『学習院大学　経済論集』第49巻　第１号（2012年４月）

自動販売機コラム割当最適化問題 ：需要がポアソン過程に従う場合*

竹内　俊子†，伊藤　一‡，福地　純一郎§

概　要

本論文は，自動販売機のコラムへの商品の最適な割当を求める方法を論じる。各商品の需要は独立なポアソン過程に従うと仮定し，同時在庫補充方式のもとでの単位時間当たり利益の漸近的な表現を求める（この極限値を長期利益率と呼ぶ）。長期利益率を目的関数として最適化問題を定式化する。この最適化問題は非線形整数計画問題であり，近似的解法として，Life Span Method と呼ばれるタブーサーチの変形を用いて最適解を求める方法を考案した。

1　はじめに

日本では，自動販売機は飲料や食品，たばこなどの商品販売に広く用いられている。日本自動販売機工業会によると，2010年末の自動販売機普及台数は飲料が約260万台，たばこが37万台，全体で約400万台である。

自動販売機のコラムとは同一の商品を保持するスペースであり，自動販売機内部には複数のコラムがある。たとえば，中程度の大きさの飲料の自動販売機では，30から50のコラムがある。自動販売機による収入は自動販売機中の商品の組み合わせと商品の需要に依存する。

本論文は，自動販売機のコラムへの商品の最適な割当を求める方法を論じる。本研究の目的は，確率的需要の下で各商品に割当てる最適なコラム数を求める数理計画問題を定式化し，最適解を求めるヒューリスティックなアルゴリズムを考案することである。

商品の需要は独立なポアソン過程に従うと仮定する。目的関数は，ある同時在庫補充方式のもとでの長期利益率である。一般に，在庫が補充されるときの配送コストおよび人件費は自動販売機１台が生む利益と比較して小さくないため，同時在庫補充方式が利用される。本論文の

*）本論文を，故新居玄武教授に感謝の念とともに捧げる。本稿作成の過程で学習院大学の和光純教授から重要な助言をいただいた。また北海道コカ・コーラボトリング株式会社の上島信一氏と不動直樹氏から有益なコメントをいただいた。ここに感謝を表したい。
†）学習院大学非常勤講師
‡）小樽商科大学
§）学習院大学

扱うモデルでは，在庫は連続的にレビューされ在庫補充のリード時間は０である。

自動販売機問題を扱った既存論文はいくつかある。Anupindi, Dada and Gupta（1998）は，在庫切れのときに代替が生じるようなモデルにおいて需要推定法を考案し，それを自動販売機に適用した。Miyamoto, Kubo, Ito and Murakami（2003）は自動販売機のコラム割当問題を定式化しているが，次の点で本稿のモデルと異なる。第１に，彼らのモデルにおいて需要過程は決定論的であるが，本稿では確率的である。第２に，彼らの定式化において目的関数は在庫保管コストと品切れのため得られなかった売上の合計であるが，我々のモデルでは長期利益率であり，利益は収入－在庫補充コストで定義している。したがって，われわれのモデルにおける最適割り当ては収入と在庫補充コストをバランスしていると言える。

本論文の扱う最適化問題は，van Ryzin and Mahajan（1999），Mahajan and van Ryzin（2001），Kök and Fisher（2007）などによるアソートメント計画問題に似ているが，主な違いは目的関数である。アソートメント計画問題の目的関数は収入であるが，本稿の自動販売機コラム割当問題の目的関数は長期の利益率である。

２　モデル

2.1　自動販売機と消費者行動のモデル化

一つのカテゴリーに属するいくつかの商品を販売する自動販売機を考える。この自動販売機内部には M 個のコラムがあり，各コラムには k 個の商品が入るものとする。

販売可能な n 種類の商品から，自動販売機コラムに割当てる商品を選ぶものとする。変数 x_i は商品 i が割当てられるコラム数を表し，x は $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ を第 i 要素に持つ n 次元ベクトルであり，x をコラム割当と呼ぶ。コラム割当 x に対して定まる商品 i の初期在庫水準を $q_i = kx_i$ で表す。また集合

$$\mathrm{S} = \{1 \leq i \leq n : x_i > 0\} \qquad (1)$$

は自動販売機に含まれる商品の集合であり，この自動販売機のアソートメントと呼ばれる。本節では S は固定され，便宜上 $\mathrm{S} = \{1, 2, \cdots, m\}$ で表す。ただし m はアソートメントに含まれる商品の数である。

