NILAI KETAKTERATURAN TOTAL SISI DARI GRAF GUNUNG BERAPI

Rukmana Sholehah[7], Slamin[8], Dafik[9]

Abstract. *For a simple undirected connected graph $G(V,E)$ with vertex set V and edge set E a labeling $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ is called a total k-labeling. A total k-labeling is defined to be an edge irregular total k-labeling of the graph G if for every two different edges uv and xy of G there is $\omega t(uv) \neq \omega t(xy)$. The minimum k for which the graph G has an edge irregular total k-labeling is called the total edge irregularity strength of the graph G, denoted by tes(G). In this paper, we determine the total edge irregularity strength of volcano graph $tes(Gb_{m,n})$ and the total edge irregularity strength of s copies volcano graph $tes(sGb_{m,n})$.*

Key Words : *edge irregular total labeling, total edge irregularity strength, volcano graph*

PENDAHULUAN

Pelabelan graf merupakan topik menarik dalam teori graf, salah satunya pelabelan total sisi irreguler. Pelabelan total sisi irreguler adalah pemberian nilai bilangan bulat positif (nilai yang dipakai boleh berulang) pada himpunan titik dan sisi dari suatu graf G, sedemikian hingga bobot setiap sisinya berbeda. Permasalahan yang muncul kemudian adalah bagaimana melabeli graf tersebut sedemikian hingga bilangan bulat terbesar yang dipakai adalah seminimum mungkin. Bilangan bulat positif terbesar yang minimum inilah yang disebut nilai ketakteraturan total sisi atau *total edge irregularity strengh* dari suatu graf G, dinotasikan dengan $tes(G)$. Pelabelan ini diperkenalkan oleh Bača, Jendrol', Miller, dan Ryan pada tahun 2002.

Akhir - akhir ini banyak penelitian yang menghasilkan graf baru, diantaranya graf Gunung Berapi atau *Volcano graph*. Secara intiutif, graf Gunung Berapi merupakan unifikasi dari graf Siklus dan graf Bintang. Oleh karena itu, graf Gunung Berapi sangat menarik untuk dikaji lebih mendalam, terutama dalam hal pelabelan total sisi irregulernya.

Pada tahun 2012, telah dilakukan penelitian dengan judul "Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi *Antimagic* pada Graf Gunung Berapi" oleh Dewi. Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi *Antimagic* (SEATL) pada suatu graf $G = (V, E)$ adalah pelabelan titik dengan bilangan bulat $f(V) = \{1,2,3,\cdots,p\}$ dan pelabelan sisi dengan bilangan bulat

[7] Mahasiswa Program Studi Sistem Informasi Universitas Jember
[8] Dosen Program Studi Sistem Informasi Universitas Jember
[9] Dosen Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

$f(E) = \{p+1, p+2, p+3, \cdots, p+q\}$ dari suatu graf *G* dimana p adalah banyaknya titik dan *q* adalah banyaknya sisi pada graf *G*.

Graf Gunung Berapi $Gb_{m,n}$ dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$ memiliki himpunan titik $V(Gb_{m,n}) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n; m, n \in N\}$ dan himpunan sisi $E(Gb_{m,n}) = \{x_m x_1 \cup x_i x_{i+1} \cup x_m x_{m-1} \cup x_m y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n; m, n \in N\}$ (Dewi, 2012). Sedangkan gabungan graf Gunung Berapi $sGb_{m,n}$ didefinisikan sebagai gabungan saling lepas dari sebanyak *s* graf Gunung Berapi isomorfis dengan himpunan titik $V(sGb_{m,n}) = \{x_i y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n; m, n \in N, 2 \leq k \leq s\}$ dan himpunan sisi $E(sGb_{m,n}) = \{x_m x_1 \cup x_i x_{i+1} \cup x_m x_{m-1} \cup x_m y_j; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n; m, n \in N, 2 \leq k \leq s\}$ (Dewi, 2012).

