UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

TEORIA DA DECISÃO SOB INCERTEZA E A HIPÓTESE DA UTILIDADE ESPERADA: CONCEITOS ANALÍTICOS E PARADOXOS

RAFAEL TIECHER CUSINATO
Orientador: Prof. Sabino Porto Júnior

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Economia da Faculdade de Ciências Econômicas da UFRGS como quesito parcial à obtenção do título de Mestre em Economia.

Porto Alegre, 2003.

AGRADECIMENTOS

■ Ao prof. Sabino Porto Júnior, por ter despertado meu interesse na área e por ter arcado com a conseqüente orientação.

■ Ao prof. Giácomo Babinotto Neto, pelos artigos e indicações que forneceram os pontos de partida deste trabalho.

■ Aos colegas de mestrado, pelos bons momentos de convívio, estudo e descontração. Honra-me muito têr-los tido como colegas. Agradeço, em especial, ao colega Danilo Araújo Fernandes, pelas nossas freqüentes discussões à cerca de filosofia e ciência em geral.

“Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil – e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos.”

Albert Einstein

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS E QUADROS

RESUMO

A teoria da utilidade esperada (EU) é a teoria da decisão mais influente já desenvolvida. A EU é o *core* da teoria econômica sob incerteza, presente na maior parte dos modelos econômicos que modelam situações de incerteza. Porém, nas últimas três décadas, as evidências experimentais têm levantado sérias dúvidas quanto à capacidade preditiva da EU – gerando grandes controvérsias e uma vasta literatura dedicada a analisar e testar suas propriedades e implicações. Além disso, várias teorias alternativas (*teorias não-EU*, geralmente, generalizações da EU) têm sido propostas.

O objetivo deste trabalho é analisar e avaliar a teoria da utilidade esperada (objetiva) através de uma revisão da literatura, incorporando os principais conceitos desenvolvidos ao longo do tempo. Além disso, este trabalho desenvolve algumas análises originais sobre representação gráfica e propriedades da teoria da utilidade esperada.

O trabalho adota uma perspectiva histórica como fio condutor e utiliza uma representação da incerteza em termos de loterias (distribuições de probabilidade discretas). Em linhas gerais, o roteiro de análise do trabalho é o seguinte: princípio da expectância matemática; Bernoulli e a origem da EU; teoria da utilidade sem incerteza; axiomatização da EU; representação gráfica e propriedades da EU; comportamento frente ao risco; medidas de aversão ao risco; dominância estocástica; paradoxos da EU e a reação dos especialistas frente aos paradoxos.

A conclusão é que existem fortes evidências experimentais de que a EU é sistematicamente violada. Porém, a existência de violações não foi ainda suficientemente testada em experimentos que permitam o aprendizado (tal como pode ocorrer em situações de mercado), onde existe a possibilidade de que as preferências evoluam e que haja uma convergência de comportamento para a EU (ainda que esta possibilidade não se aplique a situações singulares ou que ocorram com pouca freqüência). É possível que testes deste tipo venham a confirmar, em maior ou menor grau, as violações da EU. Mas mesmo que isto ocorra, não significa que a EU não seja útil ou que deva ser abandonada. Em primeiro lugar, porque a EU representou um grande avanço em relação ao princípio da expectância matemática, seu antecessor. Em segundo lugar, porque a EU implica em uma série de propriedades analiticamente convenientes, gerando instrumentos de análise bastante simples (de fato, permitiu a explicação de numerosos fenômenos econômicos), contrastando com a maior complexidade envolvida com o uso das teorias não-EU. Neste cenário, faz mais sentido pensar na EU sendo eventualmente complementada por teorias não-EU do que, sendo abandonada.

ABSTRACT

The theory of expected utility (EU) is the most influent decision theory developed until today. The EU is the core of the economic theory under uncertainty, and it is used in most of the economic models that model uncertainty contexts. But, in the last three decades, the experimental evidences have raised serious doubts towards the EU's ability to predict, thus generating an enormous controversy and a vast literature, dedicated to analyze and to test its properties and implications. Besides this, several alternative theories (*non-EU theories*, normally, EU generalizations) are being proposed.

The objective of this work is to analyze and to evaluate the (objective) expected utility theory through a review of the literature, incorporating the main concepts, that were developed through the years. Besides this, this work develops some original analysis about graphical representation and properties of expected utility theory.

The work adopts a historical perspective as a leading line and uses an uncertainty representation in terms of lotteries (discrete probability distributions). In general terms, the route of the work's analysis is the following: mathematical expectation principle**;** Bernoulli and the origin of the EU; utility theory without uncertainty; EU axiomatization; graphical representation and EU's properties; attitudes toward risk; measures of risk aversion; stochastic dominance; EU's paradoxes and the specialists reactions toward them.

The conclusion is that there are strong experimental evidences that the EU is systematically violated. But the existence of violation was not enough tested yet in experiments that allow opportunity for learning (as it can occur in market contexts), where there is the possibility that the preferences evolve and the convergence of behavior towards the EU (although this possibility is not applicable to single situations or it doesn't happen very often). It is possible that this kind of tests confirm, in a minor or major level, the violations of the EU. But even though this can happen, it doesn't mean that the EU is not useful or that it should be put away. First of all, because the EU represented a great advance in relation to the mathematical expectation principle, its predecessor. Second, because the EU implies in a sequence of analitycally convenient properties, generating very simple tools of analysis (in fact, it allowed the explanation of many economical phenomena), contrasting with the bigger complexity involved with the use of the non-EU theories. In this scenery, it makes more sense to think about the EU as being contingently complemented by non-EU theories as for being abandoned.

INTRODUÇÃO

Os maiores filósofos e pensadores reconheceram que o comportamento humano é pautado pela incerteza e pelo conhecimento limitado do mundo. Ainda que por vezes a certeza possa ser uma noção conveniente, não há nada que possamos fazer sem estar à deriva do acaso – seja porque nossa ignorância nos cega frente à certeza, seja porque a certeza não passa de uma miragem, fabricada à frente de nossos olhos por um universo incerto. Mas seria este um motivo para alguém se silenciar frente às vicissitudes da vida e contemplar o acaso como um “desígnio inacessível dos deuses”?

Talvez não. Uma alternativa seria tentar “compreender” o acaso. E como parte desta compreensão, poderia-se desenvolver uma teoria da decisão capaz de guiar e descrever o comportamento humano. Mas, contrariamente ao que se poderia esperar, não foi um estudioso do comportamento humano que deu partida a esta empreitada intelectual. Precisou um matemático “inventar” a Teoria da Decisão para que o mundo se desse conta de um mundo inexplorado – ainda que nem fosse este seu objetivo. De fato, queria ele apenas convencer alguns amigos de que deveriam tornar-se devotos de Deus, e acabou estabelecendo o primeiro princípio matemático capaz de lidar com a tomada de decisão sob incerteza. Se seus amigos foram convencidos, a história não tem resposta; mas que ele transformou o acaso, um “desígnio dos deuses”, em uma matéria mundana, ninguém duvida.

Anos mais tarde, quando o primeiro princípio matemático pareceu falhar, outro matemático entrou em cena e deu origem à “hipótese da utilidade esperada”, concebendo a teoria da decisão mais influente de todos os tempos: a teoria da utilidade esperada (EU).

Passados mais de duzentos anos, a “hipótese da utilidade esperada” encontra-se difundida pelos departamentos de economia ao redor do mundo – exercendo um papel crucial na teoria econômica contemporânea.

A EU é amplamente utilizada para modelar o comportamento dos agentes econômicos, podendo ser considerada o *core* da teoria econômica sob incerteza. A sua aplicação vem obtendo sucessos teóricos continuados em diversas áreas da microeconomia, como teoria dos jogos, economia da informação e finanças. A EU é a “engrenagem” da chamada “revolução da informação”, que alterou de sobremodo os rumos da pesquisa econômica contemporânea, proporcionando importantes novos resultados. Além disso, a EU expandiu seus domínios à macroeconomia, estando presente nos diversos modelos microfundamentados sob condições de incerteza.

Mais do que isto, a “hipótese da utilidade esperada” conquistou adeptos nas mais diversas áreas do conhecimento, desde a matemática, até a administração, psicologia e ciências políticas. Assim, ainda que o estudo da teoria da decisão tenha encontrado seu “habitat natural” nos departamentos de economia, não há erro algum em afirmar que se trata de uma área multidisciplinar – com seus avanços repercutindo em uma gama de agendas de pesquisa.

Portanto, o fato de muitos pesquisadores atualmente preocuparem-se com o desenvolvimento de um melhor entendimento das implicações da EU e dos determinantes do comportamento de escolha não deve ser motivo de surpresa. Muitas questões têm sido levantadas. Será a EU uma teoria plausível para descrever o comportamento dos tomadores de decisão? Quais são efetivamente as implicações da teoria da utilidade esperada? Estas questões são bastante relevantes, especialmente porque as evidências experimentais produzidas nas últimas três décadas têm levantado sérias dúvidas quanto à acuidade empírica da EU – sendo fonte de fortes controvérsias nos meios acadêmicos. A dúvida em relação à capacidade preditiva da EU levou ao desenvolvimento de dezenas de teorias alternativas (*teorias de utilidade não-esperada*, geralmente, generalizações da EU) para acomodar as evidências não-compatíveis com a EU .

Desta forma, é muito importante que os economistas (e outros acadêmicos interessados) analisem atentamente a teoria da utilidade esperada, buscando uma melhor compreensão de seus axiomas, propriedades, implicações e limitações. Como conseqüência, possibilitar-se-a uma avaliação mais madura e ponderada da EU.

Esta tarefa tem sido realmente colocada a cabo na literatura internacional, tanto através de artigos em periódicos, como através de livros que revisam a literatura específica. Infelizmente, este tema não tem sido explorado no Brasil, constituindo-se em um "espaço em branco" na literatura econômica nacional. Desta forma, o presente trabalho toma sentido, em parte, como uma tentativa de desenhar os primeiros traços neste espaço, chamando a atenção para a importância do tema.

Neste ponto, cabe lembrar da existência de confusões semânticas em relação à palavra incerteza. Neste trabalho, utilizaremos as palavras *risco* e *incerteza* como sinônimos. Ou seja, consideraremos que uma situação envolve risco ou incerteza quando embora não saibamos o resultado que será obtido, conhecemos os possíveis resultados e suas respectivas probabilidades.[1]

Procuraremos revisar os principais conceitos relacionados à teoria da utilidade esperada, dando ênfase às interpretações matemáticas e analíticas-intuitivas das suposições e implicações, dos instrumentais teóricos e dos paradoxos. Neste sentido, estaremos avançando em relação aos manuais de microeconomia, que, talvez pela sua própria natureza, apresentam a EU de maneira bastante concisa e sem um exame analítico detalhado.

Este trabalho apresenta duas novidades em relação aos demais da área. A primeira é adotar uma perspectiva histórica como fio condutor. Ainda que uma breve restrospectiva seja muito comum nas publicações que revisam a literatura da EU, pelo que consta, nenhuma ordena a apresentação dos conceitos pelo curso histórico, tampouco analisa as controvérsias históricas que levaram a desenvolvimentos e interpretações importantes na área. Daremos atenção especial a estas controvérsias – atribuindo a elas, mais do que um valor histórico, já que nos permitirão analisar e compreender aspectos relevantes da teoria.

---

[1] Seguidamente, a palavra incerteza é utilizada no sentido de incerteza knightiana. Para Frank Knight, a incerteza corresponde a situações onde não é possível efetuar uma mensuração objetiva de probabilidades, seja porque não é possível obter as probabilidades para os diferentes eventos possíveis ou seja porque não é possível listar todos os possíveis eventos. Entretanto, cabe ressaltar, que embora utilizaremos risco e incerteza como sinônimos, não haverá perda de inteligibilidade, já que a incerteza knightiana não é assunto deste trabalho. Assim, estaremos tratando unicamente da versão objetiva da teoria da utilidade esperada. A versão subjetiva da teoria da utilidade esperada, que remete aos trabalhos de Savage (1954 [1972]), e a versão "híbrida" de Anscombe e Aumann, não serão objetos de nossa análise.

Para uma discussão sobre os diferentes formas de interpretar a incerteza no contexto da ciência econômica, ver Lawson (1988), Leroy & Singell (1987), Carvalho (1988) e Dunn (2001).

A segunda novidade é o desenvolvimento de algumas análises originais sobre representação gráfica e propriedades da teoria da utilidade esperada. Introduziremos as curvas de indiferença apresentadas com intercepto, as linhas de iso-valor esperado, as "análises-limite" das curvas de indiferença (curvas de indiferença verticais e horizontais), o leque de contração de p_2, o caminho de contração de p_2, e uma representação gráfica para a propriedade da razão comum.

Como balizador de nossas análises, utilizaremos a representação da incerteza em termos de loterias (i.e., distribuições de probabilidade discretas). Esta escolha se explica pela possibilidade de unificar a notação para todos os tópicos tratados neste trabalho: desde os primeiros desenvolvimentos da teoria da decisão até os paradoxos, ambos originalmente formulados em termos discretos.

Ainda que iremos fazer uma análise generalista da EU, fornecendo elementos para que ela possa ser avaliada, é útil especificar os principais pontos que iremos abordar. Assim, os objetivos específicos deste trabalho são:

(1) Situar a teoria da utilidade esperada como um desenvolvimento que surgiu dentro de um campo de estudo mais amplo, o campo da teoria da decisão. Discutir a interpretação de um fundamento importante da teoria, o conceito de *utilidade*, que freqüentemente é motivo de mal-entendidos.

(2) Interpretação analítica dos axiomas e propriedades da teoria da utilidade esperada. Em especial, explorar a análise gráfica das curvas de indiferença no triângulo de Marschak-Machina, geralmente deixado em segundo plano na literatura.

(3) Desenvolver algumas análises originais referentes à representação gráfica e propriedades da teoria da utilidade esperada: as curvas de indiferença apresentadas com intercepto, as linhas de iso-valor esperado, as "análises-limite" das curvas de indiferença (curvas de indiferença verticais e horizontais), o leque de contração de p_2, o caminho de contração de p_2, e a análise gráfica da propriedade da razão comum; todos representados sobre o triângulo de Marschak-Machina.

(4) Análise da EU como um instrumento para modelar diferentes comportamentos frente ao risco.

(5) Análise e interpretação dos paradoxos da EU.

Assim, no capítulo 1, trataremos dos primeiros passos desenvolvidos em teoria da decisão, que começaram com o princípio da expectância matemática e logo foram substituídos pela "hipótese da utilidade esperada". Veremos também que a teoria da decisão entrou no escopo de estudo dos economistas, inicialmente, em uma versão sem incerteza, chamada de "teoria da utilidade". Veremos que esta entrada não se fez sem controvérsias – o conceito de utilidade foi motivo de fortes debates e desentendimentos.

No capítulo 2, discutiremos a axiomatização da teoria da utilidade esperada proposta por John Von Neumann e Oskar Morgenstern, bem como a controvérsia que surgiu em conseqüência do indexador cardinal implicado pelos seus axiomas. Trataremos, também, da representação gráfica e das propriedades da EU.

No capítulo 3, nos ocuparemos com a análise e representação gráfica dos diferentes comportamentos frente ao risco. Além disso, nos aprofundaremos na suposição de comportamento avesso ao risco, tratando de conceitos e medidas relacionados à aversão ao risco. Na parte final do capítulo, faremos uma breve introdução à literatura de dominância estocástica.

Finalmente, no capítulo 4, trataremos das evidências que têm guiado boa parte da discussão contemporânea sobre a EU e que têm colocado a teoria em xeque. Veremos o Paradoxo de Allais (como um caso particular do efeito da conseqüência comum), o Paradoxo da razão comum, o fenômeno da "reversão das preferências" e o *"framing effect"*. Concluiremos o capítulo com uma análise das duas reações distintas que os especialistas têm oferecido em relação aos paradoxos.

1. TEORIA DA DECISÃO E OS PRIMÓRDIOS DA TEORIA DA UTILIDADE ESPERADA

Os seres humanos sempre foram uns curiosos sobre si mesmos. Desde que se desenvolveu a escrita, numerosas são as obras que procuram tratar ou entender o comportamento humano. Inicialmente, vale dizer, o comportamento era compreendido em termos puramente literários, sem qualquer tipo de formalização ou uso de equações e modelos matemáticos. Os critérios utilizados eram distantes dos que hoje comumente empregamos na ciência moderna. A matemática estava ainda em seus primórdios e não estava claro em que extensão era aplicável ao mundo real. Mesmo em relação ao estudo do mundo físico, muitos acreditavam que a matemática teria pouco ou nada a contribuir. Talvez, utilizar a matemática para compreeender o comportamento humano fosse algo inimaginável.

A partir do renascimento no século XV, houve um despertar do interesse pelas artes e pelo conhecimento. Com os avanços estabelecidos por *Nicolau Copérnico* (1473-1543), *Johannes Kepler* (1571-1630) e *Galileu Galilei* (1564-1642), poucos continuaram a sustentar que a matemática teria pouco a contribuir para o entendimento do mundo material. Galileu é considerado o "pai" da física matemática; enquanto muitos discutiam a aplicabilidade da matemática ao mundo, Galileu simplesmente "aplicou" – e, talvez, tenha encerrado a discussão.

Por outro lado, a aplicabilidade da matemática ao estudo do comportamento humano foi algo mais inusitado e novamente sujeito a controvérsias. Muitos argumentavam que o comportamento humano era algo fundamentalmente diferente do mundo físico. Embora este pudesse ser tratado através de equações matemáticas, o mesmo não se daria com o comportamento humano, que devido à presença do “elemento humano” e à natureza do fenômeno psicológico, seria irredutível à matemática e sujeito ao livre arbítrio dos indivíduos.

Controvérsia à parte, o fato é que os primeiros desenvolvimentos da teoria da probabilidade nos século XVII pelos matemáticos *Blaise Pascal* (1623-1662) e *Pierre de Fermat* (1601-1665) permitiram o surgimento da primeira teoria matemática que tratou do comportamento humano. Foi o próprio Pascal que a formulou. Pascal tinha um problema nada mundano a resolver – queria estabelecer a correção de levar ou não uma vida devotada a Deus. A incógnita quanto à existência divina foi a motivação responsável pelo surgimento da primeira teoria da decisão: o *princípio da expectância matemática*, que levou Pascal a defender a fé em Deus em termos pragmáticos.

Assim, o princípio da expectância matemática será o nosso assunto na seção 1.1. Na seção 1.2, veremos que as limitações deste princípio levaram o matemático *Daniel Bernoulli*, em 1738, a propor a teoria da utilidade esperada (EU), ainda que sem a fundamentação axiomática contemporânea.

Conquanto importante, veremos na seção 1.3 que a contribuição de Bernoulli foi esquecida por um longo período. Ainda no século XVIII, *Jeremy Bentham* redescobriu o conceito de utilidade através de sua filosofia utilitarista. Na segunda metade do século XIX, o utilitarismo de Bentham influenciou fortemente os economistas marginalistas, que incorporaram a utilidade em suas teorias, modelando contextos sem incerteza. Porém, o conceito de utilidade foi alvo de diversas críticas e contestações que culminaram em grandes debates nas primeiras décadas do século XX, especialmente sobre a mensurabilidade e a natureza da utilidade. Veremos que estas controvérsias conduziram a uma interpretação “operacionalista” da teoria da utilidade, tal como é interpretada hoje.

1.1 A teoria da probabilidade e o princípio da expectância matemática

A história da probabilidade talvez tenha começado com o monge franciscano *Luca Paccioli.* Paccioli nasceu por volta de 1445 e, em 1494, publicou sua obra prima: *Summa de arithmetic, geometria et proportionalità*. Nesta obra, ele formulou o famoso *problema da partilha*:

> “A e B estão empenhados em um honesto jogo de *balla*. Eles concordam em continuar até que um deles vença seis rodadas. O jogo realmente termina quando A venceu cinco, e B, três rodadas. Como devem ser divididas as apostas?” (Paccioli apud Bernstein, 1997, p.43).

A primeira tentativa de resolução deste problema foi dada pelo próprio Paccioli, mas fracassou. A “solução de Paccioli” afirmava que as apostas deveriam ser divididas na proporção de 5 para 3, ou seja, na proporção exata de partidas vencidas por cada jogador no momento em que o jogo foi interrompido.[1]

As próximas tentativas, que não lograram êxito, foram as de *Gerolamo Cardano* em 1539 e de *Tartaglia* em 1556. O último sugeriu uma complicada e incorreta solução, mas era cético em relação à existência de uma solução “objetiva”.[2]

A solução definitiva para este enigma foi proposta por Blaise Pascal e Pierre de Fermat. Em 1654, o nobre Cavaleiro de Méré, atraído pelos jogos de azar, questionou Pascal sobre o problema da partilha. Pascal correspondeu-se com Fermat e os dois propuseram diferentes métodos de resolução. A solução de Fermat baseou-se no cálculo da probabilidade de um evento e a de Pascal, no conceito de valor esperado. Apesar de diferentes, ambas eram equivalentes, e marcaram o início da teoria da probabilidade. [3]

Pascal passou a vida dividido entre a carreira matemática e a religiosa. Embora fosse um grande matemático, era um católico devoto e suas convicções religiosas seguidamente o afastaram de sua produção intelectual. Foi famosa sua “primeira conversão” que, em 1646, levou-o a aderir ao jansenismo. Em 1650, Pascal retomou uma “vida mundana”, para mais tarde, em 1654, ceder novamente as suas convicções religiosas e fazer sua “segunda conversão”, abandonando, definitivamente, os “prazeres profanos”.

Se bem que sua obstinação religiosa pode ter atrapalhado sua obra matemática, sua religiosidade foi responsável pela formulação da primeira teoria da decisão que se tem notícia. Pascal queria responder a indagação sobre se deveríamos ou não ser devotos a Deus. Talvez, em uma situação como esta, muitos responderiam associando ao fato de Deus existir ou não.

---

[1] Cf. Crusius (2001).
[2] Cf. Crusius (2001).
[3] Cf. Stewart (1991) e Bernstein (1997).

Porém, Pascal acreditava que a existência ou não de Deus era algo que a razão não poderia determinar.

> "Examinaremos, pois, esse ponto, e digamos: Deus existe ou não existe. Mas para que lado nós nos inclinaremos? A razão nada pode determinar: há um caos infinito a separar-nos. Na extremidade desta distância infinita, joga-se um jogo no qual resultará cara ou coroa. Em que apostareis vós? Pela razão, não o podeis fazer nem em uma nem em outra; pela razão, não podeis descartar nenhuma das duas." (Pascal apud Crusius, 2001, p.62).

Pascal afirmou que não era uma questão de acreditar ou não em Deus. Segundo ele, não podemos decidir acreditar ou não em Deus – a fé não é objeto de escolha racional. O que podemos é decidir conduzir a vida de acordo com os princípios cristãos, *como se Deus existisse*, ou conduzir a vida de acordo com a satisfação das paixões humanas, *como se Deus não existisse*. A primeira, era a alternativa da *vida pia*; a segunda, a da *vida mundana*.[4]

Segundo Pascal, apesar da razão não poder determinar a existência ou não de Deus, este, de fato, existe ou não, independente da nossa crença. Porém, a verdade somente nos seria revelada na ocasião de nossa morte. O problema é que precisaríamos decidir por alguma alternativa de vida *antes de morrer*. Para propor uma decisão, Pascal retomou o conceito de valor esperado, que ele utilizou para solucionar o problema da partilha.

Para Pascal, o ganho de uma vida pia, caso Deus existisse, seria infinito; caso não existisse, seria zero. Por outro lado, o ganho de uma vida mundana seria algum valor constante, digamos, k, independentemente de Deus existir de fato ou não – o Deus de Pascal não era castigador.

Atribuindo uma probabilidade $\alpha \neq 0$ para a existência de Deus e $1-\alpha$ para a não existência de Deus, o valor esperado (ou esperança matemática) de levar uma vida pia seria

$$E(\text{vida pia}) = \alpha \cdot \infty + (1-\alpha) \cdot 0 = \infty,$$

enquanto que o valor esperado de uma vida mundana seria

$$E(\text{vida mundana}) = \alpha \cdot k + (1-\alpha) \cdot k = k.$$

---

[4] Cf. Crusius (2001).

Portanto, E(vida pia)>E(vida mundana), qualquer que seja a probabilidade α de Deus existir. Assim, Pascal concluiu que viver como se Deus existisse, através da vida pia, seria a melhor opção, pois a vida pia domina em valor esperado a vida mundana.

> "Ora, há, aqui, uma infinidade de vida infinitamente feliz a ganhar, um acaso de ganho contra um número finito de acasos de perda, e o que vós jogais é finito. Isso não deixa escolha: sempre que seja o infinito e que não haja um número infinito de acasos de perda contra apenas um ganho, não há lugar para a exitação, é preciso dar tudo. E assim, quando se é forçado a jogar, é preciso renunciar à razão para conservar a vida, em lugar de arriscá-la pelo ganho infinito tão prestes a ocorrer quanto a perda do nada." (Pascal apud Crusius, 2001, p.63).

O objetivo de Pascal foi apontar uma racionalidade para a aposta na existência de Deus. Assim, argumentou que a decisão deveria ser baseada na comparação entre os valores esperados. Esta comparação, que ficou conhecida como *princípio da expectância matemática*, chamou à atenção de outros matemáticos e foi amplamente utilizada como método de análise de decisões durante as últimas décadas do século XVII.

Formalmente, se $X=(x_1,x_2,...x_n)$ é o vetor de possíveis resultados e $L_k=(p_1^k,p_2^k,...p_n^k)$, k=1,2,...,K, são os vetores de probabilidades das apostas disponíveis, então o princípio da expectância matemática nos diz que a aposta L_e, $1\leq e\leq K$ deve ser a escolhida entre K apostas de valor esperado diferentes se e somente se

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i^e \geq \sum_{i=1}^{n} x_i p_i^k \text{ para todo } k=1,2,...,K. \tag{1.1}$$

Uma propriedade interessante deste princípio é que a variância dos possíveis retornos não importa – a única medida importante para a tomada de decisões é o valor esperado. Contemporaneamente, diríamos que este princípio não leva em conta as possíveis atitudes dos indivíduos frente ao risco. Apesar desta limitação, que hoje é algo bastante clara – e naquela época ainda não era – o princípio da expectância matemática podia ser aplicado a vários tipos de problemas e constituiu-se no primeiro desenvolvimento intelectual capaz de lidar com decisões em condições de incerteza.

1.2 Bernoulli e a teoria da utilidade esperada

Apesar da praticidade do princípio da expectância matemática, suas limitações não tardaram muito a aparecer. Evidências anômalas acumularam-se e *Daniel Bernoulli* foi o principal porta-voz da insatisfação com este princípio. Se o princípio da expectância matemática é adequado, como justificar a existência de seguros?

Em 1738, Bernoulli publicou um ensaio no *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*[5], apontando que um mercador prudente pode segurar seu navio contra perdas no mar mesmo sabendo que estará aumentando a riqueza esperada da companhia de seguros às custas da sua. Para alguém que mantivesse o princípio da expectância matemática em seus processos de decisão, seria tão absurdo fazer um seguro quanto jogar dinheiro fora. Como qualquer um concordaria que não é insanidade fazer um seguro, então o comportamento do mercador seria uma violação flagrante do princípio da expectância matemática.[6]

Neste mesmo artigo, Bernoulli citou o hoje famoso *Paradoxo de São Petersburgo*, para enfatizar que "homens prudentes" não obedecem invariavelmente ao princípio da expectância matemática. O paradoxo foi publicado originalmente por Nicholas Bernoulli, seu primo, em 1731. O paradoxo pode ser apresentado do seguinte modo: suponha que uma moeda é jogada repetidamente até que a primeira "cara" apareça. O jogo paga 2^{n-1} dólares se a primeira cara aparecer na enésima jogada. Qual o preço que um indivíduo pagaria para entrar neste jogo?

Se o indivíduo se baseasse no princípio da expectância matemática, ele estaria disposto a pagar, no máximo, o valor da esperança matemática. Como o valor da esperança matemática é

$$E(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^{n-1}$$

[5] Em português, "Autos da Academia Imperial de Ciências de São Petersburgo".
[6] Cf. Savage, 1954 [1972].

$$E(L) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 4 + ... + = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = +\infty ,$$

ele estaria disposto a pagar qualquer preço para entrar neste jogo. Não importa o quão rico fosse o indivíduo, ele estaria disposto a entregar toda a sua riqueza para poder participar deste jogo. O que certamente destoaria do comportamento observável no mundo real, onde a maioria das pessoas não estariam dispostas a pagar mais do que uns poucos dólares para participar deste jogo.

A solução que Bernoulli propôs para o Paradoxo de São Petersburgo é considerada o marco inicial da *teoria da utilidade esperada* (EU). Bernoulli argumentou que o valor que uma pessoa atribui a sua riqueza não é o próprio valor monetário desta, mas sim seu "valor moral" ou *utilidade*:

> "(...) a determinação do valor de um item não pode ser baseado em seu preço, mas sim na utilidade que ele fornece. O preço de um item depende somente do próprio item e é igual para todo mundo; a utilidade, contudo, depende das circunstâncias particulares do indivíduo que faz a estimativa." (Bernoulli,1738 [1954], p.24).

Bernoulli postulou o que mais tarde seria conhecido como a *lei da utilidade marginal decrescente*, que implica que à medida que a riqueza aumenta, decresce a utilidade adicional devido ao aumento da riqueza. Em termos matemáticos, esta lei diz que a utilidade em função do dinheiro ou da riqueza é uma função côncava.

Bernoulli foi além e supôs que a utilidade é igual ao logaritmo (em qualquer base) do resultado em termos monetários. Ou seja, $u(x) = \log_B x$ onde x é o resultado e B é uma base qualquer ($B>0$ e $B\neq 1$). O cálculo da utilidade esperada é semelhante ao cálculo do valor esperado, mas com a utilidade servindo de peso. Assim, a utilidade esperada de uma loteria é

$$U(L) = \sum_i p_i u(x_i) \qquad (1.2)$$

Bernoulli afirmou que os indivíduos procuram maximizar a "esperança moral" ou, equivalentemente, a *utilidade esperada* dos resultados. Formalmente, se $X = (x_1, x_2, ... x_n)$ é o vetor de possíveis resultados e $L_k = (p_1^k, p_2^k, ... p_n^k)$, k=1,2,...,K, são os vetores de probabilidades das apostas disponíveis, então a teoria da utilidade esperada afirma que a aposta L_e, $1 \leq e \leq K$, deve ser escolhida entre K apostas de utilidades esperada diferentes se e somente se

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{\,e} u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i^{\,k} u(x_i) \text{ para todo k=1,2,...,K.} \tag{1.3}$$

Aplicando o conceito de utilidade esperada ao Paradoxo de São Petersburgo e supondo que a utilidade de qualquer resultado é igual ao logaritmo na base 10 do resultado, obtemos:

$$U(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \log_{10}\left(2^{n-1}\right) = 0,30103.$$

Isto significa que, sendo X o preço máximo que o indivíduo estaria disposto a pagar para entrar no jogo, temos

$$U(X) = \log_{10} X = 0,30103 \Rightarrow X = 2;$$

isto é, o indivíduo estaria disposto a pagar, no máximo, 2 dólares.

De fato, podemos mostrar que independentemente da base que utilizássemos para o logaritmo, o indivíduo estaria disposto a pagar apenas 2 dólares.[7] Assim, o paradoxo estaria resolvido.[8]

---

[7] Suponha $U(L) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \log_B\left(2^{n-1}\right)$. Então, $U(X) = \log_B X = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \log_B\left(2^{n-1}\right) \Rightarrow$

$$X = B^{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\log_B\left(2^{n-1}\right)} \Rightarrow X = B^{\left(\frac{1}{2}\log_B 1+\frac{1}{4}\log_B 2+\frac{1}{8}\log_B 4+...\right)} \Rightarrow X = B^{\left(\log_B 1+\log_B 2^{\frac{1}{4}}+\log_B 4^{\frac{1}{8}}+...\right)} \Rightarrow$$

$$X = B^{\left[\log_B\left(1\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\cdots\right)\right]} \Rightarrow X = B^{\log_B\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(2^{(n-1)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}\right]} \Rightarrow X = \prod_{n=1}^{\infty}\left(2^{(n-1)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} \Rightarrow X = \prod_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(n-1)}{2^n}} \Rightarrow$$

$$X = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n} \text{ . Como } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n} = 1 \text{ então } X = 2.$$

[8] Na verdade, a solução de Bernoulli para o Paradoxo de São Petersburgo não é completamente satisfatória. É fácil fazer uma modificação no jogo de tal forma que o paradoxo reapareça. Adaptemos o jogo da seguinte maneira: suponha que uma moeda é jogada repetidamente até que a primeira "cara" apareça. O jogo paga $10^{2^{n-1}}$ dólares se a cara aparecer na enésima jogada. Qual o preço que um indivíduo pagaria para entrar neste jogo?

Os créditos do desenvolvimento inicial da EU não devem ser atribuídos unicamente a Bernoulli. Em 1731, sete anos antes da publicação histórica de Bernoulli, *Gabriel Cramer* forneceu uma solução semelhante para o paradoxo através de uma carta enviada ao primo de Daniel Bernoulli, Nicholas Bernoulli. Em um pós-escrito ao artigo de 1738, Daniel Bernoulli reconheceu o trabalho de Cramer, citando várias partes, entre elas:

> "Você me pediu uma explicação da discrepância entre o cálculo matemático e a avaliação vulgar. Eu acredito que isto resulta do fato que, em suas teorias, os matemáticos avaliam o dinheiro em proporção a sua quantidade enquanto, na prática, as pessoas com senso comum avaliam dinheiro na proporção da utilidade que elas podem obter dele." (Cramer apud Bernoulli, 1738 [1954], p.33).

Com a teoria da utilidade esperada, a subjetividade foi definitivamente introduzida à teoria da decisão. Para efetuar cálculos utilizando o princípio da expectância matemática, não era necessário fazer qualquer tipo de avaliação subjetiva, bastava multiplicar as probabilidades pelos possíveis resultados. Com a EU, a avaliação subjetiva dos tomadores de decisão passou a ter um papel fundamental. Os possíveis resultados e as probabilidades passaram a não ser mais suficientes para determinar a decisão pois "a utilidade... depende das circunstâncias específicas de quem faz a estimativa... Não há razão para supor que os riscos estimados por cada indivíduo devam ser considerados de mesmo valor" (Bernoulli apud Bernstein, 1997, p.103).

$$U(L) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \log_{10}\left(10^{2^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots = +\infty$$

Como podemos perceber, o Paradoxo de São Petersburgo reaparece pois o indivíduo estaria disposto, novamente, a pagar qualquer quantia para entrar no jogo. De fato, sempre que as utilidades forem inversamente proporcionais às probabilidades, a solução de Bernoulli falha. Mais generalizadamente, sempre que as utilidades crescerem a uma razão maior ou igual ao inverso da razão da progressão das probabilidades, o paradoxo reaparece.

Desta forma, somente funções utilidades que sejam limitadas superiormente podem "solucionar" o paradoxo. (Uma função $y=f(x)$ com domínio D é limitada superiormente se existe um número k tal que $f(x) \leq k$ para qualquer $x \in D$.) Para mais detalhes sobre o Paradoxo de São Petersburgo, ver Samuelson (1977).

1.3 A utilidade sem incerteza

De início, não tinhamos nada. Então Pascal e Fermat entraram em cena e estabeleceram os primórdios da teoria da probabilidade. Vimos que, alguns anos mais tarde, estes primórdios permitiram que Pascal desenvolvesse o princípio da expectância matemática, que iluminou, pela primeira vez através da matemática, aspectos da tomada de decisão sob incerteza. As anomalias com o princípio não tardaram a aparecer e Bernoulli propôs o princípio mais geral da maximização da utilidade esperada. [9]

Esperaríamos que a seqüência da história da teoria da decisão tivesse sido continuada por adeptos da teoria de Bernoulli, já que a teoria representou o estabelecimento de mais um passo intelectual importante na tentativa de modelar o comportamento humano. Mas não foi o que de fato ocorreu. A teoria de Bernoulli foi esquecida e o conceito de utilidade foi redescoberto várias vezes durante os séculos XVIII e XIX. Além disso, quando os economistas começaram a utilizar a utilidade em suas análises, já no século XIX, o uso do conceito era restrito ao caso sem incerteza, salvo breves passagens, nas quais a incerteza foi geralmente tratada de maneira informal.

A redescoberta mais influente da utilidade foi efetuada no final do século XVIII por *Jeremy Bentham* (1748-1832), sob a égide de sua filosofia utilitarista. O utilitarismo se fundamentava no hedonismo dos gregos antigos: os indivíduos agem de maneira a buscar o máximo possível de felicidade. Sua principal obra foi *The principles of morals and legislation,*[10] publicada em 1789. Segundo Bentham,

> "Por utilidade se entende aquela propriedade de qualquer objeto pela qual ele tende a produzir benefício, vantagem, prazer, bem ou felicidade (tudo isso, no caso presente, vem dar na mesma coisa), ou (o que também é o mesmo) evitar a ocorrência de dano, sofrimento, mal ou infelicidade para aquele cujo interesse está em consideração." (Bentham apud Jevons, 1871 [1996]).

Bentham sintonizava-se com o mecanicismo e reivindicava que sua filosofia era consoante com as relações de causa e efeito.

---

[9] Para uma "linha do tempo" sobre os principais pontos históricos da teoria da decisão sob incerteza, ver o apêndice.

[10] Em português, "Os princípios da moral e da legislação".

> "A natureza colocou a humanidade sob o governo de dois senhores soberanos, a *dor* e o *prazer*. Compete somente a eles apontar o que devemos fazer, assim como determinar o que realmente faremos. De um lado, o padrão de certo ou errado, de outro, a cadeia de causas e efeitos estão ligados a seus tronos. Eles nos governam em tudo o que fazemos, tudo o que dizemos, tudo o que pensamos; cada esforço que pudermos fazer para nos livrarmos desta sujeição servirá apenas para demonstrá-la e confirmá-la. Em outras palavras, um homem pode pretender abjurar seu império, mas a realidade é que permanecerá sujeito a ele todo o tempo. O *princípio de* utilidade reconhece esta sujeição e assume-a para base daquele sistema, cujo objetivo é orientar a fábrica de felicidade pelas mãos da razão e da lei." (Bentham apud Oser, 1983, p.116).

Em *The philosophy of economic science,*[11] Bentham redescobriu o conceito de utilidade marginal decrescente. Segundo ele, apesar da riqueza ser uma medida da felicidade, quanto maior o nível de riqueza, menor a felicidade adicional proporcionada pelo seu aumento.

A forma que Bentham concebeu a natureza humana influenciou fundamentalmente a teoria econômica na segunda metade do século XIX, através dos chamados economistas marginalistas.

Para os marginalistas, os consumidores escolheriam, individualmente, aqueles bens que fornecessem a máxima utilidade possível, dado suas restrições orçamentárias. A utilidade era considerada uma medida cardinal da intensidade dos desejos, prazer ou felicidade. Ao maximizar utilidade, os indivíduos estariam maximizando o prazer ou a felicidade. Segundo *Stanley Jevons,* um dos principais marginalistas, "*maximizar o prazer* é o problema da economia" (Jevons, 1871 [1996], p.69). O julgamento pessoal da utilidade era entendido como a causa das preferências.

Os marginalistas concebiam a função utilidade $U(x_1, x_2,..., x_n)$ como uma mensuração do bem-estar psicológico dos indivíduos, derivado do consumo das quantidades x_i dos bens $i=1,2,...,n$. Seguindo os ensinamentos de Bentham, os marginalistas consideravam que quanto maior a quantidade de cada bem, maior o nível de utilidade, apesar de que com taxas de crescimento decrescentes. Assim, a utilidade marginal era positiva e decrescente.

[11] Em português, "A filosofia da ciência econômica".

Contrariamente a maioria de seus antecessores, os marginalistas confiaram fundamentalmente na matemática como um instrumento no desenvolvimento de teorias econômicas. Os marginalistas eram entusiasmados com a aplicação de métodos das ciências naturais à economia. Conceitos como equilíbrio, momento, função, já bem conhecidos das ciências naturais, passaram a ser utilizados em economia. Através da matemática, construíram uma teoria do valor baseada no conceito de utilidade, que se propunha superar a antiga teoria do valor-trabalho dos economistas clássicos.[12]

Francis Edgeworth foi além e, inspirado no importante papel que as medições têm nas ciências naturais, propôs o desenvolvimento de um "hedonímetro", capaz de medir o nível de utilidade dos indivíduos. Mais do que uma "boa proposta", na verdade, o "hedonímetro" foi motivo de embaraço para os marginalistas e para teoria da utilidade.

As críticas à teoria da utilidade não foram poucas. Não somente o "hedonímetro", mas a própria fundamentação da teoria, às vezes até considerada "mística", foram alvos constantes de contestações. Estas críticas geralmente eram direcionadas à mensurabilidade da utilidade e à suposição hedonista da teoria. Abaixo, sintetizamos estas críticas:

(1) Não está claro como a utilidade pode ser medida. Não está claro se a utilidade pode ser medida. Como se mede prazer, felicidade?

(2) A teoria da utilidade supõe que os indivíduos são maximizadores de prazer ou de felicidade, sendo os melhores juízes de seus próprios atos. Se um indivíduo se defronta com duas opções, digamos, A e B, então a teoria afirma que o indivíduo escolherá a opção que lhe fornecerá mais utilidade, ou seja, a opção que lhe fornecerá maior prazer ou felicidade. Porém, não há nenhuma "lei" ou evidência que mostre que isto seja verdadeiro. Na realidade, os indivíduos não têm a capacidade de, dado qualquer situação, saber qual é o caminho ou opção que trará maior prazer ou felicidade. Digamos que, no nosso exemplo, o indivíduo tenha escolhido B. De fato, B foi escolhido, mas A poderia ter sido a melhor opção. Por outro lado, B pode ter sido realmente a melhor escolha. Mas, na verdade, quem saberia dizer ao certo?

---

[12] Alguns anos mais tarde, Marshall (1890 [1996]) estabeleceu a teoria do valor neoclássica, quando sintetizou as teorias do valor-trabalho e do valor-utilidade, através das curvas de oferta e de demanda.

Estas críticas ocuparam um espaço importante na discussão dos fundamentos econômicos no final do século XIX e início do século XX. Em um primeiro momento, as respostas oferecidas não foram satisfatórias e houve a difusão de um certo ceticismo em relação à teoria da utilidade. Estas críticas foram superadas apenas quando alguns desenvolvimentos posteriores da teoria permitiram uma reinterpretação dos fundamentos da utilidade, retirando o caráter cardinal e hedonista.

A crítica (1) da teoria da utilidade foi abordada por *Vilfredo Pareto*. Pareto era, ele próprio, um insatisfeito com a mensurabilidade da utilidade.

> "Temos admitido que esta coisa chamada *prazer, valor de uso, utilidade econômica, ofelimidade,* era uma quantidade; mas a demonstração não foi dada. Suponhamos feita essa demonstração, como se faria para medir esta quantidade?" (Pareto, 1906 [1996], p.132).

Em 1906, Pareto, a partir das curvas de indiferença desenvolvidas por Edgeworth, concebeu uma nova abordagem da teoria da utilidade em que era desnecessário qualquer tipo de medida cardinal de utilidade. As curvas de indiferença mostravam as possíveis combinações de bens que mantinham o consumidor no mesmo nível de bem-estar. Pareto observou que no momento em que se quantificava o bem-estar associado a cada combinação de bens, a função utilidade atribuía a elas um número cardinal, mas que, fundamentalmente, ordenava as possíveis combinações de consumo. Pareto concluiu que esta ordenação era suficiente para os propósitos da teoria e, portanto, a cardinalidade poderia ser abandonada.

Com a ordinalidade, tudo o que era necessário era um indexador de ordenação que designasse um número para cada cesta de *commodities*. Para a cesta que fornecesse o maior nível de bem-estar, designava-se o número mais alto, para a cesta que fornecesse o segundo maior nível de bem-estar, designava-se o segundo número mais alto, e assim por diante. Portanto, se duas funções utilidades distintas fornecem o mesmo ordenamento, então elas são equivalentes sob o ponto de vista ordinalista.

Além disso, pode-se demonstrar que qualquer transformação monotônica crescente de uma função utilidade não altera o ordenamento das *commodities*. Por outro lado, se duas funções utilidade diferentes indicam o mesmo ordenamento, elas são transformações monotônicas crescentes entre si. Sumarizando as duas proposições, dizemos que uma função utilidade (utilizada como um indexador ordinal) é única sobre (ou, equivalentemente, exceto por) transformações monotônicas crescentes.

Como as diferenças de utilidade deixaram de ter qualquer significado, a abordagem ordinalista abandonou a hipótese de utilidade marginal decrescente. Esta ficou sem sentido – uma função utilidade que apresenta utilidade marginal decrescente pode sofrer uma transformação monotônica crescente de tal forma que passe a apresentar utilidade marginal crescente e, no entanto, a função continuará sendo atribuível ao mesmo indivíduo.

Apesar da abordagem ordinal de Pareto à teoria da utilidade ter sido concebida em 1906, a suposição de utilidade cardinal mensurável dominou a economia neoclássica até a década de 1930, quando a "controvérsia da mensurabilidade" conduziu à ascensão da abordagem ordinalista.

Na década de 1930, *John Hicks* e *R.G.D Allen* apresentaram uma abordagem "operacionalista" da teoria da utilidade que, além de incorporar a ordinalidade proposta por Pareto, permitiu superar a crítica (2). Eles mostraram que a teoria da utilidade poderia ser formulada sem recorrer a uma "psicologia de sensação".[13] Hicks e Allen forneceram os fundamentos da interpretação moderna da teoria da utilidade.

Segundo a interpretação moderna, a utilidade não é a causa das preferências, mas uma descrição das preferências. Os indivíduos não escolhem baseando-se em uma função utilidade; eles simplesmente escolhem o que preferem. Sejam quais forem os processos mentais que os indivíduos utilizem para efetuar suas escolhas, a utilidade é apenas uma indexação matemática para descrever o que eles preferem. Não é o indivíduo que deve se comportar segundo sua função utilidade, mas é a função de utilidade que deve emular o comportamento de escolhas do indivíduo.[14] Prazer, felicidade, bem-estar e satisfação tornaram-se irrelevantes para a abordagem moderna da teoria da utilidade.

---

[13] Cf. Audi (1999).

[14] Ver Lisboa (1997).

As idéias de Hicks e Allen desempenharam um papel importante na história da teoria da utilidade – trouxeram respeitabilidade para a teoria e permitiram uma maior aceitação e difusão entre os teóricos.

Todavia, apesar dos avanços e da ampla discussão da teoria da utilidade, o estudo da tomada de decisão sob condições de incerteza continuou em segundo plano durantes as primeiras décadas do século XX. Aos olhares dos economistas da época, a escolha sob incerteza parecia às vezes algo um tanto enigmático que não se adaptava adequadamente à teoria da utilidade. Esta situação somente se alterou quando, em 1944, John Von Neumann e Oskar Morgenstern desenvolveram uma axiomatização para a teoria da utilidade esperada, revivendo o interesse pela teoria de Bernoulli e pela escolha sob incerteza.

Os axiomas de Von Neumann e Morgenstern, bem como as propriedades da teoria da utilidade esperada, serão os assuntos do próximo capítulo.

2. AXIOMATIZAÇÃO E PROPRIEDADES DA TEORIA DA UTILIDADE ESPERADA

Na década de 1940, a teoria da utilidade esperada já era bicentenária. Às vezes, alguém fazia referência à teoria de Bernoulli, sugerindo que a maximização da utilidade esperada seria um meio adequado de representar as preferências dos indivíduos em condições de incerteza. Porém, a sugestão se encerrava em uma fraqueza: não havia razão para supor que as escolhas dos indivíduos seriam suportadas pela teoria da utilidade esperada. Por que especificamente a utilidade esperada seria a medida relevante para representar a tomada de decisões? Por que não utilizar a variância, a amplitude, a curtose ou outras características de uma função para determinar as preferências?

John Von Neumann e *Oskar Morgenstern*, em sua obra seminal publicada em 1944, *Theory of games and economic behavior*[1], forneceram a "resposta", elaborando as bases axiomáticas para a teoria da utilidade esperada. Eles mostraram que a maximização da utilidade esperada é logicamente equivalente à hipótese de que o comportamento de escolha satisfaz algumas restrições sob a forma de axiomas. Assim, se estes axiomas são satisfeitos, então é possível construir uma função utilidade esperada que represente as preferências de um indivíduo.[2] A relevância deste resultado é que se estes axiomas são plausíveis, então a hipótese da utilidade esperada também é. E, portanto, pode ser aplicada para modelar o comportamento dos tomadores de decisão.

---

[1] Em português, "Teoria dos jogos e comportamento econômico".
[2] A prova consta apenas a partir da segunda edição, publicada em 1947.

A obra de Von Neumann e Morgestern talvez tenha uma importância incomensurável. Ela lançou as bases modernas para a teoria da utilidade esperada e estabeleceu a teoria dos jogos, abrindo dois novos campos de pesquisa entre os economistas.

Assim, John Von Neumann, Oskar Morgenstern e *Theory of games and economic behavior* serão o nosso assunto na seção 2.1. Veremos as idéias que estavam subjacentes a sua obra e a importância que eles atribuíam ao uso da matemática na compreensão de problemas econômicos e decisórios. Veremos também que Von Neumann era um grande conhecedor de física e de ciências naturais em geral – o que permitiu que as páginas de *Theory of games and economic behavior* fossem pródigas em analogias e comparações entre a economia e as ciências naturais.

Na seção 2.2, nos ocuparemos com os elementos da representação da incerteza em termos de loterias, que nos acompanharão pelo resto deste trabalho. Utilizaremos uma notação unificada, que nos permitirá acompanhar os diversos desenvolvimentos da teoria da utilidade esperada sem nos preocupar em reproduzir as diferentes notações utilizadas nas publicações originais.

Na seção 2.3, discutiremos os axiomas propostos por Von Neumann e Morgenstern, bem como suas implicações e significados. Também trataremos do resultado mais importante da teoria da utilidade esperada – o teorema que assegura a existência de uma função utilidade esperada para os tomadores de decisão que satisfaçam estes axiomas.

Analisaremos, na seção 2.4, uma implicação da teoria de Von Neumann e Morgenstern: a representação de preferências através de um indexador cardinal. Veremos que muitos argumentaram que a cardinalidade assumida pela teoria significaria a volta da "psicologia de sensação" e, assim, a "controvérsia da mensurabilidade" foi reaberta. Veremos, também, que a controvérsia finalmente encerrou quando houve um consenso em torno da idéia de que a cardinalidade da EU poderia ser interpretada operacionalmente.

Na seção 2.5, trataremos da representação gráfica e das propriedades da teoria da utilidade esperada. Dentro da análise gráfica, conceberemos uma representação gráfica original para a propriedade da razão comum. O entendimento das propriedades será particularmente importante para o último capítulo, onde analisaremos os paradoxos da EU.

2.1 Von Neumann, Morgenstern e *Theory of games and economic behavior*

John Von Neumann era matemático e sua contribuição à teoria da utilidade esperada representa apenas uma pequena parte de suas realizações em diferentes áreas do conhecimento. Johnny, como era conhecido, escreveu uma importante obra de física matemática na área da mecânica quântica; desempenhou um papel relevante no desenvolvimento da primeira bomba atômica norte-americana; inventou o computador digital e criou a teoria dos jogos; deu contribuições originais nas áreas de lógica matemática, matemática pura, biologia evolucionária, cibernética, turbulência, teoria da guerra e do conflito, vida artificial e teoria da auto-reprodução.[3] Von Neumann era capaz de multiplicar, de cabeça, números de oito dígitos por oito dígitos.[4] Certa vez, o físico laureado com o prêmio nobel, Eugene Wigner, teria dito: "existem dois tipos de pessoas no mundo: Johnny Von Neumann e o resto de nós".[5] O físico Hans Bethe foi mais longe ainda e imaginou se seu cérebro "não indicaria uma espécie superior à do homem".[6]

Oskar Morgenstern era economista e, apesar de que seu treinamento matemático não fosse comparável ao de Von Neumann, era um defensor da aplicação da matemática à economia. Morgenstern persuadiu Von Neumann a colaborar com ele em um artigo e a parceria se estendeu por anos, durante a segunda guerra mundial. O resultado foi *Theory of games and economic behavior* (1944), obra clássica da economia, considerada o marco inicial da teoria dos jogos.

No que se refere à teoria da decisão, a grande contribuição de *Theory of games and economic behavior* foi fornecer uma base axiomática para a teoria da utilidade esperada. A forma matemática utilizada por Von Neumann e Morgenstern era exatamente a mesma que Bernoulli utilizou no século XVIII, porém, eles apresentaram um conjunto de axiomas que fundamentava esta forma matemática.

