作図題再考－II

〈連載企画〉数学教師の空き時間 第3回

佐藤茂人

はじめに

前号（高等科紀要3号）の「作図題再考－I」では主に正多角形の作図可能性と高校数学との関連について言及した．今回は最初に作図不可能な正多角形について調べ，その後で，他のギリシア3大難問との関連を検討する．

2.1 正7角形・正9角形の作図について

前号で $n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, \cdots$ のとき正 n 角形が作図可能なことを示した，残るは，$n=7, 9, 11, 13, 14, 17, 18, 19, \cdots$ のとき正 n 角形の作図が可能かどうかということである．そこで，最初に $n=7, 9$ のときから始めることにする．

さて，前号の結論の要点は

・与えられた長さに対して，それら長さ（を表す数）に加減乗除（四則計算）と平方根をとる操作によって表される（数に対する）長さは作図可能である．

・n 次方程式 $z^n=1$ の解は $z=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1)$ と表せる．

なお，$k=0$ のときは $z=1$ である．

・正 n 角形の作図可能性は $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ の作図可能性と同値である．

・よって，**正 n 角形の作図可能性は n 次方程式 $z^n=1$ の解が（単位の長さの）加減乗除（四則計算）と平方根をとる操作によって表すことができること一致する．**

〈TOPIC-1〉 正7角形は作図できない．

7次方程式 $z^7=1$ … ① を考える．

この解は $R_k=\cos\dfrac{2k\pi}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi}{7}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, 6)$ であり，$R_1=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ である．ここで，$\cos\dfrac{2\pi}{7}$ は加減乗除と平方根をとる操作によって表すことができるだろうか？

①は $z^7-1=(z-1)(z^6+z^5+z^4+\cdots+z+1)=0$ となり

$k=0$ のときは $R_0=1$

$k=1,2,\ldots,6$ のときが，円等分方程式　$z^6+z^5+z^4+\cdots+z+1=0$ … ② の解である

とくに，$R_1=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}=R$ とおく．

このとき $R^7=1$ であり，$R, R^2, R^3, R^4, R^5, R^6, R^7$ は方程式②の解（$R^k=R_k$）である．

ここで

$$y_1=R+R^6=R+R^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{7},\qquad y_2=R^2+R^5,\qquad y_3=R^3+R^4$$

とおくとき，方程式②についての解と係数の関係および $R^7=1$ より

$$\begin{aligned}
y_1+y_2+y_3 &= R^6+R^5+R^4+R^3+R^2+R=-1\\
y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1 &= (R^3+R^6+R^8+R^{11})+(R^5+R^6+R^8+R^9)+(R^4+R^9+R^5+R^{10})\\
&= R^3+R^6+R+R^4+R^5+R^6+R+R^2+R^4+R^2+R^5+R^3\\
&= 2(R^6+R^5+R^4+R^3+R^2+R)=-2\\
y_1y_2y_3 &= (R^3+R^6+R+R^4)(R^3+R^4)\\
&= R^6+R^7+R^9+R^{10}+R^4+R^5+R^7+R^8\\
&= R^6+1+R^2+R^3+R^4+R^5+1+R\\
&= (R^6+R^5+R^4+R^3+R^2+R)+2=-1+2=1
\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}
(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) &= y^3-(y_1+y_2+y_3)y^2+(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)y-y_1y_2y_3\\
&= y^3+y^2-2y-1
\end{aligned}$$

だから，３数 y_1, y_2, y_3 は３次方程式　$y^3+y^2-2y-1=0$ … ③ の解である．

ここで，この３次方程式③が作図可能な解をもてば１つは有理数である（次ページ脚注１）．ところが，③が有理数の解をもてば因数定理よりそれは定数項－１の約数＋１か－１である．しかし，これらは③を満たさないから解とはならない．よって，③は有理数の解をもたないので作図可能な解をもたない．

