高校数学教育の負の影響

根上　生也 ／ 渡部　禎郎

1．はじめに

本稿の第一著者は，神奈川大学工学部の教員免許取得を希望する学生を対象に「教科教育法Ⅰ（数学）」という教職科目を担当している。その授業では，学習指導要領の変遷や今日的な数学教育の在り方などを解説している。また，[1]を教科書として，これまでの高校数学ではあまり経験することのない離散数学的な問題を取り上げ，数学的な考え方や態度の育成の重要性を説き，新しい時代の教師として持つべき数学観，数学教育観を提言している。

その提言に説得力を与えるために，授業の最後には，その日の講義内容を踏まえた問題を出題し，翌週の授業の開始時に，配られた用紙に解答を書いてもらうということをしている。実は，著者の予想どおりに，当初はまともに解答できる学生は少なく，高校生のときに受けた数学の指導がどのように自分たちの数学的能力を限定的なものにしているのかを実感してもらうことになる。もちろん，自分の無力さを自覚することだけが授業の目的ではない。その自覚を踏まえて，数学観，数学教育観を再構成していくのが，この授業の目的である。

受講者は例年，20名から30名の間なので，個々の授業で集めた「解答」だけでは統計的に説得力のある結論は引き出せない。幸い本年度までの5年間分の資料が保存してあったので，それを集計することで，「問題」に込めた著者の意図どおりの現象が起こっていると主張することに意味があると考えた。

その主張とは次のようなものである。高校で数学を学び理工系学部に進学した者たちの多くに，次のような傾向が見られる。

- 習ったものでしか問題を解こうとしない。
- 数学的な準備のないものには手がつかない。
- 意味を理解せずに，手順だけを覚える。
- 都合のいい構造を仮定する。
- 言葉で説明しようとしない。
- 原理を見抜いて一般化することができない。
- 問われていることを理解しようとしない。

もちろん，調査対象は，神奈川大学工学部の「教科教育法Ⅰ（数学）」の受講者に限られているので，上の主張が日本全国の大学生に対して成立すると断言することはできない。また，この調査結果だけから，このような状況にあるのは，表題にあるように，高校における数学の指導の仕方が大きく影響していると結論することはできない。しかし，上に挙げたことは，大学で数学を指導している教員ならば痛感していることではないかと思う。

2．集計について

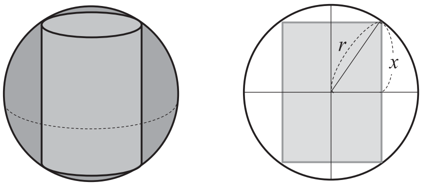
今回，集計した問題は9問あり，それぞれに出題意図がある。各問題に対して“正解者”や“自分で数学的準備を行えない学生”などの集計項目をそれぞれ定義する。その項目に該当す

る学生の総数を集計し，割合（小数点第一位を四捨五入）を求める。恣意的な集計にならないように，項目に該当している学生か否かの判断は複数人の意見をもらい，最終的に奇数人数による多数決で決めた。

3．各問題の出題意図と集計結果

以下に「教科教育法 I（数学)」で受講者に課した各問題とその出題意図を示す。そして各問題に対して授業の流れや問題の内容，集計項目，集計結果，考察を記述する。

問題 1． 球面に内接する円柱の体積は，いつ最大になるか？



$$f(x)=2\pi(r^2-x^2)x$$

図 1

出題意図

数学的な準備のない問題を出題されると，数学的に考えることができないことを自覚してもらう。

授業の流れ

授業では特に意図を告げずに，1 週間考えてくるように告げる。左の図だけ挿絵として示しておく。

問題の内容

球面の半径を r，円柱の高さの半分を x とおくと，円柱の体積は右の図に添えられているような 3 次関数になる。微分し，増減表を書けば，その最大値を求めることができる。理系の大学を目指す受験生ならば，容易に解答できるレベルの問題である。