Theory of games and economic behavior é também um capítulo importante na introdução de métodos matemáticos na economia. Segundo Von Neumann e Morgenstern,

---

[3] Cf. *The history of economic thought website* e Bernstein (1997).
[4] Cf. Bernstein (1997).
[5] Cf. Friedman (1990).
[6] Cf. Simmons (2002).

"não existe nenhuma razão fundamental para que a matemática não deva ser utilizada em economia" (Von Neumann & Morgenstern, 1944 [1980], p.3). Para eles, os argumentos contra o uso da matemática na economia, geralmente baseados em fatores psicológicos, no "elemento humano" ou na "não-mensurabilidade de fatores", seriam completamente equivocados. Eles argumentaram que a física no século XVI, assim como a química e a biologia no século XVIII, foram alvos de considerações semelhantes e que, apesar disso, a matemática acabou se estabelecendo como um importante instrumento de análise nestas áreas.

Efetuando seguidas analogias com a física, eles defenderam a necessidade do desenvolvimento de novos métodos matemáticos para lidar especialmente com os fenômenos econômicos. "A fase decisiva da aplicação da matemática à física – a criação de Newton de uma disciplina racional de mecânica – ocasionou, e dificilmente pode ser separado do descobrimento do cálculo infinitesimal" (Von Neumann & Morgenstern, 1944 [1980], p.5). Eles argumentaram que seriam necessárias descobertas matemáticas à altura do cálculo para produzir sucessos decisivos na área econômica. Porém, isto não impediria que métodos de sucesso na física e em outras ciências fossem aplicados à economia – as necessidades de princípios diferentes seriam reveladas na medida em que a teoria econômica se desenvolvesse.

Von Neumann e Morgenstern foram bastante cautelosos ao discorrer sobre o alcance e generalidade de sua teoria. Deixaram claro que era um primeiro passo na compreensão das decisões e que a idéia era começar pelos problemas mais simples para, futuramente, abordar questões mais complicadas. "O grande progresso em cada ciência vem quando, no estudo dos problemas que são modestos comparados aos objetivos finais, foram desenvolvidos métodos que podem ser estendidos mais e mais" (Von Neumann & Morgenstern, 1944 [1980], p.6).

Von Neumann e Morgenstern não consideraram a utilidade uma medida sensitiva tal como Bernoulli, Bentham e os marginalistas consideraram. Embora tenham utilizado uma argumentação aparentemente ambígua, existe um certo consenso de que eles interpretaram operacionalmente a utilidade, ainda que tenham reintroduzido a cardinalidade na teoria da decisão.[7] Veremos mais adiante que a reintrodução da cardinalidade gerou polêmica e reabriu a "controvérsia da mensurabilidade".

---

[7] Para uma discussão sobre a interpretação da utilidade, subjacente aos axiomas de Von Neumann-Morgenstern, ver Ellsberg (1954), Baumol (1958) e Alchian (1953 [1967]).

Para nossos propósitos, trataremos a axiomatização da EU de Von Neumann e Morgenstern, assim como as propriedades e outras questões referentes à teoria, utilizando uma notação contemporânea da teoria da decisão, preparando os conceitos para as discussões apresentadas ao longo deste e dos próximos capítulos. Assim, antes de entrarmos efetivamente nas contribuições de *Theory of games and economic behavior*, voltaremos nossa atenção para alguns aspectos notacionais quanto à representação da incerteza.

2.2 Representação da incerteza em termos de loterias

O primeiro passo da representação é definir um *conjunto de resultados possíveis* ou *conjunto de prêmios* de uma situação de escolha. Assim, chamaremos este conjunto de X e definiremos $X=[0,M]\subseteq\mathcal{R}$ como um intervalo compacto onde $M>0$.[8] Cada elemento de X pode ser considerado uma quantidade não-negativa de dinheiro até um valor limite M, que é o resultado mais alto possível.[9]

As medidas de probabilidade podem ser representadas por suas funções distribuições acumuladas. Denotaremos por D(X) o conjunto de todas funções distribuições acumuladas sobre X. Formalmente, este conjunto é formado por todas funções contínuas à direita e não-decrescentes $F: X\rightarrow\mathcal{R}$ tal que $F(0)\geq 0$ e $F(M)=1$.[10,11] Cada função $F\in D(X)$ determina uma única medida de probabilidade P em X, através da equação

---

[8] Chama-se de *intervalo compacto* todo o intervalo que seja *limitado* e *fechado*. Um intervalo X é limitado se existem dois números k e K tal que $k\leq x\leq K$ para todo $x\in X$; isto é, um intervalo é limitado se ele é limitado inferiormente e superiormente. Por outro lado, um intervalo é fechado quando ele coincide com sua aderência; isto é, quando ele contém todos os seus pontos de acumulação. Para mais detalhes, ver Ávila (1999) e Lima (1997).

[9] Cf. Puppe (1991).

[10] Uma função F é dita contínua à direita se é contínua à direita em cada ponto de seu domínio. Uma função F é contínua à direita em um ponto *a* de seu domínio se somente se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\text{(i) } F(a) \text{ existe;} \quad \text{(ii) } \lim_{x\to a+} F(x) \text{ existe;} \quad \text{(iii) } \lim_{x\to a+} F(x)=F(a).$$

Dada a forma como a função distribuição acumulada é usualmente definida, ela é necessariamente contínua à direita. Mesmo em pontos descontínuos de F, a propriedade de continuidade à direita deve ser válida. Esta propriedade segue diretamente do axioma de Kolmogorov da *aditividade contável*. Para mais detalhes, ver Spanos (1986) e Spanos (1999).

[11] Uma função distribuição acumulada é necessariamente não-decrescente. Isto é, se $x_1,x_2\in X$ tal que $x_1\leq x_2$, então $F(x_1)\leq F(x_2)$. Para verificar isto, podemos definir os eventos $X_1=\{x\in X\,|\,X\leq x_1\}$ e $X_2=\{x\in X\,|\,X\leq x_2\}$ para $x_1\leq x_2$. Como $x_1\leq x_2$, temos $X_1\subseteq X_2$. Podemos decompor X_2 em dois eventos mutuamente excludentes: $X_2=X_1\cup(X_2\cap\overline{X}_1)$. Como $P(X_2\cap\overline{X}_1)\geq 0$ então $P(X_2)=P(X_1)+P(X_2\cap X_1)\geq P(X_1) \Rightarrow P(X_1)\leq P(X_2)$. Para mais detalhes, ver Meyer (1983).

$$P([0,x])=F(x) \text{ para todo } x\in X.\text{[12]} \qquad (2.1)$$

Assim, se um indivíduo se defronta com uma situação de risco representada pela função distribuição acumulada F, F(x) é a probabilidade de receber uma quantia menor ou igual a x.

O conjunto de todos elementos de $D(X)$ com imagem finita, que correspondem às medidas de probabilidade com suporte finito, é denotado por $D^0(X)$.[13] Se F tem imagem finita, então F tem um conjunto finito de pontos descontínuos $\{x_1,x_2,...x_n\}$ tal que $x_1<x_2<...<x_n$. Assumindo que $F(x_o)=0$, denotaremos o "salto" de F em x_i, i=1,...,n, por p_i.[14] Portanto, $\Sigma_i p_i=1$. Destes "saltos", obtemos uma lista $L=(p_1,..., p_n)$ com $p_i\geq 0$ para todo i onde p_i é a probabilidade do resultado (ou do prêmio) i ocorrer.[15] Chamaremos esta lista de uma *distribuição de probabilidade simples* ou, como mais usualmente denominada no contexto da teoria da decisão, de uma *loteria simples* .[16]

---

[12] Cf. Puppe (1991).

[13] O suporte de p, supp(p), deve ser entendido como um subconjunto de X tal que para cada $x\in \text{supp}(p)$, temos um número p(x)>0 com $\sum_{x\in \text{supp}(p)} p(x)=1$. (Cf. Kreps, 1990). Uma medida de probabilidade p tem suporte finito se existe um conjunto finito $W\subseteq X$ com p(W)=1. (Cf. Schmidt, 1998).

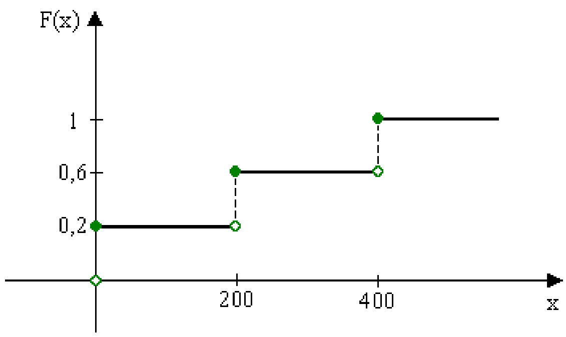
[14] Isto é, assumindo que $F(x_0)=0$, F e p estão relacionados da seguinte maneira: $p_i=F(x_i)-F(x_{i-1})$, i=1,...,n.

[15] Cf. Puppe (1991).

[16] Vejamos um exemplo. Seja a função distribuição acumulada F tal que

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ 0{,}2 & \text{se } 0\leq x<200 \\ 0{,}6 & \text{se } 200\leq x<400 \\ 1 & \text{se } x\geq 400 \end{cases}$$

Esta função está representada no gráfico abaixo. Note que embora esta função não seja contínua, ela é contínua à direita. Note também que ela possui imagem finita.



A partir de cada ponto descontínuo x_i em F, obtemos uma probabilidade p_i associada ao prêmio x_i tal que $p_i=F(x_i)-F(x_0)$. No nosso exemplo, $\{x_1,x_2,x_3\}=\{0, 200, 400\}$ e $\{p_1,p_2,p_3\}=\{0{,}2; 0{,}4; 0{,}4\}$. Portanto, a partir da função F dada, é possível obter uma loteria simples L=(0,2; 0,4; 0,4}, referente aos prêmios 0, 200 e 400.

Para efetuar nossas análises, iremos supor que as preferências são *monotônicas* – ou seja, "mais dinheiro é preferível a menos". Isto é também chamado de *monotonicidade das preferências*. Assim, por exemplo, um tomador de decisão preferirá uma loteria simples que forneça \$15 com probabilidade 1 à outra que forneça \$10 com probabilidade 1.

Quando uma loteria simples tem três resultados possíveis (n=3), podemos representá-la em um *triângulo de Marschak-Machina* ou *diagrama em triângulo* (figura 2.1), ordenando os três resultados possíveis x_1, x_2, x_3 de tal forma que $x_3>x_2>x_1$. Dadas as respectivas probabilidades p_1, p_2, p_3, sabemos que $p_1+p_2+p_3=1$. Portanto, definindo duas probabilidades, a terceira já está completamente definida. No eixo das abscissas, representamos a probabilidade do resultado mais baixo, p_1, e no eixo das ordenadas, a probabilidade do resultado mais alto, p_3. A probabilidade do resultado mediano, dois, é sempre $p_2 = 1 - p_1 - p_3$. [17]

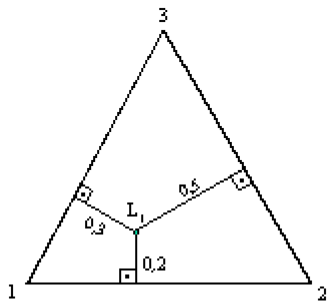
Na figura 2.1, representamos a loteria L=(0,5;0,2;0,3). Se, por exemplo, $\{x_1,x_2,x_3\}$ for igual a {0,50,200}, isto significa que esta loteria fornece um prêmio de \$0 com probabilidade 0,5; um prêmio de \$50 com probabilidade 0,2 e um prêmio de \$200 com probabilidade 0,3. [18]

---

[17] Cf. Machina (1982, 1987).

[18] A representação de loterias através do triângulo de Marschak-Machina não é a única possibilidade disponível na literatura econômica. As loterias podem também ser representadas como um ponto no simplex dimensional (n-1), $\Delta=\{p\in\mathcal{R}_+^n: p_1+...+p_n=1\}$.

Quando os resultados possíveis são três, podemos utilizar um triângulo eqüilátero para representar as loterias. Os triângulos eqüiláteros apresentam uma propriedade muito útil para efetuar a representação: a soma das perpendiculares de qualquer ponto até os três lados do triângulo é igual a altura do triângulo. Assim, estabelecendo um triângulo eqüilátero com altura 1, temos a propriedade geométrica de que a probabilidade p_n do resultado n de uma loteria associada a algum ponto deste simplex é igual ao comprimento desta perpendicular, que inicia no ponto em questão e termina no lado oposto ao vértice n. No triângulo eqüilátero abaixo, representamos a loteria L_1=(0,5; 0,2; 0,3).



Assim, o comprimento da perpendicular que inicia no ponto L_1 e termina no lado oposto ao vértice 1 é a probabilidade do resultado 1. Neste caso, como o comprimento é 0,5, ele indica que a probabilidade do resultado 1 é 0,5. Da mesma forma, o comprimento das outras perpendiculares mostram que a probabilidade do resultado 2 é 0,3 e a probabilidade do resultado 3 é 0,2.

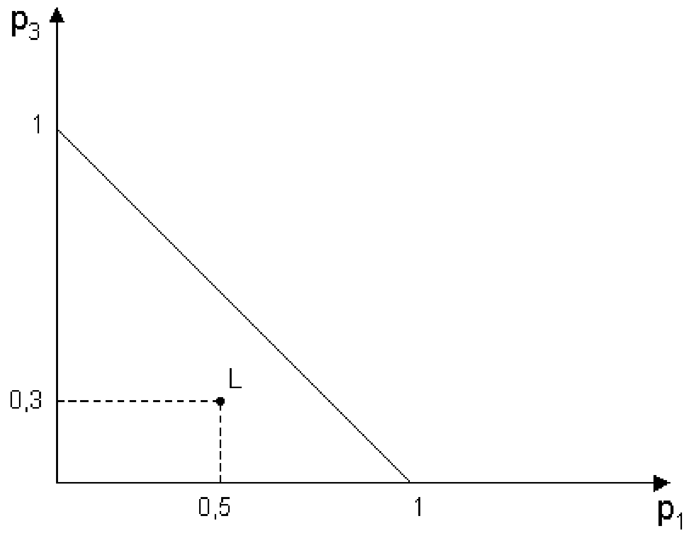


Figura 2.1 – Triângulo de Marschak-Machina

Além da loteria simples, podemos definir a *loteria composta*. Dadas k loterias simples $L_k=(p_1^k,...,p_n^k)$, $k = 1,...,K$ e probabilidades $\alpha_k>0$ com $\Sigma_k\alpha_k = 1$, a loteria composta $(L_1,...,L_K; \alpha_1,...,\alpha_K)$ é a alternativa de risco que fornece a loteria simples L_k com probabilidade α_k para $k=1,..., K$. [19]

Assim, uma loteria composta é uma loteria em que os resultados não são prêmios monetários mas, loterias simples. Vejamos um exemplo. Seja a loteria composta

$L_C=(L_1, L_2;0,5; 0,5)$,

referente às seguintes loterias simples:

$L_1=(0,5; 0,2; 0,3)$
$L_2=(0,1; 0,1; 0,8)$.

Então, a loteria composta L_C é tal que fornece a loteria simples L_1 com probabilidade 0,5 e a loteria simples L_2 com probabilidade 0,5. A loteria composta L_C está representada na figura 2.2.

[19] Cf. Mas-Colell (1995).

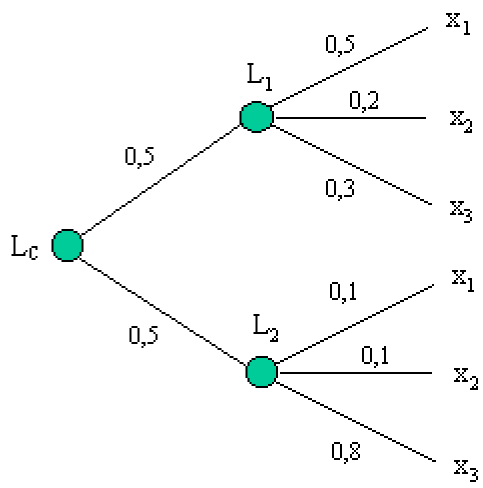


Figura 2.2 – Representação de uma loteria composta

Repare que a probabilidade de obtermos x_1 com esta loteria composta é a probabilidade de x_1 acabar sendo sorteado por meio da loteria L_1, 0,5 x 0,5 = 0,25, mais a probabilidade de x_1 acabar sendo sorteado por meio da loteria simples L_2, 0,5 x 0,1 = 0,05, ou seja, 0,25+0,05, que é igual a 0,3. Da mesma maneira, a probabilidade de obtermos x_2 é 0,5 x 0,2 + 0,5 x 0,1 = 0,15 e a probabilidade de obtermos x_3 é 0,5 x 0,3 + 0,5 x 0,8 = 0,55.

Qualquer loteria composta $(L_1,...,L_K; \alpha_1,...,\alpha_K)$ pode ser reduzida a uma loteria simples $L=(p_1,..., p_n)$ que gere a mesma distribuição sobre os resultados em X. Neste caso, esta loteria simples é chamada de *loteria reduzida*. O valor de cada p_i da loteria reduzida é obtido multiplicando a probabilidade α_k de cada loteria L_k pela probabilidade p_i^k referente ao resultado i da loteria L_k e depois efetuando o somatório sobre k. Isto é,

$$p_i= \alpha_1 p_i^1 + ... + \alpha_1 p_i^K$$

para i=1,...,n. Em notação vetorial, podemos escrever:

$$L=\alpha_1 L_1 + ... + \alpha_K L_K.$$

Ou seja, podemos obter a loteria reduzida L de qualquer loteria composta $(L_1,...,L_K; \alpha_1,...,\alpha_K)$ pela adição dos vetores.[20]

[20] Cf. Mas-Colell (1995).

Na figura 2.3, representamos as loterias simples do exemplo anterior L_1=(0,5; 0,2; 0,3) e L_2=(0,1; 0,1; 0,8). Representamos também, a loteria reduzida $L = 0{,}5\,L_1 + 0{,}5\,L_2$ da loteria composta (L_1,L_2; 0,5, 0,5), que fornece L_1 ou L_2 com probabilidade 0,5 cada. Esta loteria reduzida fica no ponto médio do segmento de linha que une L_1 e L_2. Note que as probabilidades sobre os resultados finais da loteria reduzida são idênticas às que encontramos para a loteria composta. Ou seja, a probabilidade de obtermos determinado resultado com uma loteria reduzida é, por definição, idêntica à probabilidade de obtermos o mesmo resultado com a loteria composta que lhe deu origem.

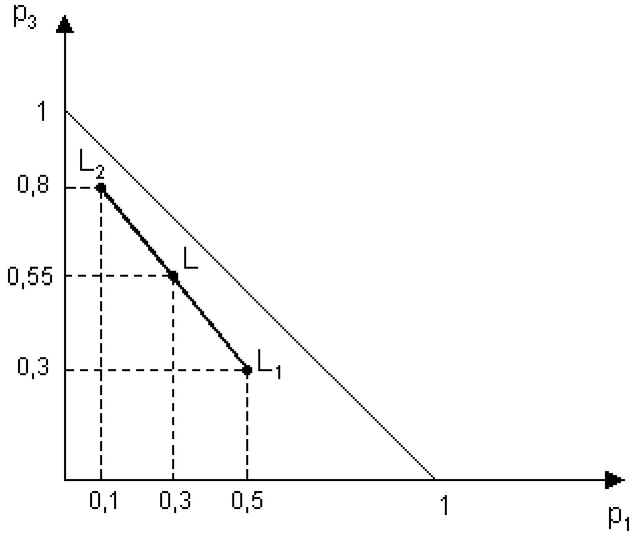


Figura 2.3 – Representação de uma loteria reduzida

2.3 Axiomas de Von Neumann-Morgenstern

Von Neumann e Morgenstern perceberam que era necessário um instrumental teórico capaz de lidar tanto com loterias simples como com loterias compostas. Porém, uma teoria que lidasse diretamente com loterias compostas geraria uma série de complicações que seriam mais difíceis de tratar. Por outro lado, a loteria composta é um conceito importante – uma parte significativa dos fenômenos econômicos do mundo real não correspondem a loterias simples. A solução que Von Neumann e Morgenstern apresentaram, bastante profícua, foi o *axioma do conseqüencialismo*.

Vimos que toda loteria composta pode ser reduzida a uma loteria simples. Porém, a princípio, isto não significa que elas sejam intercambiáveis; isto é, que elas sejam equivalentes para o tomador de decisão. O papel do axioma do conseqüencialismo é exatamente impor a equivalência entre a loteria composta e a sua reduzida. Formalmente, temos:

Axioma do conseqüencialismo. Se L é a loteria reduzida da loteria composta $(L_1,...,L_K;\ \alpha_1,...,\alpha_K)$, então $L \sim (L_1,...,L_K;\ \alpha_1,...,\alpha_K)$.[21]

O axioma do conseqüencialismo afirma que somente a probabilidade sobre os resultados finais é de relevância para o tomador de decisão. Não importa se as loterias são apresentadas em vários estágios ou não (i.e., se são ou não loterias compostas), desde que as probabilidades sobre os resultados finais sejam as mesmas, o tomador de decisão será indiferente entre elas.

Uma questão controversa em relação ao axioma do conseqüencialismo é que ele exclui a possibilidade de alguém obter utilidade com o processo de "sorteio" dos resultados, embora muitos indivíduos apreciem estes processos (corridas de cavalo, bingo, roleta, etc.). Assim, ele é às vezes chamado de axioma "*no fun in gambling*".[22] Von Neumann e Morgenstern deram-se conta deste ponto, mas consideraram que este axioma poderia ser considerado plausível e legítimo "a não ser que fosse utilizado um sistema muito mais refinado de psicologia do que o agora disponível para os propósitos da economia" (Von Neumann e Morgenstern, 1944 [1980], p.28).

A virtude deste axioma é que nos permite evitar a complicação de quantificar a utilidade referente ao processo de "sorteio". Por outro lado, facilita bastante a construção da teoria, já que não precisamos nos preocupar diretamente com as loterias compostas. Como toda loteria composta é redutível a uma loteria simples que, aos olhos do tomador de decisão, são indiferentes entre si, então podemos elaborar uma teoria que trate diretamente apenas das loterias simples; qualquer loteria composta relevante pode ser incluída em sua forma reduzida.

---

[21] Veremos adiante que $\sim$ é uma relação de indiferença. Lemos $L \sim (L_1,...,L_K;\ \alpha_1,...,\alpha_K)$ como "L é indiferente à $(L_1,...,L_K;\ \alpha_1,...,\alpha_K)$". Ou seja, em uma situação em que o tomador de decisão pode escolher entre L e $(L_1,...,L_K;\ \alpha_1,...,\alpha_K)$, ele é indiferente entre as duas opções e poderá escolher qualquer uma das duas.

[22] Cf. Takayama (1994).

Portanto, seguindo o axioma conseqüencialista, assumiremos que somente as loterias reduzidas sobre os resultados finais são de relevância para o tomador de decisão. Note que toda loteria simples é também a reduzida de si mesma. Assim, iremos definir o conjunto de loterias simples e, posteriormente, os outros axiomas serão estabelecidos em relação a este conjunto.

Conjunto de loterias simples $\mathcal{L}$ (ou conjunto das distribuições de probabilidade simples). Definimos o conjunto de alternativas, denotado por $\mathcal{L}$, como o conjunto de todas loterias simples (ou distribuições de probabilidade simples) sobre o conjunto de resultados X. [23]

A partir do conjunto de loterias simples, podemos definir uma relação de preferência. As preferências do tomador de decisão serão formalizadas pela relação binária $\succsim$, subconjunto do produto cartesiano $\mathcal{L}$x$\mathcal{L}$. A relação de preferência $\succsim$ é chamada de *relação de preferência fraca*.[24] Se L$\succsim$L', então lemos "L é fracamente preferível a L' ". A partir de $\succsim$, definiremos duas outras relações:

(a) Relação de preferência estrita $\succ$, definida por

$$L \succ L' \Leftrightarrow L \succsim L' \text{ mas não } L' \succsim L.$$

(b) Relação de indiferença ~, definida por

$$L \sim L' \Leftrightarrow L \succsim L' \text{ e } L' \succsim L.$$

---

[23] Cf. Mas-Colell (1995).

[24] Dados dois conjuntos A e B, o *produto cartesiano* de A por B, denotado por AxB, é o conjunto dos pares ordenados com primeiro elemento em A e segundo elemento em B. Em símbolos, AxB={(x,y)|x∈A e y∈B}. (Cf. Castrucci, 1972). No nosso caso, o produto cartesiano $\mathcal{L}$x$\mathcal{L}$ é o conjunto de todos pares ordenados (L,L') com ambas loterias em $\mathcal{L}$. Assim, em símbolos: $\mathcal{L}$x$\mathcal{L}$ ={(L,L') | L∈$\mathcal{L}$ e L'∈$\mathcal{L}$}.

Chama-se *relação binária* de A em B, qualquer subconjunto do produto cartesiano AxB. No nosso caso, $\succsim$ é o subconjunto do produto cartesiano $\mathcal{L}$x$\mathcal{L}$ composto pelos pares ordenados (L,L') tais que L é fracamente preferível a L'.

Lemos $L \succ L'$ como "L é estritamente preferível a L' " ou simplesmente "L é preferível a L' " e lemos $L \sim L'$ como "L é indiferente a L' ". Note que apesar de termos definido $\succ$ e $\sim$, a relação básica de preferência é $\succsim$. Assim, devemos considerar as relações $\succ$ e $\sim$ apenas como uma representação conveniente; em termos da teoria, as preferências do tomador de decisão são consideradas de fato através de $\succsim$.

Para gerar instrumentos de análise das escolhas dos indivíduos, é necessário impor algum tipo de consistência sobre as suas preferências, de forma que possibilite o tratamento matemático. Von Neumann e Morgenstern impuseram uma consistência através da suposição da racionalidade ou ordenabilidade das preferências.

Relação de preferências $\succsim$ racional ou ordenável. A relação de preferências $\succsim$ em $\mathcal{L}$ é racional ou ordenável se possui as seguintes propriedades:

(1) *Completude:* para todo $L, L' \in \mathcal{L}$, temos $L \succsim L'$ ou $L' \succsim L$.[25]

(2) *Transitividade:* para todo $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, se $L \succsim L'$ e $L' \succsim L''$, então $L \succsim L''$.

A completude implica que o tomador de decisão é capaz de comparar qualquer par de loterias. Implica também que a relação de preferências $\succsim$ é reflexiva, isto é, $L \succsim L$ para todo $L \in \mathcal{L}$.[26]

A transitividade exclui a possibilidade de preferências circulares entre seqüências de pares de escolha, isto é, exclui casos como L é preferível a L', L' é preferível a L" e L" é preferível a L. Em um caso como este, teríamos dificuldade de descobrir qual alternativa seria a escolhida. Para evitar este tipo de problema, é necessário assumir a transitividade.[27]

---

[25] Note que "ou" é um conectivo que não implica exclusividade. Ou seja, se tanto $L \succsim L'$ como $L' \succsim L$ são verdadeiros, então a propriedade de completude se verifica. Neste caso, temos que $L \succsim L'$ e $L' \succsim L \Rightarrow L \sim L'$.

[26] Podemos verificar que toda preferência completa é reflexiva. Seja $L, L' \in \mathcal{L}$ e $L' = L$, suponha que $\succsim$ é completa. Se $\succsim$ é completa, então $L \succsim L'$ ou $L' \succsim L$. Como $L' = L$, então $L \succsim L$. Portanto, $\succsim$ é reflexiva.

[27] Note que falamos em $L \succ L'$, $L' \succ L''$ e $L'' \succ L$. Porém, em termos de nossa teoria, isto equivale à

$L \succsim L'$ mas não $L' \succsim L$ (*)

$L' \succsim L''$ mas não $L'' \succsim L'$ (**)

$L'' \succsim L$ mas não $L \succsim L''$ (***).

Assumindo a transitividade, como $L \succsim L' \succsim L'' \succsim L$, então $L \succsim L''$. Mas isto contradiz (***) e, portanto, o exemplo não satisfaz a transitividade.

A representação das preferências por uma função real requer uma suposição de continuidade. Von Neumann e Morgenstern utilizaram o axioma da continuidade arquimediana.

Axioma da continuidade arquimediana. A relação de preferências $\succsim$ no espaço das loterias simples $\mathcal{L}$ é contínua se para qualquer L, L', L'' $\in \mathcal{L}$ e $L \succsim L' \succsim L''$, existe α, $\beta \in (0,1)$ tal que $\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim L' \succsim \beta L + (1-\beta)L''$. A continuidade implica que pequenas mudanças marginais nas probabilidades não alteram o ordenamento entre as loterias.

Podemos interpretar este axioma da seguinte forma: se L' é preferível a L'' e é dado um L ainda mais preferível, então, por mais que L' seja preferível a L'', o axioma da continuidade (arquimediana) afirma que podemos designar uma chance α para L tão próxima de 1 quanto necessária para que a combinação de L e L'' seja preferível a L'. Analogamente, podemos designar uma chance β para L tão pequena quanto necessária para que L' seja preferível à combinação de L e L''.

Além da racionalidade e da continuidade, a axiomatização de Von Neumann e Morgenstern inclui o axioma da independência, que desempenha um papel central na teoria da utilidade esperada. Curiosamente, Von Neumann e Morgenstern assumiram apenas implicitamente este axioma, sem fazer referência direta a ele.

Axioma da independência. A relação de preferências $\succsim$ no espaço de loterias simples $\mathcal{L}$ satisfaz o axioma da independência se para todo L, L', L'' $\in \mathcal{L}$ e $\alpha \in (0,1)$, temos

$$L \succsim L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha) L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha) L''.$$

O axioma da independência afirma que se um indivíduo considera a loteria L preferível a L', então uma loteria composta que forneça L com probabilidade α e L'' com probabilidade $(1-\alpha)$ é preferível a uma loteria composta que forneça L' com probabilidade α e L'' com probabilidade $(1-\alpha)$. Em outras palavras, se misturarmos a loteria L com uma loteria L'' e a loteria L' com a loteria L'', L'' entrando sempre com a mesma probabilidade, então o ordenamento das duas misturas não depende (é independente) da loteria L''. O ordenamento das duas misturas depende apenas do ordenamento entre L e L'. Se L é fracamente preferível a L', então a mistura de L com L'' é fracamente preferível à mistura de L' com L''.

Quando se trabalha com teoria da decisão sem incerteza, o axioma da independência não é comumente assumido. Isto se explica porque, neste caso, seria uma condição inequivocamente forte, pois poderiam existir relações de complementariedade e substitutibilidade entre dois bens consumidos simultaneamente, que importariam para o ordenamento das preferências.

No caso com incerteza, porém, o axioma da independência tem um apelo normativo, já que os indivíduos nunca terão as loterias L e L'' ao mesmo tempo ou L' e L'' ao mesmo tempo. Assim, não haveria motivo para que a presença de L'' afetasse as preferências entre L e L'. Portanto, o axioma da independência pode ser interpretado como uma "restrição natural que qualquer indivíduo razoável satisfaria".

Uma segunda forma de interpretar o apelo normativo do axioma da independência é utilizando problemas de escolhas dinâmicos atemporais. Vejamos o problema de escolha representado na figura 2.4. (Note que o problema de escolha da figura 2.4 foi desmembrado em dois "caminhos" na figura 2.5.) Digamos que o tomador de decisão expresse $\alpha L' + (1-\alpha) L'' \succ \alpha L + (1-\alpha) L''$. Note que a loteria composta $\alpha L' + (1-\alpha) L''$ representa o caminho B da figura 2.5. Assim, o caminho B é preferível ao caminho A. Em termos da figura 2.4, isto significa que o tomador de decisão originalmente planeja escolher L', caso atinja o nódulo de escolha.[28]

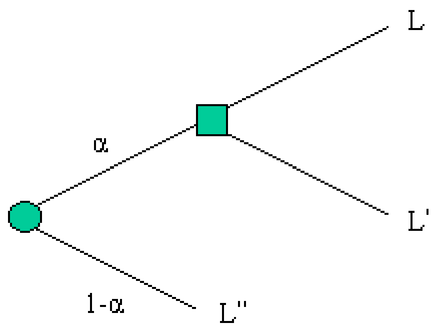
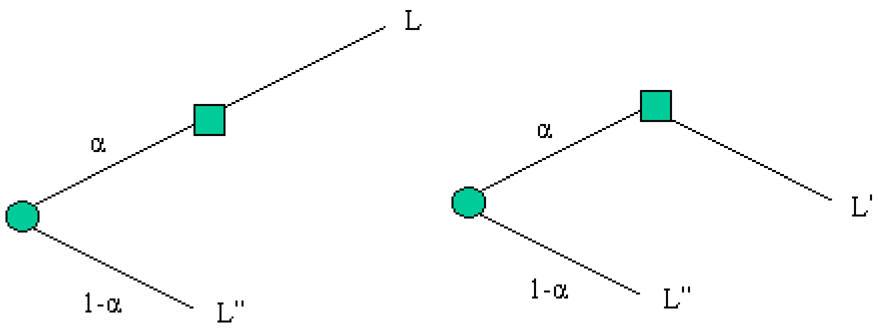


Figura 2.4 – Problema de escolha dinâmico

[28] Como o usual, o quadrado na árvore de escolha representa uma decisão e o círculo descreve a ocorrência de um evento aleatório.

Porém, digamos que quando o tomador de decisão realmente atinja o nódulo de escolha, ele expresse $L \succ L'$ e, assim, acabe se desviando para o caminho A. Neste caso, a opção escolhida foi diferente da opção planejada. Além disso, podemos perceber que o axioma da independência foi violado, pois $\alpha L' + (1-\alpha)L'' \succ \alpha L + (1-\alpha)L'' \Rightarrow L' \succ L$ e, no entanto, ao atingir o nódulo de escolha, o indivíduo expressou $L \succ L'$.



(a) Caminho A (b) Caminho B

Figura 2.5 – Possíveis caminhos no problema de escolha dinâmico

Esta divergência de escolha entre o comportamento planejado e o realmente efetuado é geralmente chamada de inconsistência dinâmica.[29] Portanto, segundo esta interpretação, uma escolha que viole o axioma da independência não é dinamicamente consistente e, portanto, não é justificável em termos normativos.

As duas interpretações dadas sobre o axioma da independência são equivalentes, desde que o princípio do conseqüencialismo seja satisfeito, isto é, se a decisão no nódulo de escolha é independente da história do processo de decisão (que é o que ocorre quando as incertezas já resolvidas são irrelevantes). Se, por acaso, o princípio do conseqüencialismo não é satisfeito, então a segunda interpretação não pode ser utilizada para defender o axioma da independência.

[29] Cf. Schmidt (1998).

Apesar do apelo intuitivo do axioma da independência, veremos no último capítulo que ele é bastante controverso – experimentos controlados têm freqüentemente apontado violações deste axioma.

Experimentos à parte, com o estabelecimento do axioma da independência, completamos a lista dos axiomas necessários e suficientes para a existência de uma representação de preferências através de uma função utilidade com a forma de utilidade esperada. Esta forma, como vimos, foi pioneiramente proposta por Bernoulli no século XVIII. Abaixo, temos a definição formal de forma de utilidade esperada.

Forma de utilidade esperada. Uma função utilidade U: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}$ tem a forma de utilidade esperada $U(L) = \sum_i p_i u(x_i)$ se e somente se é linear nas probabilidades; isto é, se e somente se satisfaz a propriedade

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k) \tag{2.2}$$

para qualquer K loterias $L_k \in \mathcal{L}$, $k = 1, ..., K$ e probabilidades $(\alpha_1,...,\alpha_K) \geq 0$, $\Sigma_k \alpha_k = 1$. Uma função utilidade U: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}$ com a forma de utilidade esperada é chamada de *função utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern* (função utilidade v.N-M). A função utilidade u (sobre as conseqüências) é chamada de *função utilidade de Bernoulli*. [30, 31]

Veremos agora, o resultado mais importante da teoria da decisão sob incerteza, o chamado *teorema da utilidade esperada* ou *teorema de Von Neumann-Morgenstern*. Este teorema afirma que se as preferências são racionais, contínuas e satisfazem o axioma da independência, então elas são representáveis por uma função utilidade com a forma de utilidade esperada.

---

[30] Cf. Mas-Colell (1995).

[31] Anteriormente, fizemos a suposição de que as preferências são monotônicas. Isto equivale a supor que u é estritamente crescente.

Teorema da utilidade esperada (Teorema de Von Neumann-Morgenstern). Se a relação de preferências $\succsim$ é racional e satisfaz os axiomas da continuidade e da independência, então existe uma função utilidade com a forma de utilidade esperada que representa $\succsim$, uma função U: $\mathcal{L} \to \mathcal{R}$ tal que

$$L \succsim L' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} p_i' u(x_i) \qquad (2.3)$$

para qualquer $L = (p_1,..., p_n)$ e $L' = (p_1',..., p_n')$ tal que $L, L' \in \mathcal{L}$.[32] Em outras palavras, $\succsim$ possui uma representação de utilidade esperada. Cada resultado possível tem um nível de utilidade correspondente e o valor de cada loteria simples (ou distribuição de probabilidade simples) é medido pela utilidade esperada que é designada a cada uma.

O teorema da utilidade esperada foi provado por Von Neumann e Morgenstern na segunda edição (1947) de *Theory of games and economic behavior*. Mais tarde, Herstein e Milnor (1953) simplificaram a prova original. Várias variantes do teorema da utilidade esperada foram posteriormente provadas.[33]

---

[32] Cf. Mas-Colell (1995).

[33] Abaixo, apresentamos uma prova do teorema da utilidade esperada, baseada em Gollier (2001):

Digamos que L_1 e L_2 são, respectivamente, a loteria menos preferida e a loteria mais preferida em $\mathcal{L}$, obtidas pela resolução do problema de minimização e maximização de U(L) em $\mathcal{L}$. Assim, para qualquer $L \in \mathcal{L}$, temos $L_2 \succsim L \succsim L_1$. Pelo axioma da continuidade arquimediana, existem escalares $\alpha^a, \alpha^b \in [0,1]$ tais que $L^a \sim \alpha^a L_2 + (1-\alpha^a)L_1$ e $L^b \sim \alpha^b L_2 + (1-\alpha^b)L_1$. Suponha que $\alpha^a \geq \alpha^b$. Note que $L^a \succsim L^b \Leftrightarrow \alpha^a \geq \alpha^b$. Seja $\gamma = \frac{(\alpha^a - \alpha^b)}{1-\alpha^b}$ tal que $\gamma \in [0,1]$, então

$$\begin{aligned}
\alpha^a L_2 + (1-\alpha^a)L_1 &\sim \gamma L_2 + (1-\gamma)\left[\alpha^b L_2 + (1-\alpha^b)L_1\right] \\
&\succsim \gamma\left[\alpha^b L_2 + (1-\alpha^b)L_1\right] + (1-\gamma)\left[\alpha^b L_2 + (1-\alpha^b)L_1\right] \\
&\sim \alpha^b L_2 + (1-\alpha^b)L_1
\end{aligned}$$

Assim, $U(L) = \alpha$, onde α é tal que $L \sim \alpha L_2 + (1-\alpha)L_1$. Logo, $U(L^a) = \alpha^a$ e $U(L^b) = \alpha^b$. Assim, $U(L^a) \geq U(L^b) \Leftrightarrow L^a \succsim L^b$.

Falta ainda provar que $U\left[\beta L^a + (1-\beta)L^b\right] = \beta\alpha^a + (1-\beta)\alpha^b$ ou, equivalentemente, que

$$\beta L^a + (1-\beta)L^b \sim \left[\beta\alpha^a + (1-\beta)\alpha^b\right]L_2 + \left[\beta(1-\alpha^a) + (1-\beta)(1-\alpha^b)\right]L_1 .$$

Utilizando o axioma da independência duas vezes, temos:

$$\begin{aligned}
\beta L^a + (1-\beta)L^b &\sim \beta\left[\alpha^a L_2 + (1-\alpha^a)L_1\right] + (1-\beta)L^b \\
&\sim \beta\left[\alpha^a L_2 + (1-\alpha^a)L_1\right] + (1-\beta)\left[\alpha^b L_2 + (1-\alpha^b)L_1\right] \\
&\sim \left[\beta\alpha^a + (1-\beta)\alpha^b\right]L_2 + \left[\beta(1-\alpha^a) + (1-\beta)(1-\alpha^a)\right]L_1
\end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova.

2.4 Cardinalidade e unicidade da função utilidade v.N-M.

Um aspecto que gerou muita polêmica à cerca da teoria de Von Neumann-Morgenstern é que ela implica em uma representação de preferências através de um indexador cardinal. Esta cardinalidade foi motivo de descontentamento por parte de muitos economistas, que entenderam que significaria a volta da "utilidade sensitiva", já anteriormente banida pelo surgimento da abordagem ordinal-operacionalista. Assim, a "controvérsia da mensurabilidade" foi reaberta; de um lado, estavam aqueles que sustentavam a possibilidade de uma interpretação operacional da cardinalidade; de outro, aqueles que acreditavam que a aceitação do indexador de Von Neumann-Morgenstern requereria fundamentalmente a volta da "psicologia de sensação".

Para compreendermos o caráter cardinal da função utilidade v.N-M, bem como a origem da controvérsia, recorreremos a um exemplo.[34] Suponha três resultados possíveis A,B,C tais que $u(A)>u(B)>u(C)$. Digamos que o problema do tomador de decisão seja escolher entre uma loteria L_1 que forneça B com certeza e uma loteria L_2 que forneça A com probabilidade α e C com probabilidade $1-\alpha$, sendo $\alpha \in (0,1)$. Neste caso, ele preferirá a loteria L_2 se e somente se $U(L_2)>U(L_1)$.

Como $U(L_2)= \alpha u(A) + (1-\alpha)u(C)$ e $U(L_1)= u(B)$, temos que

$$L_2 \succ L_1 \Leftrightarrow \alpha u(A) + (1-\alpha)u(C) > u(B) \qquad (2.4)$$

Reescrevendo $u(B)$ como $\alpha u(B) + (1-\alpha)u(B)$ e rearranjando os termos:

$$L_2 \succ L_1 \Leftrightarrow \alpha[u(A)-u(B)] - (1-\alpha)[u(B)-u(C)] > 0 \qquad (2.5)$$

Assim, observando (2.5), podemos verificar que L_2 será preferível a L_1 se e somente se o "excesso de utilidade" de A sobre B for superior ao "excesso de utilidade" de B sobre C, ambos ponderados pelas probabilidades. Assim, a utilidade é dita "mensurável" e o indexador

---

[34] Este exemplo é adaptado de Ellsberg (1954).

das preferências, a função utilidade com forma de utilidade esperada, é dito um indexador cardinal, pois as diferenças de utilidade têm significado.

Este foi fundamentalmente o ponto que reabriu a “controvérsia da mensurabilidade”. Aqueles que acreditavam que a “utilidade sensitiva” tinha retornado, afirmavam que esta medida de “excesso de utilidade” assumia implicitamente um caráter semelhante à utilidade cardinal dos marginalistas.

Porém, o debate à cerca da mensurabilidade acabou por demonstrar que a cardinalidade da função utilidade v.N-M poderia ser interpretada em termos puramente operacionais. A cardinalidade da função utilidade v.N-M teria a finalidade última apenas de ordenar as preferências sobre as loterias.

Baumol (1958) forneceu um exemplo elucidativo. Suponha que queiramos comprar dois pedaços de tecido que sejam compridos o suficiente para cobrir completamente uma mesa de nossa casa. Gostaríamos de predizer quais dois pedaços de tecidos cobrirão nossa mesa sem precisar testá-los sobre a mesa e, caso seja necessário, voltar à loja para trocá-los. Neste caso, um indexador pode nos ajudar. Se a nossa mesa tem 3 jardas de comprimento, então podemos comprar dois pedaços de tecidos com 1,5 e 2,25 jardas de comprimento, que cobrirão com facilidade a nossa mesa. Como a combinação de tecidos é indexada por 1,5+2,25=3,75, um número maior do que 3, então seu comprimento é maior do que da mesa e, portanto, pode ser utilizada para cobrí-la por completo. O indexador de comprimento foi elaborado de forma que possibilite que as combinações de objetos possam ser ordenadas pela simples soma dos comprimentos individuais dos objetos, sem a necessidade de medir diretamente as combinações. Este indexador é cardinal pois não serve apenas para ordenar os comprimentos de objetos, mas também para ordenar o comprimento das combinações de objetos.

Este mesmo raciocínio pode ser aplicado à função utilidade v.N-M. Queremos atribuir números para os possíveis resultados (através da função utilidade de Bernoulli) de maneira que quando combinados através da função utilidade v.N-M, possamos predizer o comportamento de escolha dos indivíduos sem a necessidade de conhecer toda sua ordenação de preferências em relação às loterias. E, para atribuir números, não é necessário a utilização de nenhum tipo de “psicologia de sensação”.

O que se poderia questionar é se é efetivamente possível atribuir números para os possíveis resultados de forma que a teoria da utilidade esperada nos permita efetuar a predição do comportamento de um indivíduo. Mas isto nós já estabelecemos – se as tomadas de decisão de um indivíduo forem compatíveis com os axiomas da EU, então podemos fazer esta atribuição. Neste caso, basta observar algumas decisões de escolha do indivíduo em relação a loterias, derivar a função utilidade de Bernoulli destas observações e utilizar a função utilidade v.N-M para predizer qualquer escolha do indivíduo em relação a qualquer loteria.

Portanto, a indexação cardinal oferecida pela função utilidade v.N-M é compatível com uma interpretação operacional da utilidade, como no caso sem incerteza. A diferença é que no caso sem incerteza, a função utilidade era um indexador ordinal. Assim, a função utilidade era única sobre transformações monotônicas crescentes. No caso com incerteza, isto não é verdade, transformações monotônicas crescentes podem não preservar a forma de utilidade esperada da função utilidade. Isto acontece porque a forma de utilidade esperada é uma propriedade cardinal de uma função utilidade. Assim, a preservação somente é garantida através de transformações lineares crescentes, uma classe particular das transformações monotônicas crescentes.[35]

---

[35] Abaixo, distingüiremos entre três tipos de indexadores, indicando o tipo de transformação que mantém a indexação inalterada.

Indexador "simples". Este é o tipo mais fraco de indexador, o que expressa menos informação. Ele serve somente para associar elementos de dois conjuntos diferentes. Por exemplo, suponha que temos uma lista de nomes, uma pilha de fotos 3x4 e que nossa tarefa é associar cada foto 3x4 a um nome da lista. Podemos fazer isto designando um número qualquer para cada foto, anotando-o no verso da foto e ao lado do nome correspondente. Os números atribuídos podem ser completamente arbitrários, exceto pelo fato que duas fotos diferentes não podem ter números iguais. Podemos transformar estes números de qualquer maneira que queiramos, desde que observemos esta regra.

Indexador ordinal. Um indexador ordinal expressa mais informação e para ser capaz de transmiti-la deve ser mais circunscrito. Suponha novamente a nossa lista de nomes e a pilha de fotos. Digamos que agora precisamos associar as fotos aos nomes de maneira que as fotos sejam ordenadas em relação ao peso dos indivíduos. Assim, poderíamos atribuir 1 para a foto do indivíduo mais leve, 2 para a foto do segundo indivíduo mais leve e assim por diante. A mesma informação pode ser expressa por qualquer outro conjunto de números que, dado duas fotos, a foto referente ao indivíduo de maior peso seja indexada por um número maior do que a foto referente ao indivíduo de menor peso. De fato, o conjunto de números utilizado como indexador pode ser transformado por qualquer transformação monotônica crescente, que preservará a ordenação das fotos. Assim, dizemos que um indexador ordinal é único sobre transformações monotônicas crescentes.

Indexador cardinal. A "mensuração cardinal" expressa ainda mais informação. Se conhecermos as características de dois itens isolados, o indexador cardinal nos permite predizer o resultado da combinação entre eles. As medidas de peso comumente utilidadas são indexadores cardinais. No nosso exemplo, poderíamos indexar cada foto ao peso (em quilogramas, por exemplo) do indivíduo correspondente. Assim, não apenas estaríamos ordenando as fotos em relação ao peso, como também poderíamos obter o peso conjunto de indivíduos de duas ou mais fotos, bastando somar os pesos. Esta soma poderia ser comparada ao peso dos outros indivíduos, de forma a ordená-los. Dizemos que um indexador cardinal, em geral, é único sobre transformações lineares crescentes. Quando o zero é bem definido, perdemos a liberdade de arbitrar a constante e dizemos que o indexador é único sobre transformações proporcionais. No caso específico do peso, o zero é bem definido e, portanto, um indexador de peso é único sobre transformações proporcionais - p.ex., podemos transformar um indexador de peso de forma que Peso (g)= 1000 Peso (kg). No caso da utilidade, o zero não é bem definido e, portanto, dizemos que o indexador de utilidade é único sobre transformações lineares crescentes.

Sobre indexadores no âmbito da EU, ver Alchian (1953 [1967]), Ellsberg (1954) e Baumol (1958).

Podemos, então, afirmar a seguinte proposição à cerca da unicidade da função utilidade esperada.

Transformações lineares crescentes e unicidade da função utilidade esperada. Suponha que U: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}$ é uma função utilidade esperada v.N-M para a relação de preferências $\succsim$ em $\mathcal{L}$. Então V: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}$ é outra função utilidade esperada v.N-M para $\succsim$ se e somente se existem escalares *a* e *b>0* tal que $V(L) = a + bU(L)$ para todo $L \in \mathcal{L}$. Uma função utilidade esperada v.N-M é única sobre (exceto por) transformações lineares crescentes (positivas). [36]

Ou seja, se efetuarmos uma transformação linear crescente em uma função utilidade v.N-M, ela continuará sendo uma função com forma de utilidade esperada, representando as mesmas preferências. Além disso, se duas funções utilidade v.N-M representam as mesmas preferências, então elas são transformações lineares crescentes entre si. Sumarizando, podemos afirmar que uma função utilidade esperada v.N-M é única sobre transformações lineares crescentes.

Existem duas propriedades particulares das transformações lineares que têm grande importância para a teoria da utilidade esperada: [37]

(a) Se o incremento de uma função utilidade é sempre positivo, ele será sempre positivo também para todas transformações lineares positivas desta função.

(b) Se o incremento de uma função utilidade decresce (cresce) com o aumento dos prêmios, então o incremento das transformações lineares positivas desta função também será decrescente (crescente).

---

[36] Rigorosamente, em termos matemáticos, o que estamos dizendo é que uma função v.N-M é única sobre transformações *afins* positivas. Na literatura sobre teoria da decisão, o termo transformação linear é seguidamente utilizado como sinônimo de transformação afim. Como o termo transformação linear é o mais utilizado, optamos por ele. (Rigorosamente falando, em termos matemáticos, as transformações lineares são um caso particular das transformações afins.)

[37] Cf. Alchian (1953 [1967]).

A propriedade (a) afirma, em termos matemáticos, que o sinal da primeira derivada é invariante a transformações lineares positivas. A propriedade (b) nos diz, em termos matemáticos, que o sinal da segunda derivada é invariante a transformações lineares positivas. A propriedade (a) é compartilhada com a classe mais abrangente das transformações monotônicas crescentes. Porém, a propriedade (b), em geral, não é verdadeira para transformações monotônicas crescentes (exceto para o caso particular de transformações lineares crescentes). Verifiquemos matematicamente estas propriedades. Seja U uma função utilidade v.N-M, V uma transformação linear crescente de U e u uma função utilidade de Bernoulli. Então,

como $U(L)=\sum_i p_i u(x_i)$, temos $\dfrac{\partial U(L)}{\partial x_i} = p_i \dfrac{du(x_i)}{dx_i}$ (2.6)

Por outro lado, $V(L)=a+bU(L)$ implica $\dfrac{\partial V(L)}{\partial x_i} = b\dfrac{\partial U(L)}{\partial u(x_i)}\dfrac{du(x_i)}{dx_i}$.

Assim, $\dfrac{\partial V(L)}{\partial x_i} = bp_i \dfrac{du(x_i)}{dx_i}$ (2.7)

Substituindo o lado esquerdo de (2.6) em (2.7), temos

$$\frac{\partial V(L)}{\partial x_i} = b\frac{\partial U(L)}{\partial x_i} \tag{2.8}$$

Diferenciando novamente, $\dfrac{\partial^2 V(L)}{\partial x_i^2} = b\dfrac{\partial^2 U(L)}{\partial x_i^2}$ (2.9)

Como b>0 então, por (2.8), o sinal da primeira derivada de V em relação ao prêmio x_i é igual ao sinal da primeira derivada de U em relação ao prêmio x_i. De (2.9), podemos observar que o sinal da derivada segunda também é invariante.

A invariância do sinal da derivada primeira tem um papel evidente, que é assegurar que a transformação não altere a ordenação das loterias.

A importância da invariância do sinal da segunda derivada está relacionada com os conceitos de utilidade marginal crescente e decrescente, que, como veremos, desempenham um papel fundamental na teoria da utilidade esperada. [38] Se o sinal da segunda derivada é invariante à determinada transformação, então a utilidade marginal crescente ou decrescente é preservada.

