

研究報告

フーリエ変換の線形応答理論に基づく 株価変動への影響のパターン分析

学習院大学経済学部経営学科 白田 由香利, 矢野 百合子
千葉商科大学商経学部 橋本 隆子
公益社団法人 日本経済研究センター研究本部研究員 佐倉 環
計算機センター 久保山 哲二

1. 始めに

株価変動は、波動現象として捉えることが可能であり、その変動パターンはフーリエ解析[1]およびウェーブレット変換[2]などの手法により解析が行われている。本研究では、大地震および洪水などの自然災害が株価変動に与える影響を分析する。本研究では、企業の株価変動の仕組みを、信号処理などのようなフーリエ解析の線形応答システムとして捉える点に新規性がある。つまり、線形性と時不変性があると仮定する。我々は「株価変動の線形応答システムにおいては、自然災害は単位インパルスのような入力と見なすことができる」という仮定を立てる。その仮説に基づき、災害影響を、そのインパルス応答と考える。本稿で用いるインパルス応答とは、VAR モデルにおけるインパルス応答とは異なる。経済・ファイナンスデータの計量時系列分析では、ベクトル自己回帰(VAR)モデルにおけるインパルス応答関数(IRF; Impulse Response Function)を扱う[3]が、本研究では、フーリエ変換における線形応答において、単位インパルス(δ 関数)を入力した際の出力であるインパルス応答を扱うのであり、VAR モデルのそれとは異なる。従来の株価分析研究は、将来の株価予測が中心であり、原因も金利変動などの金融関連の事件がほとんどである[4, 5]。こうした自然被害のインパルスの研究は少ないと言えよう。本稿では、災害の株価変動への影響をフーリエ変換による線形応答理論の線形時不変システムとしてモデル化する手法を提案する。

2. 線形応答理論の株価への応用

本節では、フーリエ解析における線形応答理論をどのように用いるのかを説明する。本研究では自然災害が株価変動に与える影響を分析する際、株価システムを線形応答理論の線形システムとしてモデル化する。つまり、線形性と時不変性をもつと仮定する。線形性とは、入力信号に対して、出力が線形性をもつことである。時不変性とは、時間をずらして入力信号を入力すると、元の出力と同じ形の信号が同じ時間だけずれて出てくることを言う[6]。同じ入力に対して、企業ごとに株価における応答の仕方は異なる。例えば東日本大震災の後、株価が同じように大幅下落したとしても、業種や企業のポテンシャル等により、その回復のパターンには様々な違いがある。株価システムの応答性に対して線形性の

仮定を置くことは、許容可能であるが、時不変性は実際には成立しない。それは時々刻々、周囲の経済状況等及びその企業の状況が変化するためである。しかし、周囲の経済状況は大きく変動するかもしれないが、企業がもつポテンシャルには違いがあり、その企業固有のポテンシャルはそれほど変化しないと仮定した。あるいは、時間がシフトしても、元の単位インパルスに大きく依存する応答をするであろうと仮定した。よって本研究では、その企業の株価変動システムが時不変性をもつと仮定した上で議論を進めたい。災害の種類により、株価システムへ与えるインパクトは異なる。一般的に言って、地震は数秒と短く、津波はそれよりは時間が長い。さらに数十年に渡る期間の長い自然災害としては、インドネシア、Sidoarjo の泥火山の災害[7-9]などがある。こうした災害期間長さのほか、被害の規模、そして、引き続き第 2 次 3 次の災害が起こるなどの災害発生パターンという要素がある。図 1 に、ある企業の 2011 年の株価変動を示した。2011 年、日本経済は、東日本大震災 3 月 11 日及び 10 月上旬のタイ洪水による被害という 2 大自然災害を被った。図 1 を見ると、3 月 11 日の直後の株価下落、及び 10 月のタイ洪水の被害による株価下落という 2 種類の異なる大波が見て取れる。



図 1: ある企業 X の 2011 年の株価の変動。2 つの株価下落の大波が在る。

株価変動システムを、分析対象の線形システムとみなす。そして、災害を株価変動システムへの入力ダメージ $x(t)$ とする。我々は、地震であれば災害は期間が短いので単位インパルス信号とみなせると考えた。線形時不変システムの場合単位インパルス応答さえ分かっていたら、任意の入力信号に対する応答は重ね合わせで求められる。図 2 に 2 種類のダメージのインパルスが入力されたときの出力信号の重ね合わせのイメージを示す。