集計項目と集計結果

集計するにあたって，以下の項目に該当する学生の集計を行った。

(1) 正解者

円柱の体積が最大になるときの円柱の高さや球の半径などの変数の関係を見抜き，言葉で正しい答えを論じている。

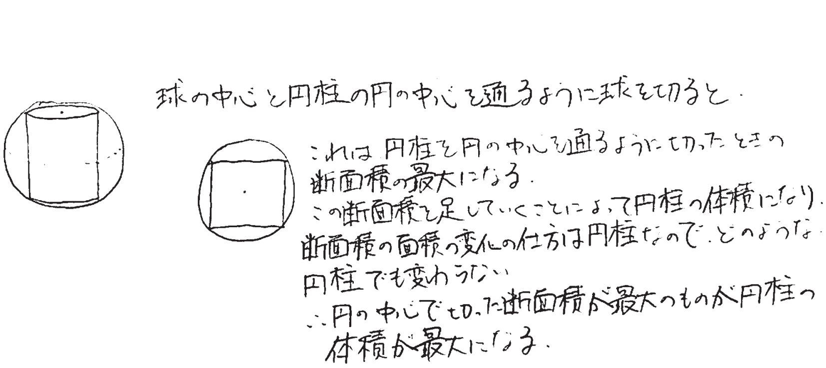
(2) 自分で数学的準備を行えない学生

球面の半径，円柱の高さ，円柱の底面の半径など，適切に変数をおくことができていない。

(3) 都合のいい構造を仮定する学生

答案 1 のように円柱の断面図を考え，その断面積が最大であるときに円柱の体積が最大であると考えている。

答案 1



集計結果

	学生数	(1)	(2)	(3)
人数	119人	6人	56人	50人
割合(%)		5%	47%	42%

集計結果の考察

過半数の学生が自ら変数をおくことができず，正解者も5%とかなり低い結果となった。また，過半数近くの学生が変数をおくかどうかの有無に関わらず，円柱の断面図を描き，断面図の面積が最大であるときに体積が最大になると解答している。これは入試問題のように問題文中で数学的な準備が与えられていないと，これまでに学んだ数学の知識・技能が活用できず，きちんとした根拠のない仮定を平然と利用してしまう学生が多いことを示唆している。

問題2. おはじきはいくつ？

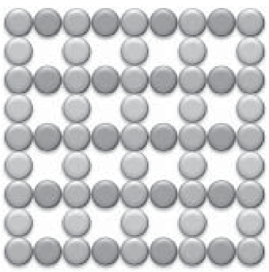
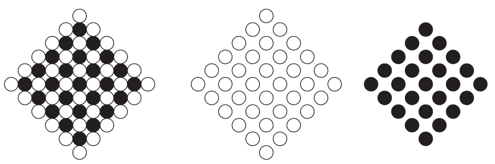


図2

出題意図

式を計算するだけで，言葉で説明しようとする態度がないことを自覚してもらう。

授業の流れ



$n^2+(n-1)^2$　　n^2　　$(n-1)^2$

図3

図3のように，おはじきを白と黒で色分けすると，それぞれの色のおはじきが正方形状に並んでいることがわかるので，それぞれの色のおはじきの個数を掛け算で求め，それを足せばよいと解説する。

問題の内容

問題2は3色で色分けされたおはじきの個数を求めよという小学生でも容易に解答できる問題である。授業で習ったとおりに色ごとに個数を求めて足すのもよいが，9×9に並んだおはじきから，4×4に並んだ穴の分を引くという発想に至ることが期待されている。また，生徒にそのまま見せてもよい解答を書くように指示をしておく。

集計項目と集計結果

集計するにあたって，以下の項目に該当する学生の集計を行った。

(1) 正解者

解き方を言葉でしっかり説明し，おはじきの個数を求めている。

(2) 言葉で説明しようとしない学生

解答を書くにあたって，式や単語だけを書き，言葉で説明していない。

これらの項目に該当しているかどうかの判断は以下のように決めた。

答案2

青のみで考えると　5×5＝25個
赤のみで考えると　5×4＝20個
緑のみで考えると　4×5＝20個
全てをたして　25＋20＋20＝65個

答案３

全 9×9 − 空 4×4 $=65$

赤 4×5 + 青 5×5 + 緑 4×5 $=65$

$9\times5+5\times4=65$

答案2は，どのように考えたのかを言葉で説明している良い例であると考える。しかし，答案3のように数式と単語のみを羅列しただけの答案は，その解き方を読み取ることはできるが，生徒にそのまま見せてもよい解答とはいえないであろう。よって答案3と類似した解答を書いた学生を(2)に分類した。

集計結果

	学生数	(1)	(2)
人数	58人	38人	16人
割合(%)		66%	28%

集計結果の考察

小学生でもわかる問題なので，単に答えだけを採点すれば大半の者が正解者になる。しかし，教師の立場で丁寧に解答を作成することの意味を理解していない学生が少なくない。もし「生徒にそのまま見せてもよい答案を書くように」という指示をしなければ，(2)に該当する学生数は増加するのではないか。また，不正解者が4人いたが，そのうち3人（1人は計算ミス）は以下の答案4のように，問題では問われていない一般解を求めており，具体的に解答する態度を失っている。

