

氏 名 奥田 諭史

学位の種類 博士 (理学)

報告番号 甲第351号

学位授与年月日 2013年9月30日

学位授与の要件 学位規則 (昭和28年4月1日文部省令第9号)  
第4条第1項該当

学位論文題目 G/G Theory and the Bethe Ansatz for the Integrable System  
(G/G 理論と可積分系のベーテ仮説)

審査委員 (主査) 江口 徹

箕 三郎

田中 秀和

## 1. 論文の内容の要旨

位相的場の理論は一種のフェルミオンの対称性 (BRS 対称性と呼ばれる) をもち、系のストレス・テンソルが BRS exact (何かの量を BRS 変換した形を持つ) であるため系に局所的な自由度が存在せず、大域的な位相不変量のみが系の物理量となる理論である。例えば 3 次元のチャーン・サイモンズ理論や 2、4 次元で拡張された超対称性を持つ理論を twist して得られる理論等が位相的場の理論として知られている。位相的場の理論では系に局所的な自由度が存在しないため、うまく変数を選ぶと経路積分を有限個の変数の積分に帰着することができる。特に、局所化、あるいは BRS 固定点法と呼ばれる手法を用いると、経路積分への寄与が BRS 変換の固定点からのみ得られる事が分かり、分配関数や相関関数等の厳密な計算を実行することができる。

Moore-Nekrasov-Shatashvili はこうした位相的場の理論の BRS 固定点の配置を記述する式が可解模型で知られるベータ方程式と一致する場合がある事に気づいた。すなわち彼らは BF 模型と呼ばれる理論に 1-形式の物質場が結合した模型である Topological-Yang-Mills 模型を調べ、この模型の固定点の配位が可解模型の非線形 Schrödinger 模型のベータ方程式と対応する事を示した。BF 模型の分配関数は平坦接続のモジュライ空間の体積を与え、Topological-Yang-Mills 理論の分配関数は Hitchin モジュライ空間の体積を与える。こうした結果は位相不変量が可解系と関連する事を示していて大変興味深い。しかしこのようなゲージ/ベータ対応が他の模型に対しても成り立つかどうかは知られていない。論文提出者はこのような対応が成り立つ新しい例を見つけないと考えた。

この博士論文で、提出者はまず 2 次元の位相的場の理論である G/G gauged WZW 模型に関して研究を行った。G/G gauged WZW 模型は、共形場の理論である WZW 模型をゲージ化した理論であり、WZW 模型の位相的な部分だけを捉えている模型である。分配関数は共形ブロックの数を与え、相関関数は WZW

のフュージョン係数を与える.

この模型はある極限で BF 理論になることが知られており BF 理論の次に調べるべき模型であると考えられる. 提出者はまず、 $U(N)/U(N)$  gauged WZW 模型に局所化を適用し、局所化する配位が phase 模型のベータ方程式と一致する事を示した. すなわちゲージ/ベータ対応が  $G/G$  gauged WZW と可積分模型として知られる phase 模型の間に存在することが分かった.

さらに、本論文ではこの対応を  $G/G$  gauged WZW 模型にスカラー場を結合させた模型( $G/G$  gauged WZW Higgs 模型)に拡張できる事を示した.

このため提出者は  $G/G$  gauged WZWH 模型に局所化法を適用して、模型の局所化の配位が  $q$ -boson 模型のベータ方程式と一致する事を発見した. また分配関数が  $q$ -boson 模型のハミルトニアン固有ベクトルのノルムの和と一致する事を見だし、 $G/G$  gauged WZWH 模型と  $q$ -boson 系の間ゲージ/ベータ対応を確立した.  $q$ -boson 系は強結合極限を取ると phase 模型に帰着することが知られている. また、 $G/G$  gauged WZWH 模型も強結合極限で  $G/G$  gauged WZW 模型になる. このためゲージ/ベータ対応と整合性があることが分かる.

$G/G$  gauged WZWH 模型は位相的場の理論であるため分配関数は位相不変量に成っている. この値を得るためには  $q$ -boson 模型のベータ方程式を解く必要があるが、ベータ方程式が非線形連立方程式であるため一般に解析的に解くことができない. そこで提出者はニュートン法を用いて数値的に方程式を解くことを試みた. その結果、分配関数を結合定数で展開すると、その展開係数が(非常に良い近似で)整数値になることが分かり、何らかの位相不変量となることが示唆される.

