作図題再考－I

〈連載企画〉数学教師の空き時間 第2回

佐藤茂人

はじめに

現行指導要領では，中学校の数学における幾何教材のかのかなりの部分が高等学校に移されたが，中学校でも高等学校でも作図題を扱う機会は殆ど無くなってしまった．数学の長い歴史の中では，作図題は単に幾何分野の中のみでなく，代数や解析の発展とも深い関りをもっていた．ここでは，作図題と高校で扱う数学教材との関連について考えてみたい．

1.1 作図題について

ユークリッドの幾何原本では，最初に5つの公理と5つの公準をおいている．

〈公理：axiom〉

1. 同じものに相等しいものは，また相等しい．
2. 相等しいものに相等しいものを加えれば，その結果もまた相等しい．
3. 相等しいものから相等しいものを減ずれば，その結果もまた相等しい．
4. 互いに重なり合うものは相等しい．
5. 全体は部分より大きい．

〈公準：postulate〉

1. 任意の点と他の点を結ぶ直線をひくことができる．
2. 任意の線分はこれを両方へいくらでも延長できる．
3. 任意の点を中心にして任意の半径の円をかくことができる．
4. 直角はすべて相等しい．
5. 2直線が1直線と交わっているとき，もし同じ側にある内角の和が2直角よりも小さいならば，2直線はその側に延長していけば必ず交わる．

したがって，ユークリッドの幾何はこれらの公理，公準から始りすべてが構成されている．この中で，図形を描く手段は公準1，公準2と公準3であり，とくに，公準1，3が最も基本ある．すなわち，ユークリッドの幾何では

① 任意の点と他の点を結ぶ直線をひくことができる．

② 任意の点を中心にして任意の半径の円をかくことができる．

の2つの方法だけを許して，図形を求める問題がいわゆる‘作図題’である．

なお，数学の長い歴史においては，「半径1の円をかくコンパスだけを用いて（定規は用いない）図形を求める．(Mascheroni–イタリア)」や「定規とコンパス以外の特別な用具も用いて図形を求める．(Nicomedes の Conchoid–B.C.180 年頃，Hippias の Quadratri–B.C. 400 年頃）など，ユークリド（普通）の作図以外の作図題もある．

しかし，以下では，ユークリド（普通）の作図に限り，基本的な作図法（直線に垂線を下ろす，角を2等分する，…など）は既知であるものとして論を進めることとする．

1.2　ギリシア3大難問について

ギリシア時代以来，いくつかの作図題が研究されてきた．

1. 任意に与えられた角を3等分せよ．

   任意の角を2等分することはできる．では，任意の角を3等分することができるか？というのが問題である．

2. 与えられた立方体の体積の2倍の体積をもつ立方体をつくれ．

   任意に与えられた正方形の面積の2倍の面積をもつ正方形は作図できる．では，与えられた立方体の体積の2倍の体積をもつ立方体は作図できるか？というのが問題である．

   この問題は「デロスの問題 (Delian Problem)」とよばれている．伝説によると “B.C. 430 アテネで疫病が大流行した．アテネ人たちは，この大流行を鎮めるにはどうしたらよいかをデロス島でアポロンの神に伺いをたてた．そのときのアポロンの神のご神託は「このアポロンの神殿にある立方体の祭壇の体積を2倍した立方体をつくれ．」” であったという．

3. 与えられた円の面積と等しい面積の正方形をつくれ．

   三角形の面積と等しい面積の正方形は作図できる．また，四角形，五角形，…の面積と等しい面積の正方形は作図できる，したがって，多角形の面積と等しい面積の正方形は作図できる．では，円の面積と等しい面積の正方形は作図できるか？というのが問題である．

これら3つの作図題は昔より「ギリシアの3大難問」とよばれている．これ以外に，

4. 正多角形をつくれ．

   正3角形，正4角形（正方形），正6角形は容易に作図できる．正5角形，正7角形，…は作図できるか？　というのが問題である．

以上4つが，昔から研究され続けてきた代表的な作図題であり，その研究は，単に問題が “解ける，解けない” という幾何分野の中にとどまらず，結果的に代数の分野や解析の分野の発展に大いに寄与することにもなった．

