研究論文

ファクターモデル導入時の主成分分析に基づくシステマティック・ファクター数の決定

菅 野 正 泰

要旨

信用ポートフォリオ・リスクを評価する際，一般に，各債務者の資産収益率を複数の市場変動要因（システマティック・リスクファクター）と1つの債務者固有の変動要因の線型和でモデル化するが，ファクター間の依存構造を所与としたとき，ファクター数とリスク量の関係を調べることは，リスク管理上重要な課題である．本稿では，主成分分析に基づくファクター数決定モデルにより，独立なファクターの数とリスク量との関係を調べる．また，比較として，ファクター間の相関を考慮したモデルを用いて，依存構造の違いがリスク量に与える影響を調べる．

キーワード：信用ポートフォリオ・リスク評価，システマティック・リスクファクター，主成分分析

1 はじめに

信用ポートフォリオ・リスク評価では，一般に各債務者の資産収益率をファクターモデルで構築し，N 個のシステマティック・リスクファクターと1個の固有リスクファクターの線型和で表現する．システマティック・リスクファクターとして，マクロ経済指標，業種，地域などのセクター・インデックス等を導入する．

システマティック・リスクファクターに依存性 (dependency) を導入する方法は2通りあり，1つの方法は，バーゼル II の第1の柱の理論的基礎をなす CreditRisk+ モデル（Wilde (1997) 参照.）同様に，各債務者共通で互いに独立なシステマティック・リスクファクターを導入する方法である．もう1つの方法は，CreditMetrics$^{\text{TM}}$ モデル（Gupton 他 (1997) 参照.）や金融機関の内部リスク管理モデルに見られるように，システマティック・リスクファクター間に相関を導入する方法である．

何れの方法でモデル化する場合であっても，ファクター数に応じて捕捉されるリスク量の差異を分析し，リスク量を保守的に推定することは，リスク管理上，特に金融機関の健全性確保の観点から重要である．例えば，バーゼル II の第1の柱の ASRF（漸近的単一リスクファクター）モデルは1ファクターモデルであるが，ファクター数と算定されるリスク量との関係について，これまで定量的検証が十分であったとは言い難い．本稿では，主成分分析に基づくファクターモデルによって，ファクター数に応じたリスク量の差異を分析し，1ファクター・モデルがリスク量の保守的な推定モデルであるかどうか検証する．併せて，システマティック・リスクファクター間の相関を考慮した1セクター1ファクターモデルによって，ファクターウェイトに対するリスク量の変化を検

証する．

2　主成分分析モデル

2.1　モデル・アプローチ

セクター数を J とし，セクター $j \in \{1,\ldots,J\}$ に属する債務者の平均資産収益率を X_j とし，X_j は平均 0，分散 σ_j^2 の正規分布に従う確率変数と仮定する．X_j は，$N(\leq J)$ 個の互いに独立な平均 0，分散 λ_j の正規分布に従うシステマティック・リスクファクター S_k $(k=1,\ldots,N)$ に依存すると仮定する．このとき，X_j は次式のように表すことができる．

$$X_j = \sum_{k=1}^{N} w_{j,k} S_k + w_{j,0}\xi_j \tag{2.1}$$

ここで，$w_{j,k}$ は，セクター j に関するシステマティック・リスクファクター S_k $(k=1,\ldots,N)$ のウェイトである．X_i と X_j の平均資産相関係数を $\rho_{i,j}$ $(i \neq j)$，共分散を $\sigma_{i,j}$ とすると，$\sigma_{i,j} = \rho_{i,j}\sigma_i\sigma_j$ と表され，分散及び共分散に関する次の制約条件を満たす．

$$\sigma_{j,j} = \sum_{k=1}^{N} w_{j,k}^2 \lambda_k + w_{j,0}^2 \tag{2.2}$$

$$\sigma_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} w_{i,k} w_{j,k} \lambda_k \tag{2.3}$$

また，X はサイズが $J \times J$ の以下の分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を持つ．

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,J-1} & \sigma_{1,J} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdots & \sigma_{2,J-1} & \sigma_{2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{J-1,1} & \sigma_{J-1,2} & \cdots & \sigma_{J-1,J-1} & \sigma_{J-1,J} \\ \sigma_{J,1} & \sigma_{J,2} & \cdots & \sigma_{J,J-1} & \sigma_{J,J} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

