組合せについての一つの問題 (授業から)

佐 藤 茂 人

場合の数の練習として次の様な問題を出した。

「大，中，小，三個のサイコロを同時に投げて，出た目の和が 7 以下になる場合は何通りあるか。」

場合の数を数えると35通りになる。ところが，生徒の中に次の様な解答をしたものがあった。

$${}_7C_3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35 \qquad \text{故に35通り。}$$

${}_7C_3$ の 7 は 7 以下，3 は 3 個を示すものと思うが，${}_7C_3$ になるという適当な理由がない。この場合だけたまたま正解と一致するのではないかという疑問が残るのだが，実は正しいことが証明出来るようである。ただし，生徒は必ずしも，そこまでは理解していない様であるが。

これを一般化すると次の様になる。

「m 個の未知数 x_1，x_2，x_3，……，x_m について

$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_m \leqq n$

をみたす自然数の解の組は ${}_nC_m$ 通りである。 ただし，m，n は $m \leqq n$なる自然数」

証明に入る前に次の補助問題をしておく。

「x_1，x_2，x_3，……，x_m について

$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_m = l$

をみたす自然数の解の組は ${}_mH_{l-m}$ 通りである。ただし m，l は $m \leqq l$ なる自然数」

証明

$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_m = l$ より

$(x_1-1)+(x_2-1)+(x_3-1)+\cdots\cdots+(x_m-1)=l-m$ ………… (1)

$x_i - 1 = y_i \quad (i=1,2,3,\cdots\cdots,m)$ とおくと

$$y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_m=l-m \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

となり y_i $(i=1,2,3,\cdots\cdots,m)$ は0または $l-m$ 以下の自然数であるから(2)の解の組の数は m個から $l-m$ 個とってくる重複組合せ ${}_mH_{l-m}$ となる。

もとの問題の証明に入る。

証明

補助問題において，l を m から n までの数としたときの総和を求めればよいから，求める数は

$${}_mH_{m-m}+{}_mH_{(m+1)-m}+{}_mH_{(m+2)-m}+\cdots\cdots+{}_mH_{n-m}$$

$$={}_mH_0+{}_mH_1+{}_mH_2+\cdots\cdots+{}_mH_{n-m}$$

$$={}_{m-1}C_0+{}_mC_1+{}_{m+1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-m}$$

ここで ${}_{m-1}C_0={}_mC_0$ であるから

$$={}_mC_0+{}_mC_1+{}_{m+1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-m}$$

また最初の2項について ${}_mC_0+{}_mC_1={}_{m+1}C_1$だから，

$$={}_{m+1}C_1+{}_{m+1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-m}$$

同様にして最初の2項をまとめると

$$={}_{m+2}C_2+{}_{m+2}C_3+\cdots\cdots+{}_{n-1}C_{n-m}$$

くり返して

$$\vdots$$

$$={}_{n-1}C_{n-m-1}+{}_{n-1}C_{n-m}$$

$$={}_nC_{n-m}$$

$$={}_nC_m$$

これで証明されたが，最初の問題にもどって，「異なる3個のサイコロを投げて出る目の和が7以下になる場合の数は ${}_7C_3$ である。」の理由を直接説明する方法があったら，お教え願いたい。

なお，3個のサイコロを投げて，9以下，10以下，……，18以下という問題にすれば上の様に答えることは出来ないので，場合の数を数えることになると思う。