次に需要のモデルを説明する。期間 $(0, t]$ 中に商品 $i \in S$ を購入する消費者の数を $N_i(t)$ で表す。このとき $N_1, N_2, \cdots, N_{\mathrm{m}}$ は強度 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ の独立なポアソン過程に従うと仮定する。各 λ_i はアソートメント S に依存しない。発展形として，ポアソン過程の強度がアソートメントに依存するモデルを考えることも可能であるが，計算量が非常に大きくなり，実行が難しい。

2.2　在庫補充

販売者は自動販売機の商品の売上から収入を得て，在庫を補充する。在庫を補充するコストは，配送センターから自動販売機が離れている場合に特に大きく，その場合には同時在庫補充方式が利用される。同時在庫補充方式にはたくさんのタイプがあるが，ここでは，以下のような同時在庫補充方式によって在庫補充が行われるとする。

１．いずれかの商品が品切れになった時点で在庫補充を行う。

２．在庫補充が行われるとき，すべての商品に対して，初期の在庫水準まで在庫を補充する。

在庫は連続的にレビューされ在庫補充のリード時間は０であることを仮定しているため，商

品が品切れ状態である期間は存在しない。言い換えれば，自動販売機のサービス水準は常に100％である。在庫補充コストは大きいとき，企業は高い収入と頻繁な在庫補充のトレードオフに直面する。自動販売機アソートメント中の商品の種類が最大である場合，すなわち，各コラムが異なった商品の場合には，収入は大きいが頻繁な在庫補充が必要である。したがって，企業は利益を最大にするために収入と補充回数のバランスをとってコラム割当を選ばなければならない。このトレードオフを考慮した利益関数を次の節で定義する。

期間［０，t］中の在庫補充の回数を $L(t)$ で表す。商品 i の需要の到着間隔はパラメータ λ_i の指数分布に独立に従う。したがって，商品 i の需要が q_i 個になるまでの時間 Y_i はガンマ分布 Gamma(q_i, λ_i) に従い，$Y_1, \cdots, Y_m$ は独立である。

次に，

$$\tau_1 = \min_{1 \leq i \leq m} Y_i \qquad (2)$$

と定義する。確率変数 τ_1 は確率過程 $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ に従う在庫補充時点からいずれかの商品が品切れになるまでの間隔を意味する。言い換えれば，$\{L(t)\}_{t \geq 0}$ は在庫補充時点から次の補充時点までの間隔である。確率過程 $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ は再生過程であり，到着間隔の確率分布は Gamma(q_i, λ_i)，$i=1, \cdots, m$ であることがわかる。

3　時点 T までの利益

リード時間は０であることを仮定したので，このモデルでは商品が品切れになる期間は発生しない。商品 i の価格を r_i とすると，自動販売機の収入は $\sum_{i=1}^{m} r_i N_i(T)$ である。期間［０, T］で発生する利益 $\pi(T)$ を

$$\pi(T) = \sum_{i=1}^{m} r_i N_i(T) - cL(T) \qquad (3)$$

と定義する。ここで, c は在庫補充コストである。長期利益率 $\pi(T)$ は次の定理から求められる。

定理 1 確率１で，

$$\frac{\pi(T)}{T} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{m} r_i N_i(T) - \mathrm{c}\frac{L(T)}{T}$$

$$\to \sum_{i=1}^{m} r_i \lambda_i - \frac{c}{E(\tau_1)}, \ (T \to \infty)$$

が成り立つ。さらに，期待在庫補充間隔 E(τ_1) は，

$$E(\tau_1) = \sum_{s_1=0}^{kx_1-1} \cdots \sum_{s_m=0}^{kx_m-1} \binom{s_1+\cdots+s_m}{s_1, \cdots, s_m} \frac{\lambda_1^{s_1} \cdots \lambda_m^{s_m}}{(\lambda)^{s_1+\cdots+s_m+1}} \qquad (4)$$

