

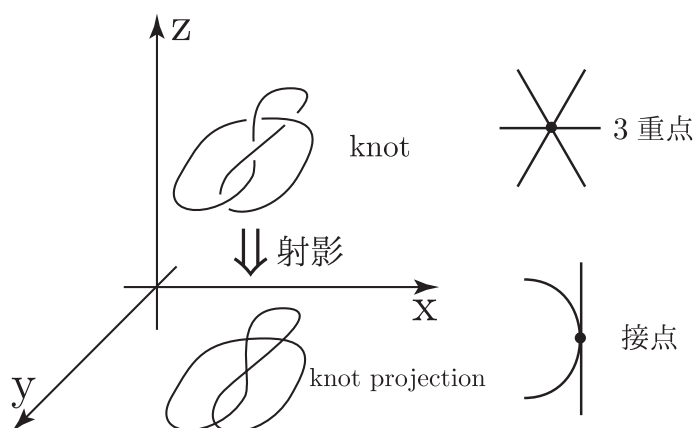
32 equivalence relations on knot projections

瀧村 祐介

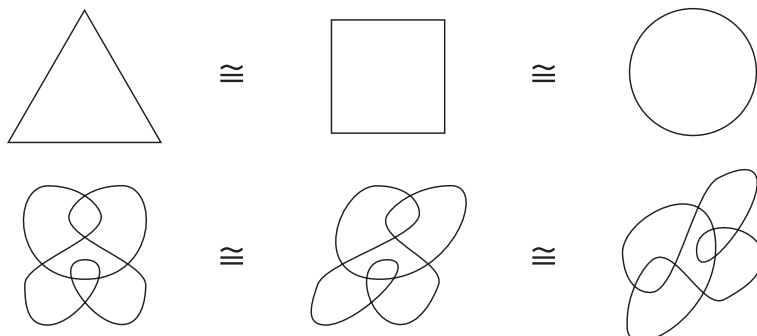
概 要

球面上の knot projection における, 射影された Reidemeister move RI, strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII を用いた同値関係を全て ($2^5 = 32$ 通り) 考える. これらのどの同値関係が同じで, どの同値関係が異なるかを決定し, 同値関係は異なる 21 種類に帰着することを示した [10]. この研究は伊藤昇氏 (東京大学) との共同研究である.

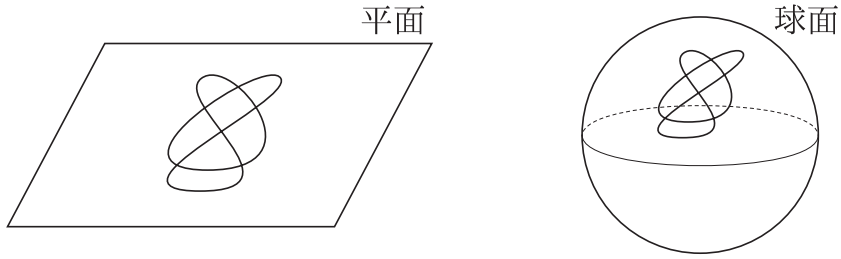
Definition 1. \mathbb{R}^3 に滑らかに埋め込まれた円周を knot という. knot を 2 次元平面に射影したものを knot projection という. その際, 3 重点や接点がないようにする.



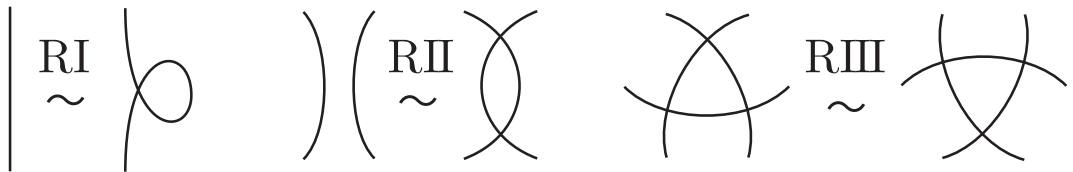
2つの図形 A から B への連続写像 $f: A \rightarrow B$ が全単射で, その逆写像も連続であるとき, f を同相写像という. A と B との間に同相写像が存在するとき, A と B は同相であるといい, \cong で表す. この紀要では, 同相により knot projection を同一視し, 鏡像は区別しないものとする.



