高等学校数学科における
統合的・発展的に考える力を養う教材開発

岸谷　正彦

1．研究課題の設定

高等学校数学科においては,「数学的に考える資質・能力」を育成する観点から，数学的活動の一層の充実を図り，問題発見・解決の過程を学習過程に反映させることが重要とされている。また，新学習指導要領でも，数学科の目標において,「数学的な見方・考え方」を育み,「これからの社会に求められる資質・能力」の育成が，数学科の果たすべき役割であるとされている。さらに目標において,「数学的に考える資質・能力」の育成のためには,

(1) 数学における基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。

(2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力，事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。

(3) 数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度，粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度，問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う。

とされている。

また,「数学的な見方・考え方」については，事象を数量や図形及びそれらの関係に着目して捉え，論理的，統合的・発展的に考えること，と整理された。

さらに，資質・能力の育成には学習活動が重視されており，児童生徒の「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善が求められている。数学科においては，数学的に問題解決する過程（事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を主体的，協働的に解決し，学習過程を振り返って概念を形成したり体系化したりする過程）を具現化する授業が求められている。こうした学習や指導方法は，知識や技能を定着させるためにも，生徒の学習意欲を高めるためにも効果的である。

本稿では，特に「数学的な見方・考え方」を育み，問題発見・解決する過程を大切にする観点から，統合的・発展的に考える力を養うための教材の試作を図った。

「数学的な見方・考え方」は，生徒一人一人が目的意識を持って問題を発見したり解決したりする際にも積極的に働かせていくものであり，そのためにも，統合的・発展的に考えることを重視されている。そこで，本稿の目的は，問題解決や自ら課題を発見したりして，より積極的に数学的な見方・考え方を養っていくために，高等学校における統合的・発展的に考えるための教材の明示であり，考えるための手がかりの獲得に向けてどのような取組みがあり得るのか，あるいは，生徒がどのようにして学んでいくのかを明らかにすることである。

2．統合的・発展的に考察するとは

統合的に考えるということについては，次のような先行研究がある。片桐「数学的な考え方の具体化」から，以下引用。

統合的な考え方というのは，多くの事柄を個々ばらばらにしておかないで，より広い観点から，それらの本質的な共通性を抽象し，それによって，同じものとしてまとめていこうとする考え方である。３つのタイプが考えられる。

（Ⅰ）（高次の統合）

いくつかの事柄（それは概念や原理・法則，さらに理論，さらに考え方などいろいろあろう）があるとき，これをより広い，より高い観点から見て，それらに共通な本質を見出し，これによって，より一般的なものにまとめていこうとする考え方である。

（Ⅱ）（包括的統合）

いくつかの事柄 S_1，S_2，S_3 を見直すことによって，S_1 や S_2 をその中の 1 つの S_3 に統合する。

（Ⅲ）（拡張的な考え方）

ある事柄が分かっているとき，これを含むより広い範囲にまで，それが言えるようにするために，条件を少し変えてより包括的なものにする。すなわち，新しいものを次々と取り入れてまとめていこうとする考え方である。

ここでは，さらに中島「算数・数学教育と数学的な考え方」を参考にする。

(a) 集合による統合
　はじめは，異なったものとしてとらえられていたものについて，ある必要から共通の観点を見出して一つのものにまとめる場合である。

(b) 拡張による統合
　はじめに考えた概念や形式が，もっと広い範囲（はじめの考えでは含められない範囲のものまで）に適用できるようにするために，はじめの概念の意味や形式を一般化して，もとのものも含めてまとめる場合である。

(c) 補完による統合
　すでに知っている概念や形式だけでは，適用できない場合が起こるとき，補うものを加えて，「完全になる」ようにまとめる場合である。

また，発展的に考えるとは，次のような先行研究がある。同様に，片桐「数学的な考え方の具体化と指導」を参考にする。

発展的な考え方

１つのことが得られても，さらによりよい方法を求めたり，これを基にして，より一般的な，より新しいものを発見していこうとする考え方が，発展的な考え方である。

発展的な考え方には，２つの型が考えられる。

発展のⅠ型：広い意味での問題の条件を，変えてみること。ここでの条件を変えてみるというのは，

(1) 条件の一部を他のものに置き換えてみる。または条件をゆるめてみる。

(2) 問題場面を変えてみる。

発展のⅡ型：思考の観点を変えてみる。

さらに，中島は，「総合的・発展的という表現に関しては，［統合的］と［発展的］とを並列的によみとらないで，［統合といった観点による発展的な考察］とよみとることが望ましい」としている。また，片桐によれば，「統合的な考え方と発展的な考え方は，相互に刺激し合い，相補い，それぞれの力を発揮していくもの」ということからも，統合的・発展的に考察するとは，統合的に考えながら，発展的に数学を作り上げていくという意味に捉える。すなわち，様々なものを統合し発展させるという意味合いがあるから，本稿では，次のように言い替えて使用する。