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah berapakah nilai ketakteraturan total sisi dalam pelabelan total sisi irreguler dari graf Gunung Berapi tunggal $Gb_{m,n}$ dan gabungan graf Gunung Berapi isomorfis $sGb_{m,n}$. Permasalahan dibatasi pada: (1) pelabelan total sisi irreguler pada graf Gunung Berapi tunggal $Gb_{m,n}$ dibatasi pada $m \geq 3$ dan $n \geq 1$; (2) pelabelan total sisi irreguler pada gabungan graf Gunung Berapi isomorfis $sGb_{m,n}$ dibatasi pada $s \geq 2$, $m \geq 3$, $n \geq 1$, $\left(\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil > \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right)$, dan $(m+n) = 0 \bmod 3$.

Berikut beberapa teorema yang dihasilkan oleh Bača, Jendrol', Miller, dan Ryan pada tahun 2002, yang merupakan teorema acuan untuk menentukan batas bawah *tes*(*G*).

Teorema 1 Jika *G* = (*V*, *E*) adalah sebuah graf dengan himpunan titik *V* dan himpunan sisi *E* (yang tidak kosong) maka $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$

Teorema 2 Jika *G* = (*V*, *E*) adalah sebuah graf dengan derajat maksimum $\Delta = \Delta(G)$ maka $\left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E| - \Delta$ untuk $\Delta \leq \frac{|E|-1}{2}$

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Deduktif aksiomatik, yaitu dengan menurunkan Teorema 1 dan Teorema 2 kemudian diterapkan dalam pelabelan total sisi irreguler pada graf Gunung Berapi;

2. Pendeteksian pola, metode ini digunakan untuk mencari pola agar mudah dibentuk formulasi pelabelan total sisi irreguler pada graf Gunung Berapi.

Teknik penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Menentukan batas bawah dari $tes(Gb_{m,n})$ dengan menggunakan Teorema 1 dan Teorema 2;
2. Melabeli graf $Gb_{m,n}$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ dengan himpunan bilangan $\{1, 2, 3, ..., k\}$ sedemikian hingga bobot setiap sisinya berbeda. Hal ini dilakukan untuk memperoleh batas atas dari $tes(Gb_{m,n})$;
3. Menentukan formulasi pelabelan yang berupa fungsi surjektif. Formulasi pelabelan ini memetakan himpunan titik dan himpunan sisi pada himpunan bilangan positif yang telah ditentukan.
4. Memeriksa kembali formulasi pelabelan apakah bobot sisi yang dihasilkan telah berbeda satu sama lain;
5. Menentukan $tes(Gb_{m,n})$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ menggunakan batas atas dan batas bawah yang telah diperoleh;
6. Melakukan teknik yang sama seperti no. 1 – 5 untuk menentukan $tes(sGb_{m,n})$ untuk $s \geq 2$, $m \geq 3$ dan $n \geq 1$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil dari penelitian ini berupa teorema mengenai $tes(Gb_{m,n})$ dan $tes(sGb_{m,n})$ dengan batasan – batasannya.

◊ **Teorema :** Nilai ketakteraturan total sisi dari graf Gunung Berapi tunggal adalah $tes(Gb_{m,n}) = \text{Max}\left\{\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right\}$ untuk $m \geq 3, n \geq 1$.

Oleh karena $tes(Gb_{m,n}) = \text{Max}\left\{\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right\}$ maka permasalahan pada pelabelan total sisi irreguler dari graf Gunung Berapi dibagi menjadi dua kasus, yaitu:

1. Jika $\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil > \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil$ maka $tes(Gb_{m,n}) = \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil$
2. Jika $\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil \leq \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil$ maka $tes(Gb_{m,n}) = \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil$

Kasus 1.

Bukti. Batas bawah $tes(Gb_{m,n})$ diperoleh dari mensubstitusikan banyaknya sisi graf Gunung Berapi $Gb_{m,n}$ ke dalam Teorema 1. Sedangkan batas atas $tes(Gb_{m,n})$ diperoleh dari melabeli setiap titik dan sisi graf Gunung Berapi berdasarkan formulasi berikut ini.