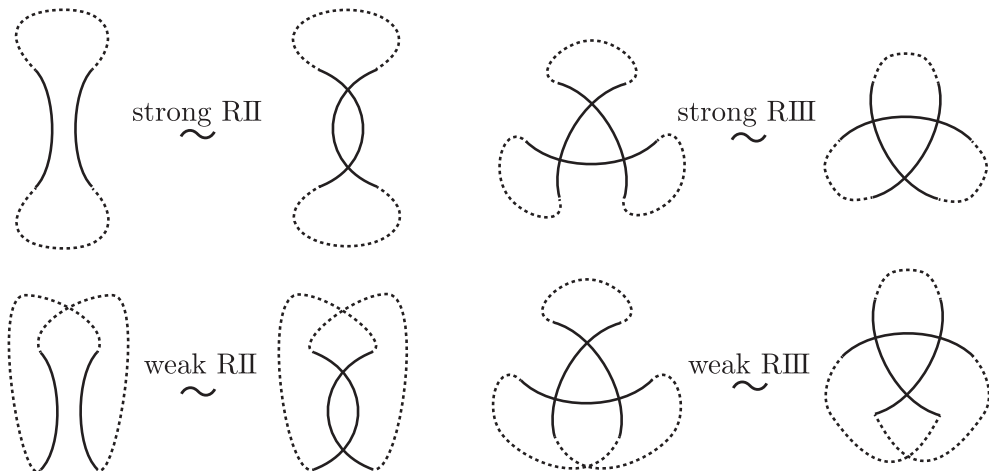
また, knot projection を平面上に無限遠点をたすことで, 球面上で扱う.



Definition 2. 球面上の knot projection において, 射影された RI, RII, RIII を図のように定義する. 任意の2つの knot projection P_1, P_2 において, 有限回の RI, RII, RIII で移り合うことが, 知られている.



RII, RIII をさらに細かく strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII として図のように定義する. 点線は, つながり方を表している.

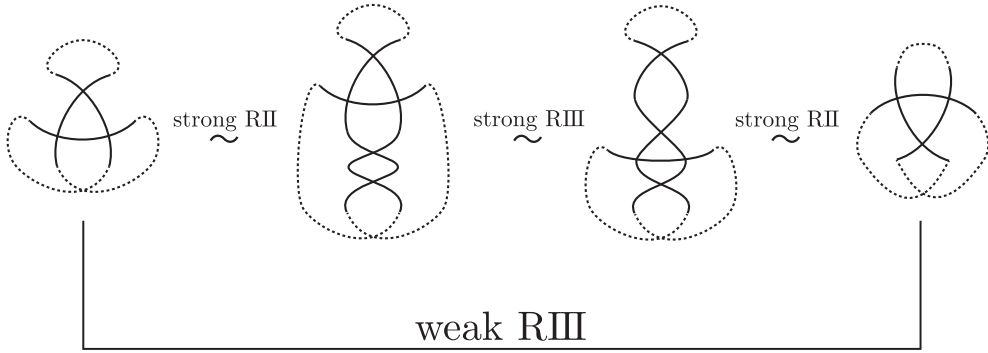


これらを用いて、次の 32 通りの同値関係を定義する.