（Ⅰ）いくつかの事柄に対し，ある共通の関係

が見つかることで，新しい視点が生まれ，それらが統合されていく。

（Ⅱ）ある規則を広げたり，付加することで，これまで異なるとされていた事柄が一つに統合されていく。

（Ⅲ）例外をなくするために，それを含んだ形で，統合していく。

３．具体的な事例から

高等学校の内容において，統合的・発展的に考える場面から，いくつか例を挙げてみる。ただし，教育内容からでなく，指導の方法で統合的・発展的な意味も変わってくる。

例１．$(a+b)^2$，$(a+b)^3$，$(a+b+c)^2$，$(a+b+c)^3$ などの展開式。これらは，二項定理や多項定理としてつながり，その係数は，組合せの総数につながり，一般二項定理やテイラーの定理に導かれる。二項係数は，美しい関係を提供してくれる。

例２．数の拡張。２つの正の数の差を表すために負の数を必要としたように，四則の計算法則を維持しながら，数の範囲を次々に広げていくことで，複素数が得られたことは，承知の事実である。ただし，複素数に拡張するとき，虚数どうしの大小関係はあえて考えず，絶対値で，その概念を置き換えた。

例３．２次関数 $y=x^2-2x-1$ を $y=(x-1)^2-2$ と変形することで，変化の様子を $y=x^2$ の変化で表されること。平行移動の概念にもつながる。また，三角関数の合成 $y=a\sin x+b\cos x$ にもつながる。

例４．三角比の拡張。多くの教科書で扱われている，直角三角形の１つの鋭角で定まる辺の比から三角関数にいたる拡張の過程である。θ が鈍角のとき，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$ となる例外を含めた形で，これまでの θ が鋭角の場合も統合した定義ができないだろうかということである。

例５．確率漸化式。確率漸化式と言う用語は，一般的ではないが，あえて使用する。試行の繰り返しで，ある状態がある確率で変化していくとき，その状態の n 回目の確率を求めるような場合である。

今回は，例４と例５で，どのような統合・発展の考え方がなされているのかを見る。

例６．三角形の内心や傍心と三角形の面積の関係は，一つの公式で表現することで，統合される。図形の間で成り立つ関係は，多くこのような表現が可能で，メネラウスの定理とチェバの定理，内分点と外分点などもそうである。

例７．２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の判別，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との関係は，２次不等式なども，判別式 $D=b^2-4ac$ によって統一的に表現できる。また，高次の方程式でも，方程式の係数の判別式の作り方から，様々な情報が見えてくる。

４．事例１（三角比の拡張）

数学Ⅰ「三角比」第２節　三角比の拡張

直角三角形を用いて，鋭角の三角比を定義したあと，$0°\leq\theta\leq180°$ のときにも，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を考える。

これを生徒に指導するとき，いくつかの問題がある。

(1) 定義が天下り式であり，なぜそのような定義をするのかの必然性を明確にしていない。

(2) そもそも，座標や円（単位円）は，唐突に登場する。中学校で座標指導は，行われ

ているとはいえ，円を座標上におくことはない（数学Ⅱの内容）。その円周上の点の座標を読み取ることは，難しい。

(3) やや本質とはかけ離れた学習法が，横行している事実がある。例えば，直角三角形をそのまま利用して，角度が鈍角の場合は，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を負の値に直させたりするものである。

このため，与えられた角度の三角比の値は，求められるが，一般角の場合や，不等式を解く場合に困難を感じる生徒は多い。また，三角関数は，単位円周上を動く点の x 座標と y 座標を角度の変化（弧の長さ）の関数と見るという概念を身に付ける必要がある。さらに，三角関数という，角度を変数としたときの関数の値の変化という読み取りができなくなり，三角関数のグラフも必然的に，形を覚えているだけになる。

これについて，今回は統合的に考えることで，自然な定義に結び付け，より確実な理解を促すような指導案を提示したい。特に，統合的な考えのうち，（Ⅱ）あるいは（Ⅲ）を用いた事例と考える。

事例２（確率と漸化式）

数研出版「数学B」には，次の例題が挙げられている（一部文章を変えてある）

第３章　数列　第２節　数学的帰納法

７　漸化式と数列　［研究］　確率と漸化式

問題１． さいころを n 回投げるとき，1の目が偶数回出る確率を p_n とする。このとき，p_n と p_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ。ただし，0回は偶数回と考える。

問題２． 正三角形 ABC の頂点を移動する点 P がある。点 P は1つの頂点に達してから1秒後に，他の2つの頂点のいずれかに等しい確率で移動する。初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 B にいる確率を b_n とする。b_n を n の式で表せ。

簡単に略解を試みる。

問題１．においては，2つの排反の事象に分け，

【1】n 回目までに1の目が偶数回出て $n+1$ 回目に1以外の目が出る

【2】n 回目までに1の目が奇数回出て $n+1$ 回目に1の目が出る

これから，$p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6}(1-p_n)$

一般項は，$p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}$，$p_1 = \frac{5}{6}$ から，