A. Bagian semburan (*Star*)

$\lambda(y_j) = \left\lceil \frac{j+1}{2} \right\rceil, j = 1,2,3,\cdots,n$

$\lambda(x_m y_j) = \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor, j = 1,2,3,\cdots,n$

B. Bagian gunung (*Cycle*)

$\lambda(x_m) = 1$

$\lambda(x_{m-1}) = \lambda(x_m x_1) = \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - \left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right)$

$\lambda(x_m x_{m-1}) = \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - 1$

1. Untuk *n* bilangan ganjil dan $\left(\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right)$ bilangan ganjil

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} 2\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil, & i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil \\ m + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - (i+1), & i = m - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil, \ldots, (m-1) \\ \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil, & i \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 2, & i = \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil \\ 2\left(i - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right) + 1, & \\ & i = \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + 1, \ldots, \left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil \\ 2\left(\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor - i\right), & \\ & i = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor, \ldots, m - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - 2 \\ 2\left(\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right) + 2, & \\ & i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \text{ dan } m \text{ ganjil} \\ 1, & i \text{ yang lain} \end{cases}$$

2. Untuk *n* bilangan ganjil dan $\left(\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right)$ bilangan genap

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} 2\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil, & i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - 1 \\ m + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - (i+1), & i = m - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil, \ldots, (m-1) \\ \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil, & i \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 2\left(i - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right) + 1, & \\ & i = \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + 1, \ldots, \left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil \\ 2\left(\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor - i\right), & \\ & i = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor, \ldots, m - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - 2 \\ 2\left(\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right) + 2, & \\ & i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \text{ dan } m \text{ ganjil} \\ 1, & i \text{ yang lain} \end{cases}$$

3. Untuk *n* bilangan genap dan $\left(\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right)$ bilangan ganjil

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil+(i-1), & i=1,2,3,\dots,\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil \\ \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-2\left\lfloor\frac{i-m+\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil+2}{2}\right\rfloor, & \\ & i=m-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil,\dots,(m-1) \\ \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil, & i \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 2\left(i-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right), & \\ & i=\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil+1,\dots,\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil \\ 2\left(\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor-i\right)-1, & \\ & i=\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor,\dots,m-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil-2 \\ 2\left(\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right)+1, & \\ & i=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor \text{ dan } m \text{ ganjil} \\ 1, & i \text{ yang lain} \end{cases}$$

4. Untuk *n* bilangan genap dan $\left(\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right)$ bilangan genap

$$\lambda(x_i) = \begin{cases} \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil+(i-1), & i=1,2,3,\dots,\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil \\ \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-2\left\lfloor\frac{i-m+\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil+3}{2}\right\rfloor+1, & \\ & i=m-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil-1,\dots,(m-1) \\ \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil, & i \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 2\left(i-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right), & \\ & i=\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil+1,\dots,\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil \\ 2\left(\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor-i\right)-1, & \\ & i=\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor,\dots,m-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil-3 \\ 2, & i=m-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil-2 \\ 2\left(\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil-\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil+\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right)+1, & \\ & i=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor \text{ dan } m \text{ ganjil} \\ 1, & i \text{ yang lain} \end{cases}$$

Berdasarkan formulasi pelabelan di atas, label terbesar yang digunakan adalah $\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil$. Karena nilai tersebut merupakan batas atas dari $tes(Gb_{m,n})$ maka didapat

$\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil \leq tes(Gb_{m,n}) \leq \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $tes(Gb_{m,n}) = \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil$.

Berikut adalah formulasi bobot sisi dari graf Gunung Berapi $Gb_{m,n}$.

$$\begin{aligned}
\omega(x_m y_j) &= \lambda(x_m) + \lambda(x_m y_j) + \lambda(y_j) \\
&= j+2, \qquad\qquad j = 1,2,3,\ldots,n \\
\omega(x_m x_1) &= \lambda(x_m) + \lambda(x_m x_1) + \lambda(x_1) \\
&= n+4 \\
\omega(x_{m-1} x_m) &= \lambda(x_{m-1}) + \lambda(x_{m-1} x_m) + \lambda(x_m) \\
&= n+3 \\
\omega(x_i x_{i+1}) &= \lambda(x_i) + \lambda(x_i x_{i+1}) + \lambda(x_{i+1}) \\
&= n+2i+4, \qquad i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil \\
&= n+2(m-i)+1, \qquad i = \left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil + 1,\ldots,(m-2)
\end{aligned}$$

Kasus 2.