答案４

おはじきの一辺の個数をn個とすると、おはじきが空きなく並べられていたとすると、

$n\times n=n^2$ 個

そのうち空いている部分のおはじきの数は、

$\left\{(n-1)\div2\right\}^2=\frac{(n-1)^2}{4}$ 個

よって問題のおはじきの個数は、

$n^2-\frac{(n-1)^2}{4}$ 個

問題３　$A, B\subset X$，$A\cap B\neq\phi$ となる X の部分集合の組 (A, B) を数え上げよ。

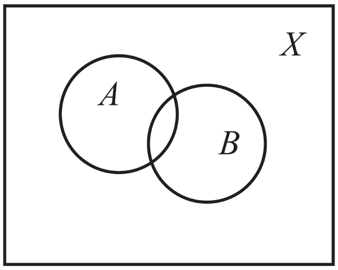


図４

出題意図

問題の意味を深く考えず，習った解法を安易に適用してしまうことを自覚してもらう。

授業の流れ

次の２つの問題の解法を順に解説した後に，問題３を出題する。

問題(1)　$A\subset X$ となる部分集合 A を数え上げよ。

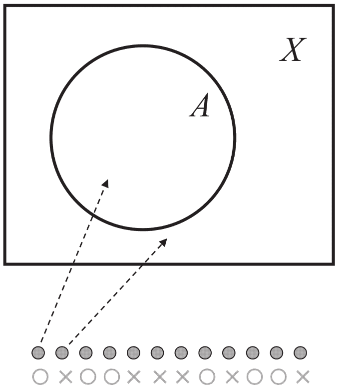


図５

全体集合Xのどの元も２つの排反な部分集合Aと $X\setminus A$ のいずれかに属すので，Xの n 個の元がどちらに属すのかを指定することと，部分集合Aを定めることは同じことである。これから，部分集合Aの個数は2^nになる。

問題(2)　$A, B\subset X$, $A\cap B=\phi$ となるXの部分集合の組(A, B) を数え上げよ。

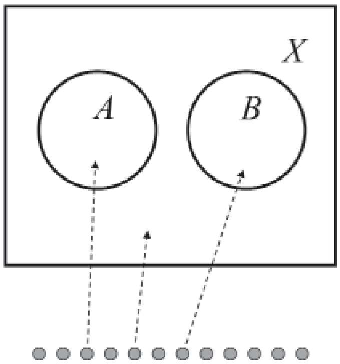


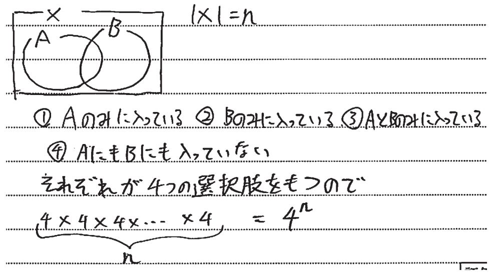
図６

今度は，全体集合Xの元が３つの排反な部分集合$A, B, X\setminus(A\cup B)$ のどこに属すかを考えればよいので，求める部分集合の組の個数は3^nである。

問題の内容

問題(1)，(2)では，ベン図の領域を数え，その値をn乗したものが答えになっている。それをそのまま問題３に適用すれば，4^n が得られる。しかし，これは $A\cap B=\phi$ の場合も数えてしまい，正解ではない。$A\cap B=\phi$ の場合の数は，問題(2)で求めているので，その値を引いた 4^n-3^n が正解である。問題の文中にある $A\cap B\neq\phi$ であることを意識しなければ解くことができない問題である。

答案５



集計項目と集計結果

集計するにあたって，以下の項目に該当する学生の集計を行った。

(1) 正解者

$A\cap B\neq\phi$ であることを意識し，正しく解答している。

(2) 習ったことでしか問題を解こうとしない学生

$A\cap B\neq\phi$ という条件を考えずに論理を展開し，解答をしている。

集計結果

	学生数	(1)	(2)
人数	121人	27人	54人
割合(%)		22%	45%

集計結果の考察

過半数近くの学生が $A \cap B \neq \phi$ という条件を意識せずに，授業で習った解法をそのまま適用しているおり，問われていることに対してしっかり向き合う態度を持っていないと考えられる。また，$A \cap B \neq \phi$という条件を意識している学生でも正答率が低く，一対一対応の考え方に基づいた数え上げに不慣れな学生が多い。

問題4. 鳩の巣原理から分かることを書きなさい。ただし，今日の授業で聞いたことは書かないこと。

出題意図

自分で理解したことに基づいて独自に考える態度がないことを自覚してもらう。

授業の流れ

「鳩の巣原理」とは，箱よりも箱に入れる物の方が多いと，ある箱には2個以上の物が入らざるをえないという考え方である。「トランプを5枚引けば，同じマークがある」のように，この原理からわかる身近な事柄や問題について解説した上で，この問題を出題する。その際に参考文献[3]に鳩の巣原理を利用してわかることがたくさん書かれていることを伝える。

問題の内容

鳩の巣原理を利用してわかる事柄を探すことは決して難しくない。自分で考えてもすぐに正解を見つけられるだろう。しかし，そうせず，ネットを検索したり，参考文献を調べたりと，正解を自分の外に求め，自分で考える態度を失っているかどうかが問われている。

集計項目と集計結果

集計するにあたって，以下の項目に該当する学生の集計を行った。

(1) 正解者

授業や紹介された本の内容以外の，身近な例などを記述している。

(2) 自分で考えようとしない学生

紹介された本や，授業で述べられたことをそのまま記述している。

集計結果

	学生数	(1)	(2)
人数	67人	50人	15人
割合(%)		75%	22%

集計結果の考察

予想どおりに，22%の学生が紹介した参考文献にある内容や授業で述べたことをそのまま記述しており，自分で問題を考えようとする態度を失っているように思われる。また，鳩の巣原理からわかることではなく，鳩の巣原理自体を書き，問われていることに対してしっかり向き合おうとしない学生もいる。