$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ を得る。

問題２．においては，

n 回目までに頂点 A または頂点 C にいて，$n+1$ 回目に頂点 B にいることから，

$b_{n+1} = \frac{1}{2}(1-b_n)$

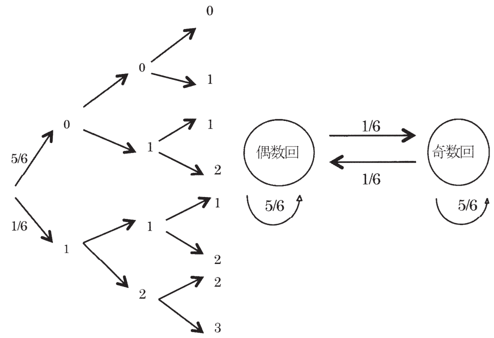
一般項は，$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$，$b_1 = \frac{1}{2}$ から，

$b_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ を得る。

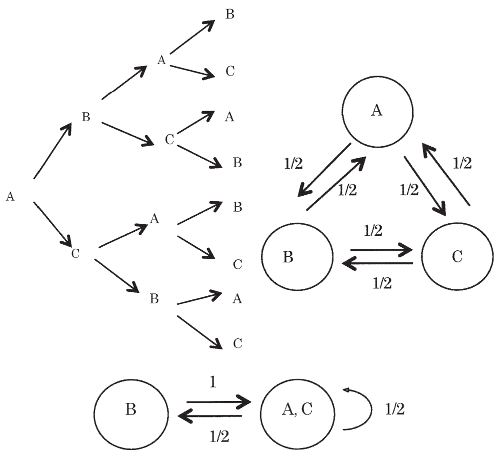
問題１，２のように，すぐに漸化式を立式できる場合もあるが，多くの生徒にとっては，難しいであろう。もう一度考え方を振返ってみる。

まず，樹形図を作って考えるだろう。樹形図は，$n=3$，$n=4$ 以上になると枝分かれが煩雑になり，一般的な n 回目の試行の確率を予想して求めることは難しい。そこで，n 回目と $n+1$ 回目の状態の変化を言葉で表し，それをもとに漸化式を立てていく方法が考えられる。これを図に表した確率付きの推移図を導入する。推移図は，例えば n 回目の状態と $n+1$ 回目の状態の関連を示した図である。矢印で進む方向を示し，数値でその確率を表したものである。樹形図の結びつきを確率が付随した状態の結びつきに直したと思えばよい。その関係を並列して書くと以下のようになる。

問題１.



問題２.



このように，推移図を描くことで，この問題の本質的な部分が現れ，n 秒後と $n+1$ 秒後の関係から，n を用いて，一般的な確率を表現できる。また，それらを見比べることで，表面上異なる問題が，推移図では類似のものとなり，結果的に漸化式も作れることになる。

このあとは，一見異なる場面設定の問題が推移図を媒介にして，統合的に考えていく方法の授業案を提示していく。特に，統合的な考えのうち，(Ⅰ)を用いた事例である。

５．指導案の提示

指導事例１

(1) 表題：三角比の拡張を振返ろう

(2) 本時の目的

①三角比の定義が拡張された理由を問い直し，自らその問に対する解答を得る。さらに数学の定義を拡張するとは，どういうことかにも，自分なりの答えを用意する。

②数学において事柄の定義を行うことへの関心をもち，その意義を考えながら，定義の妥当性を追求する心を養う。物事の本質を理解しようとする態度を養う。

③高い立場で物事を捉えることで，正しい理解をし，計算の間違いや勘違いなどを極力少なくする。

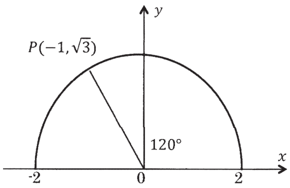
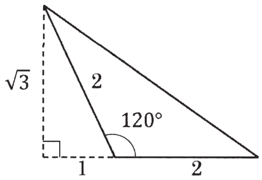
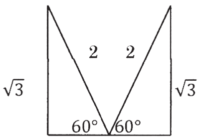
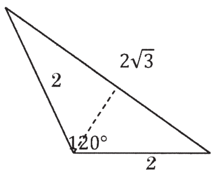
(3) 本時の目標と指導のねらい

具体的な例から，鋭角の場合だけでなく，鈍角の三角比を考えなければならない必然性を考える。それを踏まえてどのような定義が妥当であるかを多くの人との意見をもとに作っていく。その経過が自分のものとして理解でき，より正しい理解へとつなげられる。