(1)	\emptyset
(2)	{ RI, strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII }
(3)	{ RI, strong RII, weak RII, strong RIII }
(4)	{ RI, strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII }
(5)	{ RI, strong RII, strong RIII, weak RIII }
(6)	{ RI, weak RII, strong RIII, weak RIII }
(7)	{ RI, strong RII, strong RIII }
(8)	{ RI, strong RII, weak RIII }
(9)	{ RI, weak RII, strong RIII }
(10)	{ strong RII, weak RII, weak RIII }
(11)	{ strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII }
(12)	{ strong RII, weak RII, strong RIII }
(13)	{ strong RII, strong RIII }
(14)	{ strong RII, strong RIII, weak RIII }
(15)	{ strong RII, weak RIII }
(16)	{ weak RII, strong RIII }
(17)	{ weak RII, strong RIII, weak RIII }
(18)	{ strong RII }
(19)	{ weak RII }
(20)	{ strong RII, weak RII }
(21)	{ weak RII, weak RIII }
(22)	{ strong RIII, weak RIII }
(23)	{ strong RIII }
(24)	{ weak RIII }
(25)	{ RI }
(26)	{ RI, strong RII }
(27)	{ RI, weak RII }
(28)	{ RI, strong RII, weak RII }
(29)	{ RI, strong RIII }
(30)	{ RI, weak RIII }
(31)	{ RI, strong RIII, weak RIII }
(32)	{ RI, weak RII, weak RIII }

この 32 通りの同値関係が、異なる 21 種類に帰着することを示す.

(3)は、図のように strong RII, strong RIII を用いて weak RIII を生成することが出来るので、(2)と同値である。同様に、(4)～(9)も(2)と同値であることが示せる。



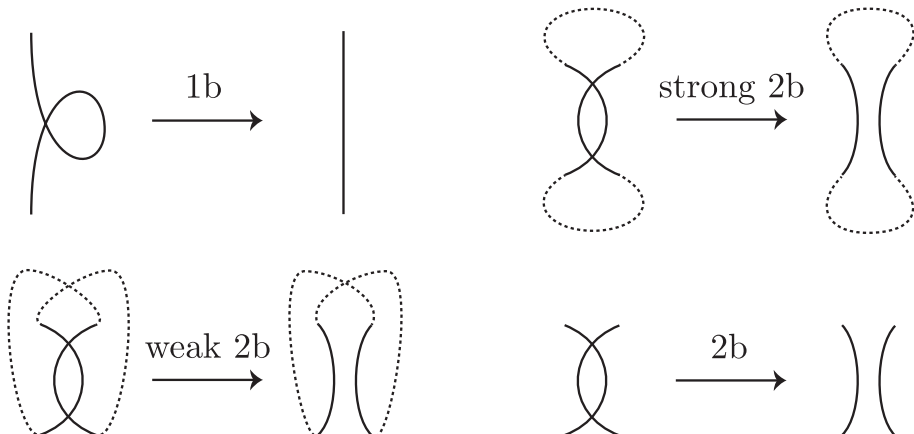
(10)～(32)の 23 通りを、次のように 2 つに分ける。

- (A) RI を含む(25)～(32)の 8 通り
- (B) RI を含まない(10)～(24)の 15 通り

(A) RI を含む(25)～(32)の 8 通り

Definition 3. ([4], [9], [10])

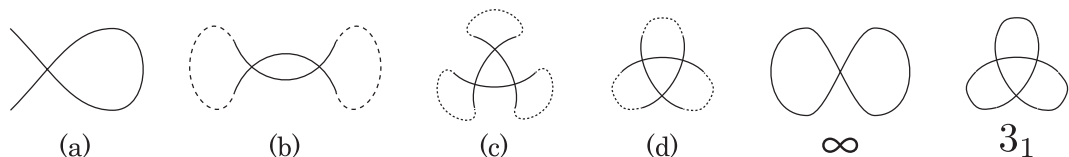
- (1) P を 1b で reduced にしたものを P^{1r} と表す。
- (2) P を 1b, strong 2b で reduced にしたものを P^{sr} と表す。
- (3) P を 1b, weak 2b で reduced にしたものを P^{wr} と表す。
- (4) P を 1b, 2b で reduced にしたものを P^{12r} と表す。
- (5) P を strong 2b で reduced にしたものを P^{2sr} と表す。
- (6) P を 2b で reduced にしたものを P^{2r} と表す。
- (7) P を weak 2b で reduced にしたものを P^{2wr} と表す。



Fact 1. ([4, 5], [9], [10], [13])