よって，方程式②の解 R は作図可能ではない．

すなわち，$\cos\dfrac{2\pi}{7}$ は作図不可能，よって，正７角形は作図不可能である．

〈TOPIC-2〉 正９角形は作図できない．

TOPIC-1 と同様に　９次方程式　$z^9=1$ … ① を考える．

①は $z^9-1=(z^3-1)(z^6+z^3+1)=(z-1)(z^8+z^7+z^6+\cdots+z+1)=0$ となる．

円等分方程式　$z^8+z^7+z^6+\cdots+z+1=0$ … ②

②の解の1つを $R=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$ とおく．このとき，$z^3-1=0$ の解は，$1=R^0$，$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=R^3$，$\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=R^6$ だから[2] $z^6+z^3+1=0$ … ③ の解は $R, R^2, R^4, R^5, R^7, R^8$ である．なお，$R^9=1$ である．

$$y_1=R+R^8=2\cos\frac{2\pi}{9},\qquad y_2=R^2+R^7,\qquad y_3=R^4+R^5$$

とおくと，方程式③についての，解と係数の関係および $R^3+R^6=2\cos\frac{2\pi\cdot3}{9}=-1$ より

$$\begin{aligned}
y_1+y_2+y_3&=R+R^8+R^2+R^7+R^4+R^5\\
&=R+R^2+R^4+R^5+R^7+R^8=0\\
y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1&=R^3+R^8+R^{10}+R^{15}+R^6+R^7+R^{11}+R^{12}+R^5+R^{12}+R^6+R^{13}\\
&=R^3+R^8+R+R^6+R^6+R^7+R^2+R^3+R^5+R^3+R^6+R^4\\
&=(R+R^2+R^4+R^5+R^7+R^8)+3(R^3+R^6)=0-3=-3\\
y_1y_2y_3&=(R^3+R^8+R^{10}+R^{15})(R^4+R^5)\\
&=(R^3+R^8+R+R^6)(R^4+R^5)\\
&=R^7+R^8+R^{12}+R^{13}+R^5+R^6+R^{10}+R^{11}\\
&=R^7+R^8+R^3+R^4+R^5+R^6+R+R^2\\
&=(R+R^2+R^4+R^5+R^7+R^8)+(R^3+R^6)=0-1=-1
\end{aligned}$$

よって，y_1, y_2, y_3 は $y^3-3y+1=0$ … ④ の解である．TOPIC-1と同様に，④が作図可能な解をもてば，少なくとも1つの有理数の解をもつ．

ところが，④が有理数の解をもてば，因数定理よりそれは定数項＋1の約数＋1か－1である．しかし，これらは④を満たさないから解とはならない．

---

[1]**【定理】有理数を係数とする3次方程式の解と作図可能性**

「3次方程式が作図可能な解をもてば，少なくとも1つの解は有理数である」

〈証明〉 $x^3+px^2+qx+r=0$ (p, q, r は有理数)…①　について

最初に，$a+b\sqrt{k}$ (a, b, k は有理数，$\sqrt{k}$ は無理数) が1つの解ならば，$a-b\sqrt{k}$ も解である．なぜならば，$a+b\sqrt{k}$ を①に代入して整理するとき，$\alpha+\beta\sqrt{k}=0$ (α, β は有理数) となれば，$\alpha=\beta=0$ である．一方，$a-b\sqrt{k}$ を①に代入して整理するとき，$\alpha-\beta\sqrt{k}$ となり，$\alpha-\beta\sqrt{k}=0$ となるから，$\alpha-\beta\sqrt{k}$ も解となる．

つぎに，方程式①が作図可能な（四則計算と平方根からなる）解 $a+b\sqrt{k}$ (a, b, k は有理数) をもつとする．このとき，上のことから $a-b\sqrt{k}$ も解だから，3つの解を $x_1, x_2=a+b\sqrt{k}, x_3=a-b\sqrt{k}$ とおくとき，

$$x_1+x_2+x_3=x_1+2a=-p\qquad より，\qquad x_1=-2a-p$$

ここで，a, p は有理数だから，$x_1=-2a-p$ は有理数である．

すなわち，方程式①が作図可能な解をもてば，少なくとも1つは有理数である．

[2]前号（紀要3号）29ページ

よって，④は作図可能な解をもたない，方程式②の解 R は作図可能ではない．すなわち，$\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は作図不可能，よって，正 9 角形は作図不可能である．

以上で，正 7 角形や正 9 角形は作図できないことがわかった．

2.2 正 17 角形の作図法

ところが，今までに n が $n=2^{2^m}+1$（m は負でない整数）なるとき，正 n 角形の作図可能なことが証明されている[3]．$m=0$ のとき $n=3$，$m=1$ のとき $n=5$ となり，正 3 角形および正 5 角形が作図可能なことはすでに示した．