(4) 本時の教材感：直角三角形を用いた三角比の定義，すなわち相似な二つの直角三角形の辺の比は，一つの鋭角の大きさで定まることから，その辺の比をそれぞれ，正弦，余弦，正接と呼ぶことに自体は大きな支障ではない。むしろ，三角比の値の表を用いていろいろな建物の高さや水平な距離を求めることを通して，その有用性も充分理解している。にもかかわらず，三角比を鈍角に拡張したあとの簡単な角度の値でさえ，間違える生徒が出てくる。それは一つに，新しい定義がどうしても自分の中に概念として承服できない。あるいは，どうしてそのような定義をするのかの理解が足りていないのが原因である。

学習計画：数学Ⅰの範囲は，一通りの学習を終えて，正弦定理，余弦定理，三角形の面積の式なども学習したあとの，授業内容の振返りとして設定してある。

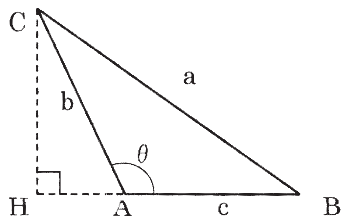
(4) 本時の授業展開

指導内容	学習活動（○：指導，●：指示・発問，□活動・予想される反応）	指導上の留意点・評価
導入 反応	$\sin 120^\circ$，$\cos 120^\circ$ の値を求めてみよう。   	多くの生徒は，円周上の点の座標から読み取ることができる。 $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$
反応	 	直角三角形を２つ重ねて調べているような自己流の生徒もいる。それも取り上げる。
発問	●三角比を鈍角の場合にまで，範囲を広げました。どのようにして広げたか，言えますか。	
反応	□円をかいて座標を使った，あれですか。	今回は，本来の定義は，知っているものとする。
発問	●何か疑問に思っていることはありませんか？	
反応	□そもそも，$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ のとき，なぜ，$\sin\theta$ は正の数のままで，$\cos\theta$，$\tan\theta$ は負の数になったのか？ □そうしないといけない理由があったのではないか？	しっくり来ていない生徒に答えさせる。
発問	●まず，それを調べてみましょう。 $\boxed{\text{どうして，} 0^\circ \le \theta \le 180^\circ \text{ のとき，} \cos\theta < 0 \text{ なのか？}}$ お互い話し合ってみよう。	課題の提示 グループになって，お互い意見を出させる。
ヒント	●鈍角を用いて考えた場面は，なかったか？ 具体的な角度でもよい。	考えにくい場合のヒントである。
質問	□余弦定理は成り立っていると思っていいのですか？	図形を用いた証明があることを明らかにする。
確認	●それも使ってよいことにしよう。	
反応	□余弦定理を用いると，$\cos 120^\circ < 0$ である理由が，分かりました。	生徒は，いろいろ図を書いている。一般に，θ が鈍角のとき，$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\sin(\theta - 90^\circ)$, $\sin(\theta - 90^\circ) > 0$ から，$\cos(180^\circ - \theta) < 0$ が，示せる。 また，余弦定理から，$\cos(180^\circ - \theta)) = \cos\theta$ も示せる。
発表	●それを発表してもらいましょう。	
反応	 $(2\sqrt{3})^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\cos 120^\circ$ これから，$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} < 0$	
発問	● $\sin\theta$ が正である理由は，分かりましたか？	
反応	□三角形の面積の求め方から，理由が説明できると思います。 θ が鈍角のとき，$S = \frac{1}{2}ab\sin(180^\circ - \theta)) = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ から， $\sin(180^\circ - \theta)) = \sin\theta > 0$	$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ のとき， $\sin\theta > 0$ である理由。

指導内容	学習活動（○：指導，●：指示・発問，□活動・予想される反応）	指導上の留意点・評価
発問 反応	●$\tan\theta$ が負である理由は，分かりましたか？ □例えば，直線の傾きで説明できるかも。傾きを m とする。 $m=\tan\theta$ が成り立つとすると， θ が鈍角のとき，$\tan\theta<0$ でなければならない。	$90°\leq\theta\leq 180°$ のとき，$\tan\theta<0$ である理由。 $\tan\theta$ を使って表現できるものは，なに？
説明 発問 反応	このように，三角比の値に負の数を用いる必要が出てきました。 ●まとめてみよう。 □ $90°\leq\theta\leq 180°$ のとき，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$ さらに，$\sin\theta=\sin(180°-\theta)$，$\cos\theta=\cos(180°-\theta)$ が，成り立つ。	まとめを自分自身で表現できる。
指示	以下，どのように三角比を決めていけばよいのかを，考えましょう。これも話し合ってください。	鋭角のときに，成り立った性質は何？
発問 反応 指示	●これまでは，直角三角形を用いて，鋭角の三角比を定義しました。このときに，成り立っていた関係はどうしますか。 □そのままなりなっていてほしい。 ●では，この関係を保ちながら，さらに，考えていきましょう。	三角比の相互関係 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$
反応	直角三角形を使ったのでは，限界があるね。	鈍角の直角三角形はない。
確認	□ 角度は，x 軸の正の方向から反時計まわりに角を考えていくことにした。	角度の表し方にも，影響するのでは。
反応	□ 鋭角のとき，斜辺をつねに 1 にすると辺の比ではなく，実際の値で表現できる。これがそのまま，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値になる。	共通の認識の確認
反応	□その値を座標にする点を考えればよいのだ。そのまま，角を鈍角にまでひろげてみる。$\sin\theta=\sin(180°-\theta)$，$\cos\theta=-\cos(180°-\theta)$ から，座標は，y 軸に関して対称の位置にする。	角は，x 軸の正の向きから測ることにする。直角三角形を用いないで，鋭角の三角比が定義できないかの答え。
反応	そうすれば，相互関係もそのまま成り立つ。結局，単位円周上の点 $P(x,y)$ に対して，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とすればよい。	$\tan\theta=-\tan(180°-\theta)$ も成り立つ。