- (1) P_1, P_2 が RI で移り合う $\iff P_1^{1r} \cong P_2^{1r}$
- (2) P_1, P_2 が RI, strong RII で移り合う $\iff P_1^{sr} \cong P_2^{sr}$
- (3) P_1, P_2 が RI, weak RII で移り合う $\iff P_1^{wr} \cong P_2^{wr}$
- (4) P_1, P_2 が RI, RII で移り合う $\iff P_1^{12r} \cong P_2^{12r}$
- (5) P_1, P_2 が strong RII で移り合う $\iff P_1^{2sr} \cong P_2^{2sr}$
- (6) P_1, P_2 が RII で移り合う $\iff P_1^{2r} \cong P_2^{2r}$
- (7) P_1, P_2 が weak RII で移り合う $\iff P_1^{2wr} \cong P_2^{2wr}$

Fact 2. ([11]) P_1 が図の (a), (b), (c), (d) を含まず, P_1, P_2 が RI, strong RIII で移りあうならば, P_2 は P_1 に $\infty, 3_1$ を有限個 connectd sum したものである.

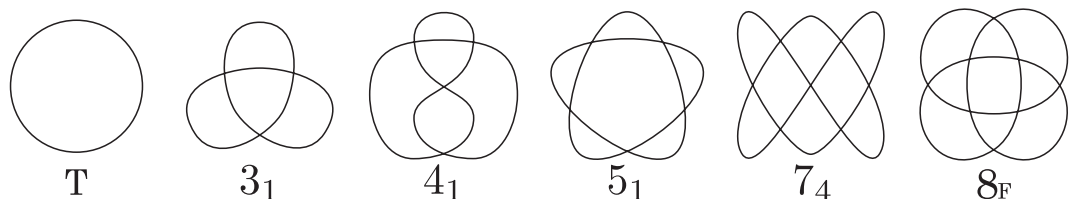


Fact 3. ([11]) 花木 [2] による P の trivializing number を $tr(P)$ と表す. $tr(P)$ は, RI, weak RIII において不変である.

Fact 4. ([7]) P の canonical genus を $g(P)$ と表す. $tr(P) - 2g(P)$ は RI, weak RII, weak RIII において不変である.

Fact 1 ~ 4 を用いて, (25) ~ (32) を次のように分類することが出来る.

Case		Formulae				Key Fact
(25)	RI	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] \neq [T]$	$[4_1] \neq [T]$	$[3_1] \neq [4_1]$	Fact 1 (1)
(26)	RI, strong RII	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] \neq [T]$	$[4_1] = [T]$	$[5_1] \neq [T]$	Fact 1 (2)
(27)	RI, weak RII	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] = [T]$	$[4_1] \neq [T]$	$[5_1] = [T]$	Fact 1 (3)
(28)	RI, RII	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] = [T]$	$[4_1] = [T]$	$[5_1] = [T]$	Fact 1 (4)
(29)	RI, strong RIII	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] = [T]$	$[4_1] \neq [T]$	$[5_1] \neq [T]$	Fact 2
(30)	RI, weak RIII	$[8_F] \neq [T]$	$[3_1] \neq [T]$	$[4_1] \neq [T]$	$[3_1] = [4_1]$	Fact 3
(31)	RI, RIII	$[8_F] = [T]$		$[7_4] = [T]$		
(32)	RI, weak RII, weak RIII	$[8_F] = [T]$		$[7_4] \neq [T]$		Fact 4



Proposition 1. P が交点を持つか持たないかは, weak RII, strong RIII, weak RIII において不変である.

(B) RI を含まない(10)~(24)の 15 通り

Proposition 1 より, 次のように 2 つに分ける.

- (a) strong RII を含む(10)~(15), (18), (20)の 8 通り
- (b) strong RII を含まない(16), (17), (19), (21)~(24)の 7 通り

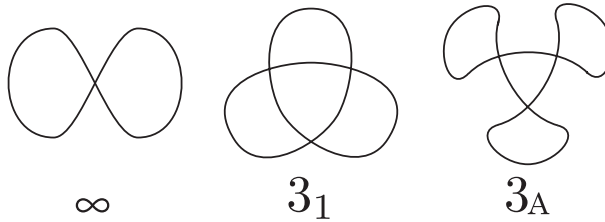
(B) (a) strong RII を含む(10)~(15), (18), (20)の 8 通り

(10)~(12), (13)~(15)はそれぞれ同値である.

