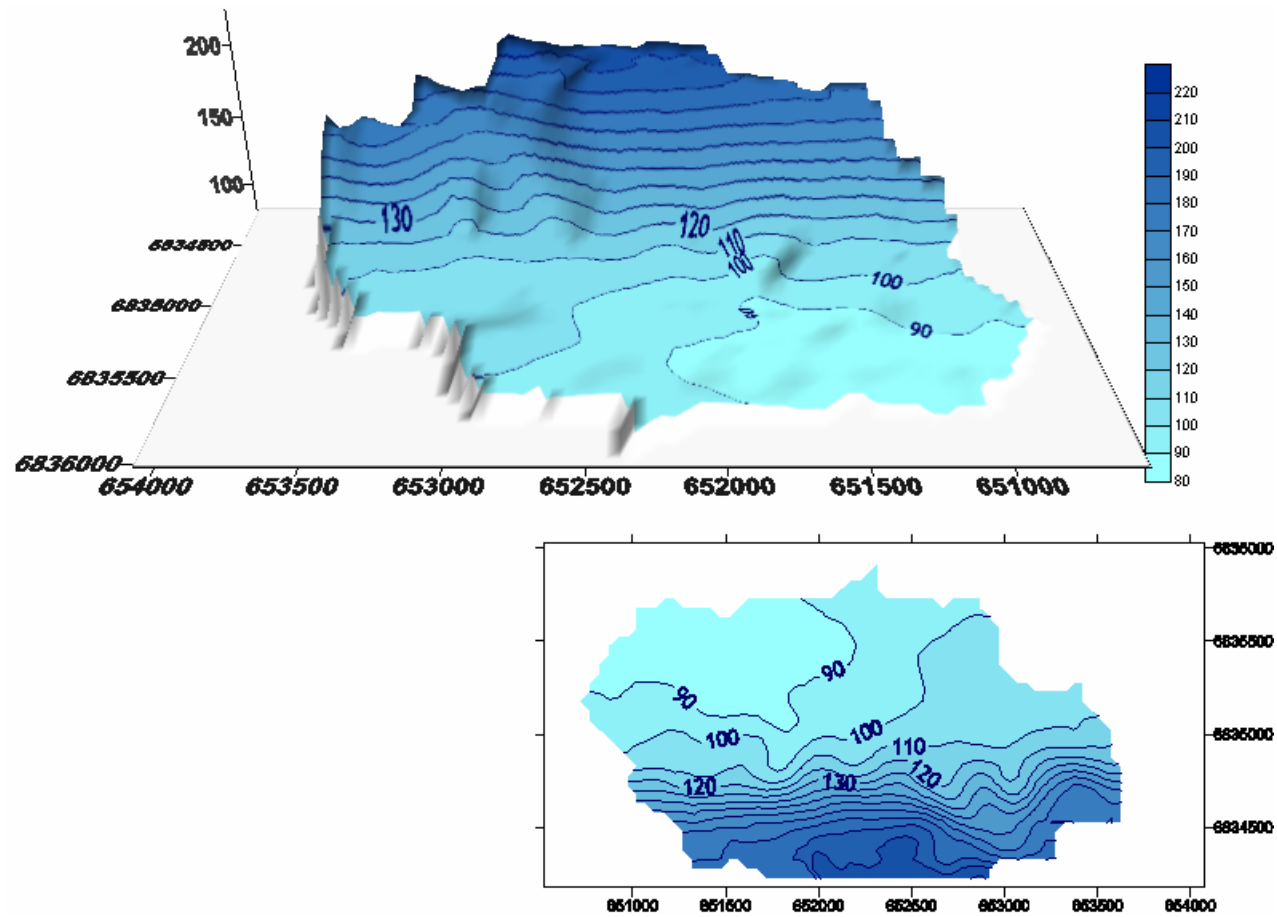


Figura E.30 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 27 de Agosto de 2002.