(5) 統合的に考察する場面：$90°<\theta<180°$ のとき，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$ になる必然性を認め，さらに，三角比の相互関係 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ は維持し，$0°<\theta<90°$ の場合を含んだより拡張された定義が作れないか？

［補足］ユークリッドの原論「第２巻命題１２」を挙げておく。これは，余弦定理そのものである。



鈍角三角形において、鈍角の対辺の上の正方形は、鈍角を挟む二辺の上の正方形の和より、鈍角を挟む辺の一つと、この辺へと垂線が下ろされ、この鈍角への垂線によって外部に切り取られた線分とに囲まれた矩形の二倍だけ大きい。図において，BC の平方は，CA の平方と

AB の平方の和より，AH と AB の積の２倍大きいという定理である。

すなわち，$BC^2 = AB^2 + CA^2 + 2AH \cdot AB$

現在の用語では，三角形 ABC において，$AB = c$，$BC = a$，$CA = b$ とし，

さらに $\angle BAC = \theta$ とする。

このとき，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ が，成り立つ。

指導事例２

(1) 表題：一定の規則である状態がいくつかの状態に変化する確率の問題に対し，様々なパターンを分類しよう。

(2) 本日の目的

①問題の中の共通な事柄を見いだし，それから整理・分類し，漸化式で表現する。

②それを他の問題に適用することで，様々な事柄を統合して考察できる力をつける。

(3) 本時の目標と指導のねらい

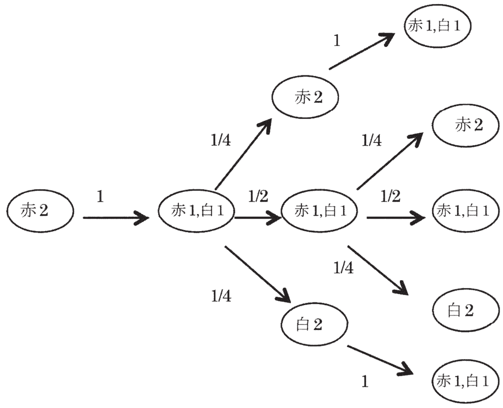
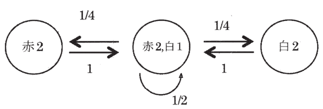
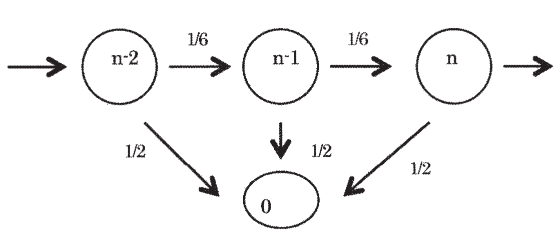
①推移図で表現することができる。同形の推移図を媒介として漸化式が立式できる。

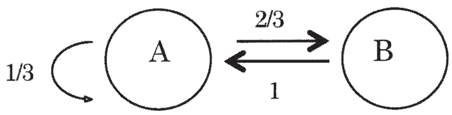
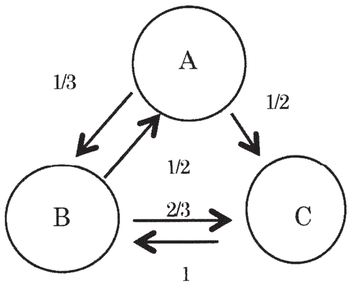
②推移図のいろいろなタイプを考え整理・分類し，新しい問題に適応できるか試してみる。逆に，与えられた推移図から問題が作ることができる。