Fact 5. ([1], [14]) Arnold invariant $J_S^+(P)$ は strong RII, strong RIII, weak RIII で不変である.

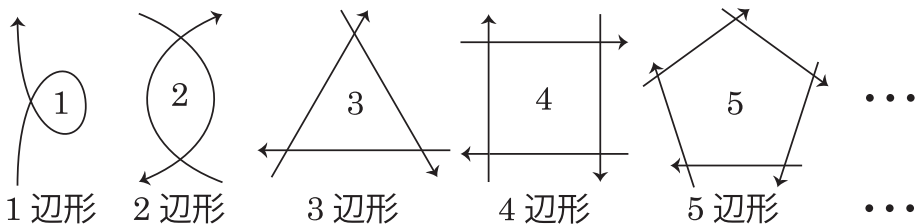
Fact 1, 5 を用いて, (10)~(15), (18), (20)を次のように分類することが出来る.

Case	Formulae	Key Fact
(10), (11), (12)	RII, RIII	$\infty = 3_1 = 3_A$
(13), (14), (15)	strong RII, RIII	$\infty \neq 3_1 = 3_A$ Fact 5
(18)	strong RII	$\infty \neq 3_1 \neq 3_A$ Fact 1 (5)
(20)	RII	$\infty = 3_1 \neq 3_A$ Fact 1 (6)



(B) (b) strong RII を含まない(16), (17), (19), (21)~(24)の 7 通り

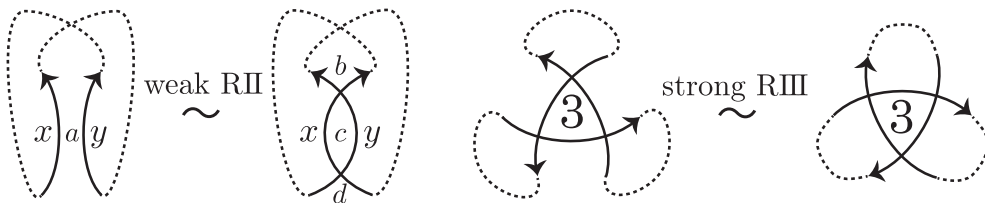
Remark 1. (cf. [12]) P に任意の向きをつけたとき, 図のような region を coherent region という. 任意の P は, 向きの付け方によらず coherent region を少なくとも 2 つ含む.



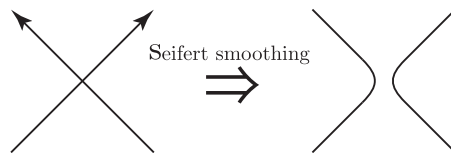
Theorem 1. coherent region うち, 領域の辺数が奇数, 偶数のものをそれぞれ coherent odd region, coherent even region という.

- (1) P が coherent odd region を含むか含まないかは, weak RII, strong RIII において不変である.
- (2) P が coherent even region を含むか含まないかは, weak RII において不変である.

Proof of Theorem 1. (1) weak RII において, 図の x, y の領域が coherent odd region かどうかは不変である. また, a, b, c, d はいずれも coherent region ではない. strong RIII において, いずれも coherent な 3 辺形が存在する. これより, 示された. (2) についても同様である.



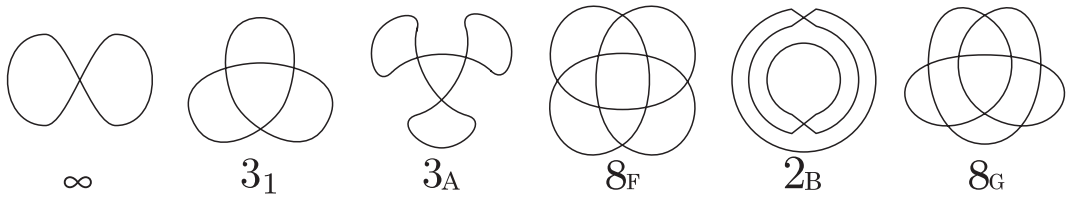
Fact 6. ([7]) P に向きをつけ, Seifert smoothing したときの circle の配置は, weak RII, weak RIII において不変である. circle の配置は, P の向きの付け方にはよらない.