である。ただし $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ である。

証明：確率過程 $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ は再生過程であるので，再生過程の基本的な極限定理（たとえば Ross（2003），Proposition 7.1）から，確率１で

$$\frac{L(T)}{T} \to \frac{1}{E(\tau_1)}, \ (T \to \infty) \tag{5}$$

が成り立つ。ポアソン過程は再生過程であるから，確率１で

$$\frac{N_i(T)}{T} \to \lambda_i, \ (T \to \infty) \tag{6}$$

が成り立つ。式（４）は直接積分することにより得られる。（証明終り）

$\pi(T)/T$ の極限はコラム割当 x の関数であり，

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} I(x_i > 0) r_i \lambda_i - \frac{c}{E(\tau_1(x))} \tag{7}$$

である。期待在庫補充間隔は

$$E(\tau_1(x)) = \sum_{s_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{s_n=0}^{k_n} \binom{s_1+\cdots+s_n}{s_1, \cdots, s_n} \frac{\lambda_1^{s_1} \cdots \lambda_n^{s_n}}{(\lambda(x))^{s_1+\cdots+s_n+1}} \tag{8}$$

であり，ここで，

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} I(x_i > 0) \lambda_i \tag{9}$$

である。そして，$k_i = \max(kx_i - 1, 0)$，$i = 1, 2, \cdots, n$ である。コラム割当最適化問題は次の非線形整数計画問題として定式化される。

maximize　$f(x)$

s.t.　$x_i, i = 1, 2, \cdots, n$ は非負の整数

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = M$$

実際にコラム割当を決定する場合には，x の実行可能な集合に商品数の上限と下限を設定する制約を設けることが多い。

4　タブーサーチ

前節で定式化した目的関数は複雑な非線形関数であるので，最適解もしくは近似解を得るためヒューリスティックスを使う。ここでは，タブーサーチ（Glover 1989, 1990）の変形であり，Kubo and Fujisawa（1998）によって提案された Life Span Method を用いる。

$x_{i \to i'}$ は第 i 要素の値から１を引き（$x_i - 1$），第 i' 要素に１を加えて（$x_{i'} + 1$）得られるベクトルを表すものとする。Life Span Method のアルゴリズムを以下に説明する。$LS(i)$ は第 i 要素のライフスパン（第 i 要素がタブーリストから削除される時点）を表す。TL は正の整数でタブーレンス（タブーリストに入っている時間）を意味する。

```
begin
Set initial solution x

Set x* = x and f* = f(x)
for i ∈ I, let LS(i) = 0
for iter = 0 to TSMAX
    for each i ∈ I
```

$$g_{max}(i) = \max_{\substack{i' \in I/\{i\} \\ LS(i')<iter}} g(x_{i\to i'})$$

$$i^{+}_{(i)} = \mathop{argmax}_{\substack{i' \in I/\{i\} \\ LS(i')<iter}} g(x_{i\to i'})$$

$$i^{-} = \mathop{argmax}_{i' \in I} g_{max}(i)$$

$$x_{i^-} \leftarrow x_{i^-} - 1$$
$$x_{i^+_{(i^-)}} \leftarrow x_{i^+_{(i^-)}} + 1$$

$LS(i^-) = iter + TL$

If $f(x) > f^*$ then $x^* \leftarrow x$ and $f^* \leftarrow f(x)$

Output x

end

このアルゴリズムは Miyamoto, Kubo, Itoh and Murakami（2003）を参考にした。

5　期待在庫補充間隔の数値積分を用いた近似

式（4）による $E(\tau_1)$ の計算量はきわめて多い。$E(\tau_1)$ の計算の現実的な方法として数値積分を行う。関数 $G(x)$ を

$$\begin{aligned} G(x) &:= P\left(\min_{1\le i\le m} Y_i > x\right) \\ &= \prod_{i=1}^{m} P(Y_i > x) \\ &= \prod_{i=1}^{m} G_i(x) \end{aligned}$$