Vimos até aqui que quando uma função utilidade v.N-M é submetida a uma transformação linear crescente, o resultado é outra função utilidade v.N-M que representa as mesmas preferências. Porém, e se a transformação linear crescente for efetuada na função utilidade de Bernoulli, a forma de utilidade esperada da função utilidade v.N-M será preservada? E esta continuará representando as mesmas preferências?

Vamos verificar nossas indagações. Seja U a função utilidade v.N-M referente à função utilidade de Bernoulli u e V referente à função utilidade de Bernoulli v, onde v é uma transformação linear crescente de u. Portanto,

temos $U(L)=\sum_i p_i u(x_i)$ (2.10)

Como $v(x_i) = a + bu(x_i)$ (2.11)

então $V(L)=\sum_i p_i \left[a + bu(x_i)\right] = \sum_i p_i a + \sum_i p_i bu(x_i)$.

Assim, $V(L)=a + b\sum_i p_i u(x_i)$ (2.12)

Substituindo (2.10) em (2.12), temos $V(L)=a + bU(L)$ (2.13)

Portanto, a nova função utilidade V é uma transformação linear crescente de U. Assim, efetuar uma transformação linear crescente sobre a função utilidade de Bernoulli equivale a efetuar uma transformação linear crescente sobre a função utilidade v.N-M. O contrário também é verdadeiro, basta inverter o desenvolvimento acima, partindo de (2.13) e chegando em (2.11). Assim, transformações lineares crescentes sobre a função utilidade v.N-M ou sobre a função utilidade de Bernoulli são fundamentalmente equivalentes.

[38] Vimos que o conceito de utilidade marginal decrescente foi abandonado pela abordagem ordinal da teoria da utilidade, quando se discutia apenas contextos sem incerteza. A axiomatização de Von Neumann-Morgenstern trouxe de volta este conceito, mas para o caso com incerteza. Evidentemente, interpretando-se a teoria da utilidade esperada em termos operacionais, as utilidades marginais crescente e decrescente passam a ter um significado apenas operacional.

Há ainda um aspecto importante que deve ser observado. Dado uma função utilidade com a forma de utilidade esperada (v.N-M) U, vimos que somente transformações lineares crescentes de U podem gerar funções utilidade v.N-M que representem as mesmas preferências. Porém, isto não significa que uma função obtida por uma transformação monotônica crescente qualquer de U, digamos, V, não represente as mesmas preferências que U. Mesmo que a transformação monotônica não seja linear, V representa as mesmas preferências que U. O que acontece é que no caso de uma transformação monotônica crescente não-linear, apesar da ordenação das loterias não ser alterada, a forma de utilidade esperada não é preservada. Vejamos um exemplo. Sejam x_1,x_2 os resultados possíveis, U uma função utilidade v.N-M e u uma função utilidade de Bernoulli, temos

$$U(L) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2)\ .$$

Efetuando uma transformação monotônica crescente não-linear sobre U, digamos, $V(L)=e^{U(L)}$, temos:

$$V(L) = e^{\left[p_1 u(x_1)+p_2 u(x_2)\right]}$$

Note que V não é v.N-M, isto é, não tem a forma de utilidade esperada. Porém, V representa as mesmas preferências que U, pois, dadas duas loterias L_1, $L_2 \in \mathscr{L}$, temos

$$L_1 \succsim L_2 \ \Leftrightarrow\ U(L_1) \geq U(L_2) \ \Leftrightarrow\ e^{U(L_1)} \geq e^{U(L_2)} \ \Leftrightarrow\ V(L_1) \geq V(L_2)$$

Assim, como no caso sem incerteza, uma transformação monotônica crescente qualquer não altera o ordenamento das preferências sobre as loterias. Portanto, os mesmos axiomas que fornecem a base para o uso da função U, também fornecem base para o uso da função V.

O ponto que devemos notar é que se uma relação de preferência $\succsim$ é racional e satisfaz os axiomas da continuidade e da independência, o teorema da utilidade esperada não exclui a possibilidade da existência de uma função utilidade não-v.N-M (isto é, sem a forma de utilidade esperada) que represente $\succsim$. O teorema somente assegura a existência de uma função utilidade com a forma de utilidade esperada que represente $\succsim$. Na verdade, sempre que estes axiomas forem satisfeitos, as preferências serão também representáveis por funções utilidade não-v.N-M. Para obter uma, basta fazer uma transformação monotônica crescente não-linear de uma função utilidade v.N-M que represente $\succsim$.[39]

Isto nos leva diretamente a uma questão. Porque deveríamos preservar a forma de utilidade esperada de uma função utilidade? Poderíamos simplesmente efetuar uma transformação monotônica crescente da função utilidade v.N-M e continuar predizendo as escolhas do indivíduo com a mesma eficácia. Mas por que geralmente não fazemos isto?

Não fazemos isto por praticidade, já que uma função utilidade com forma de utilidade esperada nos disponibiliza uma propriedade conveniente, a propriedade (2.2), que repetimos aqui:

$$U\left(\sum_{k=1}^{K}\alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K}\alpha_k U(L_k)$$

para qualquer K loterias $L_k \in \mathcal{L}$, k=1, ..., K e probabilidades $(\alpha_1,...,\alpha_K) \geq 0$, $\sum_k \alpha_k = 1$.

Com esta propriedade, podemos ordenar rapidamente as loterias compostas, já que a utilidade de uma loteria composta – lado esquerdo de (2.2) – pode ser calculada pela soma das utilidades das loterias simples que a compõem, ponderada pela probabilidade de “sorteio” de cada loteria simples – lado direito de (2.2).[40] Caso não pudéssemos utilizar a propriedade (2.2), teríamos primeiro que reduzir cada loteria composta para depois calcular a utilidade, o que certamente daria mais trabalho. Portanto, preservar a forma de utilidade esperada é uma medida conveniente.

---

[39] Devemos observar, contudo, que uma transformação monotônica crescente não-linear sobre uma função utilidade de Bernoulli não preserva o ordenamento das loterias.

[40] Na verdade, o cálculo se refere à utilidade da loteria reduzida referente à loteria composta; porém, como estamos assumindo o axioma do conseqüencialismo, este cálculo também é aplicável à própria loteria composta. Portanto, a propriedade (2.2) implica fundamentalmente que a utilidade da loteria reduzida de uma loteria composta pode ser obtida pela soma das utilidades das loterias simples que compõem a loteria composta, ponderada pelas probabilidades de cada loteria simples ser sorteada.

2.5 Representação gráfica e propriedades da utilidade esperada

Na seção 2.3, vimos os axiomas que sustentam a teoria da utilidade esperada. Veremos agora, que estes axiomas implicam em algumas propriedades para a função utilidade v.N.M que, evidentemente, têm uma contrapartida no comportamento do tomador de decisão que queremos emular. Se os axiomas da EU são satisfeitos pelo tomador de decisão, seu comportamento de escolha deverá ser particularmente compatível com estas propriedades. Assim, uma discussão à cerca destas propriedades é útil tanto para uma melhor compreensão teórica-matemática dos postulados, bem como para perceber alguns desdobramentos do comportamento dos tomadores de decisão demandado pela teoria.[41]

Discutiremos aqui, quatro importantes propriedades, utilizando a representação gráfica da EU através do triângulo de Marschak-Machina (a representação gráfica será igualmente útil no último capítulo, para a análise dos paradoxos). Tradicionalmente, a representação gráfica da EU é circunscrita às curvas de indiferença e às linhas de iso-valor esperado. Aqui, expandiremos um pouco a análise gráfica, utilizando curvas adicionais.

As quatro propriedades que discutiremos são as seguintes:

(a) Linearidade nas probabilidades
(b) Separabilidade aditiva
(c) Propriedade da razão comum
(d) Propriedade da conseqüência comum

Estas propriedades são tais que a *linearidade nas probabilidades* (a) implica a *separabilidade aditiva* (b), que por sua vez implica a *propriedade da razão comum* (c) e a *propriedade da conseqüência comum* (d), conforme mostra o esquema da figura 2.6.

[41] As principais referências para esta seção são Machina (1987), Schimidt (1998) e Mas-Colell (1995). Porém, estaremos expandindo consideravelmente as análises. Isto é, aproveitaremos as idéias apresentadas nestas referências para desenvolvê-las e obter implicações subjacentes. Assim, estaremos apresentando algumas novidades nesta seção, tais como as curvas de indiferença apresentadas com intercepto (figura 2.7), as linhas de iso-valor esperado (figura 2.9), as “análises-limite” das curvas de indiferença (curvas de indiferença veriticais e horizontais – figuras 2.12 e 2.13), o leque de contração de p_2 (figura 2.14), e a análise gráfica da propriedade da razão comum (figuras 2.15 e 2.16).

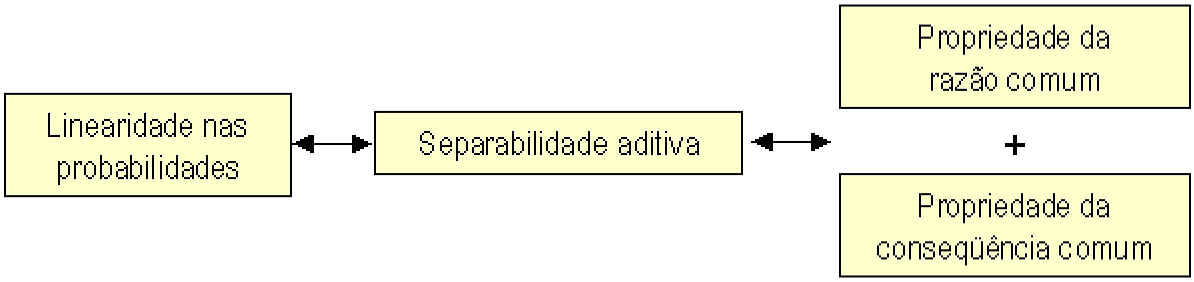


Figura 2.6 – Implicações entre propriedades

2.5.1 Linearidade nas probabilidades

A *linearidade nas probabilidades* é decorrência direta do axioma da independência. Suponha três possíveis resultados x_1,x_2,x_3 tais que $x_3>x_2>x_1$ com probabilidades p_1,p_2,p_3.[42] Como vimos, definindo $p_2=1-p_1-p_3$, podemos representar todas as loterias simples no plano (p_1,p_3). Considerando um nível fixo de utilidade esperada $\bar{U}$, podemos isolar p_3 na função utilidade v.N.M. Assim, obtemos a equação da curva de indiferença referente ao nível de utilidade esperada $\bar{U}$.

$$\bar{U} = p_1u(x_1) + p_2u(x_2) + p_3u(x_3)$$

Como $p_2=1-p_1-p_3$, então

$$\bar{U} = p_1u(x_1) + (1-p_1-p_3)u(x_2) + p_3u(x_3)$$
$$\bar{U} = p_1u(x_1) + u(x_2) - p_1u(x_2) - p_3u(x_2) + p_3u(x_3)$$

Resolvendo para p_3, temos:

$$p_3u(x_2) - p_3u(x_3) = \left[u(x_1) - u(x_2)\right]p_1 + u(x_2) - \bar{U}$$

$$p_3 = \left[\frac{u(x_1)-u(x_2)}{u(x_2)-u(x_3)}\right]p_1 + \frac{u(x_2)-\bar{U}}{u(x_2)-u(x_3)}$$

$$p_3 = \left[\frac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)}\right]p_1 + \frac{\bar{U}-u(x_2)}{u(x_3)-u(x_2)} \qquad (2.14)$$

Como todas utilidades são constantes, a equação (2.14) é linear. A curva de indiferença é tanto mais inclinada quanto maior for o "excesso de utilidade" que o prêmio x_2 fornece em relação ao prêmio x_1 e quanto menor for o "excesso de utilidade" que o prêmio x_3 oferece em

[42] Note que, pela monotonicidade, $x_3>x_2>x_1$ implica $x_3 \succ x_2 \succ x_1 \Rightarrow u(x_3)>u(x_2)>u(x_1)$.

relação a x_2. Seja e_{21} o "excesso de utilidade" de x_2 em relação a x_1, e_{32} o "excesso de utilidade" de x_3 em relação à x_2 e δ o intercepto da curva de indiferença, temos:

$$p_3 = \frac{e_{21}}{e_{32}} p_1 + \delta \qquad (2.15)$$

Fazendo

$$\phi = \frac{e_{21}}{e_{32}}$$

temos

$$p_3 = \phi p_1 + \delta \qquad (2.16)$$

Na figura 2.7, as curvas de indiferença são representadas em um triângulo de Marschak-Machina. Cada curva de indiferença é referente a um nível fixo de utilidade esperada. No ponto A, tanto p_1 com p_3 são iguais a zero e, portanto, p_2=1. Deste modo, U = $p_1u(x_1) + p_2u(x_2) + p_3u(x_3)$ implica $\bar{U}_0=u(x_2)$. As curvas de indiferença referentes a níveis de utilidade esperada abaixo de $\bar{U}_0$ têm interceptos negativos, mas estes interceptos são "virtuais", já que que estão fora do triângulo que demarca a área relevante de análise (as probabilidades atribuídas a p_3 são menores do que zero).

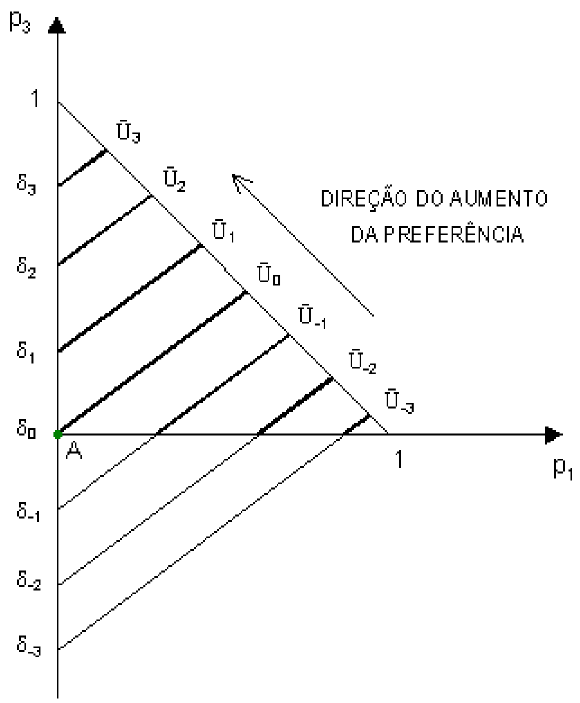


Figura 2.7 – Curvas de indiferença

Note que as curvas de indiferença são linhas retas, devido à linearidade nas probabilidades. A inclinação das curvas de indiferença é positiva e independente do nível de utilidade $\bar{U}$. De fato, todas as curvas de indiferença são paralelas, apresentando o mesmo coeficiente de inclinação ϕ.

O fato das curvas de indiferença serem retas e paralelas é uma implicação do axioma da independência. Pelo axioma, seja $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ e $\alpha \in (0,1)$, então $L \succsim L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha) L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha) L''$. Isto implica que:

$$
\begin{gathered}
[L \succsim L' \text{ e } L' \succsim L \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha) L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha) L'' \text{ e } \alpha L' + (1-\alpha) L'' \succsim \alpha L + (1-\alpha) L''] \\
\Leftrightarrow \\
[L \sim L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha) L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha) L'']
\end{gathered}
\tag{2.17}
$$

Assim, se $L \sim L'$, temos, por exemplo, $\frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L'' \sim \frac{1}{2}L' + \frac{1}{2}L''$. Na figura 2.8, podemos ver que, para satisfazer (2.17), as curvas de indiferença devem ser retas e paralelas. Se permitíssemos qualquer outro formato de curvas de indiferença, teríamos uma violação de (2.17).

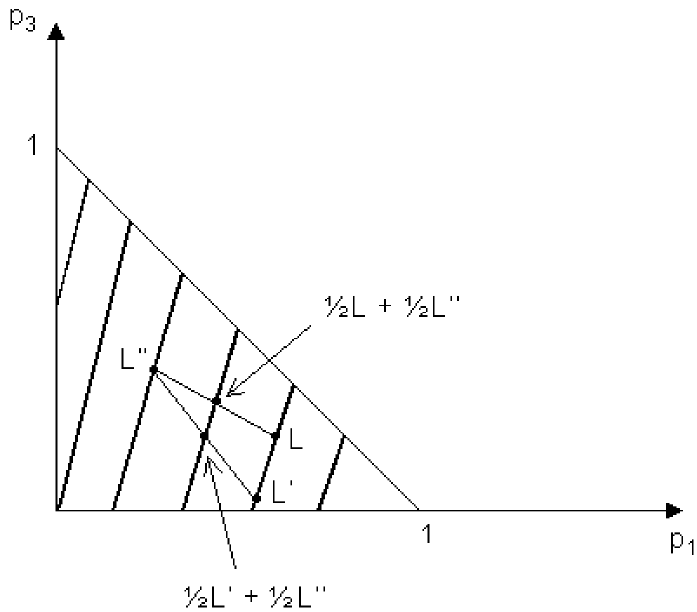


Figura 2.8 – As curvas de indiferença são retas e paralelas

Uma limitação da representação através do diagrama em triângulo é que ele não permite a visualização direta da probabilidade do resultado 2. Porém, um modo prático de trabalhar com esta limitação é utilizar o que chamaremos de *linhas de iso-p_2* (figura 2.9). Sob uma linha de iso-p_2, a probabilidade do prêmio 2 se mantém constante. A linha de iso-p_2 é o lugar geométrico de todas as combinações possíveis de p_1 e p_3 para um dado p_2 fixo.

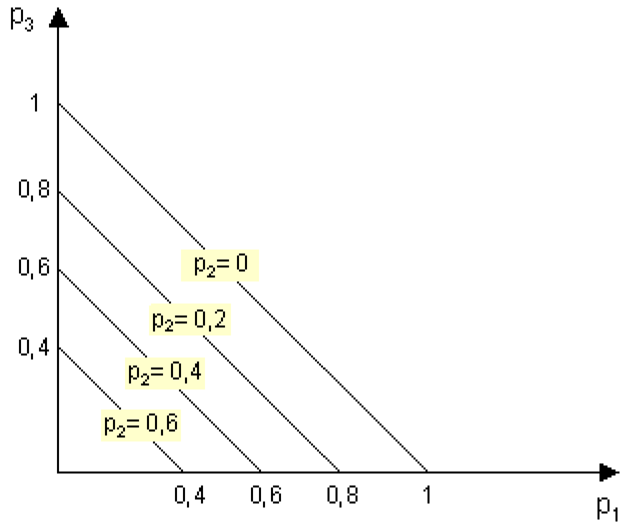


Figura 2.9 – Linhas de iso-p_2

Podemos observar na figura 2.9 que a linha de iso-p_2 referente a $p_2=0$ coincide com a hipotenusa do triângulo. Qualquer loteria sobre esta linha fornece o resultado 2 com probabilidade zero. Note que as linhas de iso-p_2 são combinações convexas entre p_1 e p_3. Assim, por exemplo, sobre a linha referente a $p_2=0,2$, sempre temos $p_1+p_3=0,8$. Na medida em que se deslocamos para a esquerda ou para baixo no espaço cartesiano (p_1,p_3), a probabilidade de p_2 aumenta, como mostra a figura 2.10.

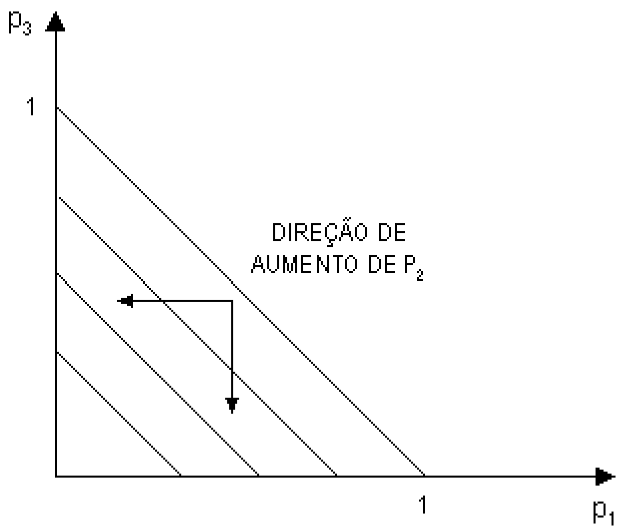


Figura 2.10 – Direção de aumento de p_2

Na figura 2.11, transpomos as curvas de indiferença e as curvas de iso-p_2 para o mesmo triângulo. Esta figura é útil para entendermos por que a preferência aumenta em deslocamentos para a esquerda ou para cima, sintetizados pela flecha que aponta à noroeste. Em qualquer deslocamento vertical superior, p_1 fica constante e p_3 aumenta na mesma magnitude que p_2 diminui. Por exemplo, em um deslocamento do ponto B para o C, a probabilidade p_1 fica constante, a probabilidade p_3 aumenta de 0 para 0,3 e, como mostram as linhas de iso-p_2, a probabilidade p_2 diminui de 0,5 para 0,2. Como x_3 é preferível a x_2, então o aumento da probabilidade p_3 às expensas de p_1 eleva o nível de utilidade esperada.

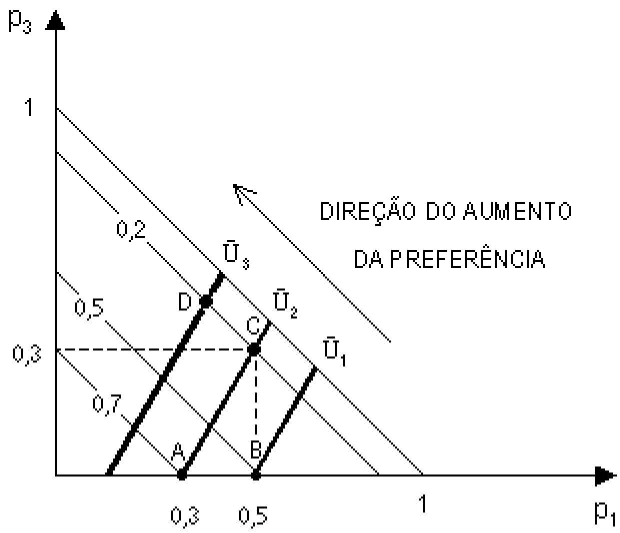


Figura 2.11 – Curvas de indiferença e linhas de iso-p_2

Por outro lado, em qualquer movimento horizontal para a esquerda, p_3 permanece constante e p_2 aumenta às expensas de p_1. Na figura 2.11, este tipo de movimento pode ser exemplificado por um deslocamento do ponto B para o A. Neste caso, p_3 não é alterado, p_1 diminui de 0,5 para 0,3 e p_2 aumenta de 0,5 para 0,7. Como $x_2>x_1$, então o deslocamento horizontal à esquerda conduz a um aumento do nível de utilidade esperada.

Por último, em qualquer movimento à noroeste sobre uma linha de iso-p_2, p_2 permanece constante e p_3 aumenta na mesma medida em que p_1 diminui. Na figura 2.11, podemos utilizar o deslocamento do ponto C para o D como exemplo deste tipo de movimento. Neste caso, p_2 permanece 0,2 enquanto p_3 aumenta na mesma magnitude que p_1 diminui. Como $x_3>x_1$, então este deslocamento eleva o nível de utilidade esperada.

Podemos utilizar a figura 2.11 também para fornecer uma intuição da inclinação positiva das curvas de indiferença. Suponha que, a princípio, estamos de posse de uma loteria representada pelo ponto A. Esta loteria nos fornece o nível de utilidade esperada $\bar{U}_2$. Digamos que queiramos aumentar a probabilidade do resultado 1 sem diminuir o nível de utilidade esperada. Suponha um aumento de p_1, por exemplo, de 0,3 para 0,5. Se não modificássemos p_3, isto faria com que a nossa loteria fosse representada pelo ponto B. Como o aumento de probabilidade do resultado 1 seria totalmente às expensas da diminuição da probabilidade do resultado 2, passaríamos da linha de iso-p_2 0,7 para a linha de iso-p_2 0,5. Porém, o nível de utilidade cairia. Isto ocorreria porque o resultado x_2 é preferível ao x_1.

Portanto, se quisermos nos manter no nível de utilidade esperada anterior, devemos compensar este aumento na probabilidade de x_1 com um aumento na probabilidade de x_3, já que $x_3 \succ x_2 \succ x_1$. Este aumento de p_3 deverá ser efetuado completamente às custas de p_2, pois já estabelecemos p_1=0,5. Com esta compensação, a nossa loteria passa a ser representada pelo ponto C, onde retornamos ao nível de utilidade esperada $\bar{U}_2$. De B para C, a probabilidade de x_3 aumentou de 0 para 0,3 e a probabilidade de x_2 reduziu de 0,5 para 0,2, como indicam as linhas de iso-p_2.

A compensação de um aumento de p_1 com um aumento de p_3 deverá ser tanto maior quanto maior o "excesso de utilidade" $e_{21}=u(x_2)-u(x_1)$ em relação ao "excesso de utilidade" $e_{32}=u(x_3)-u(x_2)$, conforme as equações (2.14) e (2.15).

Assim, se, por acaso, aumentarmos o prêmio 3 ou o prêmio 1 (satisfazendo $x_2>x_1$), a curva de indiferença se tornará menos inclinada pois será necessário um menor aumento da probabilidade p_3 para compensar um aumento de p_1. Por outro lado, se reduzirmos o prêmio 3 (satisfazendo $x_3>x_2$) ou o prêmio 1, a curva de indiferença se tornará mais inclinada. E se alterarmos o prêmio 2, qual será o efeito sobre as curvas de indiferença?

Na medida em que variamos o prêmio 2 de maneira que $x_2 \rightarrow x_3$, temos $u(x_2) \rightarrow u(x_3)$ $\Rightarrow e_{32} \rightarrow 0 \Rightarrow \phi \rightarrow \infty$. No limite, se enfraquecermos nossa condição $x_3>x_2>x_1$ para $x_3 \geq x_2 > x_1$, temos $x_2=x_3$; e, portanto, $u(x_2)=u(x_3) \Rightarrow x_3 \sim x_2$, com curvas de indiferença verticais, como na figura 2.12. Neste caso, qualquer aumento de p_1 às expensas de p_2 conduz a uma redução no nível de utilidade esperada que não pode ser compensado, pois $u(x_3)=u(x_2)$. Qualquer tentativa de compensação com o aumento de p_3 às expensas de p_2, nos manterá sob o mesmo nível mais baixo de utilidade esperada. Neste caso, a única maneira de aumentar a utilidade esperada é diminuindo p_1, ou seja, efetuando um deslocamento para a esquerda, como mostra a flecha de aumento da preferência.

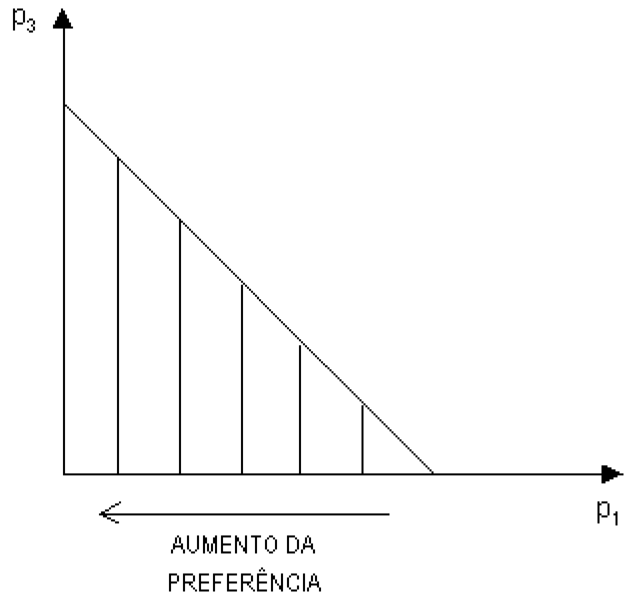


Figura 2.12 – Curvas de indiferença verticais

Por outro lado, na medida em que modificamos o prêmio 2 de maneira que $x_2 \rightarrow x_1$, temos $u(x_2) \rightarrow u(x_1) \Rightarrow e_{21} \rightarrow 0 \Rightarrow \phi \rightarrow 0$. Se enfraquecermos nossa condição $x_3>x_2>x_1$ para $x_3>x_2 \geq x_1$, temos, no limite, $u(x_2)=u(x_1)$ e $x_2 \sim x_1$. Neste caso, temos curvas de indiferença horizontais, como na figura 2.12. Assim, como $x_2 \sim x_1$, qualquer aumento de p_1 às expensas de p_2 não altera o nível de utilidade esperada. Para aumentar o nível de utilidade esperada, é necessário aumentar p_3. Portanto, deslocamentos para cima conduzem ao aumento da preferência, como mostra a figura 2.13.

Note que, devido à linearidade nas probabilidades, as curvas de indiferença das figuras 2.12 e 2.13 são retas e paralelas.

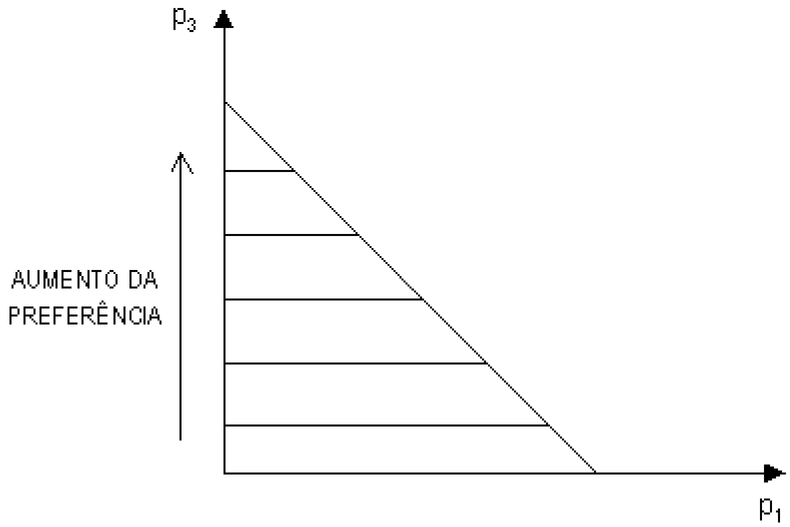


Figura 2.13 – Curvas de indiferença horizontais

2.5.2 Separabilidade aditiva

A propriedade da *separabilidade aditiva* implica que a contribuição de um prêmio e de sua probabilidade para a utilidade esperada da loteria é independente dos outros componentes da loteria. Se um tomador de decisão, por exemplo, se defrontar com a loteria L=(0,1; 0,2; 0,7) referente aos prêmios $\{x_1,x_2,x_3\}=\{1,50,200\}$, então a contribuição do prêmio de $1 com probabilidade 0,1 para a utilidade esperada da loteria L não depende dos prêmios x_2 e x_3, nem de suas respectivas probabilidades. Esta propriedade exclui a possibilidade de "*desapontamento antecipado*".

Vejamos um exemplo em que poderia haver "desapontamento antecipado".[43] Seja $\{x_1,x_2,x_3\}$= {não fazer nada, ler um livro sobre limosines, ganhar uma limosine}, suponha que o tomador de decisão seja um entusiasta por limosines, de maneira que suas preferências sejam $x_3 \succ x_2 \succ x_1$.[44] Ele pode escolher entre duas loterias referentes aos prêmios x_1,x_2,x_3. A primeira loteria é L_1=(0; 0,01; 0,99) e a segunda, L_2=(0,01; 0; 0,99). Ou seja, a primeira loteria fornece "ler um livro sobre limosines" com probabilidade 0,01 e "ganhar uma limosine" com probabilidade 0,99; a segunda, fornece "não fazer nada" com probabilidade 0,01 e "ganhar uma limosine" com probabilidade 0,99. Neste caso, o axioma da independência implica que a loteria L_1 deve ser escolhida. Por quê?

---

[43] Este exemplo é também conhecido como *Paradoxo de Machina* (Cf. Mas-Colell, 1995).

[44] Note que anteriormente definimos o conjunto de resultados X como um intervalo em termos de quantidades monetárias. Excepcionalmente, neste caso, estamos definindo X={não fazer nada, ler um livro sobre limosines, ganhar uma limosine}. Ou seja, neste exemplo, o nosso conjunto de resultados não é definido sobre quantidades monetárias, mas sim sobre conseqüências gerais.

Seja $L_A=(0;1;0)$ e $L_B=(1;0;0)$, temos $L_A \succ L_B$ pois $x_2 \succ x_1$.

Seja $L_C=(0;0;1)$, $L_A \succ L_B$ implica,

pelo axioma da independência, $0{,}01L_A+0{,}99L_C \succ 0{,}01L_B+0{,}99L_C$.

Como $L_1=0{,}01L_A+0{,}99L_C$ e $L_2=0{,}01L_B+0{,}99L_C$, então $L_1 \succ L_2$.

O problema surge devido à possibilidade de o tomador de decisão não ganhar a limosine. Caso isto realmente acontecesse, ele poderia ficar desapontadado – afinal de contas, havia 99% de probabilidade de ganhá-la, e não ganhou. Ler um livro sobre limosines após o desapontamento com a “perda” da limosine, que estava praticamente “certa”, talvez seja algo bastante indesejável, que trouxesse repetida frustração com a “perda”. Assim, o tomador de decisão pode antecipar este possível “desapontamento” e escolher L_2, evitando os possíveis aborrecimentos com a leitura do livro, mesmo que, a princípio, ele preferisse ler o livro a não fazer nada.

2.5.3 Propriedade da razão comum

A *propriedade da razão comum* implica que a preferência entre duas loterias não é afetada se todas as probabilidades em ambas as loterias forem multiplicadas por uma constante $t \in (0,1)$ e a probabilidade remanescente (1-t) for designada para uma conseqüência comum.[45]

Suponha, por exemplo, que temos $L_1=(0{,}2;\ 0;\ 0{,}8)$ e $L_2=(0{,}6;\ 0;\ 0{,}4)$ referentes a x_1,x_2,x_3 quaisquer, de maneira que $x_3>x_2>x_1$ e $L_1 \succ L_2$. A princípio, estas loterias sorteiam apenas entre x_1 e x_3, pois a probabilidade de x_2 é zero. Se as probabilidades forem multiplicadas por t=0,5 e se a probabilidade remanescente (1-0,5)=0,5 for realocada para a conseqüência comum x_2, então teremos $L_{t1}=(0{,}1;\ 0{,}5;\ 0{,}4)$ e $L_{t2}=(0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}2)$. Neste caso, a propriedade da razão comum implica $L_{t1} \succ L_{t2}$. Por quê?

---

[45] Note que, de fato, multiplicando todas as probabilidades por uma constante $t \in (0,1)$, haverá uma probabilidade remanescente de (1-t) para satisfazer a condição de que a soma das probabilidades seja 1. Isto é facilmente verificável – efetuando a multiplicação por t, a probabilidade remanescente é $pr=(p_1-tp_1)+(p_2-tp_2)+...+(p_n-tp_n)$. Isto implica que $pr=p_1(1-t)+p_2(1-t)+...+p_n(1-t) \Rightarrow pr=(1-t)(p_1+p_2+...+p_n)$. Sabemos que $(p_1+p_2+...+p_n)=1$. Assim, pr=(1-t).

Seja $L_1=(0,2; 0; 0,8)$, $L_2=(0,6; 0; 0,4)$, $L_B=(0;1;0)$ e $L_1 \succ L_2$,

então, pelo axioma da independência, temos $0,5L_1+0,5L_B \succ 0,5L_2+0,5L_B$.

Como $L_{t1}=0,5L_1+0,5L_B$ e $L_{t2}=0,5L_2+0,5L_B$, (2.18)

então $L_{t1} \succ L_{t2}$. (2.19)

Vamos agora generalizar a justificativa para a propriedade da razão comum. Seja:

$L_1=(p_1,p_2,...,p_n)$
$L_2=(q_1,q_2,...,q_n)$
$B = (b_1,b_2,...,b_n)$

Digamos que L_1 e L_2 sejam duas loterias quaisquer (com n resultados possíveis) tais que $L_1 \succsim L_2$. Assim, multiplicaremos todas as probabilidades de ambas as loterias por $t \in (0,1)$ e designaremos a probabilidade remanescente para um prêmio $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Suponha que B seja uma loteria degenerada tal que, para i=1,...,n; $b_i=0$ se $i \neq j$, e $b_i=1$ se $i=j$. Pelo axioma da independência, temos:

$$L_1 \succsim L_2 \Leftrightarrow tL_1+(1\text{-}t)B \succsim tL_2+(1\text{-}t)B$$

$$\Leftrightarrow t(p_1,p_2,...,p_n)+(1-t)(b_1,b_2,...,b_n) \succsim t(q_1,q_2,...,q_n)+(1-t)(b_1,b_2,...,b_n)$$

$$\Leftrightarrow \left(tp_1+(1-t)b_1, tp_2+(1-t)b_2,..., tp_n+(1-t)b_n\right) \succsim \left(tq_1+(1-t)b_1, tq_2+(1-t)b_2,..., tq_n+(1-t)b_n\right) \quad (2.20)$$

Note que (2.20) é exatamente a propriedade da razão comum. No lado direito da equação, podemos perceber que todas probabilidades são multiplicadas por t. Além disso, toda probabilidade remanecente é designada para uma única conseqüência comum, pois $b_i=0$ para todo $i \neq j$ e $b_i=1$ apenas para $i=j$. Assim, para todo $i \neq j$, o termo $(1\text{-}t)b_i$ acaba desaparecendo.

Usualmente, a literatura trata a propriedade da razão comum apenas através de exemplos numéricos. Aqui, introduziremos um tratamento gráfico. Para montar a representação gráfica, utilizaremos o *leque de contração de p_2* (figura 2.14). O leque de contração de p_2 é o conjunto de todas as retas que partem da origem e terminam na hipotenusa do triângulo (ou na linha de iso-p_2=0). Chamaremos cada reta do leque de contração de *caminho de contração de p_2*. Cada caminho de contração de p_2 é referente a uma razão $p_3/p_1=k$, sendo $k\in [0, \infty)$. Sobre um caminho de contração de p_2, na medida em que nos afastarmos da origem, a probabilidade de p_2 diminui, mas a razão p_3/p_1 permanece constante.

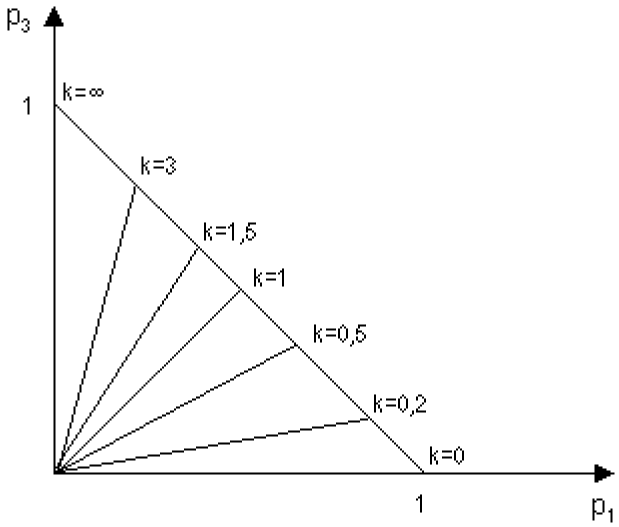


Figura 2.14 – Leque de contração de p_2

Algebricamente, temos:

$$p_3/p_1=k \Rightarrow p_3=k\,p_1 \qquad (2.21)$$

Assim,

$$p_1=p_3/k.$$

Como $p_2=1-p_1-p_3$, temos:

$$p_2=1-(p_3/k)-p_3$$

$$p_2 = 1 - p_3\left(\frac{1}{k} - 1\right)$$

$$p_2 = 1 - p_3\left(\frac{1-k}{k}\right) \qquad (2.22)$$

A equação (2.21) descreve a trajetória de p_3 em relação a p_1. Para cada k estabelecido, temos uma trajetória diferente. A equação (2.22) mostra que na medida em que p_3 aumenta sobre o caminho de contração de p_2, a probabilidade de p_2 diminui. Note que sempre que multiplicarmos todas as probabilidades de uma loteria por uma constante $t \in (0,1)$ e designarmos a probabilidade remanescente (1-t) para o resultado 2, ela permanecerá sob o mesmo caminho de contração de p_2, pois se $p_3/p_1=k$, então tp_3/tp_1 também é igual a k.

Direcionemos nossa atenção para a figura 2.15. Suponha que L_1 e L_3 estão sobre um mesmo caminho de contração $k_1 \in [0, \infty)$. Portanto, a loteria L_3 pode ser obtida a partir de L_1, multiplicando todas as probabilidades de L_1 por uma constante $t \in (0,1)$ e realocando a probabilidade remanescente (1-t) para o resultado 2. Suponha também que L_2 e L_4 estão sobre um mesmo caminho de contração $k_2 \in [0, \infty)$, de modo que $k_2 \neq k_1$. Portanto, igualmente neste caso, a loteria L_4 pode ser obtida a partir de L_2, multiplicando todas as probabilidades de L_2 por uma constante $f \in (0,1)$ e realocando a probabilidade remanescente (1-f) para o resultado 2.

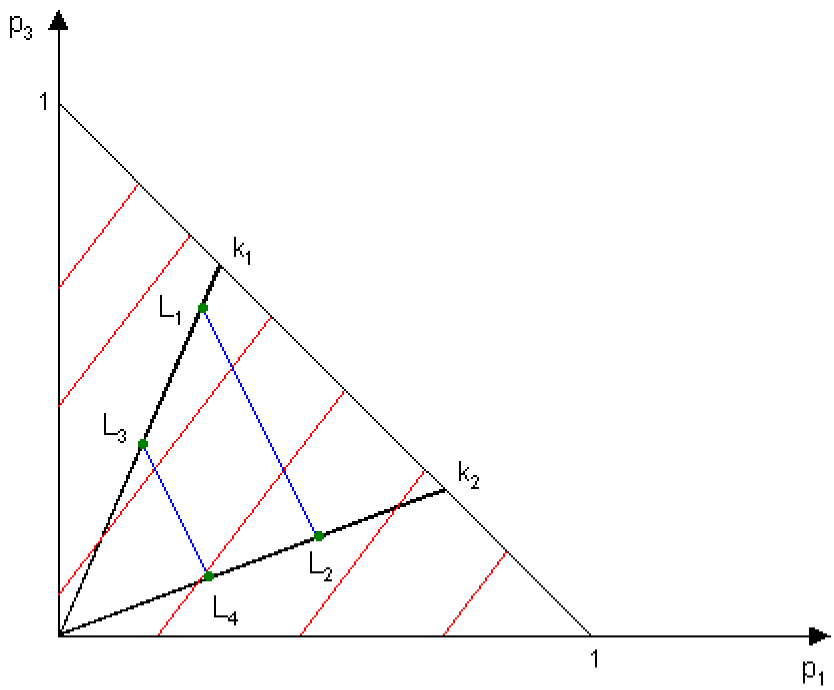


Figura 2.15 – Propriedade da razão comum

Digamos que $L_1 \succ L_2$. Assim, sabemos, pela propriedade da razão comum, que $L_3 \succ L_4$. A contrapartida gráfica da propriedade da razão comum é que se os segmentos L_1L_2 e L_3L_4 são paralelos, então, quaisquer que sejam L_3 e L_4, a ordenação destes será igual a ordenação das loterias que lhe deram origem; isto é, como $L_1 \succ L_2$ então $L_3 \succ L_4$. Note que L_1L_2 e L_3L_4 serem paralelos implica t=f ⇒ (1-t)=(1-f); isto é, o aumento da probabilidade do resultado 2 da loteria L_3 em relação a L_1 é idêntico ao aumento da probabilidade do resultado 2 da loteria L_4 em relação a L_2.[46]

Na figura 2.16, representamos o nosso exemplo numérico anteriormente abordado. Inicialmente temos L_1=(0,2; 0; 0,8) e L_2=(0,6; 0; 0,4) tais que $L_1 \succ L_2$. L_1 está sobre o caminho de contração de p_2 referente a k=4 e L_2 está sobre o caminho referente a k=2/3. Veja que desenhamos as curvas de indiferença de maneira que $L_1 \succ L_2$. A inclinação destas curvas poderia ser outra, desde que satisfazesse as condições estabelecidas pelo problema ($x_3>x_2>x_1$ e $L_1 \succ L_2$).

Assim, podemos ver na figura 2.16 que L_{t1} e L_1 estão sobre o mesmo caminho de contração de p_2, referente a k=4. Da mesma forma, podemos ver que L_{t2} e L_2 estão sobre o mesmo caminho, referente a k=2/3. Alternativamente, poderíamos obter L_{t1} pela combinação convexa de L_1 e L_B e obter L_{t2} pela combinação convexa de L_2 e L_B, como fizemos em (2.18).

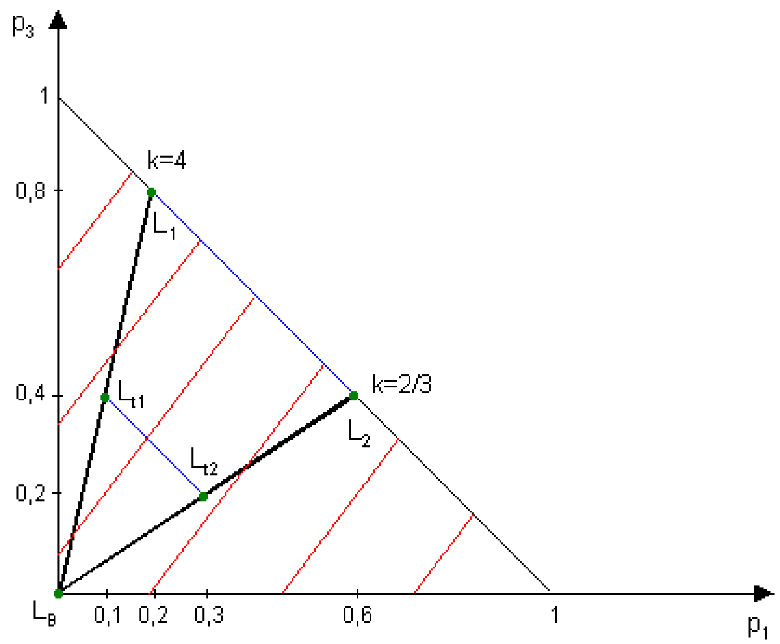


Figura 2.16 – Gráfico de um exemplo numérico da propriedade da razão comum

[46] Veja que a probabilidade p_2 varia proporcionalmente ao longo de um caminho de contração de p_2. (Assim, por exemplo, na metade de um caminho de contração de p_2, a probabilidade p_2 é 0,5.) O fato de L_1L_2 e L_3L_4 serem paralelas revela que o comprimento de L_1L_3 dividido pelo comprimento do caminho de contração k_1 é igual ao comprimento de L_2L_4 dividido pelo comprimento do caminho de contração k_2. Portanto, o aumento da probabilidade p_2 da loteria L_3 em relação a L_1 é igual ao aumento da probabilidade do resultado 2 da loteria L_4 em relação a L_2.

Sabemos, pela propriedade da razão comum, que $L_{t1} \succ L_{t2}$. Mas qual é a contrapartida gráfica da propriedade neste exemplo?

Como podemos observar na figura 2.16, a retas L_1L_2 e $L_{t1}L_{t2}$ são paralelas e, portanto, $L_{t1} \succ L_{t2}$. Isto equivale ao resultado (2.19). Obtivemos L_{t1} e L_{t2} pela multiplicação de L_1 e L_2 por t=0,5. Porém, qualquer que fosse $t \in (0,1)$, a ordenação seria a mesma. Na medida que fizéssemos $t \rightarrow 0$, teríamos $U(L_{t2}) \rightarrow U(L_{t1})$, mas nunca realmente tornariam-se iguais, a menos que permitíssemos que t atingisse o zero. Neste caso, quando t fosse igual a zero, teríamos $L_{t1} \sim L_{t2}$, o que é óbvio, já que toda probabilidade teria sido realocada em ambas as loterias para uma consequência comum e, portanto, teríamos $L_{t1} = L_{t2}$.

2.5.4 Propriedade da conseqüência comum

A *propriedade da conseqüência comum* afirma que, dadas duas loterias com uma conseqüência comum de mesma probabilidade, a substituição desta conseqüência por outra conseqüência comum de mesma probabilidade não influencia a preferência entre as loterias.

Assim, suponha, por exemplo, que temos duas loterias L_1=(4/10, 2/10, 4/10, 0) e L_2=(6/10, 2/10, 2/10, 0) referentes a $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}=\{1,50,200,70\}$ tal que $L_1 \succ L_2$. Então, se substituirmos x_2 por x_4, de maneira que as loterias fiquem L_{01}=(4/10, 0, 4/10, 2/10) e L_{02}=(6/10, 0, 2/10, 2/10), L_{01} deve ser preferível a L_{02}. Por quê?

Seja $L_A = (0,1,0,0)$, $L_{1B} = \left(\frac{5}{10}, 0, \frac{5}{10}, 0\right)$, $L_{2B} = \left(\frac{15}{20}, 0, \frac{5}{20}, 0\right)$,

Como $L_1 = \frac{2}{10}L_A + \frac{8}{10}L_{1B}$, $L_2 = \frac{2}{10}L_A + \frac{8}{10}L_{2B}$ (2.23)

e $L_1 \succ L_2$,

então $\frac{2}{10}L_A + \frac{8}{10}L_{1B} \succ \frac{2}{10}L_A + \frac{8}{10}L_{2B}$. (2.24)

Pelo axioma da independência, $L_{1B} \succ L_{2B}$. (2.25)

Seja L_C=(0,0,0,1), pelo axioma da independência,

$$\frac{2}{10}L_C + \frac{8}{10}L_{1B} \succ \frac{2}{10}L_C + \frac{8}{10}L_{2B} \tag{2.26}$$

Como $\frac{2}{10}L_C + \frac{8}{10}L_{1B} = L_{01}$, $\frac{2}{10}L_C + \frac{8}{10}L_{2B} = L_{02,}$ (2.27)

então $L_{01} \succ L_{02}$. (2.28)

Mostrado um exemplo, cabe agora elaborar uma justificativa geral de que a propriedade da conseqüência comum é uma implicação do axioma da independência.

Seja duas loterias L_1 e L_2 com n resultados possíveis:

$$L_1 = (p_1, p_2, ..., p_n)$$
$$L_2 = (q_1, q_2, ..., q_n)$$

Digamos que:

$$p_j = q_j\,, \quad j \in \{1, 2, ..., n\} \tag{2.29}$$

$$p_k = q_k = 0\,, \quad k \in \{1, 2, ..., n\} \text{ e } k \neq j \tag{2.30}$$

Através de algumas operações algébricas, realocaremos a probabilidade do resultado j para o resultado k em ambas as loterias. Assim, definiremos as seguintes loterias:

$$B = (b_1, b_2, ..., b_n) \quad \text{onde} \quad b_i = \begin{cases} 1 \text{ se } i{=}j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \tag{2.31}$$

$$L_{1B} = (p_{1B}, p_{2B}, ..., p_{nB}) \quad \text{onde} \quad p_{iB} = \begin{cases} \left(\frac{1}{1\text{-}p_j}\right) p_i & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases} \tag{2.32}$$

$$L_{2B} = (q_{1B}, q_{2B}, ..., q_{nB}) \quad \text{onde} \quad q_{iB} = \begin{cases} \left(\frac{1}{1\text{-}p_j}\right) q_i & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases} \tag{2.33}$$

Então,

$$L_1 \equiv (1 - p_j)L_{1B} + p_j B \tag{2.34}$$

$$L_2 \equiv (1-p_j)L_{2B} + p_jB \tag{2.35}$$

Note que a finalidade de $(2.31)-(2.35)$ é desmembrar cada loteria L_1 e L_2 em duas loterias convenientes, para mais adiante, em (2.37), aplicarmos o axioma da independência.[47]

Portanto,

$$L_1 \succsim L_2 \Rightarrow (1\text{-}p_j)L_{1B} + p_jB \succsim (1\text{-}p_j)L_{2B} + p_jB \tag{2.36}$$

Pelo axioma da independência,

$$(1\text{-}p_j)L_{1B} + p_jB \succsim (1\text{-}p_j)L_{2B} + p_jB \Rightarrow L_{1B} \succsim L_{2B} \tag{2.37}$$

Seja uma loteria

$$C = (c_1, c_2, ..., c_n) \quad \text{onde} \quad c_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i{=}k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} \tag{2.38}$$

Digamos que

$$L_{1C} = (1-p_j)L_{1B} + p_jC \tag{2.39}$$

$$L_{2C} = (1-p_j)L_{2B} + p_jC \tag{2.40}$$

---

47 Para entendermos por que (2.34) é de fato uma identidade, digamos que j=3 e n=4 de forma que $L_1 = (p_1, p_2, p_3, p_4)$. Assim,

$$L_1 = (1-p_j)L_{1B} + p_jB \Rightarrow \left(p_1, p_2, p_3, p_4\right) = (1-p_j)\left[\left(\frac{1}{1-p_j}\right)p_1,\ \left(\frac{1}{1-p_j}\right)p_2,\ 0,\ \left(\frac{1}{1-p_j}\right)p_3\right] + p_j(0,0,1,0)$$

$$= (p_1, p_2, 0, p_4) + (0, 0, p_j, 0)$$

$$= (p_1, p_2, p_j, p_4)$$

$$= (p_1, p_2, p_3, p_4), \text{ já que j=3.}$$

Raciocínio análogo pode ser utilizado para a igualdade (2.35).