高校数学では（中学数学でも）幾何分野における作図題という形で扱うことは殆ど無くなったが，実際には，作図題の考えが他の分野と極めて深く関連しているのである．この小論は，上記の4つの作図題が，高校数学のどこにどのように関っているかを調べるのが

目標である．

1.3 作図題の代数

長さ1（単位）の線分と長さa，bの2つの線分が与えられたとき

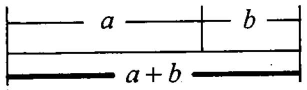
① 定規によって，与えられた2点を通る直線をひく．

② コンパスによって，与えられた点を中心にして与えられた半径の円をかく．

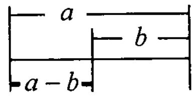
の2つの方法だけで，次の長さが作図ができる．

与えられた　1：――――　　a：――――――――　　b：――――

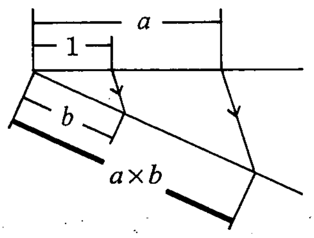
i）長さ$a+b$線分



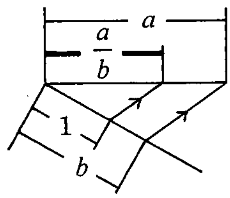
ii）長さ$a-b$線分



iii）長さ$a\times b$線分

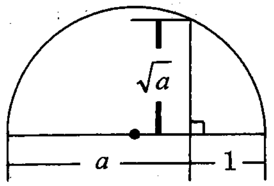


iv）長さ$\dfrac{a}{b}$線分



さらに，

iv）長さ$\sqrt{a}$線分



以上のことから

1】 i），ii），iii），iv）は，与えられた長さa，bに対して，a，bに加減乗除の四則計算を行った結果の長さが作図できる（作図可能な数の集合は体（field）をなす）ということである．

これより，係数が長さa，bで与えられたとき，

$$1\text{次方程式}\ ax=b\ \text{の解}\ x=\frac{b}{a}\qquad(\text{ただし，}a\neq 0\text{とする．})$$

が作図できる．

2】 v）より，長さaが与えられれば，$\sqrt{a}$が作図できるから，つぎのことがいえる．

a, b が与えられれば, $a+\sqrt{b}$ が作図できる.

これより, 係数が長さ a, b, c で与えられたとき,

$$2\text{次方程式 } ax^2+bx+c=0 \text{ の解} \quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(ただし, $a\neq 0$, $b^2-4ac\geq 0$ とする.)

最初に, 1】より b^2-4ac が作図でき,

$-b+\sqrt{b^2-4ac}\geq 0$ のときには, $-b+\sqrt{b^2-4ac}$ が作図でき,

したがって, $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ が作図できる.

$\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ も $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\geq 0$ のときには, 同様に作図できる.

係数が長さで与えられた1次方程式や2次方程式の解（正または0の解があるとき）が作図できる. ということである.

1.4　正多角形の作図

次に, この小論の目標である高校数学と, ギリシア3大難問や正多角形の作図との関りを順次調べていきたい. ただし, 今回は, とくに正多角形の作図について考えることにする.

前指導要領（2004年度3年生まで）における「数学Bの複素数」（新指導要領では削除されたが）は, 正多角形の作図と深い関係がある.

〈TOPIC-1〉 例えば, 1の3乗根を求める問題, すなわち,

$$z^3=1 \quad \cdots①$$

の解を求める問題があり, 複素数平面上で, ①の解を表す点が半径1の円の周上に偏角が0°, 120°, 240°である点として等間隔に並ぶことが説明されている.

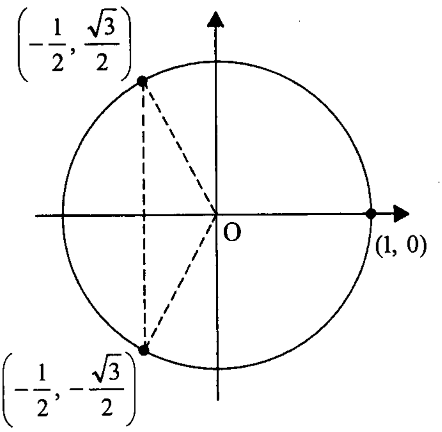
これは, 単位円周を3等分することに相当する. ところで, 円周をコンパスで3等分することは簡単に作図できる[1]. これはまた, 半径1の円に内接する正3角形が作図できることを示していることになる.