Bukti. Batas bawah *tes*($Gb_{m,n}$) diperoleh dari mensubstitusikan banyaknya sisi graf Gunung Berapi $Gb_{m,n}$ ke dalam Teorema 2. Sedangkan batas atas *tes*($Gb_{m,n}$) diperoleh dari melabeli setiap titik dan sisi graf Gunung Berapi berdasarkan formulasi berikut ini.

A. Bagian semburan (*Star*)

$\lambda(y_j) = \left\lceil\frac{j+1}{2}\right\rceil, j = 1,2,3,\cdots,n$

$\lambda(x_m y_j) = \left\lfloor\frac{j+1}{2}\right\rfloor, j = 1,2,3,\cdots,n$

B. Bagian gunung (*Cycle*)

$\lambda(x_m) = 1$

$\lambda(x_{m-1}) = \lambda(x_m x_1) = \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil - \left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right)$

$\lambda(x_i) = \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil, i = 1,2,3,\cdots,(m-1)$

$\lambda(x_m x_{m-1}) = \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil - 1$

1. Untuk *n* bilangan ganjil

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 2i+1, & i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil \\ 2\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil - 2\left(i - \left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil\right), & i = \left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil + 1,\ldots,(m-2) \end{cases}$$

2. Untuk *n* bilangan genap

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} 2i, & i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil \\ \left(2\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil - 1\right) - 2\left(i - \left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil\right), & \\ & i = \left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil + 1,\ldots,(m-3) \\ 2, & i = (m-2) \end{cases}$$

Berdasarkan formulasi pelabelan di atas, label terbesar yang digunakan adalah $\left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil$. Karena nilai tersebut merupakan batas atas dari $tes(Gb_{m,n})$ maka didapat $\left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil \leq tes(Gb_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $tes(Gb_{m,n}) = \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil$. Berikut adalah formulasi bobot sisi dari graf Gunung Berapi $Gb_{m,n}$.

$$\begin{aligned} \omega(x_m y_j) &= \lambda(x_m) + \lambda(x_m y_j) + \lambda(y_j) \\ &= j + 2, && j = 1,2,3,\ldots,n \\ \omega(x_m x_1) &= \lambda(x_m) + \lambda(x_m x_1) + \lambda(x_1) \\ &= n + 4 \\ \omega(x_{m-1} x_m) &= \lambda(x_{m-1}) + \lambda(x_{m-1} x_m) + \lambda(x_m) \\ &= n + 3 \\ \omega(x_i x_{i+1}) &= \lambda(x_i) + \lambda(x_i x_{i+1}) + \lambda(x_{i+1}) \\ &= n + 2i + 4, && i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil \\ &= n + 2(m-i) + 1, && i = \left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil + 1,\ldots,(m-2) \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian dua kasus di atas, maka dapat disimpulkan bahwa $tes(Gb_{m,n}) = \text{Max}\left\{\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right\}$ untuk $m \geq 3, n \geq 1$.

◊ **Teorema 4** Nilai ketakteraturan total sisi dari gabungan graf Gunung Berapi isomorfis adalah$tes(sGb_{m,n}) = \left\lceil \frac{s(m+n)+2}{3} \right\rceil$ untuk $s \geq 2, m \geq 3, n \geq 1, \left(\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil > \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right)$, dan $(m+n) = 0 \bmod 3$.