次に，$m=3$ のとき $n=17$ となる．正 17 角形の作図可能性については長い間研究され，ガウスによって 18 世紀末にその作図法が発見された．

ガウスは自分のお墓の台座を正 17 角形にすることを望んでいたと伝えられている．

〈TOPIC-3〉 正 17 角形は作図できる．

この話題については，前号（紀要 3 号）で中等科の益子氏[4]が発表しているが，ここではガウスの正 17 角形の作図法の概略を示す．

17 次方程式　$z^{17}-1=0$ … ① を考える．

①は $z^{17}-1=(z-1)(z^{16}+z^{15}+z^{14}+\cdots+z+1)=0$ となる．

円等分方程式　$z^{16}+z^{15}+z^{14}+\cdots+z+1=0$ … ② の解の 1 つを $R=\cos\dfrac{2\pi}{17}+i\sin\dfrac{2\pi}{17}$ とおく．$R^{17}=1$ であり，②の解は $R, R^2, R^3, \cdots R^{16}$ である．また，

$$y_1 = R+R^2+R^4+R^8+R^9+R^{13}+R^{15}+R^{16}$$
$$y_2 = R^3+R^5+R^6+R^7+R^{10}+R^{11}+R^{12}+R^{14}$$

とおくと

$$y_1+y_2 = R+R^2+R^3+\cdots+R^{16} = -1$$
$$y_1y_2 = R^4+R^6+\cdots+R^{30} = 4(R+R^2+R^3+\cdots+R^{16}) = -4$$

よって，y_1, y_2 は方程式　$y^2+y-4=0$ … ③ の解である．さらに，

y_1 から選んで，　$z_1=R+R^4+R^{13}+R^{16}$，　$z_2=R^2+R^8+R^9+R^{15}$

y_2 から選んで，　$w_1=R^3+R^5+R^{12}+R^{14}$，　$w_2=R^6+R^7+R^{10}+R^{11}$

とおくと，

---

[3]参考文献 1

[4]前号（紀要 3 号）35 ページ

$z_1+z_2=y_1$, $z_1z_2=-1$ となり z_1, z_2 は方程式　$z^2-y_1z-1=0$ … ④ の解であり

$w_1+w_2=y_2$, $w_1w_2=-1$ となり w_1, w_2 は方程式　$w^2-y_2w-1=0$ … ④′ の解である.

さらに, z_1 から選んで, $v_1=R+R^{16}$, $v_2=R^4+R^{13}$ とおくと

$v_1+v_2=z_1$, $v_1v_2=w_1$ となり v_1, v_2 は方程式　$v^2-z_1v+w_1=0$ … ⑤ の解である.

このとき, $v_1=R+R^{16}=R+R^{-1}=2\cos\dfrac{2\pi}{17}$, $v_2=R^4+R^{13}=R^4+R^{-4}=2\cos\dfrac{8\pi}{17}$, $v_1>v_2$ である.

$$\left(\cos\frac{2\pi}{17}>\cos\frac{8\pi}{17}>0\right)$$

これらの方程式③～⑤を順に解くことにより R を求めることができる.

方程式を解く前に次のことがらをあらかじめ準備する.

$$v_1=R+R^{16}=R+R^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{17},\qquad v_2=R^4+R^{16}=R^4+R^{-4}=2\cos\frac{8\pi}{17}\quad \text{だから}$$

$$v_1+v_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}\right)=4\cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{3\pi}{17}>0\quad\left(0<\frac{5\pi}{17}<\frac{\pi}{2},\ 0<\frac{3\pi}{17}<\frac{\pi}{2}\right)$$