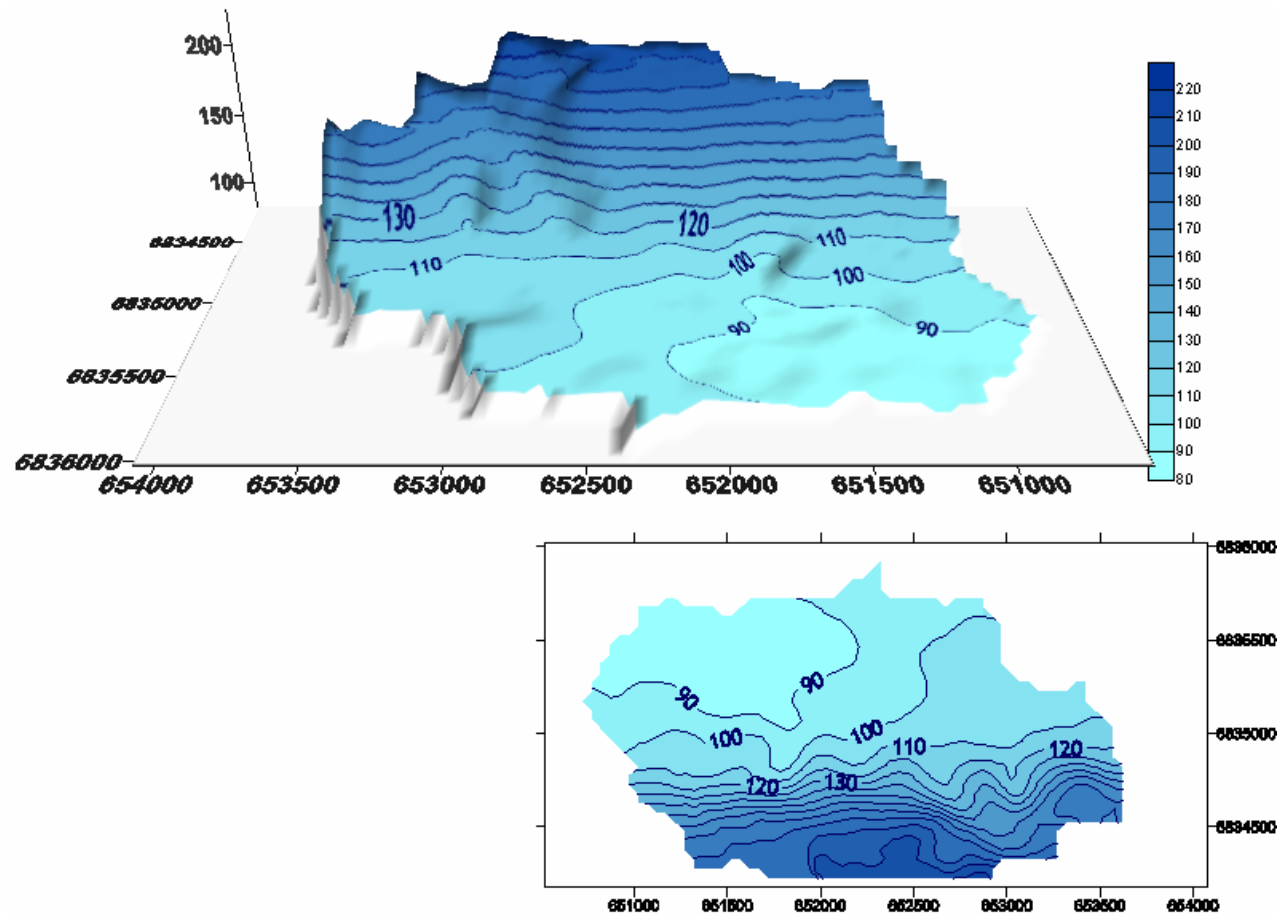


Figura E.31 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 24 de Setembro de 2002.