また，ξ_j は，セクター j に属する債務者固有のリスク・ファクターで，標準正規分布に従い，システマティック・リスクファクター S_k $(k=1,\ldots,N)$ と独立であると仮定する．

そこで，分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ を所与として主成分分析を行うと，対角成分が固有値の行列 $\boldsymbol{D}$ と，行列 $\boldsymbol{D}$ の j 番目の固有値に j 番目の列ベクトルが対応したフルランクの行列 $\boldsymbol{E}$ が，以下のように得られる．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & \lambda_{J-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_J \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{E} &= \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,N} & \cdots & w_{1,J} \\ & & \cdots & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ w_{J-1,1} & w_{J-1,2} & \cdots & w_{J-1,N} & \cdots & w_{J-1,J} \\ w_{J,1} & w_{J,2} & \cdots & w_{J,N} & \cdots & w_{J,J} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.5}$$

行列 $\boldsymbol{E}$ の各列ベクトルは，システマティック・リスクファクター S のウェイトベクトルを表し，主成分分析の性格から，各ベクトルは直交分解され，それぞれの長さは 1 である．

次に，システマティック・リスクのファクター数を選択する．主成分分析では，一般には，ある一定の累積寄与率（例えば，80% 以上）を基準として，ファクター数が選択される．そこで，ファクター数を N $(\leq J)$ とすると，固有値行列 $\boldsymbol{D}$ は，後ろから $(J-N)$ 列と下から $(J-N)$ 行を削除した行列として，また，$J \times N$ の固有ベクトルに関する行列 E_N は，行列 E から後ろの $(J-N)$ 列を削除した部分行列として，以下のように表される．

$$\boldsymbol{D}_N = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & \lambda_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_N \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{E}_N = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,N} \\ & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{J-1,1} & w_{J-1,2} & \cdots & w_{J-1,N} \\ w_{J,1} & w_{J,2} & \cdots & w_{J,N} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

この $\boldsymbol{E}_N$ の最後列に，制約条件の (2.2) 式及び (2.3) 式を満たす固有リスクのウェイトベクトル $\boldsymbol{w}_0 = (w_{1,0}, \ldots, w_{J,0})'$ を加えたものを $\boldsymbol{E}_N^*$ とすると，$\boldsymbol{E}_N^* = (\boldsymbol{E}_N \ \boldsymbol{w}_0)$ となり，$\boldsymbol{D}_N$ の対角成分に 0 を 1 つ付加してできる固有値行列 $\boldsymbol{D}_N^*$ は，

$$\boldsymbol{D}_N^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & \lambda_N & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{E}_N^* = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,N} & w_{1,0} \\ & & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ w_{J-1,1} & w_{J-1,2} & \cdots & w_{J-1,N} & w_{J-1,0} \\ w_{J,1} & w_{J,2} & \cdots & w_{J,N} & w_{J,0} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

となる．ここで，固有リスクウェイトベクトル $\boldsymbol{w}_0 = (w_{1,0}, \ldots, w_{J,0})'$ はシステマティック・リスクファクターのウェイト・ベクトル $\boldsymbol{w}_k = (w_{1,k}, \ldots, w_{J,k})'$ $(k = 1, \ldots, N)$ と互いに直交する．

この操作により，ファクター数 $N \in \{1, 2, \ldots, I\}$ のセクター・ウェイト・ベクトルの組み合わせ，すなわち $\boldsymbol{E}_1^*, \ldots, \boldsymbol{E}_I^*$ が求まる．ここで，N の上限値 I は，累積寄与率 80% で打ち切った値を目安とする．また，債務者の平均資産相関係数行列 $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{i,j})_{1 \leq i,j \leq J}$ を単位行列とすると，セクター $j \in \{1, \ldots, J\}$ に対して，1 つだけ唯一のシステマティック・リスクファクターを割り当てることになる．この場合，セクター間の資産変動は独立という仮定のため，リスク量の過小推定に至る可能性が予想される．

2.2 主成分分析モデルによる数値分析

まず，第 2.1 節で構築した主成分分析モデルを使用して数値分析を行う．数値分析の手順を以下の通りとする．

1. (2.4) 式の分散共分散行列を相関小のケースと相関大のケースの 2 通り作成する．
2. 主成分分析を行い，(2.7) 式の行列 $\boldsymbol{E}_1^*, \ldots, \boldsymbol{E}_I^*$ を求める．
3. 仮想ポートフォリオを作成する．後は，仮想ポートフォリオを設定して，(2.1) に従い，システマティック・リスクファクター数が $1, \ldots, I$ の場合のファクター数に対するリスク量（VaR 値）の推定量の特徴を調べる．VaR 値の計算は，モンテカルロ・シミュレーションにより，シミュレーション回数：30 万回，信頼水準：0.99 とする．
4. 併せて相関係数行列を単位行列とし，1 セクター 1 ファクターの場合のリスク量を上記の手続に沿って求める．