③グループで話し合いながら，自分の考えを表現し，まとめることができる。

(4) 本時の授業展開

指導内容	学習活動（○：指導，●：指示・発問，□活動・予想される反応）	指導上の留意点・評価
導入	●まず，次の問題を考えてみよう。	問題提起（プリント）
	問題１．さいころを n 回投げるとき，1の目が偶数回出る確率を p_n とする。このとき，p_n と p_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ。ただし，0 回は偶数回と考える。	0回は偶数回と考えることに注意する。
	問題２．正三角形 ABC の頂点を移動する点 P がある。点 P は1つの頂点に達してから1秒後に，他の2つの頂点のいずれかに等しい確率で移動する。初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 B にいる確率を b_n とする。b_n と b_{n+1} の間に成り立つ関係を求めよ。	余裕があれば，b_n を n の式で表すことを指示する（漸化式を解く）。
	問題３．2 つの袋 A，B にそれぞれ2個の玉が入っている。次を 1 回の操作とする。 操作：同時に A と B から1 の玉を取り出して A の玉は B に，B の玉は A に入れる。 はじめに A に赤玉 2 個，B に白玉2個を入れて，上の操作を n 回繰り返したのち A に赤玉 1 個，白玉1個入っている確率 q_n を求めよ。	漸化式を作る？
	●これらの問題に対し，どのように取り組みますか？	

指導内容	学習活動（○：指導，●：指示・発問，□活動・予想される反応）	指導上の留意点・評価
	□まず，樹形図を書いてみます。	
発問	問題３．	
反応 作業		樹形図を書き始める生徒が多い。 問題を３つに分けてグループごとに，別々の問題を考えさせる。試行錯誤する。問題１．２．の樹形図は，p345に掲載ずみ。
反応	□樹形図だけでは，n 回繰り繰り返した場合が，すぐには求まりません。	樹形図から核心部分だけを取り出せないだろうか？
発問	●1回目と2回目の関係，あるいは一般に，n 回目と $n+1$ 回目の状態の推移を表す関係を言葉で表現してみよう。	難しい場合には，1回目と2回目の関係，2回目と3回目の関係を書いてみる。
反応	□ $n+1$ 回目が，（赤1，白1）である事象は，n 回目が，（赤1，白1）で，同色を取り出すか，n 回目が，（赤2，白0）または（赤0，白2）のときである。これらは，排反である。	
発問	●共通な考え方と，違いは何だろうか？	言葉で説明させる。共通な性質と違いを明確にできる。
反応	□問題１，２は，状態が２つあり，その間で繰り返す。問題３は，状態が３つあり，その間で繰り返す。問題１，２は，同じ問題であり，問題３は，状態が増えただけである。	
発問	●これから，漸化式を作ってみよう。問１，２の解答は，P344  $q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+1\cdot(1-q_n)$ ●次の問題は，どうだろう。	樹形図を書いている生徒もいるが，q_n と q_{n+1} の関係が作れないかを調べる生徒が多い。 何がポイントなのか生徒の中に芽生えたであろうか？
発問	問題４．1個のさいころを投げる。1の目が出たら得点を１点，2または3の目が出たら2点，その他の目が出たら0点とする。1点または2点とったときには続けてさいころを投げ，0点をとった時点で終了する。合計得点が n 点で終了する確率 p_n を求めよ。	
反応		樹形図と推移図の相互関係，問１〜問３．とは異なるか？ $p_0=\frac{1}{2}$， $p_1=\frac{1}{6}$， $p_2=\frac{1}{6}p_1+\frac{1}{3}p_0$ $p_n=\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{1}{3}p_{n-2}$

指導内容	学習活動（○：指導，●：指示・発問，□活動・予想される反応）	指導上の留意点・評価
作業	問題。次の推移図から漸化式を作ってみよう。 （1）  （2） 	（1）n 回目が状態 A，B である確率を a_n，b_n とすると， $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+1-a_n,$ $b_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$ （2）n 回目が状態 A，B，C である確率を a_n，b_n，c_n とすると， $a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n,$ $b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+c_n,$ $c_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{2}{3}b_n$
作業	問題。問題を作って解いてみよう。	問題作り

（5）統合的・発展的に考察する場面：樹形図から推移図の関係に書き換えることで，状態から次の状態への変化を見やすくし，問題の本質を抽出する。共通な関係や包括的な関係を見いだし，分類に生かし整理できる。漸化式で表現する場面で，類推し統合的・発展的に考えるよさを実感する。

6．確率漸化式の補足

推移図の「状態」が増えれば増えるほど，関係式（漸化式）の数が増加する。ここでは，具体的な問題を通して分類やパターンの漸化式を表してみる。

問題5． 正三角形 ABC の頂点を移動する点 P がある。点 P は1つの頂点に達してから1秒後に，$\frac{1}{2}$ の確率でその点に留まるか，$\frac{1}{4}$ の確率で他の2つの頂点のいずれかに移動する。初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 B にいる確率を b_n とする。b_n を n の式で表せ。

問題6． 2つの袋 A，B にそれぞれ2個の玉が入っている。まず A から1個の玉を取り出して B に入れ，次に B から1個の玉を取り出して A に入れる。これを1回の操作とする。はじめに A に赤玉2個，B に白玉2個を入れて，上の操作を n 回繰り返したのち A に赤玉1個，白玉1個入っている確率を求めよ。