また,

$$\begin{aligned}
z_1&=(R+R^{16})+(R^4+R^{13})=(R+R^{-1})+(R^4+R^{-4})\\
&=2\cos\frac{2\pi}{17}+2\cos\frac{8\pi}{17}=4\cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{3\pi}{17}>0\quad\left(0<\frac{5\pi}{17}<\frac{\pi}{2},\ 0<\frac{3\pi}{17}<\frac{\pi}{2}\right)\\
w_1&=(R^3+R^{14})+(R^5+R^{12})=(R^3+R^{-3})+(R^5+R^{-5})\\
&=2\cos\frac{6\pi}{17}+2\cos\frac{10\pi}{17}=4\cos\frac{8\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}>0\quad\left(0<\frac{8\pi}{17}<\frac{\pi}{2},\ 0<\frac{2\pi}{17}<\frac{\pi}{2}\right)\\
y_1&=R+R^2+R^4+R^8+R^9+R^{13}+R^{15}+R^{16}\\
&=(R+R^{16})+(R^2+R^{15})+(R^4+R^{13})+(R^8+R^9)\\
&=(R+R^{-1})+(R^2+R^{-2})+(R^4+R^{-4})+(R^8+R^{-8})\\
&=\left(2\cos\frac{2\pi}{17}+2\cos\frac{4\pi}{17}\right)+\left(2\cos\frac{8\pi}{17}+2\cos\frac{16\pi}{17}\right)\\
&=2\left(\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}\right)-2\left(\cos\frac{9\pi}{17}+\cos\frac{\pi}{17}\right)\\
&=4\cos\frac{3\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17}-4\cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\\
&>4\cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17}-4\cos\frac{5\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\quad\left(0<\cos\frac{5\pi}{17}<\cos\frac{3\pi}{17},\ 0<\cos\frac{\pi}{17}\right)\\
&=4\cos\frac{5\pi}{17}\left(\cos\frac{\pi}{17}-\cos\frac{4\pi}{17}\right)>0\quad\left(0<\cos\frac{4\pi}{17}<\cos\frac{\pi}{17},\ 0<\cos\frac{5\pi}{17}\right)
\end{aligned}$$

以上を準備した上で, 最初に方程式③を解く.

上から $y_1>0$，解と係数の関係から，$y_1y_2=-4<0$ より $y_2<0$ である．

$$\text{よって，}\ y_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}=\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2},\quad y_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}=-\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

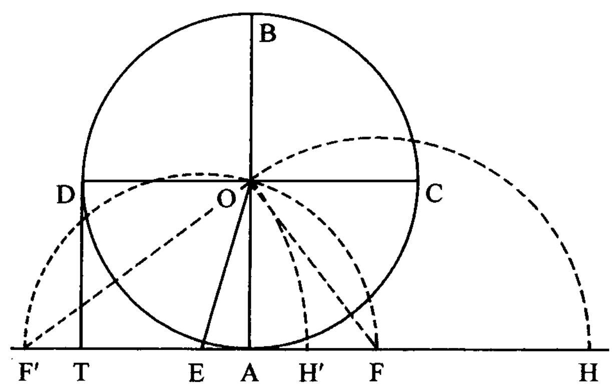
方程式④，④′を解く．上より $z_1>0$, $w_1>0$ だから

$$z_1=\frac{y_1+\sqrt{y_1^2+4}}{2}=\frac{y_1}{2}+\sqrt{1+\frac{y_1^2}{4}},\quad w_1=\frac{y_2+\sqrt{y_2^2+4}}{2}=\frac{y_2}{2}+\sqrt{1+\frac{y_2^2}{4}}\ \cdots\ (4)$$

この z_1, w_1 から，方程式⑤の解を作図する[5]．

[作図法]

1．図のように，中心が O，半径 1 の円を描き直交する 2 つの直径 AB, CD をひく．直径の端点 A および D において接線をひきそれらの交点を T とする．

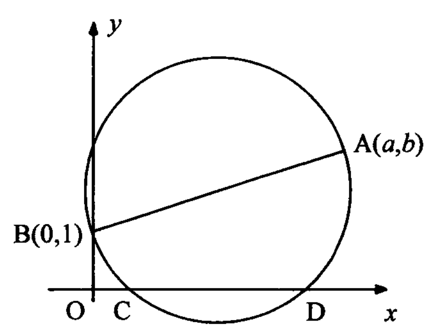


2．線分 AT を 4 等分し $\mathrm{AE}=\frac{1}{4}\mathrm{AT}=\frac{1}{4}$ なる点 E をとり E を中心，半径 EO の円を描き直線 AT との交点を F, F′ とする．このとき，

$$\mathrm{AF}=\mathrm{EF}-\mathrm{EA}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+1^2}-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{17}}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}y_1$$

$$\mathrm{AF'}=\mathrm{EF'}+\mathrm{EA}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+1^2}+\frac{1}{4}=-\left(-\frac{\sqrt{17}}{4}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}y_2$$