そこで，仮想ポートフォリオを以下のように設定する．セクター数を6とし，ファクター数を比較するため，セクター毎のEAD及びLGDが，それぞれ全て100%の均一なポートフォリオを考える．[*1]

表1: 仮想ポートフォリオ

セクター j	A	B	C	D	E	F
EAD_j	100	100	100	100	100	100
$LGD_j(\%)$	100	100	100	100	100	100

■**資産相関が小さいケース**　最初に，債務者のペア毎の相関係数が全て0.3以下のある値をとる例について調べるため，以下の相関係数行列 $\boldsymbol{A}^s$ と標準偏差ベクトル $\boldsymbol{B}^s$ を作成する．このとき，主成分分析により，表2の寄与率，及びリスクウェイトの行列 $\boldsymbol{E}_N^S$ を得る．ただし，寄与率[*2]は，(2.6)式の行列 $\boldsymbol{D}_N$ の対角成分である．

$$\boldsymbol{A}^s = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^s = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

表2: 寄与率

ファクター数 N	1	2	3	4	5	6
寄与率	0.43	0.23	0.17	0.10	0.04	0.02
累積寄与率	0.43	0.66	0.84	0.93	0.98	1.00

$$\boldsymbol{E}_N^s = \begin{bmatrix} -0.081 & 0.001 & -0.029 & 0.021 & -0.711 & -0.698 \\ -0.132 & -0.067 & -0.719 & 0.667 & 0.114 & -0.051 \\ -0.693 & -0.658 & 0.276 & 0.090 & 0.041 & 0.030 \\ -0.065 & 0.033 & -0.083 & 0.072 & -0.688 & 0.714 \\ -0.175 & -0.179 & -0.631 & -0.735 & 0.016 & 0.008 \\ -0.679 & 0.728 & 0.032 & -0.041 & 0.083 & -0.008 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

表2で累積寄与率が80%を越えるのは $N=3$ の場合で，このとき，ファクター数3のモデルでデータの分布の84%を説明できると考えられる．また，ファクター数の増加とともに，VaRの絶対値は単調減少しており，ファクター数が少ないほど保守的な推定で，1ファクターの場合が最も保守的な推定であるということができる．この点は，バーゼルIIの第一の柱で使用されるASRF

[*1] ファクター数の比較を行うため，他のパラメーターを簡単な設定にするものであるが，これにより一般化を損なうものではない．

[*2] 因子負荷量 (factor loading) の二乗和，すなわち因子寄与 (factor contribution) をファクター数で割った値を言う．

表 3: 資産相関が小さいケースでの信用 VaR

N	1	2	3	4	5	1 / 1sector
VaR	264	211	191	169	165	124
乖離率	0%	-20.1%	-27.7%	-36.2%	-37.7%	-53.2%

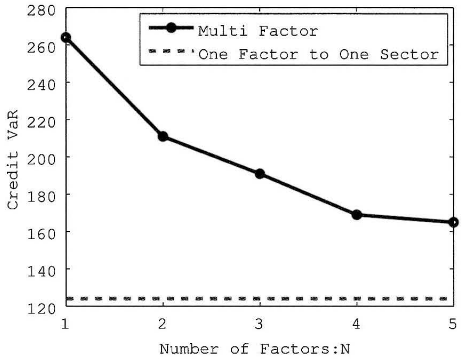

図 1: システマティック・ファクター数に対する信用 VaR の変化（資産相関が小さいケース）

モデルが 1 ファクターであり，信用リスク量を保守的に推定していることを理論的に裏付けるものである．

また，1 セクターに 1 ファクターを割り当てるモデルは，累積寄与率が 80% を超える 3 ファクターの場合はもとより，ファクター数がどの値のマルチ・ファクターモデルに対しても過小推定している（図 1 参照.）．