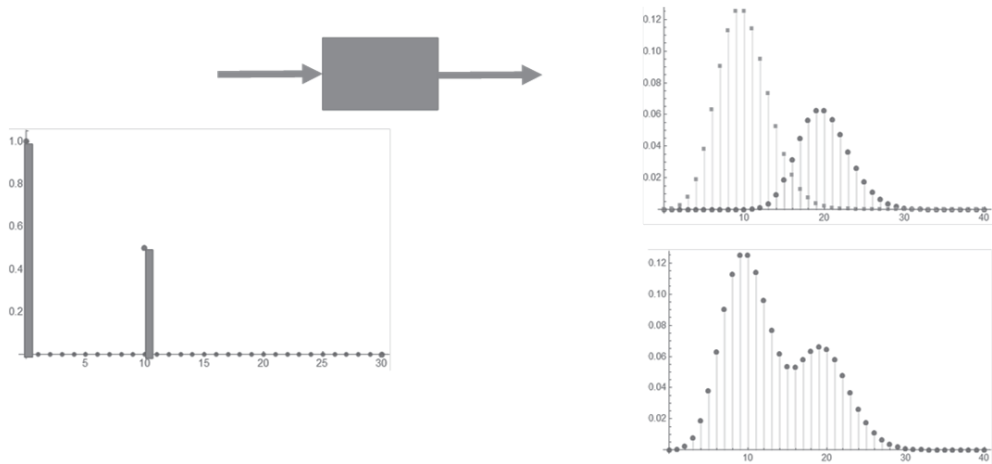


図 2:2 種類のダメージのインパルスが入力されたときの出力信号の重ね合わせのイメージ

例えば、東日本大震災の直後の株価の変動を一定期間切り出すことで、単位インパルス応答が得られた、と仮定しよう。フーリエ変換の理論では、単位インパルス応答のフーリエ変換により、得られた関数を伝達関数 $H(\omega)$ と呼ぶが、観測からこの伝達関数 $H(\omega)$ が得られたとする。フーリエ変換及びラプラス変換の利点は、入力と出力の関係式の簡潔さに有る。株価変動の「時間領域」での表現では、出力は、入力とインパルス応答の畳み込み積分になるが、フーリエ変換後の「周波数領域」での表現においては、出力は、入力 $X(\omega)$ と伝達関数 $H(\omega)$ の積というシンプルな関係になる[1]。災害時の株価変動を得たい場合は、時間領域表現を用いると計算が容易である。それは、株価はサンプリングされたデータであり、その畳み込みの式は $h[t] * x[t] = \sum_m h[t - m] * x[m]$ と簡単に計算可能となるからである。つまり、単位インパルス応答を、入力信号の各時刻の値に対して時間シフトし、さらに定数倍しながら足し合わせることで求められる[6]。また、株価変動の周期を分析したい場合は、周波数領域の表現を用いてそのパワースペクトルを分析する[10]。こうした株価変動の線形応答システムモデルを用いて将来的に以下のような分析を行いたい。

前提とする仮定 1：地震などの災害を単位インパルス信号と仮定 $\delta[t] = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$

前提とする仮定 2：線形性と、時不変性を、仮定

- (1) 業種や企業のポテンシャルなどの理由により回復パターンが異なるが、それをインパルス応答として表現したい
- (2) 災害が引き続いて起こった場合の回復パターンをシミュレーションしたい

3. 離散フーリエ変換による株価のスペクトル分析

本節では離散フーリエ変換による株価のスペクトル分析を説明する。本手法は、株価分

析で広く行われている手法であり、1企業の株価を対象とし、その時系列変化への影響の大きい周波数を抽出する点に特長がある。

事例として、2011年の「酒のやまや」の株価を分析する。東証1部上場企業で、東北3県に本社がある企業は17社あるが、そのうちのの一つである。本社は仙台にある。東日本大震災直後、酒のやまやの株価は他の東北の企業同様に下落したが、その後6月から株価が回復し、株価上昇率は2011年3月10日の944円から2012年4月2日の1867円と上昇し、この2つを比較すると、2.0倍に増加している。この上昇率は非常に高く、東北のコンビニ販売額の伸び率1.2倍(2012年2月の前年度比)に比較しても大きい[11]。その株価の震災直後の変動(終値)を図1に示す。