問題5. 円周状に1から10までの自然数をどのように並べても，連続する3つの数で，その合計が18以上になるものが存在することを示せ。また，18を19には置き換えられないことを示せ。

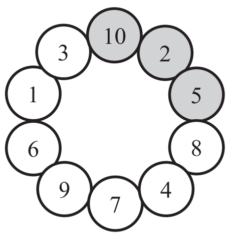


図7

出題意図

具体的な例を考えることで解答すべき問題に対しても，やみくもに何かを計算しようとしてしまう態度を自覚してもらう。

授業の流れ

まず，すべてが同じでなければ平均値より大きいものと小さいものが存在するという「平均の考え方」を解説し，問題5の前半の解法を説明する。その上で問題5を出題する。

問題の内容

1を除いた2から10までの数の並びを3つずつに3組に分割すると，それぞれの組の3数の和の平均値は（2＋⋯＋10)/3＝18である。これから3組の中にはその3数の和が18以上になるものが存在する。問題の前半は，この論理を正確に記述できるかどうかを問うている。一方，後半はどの連続3数においてもその和が18以下であるような例を示せばよいだけである。しかし，例を示すという態度を持たない学生が多いだろうと想定している。

集計項目と集計結果

集計するにあたって，以下の項目に該当する学生の集計を行った。

（1）正解者

前半と後半のいずれも言葉で証明できている。

（2）習ったことでしか問題を解こうとしない学生

後半に対して，反例を見つけるのではなく，平均の考え方を用いて証明を試みている。

集計結果

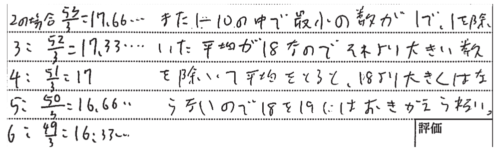
	学生数	(1)	(2)
人数	110	19	88
割合（%）		17%	80%

集計結果の考察

想定どおりに，80％の学生が反例を見つければ証明できるという発想に至っておらず，授業で習った解法を，数値を変えて適用しようとしている者が多い。そもそもその解法の意味を理解せず手順を覚えているだけのようにも思われる。その誤答は大きく分けて次の2パターンに分類することができた。

パターン1　他の数を抜いて考えると，平均は下がると解答している。

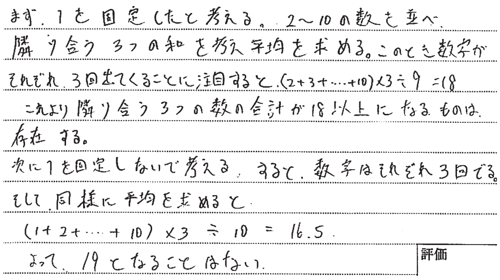
答案6


2の場合 52/3 = 17.66…　また1〜10の中で最小の数が1で、1を除
3: 52/3 = 17.33…　いた平均が18なのでそれより大きい数
4: 51/3 = 17　を除いて平均をとると、18より大きくはな
5: 50/3 = 16.66…　らないので18を19にはおきかえられない。
6: 49/3 = 16.33…
評価

1を抜いた平均を考えることは授業で解説されており，問題の前半は証明することはできている。しかし，答案6の学生は数字を抜いて平均を求める手順だけを覚えており，平均の考え方をあやふやにしか理解しておらず，問われていることを理解できていないと考えられる。

パターン2　10で割った平均を考える

答案7


まず、1を固定したと考える。2〜10の数を並べ、
隣り合う3つの和を考え平均を求める。このとき数字が
それぞれ3回出てくることに注目すると、(2+3+⋯+10)×3÷9 =18
これより隣り合う3つの数の合計が18以上になるものは、
存在する。
次に1を固定しないで考える。すると、数字はそれぞれ3回でる。
そして、同様に平均を求めると、
(1+2+⋯+10)×3 ÷10 = 16.5.
よって、19となることはない。
評価

授業では，（1＋⋯＋10）×3÷10＝16.5を考えることで和が17以上になる連続3数の存在を示す方法も解説している。パターン2はそれをまねた解答になっているが，やはり，その解法の意味をきちんと理解しておらず，手順をなぞっているだけである。

どちらのパターンも，「18を19に置き換えられないことを示す」という問いの理解が不十分であり，習った手順を適用すること以外に思いが至っていないと考えられる。

問題6. 公式を計算せずに，${}_{n+1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{r-1} + {}_n\mathrm{C}_r$ を示せ。

出題意図

なんでも闇雲に計算するのではなく，意味を考えて公式を理解する態度を促し，その理解を言葉で表現してもらう。

授業の流れ

まず，二項係数を表す公式を代入して問題にある式を確認する。その後，次の図を用いて，二項係数の意味を考えて，公式が成立することを解説する。その後に問題6を出題する。