■資産相関が大きいケース　次に，各ペアの債務者の相関係数が全て 0.7 以上のある値をとる例について調べる．以下の相関係数行列 $\boldsymbol{A}^b$ と標準偏差ベクトル $\boldsymbol{A}^b$ を与える．

$$\boldsymbol{A}^b = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^b = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

表 4: 寄与率

ファクター数 N	1	2	3	4	5	6
寄与率	0.81	0.09	0.06	0.03	0.01	0.01
累積寄与率	0.81	0.90	0.96	0.99	0.99	1.00

$$
\boldsymbol{E}_N^b = \begin{bmatrix} -0.351 & -0.178 & -0.445 & -0.598 & -0.040 & -0.536 \\ -0.396 & 0.602 & -0.076 & 0.350 & -0.549 & -0.228 \\ -0.469 & -0.340 & 0.505 & -0.292 & -0.441 & 0.361 \\ -0.349 & 0.015 & -0.642 & 0.071 & 0.125 & 0.668 \\ -0.400 & 0.508 & 0.355 & -0.248 & 0.627 & 0.029 \\ -0.467 & -0.481 & 0.068 & 0.607 & 0.306 & -0.290 \end{bmatrix} \tag{2.11}
$$

表 5: 資産相関が大きいケースでの信用 VaR

N	1	2	3	4	5	1 / 1sector
VaR	520	401	295	236	209	458
乖離率	0%	-23.0%	-43.3%	-54.7%	-59.8%	-11.9%

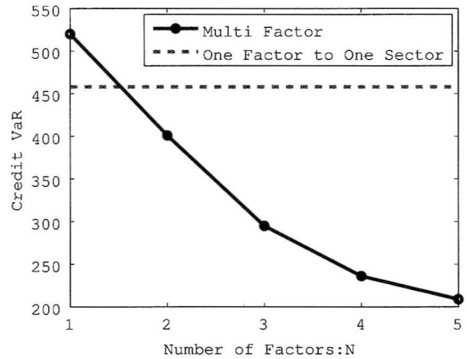

図 2: システマティック・ファクター数に対する信用 VaR の変化（資産相関が大きいケース）

表 4 で累積寄与率が 80% を越えるのは $N=1$ の場合で，ファクター数 1 のモデルでデータの分布の約 8 割を，ファクター数 2 のモデルで約 9 割を説明できると考えられる．相関が大きい場合でも，VaR の絶対値はファクター数とともに単調減少する傾向は変わらず，1 ファクターの場合が最も保守的な推定であるということができる．また，1 セクターに 1 ファクターを割り当てるモデルは，マルチ・ファクターモデルで 1 ファクターとした場合に比べて過小推定となる一方，ファクター数が 2 以上に比べて大きなリスク量を算定する（図 2 参照.）.

3　システマティック・リスクファクター相関モデル

本節では，第 2 節の主成分分析モデルとの比較のために，主成分分析モデルとは異なり，(2.1) 式のシステマティック・リスクファクター S 間に相関のあるモデルを考える．セクター $j \in \{1, \ldots, J\}$ に対応したシステマティック・ファクターが 1 つ存在し，これを S_j $(j=1,\ldots,J)$ とする．このとき，(2.1) 式に対応する式は，

$$
X_j = w_j S_j + \sqrt{1-w_j^2}\xi_j \tag{3.1}
$$

となる．ここで，システマティック・リスクファクター S_j $(j=1,\ldots,J)$ は標準正規分布に従う確率変数で，S_i と S_j の間の相関係数を $c_{i,j}$ とする．また，ξ_j は，セクター j に属する債務者固

有のリスク・ファクターで，標準正規分布に従い，S_j とは独立であると仮定する．w_j はセクター j に関するシステマティック・リスクファクター S_j $(j = 1, \ldots, J)$ のウェイトである．このとき，債務者 i と j の資産相関係数 $corr_{i,j}$ は以下のようになる．

$$corr_{i,j} = w_i w_j c_{i,j} \tag{3.2}$$

このモデルは，CreditMetrics$^{\mathrm{TM}}$ モデルと同様の依存構造を取り入れており，金融機関の内部リスク管理モデルでも多く採用されているアプローチである．以下では，このモデル・アプローチに従い，モンテカルロ・シミュレーションにより，セクターのシステマティック・リスクファクター間の相関が小さい例と大きい例について，それぞれ計算する．