さらに、本論文ではゲージ/ベータ対応がなぜ成り立つかについてもより原理的な考察がなされている. 2次元の場合、位相的場の理論は一種の可換 Frobenius 代数と圏同値であることが知られている. 最近、Korff によって新し

い可換 Frobenius 代数が  $q$ -boson 模型に現れる物理量を用いて構成された。**Korff** によって構成された可換 Frobenius 代数を用いて求めた分配関数の値は、**G/G gauged WZWH** 模型から数値計算で求めた値と一致することが分かる。よってゲージ/ベータ対応の背後には可換 Frobenius 代数の構造が存在していることが示唆される。

## 2. 審査結果の要旨

位相的場の理論は、フェルミオンの対称性（BRS 対称性と呼ばれる）を持つ場の理論のモデルで、理論のエネルギーテンソルが、BRS exact な形で書かれる。BRS 変換を一種のゲージ変換と考えると、理論のエネルギーや運動量がゲージ自由度のように見えるため、理論には局所的な自由度が存在せず、大域的な位相不変量だけがゲージ不変な観測量となる理論である。こうした理論では、経路積分への寄与が BRS 固定点のみから来ることが知られており、経路積分が有限次元の積分に帰着する。最近では、曲がった時空上の超対称ゲージ理論が似たような性質を持つことが詳しく調べられており、局所化と呼ばれる方法を用いるとやはり経路積分が有限次元の積分に帰着し理論の厳密な分配関数や相関数を求める事が出来る。

位相的場の理論における BRS 固定点の配位や超対称ゲージ理論における局所化の配位は幾つかの変数(N)に関する代数的な方程式であり、これらの方程式が可解モデルで知られるラピディティに関するベータ方程式と一致する事を主張するのがゲージ/ベータ対応である。ゲージ/ベータ対応は最初に Moore-Nekrasov-Shatashvili によって BF 模型と一次元円周上の自由フェルミオン系の間に発見された。BRS 固定点や局所化の配位は場の理論における真空状態を記述するものと考えられるため、局所化の式と可解系のハミルトニアン固有状態を決めるベータ方程式に対応関係がある事は非常に興味深い。

本研究はこうしたゲージ/ベータ対応をより多くのモデルで実現する事を目標にして行われた。まず、論文提出者は典型的な 2 次元の位相的場の理論として知られる  $U(N)/U(N)$  gauged WZW 模型を調べて、その BRS 固定点の配置が可解系として知られる phase 模型のベータ方程式と一致する事を示した。すなわち  $U(N)/U(N)$  gauged WZW 模型と phase 模型がゲージ/ベータ対応の関係にある事を初めて導いた。更に論文提出者は  $G/G$  gauged WZW 模型の分配関数が phase 模型の固有状態のノルムの和に等しい事を示した。この時、N は phase

模型の粒子の数、WZW 理論のレベル  $k$  が phase 模型の格子点の数に相当する。続いて、論文提出者は  $U(N)/U(N)$  gauged WZW 模型に余分のスカラー場 (Higgs 場と呼ぶ) を導入した  $U(N)/U(N)$  gauged WZWH 模型を構成し、ゲージ/ベータ対応がこの場合にも成立する事を示した。すなわち、 $U(N)/U(N)$  gauged WZWH 模型の局所化の配位が可解系として知られる  $q$ -boson 模型のベータ方程式と一致する事、またその分配関数が  $q$ -boson 模型のハミルトニアン固有ベクトルのノルムの和と一致する事を示した。 $q$ -boson 模型の固有ベクトルのノルムはこの論文で初めて計算された。 $q$ -boson 模型はパラメータ  $q$  を含み、 $q \rightarrow 0$  の極限で phase 模型に帰着する事が知られている。一方、 $U(N)/U(N)$  gauged WZWH 模型の Higgs 場も  $q \rightarrow 0$  の極限で脱落し WZWH 模型は WZW 模型に帰着することが分かる。従って、 $U(N)/U(N)$  gauged WZWH 模型は  $U(N)/U(N)$  gauged WZW 模型に 1 parameter を付け加えた拡張に成っている。

これら一連の仕事は、可解系や位相的場の理論に関する該博な知識を必要とするものであり、多くの興味深い新しい発見を含んでいる。論文提出者が博士号の学位に相応しい学問的力量を持つ事を示すものといえる。また、本研究において申請者が立教大学研究活動行動規範を遵守してきたことを確認した。

上述の  $U(N)/U(N)$  gauged WZW 模型の分析は既に雑誌に発表されており (JHEP 1211, 146 (2012)) 共著者 1 名との共同論文であるが、博士論文提出者が主体的に研究を押し進めたことは明らかだと考えられる。また Higgs 場を加えた  $U(N)/U(N)$  gauged WZWH 模型の分析は今後プレプリントとして出版される予定である。

2013 年 6 月 22 日、本論文に関する公聴会が開かれた。申請者は論文の内容を明快に説明し、また質問に対する応答にも満足すべきものがあつた。