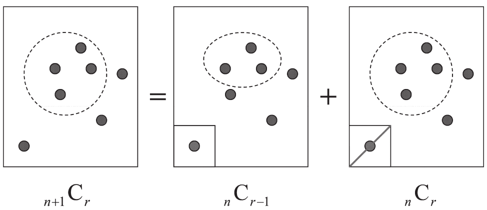


図８

問題の内容

二項係数${}_{n+1}\mathrm{C}_r$は$n+1$個の中からr個を取り出す場合の数である。これを特定の1個を取る場合と取らない場合に分けて数え上げると，公式の右辺が得られる。この解説を理解し，自分の言葉で説明できるかどうかを問う問題であり，数学的な解法を求めているわけではない。

集計項目と集計結果

集計するにあたって，以下の項目に該当する学生の集計を行った。

（1）正解者

授業で聞いた解説を自分の言葉で正しく書いている。

（2）言葉で説明しようとしない学生

図や式を書けても，なぜそうなるのかを自分の言葉で記述できていない。

（3）一般的な問題になると，原理を説明することができなくなる学生

具体的な数で計算して確かめ，一般的な数でも成り立つとしている。

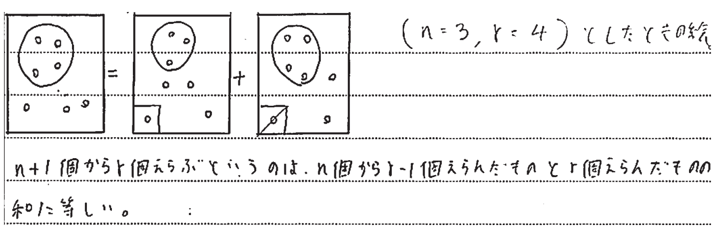
集計結果

	学生数	(1)	(2)	(3)
人数	113	41	41	31
割合（%）		36%	36%	27%

集計結果の考察

36%の学生が答案9のように授業で解説した図や式のみを答案に書いており，自分の考えを言葉で書こうとしていない。そもそも授業の解説を理解できていない可能性もある。計算という手段以外で数学を理解しようとしていないのかもしれない。

答案９



また，答案10のように具体的な数を計算して公式を確認し，それを一般的な数についても成り立つとしている者も少なくない。具体例だけで理解し，論証せずに一般的な事象を受け入れてしまうということなのかもしれない。

答案10

①②③
④⑤

この中から2コの玉を取り出す場合 10通りの取出し方がある。
また，①は必ず取出すとして他にもう1コ取り出す場合は 4通りある。
また，①以外の4コの中から2コ取り出す場合は6通りある
これらより 5コの中から2コ取り出すのは，①を固定してもう1コを取り出す場合と，①以外の中から2コ取出す場合の和と等しい
これらを式で表すと，
${}_5C_2 = {}_4C_1 + {}_4C_2$ と書け，どんな場合でも成り立つので
${}_{n+1}C_r = {}_nC_{r-1} + {}_nC_r$ と表せる。

評価

問題７． kを自然数，nをk以上の自然数とする。

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n$$

となる自然数の組$(x_1,\cdots,x_k)$は何通りあるか？ また，非負整数の組（$x_1,\cdots,x_k$）は何通りあるか？

出題意図

具体的な状況で原理を理解し，その原理を一般的な状況に適用する力があるかどうかを自覚してもらう。

授業の流れ

次の問題(1)，(2)，(3)を順に解説し，具体的な状況から一般化へと理解を促すようにしていく。

問題(1)　$x+y+z=10$ となる自然数の組（x,y,z）は何通りあるか？

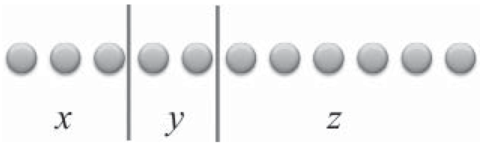


図９

この問題は10個のおはじきをx, y, zの３人に分配する場合の数を求めることと同じである。３人への分配方法は，横１列に並べた10個のおはじきの２か所に仕切りを入れることに対応するので，求める場合の数は9個の隙間の中から2つを選ぶ組合せの数と等しく，次のように計算できる。

$${}_9C_2 = \frac{9\times 8}{2\times 1} = 36$$

問題(2)　$x+y+z+w=50$ となる自然数の組（x, y, z, w）は何通りあるか？

これは50個のおはじきを４人に分配する場合の数を求める問題と解釈できる。実際に50個のおはじきを並べて考察することが難しいが，基本的に問題(1)と同じことを問うており，同じ考え方で解決できることが理解できるだろう。つまり，49個の隙間から3つを選ぶ組合せの数を求めればよい。したがって，答えは次のようになる。

$${}_{49}C_3 = \frac{49\times 48\times 47}{3\times 2\times 1} = 18{,}424$$

問題(3)　$x+y+z+w=50$となる非負整数の組（x, y, z,w）は何通りあるか？

この問題では，変数 x, y, z, w は0になってもよいので，問題(2) の考え方をそのまま適用することはできない。そこで，補助的に次の変数 x', y', z', w' を考える。

$$x' = x + 1,\quad y' = y + 1,$$
$$z' = z + 1,\quad w' = w + 1$$

この x', y', z', w' はすべて自然数で，その合計は54になるので，問題(2)と同じ考え方で，求める組合せの数が次式で求められることがわかる。

$$_{53}\mathrm{C}_3 = \frac{53 \times 52 \times 51}{3 \times 2 \times 1} = 23{,}426$$