Então, pelo axioma da independência,

$$L_{1B} \succsim L_{2B} \Rightarrow (1\text{-}p_j)L_{1B} + p_jC \succsim (1\text{-}p_j)L_{2B} + p_jC \Rightarrow L_{1C} \succsim L_{2C}. \tag{2.41}$$

De (2.36), (2.37) e (2.41), temos

$$L_1 \succsim L_2 \Rightarrow L_{1C} \succsim L_{2C} \tag{2.42}$$

Note que (2.42) é a aplicação da propriedade da consequência comum, pois L_{1C} é a loteria L_1 com a probabilidade do resultado j realocada para o resultado k e, de maneira análoga, L_{2C} é a loteria L_2 com a probabilidade do resultado j realocada para o resultado k. Para visualizar este ponto mais facilmente, podemos fazer algumas operações adicionais:

Seja

$$L_{1C} = (p_{1C}, p_{2C}, ..., p_{nC})$$
$$L_{2C} = (q_{1C}, q_{2C}, ..., q_{nC})$$

Assim, por (2.39),

$$(p_{1C,} p_{2C}, ..., p_{nC}) = (1 - p_j)(p_{1B}, p_{2B}, ..., p_{nB}) + p_j(c_1, c_2, ..., c_n) \tag{2.43}$$

$$= \left((1 - p_j)p_{1B}, (1 - p_j)p_{2B}, ..., (1 - p_j)p_{nB}\right) + \left(p_jc_1, p_jc_2, ..., p_jc_n\right) \tag{2.44}$$

$$= \left((1 - p_j)p_{1B} + p_jc_1, (1 - p_j)p_{2B} + p_jc_2, ..., (1 - p_j)p_{nB} + p_jc_n\right) \tag{2.45}$$

Portanto,

$$p_{iC} = (1 - p_j)p_{iB} + p_jc_i \text{ para todo } i \in \{1, 2, ..., n\} \tag{2.46}$$

De (2.32), sabemos que $p_{iB} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{1\text{-}p_j}\right)p_i & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$

De (2.38), sabemos que $c_i = \begin{cases} 1 \text{ se } i{=}k \\ 0 \text{ se } i \neq k \end{cases}$

Portanto,

$$p_{iC} = \begin{cases} 0 & \text{se } i{=}j \\ p_j & \text{se } i{=}k \\ p_i & \text{se } i \neq j,k \end{cases} \tag{2.47}$$

A equação (2.47) é a aplicação da substituição de uma conseqüência comum por outra. Digamos que temos uma loteria $L_1 = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ e que j=2 e k=4. Por (2.30), p_k=0. Assim, $L_1 = (p_1, p_2, p_3, 0)$. Aplicando a transformação indicada por (2.47), obtemos uma loteria $L_{1C} = (p_1, 0, p_3, p_j)$. Como j=2, temos $L_{1C} = (p_1, 0, p_3, p_2)$. O mesmo raciocínio vale para as loterias L_2 e L_{2c}. Desta forma, fica caracterizada a propriedade da conseqüência comum.

Assim, encerramos a análise das propriedades da teoria da utilidade esperada. Neste capítulo, apesar de termos tratado de questões centrais subjacentes à teoria da utilidade esperada, não nos preocupamos ainda com as implicações da EU no âmbito específico das atitudes frente ao risco. Esta será a nossa principal tarefa no próximo capítulo – verificar e analisar os recursos disponibilizados pela EU para trabalhar com as diferentes atitudes frente ao risco; em especial, com a aversão ao risco. Além disso, faremos uma breve incursão na literatura de dominância estocástica, que busca examinar casos em que determinadas loterias possam ser ordenadas sem o conhecimento da função utilidade de Bernoulli u (ainda que efetuando algumas restrições sobre u).

3. COMPORTAMENTO FRENTE AO RISCO

Usualmente, quando tratamos de teorias que envolvam decisões sob o contexto de incerteza, classificamos os tomadores de decisão em três tipos básicos: *avessos ao risco*, *neutros ao risco* e *propensos ao risco*.

Um fato estilizado em relação à tomada de decisões é que a maioria dos indivíduos são avessos ao risco, isto é, quando se defrontam com duas loterias de mesmo valor esperado, eles tendem a preferir a loteria menos arriscada. Aliás, é pela existência de indivíduos avessos ao risco que existe o mercado de seguros. Como os tomadores de decisão avessos ao risco se dispõem a pagar um determinado valor para reduzir ou se livrar de riscos, uma companhia pode aproveitar este fato e oferecer apólices de seguro no mercado.

Vimos no capítulo 1 que a existência de apólices de seguro consistia em uma anomalia para o princípio da expectância matemática, pois este princípio não previa a possibilidade de que um tomador de decisão fosse avesso ao risco. A teoria da utilidade esperada, por outro lado, foi primariamente formulada em termos de aversão ao risco.

Neste aspecto, a EU tem um grande atrativo – ela consegue lidar com o conceito de aversão ao risco de uma maneira ágil e bastante simples, associando-o à concavidade da função utilidade de Bernoulli. Bernoulli, em seu artigo de 1738, prontamente supôs uma função logarítimica côncava, capaz de suavizar a progressão dos *payoffs* estabelecidos pelo Paradoxo de São Petersburgo.

Posteriormente, a EU foi estendida de forma a permitir a representação de uma classe mais ampla de preferências que, além da aversão ao risco, incluísse a neutralidade e a propensão ao risco.

Assim, neste capítulo, analisaremos o instrumental disponibilizado pela EU para tratar da questão do comportamento frente ao risco. Cabe enfatizar que priorizaremos a análise da aversão ao risco, já que comumente é considerada a atitude mais usual entre os tomadores de decisão.

Na seção 3.1, iniciaremos com uma conceituação geral das atitudes frente ao risco, que não depende da teoria particular em que está sendo utilizada. Posteriormente, especificaremos as noções de atitudes frente ao risco para o caso da teoria da utilidade esperada. Verificaremos que diferentes atitudes equivalem a diferentes formatos da função utilidade de Bernoulli e a diferentes representações gráficas no triângulo de Marschak-Machina. Veremos também que sob a suposição de neutralidade ao risco, a EU se reduz ao princípio da expectância matemática (e que, por isto, a teoria da utilidade esperada é uma generalização do princípio da expectância matemática).

Na seção 3.2, partindo da suposição que os indivíduos são avessos ao risco, analisaremos algumas medidas de aversão ao risco. Este é um ponto bastante relevante, já que a aversão ao risco pode se dar em diferentes graus. E este grau de aversão ao risco pode variar tanto entre diferentes indivíduos, quanto entre diferentes níveis de riqueza de um mesmo indivíduo. Assim, responderemos algumas questões do tipo: quando podemos afirmar de forma não-ambígua que um tomador de decisão é mais avesso ao risco do que outro? Quais são as caracterizações de um tomador de decisão que apresenta aversão ao risco decrescente (em relação a variações positivas na riqueza)?

Na seção 3.3, faremos uma introdução à literatura de dominância estocástica, buscando responder a seguinte questão: supondo que as preferências são monotônicas, quando uma loteria pode ser considerada, de forma inequívoca, fracamente preferível à outra, independentemente das funções utilidade dos indivíduos? Esta questão será respondida através do conceito de dominância estocástica em primeira ordem, que, como veremos, é considerado um princípio fundamental de racionalidade.

3.1 Atitudes frente ao risco

Antes de analisarmos as definições de atitudes frente ao risco no contexto da teoria da utilidade esperada, veremos as definições em um contexto geral, que não presumem uma representação de preferências através da EU.[1] Nestas definições, consideraremos E_L uma loteria degenerada que fornece o valor esperado da loteria L com certeza.[2]

Aversão ao risco. Um tomador de decisão é *avesso ao risco* (ou exibe aversão ao risco) se para qualquer $L \in \mathcal{L}$, $E_L \succsim L$. Ou seja, um tomador de decisão é avesso ao risco se, para qualquer loteria L, a loteria degenerada E_L que fornece o mesmo valor esperado que L é fracamente preferível a L. Além disso, dizemos que um tomador de decisão é *estritamente avesso ao risco* se para qualquer $L \in \mathcal{L}$ não-degenerada, temos $E_L \succ L$. Isto é, um indivíduo é estritamente avesso ao risco se, para qualquer loteria L não-degenerada, a loteria degenerada E_L que fornece o mesmo valor esperado que L é estritamente preferível a L.

Neutralidade ao risco. Um tomador de decisão é *neutro ao risco* (ou exibe neutralidade ao risco) se para qualquer $L \in \mathcal{L}$, $E_L \sim L$. Ou seja, um tomador de decisão é neutro ao risco se, para qualquer loteria L, a loteria degenerada E_L que fornece o mesmo valor esperado que L é indiferente a L.

Propensão ao risco. Um tomador de decisão é *propenso ao risco* (ou exibe propensão ao risco) se para qualquer $L \in \mathcal{L}$, $L \succsim E_L$. Ou seja, um tomador de decisão é propenso ao risco se qualquer loteria L é fracamente preferível a uma loteria degenerada E_L que fornece o mesmo valor esperado que L. Além disso, dizemos que um tomador de decisão é *estritamente propenso ao risco* se para qualquer $L \in \mathcal{L}$ não-degenerada, temos $L \succ E_L$. Isto é, um indivíduo é estritamente propenso ao risco se qualquer loteria L não-degenerada é estritamente preferível à loteria degenerada E_L que fornece o mesmo valor esperado que L.

---

[1] Na seção 3.1 (incluindo os itens 3.1.1 e 3.1.2), trabalharemos com conceitos e análises usualmente tratados em manuais de microeconomia como Mas-Colell (1995) e Varian (1992), e em referências específicas de teoria da decisão como Machina (1987). Porém, especialmente no item 3.1.2, aproveitaremos as idéias contidas nestas publicações para abrirmos as análises com mais detalhes.

[2] Uma loteria é degenerada quando atribui probabilidade 1 para algum prêmio e 0 para os outros. Por exemplo, a loteria D=(0,1,0,0) é uma loteria degenerada.

Note que todo tomador de decisão estritamente avesso ao risco é também avesso ao risco e que todo tomador de decisão estritamente propenso ao risco é também propenso ao risco. Além disso, observe que todo indivíduo neutro ao risco é também, ao mesmo tempo, avesso e propenso ao risco. Ou seja,

Aversão ao risco estrita $\Rightarrow$ Aversão ao risco (3.1)

Propensão ao risco estrita $\Rightarrow$ Propensão ao risco (3.2)

Neutralidade ao risco $\Leftrightarrow$ Aversão ao risco e propensão ao risco (3.3)

Porém, note que o contrário de (3.1) e de (3.2) não é necessariamente verdadeiro. Quando um indivíduo é neutro ao risco, apesar de ser também avesso e propenso ao risco, ele não é estritamente avesso ou estritamente propenso ao risco.

Vejamos um exemplo para aplicar as definições de atitudes frente ao risco. Suponha que um tomador de decisão se defronte com as seguintes loterias, referentes a $\{x_1,x_2,x_3\}=\{0,40,100\}$:

$L_1=(0{,}6; 0; 0{,}4)$ $\quad E(L_1)=40$

$E_{L1}=(0; 1; 0)$ $\quad E(E_{L1})=40$

Note que L_1 é uma loteria não-degenerada e que E_{L1} é uma loteria degenerada que fornece com certeza o valor esperado de L_1. Assim, ambas loterias apresentam o mesmo valor esperado, mas L_1 é mais arriscada. Neste caso, conhecendo apenas a atitude do indivíduo frente ao risco, já podemos obter a sua ordenação. Assim, se o tomador de decisão é:

Estritamente avesso ao risco $\Rightarrow E_{L1} \succ L_1$ (3.4)

Avesso ao risco $\Rightarrow E_{L1} \succsim L_1$ (3.5)

Neutro ao risco $\Rightarrow E_{L1} \sim L_1$ (3.6)

Propenso ao risco $\Rightarrow L_1 \succsim E_{L1}$ (3.7)

Estritamente propenso ao risco $\Rightarrow L_1 \succ E_{L1}$ (3.8)

Sabemos que se o indivíduo for neutro ao risco, ele também é avesso e propenso ao risco. Como $E_{L1} \sim L_1 \Leftrightarrow (E_{L1} \succsim L_1$ e $L_1 \succsim E_{L1})$, então (3.5), (3.6) e (3.7) são compatíveis com (3.3). Se o indivíduo for estritamente avesso ao risco, ele é também avesso ao risco. Como $E_{L1} \succ L_1 \Leftrightarrow E_{L1} \succsim L_1$ mas não $L_1 \succsim E_{L1}$, então (3.4) e (3.5) são compatíveis com (3.1). Utilizando raciocínio análogo, podemos concluir que (3.7) e (3.8) são compatíveis com (3.2).

3.1.1 Função utilidade de Bernoulli e atitudes frente ao risco

No contexto da teoria da utilidade esperada, a aversão ao risco é uma propriedade estabelecida a partir da função utilidade de Bernoulli. Segue direto da definição de aversão ao risco que um tomador de decisão é avesso ao risco se e somente se

$$E\left[u(\tilde{x})\right] \leq u\left[E(\tilde{x})\right] \tag{3.9}$$

A desigualdade (3.9) é chamada de *desigualdade de Jensen*.[3,4] Ela nos informa que se o tomador de decisão é avesso ao risco, então a utilidade esperada de uma loteria é menor ou igual à utilidade do valor esperado da loteria.

Se a desigualdade de Jensen é satisfeita, então, pela própria definição de concavidade, a função utilidade de Bernoulli é côncava. Portanto, sob a teoria da utilidade esperada, a aversão ao risco equivale à concavidade da função utilidade de Bernoulli. Na figura 3.1, representamos uma função utilidade (estritamente) côncava, referente a um indivíduo (estritamente) avesso ao risco.

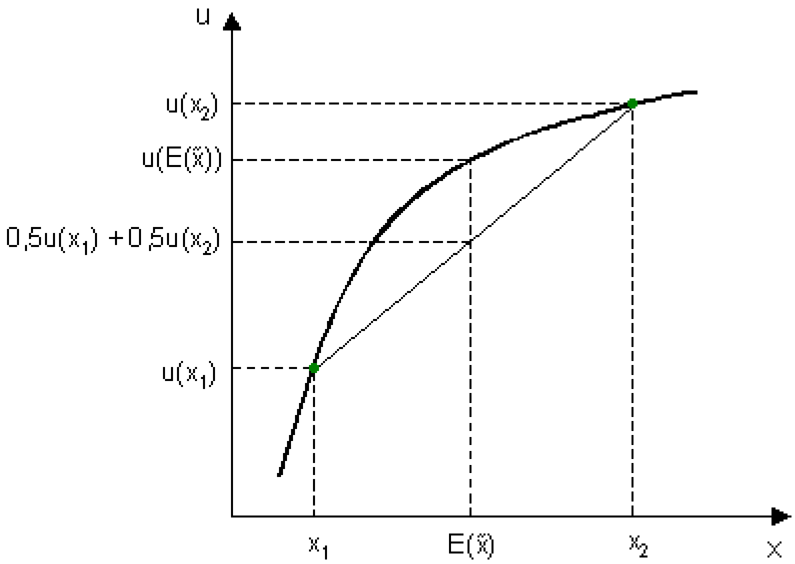


Figura 3.1 – Aversão ao risco (estrita)

[3] A partir de agora, toda variável com um til em cima, tal como $\tilde{x}$, é uma variável aleatória. Podemos pensar $\tilde{x}$ como uma variável aleatória distribuida de acordo com alguma loteria simples L.

[4] Note que $E\left[u(\tilde{x})\right]$ equivale à função utilidade esperada de von Neumann-Morgenstern.

Se este indivíduo se defrontar com a loteria $L=(0,5;0,5)$ referente a x_1,x_2 quaisquer, então a utilidade do valor esperado, $u[E(L)]$ ou $u[E(\tilde{x})]$, é superior a utilidade esperada da loteria $U(L)=0,5u(x_1)+0,5u(x_2)$ ou $E[u(\tilde{x})]$.

Em termos intuitivos, o elemento crucial na EU que dá origem ao comportamento de aversão ao risco é a utilidade marginal decrescente. Se a função utilidade é tal que os acréscimos de utilidade caem sistematicamente à medida que x aumenta, então ela representa as preferências de um tomador de decisão (estritamente) avesso ao risco.

Por outro lado, a propensão ao risco equivale à convexidade da função utilidade de Bernoulli. Na figura 3.2, temos uma função utilidade (estritamente) convexa que representa as preferências de um tomador de decisão (estritamente) propenso ao risco.

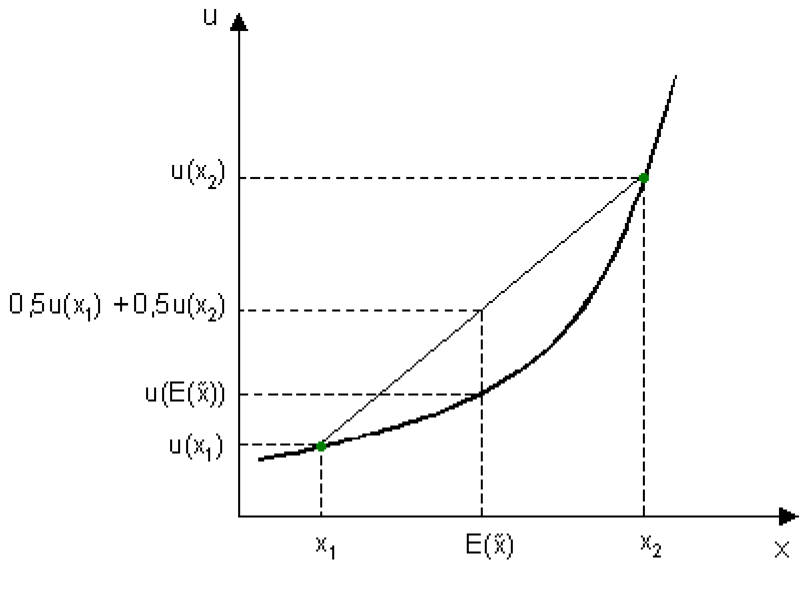


Figura 3.2 – Propensão ao risco (estrita)

Neste caso, a utilidade do valor esperado da loteria é inferior a utilidade esperada da loteria. Portanto, quando um indivíduo descrito pela figura 3.2 se defronta com duas loterias de mesmo valor esperado, ele prefere a loteria mais arriscada.

Digamos que $L=(0,5;0,5)$, $x_1=0$ e $x_2=4.000.000$, de maneira que $E(\tilde{x})=2.000.000$. Por que alguém abriria mão de ganhar \$2.000.000 para participar de uma loteria em que há a possibilidade de ganhar \$4.000.000 com probabilidade 0,5 e de não ganhar nada com probabilidade \$0?

Uma possível explicação é que alguém poderia valorizar tanto os \$4.000.000 em relação aos \$2.000.000, que se disporia a incorrer no risco para tentar os \$4.000.000. Porém, na verdade, não precisamos estabelecer este tipo de justificação. Podemos interpretar o fato de maneira puramente operacional – seja qual for a razão que leve o indivíduo a incorrer no risco, o que importa é que ele *prefere* incorrer no risco e, portanto, precisamos de uma função utilidade capaz de representar esta sua propensão a incorrer no risco. A característica requerida é exatamente a convexidade estrita. Assim, neste caso, a utilidade marginal é crescente.

Finalmente, se um indivíduo for neutro ao risco, a sua função utilidade de Bernoulli é tanto convexa quanto côncava e, portanto, linear, como mostra a figura 3.3. Neste caso, o indivíduo é indiferente entre a loteria L=(0,5;0,5) referente a x_1,x_2 e a loteria que fornece o valor esperado de L com certeza. Podemos ver na figura 3.3, que o nível de utilidade da loteria L=(0,5; 0,5) é igual ao nível de utilidade do valor esperado $E(\tilde{x})$.

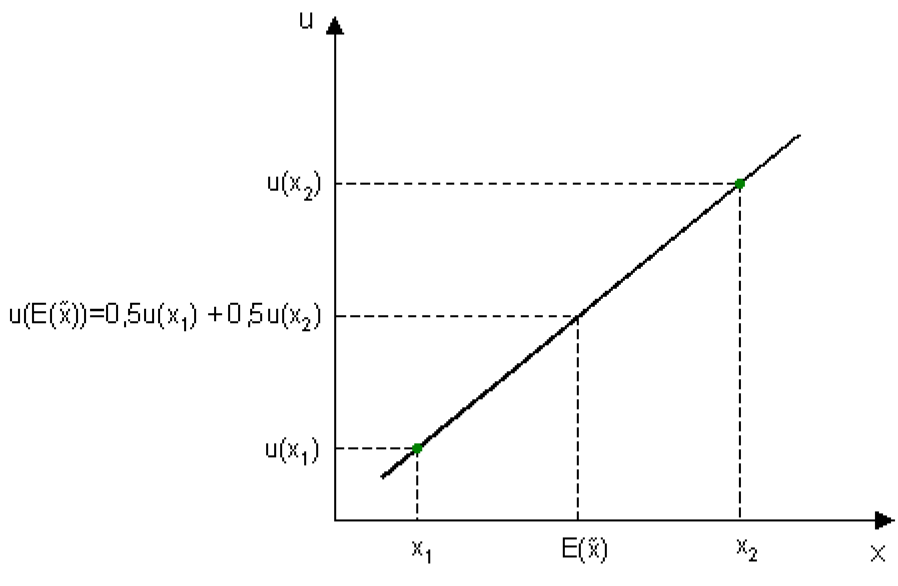


Figura 3.3 – Neutralidade ao risco

Assim, podemos sumarizar a relação entre as atitudes frente ao risco e o formato das funções utilidade de Bernoulli do seguinte modo:

Aversão ao risco $\Leftrightarrow$ $u''(x) \leq 0 \ \forall x$ (utilidade marginal decrescente) $\Leftrightarrow$ Função u convexa

Neutralidade ao risco $\Leftrightarrow$ $u''(x) = 0 \ \forall x$ (utilidade marginal constante) $\Leftrightarrow$ Função u linear

Propensão ao risco $\Leftrightarrow$ $u''(x) \geq 0 \ \forall x$ (utilidade marginal crescente) $\Leftrightarrow$ Função u côncava

Quando u''(x) < 0 para todo x, o indivíduo é estritamente avesso ao risco. Porém, devemos enfatizar que aversão estrita ao risco não implica necessariamente u''(x)<0 para todo x. Isto ocorre porque a aversão estrita ao risco implica em uma função u estritamente côncava e uma função estritamente côncava pode apresentar u''(x)=0 em algum x.

Quando u''(x)>0 para todo x, o indivíduo é estritamente propenso ao risco. Porém, de maneira similar ao caso anterior, a aversão estrita ao risco não implica necessariamente u''(x)>0 para todo x. A propensão estrita ao risco implica em uma função utilidade de Bernoulli estritamente convexa que, por sua vez, pode apresentar u''(x)=0 em algum x.

3.1.2 Curvas de indiferença e atitudes frente ao risco

Uma forma bastante útil de representar as atitudes frente ao risco é através das curvas de indiferença. Para efetuar esta representação, definiremos as *linhas de iso-valor esperado*. Depois, analisaremos as atitudes frente ao risco no triângulo de Marschak-Machina através da comparação entre as linhas de iso-valor esperado e as curvas de indiferença.

Uma linha de iso-valor esperado é um lugar geométrico de todos os pontos referentes a um determinado nível de valor esperado. Ou seja, todos os pontos sobre uma mesma linha de iso-valor esperado apresentam a mesmo valor esperado. Algebricamente, temos:

$$\begin{aligned} E(L) &= p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \\ &= p_1x_1 + (1 - p_1 - p_3)x_2 + p_3x_3 \\ &= x_2 + p_1(x_1 - x_2) + p_3(x_3 - x_2) \\ &= x_2 - p_1(x_2 - x_1) + p_3(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

Fixando o valor esperado em um nível específico, isto é, E(L) = $\bar{E}$, temos:

$$\bar{E} = x_2 - p_1(x_2 - x_1) + p_3(x_3 - x_2)$$

$$p_3 = \left[\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}\right] p_1 + \frac{\bar{E} - x_2}{x_3 - x_2} \qquad (3.10)$$

A equação (3.10) descreve as linhas de iso-valor esperado. Para cada $\bar{E}$ factível, temos uma linha de iso-valor esperado diferente. Como no caso das curvas de indiferença, todas as linhas de iso-valor esperado apresentam inclinação igual e constante. Note que a inclinação positiva é conseqüência de nossa ordenação $x_3 > x_2 > x_1$. Intuitivamente, a inclinação é positiva porque, para que uma loteria continue com o mesmo valor esperado, um aumento na probabilidade do prêmio mais baixo x_1 deve ser compensado com um aumento na probabilidade do prêmio mais alto x_3. As linhas de iso-valor esperado são tão mais inclinadas quanto maior for o prêmio x_2 em relação a x_1 e quanto menor for o prêmio x_3 em relação a x_2.

Chamando a inclinação de ψ e o intercepto de ξ; isto é, fazendo $\psi=(x_2-x_1)/(x_3-x_2)$ e $\xi=(\bar{E}-x_2)/(x_3-x_2)$, temos:

$$p_3 = \psi p_1 + \xi \qquad (3.11)$$

Na figura 3.4, representamos as linhas de iso-valor esperado. Note que, já que a inclinação das linhas de iso-valor esperado é sempre a mesma, além de retas, elas são paralelas.

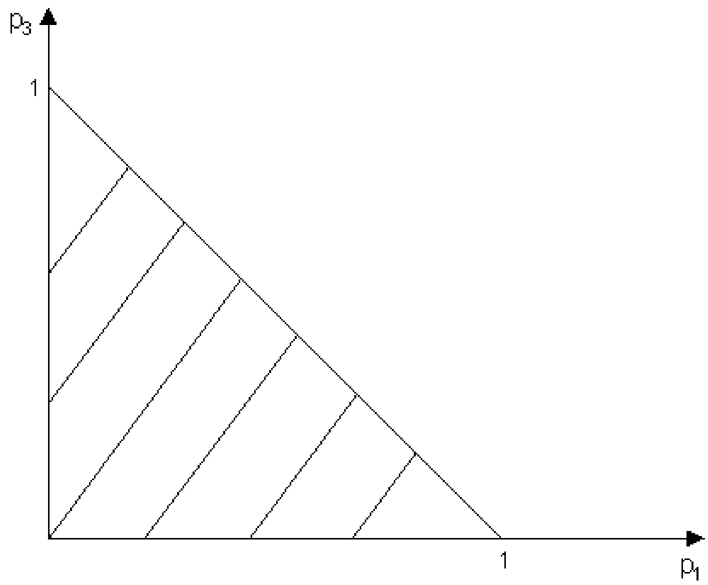


Figura 3.4 – Linhas de iso-valor esperado

Na figura 3.5, as linhas de iso-valor esperado (as linhas mais finas) são sobrepostas às curvas de indiferença de um tomador de decisão (estritamente) avesso ao risco. O que caracteriza a aversão ao risco estrita em um triângulo de Marschak-Machina é o fato das curvas de indiferença serem mais inclinadas do que as linhas de iso-valor esperado.

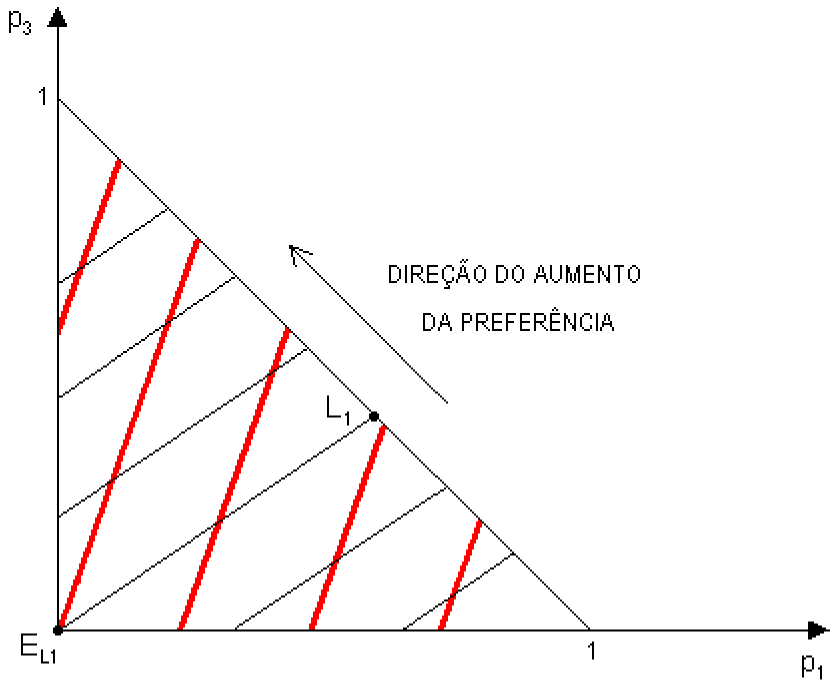


Figura 3.5 – Aversão ao risco (estrita) e curvas de indiferença

Para compreender o porquê, tomemos a origem do gráfico como o ponto de partida. Na origem, $p_2=1$ e $p_1=p_3=0$ e, portanto, não há incerteza. Como $E(L)=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3$, então a origem representa uma loteria com valor esperado igual a x_2. Assim, a linha de iso-valor esperado que parte da origem é o locus de todos os pontos onde o valor esperado é igual a x_2.

Suponha agora que nos desloquemos de maneira a manter o valor esperado constante, mas reduzindo a probabilidade p_2 do prêmio intermediário. Isto equivale a um movimento sobre a linha de iso-valor esperado x_2 em direção à hipotenusa do triângulo. Ao efetuarmos este deslocamento, apesar do valor esperado estar sendo mantido constante, o risco da loteria está aumentando (o valor esperado está sendo mantido às custas de um aumento nas probabilidades do maior e do menor prêmio). É natural, portanto, que a aversão ao risco implique que este movimento reduza o nível de utilidade. De fato, na medida em que nos deslocamos sobre a linha de iso-valor esperado x_2, atingimos curvas de indiferença referentes a níveis de utilidade cada vez mais baixos.

Portanto, quando reduzimos a probabilidade de x_2, se quisermos nos manter com o mesmo nível de utilidade, é necessário elevar a probabilidade do prêmio x_3 em uma magnitude capaz de aumentar o valor esperado da loteria, compensando o aumento do risco. Assim, as curvas de indiferença devem ser mais inclinadas do que as linhas de iso-valor esperado.

Vamos exemplificar retomando o exemplo da seção 3.1, que apresenta as loterias $L_1=(0{,}6;0;0{,}4)$ e $E_{L1}=(0;1;0)$, referentes aos resultados $\{x_1,x_2,x_3\}=\{0,40,100\}$. Estas loterias estão representadas na figura 3.5. Como $E(L_1)=E(E_{L1})=40$, ambas estão sobre a mesma linha de iso-valor esperado. Porém, E_{L1} está sobre uma curva de indiferença mais alta do que L_1. Isto é conseqüência da aversão ao risco estrita, uma vez que L_1 é mais arriscada.

Formalmente, podemos definir a aversão ao risco em um diagrama em triângulo da seguinte maneira:

$$\text{Aversão ao risco estrita} \Leftrightarrow \phi > \psi \tag{3.12}$$

Ou seja,

$$\text{Aversão ao risco estrita} \Leftrightarrow \left[\frac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)}\right] > \left[\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}\right] \tag{3.13}$$

$$\text{Aversão ao risco estrita} \Leftrightarrow \left[\frac{u(x_3)-u(x_2)}{x_3-x_2}\right] < \left[\frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}\right] \tag{3.14}$$

A desigualdade em (3.14) afirma que a utilidade marginal entre os prêmios x_2 e x_3 deve ser menor do que a utilidade marginal entre os prêmios x_1 e x_2; isto é, como $x_3>x_2>x_1$, a desigualdade afirma que utilidade marginal deve ser decrescente.

Quando o tomador de decisão é estritamente propenso ao risco, as curvas de indiferença são menos inclinadas do que as linhas de iso-valor esperado, como mostra a figura 3.6. Neste caso, ao efetuamos um movimento sobre a linha de iso-valor esperado em direção à hipotenusa, o nível de utilidade aumenta com o aumento do risco. Deste modo, ao efetuar o deslocamento, atingimos curvas de utilidade referentes a níveis de utilidade cada vez mais altos.

Assim, um indivíduo propenso ao risco se dispõe a diminuir certa quantia do valor esperado de uma loteria em troca de um aumento da probabilidade do prêmio mais elevado x_3. Evidentemente, esta redução no valor esperado deve ser decorrente de um aumento na probabilidade do prêmio menor x_1. O efeito do aumento de p_1 deve, então, mais do que contrabalançar o efeito do aumento de p_3 sobre o valor esperado.

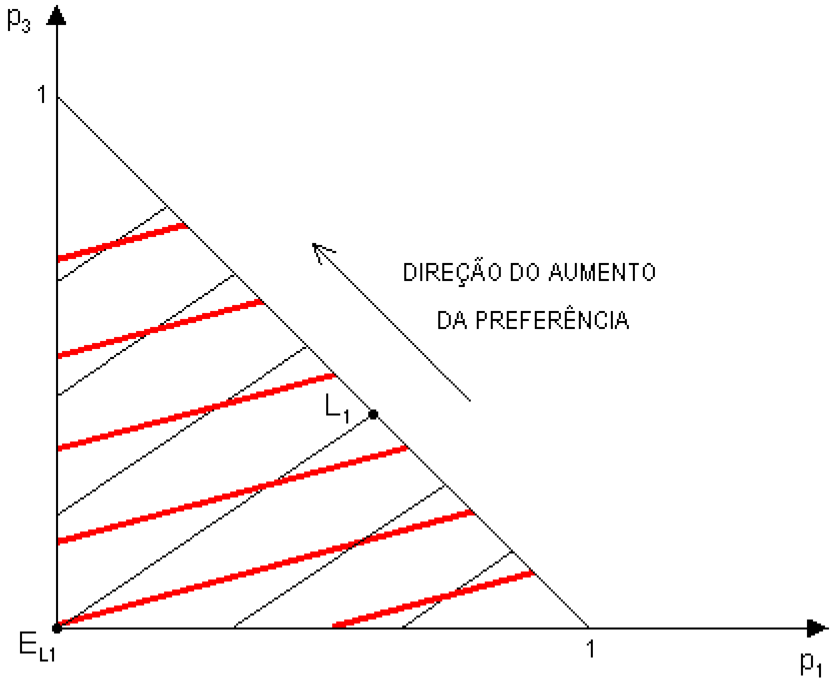


Figura 3.6 – Propensão ao risco (estrita) e curvas de indiferença

Retomando o exemplo da seção 3.1, a figura 3.6 mostra que a loteria mais arriscada L_1 está sobre uma curva de indiferença mais alta do que E_{L1}, conseqüência direta da propensão ao risco estrita.

Formalmente, temos:

$$\text{Propensão ao risco estrita} \Leftrightarrow \phi < \psi \Leftrightarrow \left[\frac{u(x_2)-u(x_1)}{u(x_3)-u(x_2)}\right] < \left[\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}\right] \qquad (3.15)$$

$$\text{Propensão ao risco estrita} \Leftrightarrow \left[\frac{u(x_3)-u(x_2)}{x_3-x_2}\right] > \left[\frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}\right] \qquad (3.16)$$

A desigualdade (3.16) mostra que a utilidade marginal entre os prêmios x_3 e x_2 deve ser maior do que a utilidade marginal entre os prêmios x_2 e x_3 e, portanto, a utilidade marginal deve ser crescente.

Na figura 3.7, representamos as curvas de indiferença de um tomador de decisão neutro ao risco. Note que as curvas de indiferença coincidem com as linhas de iso-valor esperado, já que a inclinação de ambas é igual. Sabemos que um indivíduo neutro ao risco é indiferente entre loterias de mesmo valor esperado, independentemente do risco que elas apresentam. Assim, o indivíduo neutro ao risco é indiferente entre todas as loterias que estão sobre uma mesma linha de valor esperado. Portanto, é intuitivo que as curvas de indiferença coincidam com as linhas de iso-valor esperado.

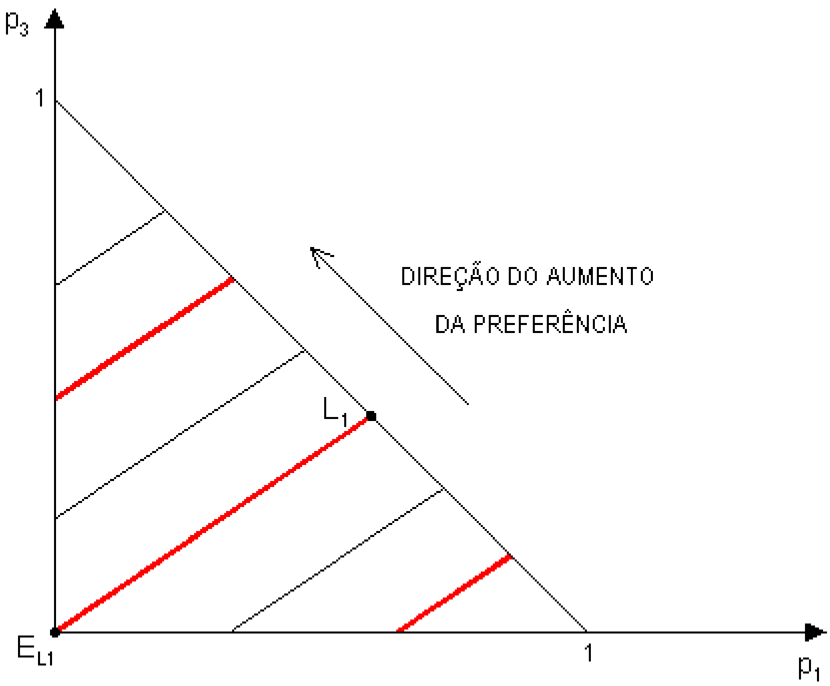


Figura 3.7 – Neutralidade ao risco e curvas de indiferença

Assim, a representação das preferências de um tomador de decisão neutro ao risco, através da maximização da utilidade esperada, equivale à representação através da maximização do valor esperado (ou da esperança matemática). Este é um resultado interessante porque mostra que um indivíduo neutro ao risco é um "maximizador de valor esperado",[5] ou seja, é um indivíduo que segue o princípio da expectância matemática, elaborado por Pascal no século XVII. Assim, o princípio da expectância da matemática é um caso particular da teoria da utilidade esperada. Por isto, dizemos que a teoria da utilidade esperada é uma generalização do princípio da expectância matemática.

Retomando o exemplo da seção 3.1, podemos ver na figura 3.7 que as loterias L_1 e E_{L1} estão sobre a mesma linha de iso-valor esperado e, conseqüentemente, sobre a mesma curva de indiferença. Portanto, $L_1 \sim E_{L1}$. Assim, qualquer indivíduo neutro ao risco ou "maximizador de valor esperado" é indiferente entre as loterias L_1 e E_{L1}.

Algebricamente, temos:

$$\text{Neutralidade ao risco} \Leftrightarrow \phi = \psi \Leftrightarrow \left[\frac{u(x_2) - u(x_1)}{u(x_3) - u(x_2)}\right] = \left[\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}\right] \tag{3.17}$$

$$\text{Neutralidade ao risco} \Leftrightarrow \left[\frac{u(x_3) - u(x_2)}{x_3 - x_2}\right] = \left[\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1}\right] \tag{3.18}$$

A igualdade (3.18) nos informa que a utilidade marginal entre o prêmio x_3 e x_2 é igual a utilidade marginal entre o prêmio x_2 e x_1. Portanto, a utilidade marginal é constante.

Dado a simplicidade de se operar com a maximização do valor esperado, muitos modelos utilizados em economia assumem agentes neutros ao risco, especialmente em casos onde a eventual suposição de aversão ao risco não modifica fundamentalmente os resultados.[6] Portanto, em um certo sentido, a teoria econômica utiliza até hoje o princípio da expectância matemática, ainda que desapercebida como um caso particular da teoria da utilidade esperada.

Sumarizando os resultados algébricos e incluindo a aversão e a propensão ao risco, temos:

---

[5] Devemos ter cuidado com a interpretação desta afirmação. A frase "um indivíduo maximizador de valor esperado" deve ser interpretada como se referindo a um indivíduo cujas preferências são representáveis pela maximização do valor esperado. Não significa que o indivíduo faça de fato comparações entre valores esperados para formular suas decisões.

[6] Neste caso, podemos considerar a suposição de neutralidade ao risco como uma aplicação da "Navalha de Occam", já que diminui a complexidade do modelo sem comprometer os resultados.

Aversão ao risco estrita $\Leftrightarrow \phi > \psi$

Aversão ao risco $\Leftrightarrow \phi \geq \psi$

Neutralidade ao risco $\Leftrightarrow \phi = \psi$

Propensão ao risco $\Leftrightarrow \phi \leq \psi$

Propensão ao risco estrita $\Leftrightarrow \phi < \psi$

Note que estes resultados são compatíveis com os resultados (3.1), (3.2) e (3.3).

3.2 Medidas de aversão ao risco

Na prática, sabemos que a maior parte dos indivíduos são avessos ao risco. Mas isto não significa que haja homogeneidade entre os tomadores de decisão, pois o grau de aversão ao risco apresentado por diferentes agentes tende a ser bastante variável.

Assim, uma questão importante que surge é como medir o grau de aversão ao risco de diferentes tomadores de decisão. Esta questão foi fundamentalmente tratada em Pratt (1964). Nesse artigo, o autor introduziu algumas medidas de aversão ao risco que, mais tarde, ficaram conhecidas como os coeficientes de aversão ao risco de Arrow-Pratt.

Os coeficientes levaram o nome também de Kennett Arrow porque quando John Pratt publicou seu artigo, Arrow já tinha esboçado algumas análises sobre a função que Pratt tomou como medida de aversão ao risco. Em seu artigo, Pratt reconheceu a contribuição de Arrow:

> "A importância da função r(x) [coeficiente de aversão ao risco de Arrow-Pratt] foi descoberta independentemente por Kenneth J. Arrow e por Robert Schlaifer, em diferentes contextos. O trabalho apresentado aqui foi, infelizmente, essencialmente completado antes de eu conhecer o trabalho relacionado de Arrow." (Pratt, 1964, p.123).

O artigo de Pratt, *Risk aversion in the small and in the large,* foi publicado na edição de janeiro-abril de 1964 da *Econometrica* e deu muitas contribuições importantes para a teoria da utilidade esperada – além das medidas, introduziu teoremas e análises sobre a aversão ao risco. Apesar do tempo passado desde a sua publicação, o artigo continua uma referência importante no campo de medidas de aversão ao risco – e a maior parte das questões tratadas nesta seção (3.2) são originárias do artigo de Pratt.[7]

---

[7] As medidas de aversão ao risco são também comumente tratadas em manuais de microeconomia e finanças como Varian (1992), Mas-Colell (1995) e Gollier (2001).

Antes de entrarmos efetivamente nas medidas de aversão ao risco de Arrow-Pratt, é necessário discutir alguns conceitos importantes, como prêmio de risco, equivalente-certeza e prêmio de probabilidade. Assim, na próxima seção, trataremos destes conceitos.

3.2.1 Prêmio de risco, equivalente-certeza e prêmio de probabilidade

Como vimos, um tomador de decisão avesso ao risco se dispõe a reduzir em certa quantia o valor esperado de uma loteria em troca de uma redução no risco. Assim, poderíamos fazer a seguinte pergunta: quanto um indivíduo avesso ao risco estaria disposto a pagar pela eliminação completa de um risco? Esta questão nos remete ao conceito de prêmio de risco.

O *prêmio de risco* (π) é definido como a quantia máxima que um indivíduo está disposto a pagar para evitar determinado risco, digamos, $\tilde{g}$. O prêmio de risco de um indivíduo é tal que deixa o indivíduo indiferente entre receber um risco $\tilde{g}$ e receber uma quantia certa $E(\tilde{g})-\pi$. Assim, o prêmio de risco pode ser calculado através da seguinte equação:

$$Eu\left(x+\tilde{g}\right)=u\left[x+E(\tilde{g})-\pi(x,u,\tilde{g})\right] \tag{3.19}$$

onde x são os ativos ou a riqueza do indivíduo.

A equação (3.19) afirma que a utilidade esperada da riqueza mais o risco $\tilde{g}$ deve ser igual a utilidade da soma: [riqueza do indivíduo] + [valor esperado do risco $\tilde{g}$] – [prêmio de risco para se livrar de $\tilde{g}$]. Assim, o prêmio de risco é uma função dos parâmetros que aparecem na equação acima: $\pi = \pi(x,u,\tilde{g})$.

Daremos atenção especial para riscos puros, isto é, riscos atuarialmente neutros (com valor esperado zero). Seja $\tilde{z}$ um risco puro, com $E(\tilde{z})=0$, então $Eu\left(x+\tilde{z}\right)=u\left[x+E(\tilde{z})-\pi(x,u,\tilde{z})\right]$ se reduz a:

$$Eu\left(x+\tilde{z}\right)=u\left[x-\pi(x,u,\tilde{z})\right] \tag{3.20}$$

Mostraremos agora que qualquer risco $\tilde{g}$ pode ser reduzido a um risco puro $\tilde{z}$.[8] Isto nos facultará trabalhar apenas com riscos puros quando for conveniente. Segue de (3.19) que, para qualquer valor constante γ, temos:

$$\pi\,(x,u,\tilde{g}) = \pi\,(x+\gamma,\, u\,,\, \tilde{g}-\gamma) \tag{3.21}$$

já que

$$\begin{gathered} Eu\left[(x+\gamma)+(\tilde{g}-\gamma)\right] = u\left[(x+\gamma)+E(\tilde{g}-\gamma)-\pi(x+\gamma,u,\tilde{g}-\gamma)\right] \\ = \\ Eu\left(x+\tilde{g}\right) = u\left[x+E(\tilde{g})-\pi(x,u,\tilde{g})\right] \end{gathered} \tag{3.22}$$

Fazendo $\gamma=E(\tilde{g})$, podemos passar a considerar o risco $\tilde{g}-\gamma$, que é puro; isto é, $E(\tilde{g}-\gamma)=0$. Além disso, se fizermos $\tilde{z}=\tilde{g}-\gamma$, a redução estará pronta e poderemos então voltar a nossa atenção para a equação (3.20). Depois da redução, o prêmio de risco continuará o mesmo, como mostra a equação (3.21). No caso particular de um risco puro, o prêmio de risco pode ser entendido como a quantia que um indivíduo avesso ao risco está disposto a pagar para evitar um risco puro.

Para o prêmio de risco ser um indicador adequado de aversão ao risco, o prêmio de risco deve aumentar com o aumento da aversão ao risco. Assim, um tomador de decisão mais avesso ao risco deve estar disposto a pagar mais para evitar um risco dado.

Vamos supor dois indivíduos com funções utilidade de Bernoulli u_1 e u_2, e prêmios de risco π_1 e π_2. Digamos que u_2 é mais avesso ao risco do que u_1. Assim, se $\pi_2 \geq \pi_1$, temos:

$$Eu_1(x+\tilde{z}) = u_1(x-\pi_1) \;\Rightarrow\; Eu_2(x+\tilde{z}) \leq u_2(x-\pi_1) \tag{3.23}$$

para todo x, $\tilde{z}$ e π.

---

[8] Daqui para frente, sempre que utilizarmos $\tilde{z}$ para representar uma variável aleatória, estará implícito que $E(\tilde{z})=0$.

O lado esquerdo de (3.23) mostra que π_1 é o prêmio de risco que o indivíduo 1 está disposto a pagar para evitar o risco $\tilde{z}$. Assim, o indivíduo 1 é indiferente entre assumir o risco $\tilde{z}$ ou pagar a quantia π_1 para não enfrentar o risco. Por outro lado, o lado direito de (3.23) mostra que, em geral, o indivíduo 2 está disposto a pagar um prêmio de risco π_2 maior do que o prêmio de risco do indivíduo 1, já que a utilidade do indivíduo 2, pagando o prêmio de risco π_1, é maior ou igual a utilidade de assumir o risco $\tilde{z}$.

Fazendo $x_0 = x - \pi_1$ temos:

$$x = x_0 + \pi_1 \tag{3.24}$$

Seja $\tilde{y} = \tilde{z} + \pi_1$, (3.25)

substituindo (3.24) e (3.25) em (3.23):

$$Eu_1(x_0 + \pi_1 + \tilde{z}) = u_1(x_0 + \pi_1 - \pi_1) \Rightarrow Eu_2(x_0 + \pi_1 + \tilde{z}) \le u_2(x_0 + \pi_1 - \pi_1)$$
$$Eu_1(x_0 + \tilde{y}) = u_1(x_0) \Rightarrow Eu_2(x_0 + \tilde{y}) \le u_2(x_0) \tag{3.26}$$

A condição (3.26) implica que o indivíduo 2 prefere fracamente não aceitar qualquer risco $\tilde{y}$ para o qual o indivíduo 1 é indiferente. Assim, temos as seguintes proposições:

Proposição 1: O tomador de decisão 2 é mais avesso ao risco do que o tomador de decisão 1 se e somente se o tomador de decisão 2 está sempre disposto a pagar um valor igual ou maior do que o indivíduo 1 para evitar determinado risco; isto é, se e somente se $\pi(x, u_2, \tilde{z}) \ge \pi(x, u_1, \tilde{z})$ para quaisquer x e $\tilde{z}$.

Proposição 2: O tomador de decisão 2 é mais avesso ao risco do que o tomador de decisão 1 se e somente se o tomador de decisão 2 prefere fracamente não aceitar qualquer risco $\tilde{g}$ para o qual o indivíduo 1 é indiferente; isto é, o tomador de decisão 2 é mais avesso ao risco do que o tomador de decisão 1 se e somente se $Eu_1(x + \tilde{g}) = u_1(x) \Rightarrow Eu_2(x + \tilde{g}) \le u_2(x)$ para quaisquer x e $\tilde{g}$.

Um conceito importante relacionado ao prêmio de risco é o equivalente-certeza. O *equivalente-certeza* ou *equivalente-certo* $C(x,u,\tilde{g})$ é quantia em dinheiro que deixa o indivíduo indiferente entre a loteria representada pela variável aleatória $\tilde{g}=\mu+\tilde{z}$ com $E(\tilde{z})=0$ e a quantia $C(x,u,\tilde{g})$. Isto é,

$$u\left(x + C(x,u,\tilde{g})\right) = u\left(x + \tilde{g}\right) \tag{3.27}$$

Pode-se mostrar que se a função utilidade u é contínua, então cada loteria tem pelo menos um equivalente-certeza.[9] Além disso, se u é estritamente crescente, cada loteria tem no máximo um equivalente-certeza.

Alternativamente, o equivalente-certeza de uma loteria representada pela variável aleatória $\tilde{g}$ é igual ao valor esperado da loteria menos o prêmio de risco.

$$\begin{gathered} C(x,u,\tilde{g}) = E(\tilde{g}) - \pi(x,u,\tilde{g}) \\ \text{ou} \\ C(x,u,\tilde{g}) = \mu - \pi(x,u,\tilde{g}) \end{gathered} \tag{3.28}$$

---

[9] Se a função utilidade u é contínua, pelo teorema do valor intermediário, temos que para qualquer $L\in\mathcal{L}$ tal que $L=(p_1,...,p_n)$, existe algum valor C* tal que $u(x+C^*)=\Sigma_i p_i u(x+x_i)$. Mas qual é a restrição sobre as preferências que devemos impor para garantir que u seja contínua? Pode-se mostrar que a concavidade de u implica que u é contínua no interior do intervalo X (lembre-se que $X=[0,M]\subseteq\mathcal{R}$ é o conjunto de resultados possíveis), embora não assegure que u seja contínua nos pontos finais do intervalo. Porém, isto não é suficiente – queremos garantir que u seja contínua também nos pontos finais e que u seja contínua mesmo que u não represente preferências avessas ao risco. Pode-se mostrar que a função utilidade u é contínua se e somente se a relação de preferência $\succsim$ é contínua na topologia fraca, relativa ao espaço das loterias simples. (Kreps, 1988).

A relação de preferência preferência $\succsim$ é contínua na topologia fraca se os conjuntos $\{L'\in\mathcal{L} \mid L\succsim L'\}$ e $\{L'\in\mathcal{L} \mid L'\succsim L\}$ para todo $L\in\mathcal{L}$ são fechados na topologia da convergência fraca.