■セクター相関が小さいケース　最初に，セクターを表すシステマティック・リスクファクターのペア毎の相関係数 $c_{i,j}$ が全て 0.3 以下のある値をとる例について調べるため，相関係数行列 $\boldsymbol{A}^s = (c_{i,j})_{1 \le i,j \le 6}$ と標準偏差ベクトル $\boldsymbol{B}^s$ を作成する．なお，主成分分析モデルの資産相関が小さいケースと同様に，以下の相関係数行列と標準偏差ベクトルを設定する．

$$\boldsymbol{A}^s = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^s = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

ウェイト w は，簡単のため，債務者に関係なく $w_i = w_j$ とし，0.01, 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1.0 の値を設定する．これより，資産相関行列 $\boldsymbol{H} = (corr_{i,j})_{1 \le i,j \le 6}$ が求まるので，これをコレスキー分解[*3]することにより，

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{G}' \tag{3.3}$$

を満たす $J \times J$ の下三角行列 G が得られる．モンテカルロ・シミュレーションを行う場合，システマティック・リスクファクターとして，互いに独立な標準正規乱数列ベクトル $\boldsymbol{r} = (r_{1,m}, \ldots, r_{T,m})'$ $(m = 1, \ldots, M,\ M$: シミュレーション回数) を掛け，時系列の相関構造を反映した乱数列ベクトル $\boldsymbol{R} = (R_{1,m}, \ldots, R_{T,m})'$ $(m = 1, \ldots, M)$ を，

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{r} \tag{3.4}$$

として生成する．シミュレーション回数 30 万回のモンテカルロ・シミュレーションの結果，表 6 の信用リスク量が得られた．

表 6: 信用リスク量

w	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
VaR	124	124	125	127	131	134	139	144	149	156	162

図 3 は表 6 の VaR 値をプロットしたものである．併せて，1 セクター 1 ファクターの主成分分析モデルの VaR 値を点線で示した．

[*3] 例えば，木島 (1999) を参照されたい．

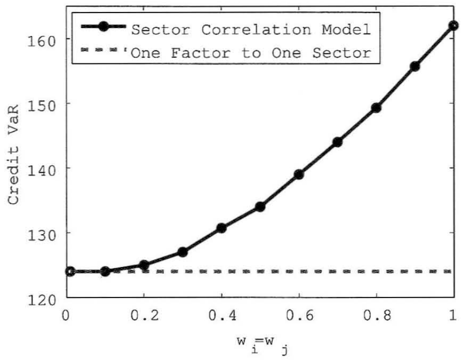

図 3: セクター相関が小さい場合のセクター・ウェイトに対する信用 VaR の変化

図 3 を見るとわかるように，主成分分析モデルで 1 セクター 1 ファクターのモデルの VaR は，セクター相関モデルでシステマティック・リスクファクターのウェイトが 0 のモデルの VaR と一致する．すなわち，主成分分析モデルでは，システマティック・リスクファクター S は互いに独立であるため，1 セクター 1 ファクターの場合，平均資産収益率 X は互いに独立な標準正規分布に従う確率変数となり，一方，セクター相関モデルでシステマティック・リスクへのウェイトが 0 の場合，同様に資産収益率は互いに独立な標準正規分布に従う確率変数となり一致する．

また，$w=1$ のとき，相関係数行列（ペア毎の相関係数）が最も大きくなり，このとき主成分分析モデルと同じ資産相関係数行列になる．ここで，表 3 を見ると，主成分分析モデルの 5 ファクターモデルの VaR は 165 で，表 6 の $w=1$ の VaR は 162 となっており，1 ファクターのセクター相関モデルは，過小推定の可能性がある．

■セクター相関が大きいケース　次に，セクターを表すシステマティック・リスクファクターのペア毎の相関係数 c_{ij} が全て 0.7 以下のある値をとる例について調べるため，相関係数行列 $\boldsymbol{A}^b=(c_{i,j})_{1\le i,j\le 6}$ と標準偏差ベクトル $\boldsymbol{B}^b$ を作成する．なお，主成分分析モデルの資産相関が小さいケースと同様に，以下の相関係数行列と標準偏差ベクトルを設定する．

$$\boldsymbol{A}^b=\begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 1 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 1 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}^b=\begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

ウェイト w は，セクター相関が小さい場合と同様に $w_i=w_j$ とし，0.1, 0.2, ..., 0.9, 1.0 の値を設定する．モンテカルロ・シミュレーションの結果，表 7 の信用リスク量が得られた．