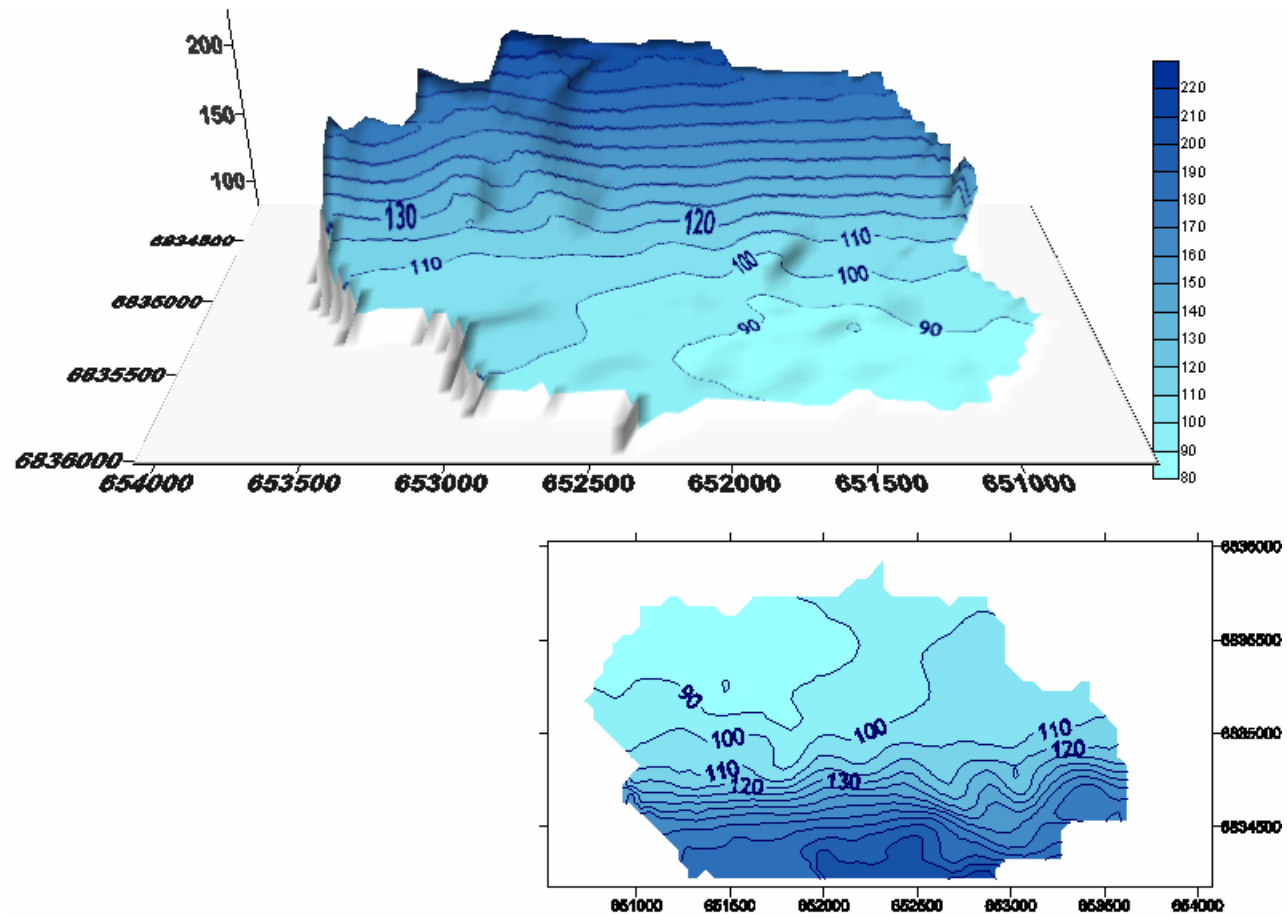


Figura E.32 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 22 de Outubro de 2002.