この問題を, 上記1.3に立場から見直すと,

---

[1] 6等分して, 等分点を1つおきにとればよい.

$$z^3 = 1 \quad \cdots ①$$



$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　とおけば，
$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$　であり
$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$　であるから[2]，
①は $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$ となり

$$r^3 = 1,\quad 3\theta = 0 + 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

$r > 0$ より，$r = 1$

かつ，$\theta = \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2)$

これより，求める解は，$z = \cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2)$ である．

よって，$k = 0$ のとき，$z = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k = 1$ のとき，$z = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

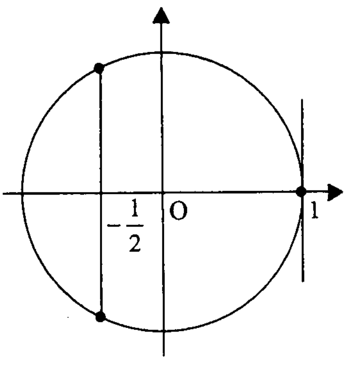
$k = 2$ のとき，$z = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

これらを表す点は，複素数平面の単位円周上に図のように等間隔に並ぶ．
旧数学 B はここで終わりであった．

ここではさらに，これらの点が作図可能かどうかを，前記1.3の立場から考えてみよう．複素数平面上で，(1, 0)，$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を作図することになる．

このとき 1, 0, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ は1.3より作図可能であるから，3 つの点が作図可能であり，したがって，正三角形が作図可能であることが示される．

なお，この問題で上記の 3 点は単位円周上の点であるから，各点の x 座標（それぞれ 1, $-\dfrac{1}{2}$）を x 軸上に作図し，この点を通り x 軸に垂直な直線をひき，単位円との交点を求めれば，それらの点が求める 3 等分点であり，正三角形の頂点となる．



また，半径 1 の円に内接する正四角形（正方形）の作

[2]数学 B では角度の単位は度であったが，ここではラジアンを使う．

図が可能なことは，殆ど明かであるが，これも

$$z^4 = 1 \quad \cdots ②$$

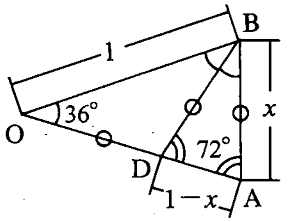
②の解が　$z = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0i$,　　　$z = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = 0 + i$

$$z = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = -1 + 0i,\quad z = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = 0 - i$$

であることより，(1, 0)，(−1, 0)，(0, 1)，(0, −1) が（それぞれ x 座標は 1, −1, 0）作図可能なことからも説明できる．

〈**TOPIC-2**〉 正 5 角形を作図できるか．

よく見かけるのは，半径 1 の円に内接する正10角形の 1 片を示す右の図において



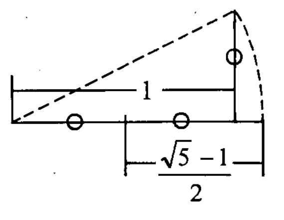
$$\triangle OAB \backsim \triangle BDA$$

であるから，

$$1 : x = x : (1-x)$$

がなりたつ．これから，$x^2 + x - 1 = 0$

これより，$x > 0$ より $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$



この長さを作図し，これから正 10 角形を作り，頂点を 1 つおきに結んで，正 5 角形を作図する．

というものである．

この問題も，1.3の立場で検討してみよう．

$$z^5 = 1 \quad \cdots ③$$

の解が複素数平面上で作図可能かどうかという問題である．すなわち，解の実数部分（や虚数部分）が四則計算と平方根だけで表すことができるかという問題に帰着する．

①や②と同様にして，③の解は

$$z = \cos 0 + i\sin 0,\qquad z = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5},\quad z = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$z = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5},\quad z = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

ここで，実数部分である $\cos 0 = 1$ は作図可能であるから，$\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5}$, $\cos\frac{8\pi}{5}$ が作図可能かという問題になる．さらに，これらの点が単位円上に等間隔に並んでいることから，結局

“$\cos\frac{2\pi}{5}$ 作図できるか？” という問題に帰着する．

ところで，③は $z^5-1=0$ となり

$$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$$

より，　$z-1=0$　または

$z^4+z^3+z^2+z+1=0$　…④[3]