A continuidade na topologia fraca é uma condição mais forte do que a continuidade arquimediana. Assim,

Continuidade na topologia fraca $\Rightarrow$ Continuidade arquimediana
mas
Continuidade arquimediana $\not\Rightarrow$ Continuidade na topologia fraca.

Assim, sempre que quisermos assegurar que a função utilidade u é contínua, devemos substituir o axioma da continuidade arquimediana pelo axioma da continuidade na topologia fraca.

Portanto, como um aumento na aversão ao risco faz com que o prêmio de risco π aumente, podemos verificar, por (3.28), que um aumento na aversão ao risco reduz o equivalente-certeza. Assim, podemos escrever a proposição 3.

Proposição 3: O tomador de decisão 2 é mais avesso ao risco do que o tomador de decisão 1 se e somente se $C(x,u_1,\tilde{g}) \geq C(x,u_2,\tilde{g})$ para quaisquer x e $\tilde{g}$.

Na figura 3.8, representamos os conceitos de equivalente-certeza e prêmio de risco. A figura mostra o gráfico da função utilidade de Bernoulli de um indivíduo estritamente avesso ao risco que se defronta com uma loteria L (ou um risco $\tilde{g}$) que fornece x_1 com probabilidade 0,5 e x_2 com probabilidade 0,5. O valor esperado desta loteria é E($\tilde{g}$). Mas como o indivíduo é estritamente avesso ao risco, ele está disposto a pagar um prêmio de risco π para não incorrer no risco.

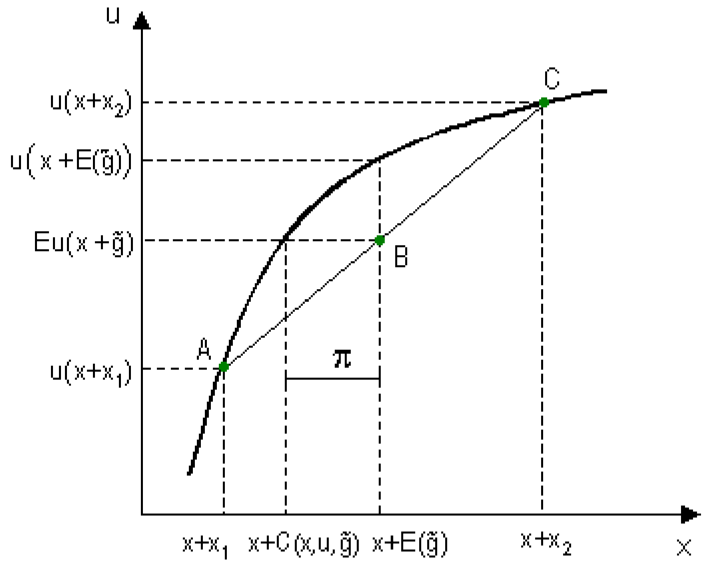


Figura 3.8 – Equivalente-certeza e prêmio de risco

Note que a utilidade esperada do indivíduo com a loteria é igual a utilidade referente ao ponto médio B da combinação convexa dos pontos A e C. Assim, o nosso problema é achar a quantia certa em dinheiro que fornece a mesma utilidade esperada que este ponto médio. Este é um problema simples – a quantia certa em dinheiro que fornece a utilidade esperada $Eu(x+\tilde{g})$ é exatamente $x + C(x,u,\tilde{g})$, valor que pode ser obtido através da função utilidade de Bernoulli, utilizando (3.27).

Portanto, como E(x+E($\tilde{g}$))>E($x + C(x, u, \tilde{g})$), o indivíduo representado no gráfico está disposto a abrir mão de parte do valor esperado de sua riqueza para se livrar do risco. Para qualquer riqueza certa acima de $x + C(x, u, \tilde{g})$, o indivíduo prefere a riqueza certa. Por outro lado, para qualquer riqueza certa abaixo de $x + C(x, u, \tilde{g})$, o indivíduo prefere que sua riqueza seja modificada pela loteria L. Portanto, o indivíduo está disposto a abrir mão de até $\pi\left(x, u, \tilde{g}\right) = x + E(\tilde{g}) - [x + C(x, u, \tilde{g})] = E(\tilde{g}) - C(x, u, \tilde{g})$ para se livrar do risco. (Assim, π é o prêmio de risco, o valor máximo que o indivíduo está disposto a pagar para se livrar do risco.)

Outro conceito importante relacionado à atitude frente ao risco é o prêmio de probabilidade. Este conceito surge no caso especial onde $\tilde{z} = \pm h$ é um risco puro tal que h>0. Ou seja, surge no caso em que o risco é ganhar ou perder uma quantia fixa h>0 com a mesma probabilidade. (Para aplicar o conceito a um risco do tipo $\tilde{g} = \mu + \tilde{z}$ onde $\tilde{z} = \pm h$ e h>0, devemos primeiro reduzir o risco para um risco puro.)

Assim, suponha que temos uma loteria L representada pela variável aleatória $\tilde{z}$ com valor esperado zero e com dois resultados possíveis +h e –h com h>0. Portanto, a probabilidade de ocorrer cada resultado é 0,5; isto é, a aposta é justa. O *prêmio de probabilidade* p(x,u,h) é o aumento da probabilidade do melhor resultado "+h" que é necessário para que o indivíduo seja indiferente entre a riqueza certa x e a riqueza sujeita à variação proporcionada pela loteria L. (Ou seja, é o aumento de probabilidade do melhor resultado para que o indivíduo fique indiferente entre a riqueza certa x e a aposta entre as riquezas x+h e x-h.)[10] Assim,

---

[10] Pratt (1964), definiu o prêmio de probabilidade de maneira ligeiramente diferente. Segundo a definição de Pratt (1964), o prêmio de probabilidade é a diferença de probabilidade entre o resultado melhor +h e o resultado pior –h, que faz o indivíduo indiferente entre aceitar ou não a loteria. Isto é,

$$u(x) = \frac{1}{2}\left[1 + p(x, u, h)\right]u(x + h) + \frac{1}{2}\left[1 - p(x, u, h)\right]u(x - h).$$

Assim, suponha que em uma dada loteria L com dois resultados possíveis +h e –h com h>0, o indivíduo requeira uma probabilidade de 0,7 para o resultado melhor +h, a fim de ficar indiferente entre aceitar ou não a loteria L. Logo, a probabilidade do pior resultado –h deve ser 0,3. Pela nossa definição de prêmio de probabilidade, p(x,u,h)=0,7-0,5=0,2, já que a probabilidade do melhor resultado aumentou em 0,2. Pela definição utilizada por Pratt, p(x,u,h)=0,7-0,3=0,4, já que a diferença entre probabilidade do melhor resultado e a do pior passou a ser 0,4. Observando a equação acima e a equação (3.29), é fácil perceber que o prêmio de probabilidade tal como Pratt definiu é sempre o dobro do prêmio de probabilidade tal como nós definimos.

$$u(x) = \left[\frac{1}{2} + p(x,u,h)\right]u(x+h) + \left[\frac{1}{2} - p(x,u,h)\right]u(x-h) \tag{3.29}$$

Na figura 3.9, temos a representação gráfica do prêmio de probabilidade para um tomador de decisão estritamente avesso ao risco. A figura mostra um tomador de decisão que se defronta com a loteria L, onde ele pode atingir a riqueza x+h ou x-h com probabilidade 0,5 cada. A riqueza esperada do indivíduo é x. Evidentemente, como o indivíduo é estritamente avesso ao risco, ele prefere a riqueza certa x do que a riqueza sujeita à loteria L.

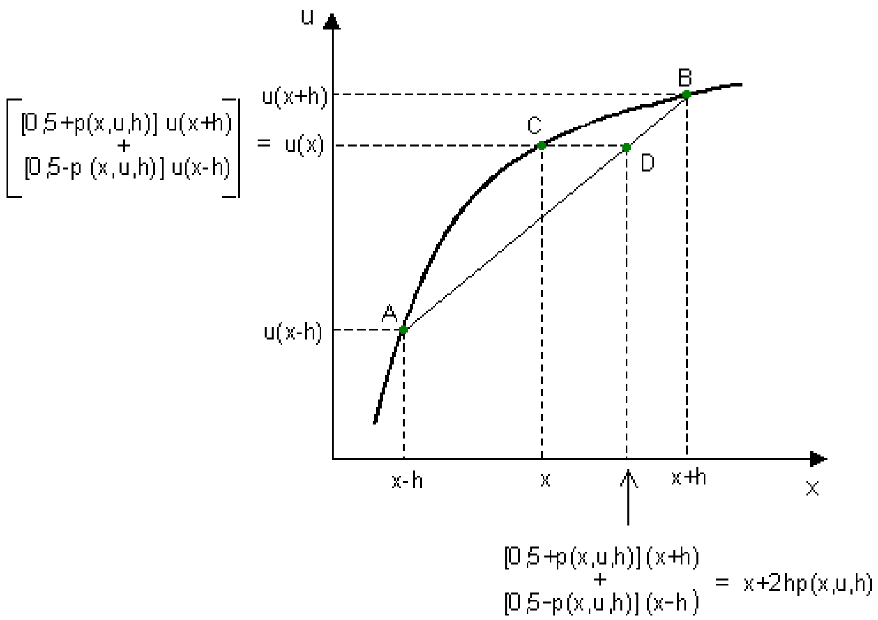


Figura 3.9 – Prêmio de probabilidade

A pergunta que devemos fazer agora é qual o aumento de probabilidade de receber +h na loteria L que é necessário para que o indivíduo fique indiferente entre aceitar ou não a loteria. Este aumento de probabilidade é, como vimos, o prêmio de probabilidade e pode ser calculado através da equação (3.29). Com a loteria modificada pelo prêmio de probabilidade, o valor esperado da riqueza vai aumentar de x para x+2hp(x,u,h), como mostra a figura 3.9.

É de se esperar que quanto maior a aversão ao risco do tomador de decisão, maior seja o prêmio de probabilidade requerido; isto é, na medida em que um tomador de decisão é mais avesso ao risco, ele vai ter que ser “recompensado” com um prêmio de probabilidade maior para aceitar a loteria L. Assim, temos a seguinte proposição.

Proposição 4: O tomador de decisão 2 é mais avesso ao risco do que o tomador de decisão 1 se e somente se $p(x,u_2,h) \geq p(x,u_1,h)$ para quaisquer x,h.

Com a definição do prêmio de probabilidade, concluímos os conceitos necessários para avançarmos às medidas de aversão ao risco de Arrow-Pratt.

3.2.2 Medida de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt

A nossa questão agora é desenvolver uma maneira de medir o grau de aversão ao risco de um tomador de decisão. Em um primeiro momento, poderia parecer adequado medir a curvatura de u através de sua segunda derivada u", já que, quanto mais côncava for a função utilidade de Bernoulli, mais avesso ao risco é o tomador de decisão.

Porém, a segunda derivada da função utilidade de Bernoulli não é uma medida apropriada, pois não é invariante a transformações lineares positivas da função utilidade. Quando fazemos uma transformação linear positiva em uma função utilidade, ela continua representando as mesmas preferências. Assim, uma medida apropriada de aversão ao risco não deve ser sensível a transformações lineares positivas. [11]

Além disso, tomemos um exemplo dado por Pratt (1964). Imagine um indivíduo maximizador de utilidade esperada com função utilidade de Bernoulli $u(x) = -e^{-x}$. Na figura 3.10, temos o gráfico desta função. Na medida em que $x \to \infty$, tanto $u'(x) \to 0$ como $u''(x) \to 0$. Assim, enquanto x vai crescendo, esta função vai se aproximando cada vez mais da assíntota u=0, parecendo graficamente cada vez menos côncava.

---

[11] Digamos que u" seja a derivada segunda da função utilidade de Bernoulli u, referente à relação de preferências $\succsim$. Suponha que v é uma transformação linear positiva de u tal que v(x)=a+bu(x) com b>0. Portanto, v também se refere à relação de preferências $\succsim$. Mas,

$$v(x) = a + bu(x) \Rightarrow v'(x) = bu'(x) \Rightarrow v''(x) = bu''(x).$$

Portanto, a despeito da transformação linear positiva não alterar a representação de preferências, a derivada segunda se alterou. Se, por exemplo, b>1, o valor absoluto da derivada segunda aumentou sem que houvesse uma mudança no comportamento representado pela função utilidade. (Isto é, sem que houvesse um efetivo aumento na aversão ao risco.) Portanto, a derivada segunda não é uma medida adequada de aversão ao risco.

Porém, o comportamento frente ao risco representado por u é o mesmo para todo o x, já que

$$u(k+x) = -e^{-k-x} \Rightarrow u(k+x) = e^{-k}(-e^{-x}) \tag{3.30}$$

Fazendo $b = e^{-k}$, temos:

$$u(k+x) = b(-e^{-x}) \tag{3.31}$$

Como $u(x) = -e^{-x}$, temos:

$$u(k+x) = bu(x) \tag{3.32}$$

Portanto, u(k+x) é uma transformação linear positiva de u(x). Assim, qualquer que seja k, não haverá mudança do comportamento frente ao risco – o prêmio de risco $\pi(x, u, \tilde{z})$ para qualquer risco $\tilde{z}$ e o prêmio de probabilidade p(x,u,h) para qualquer h não se alterarão.

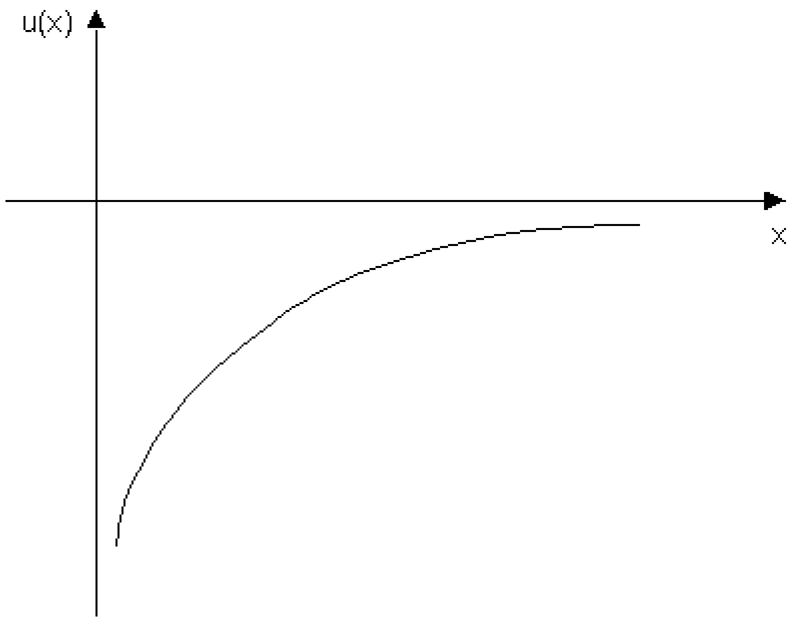


Figura 3.10 – Gráfico da função $u(x)=-e^{-x}$

Deste modo, apesar da aparência do gráfico, a função $u(x) = -e^{-x}$ está tão longe de implicar comportamento neutro ao risco em x=∞ quanto em x=0.

Este exemplo corrobora com o fato de u" não ser uma medida apropriada de aversão ao risco – mesmo quando $u''(x) \to 0$, a função utilidade não implicou comportamento de aversão ao risco decrescente. No entanto, devemos frisar que u" fornece uma informação importante sobre a atitude frente ao risco. Nós já vimos que:

$u''(x) \leq 0 \Rightarrow$ Aversão ao risco em x.

$u''(x) = 0 \Rightarrow$ Neutralidade ao risco em x.

$u''(x) \geq 0 \Rightarrow$ Propensão ao risco em x.

Assim, uma característica de u"(x) que tem significado em relação à atitude frente ao risco é o seu sinal. Um sinal negativo significa aversão ao risco e um sinal positivo significa propensão ao risco.

Porém, a magnitude absoluta de u"(x) não tem qualquer significado para a teoria da utilidade esperada. Apesar disso, podemos obter uma medida de aversão ao risco, normalizando u"(x), dividindo pela derivada primeira u'(x). Assim, obtemos a medida conhecida por *coeficiente de aversão ao risco (absoluto) de Arrow-Pratt*.

Coeficiente de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt. Dado uma função utilidade u (duas vezes continuamente diferenciável,[12] côncava e estritamente crescente),

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{3.33}$$

é o coeficiente de aversão ao risco (absoluto) de Arrow-Pratt.

Note que a medida de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt caracteriza completamente o comportamento do tomador de decisão. A função r(x) apresenta toda informação necessária para prever o comportamento de escolha do tomador de decisão. Observe que a função utilidade de Bernoulli u pode ser recuperada de r(x), integrando duas vezes. As constantes de integração são irrelevantes, já que transformações lineares positivas não alteram a representação de preferências.

---

[12] Uma função utilidade de Bernoulli $u: X \to \mathcal{R}$ é *continuamente diferenciável* ou C^1 se e somente se $(du/dx)(x)$ existe e é contínua para todo $x \in X$. Se, além disso, u'(x) tem uma derivada u"(x) contínua para todo $x \in X$, dizemos que u é *duas vezes continuamente diferenciável* ou C^2. Para mais detalhes, ver Simon & Blume (1994).

Mas qual é a justificativa para o uso da função $r(x)$ como uma medida de aversão ao risco? Para justificar a medida de Arrow-Pratt, tomemos uma aposta com dois resultados possíveis x_1, x_2 com probabilidades p_1 e p_2.[13]

Para efetuar a análise, utilizaremos o conceito de conjunto de aceitação. O *conjunto de aceitação* de um tomador de decisão é o conjunto de todas as apostas ou loterias que o tomador de decisão aceitaria em um nível de riqueza x. Na figura 3.11, representamos o conjunto de aceitação. Note que no ponto de origem do gráfico, a riqueza do indivíduo permanece inalterada, já que, neste caso, $x_1=0$ e $x_2=0$ e, portanto, $x+x_1$ ou $x+x_2$ são iguais a x.

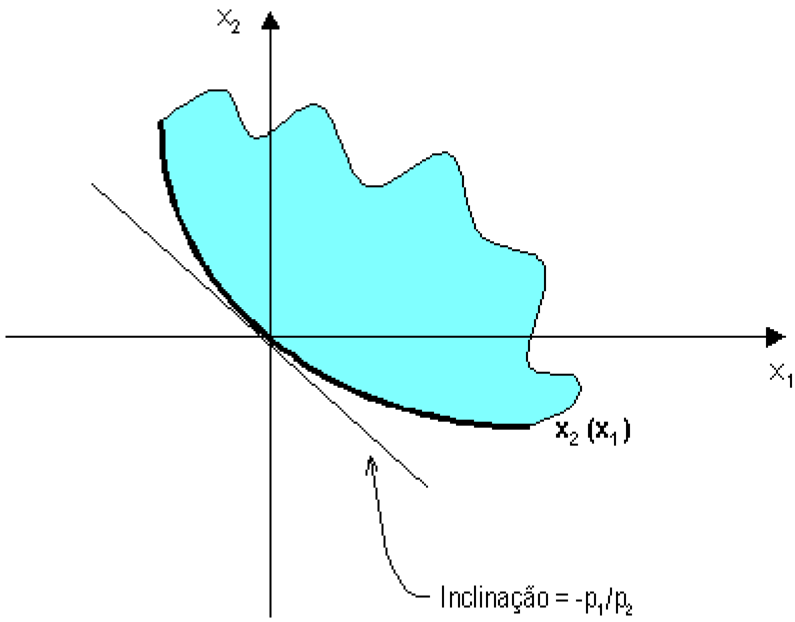


Figura 3.11 – Conjunto de aceitação

A fronteira deste conjunto – a curva mais escura – é o conjunto (ou curva) de loterias indiferentes e pode ser dado pela função implícita $x_2(x_1)$, como mostra a figura 3.11.[14] Se o tomador de decisão for avesso ao risco, então o conjunto de aceitação será um conjunto convexo.[15]

[13] Esta justificativa é baseada em Varian (1992).

[14] Não devemos confundir a curva de loterias indiferentes da figura 3.11 com as curvas de indiferença do triângulo de Marschak-Machina. No caso da figura 3.11, a análise é efetuada sobre probabilidades constantes – as variáveis são os possíveis resultados x_1 e x_2. No caso das curvas de indiferença do triângulo de Marschak-Machina, as probabilidades é que são variáveis – os possíveis resultados são constantes.

[15] Pode-se observar que o conjunto de aceitação nada mais é do que o *conjunto de contornos superiores* da curva de loterias indiferentes. Isto é, seja L uma loteria que pertence à curva de loterias indiferentes, o conjunto de aceitação S é um conjunto tal que $\{L' \in S | L' \succsim L\}$.

Se u é contínua e estritamente crescente, então $x_2(x_1)$ deve satisfazer a seguinte identidade:

$$u(x) \equiv p_1 u(x + x_1) + p_2 u(x + x_2(x_1)) \tag{3.34}$$

A identidade (3.34) é a curva de loterias indiferentes para uma dada riqueza inicial x. Note que a identidade requer que $x_2(x_1)$ seja o valor que mantenha o nível de utilidade esperada constante na medida em que x_1 varia. Isto é, $x_2(x_1)$ deve ser tal que mantenha o nível de utilidade u(x) referente à riqueza inicial x.

Podemos então, diferenciar a identidade (3.34) com respeito a x_1 e avaliá-la em x_1=0. Assim, obteremos a inclinação da fronteira do conjunto de aceitação em x_1=0:

$$p_1 u'(x + x_1) + p_2 u'(x + x_2(x_1)) x_2'(x_1) = 0 \tag{3.35}$$

$$p_1 u'(x) + p_2 u'(x) x_2'(0) = 0$$

$$x_2'(0) = -\frac{p_1}{p_2} \tag{3.36}$$

Agora, vamos supor dois tomadores de decisão com probabilidades idênticas para os dois resultados possíveis. É natural afirmar que o tomador de decisão 1 é mais avesso ao risco do que o tomador de decisão 2, ao nível de riqueza x, se o conjunto de aceitação do tomador de decisão 1 está contido no conjunto de aceitação do tomador de decisão 2. Observe a figura 3.12 – qualquer loteria que faz parte do conjunto de aceitação do tomador de decisão 1 também faz parte do conjunto de aceitação do tomador de decisão 2. Assim, o tomador de decisão 2 aceitará qualquer aposta que o tomador de decisão 1 aceita. Se nos limitarmos às apostas pequenas (apostas com resultados tendendo a zero), podemos efetuar uma análise mais útil ainda.

Podemos afirmar que o indivíduo 1 é localmente mais avesso ao risco do que o indivíduo 2 se o conjunto de aceitação do indivíduo 1 está contido no conjunto de aceitação do indivíduo 2 em uma vizinhança do ponto (0,0). Isto quer dizer que o indivíduo 2 aceitará qualquer pequena aposta que o indivíduo 1 aceita.

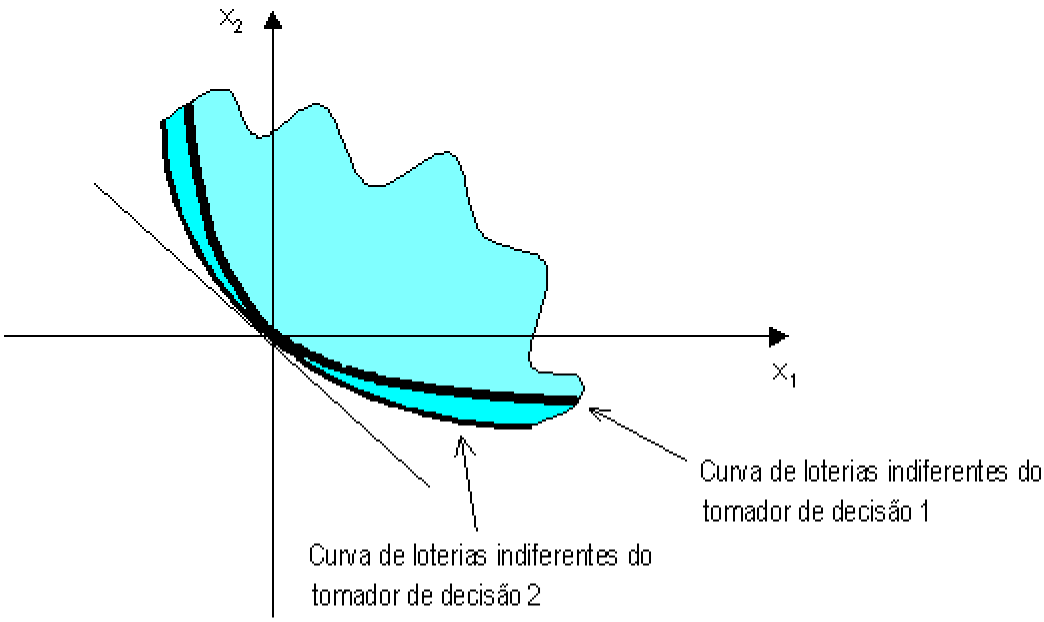


Figura 3.12 – Comparação de aversão ao risco através do conjunto de aceitação

Podemos perceber que o indivíduo 1 é localmente mais avesso ao risco do que o indivíduo 2 se o conjunto de aceitação do indivíduo 1 é "mais curvado" do que o conjunto de aceitação do indivíduo 2, na vizinhança do ponto (0,0). De fato, podemos observar que quanto "mais curvado" for o conjunto de aceitação de um indivíduo, maior será o valor que o indivíduo requererá para o resultado positivo (note que da forma como o problema foi montado, sempre haverá um possível resultado negativo e outro positivo) para contrabalançar o risco de ocorrer o resultado negativo.

Assim, podemos obter a curvatura do conjunto de aceitação na vizinhança de (0,0) diferenciando (3.35) com respeito a x_1 e avaliando a derivação resultante em $x_1=0$. Note que $x_2(x_1)=0$ quando $x_1=0$.

$$p_1u''(x+x_1)+p_2u''(x+x_2(x_1))x_2'(x_1)^2+p_2u'(x+x_2(x_1))x_2''(x_1)=0$$

$$p_1u''(x)+p_2u''(x)x_2'(0)^2+p_2u'(x)x_2''(0)=0 \tag{3.37}$$

Substituindo (3.36) em (3.37):

$$p_1 u''(x) + p_2 u''(x)\left(\frac{p_1^2}{p_2^2}\right) + p_2 u'(x) x_2''(0) = 0$$

$$p_2 u'(x) x_2''(0) = -p_1 u''(x) - p_2 u''(x)\left(\frac{p_1^2}{p_2^2}\right)$$

$$p_2 u'(x) x_2''(0) = -u''(x)\left(p + \frac{p_1^2}{p_2}\right)$$

Como $p_2=(1-p_1)$, temos:

$$p_2 u'(x) x_2''(0) = \left(\frac{p_1 - p_1^2 + p_1^2}{p_2}\right)\left[-u''(x)\right]$$

$$x_2''(0) = \frac{p_1}{p_2^2}\left[-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right] \qquad (3.38)$$

A partir de (3.38), podemos perceber que a curvatura do conjunto de aceitação é proporcional à medida de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt. Assim, substituindo (3.33) em (3.38), temos:

$$x_2''(0) = \left(\frac{p_1}{p_2^2}\right) r(x) \qquad (3.39)$$

Fazendo $A = (p_1 / p_2^2)$, temos que A é uma constante pois p_1 e p_2 são constantes:

$$x_2''(0) = A\, r(x) \qquad (3.40)$$

Portanto, a curvatura da fronteira do conjunto de aceitação em (0,0) é diretamente proporcional ao coeficiente de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt. Assim, podemos fazer a seguinte esquematização:

O indivíduo 1 é localmente mais avesso ao risco do que o indivíduo 2 $\Leftrightarrow$ O conjunto de aceitação do indivíduo 1 é mais curvado do que o conjunto de aceitação do indivíduo 2 na vizinhança de (0,0) $\Leftrightarrow r_1(x) \geq r_2(x)$

onde:

$r_1(x)$=coeficiente de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt do indivíduo 1
$r_2(x)$=coeficiente de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt do indivíduo 2

Assim, o indivíduo 2 aceitará mais pequenas apostas do que o indivíduo 1 se e somente se o indivíduo 1 tem um maior coeficiente de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt. Portanto, a medida de Arrow-Pratt está justificada.

Agora que já justificamos a função r(x), podemos partir para a sua interpretação. Faremos isto através da *aproximação de Arrow-Pratt*.[16] Considere um risco puro $\tilde{y} = k\tilde{z}$. (Note que $E(\tilde{y}) = E(\tilde{z}) = 0$). Digamos que $g(k)$ denote o prêmio de risco $\pi(x, u, k\tilde{z})$ associado a $\tilde{y}$; isto é,

$$Eu(x + k\tilde{z}) = u(x - g(k)) \tag{3.41}$$

Diferenciando (3.41) em relação a k:

$$E\tilde{z}u'(x + k\tilde{z}) = -g'(k)u'(x - g(k)) \tag{3.42}$$

Fazendo k=0 (note que g(0)=0, pois quando k=0, o risco $\tilde{y} = k\tilde{z}$ desaparece e, portanto, o prêmio de risco torna-se zero):

$$E\tilde{z}u'(x) = -g'(0)u'(x)$$
$$E\tilde{z} = -g'(0)$$

Como $E(\tilde{z}) = 0$, temos

$$g'(0) = 0 \tag{3.43}$$

Diferenciando (3.42), novamente com respeito a k:

$$E\tilde{z}^2u''(x + k\tilde{z}) = [g'(k)]^2 u''(x - g(k)) - g''(k)u'(x - g(k))$$

[16] A derivação da aproximação de Arrow-Pratt que segue é baseada em Gollier (2001).

Fazendo k=0 e observando de (3.43) que g'(0)=0, temos:

$$E\tilde{z}^2u''(x) = [g'(0)]^2u''(x) - g''(0)u'(x)$$
$$E\tilde{z}^2u''(x) = -g''(0)u'(x)$$
$$g''(0) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}E\tilde{z}^2 \qquad (3.44)$$

Finalmente, fazendo uma expansão de Taylor de g ao redor de k=0, temos:

$$\pi(x,u,k\tilde{z}) = g(k) \Rightarrow \pi(x,u,k\tilde{z}) \cong g(0) + kg'(0) + \frac{1}{2}k^2g''(0)$$
$$\pi(x,u,k\tilde{z}) \cong \frac{1}{2}k^2g''(0) \qquad (3.45)$$

Substituindo (3.44) em (3.45):

$$\pi(x,u,k\tilde{z}) \cong \frac{1}{2}k^2\left[-\frac{u''(x)}{u'(x)}\right]E\tilde{z}^2$$
$$\cong \frac{1}{2}k^2\,E\tilde{z}^2\,r(x)$$
$$\cong \frac{1}{2}\,Ek^2\tilde{z}^2\,r(x) \qquad (3.46)$$
$$\pi(x,u,\tilde{y}) \cong \frac{1}{2}E(\tilde{y}^2)r(x) \qquad (3.47)$$

Os resultados (3.46) e (3.47) são chamados de aproximação de Arrow-Pratt. A aproximação nos diz que na medida que k→0, o prêmio de risco se aproxima de zero com k^2. Além disso, nos mostra que o prêmio de risco para um risco infinitesimal é aproximadamente igual à metade da variância do risco, multiplicada pelo coeficiente de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt.[17]

---

[17] Note que a variância de $\tilde{y}$, $E(\tilde{y}^2) - [E(\tilde{y})]^2$ se reduz a $E(\tilde{y}^2)$, já que $E(\tilde{y}) = 0$.

Rearranjando (3.47):

$$r(x) \cong \frac{2\pi(x,u,\tilde{y})}{var(\tilde{y})} \qquad (3.48)$$

Assim, a medida de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt para um risco puro $\tilde{y}$ infinitesimal é aproximadamente o dobro do prêmio de risco por unidade de variância de $\tilde{y}$. Alternativamente, r(x) mede a quantidade máxima que um indivíduo com riqueza x e função utilidade de Bernoulli u está disposto a pagar para se livrar de um risco puro infinitesimal com variância 2.

Com a medida de Arrow-Pratt já estabelecida, podemos sumarizar uma coleção de caracterizações de aversão ao risco, que são equivalentes.

Proposição. Suponha um indivíduo com uma relação de preferências $\succsim$, representadas pela maximização da utilidade esperada, com uma função utilidade de Bernoulli u. Então, as seguintes proposições são equivalentes:

(a) O tomador de decisão é avesso ao risco.

(b) A função utilidade de Bernoulli u é côncava.

(c) $\pi(x,u,\tilde{g}) \geq 0$ para quaisquer x e $\tilde{g}$.

(d) $C(x,u,\tilde{g}) \leq E(\tilde{g})$ para quaisquer x e $\tilde{g}$.

(e) $p(x,u,h) \geq 0$ para quaisquer x e h.

(f) $r(x) \geq 0$ para todo x. [18]

---

[18] Abaixo, demonstramos a equivalência destas proposições:

(a)$\Leftrightarrow$(b)

Seja E_L uma loteria degenerada que fornece o valor esperado da loteria L com certeza. Por definição, um tomador de decisão é avesso ao risco se para qualquer $L \in \mathcal{L}$, $E_L \succsim L$. Digamos que a variável aleatória $\tilde{g}$ é distribuída de acordo com L. Então, $E(E_L)=E(\tilde{g})$. Temos que $E_L \succsim L \Leftrightarrow E[u(\tilde{g})] \leq u[E(E_L)] \Leftrightarrow E[u(\tilde{g})] \leq E[u(E(E_L))] \Leftrightarrow E[u(\tilde{g})] \leq E[u(E(\tilde{g}))] \Leftrightarrow E[u(\tilde{g})] \leq u[E(\tilde{g})]$. A última desigualdade é a desigualdade de Jensen, que, por definição, caracteriza a concavidade de u.

(b)$\Leftrightarrow$(d)

Se u é côncava, então, pela definição, $E[u(\tilde{g})] \leq u[E(\tilde{g})]$. Como $E[u(\tilde{g})]=u[C(x,u,\tilde{g})]$, então $E[u(\tilde{g})] \leq u[E(\tilde{g})] \Leftrightarrow u[C(x,u,\tilde{g})] \leq u[E(\tilde{g})]$. Como u é estritamente crescente, então $u[C(x,u,\tilde{g})] \leq u[E(\tilde{g})] \Leftrightarrow C(x,u,\tilde{g}) \leq E(\tilde{g})$.

Veja que $r(x_0)$, por exemplo, é uma medida de aversão ao risco local, já que é efetuada apenas para o nível de riqueza x_0. Então, se $r(x_0)\geq 0$ dizemos que o coeficiente de Arrow-Pratt está indicando uma aversão ao risco local em x_0. Por outro lado, se $r(x)\geq 0$ para todo x, então o coeficiente está indicando uma aversão ao risco local em qualquer x. Assim, dizemos que o tomador de decisão em questão é globalmente avesso ao risco, já que ele é localmente avesso ao risco para qualquer nível de riqueza. Note que as proposições (a)-(f) são todas caracterizações *globais* de aversão ao risco – estão afirmando algo sobre o comportamento do indivíduo que diz respeito a todos os níveis de riqueza.

Podemos também utilizar estas caracterizações de aversão ao risco global para comparar o grau de aversão ao risco entre indivíduos. Na verdade, já fizemos isto várias vezes – as proposições 1 a 4 da seção (3.2.1) são comparações de aversão ao risco entre indivíduos. Abaixo, sumarizamos estas proposições e acrescentamos algumas novas.

Proposições equivalentes sobre comparação de aversão ao risco entre indivíduos. Seja u_1 e u_2 as funções utilidade de Bernoulli dos tomadores de decisão 1 e 2, respectivamente. Seja $r_1(x) = -u_1''(x)/u_1'(x)$ e $r_2(x) = -u_2''(x)/u_2'(x)$, digamos que o tomador de decisão 2 é mais

---

$(d)\Leftrightarrow(c)$

Sabemos que $C(x,u,\tilde{g}) = E(\tilde{g}) - \pi(x,u,\tilde{g})$. Portanto, $\pi(x,u,\tilde{g}) = E(\tilde{g}) - C(x,u,\tilde{g})$. Assim, $C(x,u,\tilde{g})\leq E(\tilde{g}) \Leftrightarrow \pi(x,u,\tilde{g}) \geq 0$.

$(b)\Leftrightarrow(f)$

Como $r(x) = -u''(x)/u'(x)$ e $u'(x)>0$, então $r(x)\geq 0 \Leftrightarrow u''(x)\leq 0$.

$(b)\Leftrightarrow(e)$ [A demonstração que segue é uma adaptação de Hara, Segal & Tadelis (1997)]

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponha que u é côncava. Seja $x\in X$ e $h>0$. Seja L a loteria que atribui probabilidade 0,5 para x-h e 0,5 para x+h. Seja L_h a loteria que atribui probabilidade 0,5-p(x,u,h) para x-h e probabilidade 0,5+p(x,u,h) para x+h. Como u é côncava, $U(L)\leq u[E(L)] = U(L_h)$. Mas $U(L) = 0{,}5u(x-h) + 0{,}5u(x+h)$ e $U(L_h) = [0{,}5 - p(x,u,h)]u(x-h) + [0{,}5 + p(x,u,h)]u(x+h)$. Assim,

$U(L_h) = 0{,}5u(x-h) + 0{,}5u(x+h) + p(x,u,h)[u(x+h) - u(x-h)] \Rightarrow$

$$p(x,u,h) = \frac{U(L_h) - [0{,}5u(x-h) + 0{,}5u(x+h)]}{[u(x+h) - u(x-h)]} \Rightarrow p(x,u,h) = \frac{U(L_h) - U(L)}{[u(x+h) - u(x-h)]}.$$

Como $U(L_h)\geq U(L)$ e $u(x+h)-u(x-h)>0$ então $p(x,u,h)\geq 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponha $p(x,u,h)\geq 0$. Seja $y,z\in X$ e $y>z$. Defina $x = (y+z)/2$ e $h=(y-z)/2$. Assim, $y = x+h$, $z=x-h$ e $u(x)=[0{,}5+p(x,u,h)]u(y)+[0{,}5-p(x,u,h)]u(z)$. Então, $u(x) = 0{,}5u(y) + 0{,}5u(z) + p(x,u,h)[u(y) - u(z)]$. Como $p(x,u,h)\geq 0$ e, pela monotonicidade das preferências, $u(y)\geq u(z)$, então $0{,}5u(y) + 0{,}5u(z)\leq u(x)$ $= u(0{,}5y + 0{,}5z)$. Da definição de concavidade, a última desigualdade implica que u é côncava.

avesso ao risco do que o tomador de decisão 1. Então as seguintes proposições são equivalentes:

(a) $r_2(x) \geq r_1(x)$ para todo x.

(b) $Eu_1(x+\tilde{g}) = u_1(x) \;\Rightarrow\; Eu_2(x+\tilde{g}) \leq u_2(x)$ para quaisquer x e $\tilde{g}$.

(c) $\pi(x, u_2, \tilde{g}) \geq \pi(x, u_1, \tilde{g})$ para quaisquer x e $\tilde{g}$.

(d) Existe uma função côncava crescente Ψ tal que $u_2(x) = \Psi(u_1(x))$ para todo x; isto é, se u_2 é uma transformação côncava de u_1.

(e) $C(x, u_1, \tilde{g}) \geq C(x, u_2, \tilde{g})$ para quaisquer x e $\tilde{g}$.

(f) $p(x,u_2,h) \geq p(x,u_1,h)$ para quaisquer x e h. [19]

---

[19] Demonstração da equivalência destas proposições:

(a)$\Leftrightarrow$(d) [Cf. Mas-Colell (1995)]

(*) Note que sempre temos $u_2(x) = \psi[u_1(x)]$ para alguma função crescente ψ. Isto ocorre porque, em termos ordinais, u_1 e u_2 são idênticos (mais dinheiro é preferível a menos). Diferenciando duas vezes a igualdade acima em relação a x, obtemos: $u_2'(x) = \psi'[u_1(x)]u_1'(x) \Rightarrow u_2''(x) = \psi'[u_1(x)]u_1''(x) + \psi''[u_1(x)][u_1'(x)]^2$. Dividindo ambos os lados da segunda expressão por $u_2'(x)$ e substituindo a primeira expressão na segunda: (Lembre-se que $u_2'(x) > 0$ para todo x)

$$\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} = \psi'[u_1(x)]\frac{u_1''(x)}{u_2'(x)} + \frac{\psi''[u_1(x)][u_1'(x)]^2}{u_2'(x)} \;\Rightarrow\; -r_2(x) = \frac{\psi'[u_1(x)]u_1''(x)}{\psi'[u_1(x)]u_1'(x)} + \frac{\psi''[u_1(x)][u_1'(x)]^2}{\psi'[u_1(x)]u_1'(x)} \;\Rightarrow$$

$r_2(x) = r_1(x) - \dfrac{\psi''[u_1(x)]}{\psi'[u_1(x)]}u_1'(x)$. Assim, $r_2(x) \geq r_1(x)$ para todo x se e somente se $\psi(u_1) \leq 0$ para todo u_1 na imagem de u_1.

(d)$\Leftrightarrow$(e) [Adaptado de Hara, Segal & Tadelis (1997)]

$\boxed{\Rightarrow}$ Seja $\tilde{g}$ uma variável aleatória distribuída segundo uma loteria simples qualquer. Suponha que existe uma função côncava crescente ψ tal que $u_2(x) = \psi[u_1(x)]$. Então, $\psi[u_1(C(x,u_2,\tilde{g}))] = u_2[C(x,u_2,\tilde{g})] = E[u_2(\tilde{g})]$. Como ψ é côncava, então $E[u_2(\tilde{g})] = E[\psi(u_1(\tilde{g})] \leq \psi[E(u_1(\tilde{g}))]$. Assim, $\psi[u_1(C(x,u_2,\tilde{g}))] \leq \psi[E(u_1(\tilde{g}))]$. Como ψ é estritamente crescente, então $u_1[C(x,u_2,\tilde{g})] \leq E[u_1(\tilde{g})]$. Como $E[u_1(\tilde{g})] = u_1[C(x,u_1,\tilde{g})]$, então $u_1[C(x,u_2,\tilde{g})] \leq u_1[C(x,u_1,\tilde{g})]$. Como u_1 é estritamente crescente, obtemos $C(x,u_2,\tilde{g}) \leq C(x,u_1,\tilde{g})$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponha que $C(x,u_1,\tilde{g}) \geq C(x,u_2,\tilde{g})$ para quaisquer x e $\tilde{g}$. Seja $x, y \in X$, $\lambda \in [0,1]$ e $\tilde{g}$ uma variável aleatória distribuída segundo uma loteria simples que atribui probabilidade λ ao resultado x e probabilidade $1-\lambda$ ao resultado y. Então, $\lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_1(y) = u_1[C(x,u_1,\tilde{g})]$. Assim, $\psi[\lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_1(y)] = u_2[C(x,u_1,\tilde{g})]$. Por outro lado, pela definição, $\lambda\psi[u_1(x)] + (1-\lambda)\psi[u_1(y)] = \lambda u_2(x) + (1-\lambda)u_2(y) = u_2[C(x,u_2,\tilde{g})]$. Como $C(x,u_1,\tilde{g}) \geq C(x,u_2,\tilde{g})$ e u_2 é estritamente crescente, então $u_2[C(x,u_1,\tilde{g})] \geq u_2[C(x,u_2,\tilde{g})]$. Assim, $\psi[\lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_1(y)] \geq \lambda\psi[u_1(x)] + (1-\lambda)\psi[u_1(y)]$. Portanto, ψ é côncava. (Lembre-se que, por (*), sempre existe uma função ψ crescente.)

(e)$\Leftrightarrow$(b)

$\boxed{\Rightarrow}$ Suponha que $C(x,u_1,\tilde{g}) \geq C(x,u_2,\tilde{g})$ para quaisquer x e $\tilde{g}$. Se $Eu_1(x+\tilde{g}) = u_1(x)$, então $C(x,u_1,\tilde{g}) = x$. Assim, $C(x,u_2,\tilde{g}) \leq x$. Como u_2 é estritamente crescente, então $u_2[C(x,u_2,\tilde{g})] \leq u_2(x)$. Como $u_2[C(x,u_2,\tilde{g})] = Eu_2(x+\tilde{g})$, então $Eu_2(x+\tilde{g}) \leq u_2(x)$ para quaisquer x e $\tilde{g}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suponha que $Eu_1(x+\tilde{g}) = u_1(x) \Rightarrow Eu_2(x+\tilde{g}) \leq u_2(x)$ para quaisquer x e $\tilde{g}$. Se $Eu_1(x+\tilde{g}) = u_1(x)$ então $C(x,u_1,\tilde{g}) = x$. Sabemos que $u_2[C(x,u_2,\tilde{g})] = Eu_2(x+\tilde{g})$. Como u_2 é estritamente crescente, então $u_2[C(x,u_1,\tilde{g})] = u_2(x) \geq Eu_2(x+\tilde{g}) = u_2[C(x,u_2,\tilde{g})] \Rightarrow C(x,u_1,\tilde{g}) \geq C(x,u_2,\tilde{g})$ para quaisquer x e $\tilde{g}$.

Um aspecto importante da caracterização de aversão ao risco é a forma com que o grau de aversão ao risco varia à medida que a riqueza aumenta. Quando a aversão ao risco (absoluto) do tomador de decisão diminui à medida que sua riqueza aumenta, dizemos que ele apresenta aversão ao risco decrescente; se a sua aversão ao risco se mantém constante, dizemos que ele apresenta aversão ao risco constante; e, finalmente, se sua aversão ao risco aumenta, dizemos que ele apresenta aversão ao risco crescente.[20] Formalmente, temos:

Aversão ao risco decrescente $\Leftrightarrow$ r'(x)$\leq$0 para todo x (3.49)

Aversão ao risco crescente $\Leftrightarrow$ r'(x)$\geq$0 para todo x (3.50)

Aversão ao risco constante $\Leftrightarrow$ r'(x)=0 para todo x (3.51)

Qual destas hipóteses estaria mais próxima do comportamento real dos agentes econômicos? A literatura econômica considera, em geral, a hipótese da aversão ao risco decrescente e, eventualmente, a aversão ao risco constante, como a mais adequada para ser incorporada em modelos econômicos. Muitas vezes, a aversão ao risco decrescente é considerada uma suposição "natural", já que, quanto mais rico for um indivíduo, menos a sua riqueza é afetada por um determinado risco fixo. Desta forma, menor deveria ser a

---

(e)$\Rightarrow$(f) [Adaptado de Hara, Segal & Tadelis (1997)]

Suponha que $C(x,u_1,\tilde{g}) \geq C(x,u_2,\tilde{g})$ para quaisquer x e $\tilde{g}$. Seja $h > 0$ e $[x-h, x+h] \subset X$. Digamos que $\tilde{g}$ é uma variável aleatória distribuída segundo uma loteria simples que atribui probabilidade $0{,}5 - p(x,u_2,h)$ ao resultado x-h e probabilidade $0{,}5 + p(x,u_2,h)$ ao resultado x+h. Então $C(x,u_2,\tilde{g}) = E(\tilde{g}) = x$. Como $C(x,u_1,\tilde{g}) \geq C(x,u_2,\tilde{g})$, então $C(x,u_1,\tilde{g}) \geq x$. Assim, $u_1[C(x,u_1,\tilde{g})] \geq u_1(x)$. Temos que $u_1[C(x,u_1,\tilde{g})] = [0{,}5 - p(x,u_2,h)]u_1(x-h)$ $+ [0{,}5 + p(x,u_2,h)]u_1(x+h) \Rightarrow u_1[C(x,u_1,\tilde{g})] = 0{,}5u_1(x-h) + 0{,}5u_1(x+h) + p(x,u_2,h)[u_1(x+h) - u_1(x-h)]$. Além disso, $u_1(x) = [0{,}5 - p(x,u_1,h)]u_1(x-h) + [0{,}5 + p(x,u_1,h)]u_1(x+h) \Rightarrow u_1(x) = 0{,}5u_1(x-h) + 0{,}5u_1(x+h) + p(x,u_1,h)[u_1(x+h) - u_1(x-h)]$. Como $u_1[C(x,u_1,\tilde{g})] \geq u_1(x)$ então $p(x,u_2,h) \geq p(x,u_1,h)$ para quaisquer x e h.

(f)$\Rightarrow$(a) [Adaptado de Hara, Segal & Tadelis (1997)]

Suponha que $p(x,u_2,h) \geq p(x,u_1,h)$ para quaisquer x e h. Como $p(x,u_1,0) = p(x,u_2,0) = 0$, então $\frac{\partial p(x,u_2,0)}{\partial h} \geq \frac{\partial p(x,u_1,0)}{\partial h}$ (**). Diferenciando $u(x) = [0{,}5 - p(x,u,h)]u(x-h) + [0{,}5 + p(x,u,h)]u(x+h)$ duas vezes com respeito a h e avaliando em h=0, temos $4p'(x,u,0)u'(x) + u''(x) = 0 \Rightarrow r(x) = 4p'(x,u,0)$. Assim, $r_1(x) = \frac{4\partial p(x,u_1,0)}{\partial h}$ e $r_2(x) = \frac{4\partial p(x,u_2,0)}{\partial h}$. Portanto, segue de (**), que $r_2(x) \geq r_1(x)$ para todo x.

(e)$\Leftrightarrow$(c)

Suponha que $C(x,u_1,\tilde{g}) \geq C(x,u_2,\tilde{g})$ para quaisquer x e $\tilde{g}$. Como $C(x,u,\tilde{g}) = E(\tilde{g}) - \pi(x,u,\tilde{g})$, então $\pi(x,u,\tilde{g}) = E(\tilde{g}) - C(x,u,\tilde{g})$. Assim, $E(\tilde{g}) - C(x,u_2,\tilde{g}) \geq E(\tilde{g}) - C(x,u_1,\tilde{g}) \Leftrightarrow \pi(x,u_2,\tilde{g}) \geq \pi(x,u_1,\tilde{g})$. Logo, $C(x,u_1,\tilde{g}) \geq C(x,u_2,\tilde{g}) \Leftrightarrow \pi(x,u_2,\tilde{g}) \geq \pi(x,u_1,\tilde{g})$.

[20] Utilizamos aqui aversão ao risco decrescente como sinônimo de aversão ao risco não-crescente. Igualmente, consideraremos aversão ao risco crescente como sinônimo de aversão ao risco não-decrescente. Assim, uma função utilidade apresenta aversão ao risco constante se e somente se apresenta, simultaneamente, aversão ao risco decrescente e aversão ao risco crescente. Utilizando esta forma de definir, pode-se falar, quando necessário, em aversão ao risco estritamente decrescente e aversão ao risco estritamente crescente.

preocupação do indivíduo em incorrer em um dado risco. Se, por exemplo, o indivíduo possuísse um nível de riqueza \$1000, ele deveria se mostrar mais avesso a aceitar uma loteria justa com dois resultados possíveis $\{x_1, x_2\}=\{-500,500\}$ do que se sua riqueza fosse \$1 milhão. (Que diferença faria \$500 para quem tem \$1 milhão?)

Assim, analisaremos mais cuidadosamente a aversão ao risco decrescente e a aversão ao risco constante. Por ser analiticamente mais simples, começaremos pela aversão ao risco constante.

Aversão ao risco constante

A condição (3.51) nos informa que uma função utilidade de Bernoulli apresenta aversão ao risco constante se e somente se a derivada do coeficiente de Arrow-Pratt é igual a zero para todo x. Integrando $r'(x)=0$, obtemos o coeficiente de Arrow-Pratt $r(x)=c$, onde c é uma constante que pode ser zero ou um número positivo, já que, por suposição, estamos trabalhando com funções utilidade de Bernoulli côncavas e estritamente crescentes.[21]

Integrando duas vezes o coeficiente de Arrow-Pratt, obtemos as possíveis funções utilidade de Bernoulli que apresentam aversão ao risco constante:

$$u(x) = a + bx \quad \text{se} \quad r(x)=c=0 \tag{3.52}$$

$$u(x) = a - be^{-cx} \quad \text{se} \quad r(x)=c>0 \tag{3.53}$$

onde b>0.

Podemos verificar que se a aversão ao risco é localmente constante, então também é globalmente constante. De fato, para qualquer k, u(k+x) representa as mesmas preferências que u(x).[22] Assim, à medida que o indivíduo fica mais rico, o seu grau de aversão ao risco não se altera. Portanto, podemos falar em aversão ao risco constante sem a especificação "local" ou "global".

---

[21] Se a função utilidade de Bernoulli é estritamente crescente, então $u'(x)>0$. Se é côncava, então $u''(x)\leq 0$. Como $r(x)= - u''(x)/ u'(x)$, então $r(x)\geq 0$.

[22] De (3.52), $u(x) = a + bx$ se $r(x)=c=0$. Portanto, $u(k+x)=a+b(k+x) \Rightarrow u(k+x)=bk+(a+bx) \Rightarrow u(k+x)=bk+u(x)$. Portanto, u(k+x) é uma transformação linear positiva de u(x).