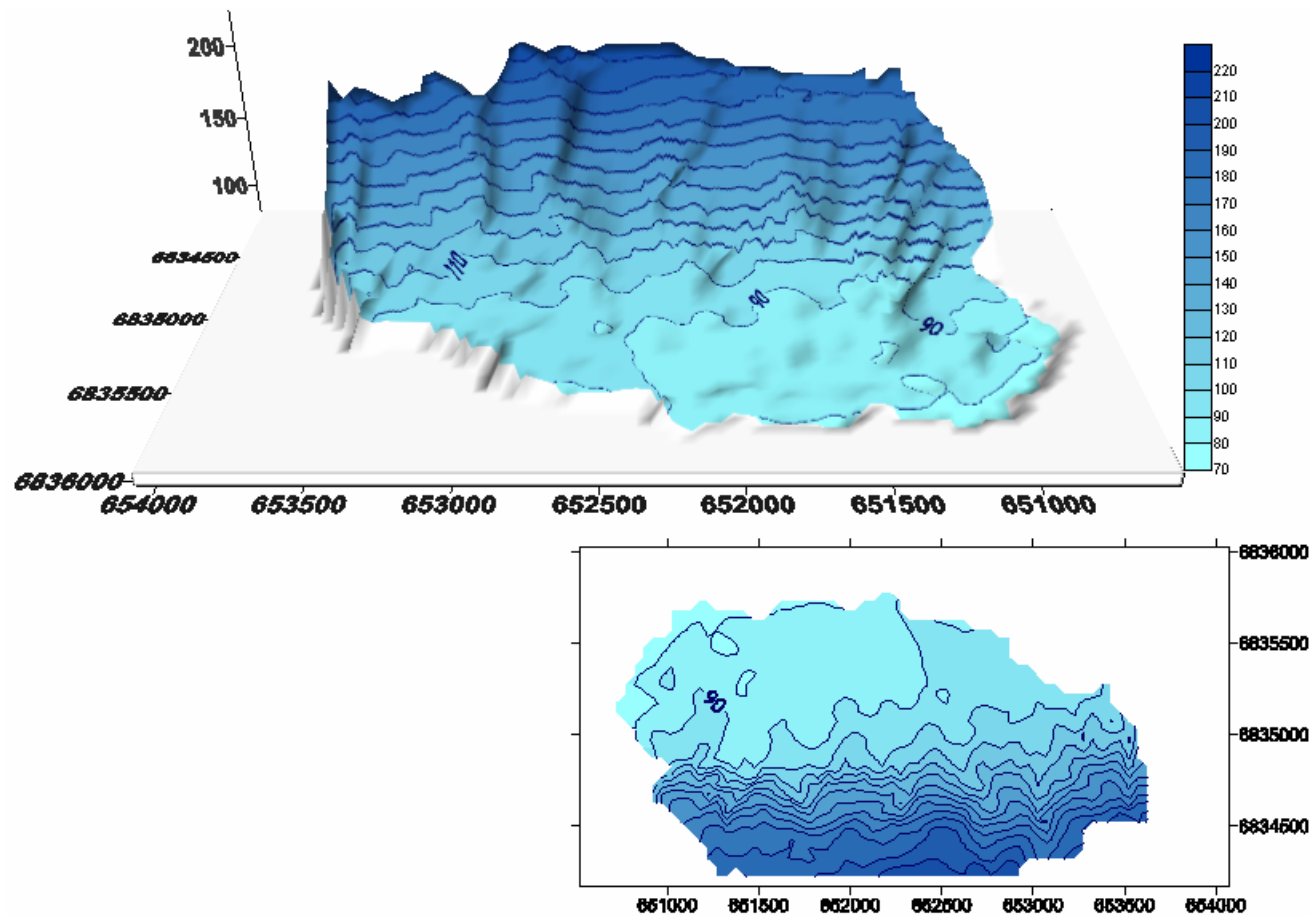


Figura E.33 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 28 de Novembro de 2002.