Fact 7. P の交点数は, strong RIII, weak RIII で不変である.

Theorem 1, Fact 1, 3, 6, 7 を用いて, (16), (17), (19), (21)~(24) を次のように分類することが出来る.

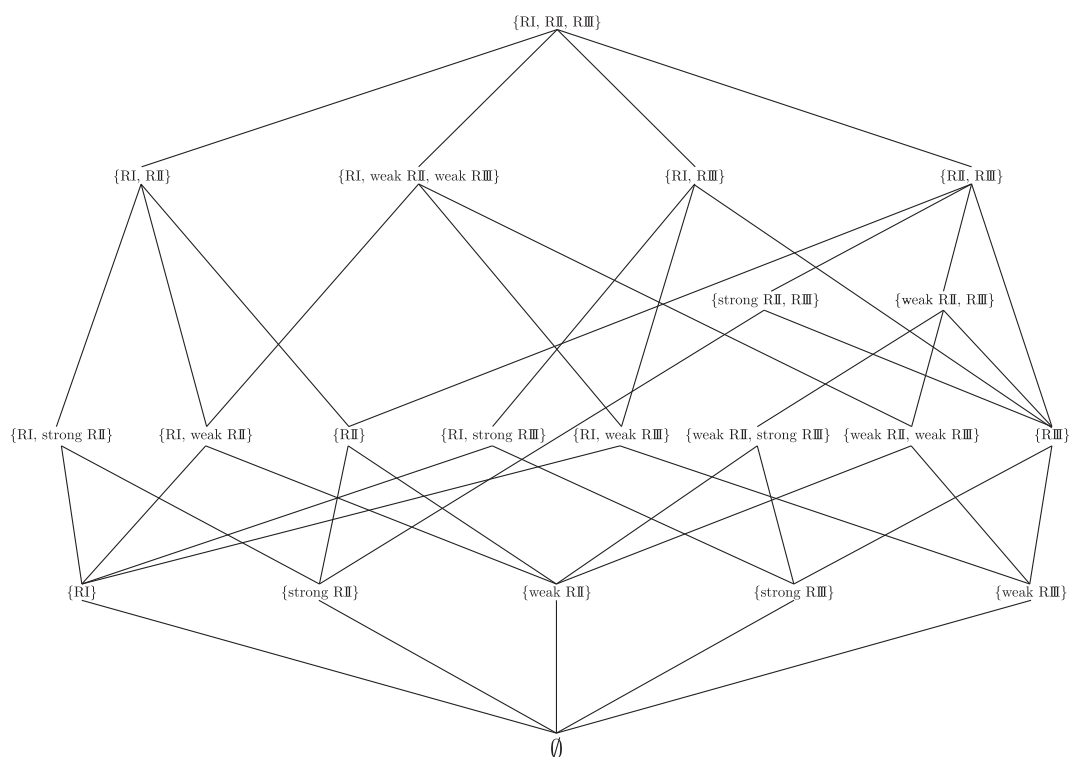
Case		Formulae		Key Fact
(16)	weak RII, strong RIII	$\infty = 3_1 = 3_A$	$8_F \neq 2_B$	Theorem 1 (1)
(17)	weak RII, RIII	$\infty = 3_1 = 3_A$	$8_F = 2_B$	
(19)	weak RII	$\infty = 3_1 \neq 3_A$	$8_F \neq 2_G$	Fact 1 (7)
(21)	weak RII, weak RIII	$\infty = 3_1 \neq 3_A$	$8_F = 2_G$	Fact 6
(22)	RIII	$\infty \neq 3_1 = 3_A$	$8_F = 2_G$	Fact 7
(23)	strong RIII	$\infty \neq 3_1 = 3_A$	$8_F \neq 2_G$	Fact 7, Theorem 1
(24)	weak RIII	$\infty \neq 3_1 \neq 3_A$		Fact 3