問題7． A，B，C のいずれかの状態をとる粒子があり，その状態は次のように変化していく。

- 状態 A であるとき，1秒後に状態 A である確率は $\frac{1}{3}$ であり，状態 B である確率は $\frac{2}{3}$ である。
- 状態 B であるとき，1秒後に状態 B である確率は $\frac{1}{3}$ であり，状態 C である確率は $\frac{2}{3}$ である。
- 状態 C になったときは，その後は変化なく C の状態が続く。粒子は最初状態 A であるとし，n 秒後に状態 A，状態 B，状態 C である確率をそれぞれ P_n，Q_n，R_n とするとき，R_n を求めよ。

問題８． 数直線上の点 Q は，はじめ $x=2$ にあり，さいころを投げるたびに次のルールに従って移動する。 Q が $x=a$ にあるとき，

・a が0か3であれば，出た目に関係なく $x=a$ にとどまる。

・a が1であれば，出た目が１のとき，$x=2$ へ，出た目が偶数のときは，$x=0$ へ，出た目が3か5のときは $x=2$ にとどまる。

・a が2であれば，出た目が1のとき，$x=1$ へ，出た目が偶数のときは，$x=3$ へ，出た目が3か5のときは $x=2$ にとどまる。

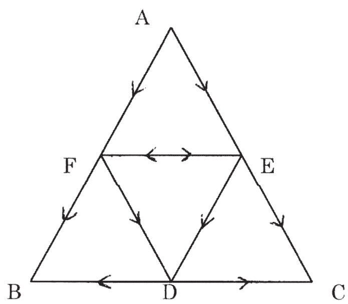
このとき，さいころを n 回投げたとき，Q が，$x=1,\ 2,\ 3$ にある確率をそれぞれ $P_1(n)$，$P_2(n)$，$P_3(n)$ とするとき，$P_3(n)$ を求めよ。

問題９． 最初に，白色，黒色それぞれ2枚ずつ，合計4枚のカードを持っている。次の操作を1回とする。

操作：4枚のうち，1枚を等確率で選び出し，白色ならば別の黒色に，黒色ならば別の白色のカードにとりかえる。カードは，たくさん持っているとする。

この操作を n 回繰り返した後に初めて，4枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

問題10． 図のような $A\sim F$ の６つの交差点からなる経路において，A から出発して何回かの移動で B または D に到達したら終了する。1回の移動とは，図の → の方向に1回だけ，記入した確率で移動するとする。このとき，n 回の移動で B に到達する確率を求めよ。



問題11． 数直線上の点 Q は，はじめ原点 $x=0$ にあり，さいころを投げるたびに次のルールに従って移動する。Q が $x=a$ にあるとき，

・出た目が1ならば $x=a$ にとどまる。

・出た目2，3ならば，$x=a+1$ へ

・出た目4，5，6ならば，$x=0$ へ戻る（$a=0$ ならば動かない）。

このとき，さいころを n 回投げたとき，Q が，$x=0$，1にある確率を求めよ。

問題12． 袋0，袋1，袋2，……，というように番号のついた袋が無限個ある。その中のどれかの1つの袋に1個の玉が入っている。次のような操作で，袋の中に入っている玉を移動させる。

・袋 $j\ (j\neq 0)$ に玉が入っているとき，確率 $\frac{1}{6}$ で袋 $j+1$ に，確率 $\frac{1}{2}$ で袋 j に，確率 $\frac{1}{3}$ で袋 $j-1$ に，移動させる。

・袋0に玉が入っているとき，確率 $\frac{1}{6}$ で袋1に，確率 $\frac{5}{6}$ で袋0に，移動させる。

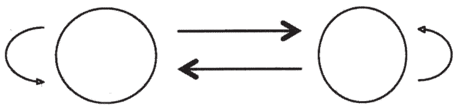
この操作を n 回行ったあとで袋 k に玉が入っている確率を $P_k(n)$ とする。$k\ (k\neq 0)$ のとき，$P_k(n+1)$ を $P_{k-1}(n)$，$P_k(n)$，$P_{k+1}(n)$ を用いて表せ。