3．F を中心，半径 FO の円を描き直線 AT との交点（F′F の延長上）の交点を H とし，F′ を中心，半径 F′O の円を描き直線 AT との交点（F と F′ の間）を H′ とする．このとき，



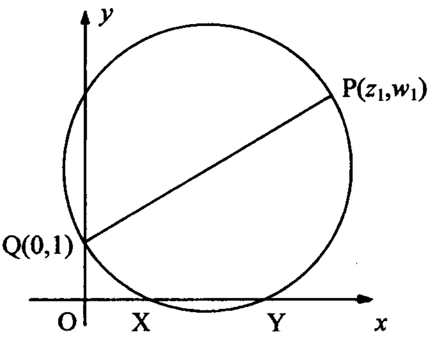
[5] **2 次方程式 $x^2-ax+b=0$（$a^2-4b>0$）の解の作図**
O を原点とする座標平面上に，点 A (a, b) と点 B $(0, 1)$ をとり，線分 AB を直径とする円を描く．この円と x 軸との交点を C, D とすれば，C, D の x 座標がこの方程式の解である．

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AF}+\mathrm{FH} = \mathrm{AF}+\mathrm{FO} = \frac{1}{2}y_1+\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}y_1\right)^2} = \frac{1}{2}y_1+\sqrt{1+\frac{1}{4}y_1^2} = z_1$$

$$\mathrm{AH'} = \mathrm{F'H'}-\mathrm{AF'} = \mathrm{F'O}-\mathrm{AF'} = \sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}y_2\right)^2}-\left(-\frac{1}{2}y_2\right)$$

$$= \frac{1}{2}y_2+\sqrt{1+\frac{1}{4}y_2^2} = w_1$$

4．座標平面上に点 P (z_1, w_1) なる点と Q (0, 1) をとり線分 PQ を直径とする円を描き x 軸との交点のうち原点 O に近い方を X，遠い方を Y とする（前ページ脚注 5）．さらに，OY の中点 M を求める．このとき，



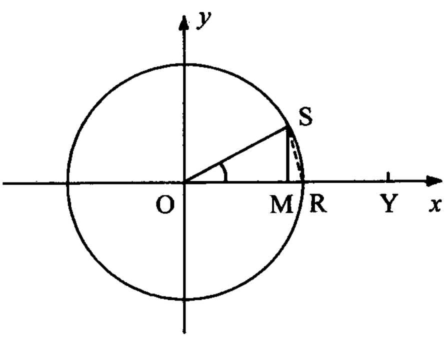
$$\mathrm{OY} = v_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17}$$

$$\mathrm{OM} = \frac{1}{2}v_1 = \cos\frac{2\pi}{17}$$

5．単位円を描き x 軸との交点を R，また，x 軸上の 4．の OM に等しい点 M において垂直な直線を引き単位円との交点を S とする．このとき，

$$\angle \mathrm{ROS} = \frac{2\pi}{17} \quad となる．$$

よって，線分 RS がこの単位円に内接する正 17 角形の 1 辺となる．これを 1 辺として単位円を区切っていけば正 17 角形が描ける．



以上で，正多角形の作図についての考察は一先ず終了することにする．

2.3 任意の角の 3 等分

次に，ギリシア 3 大難問の 1 つ「任意に与えられた角を 3 等分する」について再考することにする．例えば，特別な場合「直角を 3 等分する（30° を作図すること）」ことは，

「最初に正三角形をつくり，その三角形の 1 つの角を 2 等分する．」

でよいから，作図可能であることは容易に示すことができる．

しかし，ここでは「どんな角でも 3 等分できるか？」が問題になっている．

一般に，数学においては，「作図できる（なりたつ）」ことを示すには「どんな場合にも作図できる（なりたつ）」ことを示さなければならないが，「作図できない（なりたたない）」ことを示すには，「ある1つの場合（反例）について作図できない（なりたたない）」ことを示せばよい．

〈TOPIC-4〉 $60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$ を3等分することはできない（作図できない）．

$60°$を3等分した角をθ（$20°$のこと）とすると，3倍角の公式により

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\quad \text{また，}\quad \cos 3\theta = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

よって，方程式　$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \frac{1}{2}$ … ① ができる．

ここで，$\cos\theta = x$ とおくと，$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$ となり　$8x^3 - 6x - 1 = 0$ … ② を得る．