以上より，32通りの同値関係は，次の21通りの同値関係に帰着する．

Case		関連結果
(1)	\emptyset	
(2)	{ RI, strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII }	[7]
(11)	{ strong RII, weak RII, strong RIII, weak RIII }	[14]
(14)	{ strong RII, strong RIII, weak RIII }	Fact 5
(16)	{ weak RII, strong RIII }	Theorem 1 (1)
(17)	{ weak RII, strong RIII, weak RIII }	[1]
(18)	{ strong RII }	Fact 1 (5), [10]
(19)	{ weak RII }	Fact 1 (7), [10]
(20)	{ strong RII, weak RII }	Fact 1 (6), [4, 5]
(21)	{ weak RII, weak RIII }	Fact 4, 6
(22)	{ strong RIII, weak RIII }	Fact 7
(23)	{ strong RIII }	Fact 5, 7
(24)	{ weak RIII }	Fact 3 ~ 7
(25)	{ RI }	Fact 1 (1), [4, 5]
(26)	{ RI, strong RII }	Fact 1 (2), [9]
(27)	{ RI, weak RII }	Fact 1 (3), [9]
(28)	{ RI, strong RII, weak RII }	Fact 1 (4), [4, 5]
(29)	{ RI, strong RIII }	Fact 2, [6], [11]
(30)	{ RI, weak RIII }	Fact 3, 4, [4, 5], [11]
(31)	{ RI, strong RIII, weak RIII }	[3], [8]
(32)	{ RI, weak RII, weak RIII }	Fact 4, [7]

これら21種類の同値関係から，図のような pre-order が得られる．線の下側の同値関係で同値な2つの knot projection は，線の上側の同値関係でも同値であることを表している．



参考文献

- [1] V.I. Arnol'd, Topological invariants of plane curves and caustics, *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1994.
- [2] R. Hanaki, Trivializing number of knots, *J. Math. Soc. Japan*, **66** (2014), 435–447.
- [3] T. Haggé and J. Yazinski, On the necessity of Reidemeister move 2 for simplifying immersed planar curves. *Knots in Poland III. Part III*, 101–110, Banach Center Publ., 103, *Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw*, 2014.
- [4] N. Ito and Y. Takimura, (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections, *J. Knot Theory Ramifications*, **22** (2013), 1350085, 14pp.
- [5] N. Ito and Y. Takimura, Addendum: (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections. *J. Knot Theory Ramifications*, **23** (2014), no. 8, 1491001, 2 pp.
- [6] N. Ito and Y. Takimura, Sub-chord diagrams of knot projections, *Houston J. Math.*, **41** (2015), no. 2, 701–725.
- [7] N. Ito and Y. Takimura, Strong and weak (1, 2, 3) homotopies on knot projections, *Internat. J. Math.*, **26** (2015), 1550069 (8 pages).
- [8] N. Ito and Y. Takimura, On a nontrivial knot projection under (1, 3) homotopy, *Topology Appl.*, **210** (2016), 22–28.

- [9] N. Ito and Y. Takimura, Strong and weak (1, 2) homotopies on knot projections and new invariants, *Kobe J. Math.*, **33** (2016), 13–30.
- [10] N. Ito and Y. Takimura, Thirty-two equivalence relations on knot projections, *Topology Appl.*, **225** (2017), 130–138.
- [11] N. Ito, Y. Takimura, and K. Taniyama, Strong and weak (1, 3) homotopies on knot projections, *Osaka J. Math.*, **52** (2015), 617–646.
- [12] R. Shinjo and K. Tanaka, private communication.
- [13] M. Khovanov, Doodle groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349** (1997), 2297–2315.
- [14] H. Whitney, On regular closed curves in the plane, *Compositio Math.*, **4** (1937), 276–284.