ここで，$R=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$ とおくと，R は④の 1 つの虚数解であるから

$$R^4+R^3+R^2+R+1=0 \quad \cdots ⑤$$[4]

の解である．$R \neq 0$ だから，④を R^2 で割って

$$R^2+R+1+\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2}=0$$

$R+\frac{1}{R}=t$ とおけば，$t^2+t-1=0$

これを解いて，$t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

ここで，$t=R+\frac{1}{R}=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)+\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right)=2\cos\frac{2\pi}{5}>0$

だから，$t=2\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ より，$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

よって，これが R の実数部分（x 座標）であり，これは1.3から作図可能であることがわかる．

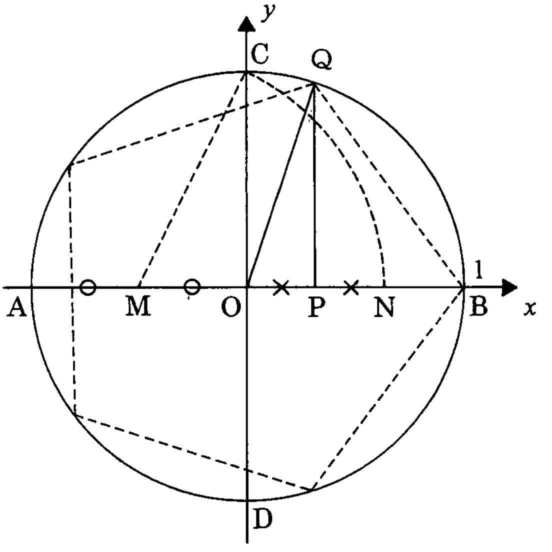
これより，次ページの図のように x 軸上にこの長さになる点 P をとり，この点を通り x 軸に垂直な直線をひき，単位円の周との交点 Q を求めれば，$\angle \mathrm{QOB}=\frac{2\pi}{5}$ であり，線分

[3]この方程式を円等分方程式という．

[4]この形の方程式は相反方程式とよばれ，しばしば問題集に取り上げられている．

BQ が正 5 角形の 1 辺である．

実際には，右の単位円で直径 AB を含む直線を x 軸に，中心 O を通り線分 AB に垂直な直線 CD を y 軸とする．最初に OA の中点 M を求め，M を中心とし MC を半径とする円と半径 OB との交点を N とする．このとき，



$$\mathrm{MN}=\mathrm{MC}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

であり，$\mathrm{ON}=\mathrm{MN}-\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}$ である，ON の中点 P を求めると $\mathrm{OP}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ である．よって，$\cos\dfrac{2\pi}{5}=\mathrm{OP}$ となり，P を通り x 軸に垂直な直線をひき単位円との交点を Q とすれば，$\cos\angle\mathrm{QOB}=\mathrm{OP}$，したがって，$\angle\mathrm{QOB}=\dfrac{2\pi}{5}$ となる．

よって，半径 BQ の円を用いて単位円を順々に 5 等分すれば，単位円に内接する正五角形を作図できる．

上のことを一般化すれば，

正 n 角形が作図可能性は $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ の作図可能性　に帰着する．

ここまでで，半径 1 の円に内接する正 3 角形，正 4 角形，正 5 角形が作図できることがわかった．

〈TOPIC-3〉 一般に，半径 1 の円に内接する正 n 角形が作図できれば，各円弧の中点を求めることができるから，その中点と元の多角形の頂点を結べば，正 $2n$ 角形が作図できる．

よって，$n=3, 6, 12, \cdots, 3\cdot 2^m, \cdots$
$n=4, 8, 16, \cdots, 4\cdot 2^m, \cdots$
$n=5, 10, 20, \cdots, 5\cdot 2^m, \cdots$
（ただし，m は 0 または正の整数）