Bukti. Batas bawah $tes(sGb_{m,n})$ diperoleh dari mensubstitusikan banyaknya sisi graf Gunung Berapi $sGb_{m,n}$ ke dalam Teorema 1. Sedangkan batas atas $tes(sGb_{m,n})$ diperoleh dari melabeli setiap titik dan sisi gabungan graf Gunung Berapi isomorfis berdasarkan formulasi berikut ini.

A. Bagian semburan (*Star*)

$\lambda(y_j^s) = \left\lceil \frac{j+1}{2} \right\rceil + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), j = 1,2,3,\cdots,n$

$\lambda(x_m^s y_j^s) = \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), j = 1,2,3,\cdots,n$

B. Bagian gunung (*Cycle*)

$\lambda(x_m^s) = 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right)$

$\lambda(x_{m-1}^s) = \lambda(x_m^s x_1^s) = \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - \left(\frac{(-1)^n+1}{2}\right) + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right)$

$\lambda(x_{m-1}^s x_m^s) = \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right)$

Untuk $\left(\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil > \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right)$ dan $(m+n) = 0$ mod 3

1. Untuk *n* bilangan ganjil dan $\left(\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right)$ bilangan ganjil

$$\lambda(x_i^s) = \begin{cases} 2\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil \\ m + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - (i+1) + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = m - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil, \ldots, (m-1) \\ \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\lambda(x_i^s x_{i+1}^s) = \begin{cases} 2 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + 1 \\ 2\left(i - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right) + 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + 1, \ldots, \left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil \\ 2\left(\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor - i\right) + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor, \ldots, m - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - 2 \\ 2\left(\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right) + 2 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \text{ dan } m \text{ ganjil} \\ 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i \text{ yang lain} \end{cases}$$

2. Untuk *n* bilangan ganjil dan $\left(\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right)$ bilangan genap

$$\lambda(x_i^s) = \begin{cases} 2\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - 1 \\ m + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - (i+1) + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = m - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil, \ldots, (m-1) \\ \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\lambda(x_i^s x_{i+1}^s) = \begin{cases} 2\left(i - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right) + 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + 1, \ldots, \left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil \\ 2\left(\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor - i\right) + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor, \ldots, m - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - 2 \\ 2\left(\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right) + 2 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \text{ dan } m \text{ ganjil} \\ 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i \text{ yang lain} \end{cases}$$

3. Untuk *n* bilangan genap dan $\left(\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right)$ bilangan ganjil

$$\lambda(x_i^s) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + (i-1) + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - 2\left\lfloor \frac{i-m+\left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + 2}{2} \right\rfloor + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = m - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil, \ldots, (m-1) \\ \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\lambda(x_i^s x_{i+1}^s) = \begin{cases} 2\left(i - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right) + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + 1, \ldots, \left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil \\ 2\left(\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor - i\right) - 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor, \ldots, m - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil - 2 \\ 2\left(\left\lceil \frac{m-3}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{m+n+2}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3}{2} \right\rceil\right) + 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \text{ dan } m \text{ ganjil} \\ 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i \text{ yang lain} \end{cases}$$

4. Untuk *n* bilangan genap dan $\left(\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right)$ bilangan genap

$$\lambda(x_i^s) = \begin{cases} \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil + (i-1) + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil - \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil \\ \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil - 2\left\lfloor\frac{i-m+\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil-\left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil+3}{2}\right\rfloor + 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = m - \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil - 1,\ldots,(m-1) \\ \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i \text{ yang lain} \end{cases}$$

$$\lambda(x_i^s x_{i+1}^s) = \begin{cases} 2\left(i - \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right) + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil - \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil + 1,\ldots,\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil \\ 2\left(\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil - \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil + \left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor - i\right) - 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor,\ldots,m - \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil - 3 \\ 2 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = m - \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil - 2 \\ 2\left(\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil - \left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right) + 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i = \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor \text{ dan } m \text{ ganjil} \\ 1 + (s-1)\left(\frac{m+n}{3}\right), \\ \qquad i \text{ yang lain} \end{cases}$$