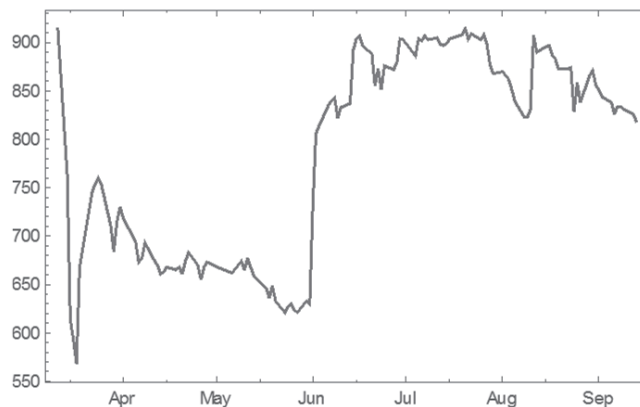


図3：酒のやまやの震災直後の株価変動(2011年3月11日から9月13日の終値)

震災の衝撃を単位インパルスと仮定し、酒のやまやのインパルス応答として、3月11日を含む10日分の株価を抽出した。それを図4に示す。長期的な回復傾向は前述したように6月以降から始まる。しかし、短期のインパルス応答として、10日を選択した。この期間の検討は今後必要であると考ええる。

株価に対するフーリエ変換は、株価がサンプリングデータであるため、離散フーリエ変換を行う。株価分析におけるフーリエ変換に慣れていない読者のため、以下で簡単に説明する。

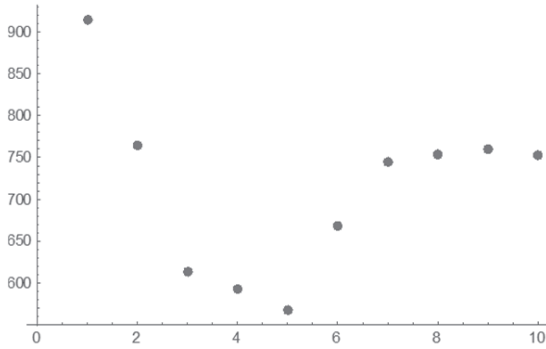


図 4：酒のやまの震災から 10 日分の株価変動

図 4 のデータを離散フーリエ変換してみると以下のようになる．ここでは、フーリエ行列の各項 F_{rs} を、 $\frac{1}{\sqrt{n}}e^{2\pi i(r-1)(s-1)/n}$ と定義している．

$$\begin{pmatrix}
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{e^{i\pi}}{5} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{3i\pi}{5} & \frac{4i\pi}{5} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{e^{-3i\pi}}{5} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{e^{-i\pi}}{5} \\
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{e^{-4i\pi}}{5} & \frac{e^{-2i\pi}}{5} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{e^{-4i\pi}}{5} & \frac{e^{-2i\pi}}{5} \\
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3i\pi}{5} & \frac{e^{-4i\pi}}{5} & \frac{e^{-i\pi}}{5} & \frac{2i\pi}{5} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{i\pi}{5} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{e^{-3i\pi}}{5} \\
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{e^{-2i\pi}}{5} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{e^{-4i\pi}}{5} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{e^{-2i\pi}}{5} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{e^{-4i\pi}}{5} \\
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{e^{-4i\pi}}{5} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{e^{-2i\pi}}{5} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{e^{-4i\pi}}{5} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{e^{-2i\pi}}{5} \\
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3i\pi}{5} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{i\pi}{5} & \frac{e^{-2i\pi}}{5} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{e^{-i\pi}}{5} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{3i\pi}{5} \\
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{e^{-4i\pi}}{5} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{e^{-4i\pi}}{5} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{2i\pi}{5} \\
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{e^{-i\pi}}{5} & \frac{e^{-2i\pi}}{5} & \frac{e^{-3i\pi}}{5} & \frac{e^{-4i\pi}}{5} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{4i\pi}{5} & \frac{3i\pi}{5} & \frac{2i\pi}{5} & \frac{i\pi}{5} \\
 \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}
 \end{pmatrix}$$