どの問題も同じ原理に基づいて解決できていること，また次第に一般化されていることを確認した上で，問題7を出題する。

問題の内容

問題文には具体的な数は含まれていないが，問題(1)，(2)，(3)の解法の原理が理解できていれば，容易に解答可能である。n個のおはじきの隙間はn-1個であること，そこから選ぶのはk-1個であること，非負整数の場合には1を足した補助変数を考え，その合計が$n+k$であることが理解できれば，答えが順に次のように二項係数で表せることがわかる。

$$_{n-1}\mathrm{C}_{k-1},\qquad _{n+k-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

集計項目と集計結果

集計するにあたって，以下の項目に該当する学生の集計を行った。

（1）正解者

原理を正確に言葉で表して，正しい答えが得られている。

（2）一般的な問題になると，原理を説明することができなくなる学生

具体的な数で計算して確かめ，一般的な数でも成り立つとしている。

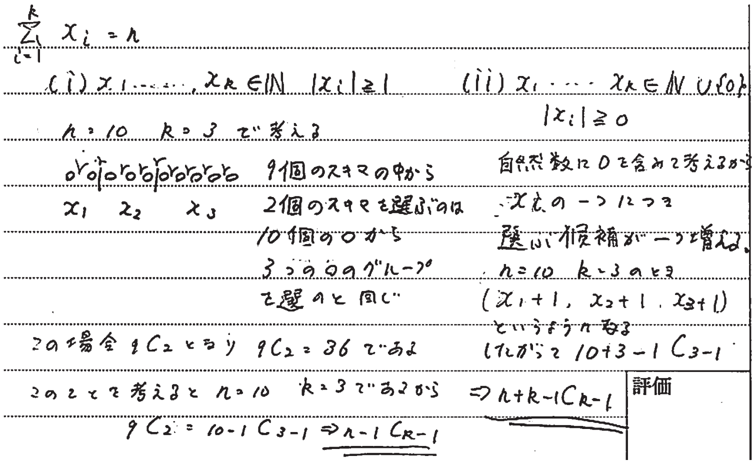
集計結果

	学生数	(1)	(2)
人数	113	36	64
割合(%)		32%	57%

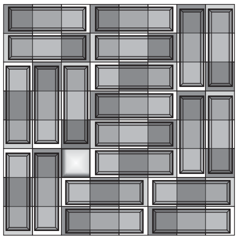
集計結果の考察

過半数以上の学生が答案11のように具体的な数で説明するだけで，一般的な状況での証明を書こうとしていない。問題が理解できないというよりも，一般的な解答を書こうとする態度がないか，一般的な状況を記述する力が足りないかだと思われる。

答案11


$\sum_{i=1}^{k} x_i = n$
(i) $x_1 \cdots\cdots, x_k \in \mathbb{N}$ $|x_i| \geq 1$
$n=10$ $k=3$ で考える
9個のスキマの中から
x_1 x_2 x_3
2個のスキマを選ぶのは
10個の○から
3つの○のグループ
を選ぶのと同じ
この場合 $_9C_2$ となり $_9C_2 = 36$ である
このことを考えると $n=10$ $k=3$ であるから
$_9C_2 = {}_{10-1}C_{3-1} \Rightarrow {}_{n-1}C_{k-1}$
(ii) $x_1 \cdots\cdots x_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$|x_i| \geq 0$
自然数に0を含みて考えるから
x_iの一つにつき
選ぶ候補が一つ増える。
$n=10$ $k=3$ のとき
$(x_1+1,\ x_2+1,\ x_3+1)$
というようになる
したがって $_{10+3-1}C_{3-1}$
$\Rightarrow {}_{n+k-1}C_{k-1}$
評価

問題８． どのマスを除くと，1×3のタイルで敷き詰められるでしょうか？



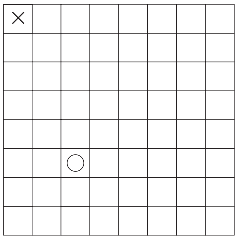


図10

出題意図

授業で習った手順どおりにしか考えず，問題ときちんと向き合おうとする態度が足りないことを自覚してもらう。

授業の流れ

まず，8×8 のマスをもつボードから向かい合う角の２マスを除いたものを1×2のタイルで隙間なく敷き詰めることを考え，マスを色分けすることでそれが不可能であることを簡潔に証明できることを解説する。

次に，問題８にある8×8のボードを1×3のタイルで敷き詰めることを考える。図10左のようにボードを３色（青，白，赤）で色分けすると，どのように1×3のタイルをボードの上に置いても，タイルが３色を覆うことを確認する。一方，青と白のマスは右上がりの対角線に関して対象に並んでいるので，同数であるが，赤はそれよりも１つ多いことを確認する。