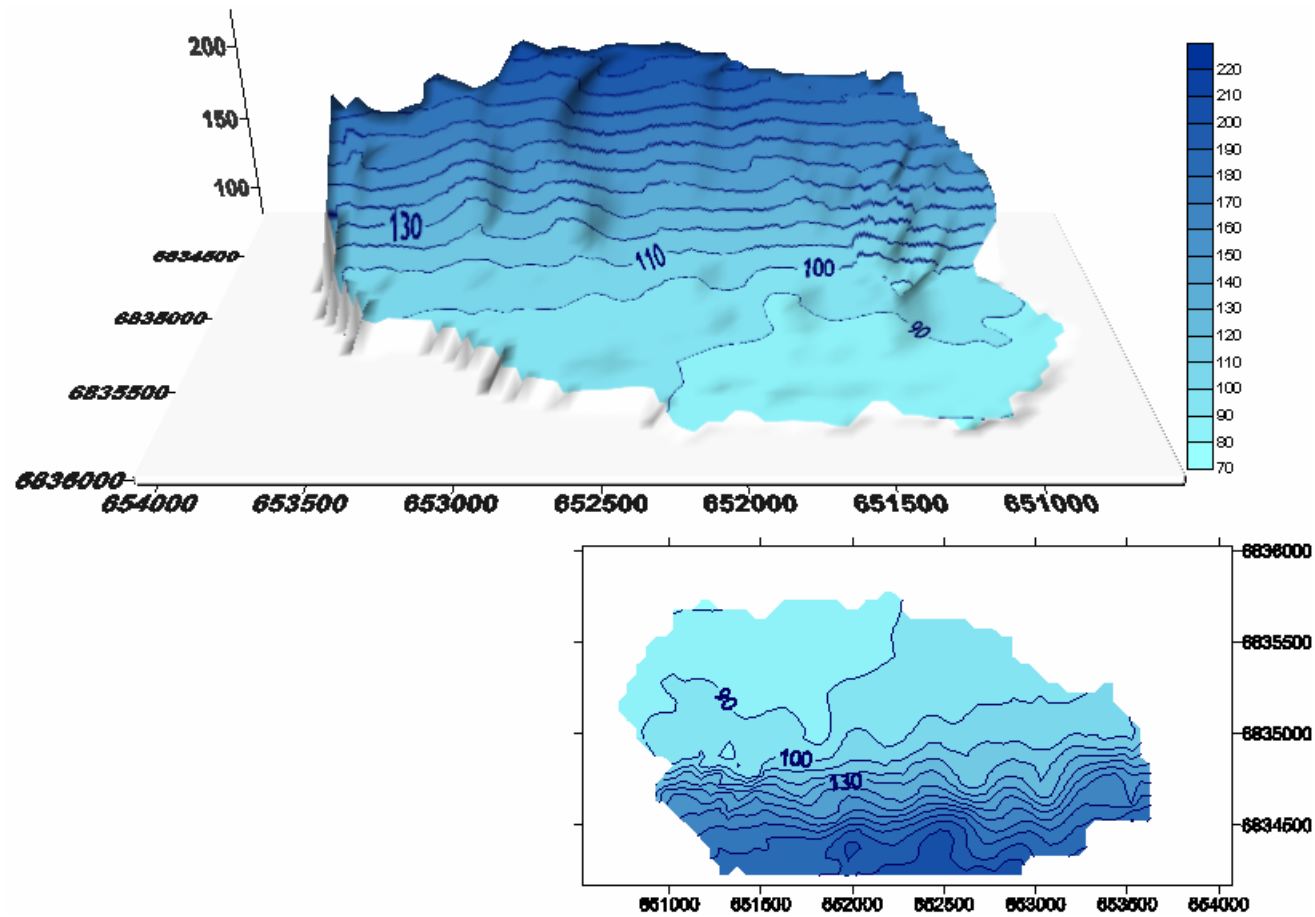


Figura E.34 - Mapa de contorno das estimativas de nível de água por Cokrigagem colocada estrita ordinária utilizando o MLC para o 26 de Dezembro de 2002.