与えられた 10 日分の株価を 10 次元ベクトルで表し、それに、上記フーリエ行列の各成分を共役な複素数にして転置した行列(これを随伴行列と呼ぶ)を掛け算することで、以下のフーリエ係数を得る．

$$\begin{pmatrix} 2255.65 \\ 132.621 + 123.185 i \\ 80.6959 - 59.3292 i \\ 50.9497 - 7.13874 i \\ 42.1586 - 30.4331 i \\ 21.8197 \\ 42.1586 + 30.4331 i \\ 50.9497 + 7.13874 i \\ 80.6959 + 59.3292 i \\ 132.621 - 123.185 i \end{pmatrix}$$

このフーリエ係数が、単位円上に並ぶ円を 10 等分した点列を基底列としたときの、この株価変動の波のフーリエ係数となる。換言すると、10 個の時間領域の株価データを、10 個の周波数領域のデータで表現したことになる。

次に、株価データの期間を 6 か月とし(図 3 にある酒のやまやの株価データ)、離散フーリエ変換による結果のスペクトルを図 5 に示した。図 5 において、横軸は周波数(単位、日)で、縦軸は強度である。横軸は対数スケールとした。以下に、強度の大きい 10 個の周期とその強度を示した。

127.0	65.0
42.3	15.1
63.5	13.7
25.4	10.2
15.8	9.9
21.1	8.9
31.7	8.2
9.7	7.9
7.9	7.3
9.0	6.5

全データの期間 127 日を除くと、42 日、64 日、25 日、15 日の周期の影響が大きいことが分かった。

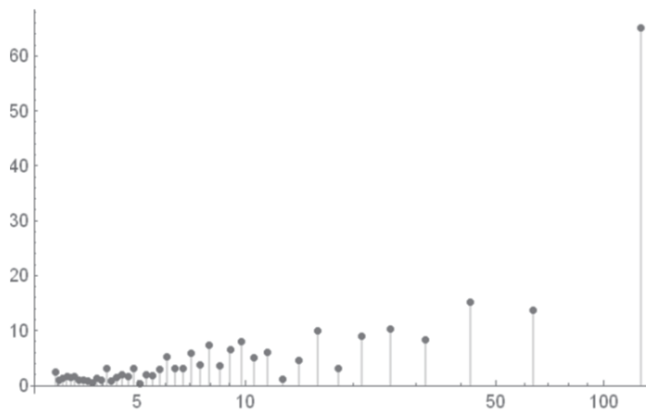


図 5: 酒のやまやの図 1 のデータのスペクトル

3. フーリエ変換の線形応答理論による災害の影響のパターン分析

我々は2011年の株価データを用いて、日本企業株価変動をシステムと見なした場合の、そのインパルス応答を調べた。例えば、トヨタの2011年9月から12月の株価データとそのスペクトラム分析の結果は図6のように与えられる。そのデータから、東日本大震災によるダメージとタイ洪水被害によるダメージの分離が可能であるか、調べたい。

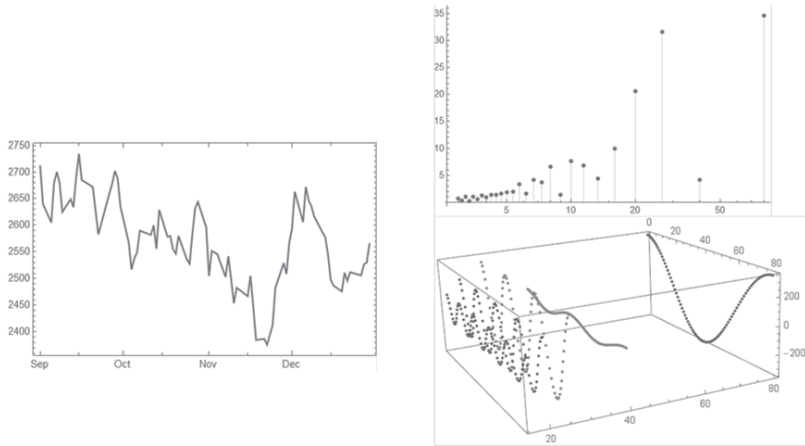


図4：トヨタの株価変動(2011年9月から12月)。左上は、スペクトル分析、左下図は、影響の大きい周波数のトップ5を示した。

各種の企業でインパルス応答を分析した。その結果、現時点では、時不変性の仮定は困難である、との結論を得た。換言すると、企業を取り巻く環境は時々刻々変化するので、時不変性を仮定することはできない、ということである。理由として考えられることは、(1) 同じ企業であっても、災害の内容によって、インパルス応答は異なり、同じインパルス応答を仮定することは難しい。(2) また、時間が経過することで企業を取り巻く環境及び状況が変化するため、同じ災害であっても時不変性は言えない、ということが上げられる。また、平常状態に戻るまでのリカバリ期間の時間幅の取り方にも依存するため、適切な時間幅を決定することができなかった。今回の分析から学んだことであるが、今後、株価を線形応答システムとしてモデル化するためには、以下の拡張が必要と考える。