この方程式の解が作図可能ならば，正多角形の作図の場合と同様にして，$\cos\theta$が，したがってθが作図できることになる．

ところで，さらに，$2x = y$ とおくと，$y^3 - 3y - 1 = 0$ … ③

ここで，25ページの【定理】（脚注1）によれば，③が「作図可能な解をもてば，少なくとも1つの有理数の解をもつ．」であるが，もし，③が有理数をもつとすれば，それは定数項-1の約数である．ところが，-1の約数$+1$も-1もともに③の解とはならない．よって，有理数の解をもたないから作図可能な解をもたない．したがって，②も作図可能な解をもたない．

以上より，$60°$を3等分することはできないことがわかる．

よって，「任意の角を3等分することはできない．」ことが示された．

2.4 デロスの問題

次なるギリシア難問は，デロスの問題とよばれている「ある立方体の体積の2倍の体積をもつ立方体をつくれ．」について再考する．この問題についても2.3同様に，「作図できない」ことを示す．

〈TOPIC-5〉 ある立方体の体積の2倍の体積をもつ立方体は作図できない．

もとの立方体の1辺の長さをaとし，2倍の体積をもつ立方体の1辺の長さをbとすれば

$$b^3 = 2a^3$$

ここで $b = xa$ とおけば，$x^3a^3 = 2a^3$ より $x^3 = 2$

$$x^3 - 2 = 0 \quad \cdots \quad ①$$

再び25ページの【定理】（脚注１）を用いて，①が作図可能な解をもてば，少なくとも１つは有理数である．

ところが，もし①が有理数の解をもつならば，それは定数項－２の約数＋２，－２，＋１，－１のいずれかである．しかし，これらはいずれも解とはならない．よって，作図可能な解をもたないから，長さ b は作図できない．

すなわち，立方体の体積の２倍の体積をもつ立方体は作図できない．

この問題は

放物線 $y = x^2$ と放物線 $y^2 = 2x$ の交点の x 座標

放物線 $y = x^2$ と直角双曲線 $xy = 2$ の交点の x 座標

にもなっているが，残念ながらこれらの２次曲線はユークリッド（普通）の作図法では作図できないのである．

さて，ギリシア３大難問の残る１つは「円の面積に等しい面積の正方形をつくれ.」である．これは最終的には

$$x^2 = \pi$$

を解く問題になる．この小文はあくまでも高校数学で扱える範囲でということを基本としきた．この立場からすると，この問題は高校数学の範囲をはるかに越えることになるので今回は触れないことにする．

今回は主に作図不可能な問題を中心にした．不可能であることの証明には25ページの【定理】（脚注１）が重要な役割を担った．この定理の証明の中で「３次方程式　$x^3+px^2+qx+r = 0$（p, q, r は有理数）が１つの解 $a+b\sqrt{k}$（a, b, k は有理数，$\sqrt{k}$ は無理数）をもつとすると，$a-b\sqrt{k}$ も解にもつ.」は高校の数学の問題としてしばしば現れるが，これが重要な役割をもっていることが分かる．

また，因数定理も方程式の定数項の約数から解を見つけるというだけでなく，方程式が有理数の解をもたないことを示す手段として使用している．

今回は前回（紀要３号）の続編である．ここでも

高次方程式　とくに３次方程式

因数定理

方程式 $z^n - 1 = 0$ の解と解の複素数平面上への表示

の知識と理解が必要である．現指導要領では数学Ⅱで「高次方程式」「因数定理」を扱えるようになったのは好ましいことであるが，前回も述べたが「複素数平面」が削除されて

しまったことは誠に残念なことである．

おわりに

前回に続いていわゆるギリシア以来の古典的な問題を再検討した．ギリシアの3大難問についても「作図不可能である」ことはよく知られている．しかし，その証明については必ずしも理解しているわけではなかった．2回にわたって，高校数学で扱える範囲（やや越えているが）で作図題を再考してみた．この小文に対してご意見がございましたらご教示いただきたい．

参考文献

1. Benjamin Bold 著　Famous Problem of GEOMETRY and How to Solve Them（DOVER SCIENCE BOOKS）
2. 矢野健太郎 著　幾何学の歴史（NHK ブックス）
3. ファン・デア・ベルデン（奥川・辻共訳）著　現代代数学（商工出版社）
4. 高等科紀要3号