積分定数の意義とその指導法

髙橋　眞映

Abstract.　多くの教科書では不定積分の公式を掲げるが，紙面の都合の為か積分定数を省略する事が多い。これが為か学生達は積分定数について曖昧だったり，軽視する傾向にある。本論は具体的な例を挙げ，積分定数の意義と大切さ，その指導法について述べる。

1．始めに

区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が与えられたとき，$f(x)$ を導関数に持つような I 上の関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数と呼ぶ。この定義はどの教科書も一致しているようである。しかしながら原始関数をまた不定積分と呼ぶ教科書は実に多い。それ故多くの学生は積分定数について曖昧だったり，あるいは全く軽視する傾向がある。実際殆どの学生は，例えば

(1) $$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}, \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

などと書く。これが後で大きな問題となる事を例を挙げて説明し，積分定数の意義とその大切さ，指導法について述べる。

2．不定積分と積分定数

区間 I 上で定義された連続関数 $f(x)$ は必ず原始関数を持つ。実際 $a \in I$ を1つ選んでくると，任意の $x \in I$ に対して，f は閉区間 $[a, x]$（または $[x, a]$）上で一様連続であるから (Riemann) 積分可能である。それ故

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt \ (x \in I)$$

と定義すると，定積分の平均値の定理と f の連続性から $F_a'(x) = f(x) \ (x \in I)$ が導かれ，従って $F_a(x)$ は $f(x)$ の1つの原始関数となる。しかしながら $F(x)$ と $G(x)$ を $f(x)$ の任意の原始関数とすれば，

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \ (x \in I)$$

であるから，微分の平均値の定理より $F(x) - G(x)$ は定数関数となり，それ故 $f(x)$ の全ての原始関数からなる集合は

$$\{F_a(x)+C : C\in\mathbf{R}\}$$

となる。ここに$\mathbf{R}$は実数全体の集合を表す。これを

$$\int f(x)dx$$

で表示し，$f(x)$の不定積分と呼ぶ。従って上の議論から，$F(x)$を$f(x)$の任意の原始関数とすると，

$$\int f(x)dx=\{F(x)+C : C\in\mathbf{R}\}$$

が成り立つ。しかし不定積分に属する関数達は定数の差だけなので，これを関数のように扱う目的で，

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

と書き，Cを$f(x)$の積分定数と呼ぶ。従って不定積分は集合と関数の2つの顔を持つ事になる。丁度$f(x)$がxを変数とする関数fと，点xでの関数fの値の2つの顔を持っているように。また微分方程式の立場から見ると，不定積分$\int f(x)dx$は微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

の解集合と一般解としての2つの顔を持っている事になる。しかし不定積分は殆どの場合積分定数を持つ関数として扱われ，その様な関数を求める事を$f(x)$を積分すると言う。これは少し難しい概念を使うと，微分作用素d/dxの核に関する剰余類と見るのである。それ故積分定数の大切さが分かろう。

次の節で積分定数の大切さの具体例を述べる。その前に積分定数は以下に述べる様に議論を展開する上でも重要である。実際$F(x)$を$f(x)$の任意の原始関数とすると，上の議論から

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$$

と書けるが，特に$x=a$として，$C=F(a)$を得る。従って

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\ (\forall a,b\in I)$$

が導かれる。これが所謂微積分学の基本定理である。

3．積分定数の大切さ

学生達に「関数$\sin^3 x\cos^3 x$を積分せよ」と言う問題を出した。殆どの学生はこれを (1) 式の様な考え方で次の様に解いた。$t=\sin x$とおいて，置換積分して，

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^3 x dx &= \int \sin^3 x(1-\sin^2 x)\cos x dx\\ &= \int t^3(1-t^2)dt=\frac{t^4}{4}-\frac{t^6}{6}\\ &= \frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6}.\end{aligned}$$

そこで僕は「$t=\cos x$ とおいて，置換積分するとどうなるか」と問うと，学生達は

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\cos^3 x dx &= \int \cos^3 x(1-\cos^2 x)\sin x dx\\ &= -\int t^3(1-t^2)dt = -\frac{t^4}{4}+\frac{t^6}{6}\\ &= -\frac{\cos^4 x}{4}+\frac{\cos^6 x}{6}\end{aligned}$$

と解いた。学生達に「それでは

(2) $$\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6} = -\frac{\cos^4 x}{4}+\frac{\cos^6 x}{6}\ (x\in\mathbf{R})$$

が成り立つことになるね」と聞くと，明らかに(2)式は成り立たないので，学生達は困惑した。そこで僕は2節で述べた不定積分と積分定数の意味を説明し，「これは(2)が成り立つのではなく，ある定数Cが存在して

(3) $$\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6} = -\frac{\cos^4 x}{4}+\frac{\cos^6 x}{6}+C\ (x\in\mathbf{R})$$

が成り立つと主張しているのだよ」と説いた。従って$x=0$を代入すると，$C=\frac{1}{12}$を得るので，(3)式は通分し整理すると，

(4) $$3(\cos^4 x+\sin^4 x)-2(\cos^6 x+\sin^6 x)=1\ (x\in\mathbf{R})$$

となる。これは余り見た事のない恒等式であり，もしこれが成り立たなければ，ニュートン・ライプニッツの微積分学は理論的に破綻を来す訳であるが，勿論そう言う事はない。これはピタゴラスの定理：$\cos^2 x+\sin^2 x=1$から次の様にして導かれる。実際$A=\cos x$且つ$B=\sin x$とおけば，

$$A^4+B^4=(A^2+B^2)^2-2A^2B^2=1-2A^2B^2$$

且つ

$$A^6+B^6=(A^2+B^2)^3-3A^2B^2(A^2+B^2)=1-3A^2B^2$$

が成り立つので，

$$3(\cos^4 x+\sin^4 x)-2(\cos^6 x+\sin^6 x)=3(A^4+B^4)-2(A^6+B^6)=3-2=1$$

となり，(4)式は正しいのである。

それにしてもピタゴラスの定理の偉大さを思い知る。ピタゴラスの定理に関する詳細は[1]を参照されたい。

4．積分定数の指導法

関数$f(x)$の導関数$f'(x)$を求める事を「$f(x)$を微分する」と言う。逆に$f(x)$の原始関数を求める事を「$f(x)$を積分する」と言う（2節参照）。従って微分と積分は互いに逆作用の関係にある。しかしこの2つには大きな違いがある。それは導関数は一意に定まるのに対し，原始関数は一意に

定まらないからである。そこに不定積分（indefinite　integral）の語源があるように思われる。そこで2節で述べたように，「原始関数は沢山あるが，その違いは定数の差だけである」と言う数学的事実を学生達に十分認識させる事である。そのために次のような例題を沢山出した方が良い：

例題。関数 $y = x^2$ を積分せよ。また関数 x^2 の原始関数で点 (0,1) を通る関数を求めよ。
また関数 $y = x^2$ の原始関数で点 (1,1) を通る関数を求めよ。

更に3節で述べたような問題を学生達に解かせ，積分定数の意義と大切さを十分認識させる事が肝要である。

References

[1]　髙橋眞映，ピタゴラスの定理から啓発されるものの見方考え方，神奈川大学心理・教育研究論文集　31(2012)，127-129.