- (1) 災害後の企業株価変動データの他、在庫、売上げ、リードタイム、サプライチェーンなどの、企業の内部変数的データを、関連企業も含めて取る必要がある。例えば、代替工場があれば、操業は続行可能であるので、ダメージは軽減化されるであろう。
- (2) インパルス応答の時間枠を短期から長期に渡るように変える。

上記のようなデータの拡充、期間パラメータの拡充を図ることで、災害に対する応答パターンの代表的なものは抽出可能と考える。線形応答システムとして応答インパルスが明確

に得られない原因のうち重要なものとして、1 企業の株価データのみを分析した，ということが上げられると考えた。そこで，新たな拡張手法として複数の企業に対して分析を行なうことを試みた。インパルス応答における応答システムとして，東証の上場企業 1600 社というような集合体を用いる。その場合，フーリエ解析と線形応答理論では，結果が概括過ぎて有用ではない。企業間の相関を分析できる手法として，**Random Matrix Theory** があるが，これが有用と考えた。この分析結果を次節に記述する。

4. SVDによる災害の影響の分析

本節では地震などの自然災害が日本の企業及び日本経済にどのような影響を及ぼすかを分析する手法について述べる。本手法では複数企業の株価を応答システムとしてみなして，分析する。データとして，株価のリターン値の相関行列を用いる。そしてその相関行列に対して SVD(Singular Value Decomposition)を施す[7]。これは経済物理学の一手法で「ランダム行列理論とポートフォリオ」分析として知られているものである。この相関行列に対して，SVD を行ない銘柄の相関構造を調べる。自然災害が起こった場合，東証の株価システムにどのような変化が生じたかをインパルス応答と見る。類似した株価変動をする企業群を発見することで，ダメージの大きい(小さい)グループ，リカバリの速い(遅い)グループ，が抽出できる。本手法の利点は，予想していなかった企業の関連を抽出することが可能なことである。応答パターンの類似する企業は多くの場合，想定される関連企業が殆どであるが，時にはまるで予想していなかった企業間の関連を発見することもある。例えば，タイの洪水により，知らなかったサプライチェーンの関連が発見できた，というような発見がある。

Plerou らの研究においてはランダム行列理論の目的は，安定した関係構造を発見することで，それをポートフォリオ作成に活用することである[7]。しかし，我々のアプローチでは災害時の動的な影響を時系列分析する点が異なっている。両者とも SVD 手法を使うが我々の興味の焦点は，(1)災害の影響の強度と(2)リカバリまでに要する期間である。

我々のタイの洪水の影響に関する研究において，2011年10月から12月の期間において，日経 225 を対象とし，リターン値の相関行列を作成し，SVD を行った[12][13]。1 か月ごとの時系列変化を見るため，1 ヶ月ごとのデータに分けて，月ごとの時系列変化を分析した。デジタル一眼レフカメラのメーカー，ニコンを，被害を受けた代表的企業として用いて，ニコンを代表値として含む主成分を特定した。そして，10月のデータにおいては，災害の影響を表す主成分として 3 個の主成分を確認した。主成分番号 # 3，# 5，# 7 である(図 7 参照)。このうち，特に主成分 # 5(ネガティブ部)と主成分 # 7(ポジティブ部)が固有値も大きく，また，主成分の固有ベクトルの中には，ニコンの他にも被害を受けた企業(パイオニア等)が多数含まれていたため，この固有ベクトルを被害企業のクラスを表す主成分と判定した。図 8 に，2011年10月のデータ分析結果を示す。図 8 を見ると，2011年にタイ洪水の影響に対応すると考えられる主成分 # 5(ポジティブ部)にニコンと損保が代表企業とし