この状況では，赤マスを１つ除かないと，敷き詰めは不可能であることがわかる。例えば，図右の〇の位置にある赤マスを除くと，図左のように敷き詰め可能であるが，×の位置にある青マスを除いたのでは敷き詰めは不可能である。この原理を説明した上で，問題８を出題する。

問題の内容

そこを除くことで，1×3のタイルを敷き詰められるマスには〇を，敷き詰められないマスに×を書くことが求められている。授業で解説したようにボードを色分けすると赤が１つ多くなるので，どこかの赤マスを１つ除く必要があるが，どの赤マスを除いてもうまく敷き詰めが可能なわけではない。なぜなら，ボードの対称性を考えて，色分けを回転させたり，反転させたりすることで，赤だったマスの色が他の色になることがあるからである。

実際，色分けの回転・反転をしても常に赤になるのは答案13（後述）に示されている４か所だけであり，その他のマスは×になる。しかし，このような考察をせずに単に赤マスだけに〇を書くものや，他のマスが×になることの理由を述べない解答が多数あると想定される。

集計項目と集計結果

集計するにあたって，以下の項目に該当する学生の集計を行った。

(1) 正解者

考え方を正確な言葉で表して，正しい答えを求めている。

(2) 習ったことでしか問題を考えない学生

ボードの対称性に気付かずに，任意の赤マスを除けばよいと主張している。

(3) 言葉で説明しようとしない学生

自分の考えや推論を書かずに，答えだけを書いている。

集計結果

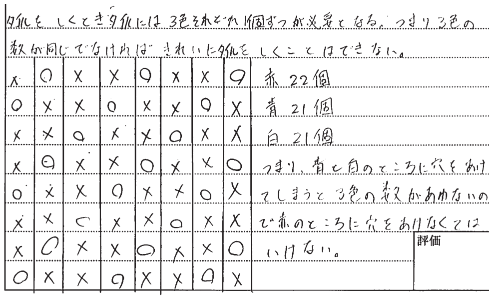
	学生数	(1)	(2)	(3)
人数	107	43	38	39
割合(%)		40%	36%	36%

集計結果の考察

〇×の配置もボードと同じ対称性を持つことは明らかなのに，36%の学生が答案12のように

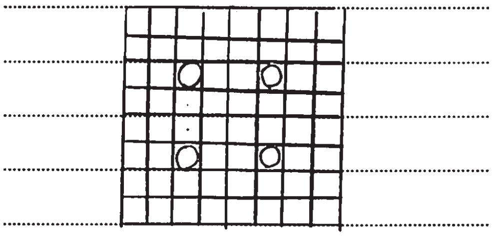
単に赤マスを○と主張している。そのような学生は習ったことをそのまま繰り返せるが，状況を正しく判断して独自の考察を加えるという態度が欠けていると思われる。

答案12



反対に，答案13のように正解には至っているが，自分の考えをきちんと述べるという態度のない者もほぼ同数いる。

答案13



問題9. 正六角形の頂点を3つ選んでできる三角形は，合同なものを除き，いくつあるか？

出題意図

習ったことに囚われてしまい，素朴に考えればわかる問題でさえ解けなくなってしまうことを自覚してもらう。

授業の流れ

正n角形の頂点を3つ選んで作れる三角形の個数は，合同なものを除くと，いくつあるかという問題を考える。$n \leqq 8$のときには$n-3$個になるが，一般にそうならないことを以下のように解説する。

まず，n個の頂点から3個選ぶ場合の数は${}_nC_3$であるが，それをすべて数えると，合同なものも数えてしまう。１つの三角形と合同になるのは，回転と裏返しによって得られる高々2n個である。したがって，求める三角形の個数は次式の値よりも大きくなる。

$$\frac{{}_nC_3}{2n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2\cdot1\cdot2n} = \frac{n^2-3n+2}{12}$$

しかし，３頂点を選んで作った三角形が正三角形や二等辺三角形になる場合には，2n個の重複があるわけではない。つまり，そのような三角形を作れる場合には，この値は本当の値よりも小さくなる。この式はnの２次式なので，nの値がある程度大きくなれば，$n-3$よりも大きくなり，一致することはない。一方，正しい答えは，nを３つの自然数の和で表す方法の数と一致する。

このように解説した後に，問題9を出題する。

問題の内容

正六角形の３頂点を選んで作ることのできる三角形は，下図に示した３種類しかないことは容易にわかる。しかし，上の説明を聞いた後では，具体的に考えることをせずに，公式を適用して解答しようとする者が現れることが予想される。