すなわち，

$$n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 24, 32, 40, \cdots$$

のとき，正 n 角形が作図できる．

ところで，ユークリッドの互除法[i]によれば，

a, b が互いに素であるとき，$ka+lb=1$ を満たす整数 k, l が存在する．

これを用いれば，

a, b が互いに素で，正 a 角形と正 b 角形が作図可能ならば，

$$\frac{2l\pi}{a}+\frac{2k\pi}{b}=\frac{2\pi(ka+lb)}{ab}=\frac{2\pi}{ab}$$

であるから，正 ab 角形が作図できる．

3と5は互いに素であり，$3k+5l=1$ を満たす整数 $k=-8$, $l=5$ が実際に存在する．したがって

$$5\cdot\frac{2\pi}{3}+(-8)\frac{2\pi}{5}=\frac{2\pi(25-24)}{15}=\frac{2\pi}{15}$$

これと，$\cos\frac{2\pi}{3}$，$\cos\frac{2\pi}{5}$ が作図できることから，$\cos\frac{2\pi}{15}$（すなわち $\frac{2\pi}{15}$）も作図できる．よって，正15角形が作図できる．このことより，$n=15, 30, \cdots, 15\cdot 2^m, \cdots$（$m$ は0または正の整数）のとき，正 n 角形が作図できる．

〈TOPIC-3〉とまとめると，

$n=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 32, 40, \cdots$ のとき，正 n 角形が作図できる．

残る問題は，$n=7, 9, 11, 13, 14, 17, 18, 19, \cdots$ のときに，正 n 角形が作図できるか？ということである．

今回は，ここで議論を終わることにする．

---

[i]【参考】 ユークリッドの互除法について

「2つの正の整数 a, b（$a>b$）について，$a=r_0, b=r_1$ とし，$n=0, 1, 2, \cdots$ に対して r_n を r_{n+1} で割ったときの商を q_{n+1}，余りを r_{n+2} とする．すなわち，$r_n=q_{n+1}r_{n+1}+r_{n+2}$ とするとき，ある整数 m で，$r_m=q_{m+1}r_{m+1}+0$ となるとき，$r_{m+1}=g$ は2数 a と b の最大公約数である．」というのがユークリッドの互除法（Euclidean Algorithm）である．

これより，$r_2=r_0-q_1r_1=a-q_1b$

$r_3=r_1-q_2r_2=b-q_2(a-q_1b)=-q_2a+(1+q_1q_2)b$

以下同様に，$r_4, r_5, \cdots, r_{m+1}$ を求めると，$r_{m+1}=g$ は a と b の1次結合で表される．

すなわち，a と b の最大公約数 g は適当な整数（正とは限らない）k と l を用いて

$$g=ka+lb$$

と表すことができる．とくに，a と b が互いに素であるときには，a と b の最大公約数は1であるから

$$1=ka+lb$$

となる k と l が存在する。

これらの〈TOPIC〉からもわかるように，前の指導要領「数学B」で扱われていた内容

因数定理および剰余の定理

高次方程式の解および解法

2項方程式 $z^n-1=0$ の解法

$z^n-1=0$ の解の複素平面上への表示

はいずれも，正多角形の作図法と関連がある．

なお，今回は触れることができなかったが，因数定理は正多角形が作図不能の証明にも用いられる．

このように，上記の事項は正多角形の作図法と深い関係がある，むしろ，正多角形の作図法を研究している中で，発見されたアイデアであるといっても過言ではない．

その意味で，現行指導要領でこの部分が削除されてしまったことは，誠に残念なことである．

おわりに

以上見てきたように，正多角形の作図に関しては興味深い話題が多いが，さらに，ギリシア3大難問についても，高校数学との関連でかなり面白い話題もある．これらについては，次の機会にゆずるとする．

授業では，どちらかというと，教科書にのっている話題を1つ1つ取り上げ，教科書の中での内容どうしの関連について扱い，作図題との関りに触れることは極めて少なかった．

作図題に関する数学は，いわば高校数学の縦糸のような存在であると考えられる．作図に関する数学をもう少し前面に出して，数学の歴史をも踏まえた授業をしてもよいのではないかと思う．

参考文献

1. Benjamin Bold 著　Famous Problem of GEOMETRY and How to Solve Them (DOVER SCIENCE BOOKS)
2. Richard Courant and Herbert Robbins 著　What Is Mathematics? (Oxford University Press)
3. 矢野健太郎 著　幾何学の歴史　(NHK ブックス)
4. バーコフ，マクレーン（奥川，辻共訳）共著　現代代数学概論（白水社）
5. ファン・デア・ベルデン（銀林浩訳）著　現代代数学（商工出版社）