て属している。損保はタイの洪水による賠償金の支払いにより被害を受けたと考えられる。

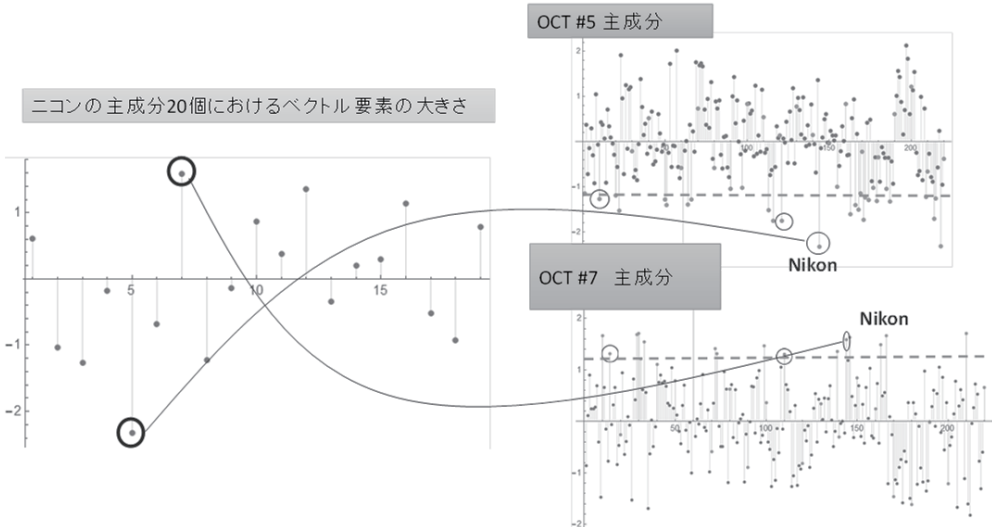


図7：2011年10月の株価変動分析の結果から、主成分#5(ネガティブ)と#7(ポジティブ)が影響を受けた主成分と判定された。

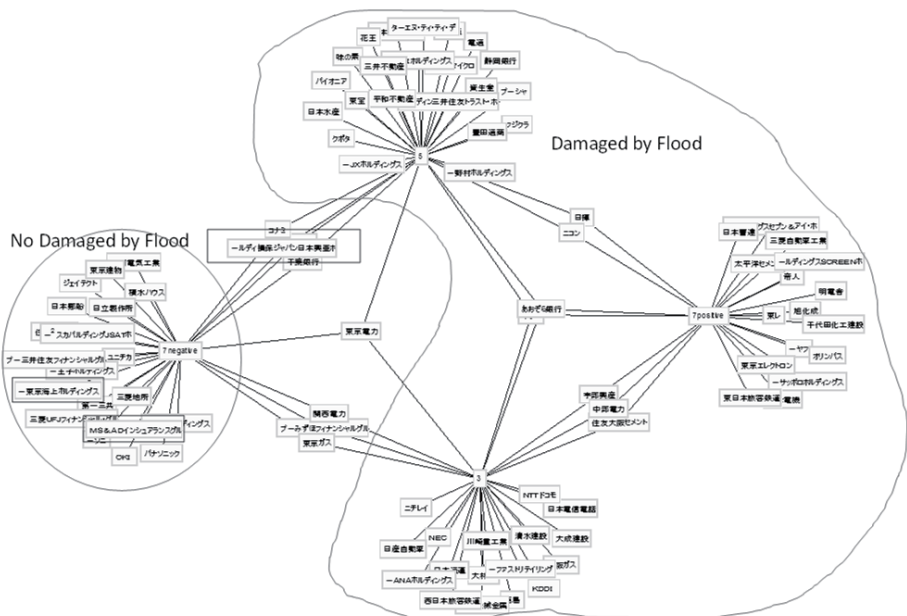


図8：2011年にタイ洪水の影響に対応すると考えられる主成分#5(ポジティブ部)にニコンと損保が代表企業として属しているが、損保は主成分#7(ネガティブ部)にも他の保険会社と一緒に属している。

しかし、東京海上、MS&MDという他の保険企業は、#7(ネガティブ部)の代表企業となっている。そして、損保も#7(ネガティブ部)の代表企業となっている。一方、主成分#7(ポジティブ部)は、ニコン、東レ、などのタイ洪水によるダメージ企業が多く含まれることから、タイの洪水による被害を受けたグループと考えられる。ここから推定されることは、日本の代表的保険会社3社はともに、3.11の賠償金支払いでダメージを受けていた。しかし、さらにタイの洪水によるダメージが大きかった損保は、ニコンと同じ主成分#7(ネガティブ部)の代表企業となっている。損保が2つの異なる主成分に属することは、その株価変動パターンの異なる2つの動きを表現するものと考えられる。詳細な分析は[13]に示す。