De (3.53), $u(x) = a - be^{-cx}$ se $r(x)=c>0$. Portanto, $u(k+x) = a - be^{-c(k+x)} \Rightarrow u(k+x) = a - be^{-ck}e^{-cx} \Rightarrow u(k+x) = a - ae^{-ck} - be^{-ck}e^{-cx} + ae^{-ck} \Rightarrow u(k+x) = a(1-e^{-ck}) + e^{-ck}(a - be^{-cx}) \Rightarrow u(k+x)=a(1-e^{-ck})+e^{-ck}u(x)$. Assim, u(k+x) é uma transformação linear positiva de u(x).

Aversão ao risco decrescente

A condição (3.49) mostra que uma função utilidade apresenta aversão ao risco decrescente se e somente se o coeficiente de Arrow-Pratt for menor ou igual a zero para todo x. Podemos verificar que isto equivale a dizer que as preferências exibem aversão ao risco decrescente se e somente se o prêmio de risco associado a qualquer risco $\tilde{z}$ é uma função decrescente da riqueza; isto é, se e somente se [23]

$$\frac{\partial \pi(x,u,\tilde{z})}{\partial x} \leq 0 \text{ para quaisquer x e } \tilde{z}. \tag{3.54}$$

A desigualdade (3.54) nos informa que quanto maior a riqueza de um indivíduo, menos ele está disposto a pagar para se livrar de um dado risco. Assim, o equivalente-certeza para um dado risco é tanto maior quanto mais rico for o indivíduo.[24]

Mas o que queremos demonstrar é que:

$$r'(x) \leq 0 \text{ para todo x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \pi(x,u,\tilde{z})}{\partial x} \leq 0 \text{ para todo x e } \tilde{z} \tag{3.55}$$

Da aproximação de Arrow-Pratt, sabemos que (3.55) é verdade para riscos infinitesimais, pois $\pi(x,u,\tilde{z}) = (1/2)E(\tilde{z}^2)r(x)$ implica que $\pi'(x,u,\tilde{z}) \leq 0 \Leftrightarrow r'(x) \leq 0$. Mas podemos ir mais adiante e verificar que a condição (3.55) é verdadeira para qualquer risco $\tilde{z}$, independentemente do seu tamanho. Para verificar isto, vamos retomar a equação (3.20), diferenciando-a com respeito a x.

$$Eu\left(x+\tilde{z}\right) = u\left[x - \pi(x,u,\tilde{z})\right]$$

$$Eu'(x+\tilde{z}) = [1-\pi'(x,u,\tilde{z})]\,u'[x-\pi(x,u,\tilde{z})]$$

---

[23] A análise que segue é baseada em Gollier (2001).

[24] Como $C(x,u,\tilde{z}) = E(\tilde{z}) - \pi(x,u,\tilde{z}) = -\pi(x,u,\tilde{z})$, então $C'(x,u,\tilde{z}) = -\pi'(x,u,\tilde{z})$. Assim, $\pi'(x,u,\tilde{z}) \leq 0 \Leftrightarrow C'(x,u,\tilde{z}) \geq 0$.

$$Eu'(x+\tilde{z}) = u'[x-\pi(x,u,\tilde{z})] - \frac{\partial\pi(x,u,\tilde{z})}{\partial x}u'[x-\pi(x,u,\tilde{z})]$$

$$\frac{\partial\pi(x,u,\tilde{z})}{\partial x}u'[x-\pi(x,u,\tilde{z})] = u'[x-\pi(x,u,\tilde{z})] - Eu'(x+\tilde{z})$$

$$\frac{\partial\pi(x,u,\tilde{z})}{\partial x} = \frac{u'[x-\pi(x,u,\tilde{z})] - Eu'(x+\tilde{z})}{u'[x-\pi(x,u,\tilde{z})]} \tag{3.56}$$

Como u'>0, o lado esquerdo da equação (3.56) é menor ou igual a zero se e somente se $Eu'(x+\tilde{z}) \geq u'[x-\pi(x,u,\tilde{z})]$. Assim, podemos afirmar que o prêmio de risco é decrescente na riqueza se e somente se a seguinte propriedade é válida:

$$Eu\left(x+\tilde{z}\right) = u\left[x - \pi(x,u,\tilde{z})\right] \Rightarrow Eu'(x+\tilde{z}) \geq u'[x-\pi(x,u,\tilde{z})] \text{ para todo x, } \pi, \tilde{z}. \tag{3.57}$$

Fazendo $u_1 = u$ e $u_2 = -u'$, a propriedade (3.57) é semelhante à condição (3.23). Sabemos que a condição necessária e suficiente para (3.23) é que a função utilidade u_1 seja mais avessa ao risco do que u_2. Assim, (3.57) é válida se e somente se -u' é mais côncava do que u. Como estamos medindo o grau de concavidade de u pelo coeficiente de Arrow-Pratt, a concavidade de -u' é: [25]

$$g(x) = -\frac{u'''(x)}{u''(x)} \tag{3.58}$$

Portanto, a função -u' é mais côncava do que a função u se e somente se o grau de concavidade de -u' é sempre maior ou igual do que o grau de concavidade de u; isto é,

-u' é mais côncava do que u $\Leftrightarrow$ $g(x) \geq r(x)$ para todo x (3.59)

---

[25] Alguém poderia se indagar sobre o porquê do sinal negativo do lado direito da equação (3.58), já que estamos medindo a concavidade de –u' e não de u'. No caso do coeficiente de Arrow-Pratt da função utilidade u, $r(x) = -u''(x)/u'(x)$, tínhamos u'(x)>0, ou seja, o denominador era positivo. Além disso, como o tomador de decisão, por suposição, é avesso ao risco, tínhamos u''(x)≤0. Assim, o sinal de menos do lado direito da igualdade que define o coeficiente de Arrow-Pratt nos garantia que quanto maior fosse o grau de concavidade de u, maior seria o coeficiente. No caso da equação (3.58), temos igualmente u''(x) ≤0, mas isto agora significa que o denominador é negativo. Portanto, para verificar o grau de concavidade de u', devemos utilizar o sinal invertido (+) no lado direito da igualdade. Mas como queremos saber o grau de concavidade de –u', devemos reinverter o sinal do lado direito, retornando ao sinal inicial (-).

Temos que,

$$r(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; r(x) - g(x) \leq 0 \tag{3.60}$$

Diferenciando r em relação a x:

$$\begin{aligned}
r'(x) &= \frac{-u'(x)u'''(x) + [u''(x)]^2}{[u'(x)]^2} \\
&= -\frac{u'''(x)}{u'(x)} + \left[\frac{u''(x)}{u'(x)}\right]^2 \\
&= -\frac{u'''(x)}{u'(x)} \cdot \frac{u''(x)}{u'(x)} + \left[\frac{u''(x)}{u'(x)}\right]^2 \\
&= g(x)[-r(x)] + [r(x)]^2
\end{aligned}$$

$$r'(x) = r(x)[r(x) - g(x)] \tag{3.61}$$

Sabemos que r (x) ≥ 0 e que r (x)-g (x) ≤ 0. Portanto, (3.61) implica que r'(x) ≤ 0. Assim, $g(x) \geq r(x) \Leftrightarrow r'(x) \leq 0$. Portanto, a demonstração de (3.55) está completa. Podemos sintetizar os resultados obtidos nesta seção pelas proposições que seguem.

Proposições equivalentes sobre aversão ao risco decrescente:

(a) O coeficiente de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt r(x) é decrescente em x.

(b) O prêmio de risco $\pi(x, u, \tilde{z})$ é decrescente em x.

(c) O equivalente-certeza $C(x, u, \tilde{z})$ é uma função crescente de x.

(d) -u' é uma transformação côncava de u; isto é, $-u'''(x)/u''(x) \geq -u''(x)/u'(x)$ para todo x.

3.2.3 Medida de aversão ao risco relativo de Arrow-Pratt

Nas seções 3.2.1 e 3.2.2, tratamos de conceitos relacionados à aversão ao risco absoluto; ou seja, trabalhamos com conceitos desenvolvidos para lidar com loterias que apresentam resultados que são ganhos ou perdas absolutas em relação ao nível corrente de riqueza.

Assim, por exemplo, se o indivíduo tivesse uma riqueza inicial x e enfrentasse um risco de ganhar ou perder \$100, o resultado desta loteria seria simplesmente somado ao nível de riqueza inicial (independentemente de quanto fosse a riqueza inicial). Se o indivíduo tivesse \$1000, ele poderia terminar com \$1100 ou \$900. Se o indivíduo tivesse \$3000, ele poderia terminar com \$3100 ou \$2900. Ou seja, as possíveis variações na riqueza eram valores absolutos (neste caso, +100 e –100) que não dependiam do nível de riqueza inicial.

Agora, iremos tratar de loterias cujos ganhos ou perdas são valores percentuais (relativos) em relação ao nível corrente de riqueza. Por exemplo, digamos que um indivíduo com riqueza inicial x enfrente um risco de ganhar ou perder 20% de sua riqueza. Portanto, neste caso, o valor em termos absolutos que o indivíduo irá ganhar ou perder, dependerá de seu nível de riqueza inicial, já que a aposta é feita em termos relativos à sua riqueza inicial. Se o indivíduo possuir \$1000, ele poderá ganhar ou perder \$200, terminando com \$1200 ou \$800. Se o indivíduo possuir \$3000, ele poderá ganhar ou perder \$600, ficando com \$3600 ou \$2400.

Generalizando, podemos afirmar que a riqueza final x_f de um indivíduo que enfrenta um risco relativo $\tilde{m}$ é $x_f = x(1+\tilde{m})$, onde a variável aleatória $\tilde{m}$ é distribuída de acordo com alguma loteria simples. Assim, definiremos o *prêmio de risco relativo* $\hat{\pi}(x,u,\tilde{m})$ como a proporção máxima da riqueza que um indivíduo estaria disposto a pagar para se livrar de um risco relativo; ou seja, seria o valor que deixaria o indivíduo indiferente entre enfrentar um risco relativo $\tilde{w}$ e receber uma quantia não-aleatória $E\left[x(1+\tilde{m})\right] - x\,\hat{\pi}(x,u,\tilde{m})$. Formalmente, definimos o prêmio de risco relativo da seguinte maneira:

$$u\left[x\left(1+E(\tilde{m})-\hat{\pi}(x,u,\tilde{m})\right)\right] = Eu\left[(1+\tilde{m})x\right] \tag{3.62}$$

De maneira análoga ao caso de um risco absoluto, mostraremos que qualquer risco relativo $\tilde{m}$ pode ser reduzido a um risco puro relativo $\tilde{w}$.[26] Segue de (3.62) que para qualquer constante Φ, temos:

[26] A partir de agora, sempre que utilizarmos a variável aleatória $\tilde{w}$, estaremos nos referindo a um risco puro relativo.

$$\hat{\pi}(x,u,\tilde{m}) = \hat{\pi}\left[x(1+\Phi),u,\tilde{m}-\Phi\right] \tag{3.63}$$

Isto porque

$$\begin{aligned} &\mathrm{Eu}\left[x\left((1+\Phi)+(\tilde{m}-\Phi)\right)\right] = u\left[x\left((1+\Phi)+E(\tilde{m}-\Phi)-\hat{\pi}(x(1+\Phi),u,\tilde{m}-\Phi)\right)\right] \\ &= \\ &\mathrm{Eu}\left[x(1+\tilde{m})\right] = u\left[x\left(1+E(\tilde{m})-\hat{\pi}(x,u,\tilde{m})\right)\right] \end{aligned} \tag{3.64}$$

Como u é estritamente crescente, então $x\left[(1+\Phi)+E(\tilde{m}-\Phi)-\hat{\pi}\left(x(1+\Phi),u,\tilde{m}-\Phi\right)\right]= x\left[1+E(\tilde{m})-\hat{\pi}(x,u,\tilde{m})\right] \Rightarrow \hat{\pi}(x,u,\tilde{m}) = \hat{\pi}\left[x(1+\Phi),u,\tilde{m}-\Phi\right]$.

Fazendo $\Phi = E(\tilde{m})$, podemos passar a analisar o risco relativo $\tilde{m}-\Phi$, que é puro, ou seja, $E(\tilde{m}-\Phi)=0$. Para finalizar a redução, fazemos $\tilde{w} = \tilde{m}-\Phi$. O prêmio de risco relativo de $\tilde{w}$ é igual ao prêmio de risco relativo de $\tilde{m}$, como mostra a equação (3.63). Como no caso dos riscos absolutos, esta redução nos facultará trabalhar apenas com riscos puros relativos.

Assim, se $E(\tilde{w})=0$, então, a definição de prêmio de risco relativo, $u\left[x\left(1+E(\tilde{w})-\hat{\pi}(x,u,\tilde{w})\right)\right] = \mathrm{Eu}\left[(1+\tilde{w})x\right]$ se reduz a:

$$u\left[x\left(1-\hat{\pi}(x,u,\tilde{w})\right)\right] = \mathrm{Eu}\left[(1+\tilde{w})x\right] \tag{3.65}$$

Podemos verificar facilmente que há uma relação entre o prêmio de risco relativo $\hat{\pi}(x,u,\tilde{w})$ e o prêmio de risco (absoluto) $\pi(x,u,x\tilde{w})$. Rearranjando a igualdade (3.65), podemos obter:

$$u\left[x - x\hat{\pi}(x,u,\tilde{w})\right] = \mathrm{Eu}\left(x+x\tilde{w}\right) \tag{3.66}$$

O lado direito da igualdade (3.66) pode ser interpretado em termos de um risco absoluto. Portanto, podemos obter o prêmio de risco (absoluto) para o risco representado no lado direito da igualdade. Assim,

$$u\left[x - \pi(x,u,x\tilde{w})\right] = \mathrm{Eu}\left(x+x\tilde{w}\right) \tag{3.67}$$

De (3.66) e (3.67), temos

$$u\left[x - x\hat{\pi}(x,u,\tilde{w})\right] = u\left[x - \pi(x,u,x\tilde{w})\right]$$

Como u é estritamente crescente, então

$$x - x\hat{\pi}(x,u,\tilde{w}) = x - \pi(x,u,x\tilde{w})$$

$$\hat{\pi}(x,u,\tilde{w}) = \frac{\pi(x,u,x\tilde{w})}{x} \tag{3.68}$$

ou

$$\pi(x,u,x\tilde{w}) = x\,\hat{\pi}(x,u,\tilde{w}) \tag{3.69}$$

As equações (3.68) e (3.69) indicam a relação existente entre o prêmio de risco relativo e o prêmio de risco. Note que este resultado é bastante intuitivo. Ambos $\hat{\pi}(x,u,\tilde{w})$ e $\pi(x,u,x\tilde{w})$ são referentes a mesma loteria. Portanto, o valor que o indivíduo se dispõe a pagar para se livrar do risco, em termos absoluto, deve ser o mesmo, seja calculado através de $\pi(x,u,x\tilde{w})$, seja calculado através de $x\,\hat{\pi}(x,u,\tilde{w})$. Veja que $\pi(x,u,x\tilde{w})$ é um valor absoluto em termos monetários. Por outro lado, $\hat{\pi}(x,u,\tilde{w})$ é uma proporção relativa do nível de riqueza. Assim, multiplicando $\hat{\pi}(x,u,\tilde{w})$ pela riqueza x, obtemos o valor absoluto em termos monetários que o indivíduo se dispõe a pagar, que é exatamente $\pi(x,u,x\tilde{w})$.

Podemos definir também o equivalente-certeza relativo, que é medido em termos de proporção da riqueza do indivíduo. O *equivalente-certeza relativo* $\hat{C}(x,u,\tilde{w})$ e é tal que deixa o indivíduo indiferente entre aceitar a quantia certa $x\,\hat{C}(x,u,\tilde{w})$ e aceitar enfrentar o risco relativo $\tilde{w}$. Assim,

$$u\left[x\left(1+\hat{C}(x,u,\tilde{w})\right)\right] = Eu\left[x(1+\tilde{w})\right] \tag{3.70}$$

Como no caso do prêmio de risco, o equivalente-certeza relativo está relacionado com o equivalente-certeza (absoluto). Rearranjando (3.70), podemos obter:

$$u\left[x + x\hat{C}(x,u,\tilde{w})\right] = Eu\left(x + x\tilde{w}\right) \tag{3.71}$$

O lado direito da igualdade (3.71) pode ser interpretada em termos de um risco absoluto $x\tilde{w}$. Portanto, podemos calcular o equivalente-certeza referente ao risco $x\tilde{w}$:

$$u\left[x + C(x,u,x\tilde{w})\right] = Eu\left(x + x\tilde{w}\right) \tag{3.72}$$

De (3.71) e (3.72), obtemos:

$$u\left[x + x\hat{C}(x,u,\tilde{w})\right] = u\left[x + C(x,u,x\tilde{w})\right]$$

Como u é estritamente crescente, temos

$$x + x\hat{C}(x,u,\tilde{w}) = x + C(x,u,x\tilde{w})$$

$$\hat{C}(x,u,\tilde{w}) = \frac{C(x,u,x\tilde{w})}{x} \tag{3.73}$$

ou

$$C(x,u,x\tilde{w}) = x\hat{C}(x,u,\tilde{w}) \tag{3.74}$$

A partir de (3.73) e (3.74), podemos perceber que a relação entre os equivalentes-certeza relativo e absoluto é análoga à relação entre os prêmios de risco relativo e absoluto. O equivalente-certeza (absoluto) referente ao risco absoluto $x\tilde{w}$ é igual ao equivalente-certeza relativo, referente ao risco $\tilde{w}$, multiplicado pela riqueza x.

Além do prêmio de risco relativo e do equivalente-certeza relativo, podemos utilizar uma medida específica de aversão ao risco para riscos relativos da mesma maneira que utilizamos a função r(x) como uma medida de aversão ao risco para riscos absolutos. Abaixo, definimos a medida.

Coeficiente de aversão ao risco relativo de Arrow-Pratt. Dado uma função utilidade u (duas vezes continuamente diferenciável, côncava e estritamente crescente),

$$\hat{r}(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{3.75}$$

é o coeficiente de aversão ao risco relativo de Arrow-Pratt.

Para interpretar $\hat{r}(x)$, utilizaremos novamente a aproximação de Arrow-Pratt, agora para o caso do risco relativo. Seja $\tilde{w} = k\tilde{y}$, onde $E(\tilde{y}) = 0$. De (3.65), obtemos:

$$Eu\left[(1+k\tilde{y})x\right] = u\left[x\left(1-\hat{\pi}(x,u,k\tilde{y})\right)\right] \tag{3.76}$$

Fazendo $\hat{g}(k) = \hat{\pi}(x,u,k\tilde{y})$, então $\hat{g}(0) = 0$ e

$$Eu\left[(1+k\tilde{y})x\right] = u\left[(1-\hat{g}(k))x\right]$$

Diferenciando os dois lados da equação em relação a k:

$$E\tilde{y}\,x\,u'\left[(1+k\tilde{y})x\right] = -\hat{g}'(k)\,x\,u'\left[\left(1-\hat{g}(k)\right)x\right] \tag{3.77}$$

Como $E(\tilde{y}) = 0$, a igualdade (3.77) implica que $\hat{g}'(0) = 0$. Diferenciando (3.77), novamente em relação a k:

$$E\tilde{y}^2\,x^2\,u''\left[(1+k\tilde{y})x\right] = [\hat{g}'(k)]^2x^2u''\left[\left(1-\hat{g}(k)\right)x\right] - \hat{g}''(k)\,x\,u'\left[\left(1-\hat{g}(k)\right)x\right]$$

Fazendo k=0:

$$x^2E\tilde{y}^2u''(x) = -\hat{g}''(0)\,x\,u'(x)$$

$$\hat{g}''(0) = -E\tilde{y}^2\,x\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{3.78}$$

Fazendo uma expansão de Taylor em g ao redor de k, obtemos:

$$\hat{\pi}(x,u,k\tilde{y}) = \hat{g}(k) \cong \hat{g}(0) + k\hat{g}'(0) + \frac{1}{2}k^2\hat{g}''(0) \tag{3.79}$$

Se valendo do fato que $\hat{g}(0) = \hat{g}'(0) = 0$ e substituindo (3.78) em (3.79), obtemos:

$$\hat{\pi}(x,u,k\tilde{y}) \cong -\frac{1}{2}Ek^2\,\tilde{y}^2\,x\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

$$\hat{\pi}(x,u,k\tilde{y}) \cong -\frac{1}{2}E\tilde{w}^2x\frac{u''(x)}{u'(x)} \tag{3.80}$$

Assim,

$$\hat{\pi}(x,u,\tilde{w}) \cong \frac{1}{2}E\tilde{w}^2\hat{r}(x) \tag{3.81}$$

O resultado (3.81) é a aproximação de Arrow-Pratt. A aproximação indica que o prêmio de risco relativo para um risco relativo infinitesimal é aproximadamente igual à metade da variância do risco relativo, multiplicada pelo coeficiente de aversão ao risco relativo de Arrow-Pratt.

Rearranjando (3.81), obtemos:

$$\hat{r}(x) \cong \frac{2\hat{\pi}(x,u,\tilde{w})}{\mathrm{var}(\tilde{w})} \tag{3.82}$$

Portanto, o coeficiente de aversão ao risco relativo de Arrow-Pratt para um risco $\tilde{w}$ é aproximadamente duas vezes o prêmio de risco relativo por unidade de variância de $\tilde{w}$. Alternativamente, $\hat{r}(x)$ mede a proporção máxima da riqueza que um indivíduo está disposto a pagar para se livrar de um risco puro relativo infinitesimal com variância 2.

Note que, diferentemente do coeficiente de aversão ao risco absoluto, o coeficiente de aversão ao risco relativo é independente da unidade monetária utilizada para a riqueza. Além disso, comparando (3.75) e (3.33), podemos perceber que:

$$\hat{r}(x) = x\,r(x) \tag{3.83}$$

Isto é, a medida de Arrow-Pratt de aversão ao risco relativo é igual à medida de Arrow-Pratt de aversão ao risco absoluto, multiplicada pelo nível de riqueza.

Sob o ponto de vista da análise da aversão ao risco relativo em relação ao nível de riqueza, a aversão ao risco relativo pode ser decrescente, constante ou crescente à medida que a riqueza aumenta. Assim, uma função utilidade de Bernoulli u exibe:

$$\text{Aversão ao risco relativo decrescente} \;\Leftrightarrow\; \hat{r}'(x) \le 0 \quad \text{para todo x} \tag{3.84}$$

$$\text{Aversão ao risco relativo constante} \;\Leftrightarrow\; \hat{r}'(x) = 0 \quad \text{para todo x} \tag{3.85}$$

$$\text{Aversão ao risco relativo crescente} \;\Leftrightarrow\; \hat{r}'(x) \ge 0 \quad \text{para todo x} \tag{3.86}$$

Quais, destas suposições, são mais razoáveis para a modelagem da tomada de decisão? Esta questão é controvertida e as evidências empíricas não são conclusivas. Quando se faz alguma suposição em relação ao risco relativo dos agentes econômicos, geralmente se opta por (3.84) ou (3.85). Assim, analisaremos, em separado, cada uma destas duas possibilidades.

Aversão ao risco relativo constante

Quando o coeficiente de aversão ao risco relativo é constante, digamos, $\hat{r}(x) = c$, temos, por (3.83), que $r(x) = c/x$. Ou seja, neste caso, a aversão ao risco é decrescente para $c \ge 0$.[27] Por outro lado, como assumimos que os indivíduos são avessos ao risco, automaticamente eliminamos a possibilidade de $c < 0$.

As funções utilidade de Bernoulli que exibem aversão ao risco relativo constante podem assumir três formas funcionais, obtidas com a dupla integração de $\hat{r}(x) = c$:

[27] Mais detalhadamente, a aversão ao risco é constante para c=0 e estritamente decrescente para c>0.

$$u(x) = x^{1-c} \quad \text{se} \quad 0 \le c < 1 \tag{3.87}$$
$$u(x) = \log\ x \quad \text{se} \quad c = 1 \tag{3.88}$$
$$u(x) = -x^{1-c} \quad \text{se} \quad c > 1 \tag{3.89}$$

Se a aversão ao risco relativo é localmente constante, como em (3.87), (3.88) e (3.89), então também é globalmente constante, já que $u(kx)$ é uma transformação linear positiva de $u(x)$ em cada um destes casos acima.[28]

Aversão ao risco relativo decrescente

Como indica (3.84), uma função utilidade de Bernoulli apresenta aversão ao risco relativa decrescente se e somente se a derivada do coeficiente de aversão ao risco relativo for menor ou igual a zero para todo x. Note que:

Aversão ao risco relativo decrescente $\Rightarrow$ Aversão ao risco decrescente (3.90)

mas

Aversão ao risco decrescente $\not\Rightarrow$ Aversão ao risco relativo decrescente. (3.91)

Ou seja, a aversão ao risco relativo decrescente é uma suposição mais forte do que a aversão ao risco decrescente. Para verificarmos isto, suponha inicialmente que o coeficiente de aversão ao risco relativo é decrescente; isto é, $\hat{r}'(x) \le 0$ para todo x. Rearranjando a igualdade (3.83),

$$\hat{r}(x) = x\, r(x) \Rightarrow r(x) = \frac{\hat{r}(x)}{x}$$

Diferenciando em relação a x:

$$r'(x) = \frac{x\hat{r}'(x) - \hat{r}(x)}{x^2}$$

[28] De (3.87), $u(x) = x^{1-c} \;\Rightarrow\; u(kx)=(kx)^{1-c} \;\Rightarrow\; u(kx)=k^{1-c}x^{1-c} \;\Rightarrow\; u(kx)=k^{1-c}u(x)$.
De (3.88), $u(x) = \log\ x \;\Rightarrow\; u(kx) = \log\ kx \;\Rightarrow\; u(kx) = \log\ k + \log x \;\Rightarrow\; u(kx) = \log\ k + u(x)$.
De (3.89), $u(x) = -x^{1-c} \;\Rightarrow\; u(kx)=-(kx)^{1-c} \;\Rightarrow\; u(kx)=(-k^{1-c})(-x^{1-c}) \;\Rightarrow\; u(kx)=(-k^{1-c})u(x)$.

Como $\hat{r}'(x) \leq 0$ para todo x, então $r'(x) \leq 0$ para todo x. Assim, (3.90) está demonstrado.

Agora suponha que o coeficiente de aversão ao risco absoluto é decrescente; isto é, $r'(x) \leq 0$ para todo x. Diferenciando (3.83) em relação a x, obtemos:

$$\hat{r}'(x) = x\,r'(x) + r(x)$$

Como $r'(x) \leq 0$, então

$$\hat{r}'(x) \leq 0 \text{ se } -x\,r'(x) \geq r(x)$$

$$\hat{r}'(x) > 0 \text{ se } -x\,r'(x) < r(x)$$

Portanto, demonstramos (3.91); isto é, aversão ao risco decrescente não implica necessariamente em aversão ao risco relativo decrescente.

Por outro lado, existem diversos modos de caracterizar a aversão ao risco relativo decrescente. Abaixo, listamos algumas caracterizações equivalentes.

Proposições equivalentes sobre aversão ao risco relativo decrescente. Seja um tomador de decisão com uma função utilidade de Bernoulli u, pode-se demonstrar que as seguintes proposições são equivalentes:

(a) O coeficiente de aversão ao risco relativo de Arrow-Pratt é decrescente em x.
(b) O prêmio de risco relativo $\hat{\pi}(x, u, \tilde{w})$ é decrescente em x.
(c) O equivalente-certeza relativo $\hat{C}(x, u, \tilde{w})$ é crescente em x.

Com as proposições equivalentes sobre aversão ao risco relativo decrescente, finalizamos as nossas análises referentes a medidas de aversão ao risco. Cabe ainda destacar que as medidas de aversão ao risco de Arrow-Pratt desempenharam um importante papel na história da utilidade esperada e mostraram-se instrumentos analiticamente convenientes para o desenvolvimento de teorias econômicas.

Evidentemente, isto não impediu que, ao longo do tempo, surgissem novas medidas de aversão ao risco, como, por exemplo, *o coeficiente de aversão ao risco parcial.*[29] Porém, as medidas de Arrow-Pratt são as de uso mais difundido na literatura econômica.

Antes de encerrarmos este capítulo, faremos uma breve introdução a um importante conceito relacionado com a teoria da decisão – a dominância estocástica; mais especificamente, a dominância estocástica em primeira ordem, considerada o princípio mais fundamental de racionalidade no contexto da decisão sob incerteza.

3.3 Dominância estocástica

A literatura em dominância estocástica iniciou da seguinte forma: suponha que a função utilidade de Bernoulli u de um indivíduo é crescente.[30] Porém, digamos que não sabemos a forma exata da função utilidade. Dadas duas loterias L_1 e L_2, será que existe algum critério para podermos afirmar inequivocamente que uma loteria L_1 é fracamente preferível a L_2?

Em geral, não é possível estabelecer o ordenamento de um indivíduo com tão pouca informação. Contudo, há casos em que podemos afirmar de forma não-ambígua que uma loteria fornece maiores retornos do que outra, independentemente da avaliação subjetiva do agente quanto ao risco. Assim, desde que L_1 e L_2 satisfaçam certa condição, podemos de fato verificar que $L_1 \succsim L_2$. Se essa condição for satisfeita, então todos os agentes que apresentam preferências monotônicas devem considerar L_1 fracamente preferível a L_2.

---

[29] O *coeficiente de aversão ao risco parcial* é definido da seguinte forma:

$$r_p = -(x - x_0)\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

onde x_0 é um nível base escolhido. O coeficiente de aversão ao risco parcial mede a disposição em aceitar riscos expressos como uma proporção de x-x_0. (Cf. Quiggin, 1993).

[30] O primeiro artigo que ofereceu um tratamento sistemático à dominância estocástica no âmbito da teoria da decisão foi "*Rules for ordering uncertain prospects*" de Hadar & Russel (1969), que além de tratar da dominância estocástica em primeira ordem (já analisada por James Quirk e Ruben Saposnik em 1962), introduziu o conceito de dominância estocástica em segunda ordem.

Tal condição é conhecida como condição de *dominância estocástica em primeira ordem* (FSD – “*fist-order stochastic dominance”*). Desde que u seja crescente, sempre que uma loteria L dominar estocasticamente outra em primeira ordem, o indivíduo considerará a loteria L fracamente preferível à outra. Vejamos abaixo, a definição formal de dominância estocástica em primeira ordem.

Dominância estocástica em primeira ordem. Seja L_1, $L_2 \in \mathscr{L}$ tal que $L_1 = (p_1, ..., p_n)$ e $L_2 = (q_1, ..., q_n)$, então L_1 domina estocasticamente L_2 em primeira ordem se

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i) \qquad (3.92)$$

para toda função $u : X \to \Re$ crescente. Neste caso, escrevemos $L_1 \geq_{SD} L_2$.

Ou seja, a condição (3.92) afirma que a loteria L_1 domina estocasticamente L_2 em primeira ordem se a loteria L_1 é fracamente preferível a L_2 para todas as funções utilidade de Bernoulli crescentes. Assim, podemos enunciar o seguinte princípio.

Princípio da dominância estocástica em primeira ordem. Quando L_1 dominar estocasticamente L_2 em primeira ordem, L_1 é fracamente preferível a L_2; isto é,

$$L_1 \geq_{SD} L_2 \Rightarrow L_1 \succsim L_2 \qquad (3.93)$$

Sempre que as preferências forem monotônicas, o princípio da dominância estocástica em primeira ordem é satisfeito. De fato, é possível demonstrar que a suposição de monotonicidade equivale ao princípio da dominância estocástica em primeira ordem.

Abaixo, temos uma proposição que nos permitirá identificar quando uma loteria domina (em termos de FSD) outra.

Proposição. Digamos que $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sejam, respectivamente, as funções de distribuição acumulada de L_1 e L_2. É possível demonstrar que L_1 domina estocasticamente em primeira ordem L_2 se e somente se $F_1(x) \leq F_2(x)$ para todo x. Isto é,

$$L_1 \geq_{SD} L_2 \Leftrightarrow F_1(x) \leq F_2(x) \text{ para todo x} \tag{3.94}$$

Assim, L_1 domina estocasticamente em primeira ordem L_2 sempre que, para cada resultado possível x, a probabilidade de ganhar até x na loteria L_1 é menor ou igual à probabilidade de ganhar até x na loteria L_2. Podemos perceber que a dominância estocástica expressa um forte senso de racionalidade. Para observar isto mais claramente, é conveniente interpretarmos a condição (3.94) sobre outra ótica, rearranjando-a:

$$L_1 \geq_{SD} L_2 \Leftrightarrow 1-F_1(x) \geq 1-F_2(x) \text{ para todo x} \tag{3.95}$$

Ou seja, a loteria L_1 domina estocasticamente L_2 em primeira ordem se e somente se, para cada resultado possível x, a probabilidade de ganhar mais do que x na loteria L_1 é sempre maior ou igual do que na loteria L_2. Como parece bastante razoável que um indivíduo prefira probabilidades maiores para os prêmios maiores, há um forte caráter normativo no princípio da dominância estocástica em primeira ordem. É difícil imaginar um indivíduo que não queira se comportar segundo o princípio da FSD.

Vejamos um exemplo de FSD. Digamos que $\{x_1, x_2, x_3\} = \{50, 200, 500\}$, $L_1=(0; 0,4; 0,6)$ e $L_2=(0,6; 0,2; 0,2)$. Sejam $F_1(x)$ e $F_2(x)$ as funções distribuição acumuladas de L_1 e L_2, respectivamente. Então podemos traçar o gráfico da figura 3.13.

A figura mostra que o gráfico de $F_1(x)$ nunca está acima do gráfico de $F_2(x)$. Isto equivale a $F_1(x) \leq F_2(x)$ para todo x. Portanto, em termos gráficos, $L_1 \geq_{SD} L_2$ se e somente se o gráfico da função distribuição acumulada de L_1 nunca estiver acima do gráfico da função distribuição acumulada de L_2. Podemos perceber que, para qualquer x, a probabilidade de um resultado superior a x é maior na loteria L_1. Testemos, por exemplo, para x = 200. A probabilidade de que o resultado seja maior do que 200 é 0,6 na loteria 1 e 0,4 na loteria 2. Se testássemos todas possibilidades, verificaríamos que a probabilidade de resultados maiores (e, portanto, preferíveis) seriam sempre maiores na loteria L_1.

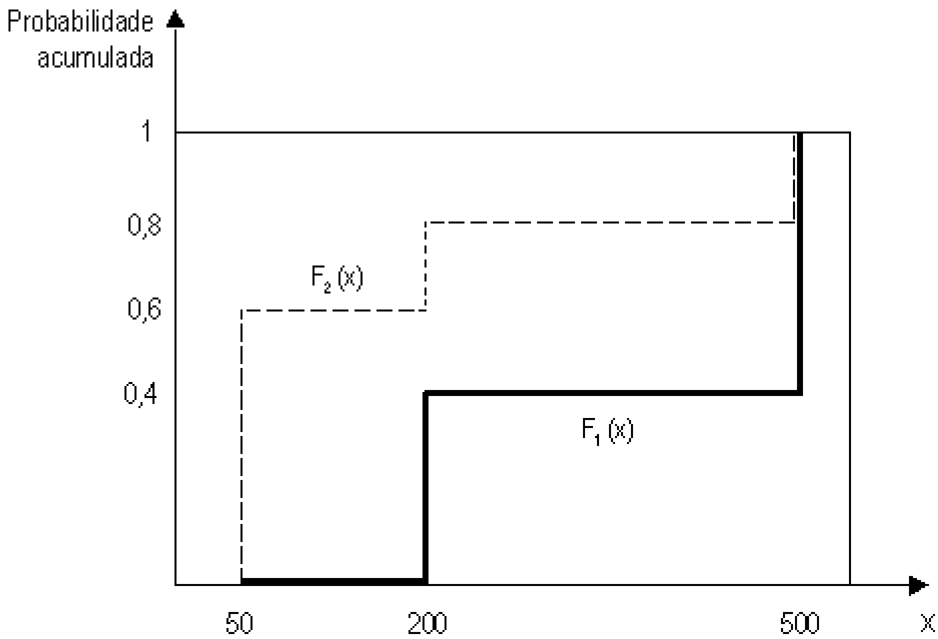


Figura 3.13 – Dominância estocástica em primeira ordem

Um ponto importante a observar é que a FSD não implica que todo resultado possível de uma loteria seja maior do que todo resultado possível da outra. De fato, no nosso exemplo, apesar de $L_1 \geq_{SD} L_2$, o conjunto de resultados possíveis era o mesmo para as duas loterias.

Outro aspecto relevante é que se L_1 domina estocasticamente em primeira ordem L_2, então o valor esperado de L_1, $E(L_1) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, é maior ou igual ao valor esperado de L_2, $E(L_2) = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$. Porém, o contrário não é verdadeiro; isto é, $E(L_1) \geq E(L_2)$ não implica necessariamente $L_1 \geq_{SD} L_2$. Verifiquemos estas afirmações.

Sabemos que $L_1 \geq_{SD} L_2$ se

$$\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i)$$

Se a desigualdade acima for válida para toda função $u : X \to \Re$ crescente, então é válida para o caso particular $u(x) = x$. Assim,

$$L_1 \geq_{SD} L_2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} q_i x_i \tag{3.96}$$

O resultado (3.96) indica que o valor esperado de L_1 é maior ou igual ao valor esperado de L_2, que foi a primeira afirmação que fizemos.

Para demonstrar a segunda afirmação, de que o contrário não é verdadeiro, podemos utilizar um contra-exemplo. Suponha que $\{x_1, x_2, x_3\} = \{0, 50, 100\}$, $L_1 = (0,4; 0; 0,6)$ e $L_2 = (0,1; 0,8; 0,1)$. Assim, temos $E(L_1) = 60$ e $E(L_2) = 50$. Porém, L_1 não domina estocasticamente L_2 em primeira ordem. A probabilidade da loteria L_1 gerar um resultado maior do que zero é 0,6; enquanto que a probabilidade da loteria L_2 gerar um resultado maior do que zero é 0,9. Está claro, portanto, que L_1 não domina L_2 em termos de FSD. A figura 3.14 mostra os gráficos deste exemplo. Note que $F_1(x)$ está ora acima e ora abaixo de $F_2(x)$, implicando que não há relação de FSD entre estas duas loterias.

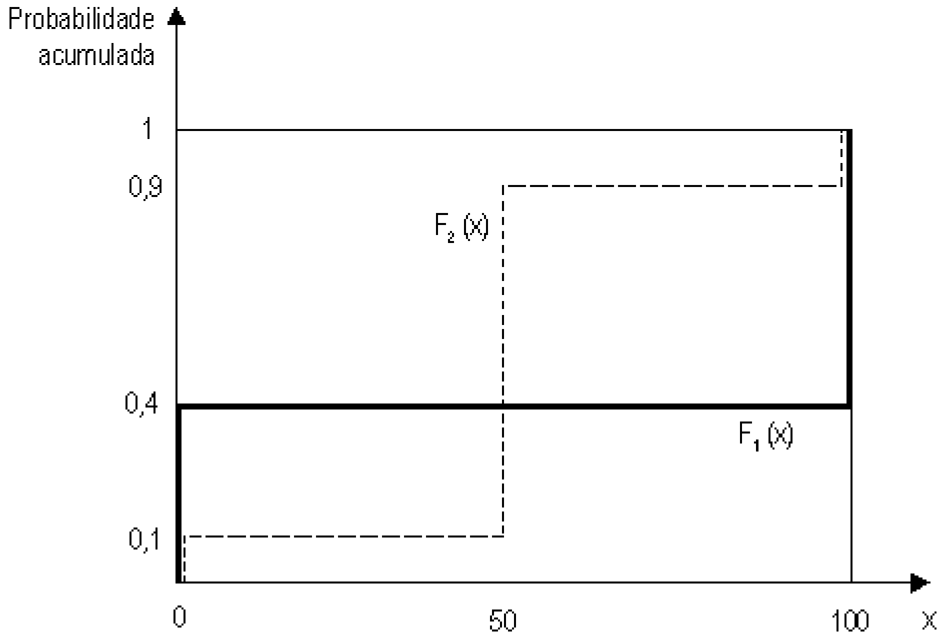


Figura 3.14 – Exemplo em que não há FSD

Embora o conceito de FSD seja central na área de dominância estocástica, vários outros conceitos de dominância estocástica foram propostos na literatura econômica. A maioria deles pode ser interpretado em termos de um requerimento para que todos os tomadores de decisão, com funções utilidades em uma dada classe, sempre considerem determinada loteria fracamente preferível à outra.

De certa forma, podemos dizer que o objeto de estudo da teoria da dominância estocástica é determinar sob quais condições sobre as funções de distribuição acumulada, referentes a dois riscos quaisquer $\tilde{g}_1$ e $\tilde{g}_2$, a desigualdade $Eu(\tilde{g}_1) \geq Eu(\tilde{g}_2)$ é válida para qualquer função utilidade de Bernoulli em um conjunto de funções Υ. Assim, por exemplo, sob o conceito de *dominância estocástica em segunda-ordem* (SSD), Υ é o conjunto de todas funções u côncavas crescentes.[31] (No caso da FSD, Υ é o conjunto de todas funções u crescentes.)

Assim, encerramos a análise de instrumentos para tratamento de risco sob a teoria da utilidade esperada. Certamente, não esgotamos todas as possibilidades, mas a amostra é suficiente para percebermos que a EU é uma teoria bastante flexível – que disponibiliza um instrumental analítico bastante ágil.

Apesar disso, como veremos, os resultados experimentais obtidos nas últimas décadas não têm sido muito favoráveis com a EU, gerando diversas evidências anômalas. Assim, no próximo capítulo, trataremos dos paradoxos da teoria da utilidade esperada.

[31] Sobre SSD, ver Hadar & Russel (1969).

4. PARADOXOS DA TEORIA DA UTILIDADE ESPERADA

Os axiomas de Von Neumann e Morgenstern tornaram-se populares entre os economistas. Somados à interpretação operacionalista da utilidade, que conferiu à EU um caráter mais consoante com os preceitos científicos, permitiram que a incerteza fosse modelada a partir de uma teoria que, apesar de relativamente simples, fosse apoiada em sólidos fundamentos axiomáticos.

Porém, algumas dificuldades começaram a surgir. Em 1953, *Maurice Allais* formulou um problema de escolha envolvendo dois pares de loterias, que mais tarde ficou conhecido como *Paradoxo de Allais*. Allais pediu a *Leonard J. Savage*, teórico fortemente defensor da teoria da utilidade esperada, que fizesse suas escolhas. Savage fez suas escolhas e Allais prontamente apontou que ele havia violado o axioma da independência.

No decorrer dos anos, outros paradoxos apareceram e, a partir do surgimento do "paradigma experimental", as evidências de violação da EU acumularam-se. Estas evidências sugerem que os indivíduos não seguem usualmente o axioma da independência, embora seu apelo normativo.

Mas as violações não se encerram no axioma da independência. Vários psicólogos, como *Daniel Kahneman*, *Amos Tversky*, *Sarah Lichtenstein* e *Paul Slovic*, descobriram fenômenos que desafiam o "bom-senso" e, também, a teoria da utilidade esperada. Parece que as escolhas estão sujeitas à falta de invariância.[1] Peça para que alguém escolha entre duas loterias. Depois, peça para que este mesmo indivíduo atribua um valor para cada uma delas. Mas não espere que o maior valor seja atribuído para a loteria escolhida. Além disso, aplique um mesmo problema de escolha, alterando apenas a sua "roupagem", e não se surpreenda se os indivíduos alterarem completamente suas decisões.

Para tentar compreender estes fenômenos, analisaremos alguns dos principais paradoxos conhecidos da EU. Assim, na seção 4.1, trataremos do Paradoxo de Allais, que é, na verdade, um caso particular de um fenômeno mais amplo, conhecido como *efeito da conseqüência comum*. Veremos que o efeito da conseqüência comum deriva da não-observância da propriedade da conseqüência comum.

Na seção 4.2, analisaremos o *Paradoxo da razão comum*, também derivado de um exemplo concebido por Maurice Allais. Veremos que este paradoxo viola o axioma da independência a partir da não-observância da propriedade da razão comum.

Na seção 4.3, discutiremos o *fenômeno da reversão das preferências*. Veremos que este fenômeno é incompatível com a *invariância de procedimento*, suposição implícita da EU.

Na seção 4.4, nos ocuparemos com o *"framing effect"*. Veremos que o *framing effect* é uma violação da *invariância de descrição,* outra suposição implícita da EU.

Nas últimas seções, veremos as duas posições distintas que os teóricos da decisão têm tomado em relação aos paradoxos da EU. Na seção 4.5, trataremos da posição dos teóricos que defendem o desenvolvimento e a utilização de novas teorias. Veremos alguns fatos estilizados que eles levantaram em relação à escolha sob incerteza e faremos uma rápida introdução às duas principais teorias desenvolvidas para acomodar as violações da EU.

Na seção 4.6, trataremos da posição dos teóricos que consideram que a EU é a teoria mais adequada. Veremos que o principal argumento que sustenta este ponto de vista é o *argumento evolucionista*.

---

[1] As escolhas estão sujeitas à falta de invariância quando mudanças na forma de apresentar o problema (sem modificar as conseqüências finais) e a maneira de eliciar as preferências afetam o ordenamento das preferências.

4.1 Paradoxo de Allais e o efeito da conseqüência comum

No capítulo 2, vimos que o axioma da independência tem um forte apelo normativo. Assim, não é surpreendente que nos primeiros anos que se seguiram à publicação de *Theory of games and economic behavior*, o axioma da independência tenha passado incólume, às vezes até, sendo considerado o mais "natural" e "auto-evidente" dos axiomas da EU.

> "... o axioma [da independência] parece indubitavelmente o mais plausível de todos. Afinal de contas, todos os axiomas são necessários para o resultado final, e este axioma particular é quase inexpugnável (mesmo indivíduos que não o seguem na prática, provavelmente admitiriam, sob reflexão, que deveriam segui-lo), ao passo que outros são contraditos por muito da experiência diária." (Ellsberg, 1954, p.544).

Ellsberg certamente não esperava o que estava por vir. Em 1953, Maurice Allais já havia lançado um desafio, publicando um problema de escolha em que este acreditava que a maior parte dos indivíduos escolheriam violando o axioma da independência.[2] Posteriormente, repetidas evidências experimentais confirmaram a sua suspeita. O problema que Allais concebeu ficou conhecido como *Paradoxo de Allais* e gerou uma vasta quantidade de artigos – milhares deles – mas o impacto e o significado do Paradoxo de Allais para a EU não é ainda ponto de acordo entre os especialistas. O que é certo, porém, é que o axioma da independência é hoje o axioma mais polêmico da teoria da utilidade esperada.

4.1.1 Paradoxo de Allais

O problema de escolha proposto por Allais envolve dois pares de loterias. Na figura 4.1, representamos estas loterias. A loteria L_1, por exemplo, fornece \$1 milhão com certeza, e a loteria L_2 fornece \$5 milhões com probabilidade 0,10, \$1 milhão com probabilidade 0,89 e \$0 com probabilidade 0,01.[3] Em cada par, o tomador de decisão deve escolher uma loteria. Assim, no primeiro par, o tomador de decisão dever escolher entre as loterias L_1 e L_2, e no segundo, deve escolher entre as loterias L_3 e L_4.

---

[2] Ver Allais (1953).

[3] O problema de escolha aqui apresentado está ligeiramente diferente do original apresentado por Allais (1953). Os prêmios apresentados originalmente em seu artigo foram \$500 milhões, \$100 milhões e \$0, de francos. Na nossa apresentação, estamos pensando em termos de dólares.

$$L_1 = \left\{ 1 \text{ —— } \$1 \text{ milhão} \right\} \quad \text{versus} \quad L_2 = \left\{ \begin{array}{l} 0{,}10 \text{ —— } \$5 \text{ milhões} \\ 0{,}89 \text{ —— } \$1 \text{ milhão} \\ 0{,}01 \text{ —— } \$0 \end{array} \right\}$$

$$L_3 = \left\{ \begin{array}{l} 0{,}10 \text{ —— } \$5 \text{ milhões} \\ 0{,}90 \text{ —— } \$0 \end{array} \right\} \quad \text{versus} \quad L_4 = \left\{ \begin{array}{l} 0{,}11 \text{ —— } \$1 \text{ milhão} \\ 0{,}89 \text{ —— } \$0 \end{array} \right\}$$

Figura 4.1 – Problema de escolha que gera o Paradoxo de Allais

Em experimentos realizados, a maioria dos indivíduos preferiu L_1 no primeiro par e L_3 no segundo par. Porém, estas escolhas não são compatíveis com a teoria da utilidade esperada. Vejamos por quê.

Se $L_1 \succ L_2$, então

$$u(1mi) > 0{,}10u(5mi) + 0{,}89u(1mi) + 0{,}01u(0)$$

Se a relação de preferências do tomador de decisão satisfaz o axioma da independência, então, adicionando $0{,}89u(0) - 0{,}89u(1mi)$ em ambos os lados, temos que:

$$0{,}89u(0) + 0{,}11u(1mi) > 0{,}10u(5mi) + 0{,}90u(0) \Rightarrow L_4 \succ L_3 \qquad (4.1)$$

O resultado (4.1) indica que a EU prediz que o tomador de decisão que escolhe L_1 no primeiro par, escolhe L_4 no segundo par. Esta predição, como vimos, não é confirmada pelas evidências experimentais. Definindo $\{x_1,x_2,x_3\}$={\$0, \$1 milhão, \$5 milhões}, as loterias da figura 4.1 podem ser vistas formando um paralelograma na figura 4.2. Nesta figura, representamos curvas de indiferença que são compatíveis com a EU e que geram a escolha da loteria L_1 no primeiro par. Podemos observar que a loteria L_4 está em uma curva de indiferença mais elevada do que L_3, implicando que L_4 é preferível a L_3.

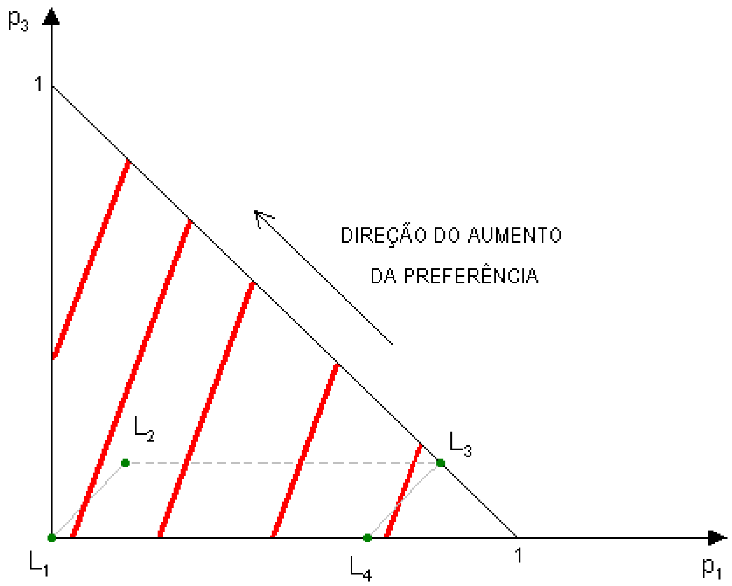


Figura 4.2 – Curvas de indiferença EU e o Paradoxo de Allais

Mas, em termos intuitivos, por que ocorre o Paradoxo de Allais? Existem várias explicações possíveis para este fenômeno, não necessariamente mutuamente excludentes. Abaixo, listamos algumas.

(1) Na loteria L_1, o indivíduo ganha uma "fortuna grande" com certeza ($1 milhão). Na loteria L_2, existe também a possibilidade de o indivíduo ganhar uma "fortuna muito grande" ($5 milhões), assim como de não ganhar nada. Muitos preferem a loteria L_1 à loteria L_2 porque acreditam que o risco de não ganhar nada na loteria L_2 não é suficientemente contrabalançado pela possibilidade de ganhar os $5 milhões. Além disso, muitos dos mesmos indivíduos preferem L_3 a L_4 porque a chance de ganhar o melhor prêmio é aproximadamente a mesma em ambas as loterias, sendo que o prêmio da loteria L_3 é bem maior.

(2) Os indivíduos, em seus processos de decisão, tendem a substituir as probabilidades por "pesos de decisão"; ou seja, os indivíduos tendem a "distorcer as probabilidades". Quando a probabilidade de não ganhar nada é baixa, qualquer aumento na chance de não ganhar nada pode causar uma grande desutilidade. É o que se observa na escolha $L_1 \succ L_2$ no primeiro par. Mas quando a probabilidade de não ganhar nada é alta, ocorre o fenômeno oposto. Neste caso, um pequeno aumento na chance de não ganhar nada pode não fazer muita diferença. Assim, o aumento do prêmio de $1 milhão para $5 milhões pode mais do que contrabalançar o aumento na chance de não ganhar nada. É o que se observa na escolha $L_3 \succ L_4$ no segundo par.