表 7: 信用リスク量

w	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
VaR	458	466	478	532	580	641	708	780	851	924	1,005

図 4 は表 7 の VaR 値をプロットしたものである．併せて，1 ファクターの主成分分析モデルの VaR 値を点線で示した．図 4 を見るとわかるように，セクター相関が小さい場合と同様に，主成分

分析モデルで 1 セクター 1 ファクターのモデルの VaR は，セクター相関モデルでシステマティック・リスクファクターのウェイトが 0 のモデルの VaR と一致する．

また，$w=1$ のとき，相関係数行列（債務者ペア毎の相関係数）が最も大きくなり，このとき主成分分析モデルと同じ資産相関係数行列になるが，ここで，表 5 を見ると，主成分分析モデルの VaR は 1 ファクターで 520，5 ファクターで 209 であり，一方，表 7 で $w=1$ の VaR は 1,005 となっており，1 ファクターのセクター相関モデルの VaR は保守的な値となっている．

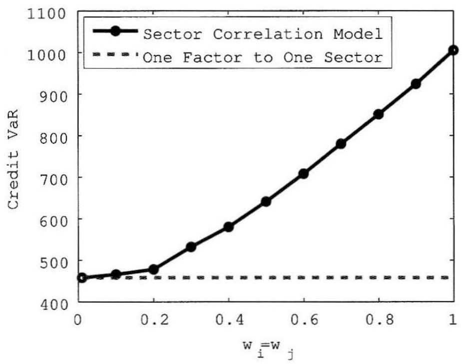

図 4: セクター相関が大きい場合のセクター・ウェイトに対する信用 VaR の変化

4 おわりに

ファクター数を決定する場合，分散共分散行列（あるいは相関係数行列とボラティリティ）という同じ情報を所与としても，ファクター数が少ないほど，選択した少ないファクターに対してシステマティック・リスクファクターのウェイトが集中し依存性が高まることを，本稿では主成分分析ベースのモデルを使い示した．

1 ファクター・モデルは，マルチファクター・モデルに比べてモデル化が容易であるが，それゆえアドホックに金融機関の内部リスク管理モデルに採用されているケースが往々にして見られる．1 ファクター・モデルは，リスク量を保守的に推定するという観点からは良い選択であるものの，金融機関が独自の工夫で自己資本を有効活用するために内部リスク管理を行うという観点では，自己のリスク・プロファイルとリスク耐力に応じて，影響を受けるファクター（数）を決定するという姿勢が必要であり，本稿で行ったアプローチが参考に資すると考えられる．

参考文献

[1] 菅野正泰 (2006),「主成分分析を利用したファクターモデルの決定」, ディスカッション・ペーパー， 新日本監査法人

[2] 木島正明 (1999),『ファイナンス工学入門 第 III 部』, 日科技連

[3] BCBS (2004), "International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework."

[4] Emmer, S. and D. Tasche (2003), "Calculating Credit Risk Capital Charges with the One-factor Model," *Working Paper, Deutsche Bundesbank.*

[5] Gordy, M. (1998), "A Comparative Anatomy of Credit Risk Models," *Journal of Banking and Finance,* **24(1-2)**, pp.119-149.

[6] Gordy, M. (2003), "A Risk-factor Model Foundation for Ratings-based Bank Capital Rules," *Journal of Financial Intermediation,* **12** (3), pp.199-232.

[7] Gouriéroux, C., J. P. Laurent and O. Scaillet (2000), "Sensitivity Analysis of Values at Risk," *Journal of Empirical Finance,* **7**, pp.225-245.

[8] Gundlach, M. and F. Lehrbass (2006), *Creditrisk+ in the Banking Industry,* Springer.

[9] Gupton, G., C. Finger and M. Bhatia (1997), "CreditMetrics-Technical Ducument," *J.P. Morgan & Co. Incorporated.*

[10] Kurth, A. and D. Tasche (2003), "Contributions to Credit Risk," *Risk Magazine,* **16** (3), pp.84-88.

[11] Martin, R. and T. Wilde (2002), "Unsystematic Credit Risk," *Risk Magazine,* **15** (11), pp.123-128.

[12] Morinaga, S. and Y. Shiina (2005), "Underestimation of Sector Concentration Risk by Mis-assignment of Borrowers," *Working Paper, Financial Services Agency, Japan.*

[13] Wilde, T. (1997),"CreditRisk+: A Credit Risk Management Framework," *Credit Suisse First Boston.*