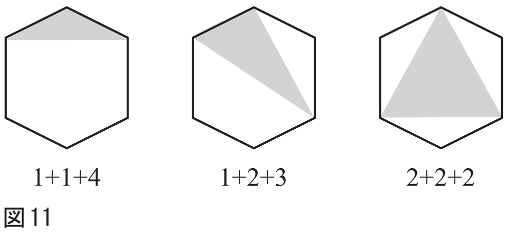


図11

集計項目と集計結果

集計するにあたって，以下の項目に該当する学生の集計を行った。

（1）正解者

具体的に数え上げることによって，正しい答えを求めている。

（2）習ったことでしか問題を解こうとしない学生

上の解説にある式を利用して答えを出そうとしている。

集計結果

	学生数	(1)	(2)
人数	71	62	13
割合(%)		87%	18%

集計結果の考察

さすがに小学生でも理解できる問題なので正解者は多いが，答案14のように解答する学生がいることは驚異的である。しかも，三角形の個数を求める問題にもかかわらず，分数のままで答えとしている。公式のようなものを示されると，それを使うことが正しい解法だと思い込み，素朴に考える態度を失っている。

答案14

$\frac{{}_nC_3}{2n}$ より $\frac{{}_6C_3}{2\times 6}=\frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}}{12}=\frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{12}_{3}}=\frac{5}{3}$

5．学生の数学観，数学教育観の変化について

上述のような課題を通して学生たちは自分の数学に対して取り組む姿勢を自覚することになる。しかし,「教科教育法Ⅰ（数学)」の目的は，自分の悲惨な状況を知るだけではなく，数学の教師としてあるべき姿に変容してもらうことである。そこで，その変容を自覚するために，授業の最終課題として，学生に授業を受ける前と後の数学観や数学教育観について自由に記述してもらっている。

その文章データから，KH Coder [4] というテキストマイニング用ソフトウェアを用いて，共起ネットワークを作成した。共起ネットワークとは，文書からその文書を特徴づける語の抽出を行い，特徴語どうしの共起関係を図で表したものである。色が濃く，丸が大きいほど，頻出の単語であることを意味している。

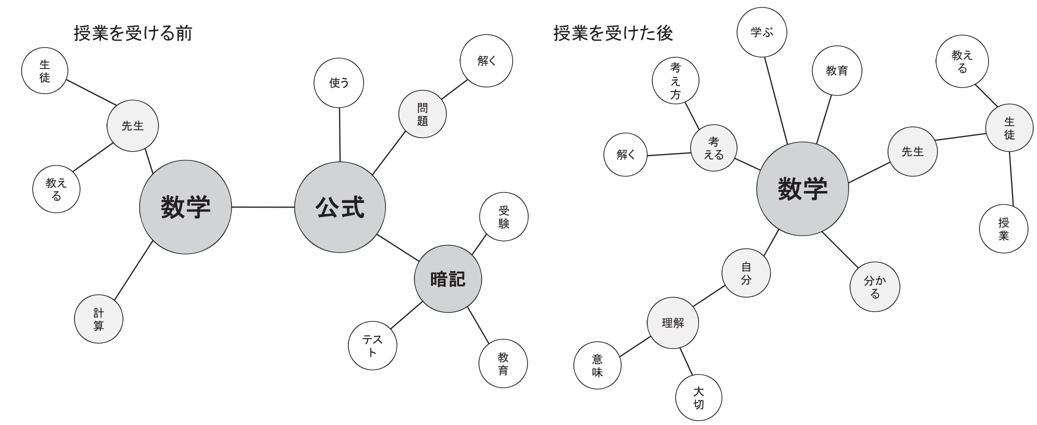


図12

授業を受ける前と後の図を比較すると，明らかに数学を取り巻く状況が変化している。つまり，授業を受ける前は数学では公式を暗記することが重要であると思っていたものが，授業を受けた後では自分で考え，理解することが重要であると思うようになっている。これは期待す

べき変容である。

6．まとめ

本研究の調査結果を見るかぎり，「はじめに」で述べたような学生の実態が明らかになっている。もちろん，調査対象は「教科教育法I(数学)」の受講生という限定的なものであり，日本全国の理工系大学生の実態だと一般化するだけの根拠を提供しているわけではない。また，本稿の表題にあるように，高校における数学教育の影響でこのような実態になっていると結論する根拠を与えるものでもない。

では，何の影響で，学生たちは，与えられた解法を鵜呑みにし，きちんと問題と向き合わず，自ら考えるという態度を失ってしまったのだろうか。小学生でもわかる問題が解決できなくなってしまうのはなぜだろうか。その原因を高校における数学教育の在り方以外のものに求めることは難しいと思う。

ちなみに，参考文献[1]と[2]では，公式の暗記や計算に執着した数学とは異なる数学について詳しく述べられており，新しい数学教育の有り様が示唆されている。

【参考文献】

1. 根上 生也，中本 敦浩 著『基礎数学力トレーニング —Nの数学プロジェクト』，日本評論社，2003年10月.
2. 根上 生也 著『計算しない数学—見えない“答え”が見えてくる!』，青春出版社，2007年3月1日.
3. 根上 生也 著『ピジョンの誘惑 論理力を鍛える70の扉』，日本評論社，2015年2月24日.
4. 樋口 耕一 作成，KH Coder, http://khc.sourceforge.net/