(3) Um indivíduo pode atribuir certo prêmio a uma loteria que fornece um resultado com probabilidade 1. Ou, como Kahneman & Tversky (1979 [2000]) colocaram, os indivíduos tendem a colocar mais peso no que é certo em comparação a eventos bastante prováveis. Eles chamaram este fenômeno de *efeito certeza.* Assim, a escolha de L_1 no primeiro par estaria relacionada à existência do efeito certeza, fato que não ocorreria no segundo par.

Como as curvas de indiferença geradas pela EU não são compatíveis com o Paradoxo de Allais, Machina (1982, 1987) postulou que, na prática, as curvas de indiferença apresentariam "*fanning out*" ; isto é, "abririam-se em leque". Na figura 4.3, podemos observar que as curvas de indiferença com *fanning out* são de fato compatíveis com o Paradoxo de Allais. Sob *fanning out*, na medida em que nos deslocamos no triângulo em direção a noroeste, as curvas de indiferença tornam-se mais inclinadas; ou seja, o tomador de decisão torna-se mais avesso ao risco. Em outras palavras, na medida em que as loterias tornam-se "melhores", o tomador de decisão torna-se mais avesso ao risco.

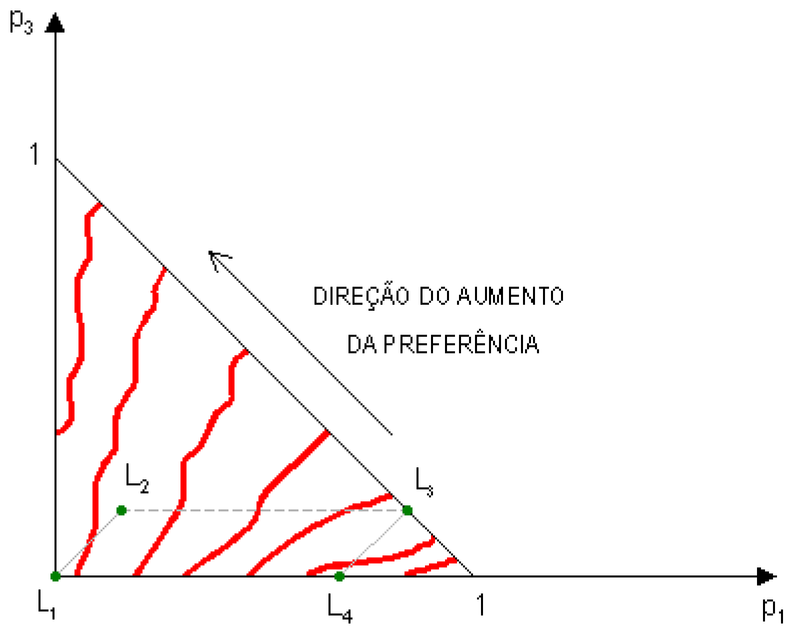


Figura 4.3 – *Fanning out* e o Paradoxo de Allais

Leonard J. Savage, um eminente estatístico e teórico da decisão, participou de um teste organizado por Maurice Allais, no qual os participantes eram submetidos ao problema de escolha da figura 4.1. Savage foi um dos indivíduos que violaram o axioma da independência, escolhendo L_1 no primeiro par e L_3 no segundo. Porém, depois de perceber que suas escolhas não eram compatíveis com a teoria da utilidade esperada, ele quis revisá-las. Savage afirmou que cometeu um equívoco e que uma leitura mais cautelosa do problema teria sido suficiente para evitá-lo.

O argumento utilizado por Savage (1954 [1972]) para sustentar sua mudança de opinião foi o seguinte. Digamos que uma urna contenha cem tickets numerados de 1 a 100. Procede-se sorteando um ticket da urna. O número deste ticket determina o prêmio recebido, de acordo com a loteria escolhida, como mostra o quadro 4.1.[4] Assim, por exemplo, se o indivíduo escolher a loteria L_2 no primeiro par, ele ganha \$0 se o ticket 1 for sorteado, ganha \$5 milhões se um dos tickets com números de 2 a 11 for sorteado, e ganha \$1 milhão se um dos tickets com números de 12 a 100 for sorteado. Note que o problema apresentado no quadro 4.1 é o mesmo problema de escolha da figura 4.1, apenas reescrito.

Quadro 4.1 – Paradoxo de Allais e o argumento de Savage

		Número do ticket		
		1	2-11	12-100
Primeiro par	L_1	\$1 milhão	\$1 milhão	\$1 milhão
	L_2	\$0	\$5 milhões	\$1 milhão
Segundo par	L_3	\$0	\$5 milhões	\$0
	L_4	\$1 milhão	\$1 milhão	\$0

Savage observou então que se um dos tickets numerados de 12 a 100 é sorteado, não importa quais sejam as loterias escolhidas – os prêmios serão os mesmos (\$1 milhão no primeiro par e \$0 no segundo). Isto permitiria que nos focássemos apenas na possibilidade de que um dos tickets numerados de 1 a 11 fosse ser sorteado. Abstraindo a possibilidade dos tickets 12 a 100, os dois pares de escolha tornam-se iguais. A decisão subsidiária passa a ser escolher a loteria que fornece \$1 milhão com certeza e a loteria que fornece \$5 milhões com probabilidade 10/11. Portanto, se o indivíduo escolher L_1 no primeiro par, não haveria razão para que ele escolhesse L_3 no segundo par. De maneira similar, não faria sentido escolher L_2

[4] Os prêmios utilizados na análise original de Savage (1954 [1972]) foram \$2,5 milhões, \$500 mil e \$0.

no primeiro par e L_4 no segundo. Assim, consultando seu gosto pessoal, Savage concluiu que ele preferiria a loteria L_1 no primeiro par e, contrariamente a sua reação inicial, que ele preferiria a loteria L_3 no segundo par. Desta forma, não estaria violando a "hipótese da utilidade esperada".

Podemos perceber que a argumentação de Savage é uma aplicação direta da propriedade da separabilidade aditiva (que é uma conseqüência do axioma da independência). Lembremos que a propriedade da separabilidade aditiva afirma que a contribuição de um prêmio e de sua probabilidade para a utilidade esperada de uma loteria é independente dos outros componentes da loteria. Assim, Savage separou os efeitos dos tickets de 1 a 11 dos efeitos dos tickets de 12 a 100.

Embora Savage tenha argumentado a favor da EU – revisando suas escolhas, a hipótese de que os indivíduos invariavelmente reagiriam desta maneira não foi sustentada em testes experimentais. Em experimentos onde os indivíduos foram perguntados sobre problemas do tipo Allais e foram apresentados a argumentações contra e a favor da EU, não ocorreram trocas líquidas predominantes em direção a escolhas compatíveis com a EU.[5] Por outro lado, as evidências experimentais revelaram que o Paradoxo de Allais é na verdade um caso especial de um padrão empírico mais geral chamado de *efeito da conseqüência comum*.

4.1.2 Efeito da conseqüência comum

O efeito da conseqüência comum é gerado por dois pares de loterias obtidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} M_1 &= \alpha\delta_x + (1-\alpha)P^{**} \quad \text{versus} \quad M_2 = \alpha P + (1-\alpha)P^{**} \\ M_3 &= \alpha\delta_x + (1-\alpha)P^{*} \quad \text{versus} \quad M_4 = \alpha P + (1-\alpha)P^{*} \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde

$\delta_x =$ loteria degenerada que fornece x com certeza;

P é uma loteria que fornece tanto resultados maiores como menores do que x;

P^{**} é uma loteria que domina estocasticamente em primeira ordem a loteria P^{*}.

[5] Cf. Machina (1987).

Assim, o problema do tomador de decisão é escolher entre M_1 e M_2 no primeiro par, e escolher entre M_3 e M_4 no segundo.[6] Podemos observar que:

Se $\delta_x \succ P$, então, pelo axioma da independência, $M_1 \succ M_2$ e $M_3 \succ M_4$.

Se $P \succ \delta_x$, então, pelo axioma da independência, $M_2 \succ M_1$ e $M_4 \succ M_3$.

Apesar disto, nos experimentos empíricos, a moda costuma ser a escolha de M_1 no primeiro par e de M_4 no segundo. Este fenômeno é chamado de *efeito da conseqüência comum*. O nome deriva do fato deste fenômeno surgir quando substituímos a conseqüência comum P^{**} das duas loterias do primeiro par pela conseqüência comum P^{*}. Como vimos no capítulo 2, esta alteração não deveria modificar o ordenamento das loterias. Esta modificação do ordenamento não satisfaz a propriedade da conseqüência comum. Segundo a propriedade da conseqüência comum, dadas duas loterias com uma conseqüência comum de mesma probabilidade, a substituição desta conseqüência por outra conseqüência comum de mesma probabilidade não deveria influenciar na preferência entre as loterias.

Uma possível explicação para este fenômeno (além das três já descritas para o Paradoxo de Allais na seção anterior), pode ser dada da seguinte maneira. Digamos que uma moeda irá ser lançada e, de acordo com o resultado, um indivíduo ganhará mais ou menos

---

[6] Podemos perceber que o Paradoxo de Allais é um caso particular do efeito da conseqüência comum. Seja $\{x_1, x_2, x_3\} = \{\$0, \$1 \text{ milhão}, \$5 \text{ milhões}\}$. No Paradoxo de Allais,

M_1, M_2, M_3 e M_4 correspondem a L_1, L_2, L_4 e L_3

$\alpha = 0{,}11$

$x = \$1$ milhão

$P = \left(\frac{1}{11}, 0, \frac{10}{11}\right)$

P^{*} é uma chance certa de \$0

P^{**} é uma chance certa de \$1 milhão

Assim,

$$M_1 = \alpha\delta_x + (1-\alpha)P^{**} \Rightarrow M_1 = (0;\ 0{,}11 + 0{,}89;\ 0) \Rightarrow M_1 = (0,\ 1,\ 0) = L_1$$

$$M_2 = \alpha P + (1-\alpha)P^{**} \Rightarrow M_2 = \left(\frac{0{,}11}{11};\ 0 + 0{,}89;\ \frac{1{,}1}{11}\right) \Rightarrow M_2 = (0{,}01;\ 0{,}89;\ 0{,}1) = L_2$$

$$M_3 = \alpha\delta_x + (1-\alpha)P^{*} \Rightarrow M_3 = (0;\ 0{,}11;\ 0) = L_4$$

$$M_4 = \alpha P + (1-\alpha)P^{*} \Rightarrow M_4 = \left(\frac{0{,}11}{11} + 0{,}89;\ 0;\ \frac{1{,}1}{11}\right) \Rightarrow M_4 = (0{,}9;\ 0;\ 0{,}1) = L_3$$

dinheiro. Segundo a propriedade da separabilidade aditiva, as preferências sobre o que pode ocorrer no resultado "cara" não deve depender do que pode ocorrer no evento "coroa". Contudo, como David Bell argumentou: "ganhar $10000 como o prêmio mais alto de uma loteria pode deixar alguém muito mais feliz do que receber $10000 como o prêmio mais baixo" (Bell apud Machina, 1987, p. 129).

Assim, o efeito da conseqüência comum afirma que quanto mais rico o indivíduo ficasse no evento "coroa" (no sentido de dominância estocástica), mais avesso ao risco ele se tornaria sobre o que ele receberia no evento "cara".[7] Em outras palavras, se a loteria P^{**} fornecer resultados muito altos, o indivíduo pode preferir não incorrer em risco adicional no evento de não recebê-los, e preferir a loteria degenerada δ_x à loteria P (isto é, o indivíduo pode preferir escolher M_1 no primeiro par). Por outro lado, se P^* fornecer resultados muito baixos, o indivíduo pode ficar mais disposto a enfrentar o risco no evento (desejável) de não recebê-los, e preferir a loteria P à loteria degenerada δ_x (isto é, o indivíduo pode preferir escolher M_4 no segundo par).[8]

Alternativamente, este argumento pode ser colocado em analogia à suposição de aversão ao risco absoluto decrescente. Esta suposição implica que os indivíduos apresentam maior aversão ao risco ao evento de perda do que ao evento de ganho. No caso do efeito da conseqüência comum, os indivíduos exibem maior aversão ao risco ao evento de uma "oportunidade de perda" do que ao evento de uma "oportunidade de ganho".[9]

Porém, apesar das evidências experimentais mostrarem violações sistemáticas da EU, existem fortes argumentos normativos a favor do axioma da independência. Já vimos alguns no capítulo 2.

Agora, analisaremos o mais famoso e, talvez, o mais polêmico. Suponha que três loterias L_1, L_2 e L_3 são oferecidas a um indivíduo. Digamos que este ordene $L_1 \succ L_2$ e $L_1 \succ L_3$. Porém, digamos que o indivíduo revele que $L_4 = 0{,}5L_2 + 0{,}5L_3$ é preferível a L_1, violando o axioma da independência. Podemos pensar L_4 como uma loteria composta na qual uma moeda justa é lançada para sortear qual loteria simples, L_2 ou L_3, será jogada.

---

[7] Cf. Machina (1987).

[8] Cf. Machina (1987).

[9] Este argumento foi estabelecido por Kenneth Arrow em uma conversação com Mark J. Machina (Ver Machina, 1987).

Ao escolher entre L_1, L_2 e L_3, o indivíduo optou por L_1. Mas como $L_4 \succ L_1$, sabemos que ele se dispõe a pagar uma taxa para trocar L_1 por L_4. Assim, o indivíduo paga uma taxa e fica com a loteria L_4. Porém, no momento em que a moeda justa é lançada, fornecendo L_2 ou L_3, o indivíduo se dispõe novamente a pagar uma taxa para trocar a loteria sorteada por L_1. Neste ponto, o indivíduo já pagou duas taxas e está de volta a sua posição inicial, pronto para pagar novas taxas. Assim, os indivíduos que não respeitam o axioma da independência, estariam sujeitos aos chamados resultados *"Dutch book"*, tal como ocorreu no exemplo aqui apresentado.

Um resultado *"Dutch book"* é dinamicamente inconsistente. Porém, Machina (1989) argumentou que existe uma suposição implícita que gera este resultado: o princípio do conseqüencialismo. Segundo Machina, as escolhas de um tomador de decisão que não segue o axioma da independência poderiam ser dinamicamente consistentes se abandonássemos o princípio conseqüencialista. Machina também argumentou que não é adequado supor o princípio do conseqüencialismo para indivíduos que rejeitam o axioma da independência.[10]

A relação entre o axioma da independência e a consistência temporal é uma questão chave no debate contemporâneo sobre a EU. Faremos uma síntese desta relação, utilizando um problema de escolha similar ao Paradoxo de Allais.[11]

Na figura 4.4, comparando o problema (a) com o problema (e), obtemos uma versão simplificada do Paradoxo de Allais. Os indivíduos costumam escolher "baixo" em (a) – isto é, \$1 milhão com certeza, e "alto" em (e); isto é, \$5 milhões com probabilidade 0,10 e \$0 com probabilidade 0,90.

Estas escolhas não são compatíveis com a teoria da utilidade esperada – elas violam o axioma da independência. Mas examinemos esta violação com atenção, efetuando uma série de comparações.

[10] Machina argumentou que, dependendo da situação, riscos enfrentados no passado podem ser relevantes para as decisões correntes. Para detalhes sobre este argumento, ver Machina (1989).

[11] A análise que segue é baseada em Wakker apud Gollier (2001).

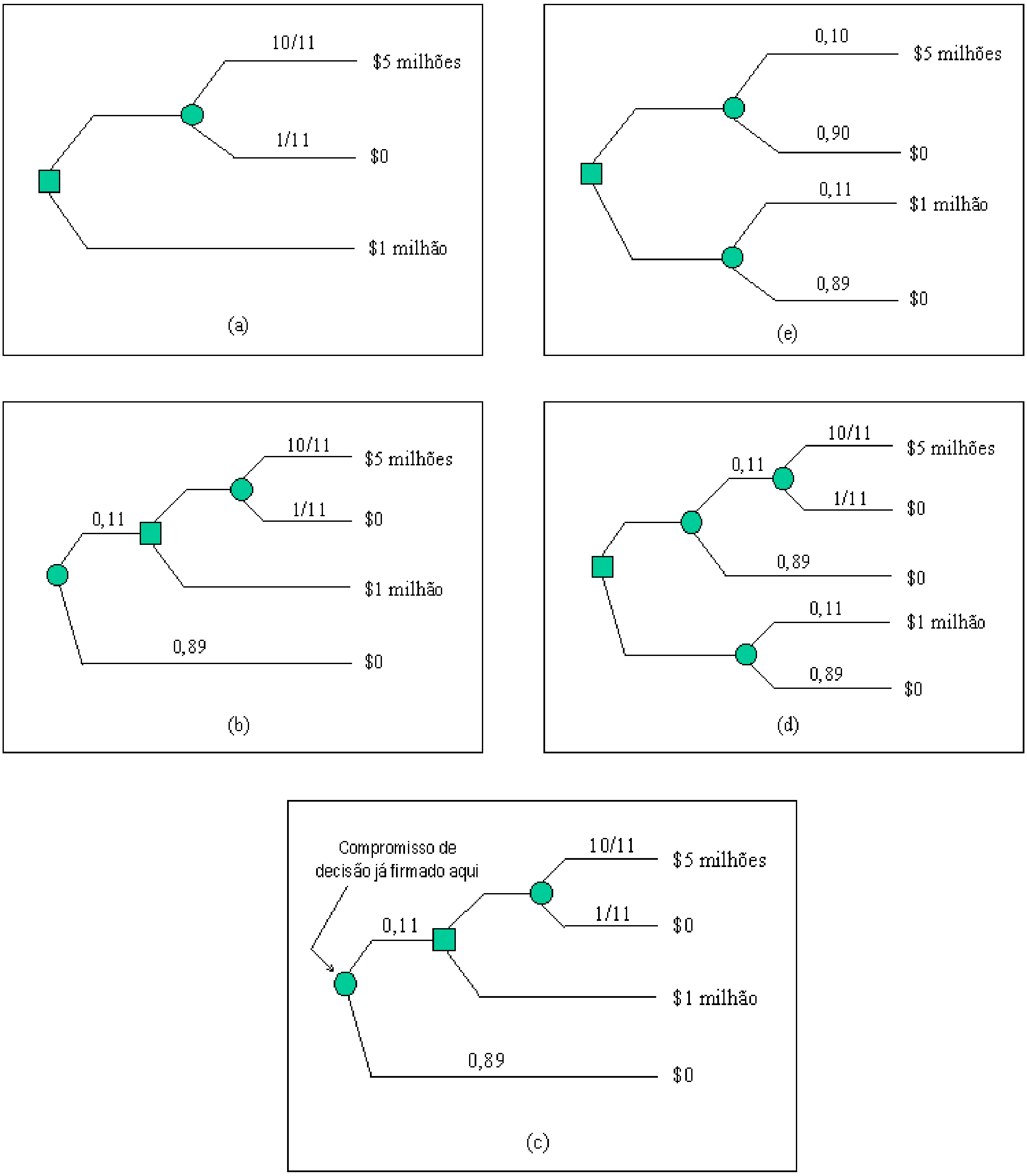


Figura 4.4 – Axioma da independência e a consistência temporal

Comparação entre (a) e (b). Digamos que determinado indivíduo é requisitado a escolher "alto" ou "baixo" no problema (a). Porém, antes do indivíduo escolher, ele é informado de que foi selecionado aleatoriamente com dez outros indivíduos de um grupo de 100 pessoas para participar deste jogo. Assim, o problema de escolha da figura (a) é na verdade uma sub-árvore do problema da figura (b). A questão é: o indivíduo deve modificar sua escolha com base neste evento passado? Se eventos passados são irrelevantes para a escolha corrente, então ele não deve modificar sua escolha. Este raciocínio é chamado de *princípio do conseqüencialismo*. O princípio do conseqüencialismo afirma que um indivíduo deve tomar a mesma decisão no problema (a) e no problema (b).

Comparação entre (b) e (c). Digamos agora que os onze indivíduos que participarão do jogo ainda não foram selecionados. O indivíduo sob exame não sabe se ele estará entre os onze selecionados. Porém, requisita-se que ele se comprometa com uma opção, que ele deverá seguir no jogo, caso seja selecionado. Este problema está descrito na figura (c). Haveria alguma razão, por exemplo, para que alguém se comprometa com a estratégia "baixo" enquanto considera ótima a estratégia "alto"? Se o indivíduo é temporalmente consistente, então ele pode se comprometer antecipadamente a fazer o que será ótimo depois. Assim, o *princípio da consistência temporal* afirma que um indivíduo deve escolher a mesma opção nos problemas (b) e (c).

Comparação entre (c) e (d). Em um certo sentido, o problema (d) é o problema (c) reescrito. Se o indivíduo se compromete com a escolha "alto", ele se defronta com o risco da seleção e, talvez, com o risco de ganhar ou não $5 milhões. Se o indivíduo se compromete com a escolha "baixo", ele se defronta somente com o risco da seleção – caso seja selecionado, recebe $1 milhão. Agora, esqueçamos da história de selecionar onze pessoas de um grupo de 100. Neste caso, o problema (d) é um problema de escolha entre duas loterias compostas. Isto significa que houve uma mudança do contexto do problema, mas não das probabilidades de obter cada resultado. A questão é: o contexto no qual a incerteza é processada importa para o tomador de decisão? Se o contexto não importa, então o indivíduo deve seguir o *princípio da independência de contexto*, que afirma que o indivíduo deve escolher a mesma opção nos problemas (c) e (d).

Comparação entre (d) e (e). Como vimos no capítulo 2, loterias compostas podem ser reduzidas para loterias simples. Assim, se o indivíduo escolher "alto" no problema (d), existe uma probabilidade $0{,}89+(0{,}11(1/11))=0{,}9$ de ele obter $0. Assim, sob o efeito do axioma do conseqüencialismo, os problemas (d) e (e) são o mesmo. O *princípio da redução* afirma que os tomadores de decisão devem seguir o axioma do conseqüencialismo e, portanto, o indivíduo deve fazer a mesma escolha nos problemas (d) e (e).

Através da figura 4.4, analisamos uma seqüência de princípios que ligam os problemas (a) a (e): princípio do conseqüencialismo, princípio da consistência temporal, princípio da independência do contexto e princípio da redução. Se estes princípios são aceitos como válidos, então o indivíduo que escolher "alto" ou "baixo" no problema (a), deve fazer a mesma opção em todos os outros problemas e, em particular, no problema (e). Assim, a violação do axioma da independência é possível somente se pelo menos um destes princípios elementares também for violado.

4.2 Paradoxo da razão comum

A partir de outro exemplo elaborado por Allais (1953), foi derivado um segundo padrão de violação sistemática do axioma da independência. Este padrão de violação é conhecido como *Paradoxo da razão comum* ou *efeito da razão comum*. Na figura 4.5, representamos este fenômeno.

$$L_1 = \left\{ \begin{array}{lcr} p & \text{———} & \$X \\ 1-p & \text{———} & \$0 \end{array} \right\} \quad \text{versus} \quad L_2 = \left\{ \begin{array}{lcr} q & \text{———} & \$Y \\ 1-q & \text{———} & \$0 \end{array} \right\}$$

$$L_3 = \left\{ \begin{array}{lcr} tp & \text{———} & \$X \\ 1-tp & \text{———} & \$0 \end{array} \right\} \quad \text{versus} \quad L_4 = \left\{ \begin{array}{lcr} tq & \text{———} & \$Y \\ 1-tq & \text{———} & \$0 \end{array} \right\}$$

$$\text{onde } p > q,\ Y > X > 0 \text{ e } t \in (0,1)$$

Figura 4.5 – Problema de escolha que gera o Paradoxo da razão comum

De maneira análoga ao Paradoxo de Allais, as loterias L_1 e L_2 formam um par de escolha e as loterias L_3 e L_4 formam outro par. Assim, o teste experimental consiste em requerer que um indivíduo escolha entre L_1 e L_2 no primeiro par e que escolha entre L_3 e L_4 no segundo. Seja $\{x_1,x_2,x_3\}=\{0,X,Y\}$, em termos da notação convencional, temos:

$$\begin{array}{lll} L_1 = (1-p,\ p,\ 0) & \text{versus} & L_2 = (1-q,\ 0,\ q) \\ L_3 = (1-tp,\ tp,\ 0) & \text{versus} & L_4 = (1-tq,\ 0,\ tq) \end{array} \tag{4.3}$$

Mostraremos agora que as loterias L_3 e L_4 podem ser obtidas a partir de L_1 e L_2, respectivamente, através de algumas operações algébricas. Nosso primeiro passo é multiplicar todas as probabilidades das loterias L_1 e L_2 por $t \in (0,1)$. Assim, obtemos:

$$tL_1 = L_1' = \left(t - tp,\ tp,\ 0\right)$$

$$tL_2 = L_2' = \left(t - tq,\ 0,\ tq\right)$$

Em segundo lugar, realocaremos a probabilidade remanescente (1-t) para a conseqüência comum x_1:

$$L_1' \to L_1'' = \left(t - tp + (1-t),\ tp,\ 0\right) = \left(1 - tp,\ tp,\ 0\right) = L_3$$

$$L_2' \to L_2'' = \left(t - tq + (1-t),\ 0,\ tq\right) = \left(1 - tq,\ 0,\ tq\right) = L_4$$

Sintetizando, as loterias L_3 e L_4 podem ser obtidas a partir de L_1 e L_2, respectivamente, multiplicando todas as probabilidades de L_1 e L_2 por $t \in (0,1)$ e realocando a probabilidade remanescente (1-t) de cada loteria para a conseqüência comum x_1. Isto nos permitirá que, conhecendo a ordenação entre L_1 e L_2, apliquemos a propriedade da razão comum para obter a ordenação entre L_3 e L_4.

Lembremos que a propriedade da razão comum afirma que ordenamento entre duas loterias não é afetada quando todas as probabilidades em ambas loterias forem multiplicadas por uma constante $t \in (0,1)$ e a probabilidade remanescente (1-t) for designada para uma conseqüência comum.

No capítulo 2, construímos uma representação gráfica para a propriedade da razão comum no triângulo de Marschak-Machina, através do leque de contração de p_2. Utilizaremos novamente esta representação, agora para analisar o Paradoxo da razão comum. Porém, na ocasião anterior, estávamos analisando a propriedade da razão comum através de um realocamento da probabilidade remanescente para a conseqüência comum x_2. Agora, estamos realocando a probabilidade remanescente para a conseqüência comum x_1. Assim, devemos utilizar um conceito análogo – o *leque de contração de* p_1.

O leque de contração de p_1 é o conjunto de todas as retas que partem do vértice (1,0) do triângulo e terminam no cateto horizontal. Chamaremos cada reta do leque de contração de *caminho de contração de* p_1. Cada caminho de contração de p_1 é referente a uma razão $p_3/p_2=k$, sendo $k\in[0,\infty)$. Sobre um caminho de contração de p_1, na medida em que nos afastamos de (0,1), a probabilidade de p_1 diminui, mas a razão p_3/p_2 permanece constante.[12] Na figura 4.6, representamos o leque de contração de p_1.

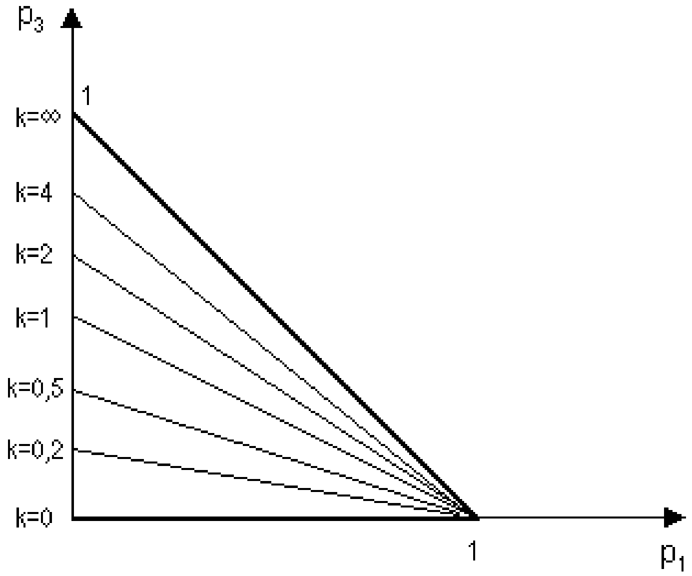


Figura 4.6 – Leque de contração de p_1

[12] Algebricamente, temos:

$\frac{p_3}{p_2}=k\Rightarrow p_3=kp_2$. Como $p_2=1-p_1-p_3$, então $p_3=k\left(1-p_1-p_3\right)\Rightarrow (1+k)p_3=k(1-p_1)\Rightarrow$ $p_3=\left(\frac{k}{1+k}\right)(1-p_1)\Rightarrow p_3=\left(\frac{k}{1+k}\right)-\left(\frac{k}{1+k}\right)p_1\Rightarrow p_1=1-\left(\frac{1+k}{k}\right)p_3$. As duas últimas equações indicam que o caminho de contração de p_1 intercepta o eixo das ordenadas em $k/(1+k)$. Além disso, mostram que à medida que p_3 aumenta, p_1 diminui e vice-versa.

O problema que gera o Paradoxo da razão comum está representado graficamente na figura 4.7. Podemos perceber que as loteria L_1 e L_3 estão sobre o mesmo caminho de contração k=0, e que L_2 e L_4 estão sobre o mesmo caminho de contração $k=\infty$. Como os segmentos L_1L_2 e L_3L_4 são paralelos, então, segundo a propriedade da razão comum (que é implicada pelo axioma da independência), a ordenação entre L_3 e L_4 deverá ser a mesma do que entre L_1 e L_2.

Portanto, se um tomador de decisão escolher L_1 no primeiro par, então a propriedade da razão comum implica que ele deve escolher L_3 no segundo par. Alternativamente, se ele escolher L_2 no primeiro par, a propriedade da razão comum implica que ele deve escolher L_4 no segundo par. Contudo, muitos estudos revelaram que os indivíduos tendem a escolher L_1 no primeiro par e L_4 no segundo.[13] O Paradoxo da razão comum constitui, portanto, uma violação do axioma da independência por via da não-satisfação da propriedade da razão comum.

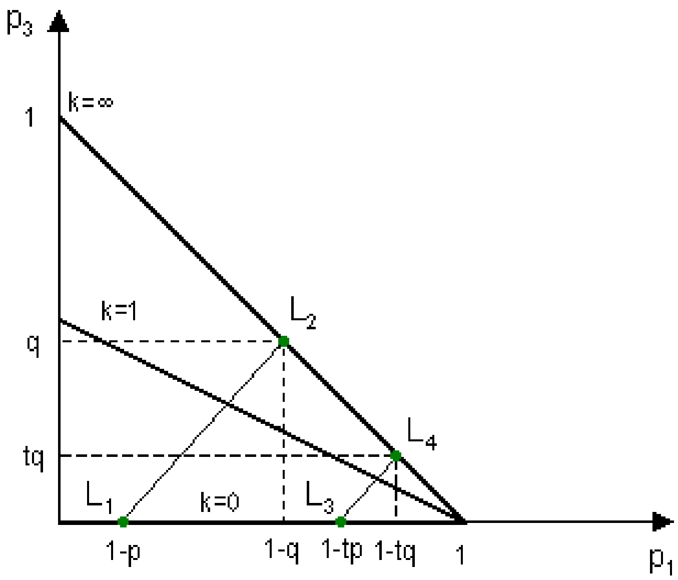


Figura 4.7 – Paradoxo da razão comum

Note que, como no caso do Paradoxo de Allais, a suposição de curvas de indiferença com *fanning out* são compatíveis com o Paradoxo da razão comum (figura 4.8).

---

[13] Cf. Starmer (2000).

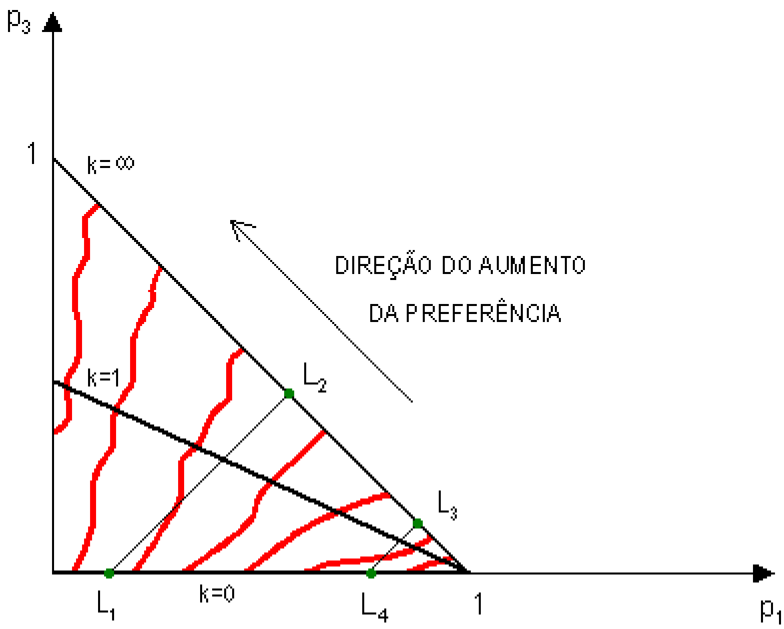


Figura 4.8 – *Fanning out* e o Paradoxo da razão comum

Até agora, analisamos paradoxos da EU obtidos através da violação do axioma da independência. Porém, existem evidências de que as falhas de previsibilidade da EU são mais profundas do que apenas violações do axioma da independência. Estas falhas estão relacionadas a algumas suposições implícitas da teoria da utilidade esperada. Na próxima seção, analisaremos o *fenômeno da reversão de preferências,* que viola a suposição implícita da *invariância de procedimento*. Na seção 4.4, analisaremos o *"framing effect"*, que viola a suposição implícita da *invariância de descrição*.

4.3 Fenômeno da reversão das preferências

O achado empírico conhecido como *fenômeno da reversão das preferências* foi inicialmente reportado pelos psicólogos Sarah Lichtenstein e Paul Slovic em 1971. O experimento clássico da reversão de preferências solicita que os indivíduos realizem duas tarefas diferentes (geralmente separadas por outras tarefas interpostas).

Na primeira tarefa, os indivíduos são apresentados a um par de loterias (conforme a figura 4.9). Neste par, há uma loteria chamada de *aposta-P,* que oferece uma grande chance de ganhar um prêmio pequeno, e uma loteria chamada de *aposta-$,* que oferece uma pequena chance de ganhar um prêmio maior. Pede-se então que os indivíduos escolham uma loteria do par.

$$\text{Aposta-}\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{lcl} p & \text{———————} & \$X \\ 1\text{-}p & \text{———————} & \$x \end{array} \right\} \quad \text{versus} \quad \text{Aposta-}\mathbf{\$} = \left\{ \begin{array}{lcl} q & \text{———————} & \$Y \\ 1\text{-}q & \text{———————} & \$y \end{array} \right\}$$

$$\text{onde } X>x,\ Y>y,\ p>q \text{ e } Y>X$$

Figura 4.9 – Problema de escolha que gera a reversão de preferências

Na segunda tarefa, os indivíduos devem atribuir valores monetários – geralmente preços mínimos de venda (equivalentes-certeza) – C(P) e C($) para as duas loterias.[14] Diversos estudos mostraram uma tendência dos indivíduos escolherem a aposta-P (isto é, $P \succ \$$) e atribuirem um equivalente-certeza mais alto para a aposta-$ (isto é, C($)>C(P)). Porém, segundo a teoria da utilidade esperada, deveríamos ter $P \succ \$ \Leftrightarrow C(P)>C(\$)$. Assim, estes resultados não são compatíveis com a EU. O nome *fenômeno da reversão de preferências* vem exatamente do fato que deveríamos ter $P \succ \$$ e C(P)>C($), mas se observa $P \succ \$$ e C($)>C(P), como se o ordenamento das preferências "revertesse".

Este fenômeno é especialmente problemático, pois existe uma suposição implícita na EU, a *invariância de procedimento,* que implica que as preferências sobre as loterias são independentes dos métodos utilizados para eliciá-los. Assim, visto da perspectiva da EU, as duas tarefas consistem em maneiras diferentes de perguntar essencialmente a mesma questão: "qual é o ordenamento destas loterias?" No entanto, em experimentos realizados em conformidade com a figura 4.9, os ordenamentos revelados pelos indivíduos dependeram do procedimento de eliciação; isto é, dependeram de se o ordenamento foi realizado através de escolha direta ou através de equivalentes-certeza. Portanto, ocorreram violações da invariância de procedimento.

[14] Algumas vezes, é utilizado o procedimento de eliciação de Becker, DeGroot e Marschak. Neste método, após cada indivíduo valorar a loteria, o experimentador sorteia aleatoriamente um preço. Se o preço sorteado for maior do que a valoração do indivíduo, então o indivíduo necessariamente vende a loteria e recebe o preço. Se o preço sorteado for inferior a valoração, então o indivíduo necessariamente fica com a loteria. Neste método, os indivíduos realmente recebem os valores monetários resultantes dos experimentos. Pode-se verificar que, sob este esquema, será de interesse do indivíduo revelar a sua verdadeira valoração. (Cf. Machina, 1987).

Inicialmente, os resultados destes experimentos foram recebidos ceticamente pelos economistas. Em 1979, em uma tentativa de desacreditar estes resultados, os economistas David M. Grether e Charles R. Plott planejaram uma série de experimentos controlados por várias variáveis adicionais às utilizadas em experimentos anteriores. No primeiro parágrafo de seu artigo, eles afirmaram: “Este artigo reporta os resultados de uma série de experimentos desenhados para desacreditar o trabalho dos psicólogos como aplicável à economia” (Grether & Plott, 1979, p.623). E no final concluíram:

> “É desnecessário dizer que os resultados que nós obtivemos não foram os esperados quando iniciamos este estudo. O nosso projeto foi controlado para todas explicações teóricas-econômicas que pudéssemos encontrar. O fenômeno da reversão das preferências, que é inconsistente com a construção tradicional da teoria da preferência, permaneceu.” (Grether & Plott, 1979, p. 634).

Porém, Pommerehne, Schneider & Zweifel (1982) fizeram algumas objeções aos experimentos de Grether e Plott, das quais, citamos duas:

(a) Os prêmios associados aos experimentos foram muito baixos. Assim, não houve estímulo suficiente para que os indivíduos efetuassem as suas decisões com cautela.

(b) Os experimentos realizados consistiram em experimentos de uma rodada, o que pode levar a conclusões que não sejam completamente válidas. Em situações novas, como as apresentadas por Grether e Plott, os indivíduos podem aprender com a experiência. Ou seja, os indivíduos podem aprender sobre as características das loterias no curso da resolução de problemas.

Assim, em seus experimentos, para corrigir estes fatores, Pommerehne, Schneider & Zweifel (1982) utilizaram prêmios cem vezes maiores do que os utilizados por Grether & Plott (1979) e incluíram uma segunda rodada. Duas de suas hipóteses eram:

(1) A ocorrência de reversão de preferências em seus experimentos será menos freqüente do que nos experimentos de Grether e Plott.

(2) A ocorrência de reversão de preferências será menos freqüente na segunda rodada dos experimentos do que na primeira.

A primeira hipótese foi de fato confirmada. Porém, a redução das reversões de preferências, apesar de significativa, foi de apenas 22% – até 50% das escolhas continuaram inconsistentes. "Mesmo quando os indivíduos são expostos a fortes incentivos para tomar decisões motivadas e racionais, o fenômeno da reversão de preferências não desaparece." (Pommerehne, Schneider & Zweifel, 1982, p.573).

A segunda hipótese não foi confirmada pelos experimentos. Houve um aprendizado no sentido de um deslocamento das escolhas dos indivíduos em direção a loterias mais lucrativas, mas não houve uma diminuição da ocorrência de reversões de preferências.

Posteriormente, numerosos estudos replicaram em maior ou menor grau o fenômeno da reversão de preferências. Dado a sua aparente robustez, surge a questão de como interpretar este fenômeno. Basicamente, existem duas interpretações para a reversão de preferências.

A primeira, fundamentada na psicologia, afirma que as tarefas de escolha e de valoração de loterias invocam processos cognitivos diferentes. Assim, ainda que os economistas tendam a considerar que estas tarefas sejam equivalentes, escolher e valorar são na verdade atividades com implicações distintas. Portanto, diferentes formas de eliciar as preferências podem gerar diferentes ordenamentos entre as loterias. Como não há um mecanismo subjacente comum gerando escolhas e valorações, os ordenamentos observados não podem ser explicados com referência a um único indexador de preferência.[15]

Uma segunda forma de interpretar o fenômeno, mais consoante com os preceitos econômicos tradicionais, explica a reversão de preferências como uma violação da transitividade. No problema de escolha da figura 4.9, os indivíduos tendem a preferir a aposta-P à aposta-\$. Portanto, tendem a revelar que $P \succ \$$. Por outro lado, tendem a atribuir um valor maior à aposta-\$ do que à aposta-P; isto é, revelam que $C(\$)>C(P)$. Assumindo que as preferências são monotônicas, temos $C(\$) \succ C(P)$. Como geralmente subentendemos que há uma relação de indiferença entre cada loteria e o seu equivalente-certeza, então:

$$P \succ \$ \sim C(\$) \succ C(P) \sim P \qquad (4.4)$$

[15] Cf. Starmer (2000) e Machina (1987).

Podemos perceber que o ordenamento (4.4) não satisfaz a transitividade.

As duas interpretações não são mutuamente excludentes, é possível que tanto a existência de diferentes processos cognitivos como falhas na transitividade contribuam para o fenômeno da reversão de preferências. De fato, existem evidências que sugerem isto.[16]

4.4 *Framing Effect*

Complexidades adicionais à tomada de decisão se originam do contexto ou da forma como os problemas de escolha são apresentados. Em acréscimo ao fenômeno da reversão das preferências, os psicólogos descobriram outro fenômeno incompatível com a EU: o *"framing effect"*. O *framing effect* implica que mudanças na apresentação dos problemas (sem modificá-los em essência) podem ter fortes conseqüências sobre as escolhas dos indivíduos.

Em 1969, Paul Slovic reportou um achado empírico interessante: em um experimento, a maior parte dos indivíduos considerou um ganho contigente à ocorrência de quatro eventos independentes, com probabilidade p cada um, mais atrativo do que o mesmo ganho contigente à ocorrência de um evento com probabilidade p^4. Por outro lado, a maioria considerou que se, ao invés de um ganho, a ocorrência dos eventos gerasse uma perda, a perda associada à ocorrência de um evento único com probabilidade p^4 seria preferível à perda associada à ocorrência dos quatro eventos independentes com probabilidade p cada um.

Dezenas de estudos encontraram diferentes tipos de *framing effects*. Consideremos, por exemplo, o seguinte problema de escolha apresentado por Schoemaker (1982).

FORMULAÇÃO EM APOSTA	(1A) Perda certa de $10 (1B) Chance de 1% de perder $1000
FORMULAÇÃO EM SEGURO	(2A) Pagar um prêmio de seguro de $10 (2B) Continuar exposto à chance de 1% de perder $1000

[16] Cf. Starmer (2000).

Note que a “formulação em aposta” a a “formulação em seguro” são apresentações diferentes para o mesmo problema de escolha (“mesmo problema” no sentido de que as conseqüências são idênticas). Contudo, parece que em termos psicológicos, estas duas situações de escolha não são equivalentes. Dos 42 indivíduos que participaram deste experimento, 56% preferiram a perda certa na “formulação em aposta” e 81% preferiram a perda certa (pagar o prêmio de seguro) na “formulação em seguro”.

A ocorrência de um *framing effect* viola uma suposição implícita da EU: a *invariância de descrição* ou *independência de contexto*. A invariância de descrição implica que o ordenamento sobre as loterias é unicamente uma função das distribuições de probabilidade das conseqüências implicadas pelas loterias, e não dependem da forma como estas distribuições são descritas.

Uma explicação possível para o *framing effect* é que os indivíduos invocam diferentes conjuntos psicológicos para tomar as suas decisões. Na formulação em seguro, normas societais sobre comportamento prudente podem influenciar suas decisões (influência que poderia estar ausente na “formulação em aposta”). Alternativamente, pontos de referência diferentes podem ter sido utilizados, dando a impressão que alguma coisa é ganha na “formulação em seguro”.[17]

Kahneman & Tversky (1979 [2000]) realizaram um experimento com dois problemas de escolha, apresentados a dois grupos de indivíduos.

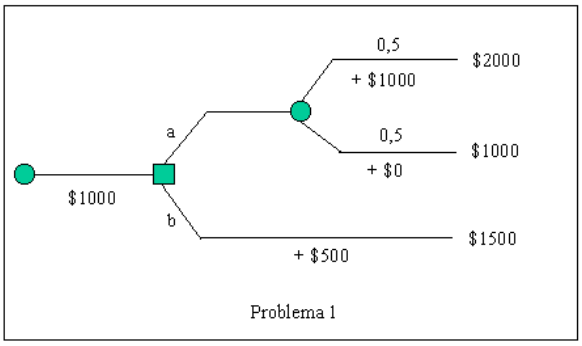
Problema 1. Em acréscimo a tudo que você tem, você recebe $1000. Você agora é solicitado a escolher entre: (a) 50% de chance de ganhar $1000 e 50% de chance de ganhar $0; e (b) ganhar $500 com certeza.

Problema 2. Em acréscimo a tudo que você tem, você recebe $2000. Você agora é solicitado a escolher entre: (a) 50% de chance de perder $1000 e 50% de chance de perder $0; e (b) perder $500 com certeza.

---

[17] Cf. Schoemaker (1982).

Estes dois problemas de escolha estão representados na figura 4.10. Podemos observar que, em termos de conseqüências finais, os dois problemas são iguais. Porém, 84% dos indivíduos do estudo preferiram (b) no primeiro problema e 69% preferiram (a) no segundo.



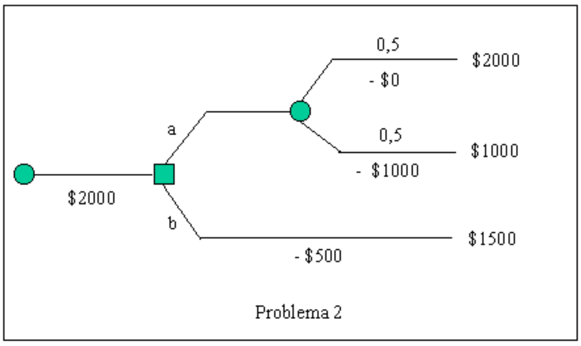


Figura 4.10 – *Framing effect* e pontos de referência

Uma explicação para este resultado é que os indivíduos tendem a tomar decisões em termos de desvios de um ponto de referência. Este ponto de referência pode ser estabelecido de acordo com a apresentação do problema. No problema 1, o indivíduo toma $1000 como ponto de referência. Assim, o indivíduo já é "dono" de $1000 e tem a chance de ficar com mais. No problema 2, o indivíduo toma $2000 como ponto de referência. Assim, ele se considera "dono" de $2000 e terá que enfrentar eventos adversos. Diversos experimentos têm mostrado que os indivíduos tendem a exibir *aversão à perda*. Quando um indivíduo tem $1000, ganhar $500 com certeza parece um bom negócio. ("Para que arriscar a ganhar mais $1000, se eu posso ganhar mais $500 com certeza?") Mas quando ele já tem $2000, perder $500 pode ser considerado "intolerável", de maneira que o indivíduo se arrisca a tentar ficar com os $2000, mesmo que ele possa vir a perder $1000. ("Perder $1000 para quem já iria perder $500 não é tão mal assim. Iria perder de qualquer jeito!") [18]

Talvez o exemplo mais clássico de *framing effect* seja o exemplo da "doença asiática", fornecido pelos psicólogos Amos Tversky e Daniel Kahneman.

Problema da "doença asiática". Imagine que o país está se preparando para o surto de uma doença asiática rara, que deverá matar 600 pessoas. Dois programas alternativos estão disponíveis para combater a ameaça.

[18] A aversão à perda gera um fenômeno interessante: o *efeito dotação* – os indivíduos tendem a demandar um preço maior para vender um bem do que pagariam para comprá-lo. (Cf. Camerer & Kunreuther, 1989).

Estes programas alternativos são apresentados em duas formulações:

Formulação 1: Se o programa (A) é adotado, 200 pessoas serão salvas.
Se o programa (B) é adotado, há uma probabilidade de 1/3 de que 600 pessoas serão salvas e há uma probabilidade de 2/3 de que nenhuma pessoa será salva.

Formulação 2: Se o programa (C) é adotado, 400 pessoas morrerão.
Se o programa (D) é adotado, há uma probabilidade de 1/3 de que ninguém morrerá e há uma probabilidade de 2/3 de que 600 pessoas morrerão.

Emboras as conseqüências dos programas (A) e (C) sejam as mesmas – assim como dos programas (B) e (D) – 72% dos indivíduos que foram apresentados à formulação 1 escolheram o programa (A), enquanto 78% dos indivíduos que foram apresentados à formulação 2 escolheram o programa (D).[19]

Novamente, podemos explicar o fenômeno através dos pontos de referência. Na primeira formulação, os programas são apresentados em termos de vidas salvas. Assim, a questão é apresentada de forma que desafortunadamente 600 pessoas "estão mortas", e os programas poderão "trazê-las de volta à vida". Neste caso, os indivíduos tendem a achar melhor não arriscar, e acabam preferindo salvar algumas pessoas com certeza. Na segunda formulação, os programas são apresentados em termos de mortes. Isto pode gerar uma mudança no ponto de referência dos indivíduos do experimento, de forma que as 600 pessoas "continuam entre nós", e a decisão dos indivíduos pode levar alguns à morte. Assim, os indivíduos exibem aversão à perda e preferem tentar "não matar ninguém".

Os psicólogos chamam o estudo dos pontos de referência, e dos *framings* que estes induzem, de *contabilidade mental* (*"mental accounting")*. A contabilidade mental é um conjunto de regras utilizadas pelos indivíduos para tomar pontos de referência e escolher categorias mentais para ordenar possíveis ganhos ou perdas. As regras da contabilidade mental não têm um compromisso estrito com as regras da contabilidade financeira. Por exemplo, uma restituição do imposto de renda de $5000 e um bônus salarial de $5000 são

[19] Cf. Machina (1987).

idênticos em termos da contabilidade financeira, mas os indivíduos parecem colocá-los em contas mentais distintas, reservadas para propósitos diferentes. Eles podem considerar uma restituição do imposto de renda como um "golpe de sorte" e gastá-la em luxúrias que não comprariam com um bônus salarial.[20]

Além das violações da EU que vimos neste capítulo, há inúmeros outros exemplos e tipos na literatura econômica e psicológica que desafiam a teoria da utilidade esperada. Como estas evidências levantam sérias dúvidas quanto à acuidade da EU, cabe discutir como os especialistas têm reagido a estes achados empíricos.

Assim, na seção 4.5, veremos a posição dos teóricos da decisão que estão descontentes com a capacidade preditiva da EU. Na seção 4.6, veremos a argumentação dos especialistas que, apesar dos paradoxos, defendem a acuidade empírica da EU.

4.5 Além da utilidade esperada

Para muitos teóricos da decisão, as evidências empíricas acumuladas nas últimas décadas são inequívocas: "sendo direto, a teoria convencional [EU] não se ajusta aos fatos" (Starmer, 2000, p.332). Evidentemente, apenas apontar para os problemas da teoria não é suficiente. Se ela realmente não é adequada, pode-se argumentar a favor da necessidade do desenvolvimento de teorias alternativas, que busquem superar as limitações da EU.

De fato, dezenas de modelos alternativos à EU foram desenvolvidos nas últimas décadas. Estes modelos são geralmente chamados de *modelos de utilidade não-esperada (teorias não-EU)* ou, alternativamente, de *teorias de utilidade esperada generalizada (GEU),* já que a maior parte destes modelos são generalizações da EU.[21] Além disso, cabe acrescentar que existe uma literatura considerável analisando as propriedades teóricas e o desempenho empírico destas teorias.

---

[20] Cf. Camerer & Kunreuther (1989).

[21] Como nem todos modelos são realmente generalizações da EU, o termo *modelos de utilidade não-esperada* parece mais adequado para os nossos propósitos. Por isto, optaremos por este.

A análise da utilidade não-esperada está surgindo como uma nova e ativa área de pesquisa em economia, com uma grande comunidade de acadêmicos engajados.[22] Além de um periódico especializado na área, *The Journal of Risk and Uncertainty,* há uma conferência bienal, *The Foundations of Utility Research Conference*. Os teóricos da decisão que argumentam favoravelmente ao uso de teorias não-EU são geralmente chamados de *proponentes não-EU.*

Nos últimos anos, muitas evidências empíricas têm sido levantadas, e elas têm sido muito importantes para os proponentes não-EU avaliar os diferentes modelos existentes, refinar o seu entendimento sobre as limitações da EU, e formular novas teorias. Destas novas evidências empíricas, obtiveram alguns fatos estilizados, que vêm a complementar o conhecimento obtido através das experimentações clássicas, que resultaram nos paradoxos apresentados neste capítulo. Assim, sumarizaremos aqui, alguns destes fatos estilizados.[23]

Fato estilizado #1: A hipótese de *"fanning out"* é violada.