これらは，次のような推移図に対応している。

（ｉ）循環する

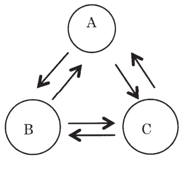
a）２種類の状態で推移し，互いに閉じている。

問１

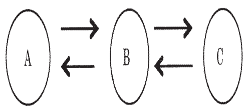


b）３種類の状態で推移し，互いに閉じている。

問２

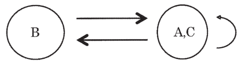


問３

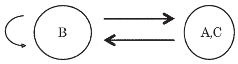


注）これらは，２つの場合に考えられる場合がある。

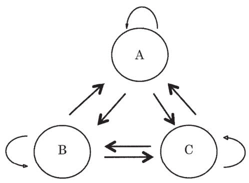
問２



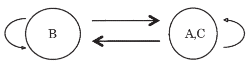
問３



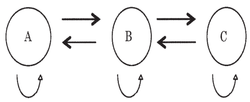
問５



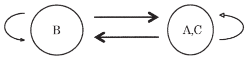
問５



問６

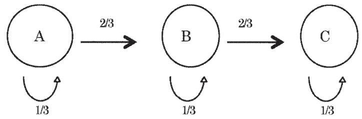


問６

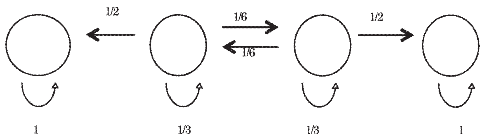


（ⅱ）終了する

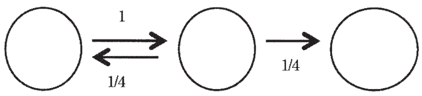
c）問７



d）問８

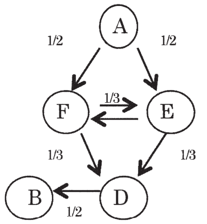


e）問９

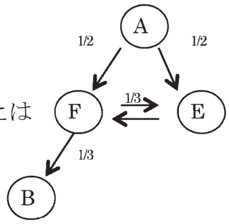


（ⅲ）無限に続く

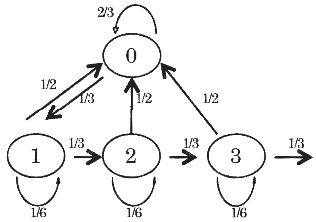
f）問10



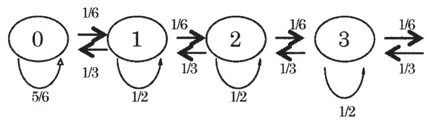
または



g）問11



h）問12



各問いの解答

問５．$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{4}(1-p_n)$

問６．$q_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+\frac{2}{3}(1-q_n)=\frac{2}{3}$

問７．$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n$，$q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n$

$r_{n+1}=\frac{2}{3}q_n+r_n$

問８．$p_1(n+1)=\frac{1}{3}p_1(n)+\frac{1}{6}p_2(n)$

$p_2(n+1)=\frac{1}{6}p_1(n)+\frac{1}{3}p_2(n)$ から $p_2(n)$ が求められ，$p_3(n+1)=\frac{1}{2}p_2(n)+p_3(n)$ から $p_3(n)$ が求められる。

問９．n が偶数のとき，$\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$，

n が奇数のとき，0

問10．

$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-3}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

問11．$x_{n+1}=\frac{2}{3}x_n+\frac{1}{3}(1-x_n)$ から，

$x_n=\frac{3}{5}+\frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

$y_{n+1}=\frac{1}{3}x_n+\frac{1}{6}x_n$ から，

$y_n=\frac{6}{25}+\frac{20n-6}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$

問12．$k\neq 0$ のとき，

$p_k(n+1)=\frac{1}{6}p_{k-1}(n)+\frac{1}{2}p_k(n)+\frac{1}{3}p_{k+1}(n)$

$k=0$ のとき，$p_0(n+1)=\frac{5}{6}p_0(n)+\frac{1}{3}p_1(n)$

7．統合的・発展的に考えること

統合的に考えることの意義は，物事の本質を捉えて共通性を認識する力を養うことにあると考える。これまで異なるものと考えられていたものが，高次の立場から見ることやひとまとめにすることで，より見通す力がつき，より深い考察や理解につながると考える。

最初の例は，定義は与えられたものではないことを認識させたい。例外を含めた形で統合してくことで，定義を自ら作り出せること，作りだす必然があることを理解させたい。さらに今後さまざまな定義が与えられた際の新たな視点としてほしい。

二つ目の例は，統合・発展させながら，共通な性質や違いを見いだし分類することで，より思考が整理されていく過程を学ばせたい。さらに，自ら獲得したことを使い，統合的・発展的に考えることは，既習事項の内容が体系的理解に結びつき，より多くの見方・考え方は，探求するこころの力になるであろう。

8．まとめ

生徒が数学をどのように学んだか，数学をどのようにして身に付けていくかの過程を重要視する教材開発が求められている。すなわち，生徒がどのように理解を深めていくかの過程の中に，数学的な見方や考え方がどのように関わり，とりわけ統合的・発展的な方法をどのようにして取り入れるかの研究が一層求められている。

統合的・発展的な思考を養うためには，様々な場面で統合的・発展的な考え方を働かせることであり，統合的・発展的な考え方のよさを体感できる場面を増やすことにある。今後もそのような教材の作成に努めていきたい。

［参考文献］

文部科学省：中学校学習指導要領解説　数学編　2017

文部科学省：高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編　2018

中島健三：「復刻版　算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察」東洋館出版社　2015

片桐重男：「数学的な考え方の具体化」明治図書　2017

高等学校数学科用教科書　数学B　数研出版