Berdasarkan formulasi pelabelan di atas, label terbesar yang digunakan adalah $\left\lceil\frac{s(m+n)+2}{3}\right\rceil$. Karena nilai tersebut merupakan batas atas dari $tes(Gb_{m,n})$ maka didapat $\left\lceil\frac{s(m+n)+2}{3}\right\rceil \leq tes(Gb_{m,n}) \leq \left\lceil\frac{s(m+n)+2}{3}\right\rceil$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $tes(Gb_{m,n}) = \left\lceil\frac{s(m+n)+2}{3}\right\rceil$. Berikut adalah formulasi bobot sisi dari graf Gunung Berapi $Gb_{m,n}$.

$$\begin{aligned} \omega(x_m^s y_j^s) &= \lambda(x_m^s) + \lambda(x_m^s y_j^s) + \lambda(y_j^s) \\ &= (s-1)(m+n) + j + 2, && j = 1,2,3,\ldots,n \\ \omega(x_m^s x_1^s) &= \lambda(x_m^s) + \lambda(x_m^s x_1^s) + \lambda(x_1^s) \\ &= (s-1)(m+n) + n + 4 \\ \omega(x_{m-1}^s x_m^s) &= \lambda(x_{m-1}^s) + \lambda(x_{m-1}^s x_m^s) + \lambda(x_m^s) \\ &= (s-1)(m+n) + n + 3 \\ \omega(x_i^s x_{i+1}^s) &= \lambda(x_i^s) + \lambda(x_i^s x_{i+1}^s) + \lambda(x_{i+1}^s) \\ &= (s-1)(m+n) + n + 2i + 4, && i = 1,2,3,\ldots,\left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil \\ &= (s-1)(m+n) + n + 2(m-i) + 1, && i = \left\lceil\frac{m-3}{2}\right\rceil + 1,\ldots,(m-2) \end{aligned}$$

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan dari penelitian yang dilakukan adalah:

1. nilai ketakteraturan total sisi dari graf Gunung Berapi tunggal adalah $tes(Gb_{m,n}) = \text{Max}\left\{\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right\}$ untuk $m \geq 3, n \geq 1$;
2. nilai ketakteraturan total sisi dari gabungan graf Gunung Berapi isomorfis adalah $tes(sGb_{m,n}) = \left\lceil\frac{s(m+n)+2}{3}\right\rceil$ untuk $s \geq 2, m \geq 3, n \geq 1, \left(\left\lceil\frac{m+n+2}{3}\right\rceil > \left\lceil\frac{n+3}{2}\right\rceil\right)$, dan $(m+n) = 0$ mod 3.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai pelabelan total sisi irreguler pada graf Gunung Berapi, maka peneliti memberikan saran antara lain:

- Pembaca dapat melanjutkan penelitian mengenai pelabelan total sisi irreguler pada gabungan graf Gunung Berapi isomorfis untuk $(m+n) = 1$ mod 3 dan $(m+n) =$ 2 mod 3 serta gabungan graf Gunung Berapi non-isomorfis;
- Pembaca dapat menjadikan hasil dari penelitian ini sebagai acuan dalam menentukan nilai ketakteraturan total sisi dari graf khusus-khusus yang lain baik tunggal maupun gabungannya.

DAFTAR PUSTAKA

Bača, M., Jendrol', S., Miller, M., dan Ryan, J. 2006. *On Irregular Total Labellings*. Discrete Mathematics 307(2007) 1378-1388.

Dewi, S.K.R. 2012. "Pelabelan Total Super (*a*,*d*)-Sisi *Antimagic* pada Graf Gunung Berapi." Tidak Dipublikasikan. Skripsi. Jember : FKIP Universitas Jember.

Gallian, Joseph A. 2012. *Dynamic Survey of Graph Labeling*. Mathematics Subject Classifications : 05C78.

Ivančo, J. dan Jendrol', S. 2006. Total Edge Irregularity Strength of Trees. Discussiones Mathematicae, Graph Theory 26 (2006) 449-456.

Universitas Jember. 2009. Pedoman Penulisan Karya Tulis Ilmiah. Jember : Jember University Press.