Embora a hipótese de *fanning out* (generalizado) de Machina (1982), que visava explicar as violações do axioma da independência, fosse compatível com as evidências empíricas obtidas até aquele momento, experimentos mais recentes têm mostrado um padrão de comportamento mais complicando do que simplesmente um *fanning out* generalizado. Curvas de indiferença com *fanning out* são uma boa caracterização do comportamento que se observa nas primeiras áreas pesquisadas do triângulo de Marschak-Machina (especialmente no canto direito), mas, em estudos de novas áreas, esta hipótese foi seguidamente violada. Foi observada uma tendência das curvas de indiferença apresentarem "*fanning in"* no canto esquerdo do triângulo; ou seja, uma tendência dos indivíduos tornarem-se menos avessos ao risco à medida que atingem curvas de indiferença mais altas.

Fato estilizado #2: A EU é menos violada em problemas de escolha envolvendo loterias que se situam fora das bordas do triângulo de Marschak-Machina.

A maior parte das violações do axioma da independência ocorre quando os indivíduos escolhem entre uma loteria sobre a borda do triângulo e uma loteria interna. Os experimentos

[22] Contudo, esta última afirmação não se aplica ao Brasil, onde raramente pesquisa-se nesta área.
[23] Esta sumarização é baseada em Camerer (1992) e Starmer (2000).

mostram que quando os problemas de escolha são formulados somente com loterias internas, as violações da EU reduzem-se drasticamente. Porém, apesar da redução, as violações dentro do triângulo ainda são muito altas para serem consideradas erros aleatórios.

O aumento das violações da EU nas bordas do triângulo é às vezes chamado de *"border effect"* e pode ser interpretado como uma forte sensitividade dos indivíduos a mudanças envolvendo probabilidades extremas; isto é, os indivíduos são especialmente sensitivos a movimentos para fora da borda do triângulo, que ocorrem quando é introduzido um evento de baixa probabilidade.[24]

Fato estilizado #3: A atitude frente ao risco é refletida ao redor de um ponto de referência.

A atitude frente ao risco dos indivíduos parecem se refletir ao redor de um ponto de referência. Muitos indivíduos apresentam aversão ao risco para ganhos e propensão ao risco para perdas, ainda que outros apresentem somente uma redução da aversão ao risco para o caso de perdas. Portanto, como as curvas de indiferença são tanto mais inclinadas quanto maior a aversão ao risco, a reflexão implica que as curvas de indiferença serão mais inclinadas nos triângulos que representam problemas de ganhos do que nos triângulos que representam problemas de perdas.

Porém, uma qualificação deve ser feita: problemas de escolha que envolvem loterias com prêmios de baixa probabilidade seguidamente mostram uma reflexão oposta – propensão ao risco para ganhos e aversão ao risco para perdas (alguns exemplos são apostas em jogos e seguros contra eventos improváveis). Além disso, seguidamente os indivíduos são propensos ao risco em problemas de escolha envolvendo prêmios estritamente positivos. Por exemplo, em um experimento realizado por Battalio, Kagel e Komain em 1990, 80% dos indivíduos preferiram uma loteria que pagava $10 com probabilidade 0,7 e $30 com probabilidade 0,3, a um valor certo de $16. Como ambas as opções apresentam o mesmo valor esperado, este experimento revelou uma propensão ao risco de seus participantes.

---

[24] Note que, nas bordas do triângulo, há probabilidades positivas apenas para dois resultados, e, em qualquer ponto interno, há probabilidades positivas para os três resultados.

Fato estilizado #4: O grau de violação da EU depende da magnitude dos resultados.

As evidências empíricas têm sugerido que quanto maior a magnitude dos prêmios, mais a EU é violada. Este aumento nas violações se verifica tanto em loterias com prêmios positivos quanto em loterias com prêmios negativos.

Encerrados os fatos estilizados, podemos afirmar que embora eles possam ajudar na avaliação de desempenho das diferentes teorias propostas para superar as dificuldades da EU, até o presente momento, não existe uma teoria única que dê conta de todos os achados empíricos. Assim, a avaliação das teorias necessariamente tem um certo grau de subjetividade, já que os avaliadores podem divergir quanto às violações que consideram menos aceitáveis. Por outro lado, há também a questão da parcimônia – teorias muito complicadas, mesmo que eventualmente acomodem todas as evidênicias acumuladas, podem se revelar pouco úteis, já que podem não ser maleáveis o suficiente para a utilização em aplicações específicas.

Na tentativa de superar as limitações da EU, as teorias não-EU seguem duas estratégias distintas: a *estratégia convencional* e a *estratégia não-convencional*.[25]

A maior parte das teorias segue a estratégia convencional, que busca sistematizar as escolhas através de preferências "bem-comportadas". Ainda que, nesta estratégia, o axioma da independência seja abandonado, algumas características da EU são mantidas:

(i) As preferências são representadas unicamente por uma função utilidade U, análoga à função utilidade v.N-M.

(ii) As preferências satisfazem os axiomas da racionalidade e da continuidade.

(iii) O princípio da dominância estocástica (monotonicidade das preferências) é mantido.

As teorias que seguem esta estratégia podem ser chamadas de *teorias convencionais*. A teoria convencional que mais tem se destacado é a *teoria da utilidade esperada ordem-dependente*.

[25] Esta divisão foi sugerida por Starmer (2000).

Por outro lado, as teorias que seguem a estratégia não-convencional, adotam um caminho mais divergente. Em contraposição às teorias convencionais, elas seguidamente rompem com as suposições implícitas da invariância de procedimento e da invariância de descrição. Isto proporciona uma maior flexibilidade para que elas se ajustem às evidências. Mas trás também um custo: abre espaço para a existência de algum grau de indeterminação e torna as teorias menos maleáveis para aplicações econômicas específicas.

As teorias que rompem com a estratégia convencional podem ser chamadas de *teorias não-convencionais*. Entre estas, se destacam as *teorias processuais.* Uma característica comum das teorias processuais é assumir que os indivíduos utilizam "heurísticas de decisão" (regras práticas) para efetuar suas escolhas. Assim, o problema geralmente inicia com a identificação das heurísticas que o tomador de decisão pode se valer e com a especificação das condições em que cada heurística particular é utilizada. O modelo processual mais amplamente discutido é a *prospect theory*.

Nas seções 4.5.1 e 4.5.2, faremos, respectivamente, uma breve introdução à teoria da utilidade esperada ordem-dependente e à *prospect theory*. O objetivo não será analisar detalhadamente estes modelos, mas apenas fazer um esboço destas alternativas à EU.

4.5.1 Teoria da utilidade esperada ordem-dependente

A *teoria da utilidade esperada ordem-dependente* (*RDEU – rank-dependent expected utility*) foi originalmente desenvolvida por *John Quiggin* (1982). A RDEU é uma generalização da EU que abandona a linearidade nas probabilidades. Embora a RDEU não tenha sido a primeira tentativa de modelar a incerteza com probabilidades que entrem de forma não-linear em uma função U (análoga à v.N-M), foi a primeira tentativa de sucesso.

Machina (1994) descreveu a RDEU como a alternativa à EU que, provavelmente, tenha obtido o maior sucesso. Além disso, considerou a RDEU como a "modificação mais natural e útil da fórmula da utilidade esperava clássica" (Machina, 1994, p. 1237). "E, como um testamento disto, ele [RDEU] tem certamente provado ser o mais popular entre os economistas." (Starmer, 2000, p.347).

A RDEU é baseada em um conjunto de axiomas mais fracos do que aqueles da teoria da utilidade esperada. Os resultados possíveis x_i são ordenados do "pior" ao "melhor". Isto é, temos $(x_1, ..., x_n)$ tal que $x_n \succsim x_{n-1} \succsim ... \succsim x_1$ e $p = (p_1, ..., p_n)$ onde p_i é a probabilidade do resultado x_i. Assumindo que as preferências são monotônicas, temos $x_n \geq x_{n-1} \geq ... \geq x_1$.

Na RDEU, as probabilidades são transformadas antes da utilidade esperada ser calculada. Ao contrário de tentativas anteriores de incorporar "pesos de decisão" aos modelos, na RDEU, a "distorção" de cada probabilidade p_i não depende apenas de p_i, mas de um conjunto de probabilidades e do ordenamento dos resultados. Assim, mesmo probabilidades iguais $p_i=p_k$, associadas a resultados diferentes, serão, em geral, "distorcidas" em magnitudes diferentes. Intuitivamente, a idéia é que se permita atribuir pesos maiores (ou menores) a prêmios extremos de baixa probabilidade.

A forma funcional da função que representa as preferências é

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\left[q\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - q\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)\right] \tag{4.5}$$

Seja

$$h_i(p) = \left[q\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - q\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)\right] \tag{4.6}$$

chamaremos $h_i(p)$ de *pesos de decisão* e $q\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right)$, $q\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)$ de *pesos de probabilidade*.

O modelo RDEU utiliza uma *função ponderadora* ou *função transformação de probabilidade* $q:[0,1] \to [0,1]$, que transforma as probabilidades em pesos de probabilidade. A função transformação pode ser interpretada como uma captação da "psicofísica do risco" subjacente; isto é, da maneira como os indivíduos distorcem as probabilidades.[26] Os pesos de probabilidade determinam, então, os pesos de decisão que entram na função U.

[26] Cf. Gonzelez & Wu apud Starmer (2000).

Contudo, a função transformação não é aplicada às probabilidades dos eventos individuais, mas, à função distribuição acumulada. Note que $\sum_{j=1}^{i} p_j = F(x_i)$ e que $\sum_{j=1}^{i-1} p_j = F(x_{i-1})$. Assim, podemos reescrever (4.5) como:

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)\left[q\left(F(x_i)\right) - q\left(F(x_{i-1})\right)\right] \tag{4.7}$$

Da mesma forma que na EU, geralmente supõe-se que a função utilidade de Bernoulli u é côncava ou linear. Por outro lado, não há um consenso em relação ao formato mais apropriado para a função transformação de probabilidade q.[27] Porém, as opções mais naturais para lidar com as violações da EU parecem ser o formato de s invertido e q côncava.

Em uma função transformação em formato de s invertido, temos $q(p) = p$ para apenas um valor $p = p^*$. Para $p < p^*$, a função é côncava e as probabilidades são "sobreponderadas" (isto é, $q(p) > p$) e, para $p > p^*$, a função é convexa e as probabilidades são "subponderadas" (isto é, $q(p) < p$), conforme mostra a figura 4.11.[28]

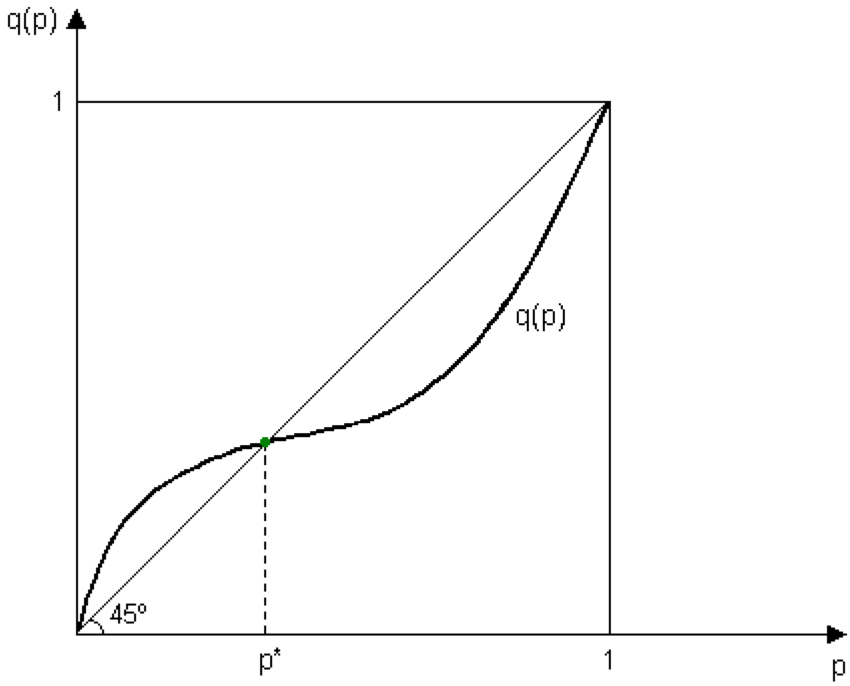


Figura 4.11 – Função transformação em formato de S invertido

[27] Cf. Quiggin (1993).

[28] Cf. Starmer (2000).

Em uma função transformação côncava, dados dois resultados quaisquer de mesma probabilidade, o resultado “pior” recebe um peso maior do que o “melhor” (figura 4.12). Esta propriedade relaciona-se com a noção de aversão ao risco e pode-se mostrar que fornece uma extensão natural ao conceito de aversão ao risco da EU.

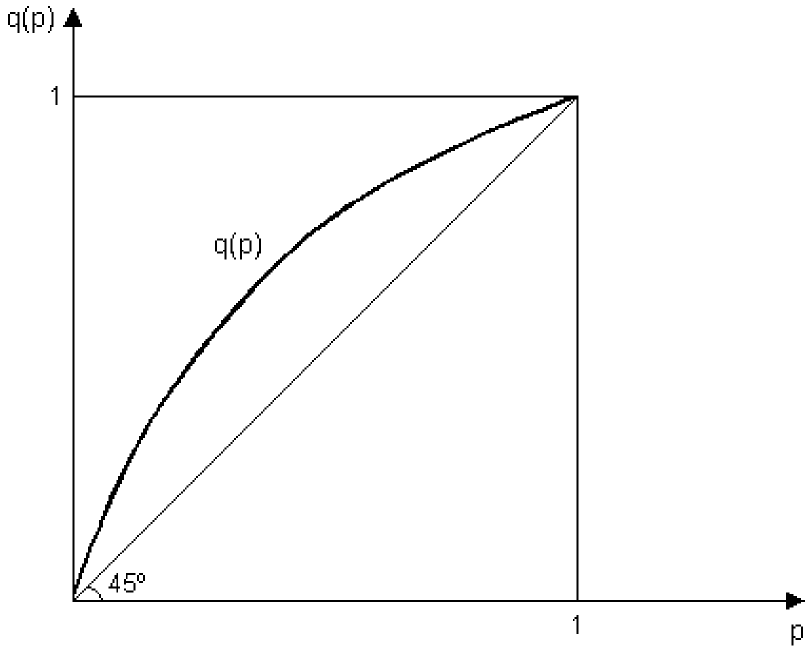


Figura 4.12 – Função transformação côncava

O formato da função transformação pode ser interpretado como refletindo “otimismo” ou “pessimismo” do tomador de decisão com respeito às probabilidades. Digamos, por exemplo, uma loteria que forneça $10 com probabilidade 0,5 e $200 com probabilidade 0,5. Com uma função q côncava, o peso de decisão atribuído ao prêmio $10 será mais alto do que o peso atribuído ao prêmio $200. Isto caracteriza um tomador de decisão “pessimista”, pois ele atribui pesos maiores para os “piores” resultados. Note que se trata de uma noção alternativa de aversão ao risco que se soma com a aversão ao risco caracterizada pela função utilidade de Bernoulli. Esta noção depende somente da existência do risco (e não do espaço dos resultados). Assim, o pessimismo tem uma forte relação com a aversão ao risco:[29] um tomador de decisão pessimista e com função utilidade de Bernoulli côncava será *universalmente avesso ao risco*. Por outro lado, um tomador de decisão com u convexa pode ser avesso ao risco se ele for suficientemente pessimista.[30]

---

[29] Lembre que a concavidade de u como caracterização da aversão ao risco é uma aplicação do conceito de aversão risco (como vimos no capítulo 3) ao contexto particular da teoria da utilidade esperada. Na RDEU, a aversão ao risco depende não somente da função u, mas também da função q.

[30] Cf. Starmer (2000).

Em 1994, Peter Wakker, Ido Erev e Elke Weber demonstraram que uma diferença fundamental entre a EU e a RDEU é que a última depende de uma versão enfraquecida do axioma da independência, chamada de *independência co-monotônica*. Enquanto o axioma da independência implica que as preferências entre as loterias não são afetadas por substituições de conseqüências comuns de mesma probabilidade (propriedade da conseqüência comum), a independência co-monotônica afirma que as preferências entre as loterias não são afetadas por substituições de conseqüências comuns de mesma probabilidade, desde que estas substituições não tenham efeito sobre o ordenamento dos resultados.[31]

No modelo RDEU, as curvas de indiferença não são linhas retas, a menos que a função transformação seja $q(p) = p$. Neste caso, a RDEU se reduz à EU. Portanto, da mesma forma que o princípio da expectância matemática é um caso particular da EU, a EU é um caso particular da RDEU. Por outro lado, a RDEU não implica em curvas de indiferença com *fanning out* generalizado e, portanto, não é incompatível com o fato estilizado #1.

Além disso, a RDEU é consistente com o *border effect* do fato estilizado #2; mas não é consistente com o fato estilizado #4, pois as ponderações de probabilidade da RDEU são independentes da magnitude dos resultados. Por outro lado, ainda que a versão original da RDEU não seja compatível com o fato estilizado #3, alguns refinamentos adicionais permitem a compatibilização.

4.5.2 *Prospect theory*

A *prospect theory (PT)* foi originalmente desenvolvida por Daniel Kahneman e Amos Tversky (1979 [2000]). A PT é compatível com muitas violações da EU e não é uma generalização matemática da EU. Nesta teoria, a decisão é modelada em um processo de duas fases. Na primeira fase, as loterias são "editadas" a partir de algumas heurísticas de decisão. Na segunda fase, a escolha entre as loterias editadas é determinada por uma função de preferência análoga à função v.N-M.

[31] Cf. Starmer (2000).

A primeira fase consiste em uma edição das loterias que visa tornar a avaliação mais simplificada. As heurísticas utilizadas dependem de cada caso, e devem ser especificadas pela modelagem.

Uma das principais heurísticas refere-se à codificação dos resultados como ganhos e perdas, relativamente a um ponto de referência. Freqüentemente, o ponto de referência é especificado como a posição corrente dos ativos (ou riqueza corrente). Mas não necessariamente deve ser assim – pode-se permitir que o ponto de referência seja afetado pela apresentação das loterias disponíveis e pelas expectativas dos tomadores de decisão. Assim, como a decisão dependerá da forma como as loterias são apresentadas, esta heurística permite explicar vários tipos de *framing effect*. Segundo Starmer (2000, p.353),

> "embora alguns economistas podem ser tentados a pensar que questões referentes à maneira como os pontos de referência são determinados parecem mais uma questão psicológica do que econômica, a pesquisa recente tem mostrado que o entendimento do papel dos pontos de referência pode ser um passo importante para explicar o comportamento real".

Outra importante heurística de decisão tem o papel de eliminar as loterias estocasticamente dominadas em primeira ordem. Contudo, a inclusão desta heurística na modelagem não remove todas as possibilidades de violação de dominância. Geralmente, assume-se que os indivíduos são capazes de detectar as loterias que são claramente dominadas, mas não aquelas que a detecção requer mais esforço e atenção. Como a função de preferência pode não ser monotônica, uma loteria dominada pode acabar sendo escolhida na segunda fase.

Na segunda fase, utiliza-se uma função preferência para avaliar as loterias, que pode ter o seguinte formato:

$$U(L) = \pi(p_i)u(x_i) \tag{4.8}$$

onde π é a *função ponderadora* ou *função transformação de probabilidade*.

Note que a função π, em um certo sentido, é análoga à função q da RDEU. Porém, na *prospect theory*, diferentemente do que acontece na RDEU, a distorção de cada probabilidade depende apenas da própria probabilidade em questão. A função π geralmente é uma função não-linear especificada para sobreponderar as baixas probabilidades e subponderar as outras.

Na PT, os prêmios entram na função (4.8) em termos de mudanças (ganhos ou perdas) em relação ao ponto de referência estabelecido na fase de edição. Assim, diferentemente da EU, a função utilidade u fornece uma medida de utilidade referente a mudanças em relação a um ponto de referência.[32] Kahneman & Tversky (1979 [2000]) sugeriram uma função em formato de S, como mostra a figura 4.13. O ponto de referência é a origem do gráfico. A função u é côncava acima do ponto de referência e convexa abaixo. Ou seja, u é côncava para ganhos e convexa para perdas. Além disso, a função é mais inclinada no domínio das perdas. Estas características da função utilidade geram duas propriedades interessantes: a *sensibilidade decrescente* e a *aversão à perda*.

A sensibilidade decrescente afirma que a utilidade marginal é decrescente para ganhos e que a desutilidade marginal é decrescente para perdas. Ou seja,

$$u''(x) \leq 0 \text{ para } x \geq 0$$

$$u''(x) \geq 0 \text{ para } x \leq 0$$

Assim, a sensibilidade decrescente implica que a sensibilidade a uma mudança marginal na riqueza diminui à medida que nos distanciamos do ponto de referência. Assim, a diferença de utilidade entre um ganho, por exemplo, de \$20 e um de \$40 será maior do que a diferença de utilidade entre os ganhos de \$200 e \$220. Por outro lado, a diferença de desutilidade entre, por exemplo, uma perda de \$10 e uma de \$20 será maior do que a diferença de desutilidade entre as perdas de \$140 e \$150.

[32] Kahneman & Tversky (1979 [2000]) chamaram a função u (ou, na notação original, função v) de função valor. Como a função valor não difere fundamentalmente de uma função utilidade, optamos pelo termo tradicional.

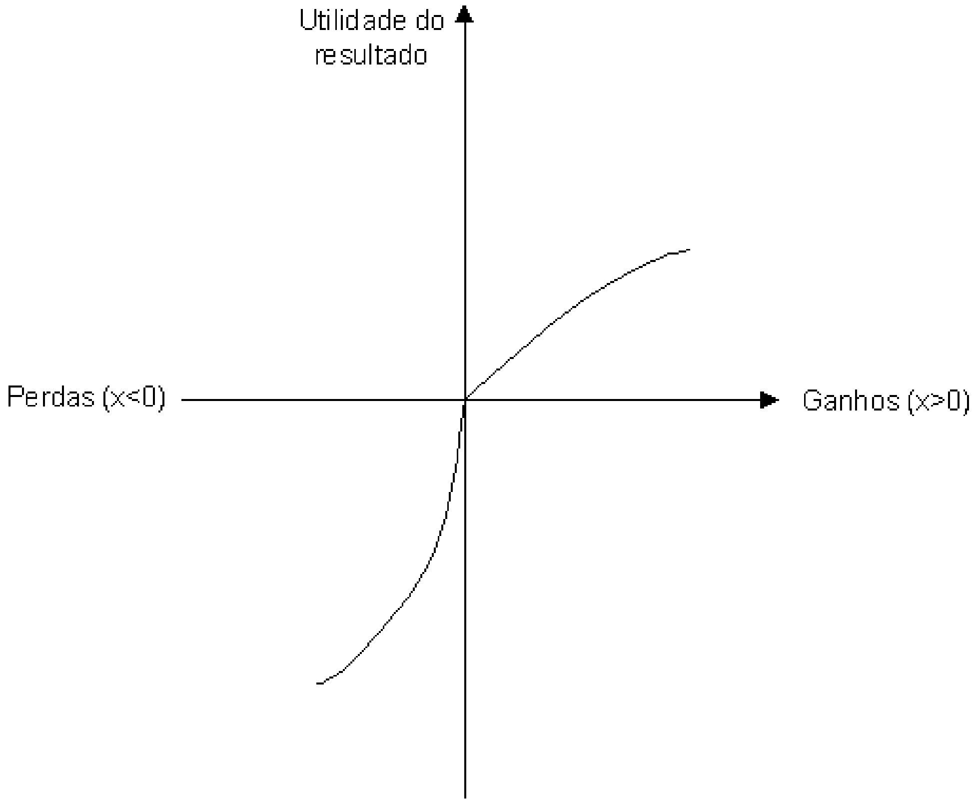


Figura 4.13 – Função utilidade u hipotética

Por outro lado, a aversão à perda afirma que os indivíduos são mais sensíveis a perdas do que a ganhos. Ou seja, desutilidade de perder uma soma de dinheiro é maior do que a utilidade de ganhar a mesma soma. Assim, $u'(x)<u'(-x)$ para todo x. O fato de que a função utilidade é côncava para ganhos e convexa para perdas, gera o *efeito reflexão*. O tomador de decisão é avesso ao risco para ganhos e propenso ao risco para perdas. Em um experimento, Kahneman e Tversky solicitaram que os participantes escolhessem entre as duas loterias da figura 4.14.

$$L_1 = \left\{ \begin{array}{lcr} p & \text{———————} & \$x \\ 1\text{-}p & \text{———————} & \$0 \end{array} \right\} \quad \text{versus} \quad L_2 = \left\{ \begin{array}{lcr} tp & \text{———————} & \$y \\ 1\text{-}tp & \text{———————} & \$0 \end{array} \right\}$$

Figura 4.14 – Problema de escolha e o efeito reflexão

Quando o problema foi especificado tal que $y>x>0$, a maioria dos participantes preferiu a loteria L_1. Porém, quando especificaram x e y tais que $y<x<0$, a maioria preferiu a loteria L_2. Assim, os participantes tipicamente exibiram aversão ao risco para ganhos e propensão ao risco para perdas.

Assim, a *prospect theory* é compatível com a reflexão da atitude frente ao risco ao redor de um ponto de referência (fato estilizado #3). Além disso, é compatível com o *border effect* do fato estilizado #2, mas não é compatível com o fato estilizado #4 (como no caso da RDEU, as ponderações de probabilidade na *prospect theory* são independentes da magnitude dos resultados). Por outro lado, uma especificação convexa de π é compatível com o fato estilizado #1.

4.6 Utilidade esperada não conclusivamente refutada

Vimos que existe um grande conjunto de evidências empíricas que são desfavoráveis à EU. Algumas exibem violações diretas de axiomas e outras, violações da invariância de descrição e da invariância de procedimento. Poderia-se acreditar, então, que haveria unanimidade a respeito da necessidade do uso de novos desenvolvimentos teóricos para acomodar as violações da EU. Mas não é o que de fato ocorre.

Vários especialistas colocam em dúvida a validade da generalização dos resultados dos experimentos para a realidade econômica. Muitos argumentam que as anomalias observadas em “laboratório” estariam mais relacionadas a falhas do método experimental do que propriamente a falhas da EU como um instrumento de modelagem econômica. (Os especialistas que consideram a EU a teoria da decisão mais adequada são geralmente chamados de *proponentes EU*.)

Na verdade, a validade dos experimentos não é completamente contestada, mas sim a sua generalização para contextos econômicos. Ainda que estes experimentos tivessem implicações importantes para a psicologia, o mesmo não se daria para a economia.

Na maioria dos experimentos, foi realizada apenas uma rodada de escolhas, o que contrasta fortemente com as múltiplas rodadas encontradas em fenômenos econômicos do mundo real. Como, em geral, os experimentos realizados não permitiram o aprendizado dos participantes, não seria adequado generalizar o comportamento observado em laboratório para contextos de mercado. No mercado, à medida que os indivíduos interagissem e recebessem *feedback* das suas escolhas, haveria uma revisão das decisões, de forma a torná-las mais racionais.

A racionalidade, neste contexto, deve ser entendida como efetuar escolhas compatíveis com a teoria da utilidade esperada, já que esta seria um padrão em termos normativos. Indivíduos cujas escolhas não satisfizessem, por exemplo, o axioma da independência, estariam sujeitos aos resultados *"Dutch book"*. Assim, existiriam duas possibilidades: ou o aprendizado levaria estes indivíduos a comportarem-se de maneira compatível com o axioma da independência, ou a competição os forçaria a sair do mercado.

Por outro lado, fenômenos observados em experimentos de laboratório, como a reversão de preferências e o *framing effect*, seriam resultados da inexperiência (os participantes geralmente são apresentados a problemas não-familiares, que não fazem parte de suas experiências anteriores) e da falta de motivação dos participantes. Com a experiência adquirida no contexto de mercado, estes fenômenos sumiriam.

Portanto, a interação de mercado faria com que as preferências dos agentes econômicos evoluíssem. E o estágio final desta evolução apresentaria preferências compatíveis com a utilidade esperada. Assim, de um modo geral, o comportamento dos agentes econômicos convergiriam para a EU. Este argumento é às vezes chamado de *argumento evolucionista*. Na presença de incentivos suficientemente fortes e com a introdução de várias rodadas, as anomalias de laboratório também tenderiam a desaparecer.

> "O comportamento parece se dar através de estágios de racionalidade, que começam com um tipo de miopia quando os indivíduos enfrentam tarefas não-familiares. Com incentivo e prática, que toma a forma de decisões repetitivas no trabalho experimental, a miopia dá lugar ao que parece ser um estágio de escolhas mais pensadas, que refletem atitudes ou preferências estáveis." (Plott apud Starmer, 2000).

Plott chamou este argumento de *hipótese da preferência descoberta*. As evidências empíricas sobre este argumento são poucas e difusas. Nos poucos experimentos em que se permitiu a revisão de escolhas dos indivíduos (não necessariamente para testar a hipótese da preferência descoberta), os resultados permitem conclusões contraditórias – alguns apóiam fortemente a hipótese da preferência descoberta e outros são fortemente contrários. Estes experimentos utilizaram metodologias bastante diferentes, o que pode explicar, pelo menos em parte, a grande discrepância.

Por outro lado, muitos economistas argumentam que as teorias não-EU são muito mais complicadas e menos maleáveis do que a EU para serem aplicadas em modelos econômicos específicos. Neste sentido, seria menos um argumento de apologia à capacidade preditiva da EU, do que uma questão pragmática. Evidentemente, este argumento não exclui o argumento evolucionista. Na prática, seguidamente são combinados.

CONCLUSÃO

Terá sido o desenvolvimento da teoria da utilidade esperada uma jornada útil do conhecimento humano? Antes de abordar diretamente esta questão, é apropriado que façamos algumas considerações.

Quando nos indagamos sobre o quão útil é uma teoria, parece mais adequado relativizar a resposta à luz dos conhecimentos previamente estabelecidos. Para exemplificar este ponto de vista, tomemos emprestado um exemplo das ciências naturais. Com o surgimento da mecânica quântica na primeira metade do século XX, percebeu-se que o modelo atômico de Rutherford-Bohr (o "modelo planetário") não era completamente adequado para descrever o mundo microscópico. Assim, foi substituído pelo modelo atômico dos orbitais, também conhecido como o "modelo das nuvens eletrônicas". Ainda que o modelo de Rutherford-Bohr tenha se mostrado "falso" à luz da mecânica quântica, não podemos concluir que ele tenha sido inútil. De fato, este modelo representou um grande avanço em relação ao modelo atômico de Thomson (o "modelo do pudim com passas"), seu antecessor. O modelo de Rutherford-Bohr clareou uma série de aspectos em relação aos fenômenos físico-químicos que passaram desapercebidos no modelo de Thomson.

Além disso, quando uma teoria é declarada "falsa" segundo evidências e teorias mais modernas, não necessariamente deve ser abandonada. O desenvolvimento da teoria da relatividade no início do século XX, por exemplo, foi motivada pelo crescente acúmulo de observações que desafiavam a mecânica newtoniana. Porém, ainda que a mecânica newtoniana tenha sido considerada "falsa" à luz da teoria da relatividade, ela continua até hoje "soberana" nas aplicações em problemas práticos do cotidiano. Isto se explica porque, sob as condições que estes problemas geralmente se apresentam, a mecânica newtoniana produz resultados bastante próximos aos da teoria da relatividade, com a vantagem de ser muito mais simples de ser aplicada.

Tendo em mente estas duas considerações, voltemos nossas atenções novamente para a teoria da decisão. Quando Bernoulli deu origem à teoria da utilidade esperada, ele estava motivado pelas evidências anômalas geradas sob o princípio da expectância matemática. Como vimos, este princípio baseava-se unicamente no valor esperado das apostas e não reconhecia a possibilidade dos indivíduos serem avessos ao risco. Assim, não era capaz de explicar, entre outras coisas, por que os indivíduos compram apólices de seguro. Bernoulli procurou então explicar este fenômeno, postulando a lei da utilidade marginal decrescente e afirmando que a instância relevante de escolha não seria o valor esperado, mas sim a utilidade esperada. Desta forma, podemos dizer que o princípio da expectância matemática foi declarado "falso" à luz da EU.

Dadas estas colocações, poderia ser tentador qualificar o princípio da expectância matemática como uma teoria ruim. Mas antes de fazer tal qualificação, parece mais adequado nos perguntarmos sobre qual era o conhecimento anteriormente disponível sobre o tema. Evidentemente, não havia teoria alguma. Neste sentido, o princípio desenvolvido por Pascal foi um avanço notável. Além disso, devemos lembrar que a teoria da utilidade esperada foi uma generalização do princípio da expectância matemática e que este continua presente na EU, sob o caso particular da neutralidade ao risco. Ou seja, continua sendo aplicado em todos os modelos que supõem agentes econômicos neutros ao risco, mostrando que é útil ainda hoje.[1]

E, para sermos eqüitativos, devemos avaliar a teoria da utilidade esperada nos mesmos termos em que avaliamos o princípio da expectância matemática. Está claro que a EU foi um grande avanço em relação ao princípio da expectância matemática. A introdução da EU permitiu explicar uma série de comportamentos que a teoria antecessora não conseguia; e ainda que tenha uma estrutura teórica mais complexa, esta desvantagem foi mais do que compensada pela amplitude de comportamentos observáveis que a teoria permitiu que fossem modelados. Além disso, vale lembrar que alguns inconvenientes importantes, inicialmente presentes na EU, foram superados.

---

[1] Para citar um exemplo famoso de modelo que supõe neutralidade ao risco, temos o modelo de Akerlof, desenvolvido em Akerlof (1970), *The market for "lemons": quality uncertainty and the market mechanism*, artigo seminal na literatura de seleção adversa.

Quando Bernoulli desenvolveu a “hipótese da utilidade esperada”, ele concebeu a utilidade como uma medida psicológica de intensidade. Vimos que esta noção de utilidade é particularmente problemática. Mas esta noção foi superada com a interpretação operacionalista da teoria da utilidade, posteriormente estendida para a teoria da utilidade esperada. Em termos da interpretação operacionalista, o conceito de “utilidade” não está relacionado com bem-estar, felicidade ou qualquer outra variável mental.

Evidentemente que, ao especificarmos um problema de maximização com determinada função utilidade, faz-se necessário justificar tal escolha. Antes da axiomatização da EU, esta questão era um grande inconveniente – não havia justificativa para que a “hipótese da utilidade esperada” fosse utilizada. Isto certamente contribuiu para que a EU não tenha atraído a atenção dos economistas no período anterior à contribuição pioneira de John Von Neumann e Oskar Morgenstern. Quando estes forneceram uma justificativa, provando o teorema da utilidade esperada, o interesse do meio acadêmico foi despertado. Tempos depois, resolvida a “controvérsia da mensurabilidade”, a teoria da utilidade esperada foi definitivamente incorporada ao arcabouço teórico da economia, e novos avanços começaram a surgir.

Vimos que a EU possui propriedades atraentes em termos normativos, e que ela é capaz de lidar com o comportamento de aversão ao risco de maneira bastante ágil e simples. Estas qualidades constituiram-se em grandes atrativos da teoria para modelar os fenômenos econômicos. Com o desenvolvimento das medidas de aversão ao risco de Arrow-Pratt e as análises de dominância estocástica, ampliou-se ainda mais o escopo das aplicações da teoria da utilidade esperada.

Contudo, ainda que a aplicação da EU nas diversas áreas da economia tenha apresentado sucessos teóricos continuados, permitindo o entendimento de novos e numerosos fenômenos econômicos, começaram a surgir evidências experimentais inconsistentes com a EU. Estas evidências, obtidas através do recente “paradigma experimental”, começaram a colocar em dúvida a capacidade preditiva da teoria da utilidade esperada, gerando, grosso modo, duas linhas de pensamento distintas.

Há aqueles que consideram que as evidências acumuladas são fortemente indicativas de que a EU não é uma teoria confiável e que, por isto, novas teorias que se ajustem às evidências devam ser desenvolvidas. De fato, nas últimas duas décadas, dezenas de novas teorias foram desenvolvidas com este espírito.

No entanto, há outros que discordam de que a EU deva ser substituída. O principal argumento em defesa da EU é que a maior parte das evidências contra a EU foram obtidas através de experimentos de apenas uma rodada, não dando oportunidade para que os indivíduos aprendam e revisem suas escolhas. Assim, se fosse permitido o aprendizado, as preferências evoluiriam e o comportamento convergiria para a teoria da utilidade esperada – que é o que supostamente aconteceria no mercado, onde as transações ocorrem com múltiplas rodadas.

Podemos ir mais adiante e requalificar estas duas linhas de pensamento em quatro posições distintas, a saber:

(1) A teoria da utilidade esperada é a teoria "correta".

(2) A EU até pode falhar, mas as teorias de utilidade não-esperada são muito complicadas para serem aplicadas em questões específicas.

(3) A EU é limitada e deve ser complementada por uma ou mais teorias não-EU.

(4) A EU deve ser abandonada em prol de uma ou mais teorias não-EU.

As posições extremas (1) e (4) são mais difíceis de serem defendidas. Contra a posição (1), podemos argumentar que as evidências obtidas pela economia e psicologia experimentais parecem fortes demais para serem ignoradas. Além disso, nem sempre o argumento evolucionista pode ser evocado para defender a EU – existem escolhas que são únicas ou que acontecem com pouca freqüência, limitando a relevância do aprendizado. Por outro lado, existe ampla evidência proveniente da psicologia experimental de que os indivíduos tendem a avaliar viesadamente informações ambíguas.[2] Portanto, quando as relações de causa e efeito sobre determinado aspecto do mercado não são nítidas, é possível que os indivíduos confirmem suas crenças apriorísticas através de uma avaliação viesada da informação disponível, caracterizando um contraponto, pelo menos parcial, ao argumento evolucionista.

[2] Ver Gilovich (1991).

Contra a posição (4), podemos recordar do exemplo proveniente da física: as evidências mostraram que a mecânica newtoniana era “falsa” e, no entanto, mesmo com o desenvolvimento da teoria da relatividade, ela não foi abandonada. De igual modo, mesmo que fique claro que a EU apresente limitações importantes, não parece razoável que a EU venha a ser abandonada, pois, inegavelmente, as teorias não-EU são mais complicadas de serem aplicadas.

Além disso, é possível que uma parcela considerável dos resultados obtidos na modelagem de questões econômicas específicas através da EU não dependam realmente do axioma da independência. Ou seja, mesmo que o axioma da independência seja abandonado em prol de algum axioma mais fraco, é possível que os resultados centrais de vários modelos continuem os mesmos. Nos casos em que isto ocorresse, uma pronta aplicação da “Navalha de Occam” manteria a EU como a teoria-base. O mesmo argumento pode ser estendido em maior ou menor grau para outros tipos de suposições ou axiomas comumente violados.

Outra questão que conta contra a posição (4) é que as teorias não-EU deixam alguns problemas teóricos em aberto. Por exemplo, sob preferências não-EU, um equilíbrio de Nash pode não existir e as escolhas podem ser dinamicamente inconsistentes. Se bem que estes problemas possam vir a ser contornados, não há nenhuma garantia de que de fato isto venha a ocorrer.

Portanto, ao que parece, as posições (2) e (3) são mais críveis. Vimos que a EU é uma teoria extremamente ágil, que disponibiliza uma série de instrumentos teóricos sem se tornar complicada. Uma condição para que seja possível uma complementação da EU por teorias não-EU é que estas se mostrem suficientemente maleáveis para aplicações específicas. (Do que adianta uma teoria que se adeque às evidências experimentais, mas que disponibilize poucos recursos analíticos?)

É evidente que o grau de necessidade de complementação da EU é contingente ao fato das preferências evoluírem ou não (em situações de mercado) para preferências representáveis pela EU. Infelizmente, as evidências a respeito do argumento evolucionista são poucas e difusas. Na medida em que forem realizados experimentos para testar a convergência das escolhas para a EU, teremos uma idéia mais aproximada sobre se isto de fato ocorre. É possível que acabe se descobrindo que, em determinados tipos de situações, o comportamento tenda a convergir para a EU; e que, em outros, isto não ocorra. Assim, abriria espaço para que teorias não-EU fossem utilizadas em situações nas quais o comportamento de escolha não convirja para a EU.

Portanto, ainda que a teoria da decisão e, em particular, a teoria da utilidade esperada, tenham se desenvolvido muito nas últimas décadas, há muitas questões não resolvidas. Conseqüentemente, existem muitas oportunidades de pesquisa. Experimentos para testar o argumento evolucionista é apenas uma delas. Outra é reunir as evidências destes experimentos e elaborar uma teoria da evolução das preferências, mostrando como o aprendizado interage com as preferências.

No âmbito das teorias não-EU, abre-se um leque amplo de possibilidades. Uma delas é buscar refinamentos para que estas teorias tornem-se mais maleáveis. Outra é tentar aplicar estas teorias a antigos problemas (já tratados via EU), gerando, quem sabe, novos *insights* econômicos e demonstrando que, como no caso da teoria da utilidade esperada, o desenvolvimento de teorias não-EU também foi útil, no sentido de proporcionar novos entendimentos sobre os fenômenos econômicos.

APÊNDICE

TEORIA DA DECISÃO (OBJETIVA) - LINHA DO TEMPO (1670-1982)

1670

Publicação póstuma de “Pensamentos” de Blaise Pascal, dando origem ao princípio da expectância matemática.

1738

Daniel Bernoulli publica um artigo em *Commentarii Academiae Scientiarum Imperalis Petropolitanae*, dando origem à teoria da utilidade esperada (EU).

1789

Jeremy Bentham redescobre o conceito de utilidade em *The Principles of Morals and Legislation.*

Década de 1870

Marginalistas introduzem o conceito de *utilidade* na teoria econômica, modelando contextos sem incerteza.

1906

Vilfredo Pareto introduz a abordagem ordinal da teoria da utilidade.

Década de 1930

John Hicks e R.G.D. Allen apresentam a abordagem “operacionalista” da teoria da utilidade.

1944-1947

Em 1944, John Von Neumann e Oskar Morgenstern publicam *Theory of Games and Economic Behavior*, onde apresentam uma axiomatização para a EU. Na segunda edição, em 1947, provam o teorema da utilidade esperada.

1953

Maurice Allais formula o problema que seria conhecido como Paradoxo de Allais e o exemplo que daria origem ao Paradoxo da razão comum.

1964

Publicação de *Risk aversion in the small and in the large,* de John Pratt, na *Econometrica*, dando origem às medidas de aversão ao risco de Arrow-Pratt.

1979

Daniel Kahneman e Amos Tversky dão origem à *Prospect theory* no artigo intitulado *Prospect theory: an analysis of decision under risk,* na *Econometrica.*

1982

John Quiggin introduz a teoria da utilidade ordem-dependente (RDEU) em *A theory of anticipated utility*, publicado no *Journal of Economic Behaviour and Organization.*

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCHIAN, Armen. (1953 [1967]). The meaning of utility measurement. *American Economic Review,* mar.1953, 26-50. Versão reimpressa: IN: BREIT, William; HOCHMAN, M. (Eds.). (1967). *Readings in microeconomics*. Holt, Rinehart and Winston.

AKERLOF, George A. (1970). The market for “lemons”: quality uncertainty and the market mechanism. *Quartely Journal of Economics,* 84, p.488-500.

ALLAIS, M. (1953). Le comportement de l´homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l´ecole americaine. *Econometrica,* v.21, n.4, 503-546.

AUDI, Robert. (Ed.) (1999). *The cambridge dictionary of philosophy*. 2ed. Cambridge: Cambridge University Press.

ÁVILA, Geraldo. (1999). *Introdução à análise matemática.* 2ed. São Paulo: Edgard Blücher.

BAUMOL, William J. (1951). The Neumann-Morgenstern utility index – an ordinalist view. *Journal of Political Economy,* fev.1951, 61-66.

BAUMOL, William J. (1958). The cardinal utility which is ordinal. *The Economic Journal,* v.68, n.272, 665-672.

BERNOULLI, D. (1738 [1954]). Specimen theoriae novae de mensura sortis. *Commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 5, 175-192. Versão traduzida: Expositions of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica,* 22, 1954, 23-36.

BERNSTEIN, Peter L. (1997). *Desafio aos deuses: a facinante história do risco*. Rio de Janeiro: Campus.

BISWAS, Tapan. (1997). *Decision-making under uncertainty*. Londres: Macmillan Press.

CAMERER, Colin F.; KUNREUTHER, Howard. (1989). Decision Processes for low probability events: policy implications. *Journal of Policy Analysis and Management*, vol. 8, n.4, 565-592.

CAMERER, Colin F. (1992). Recent tests of generalizations of expected utility theory. IN: EDWARDS, W. (ed.) *Utility theories: measurements and applications.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

CARVALHO, Fernando J.C. (1988). Keynes on probability, uncertainty, and decision making. *Journal of Post Keynesian Economics,* vol. XI, n.1, 66-81.

CASTRUCCI, Benedito. (1972). *Elementos de teoria dos conjuntos:* série professor no.3. São Paulo: G.E.E.M.

CRUSIUS, Carlos Augusto (2001). *A razão como faculdade calculadora:* a aposta de Pascal. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS.

DEBREU, Gerard. (1952). Representation of a preference ordering by a numerical function. *Cowles Comission Discussion Paper 2040,* abr.1952.

DUNN, Stephen. (2001). Bounded rationality is not fundamental uncertainty: a post keynesian perspective. *Journal of Post Keynesian Economics*, vol.23, n.4, 567-587.

ELLSBERG, Daniel. (1954). Notions of “measurable utility”. *The Economic Journal,* set.1954, 528-556.

FISHBURN, Peter C. (1988). Expected utility: an anniversary and a new era. *Journal of Risk and Uncertainty,* 1, 267-283.

FRIEDMAN, David D. (1990). *Price theory:* an intermediate text. South-Western Publishing Co.

GILOVICH, Thomas. (1991). *How we know what isn´t so:* the fallibility of human reason in everyday life. Nova Iorque: The Free Press.

GOLLIER, Christian. (2001). *The economics of risk and time*. Cambridge: MIT Press.

GRETHER, David M.; PLOTT, Charles R. (1979). Economic theory of choice and the preference reversal phenomenon. *American Economic Review,* v.69, n.34, 623-638.

HADAR, Josef; RUSSEL, William R. (1969). Rules for ordering uncertain prospects. *American Economic Review,* v.59, 25-34.

HARA, Chiaki; SEGAL, Ilya; TADELIS, Steve. (1997). *Solutions manual for Microeconomic theory:* Mas-Colell, Whinston, and Green. Nova Iorque: Oxford University Press.

HERSTEIN, I. N.; MILNOR, John. (1953). An axiomatic approach to measurable utility. *Econometrica,* 21, 291-297

JEVONS, W. Stanley. (1871 [1996]). *The theory of political economy*. Versão traduzida: *A teoria da economia política*. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

KAHNEMAN, Daniel; TVERSKY, Amos. (1979 [2000]). Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica,* 47:2, 263-91. Versão reimpressa: IN: KAHNEMAN, Daniel; TVERSKY, Amos. (eds.). (2000). *Choices, values and frames.* Cambridge University Press.

KREPS, David M. (1988). Notes on the theory of choice. *Underground classics in economics*. Boulder: Westview Press.

KREPS, David M. (1990). *A course in microeconomic theory*. Hertfordshire: Harvester Wheatsheaf.

LAFFONT, Jean-Jacques. (1989). *The economics of uncertainty and information*. Cambridge: The MIT Press.

LAWSON, Tony. (1988). Probability and uncertainty in economic anaysis. *Journal of Post Keynesian Economics,* vol.XI, n.1, 38-65.

LEROY, Stephen F.; SINGELL, Larry D. Jr. (1987). Knight on risk and uncertainty. *Journal of Political Economy,* v.95, n.2, 394-406.

LIMA, Elon Lages (1997). *Análise Real:* volume 1. 3ed. Rio de Janeiro: IMPA.

LISBOA, M. B. (1997). A miséria da crítica heterodoxa. Primeira parte: sobre as críticas. *Revista de Economia Contemporânea*, n.3, jan-jun.

MACHINA, Mark J. (1982). "Expected utility" analysis without the independence axiom. *Econometrica*, v.50, n.2, 277-323.

MACHINA, Mark J. (1987). Choice under uncertainty: problems solved and unsolved. *Economic Perspectives,* v.1, n.1, 121-154.

MACHINA, Mark J. (1989). Dynamic Consistency and non-expected utility models of choice under uncertainty. *Journal of Economic Literature,* v.27, 1622-1668.

MACHINA, Mark J. (1994). Review of "Generalized utility theory: the rank-dependent model". *Journal of Economic Literature*, v.32, 1237-1238.

MARSHALL, Alfred. (1890 [1996]). *Principles of economics:* an introductory volume. Versão traduzida: *Princípios de economia:* tratado introdutório. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

MAS-COLELL, Andreu; WHINSTON, Michael D.; GREEN, Jerry R. (1995). *Microeconomic theory*. Nova Iorque: Oxford University Press.

MEYER, Paul L. (1983). *Probabilidade:* aplicações à estatística. Rio de Janeiro: LTC Editora.

OSER, Jacob; BLANCHFIELD, William C. (1983). *História do pensamento econômico*. São Paulo: Atlas.

PARETO, Vilfredo. (1906 [1996]). *Manual d'economia política*. Versão traduzida: *Manual de economia política*. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

POMMEREHNE, Werner W; SCHNEIDER, Friedrich; ZWEIFEL, Peter. (1982). Economic theory of choice and the preference reversal phenomenon: a reexamination. *American Economic Review,* v.72, n.3, 569-574.

PRATT, John W. (1964). Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica,* v.32, n.1-2, 122-136.

PUPPE, Clemens. (1991). Distorted probabilities and choice under risk. *Lecture notes in economics and mathematical systems 363*. Springer Verlag.

QUIGGIN, John. (1982). A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behaviour and Organization*, n.3, 323-343.

QUIGGIN, John. (1993). *Generalized expected utility theory:* the rank-dependent model. Kluwer Academic Publishers.

RIMA, I.H. (1990). *História do pensamento econômico*. São Paulo: Atlas.

ROTHSCHILD, Michael; STIGLITZ, Joseph E. (1970). Increasing risk: I. A definition. *Journal of Economic Theory,* 2, 225-243.

SAMUELSON, Paul A. (1977). St. Petersburg paradoxes: defanged, dissected, and historically described. *Journal of Economic Literature,* 15, 24-55.

SAVAGE, Leonard J. (1954 [1972]). *The foundations of statistics*. Nova Iorque: Dover Publications.

SCHMIDT, Ulrich. (1998). Axiomatic utility theory under risk. *Lecture notes in economics and mathematical systems 461.* Berlin: Springer.

SCHOEMAKER, Paul J. H. (1982). The expected utility model: its variants, purposes, evidence and limitations. *Journal of Economic Literature,* vol.XX, jun.1982, 529-563.

SILBERBERG, Eugene. (1990). *The structure of economics: a mathematical analysis.* McGraw-Hill.

SIMMONS, John. (2002). *Os 100 maiores cientistas da história:* uma classificação dos cientistas mais influentes do passado e do presente. 2ed. Rio de Janeiro: Difel.

SIMON, Carl P.; BLUME, Lawrence. (1994). *Mathematics for economists*. Nova Iorque: W. W. Norton & Company.

SPANOS, Aris. (1986). *Statistical foundations of economic modelling*. Cambridge: Cambridge University Press.

SPANOS, Aris. (1999). *Probability theory and statistical inference:* econometric modeling with observational data. Cambridge: Cambridge University Press.

STARMER, Chris. (2000). Developments in non-expected utility theory: the hunt for a descriptive theory of choice under risk. *Journal of Economic Literature*, vol. XXXVIII, jun.2000, 332-382.

STEWART, Ian. (1991). *Será que Deus joga dados?:* a nova matemática do caos. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

TAKAYAMA, Akira. (1994). *Analytical methods in economics*. Hertfordshire: Harvester Wheatsheaf.

THE HISTORY OF ECONOMIC THOUGHT WEBSITE. *New School University*. http:// cepa.newschool.edu/het/profiles/neumann.htm

VARIAN, Hal R. (1992). *Microeconomic Analysis*. Nova Iorque: W.W. Norton & Company.

VON NEUMANN, John ; MORGENSTERN, Oskar. (1944 [1980]). *Theory of games and economic behavior.* New Jersey: Princeton University Press.

WIK, Mette. (1996). Individual decision making under risk: deficiences of and alternatives to expected utility theory. Department of Economics and Social Sciences of Norway. *Discussion Paper* #D-23/1996.