5. まとめ

本論文では、自然災害の日本経済への影響を分析する手法について述べた。ポイントは、企業の株価変動を、フーリエ変換における線形応答システムモデルとして捉え、自然災害のダメージをその応答システムへの衝撃としてとらえ、その時系列変化を分析する点である。地震のような災害発生期間の短い災害においては、単位インパルスのような衝撃と見なし、連続する災害に対する応答を予測したい。例えば、地震の後にタイの洪水が起こったような連続的な災害である。始め、1企業の株価変動データに対してフーリエ変換の線形応答理論を用いて、応答インパルスを求めることを試みた。しかし、株価変動システムに線形性と時不変性を仮定することには無理があり、応答インパルスが明確に得られなかった。そこで、新たな拡張手法として複数の企業に対して分析を行なうことを試みた。インパルス応答における応答システムとして、東証の上場企業1600社というような集合体を用いた。その場合、フーリエ解析と線形応答理論では、結果が概括過ぎて有用ではない。企業間の相関を分析できる手法として、**Random Matrix Theory**があるが、これが有用と考えた。このアプローチにより、2011年10月の保険会社「損保」の株価変動データから、タイ洪水によるダメージによる主成分と、他の生命保険会社と類似する変動と考えられる主成分の2面性が発見できた。この手法の利点は、災害という単位インパルスによる応答から、ダメージの強度の大きい(小さい)企業グループを発見できること、また、リカバリの速い(遅い)グループを発見できることである。今後とも、株価変動を応答システムとして分析する研究を続けていきたい。

謝辞

本研究は2016年度学習院大学計算機センター特別プロジェクト「インパルス応答に基づく自然災害による株価変動への影響のパターン分析」として行われた。

参考文献

- [1] 涌井良幸, 涌井貞美, *道具としてのフーリエ解析*. 日本実業出版社, 2014.

- [2] 金谷健一, *これなら分かる応用数学教室*: 共立出版, 2003.
- [3] 沖本竜義, *経済・ファイナンスデータの計量時系列分析*: 朝倉書店, 2010.
- [4] 得田雅章, “マクロ経済変数のショック波及分析,” *早稲田経済学研究*, vol. 55, pp. 25-42, 2002.
- [5] 得田雅章, “構造 VAR モデルによる金融政策効果の一考察,” *滋賀大学経済学部研究年報*, vol. 14, no. 104, 2007.
- [6] 鏡 慎 吾 , “ や る 夫 で 学 ぶ デ ィ ジ タ ル 信 号 処 理 ,” <http://www.ic.is.tohoku.ac.jp/~swk/lecture/yaruodsp/conv.html>.
- [7] J. Ratnatunga, and A. Sopanah, “Disaster Financing: A Contingent Valuation Approach,” *Journal of Applied Management Accounting Research*, vol. 13, no. 2, 2015.
- [8] Wikipedia. "Sidoarjo mud flow," https://en.wikipedia.org/wiki/Sidoarjo_mud_flow.
- [9] H. McMichael, “The Lapindo mudflow disaster: environmental, infrastructure and economic impact,” *Bulletin of Indonesian Economic Studies*, vol. 45, no. 1, pp. 73-83, 2009.
- [10] 佐藤敏明, *図解雑学フーリエ変換*: ナツメ社, 2013.
- [11] 白田由香利, 橋本隆子, 佐倉環, “震災後の東北経済復興を牽引する需要,” *学習院大学経済経営研究所 Discussion Paper Series*, vol. No. 12-1, 2013.
- [12] M. F. Lubis, Y. Shirota, and R. F. Sari, “Thailand's 2011 Flooding: its Impacts on Japan Companies in Stock Price Data,” *Gakushuin Economics Papers*, vol. 52, no. 3, pp. 101-121, 2015.
- [13] Y. Yano, and Y. Shirota, “Time Series Analysis of Thai Flooding Effects on Japanese Insurance Companies,” *Proc. of The IAFOR International Conference on the Social Sciences*, Jan. 5-7, 2017, Hawaii, 2017.