と定義する。ただし，

$$G_i(x) = \sum_{s=0}^{q_i-1} \frac{(\lambda_i x)^s}{s!} \exp(-\lambda_i x) \tag{10}$$

である。$\min_{1\le i\le m} Y_i$ は非負値確率変数であるので，

$$E\left(\min_{1\le i\le m} Y_i\right) = \int_0^\infty G(x)\,dx \tag{11}$$

となる。変数変換 $y = e^{-x}$ を行なうと，積分区間［0, ∞）は（0, 1］に変換される。$x = -\log y$ だから $dx = -\frac{1}{y}dy$ である。したがって，

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G(x)\,dx &= \int_0^1 y^{-1} \prod_{i=1}^{m} \sum_{s=0}^{q_i-1} \frac{(-\lambda_i \log y)^s}{s!} y^{\lambda_i} dy \\ &= \int_0^1 y^{\lambda-1} \prod_{i=1}^{m} g_i(y)\,dy \\ &= \int_0^1 g(y)\,dy \end{aligned}$$

となる。ただし，$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ であり，また

$$g_i(y) = \sum_{s=0}^{q_i-1} \frac{(-\lambda_i \log y)^s}{s!} \tag{12}$$

$$g(y) = y^{\lambda-1} \prod_{i=1}^{m} g_i(y) \tag{13}$$

この積分$\int_0^1 g(y)\,dy$はシンプソンの公式のような数値積分によって求めることができる。$\lim_{y \to 0} g(y) = 0$であるので，$g(0) = 0$と定義して数値積分を行なう。

一つの y に対して，$g(y)$を計算するために$\sum_{i=1}^{m} q_i$ 回和を求める必要がある。

6　結論

本論文では，商品の需要のモデル化と自動販売機の長期利益率を目的関数とする最適化問題の定式化を行った。また，商品の最適割当を求める近似法として Life Span method の適用を提案した。この方法では，コラムの数が30以下の場合，（近似の）最適割当が計算可能であると考えられる。

今後の課題としては，第１に，需要過程がアソートメントに依存する強度のポアソン過程のとき（近似的）最適割当を求める方法の研究がある。第２に，品切れの期間が発生するモデルにおける最適割当を求める方法の研究がある。この場合に，長期利益率の陽表的表現を求めることは難しいが重要な課題である。

参考文献

［１］Anupindi, R., Dada, M. and S. Gupta（1998）. Estimation of consumer demand with stock-out based substitution: an application to vending machine products. *Marketing Science* **17**, 4, 406-423.

［２］Glover, F.（1989）. Tabu search I. *ORSA Journal on Computing*, **1**, 190-206.

［３］Glover, F.（1990）. Tabu search II. *ORSA Journal on Computing*, **2**, 4-32.

［４］Kök, A. and M. Fisher（2007）. Demand estimation and assortment optimization under substitution: methodology and application. *Operations Research*, **55**, 1001-1021.

［５］M. Kubo and K. Fujisawa（1998）. The Life Span Method -A New Variant of Local Search. *The Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **15**, No 3, 363-393.

［６］Mahajan, S. and G. van Ryzin（2001）. Stocking retail assortments under dynamic consumer substitution. *Operations Research*, **49**, 334-351.

［７］Miyamoto, Kubo, Ito and Murakami（2003）. Algorithms for the item assortment problem: an application to vending machine products. *Japan J. Indust. Appl. Math*., **20**, 87-100.

［８］Ross, S.（2003）*Introduction to Probability Models*. 8th edition. Academic Press.

［９］van Ryzin, G., S. Mahajan.（1999）. On the relationship between inventory costs and variety benefits in retail assortments. *Management Science*, **45**, 1496-1509.